

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Mathematische Modellierung sportwissenschaftlicher Problemstellungen für einen projektorientierten fächerübergreifenden Unterricht Mathematik und Sportwissenschaften

Ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

Unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Dr. Manfred Kronfellner

durch
Thomas Kröpfl

Marktfeldstraße 44
7423 Pinkafeld

02. Mai 2012

Vorwort

Mit den vorliegenden Projektaufgaben und Arbeitsblättern hoffe ich engagierten LehrerInnen eine Anregung für ihren anwendungsorientierten Mathematikunterricht geben zu können.

Diese Diplomarbeit soll dazu beitragen, dass Mathematik auch im täglichen Leben wahrgenommen wird und nicht nur ausschließlich in der Schule durch den Unterricht.

Denn: *Mathematik prägt unser Leben, oft ohne, dass wir es wissen.*¹

Ich möchte mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Ao. Univ. Prof. Dr. Manfred Kronfellner für diverse Anregungen und hilfreiche Tipps bedanken.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglichten und mir während des Studiums stets mit Rat und Tat zur Seite standen.

¹ Ludwig 2008, S. 5

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
1. Mathematik und Sport.....	4
2. Projektorientierter und fächerübergreifender Unterricht	7
3. Lehrplanbezug.....	9
4. Praxisbeispiele aus dem Sport.....	14
4.1 BASKETBALL: Mathematik des Freiwurfs.....	14
4.2 KÖRPER: Mathematik hinter sportlichen Bewegungen	31
4.2.1 Arbeitsblatt 1-1: Muskelkraft und Geschwindigkeit.....	32
4.2.2 Arbeitsblatt 1-2: Hill'sche Gleichung.....	33
4.2.3 Arbeitsblatt 1-3: Muskelleistung.....	36
4.2.4 Arbeitsblatt 1-4: Muskelansteuerung	37
4.2.5 Arbeitsblatt 2-1: Bestimmung der eigenen Sprungkraft.....	39
4.2.6 Arbeitsblatt 2-2: Sprunganalyse mit Hilfe von Kraftmessplatten	40
4.2.7 Arbeitsblatt 2-3: Belastung der Achillessehne	42
4.2.8 Arbeitsblatt 2-4: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 1)	43
4.2.9 Arbeitsblatt 2-5: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 2)	45
4.2.10 Arbeitsblatt 3-1: Sprung auf dem Mond.....	47
4.2.11 Arbeitsblatt 3-2: Mondlandung der Apollo 16	49
4.3 FUSSBALL: Mathematik und Bananenflanken	51
4.4 LEICHTATHLETIK: Mathematik des Kugelstoßens.....	67
4.5 BODENTURNEN: Mathematik des Flick-Flack.....	68
5. Schlusswort.....	78
6. Anhang: Arbeitsblätter aus Kapitel 4.2 im Kopierformat.....	79
Abbildungsverzeichnis	94
Tabellenverzeichnis	95
Literaturverzeichnis	96

1. Mathematik und Sport

Diese Kombination erzeugt bei vielen oft nur ein Achselzucken. Es scheint, als wären diese beiden Begriffe weit voneinander entfernt. Aber so sieht es nur auf den ersten Blick aus.

In den letzten Jahrzehnten vollzogen sich einschneidende Veränderungen der Lebensbedingungen des Menschen. Die ständig wachsende Informationsfülle erhöhte die psychologische Belastung in der Sphäre des Arbeitsprozesses und im Unterricht in der Schule. Dies erfordert vom Menschen eine bestimmte physische und psychische Stabilität.

Es ist unbestritten, dass sich die Beschäftigung mit dem Sport wohltuend auf die geistige Tätigkeit und Psyche des Menschen auswirkt.²

Hirnforscher sind davon überzeugt, dass das Gehirn von sportlicher Aktivität profitiert. Wer sich bewegt, versorgt das Gehirn mit mehr Blut und somit auch mit mehr Sauerstoff.³

Lernforscher halten dagegen, dass es keinen beweisbaren Zusammenhang zwischen Sport und gesteigerten Denkleistungen gibt.⁴

Aggressionen, Stress und Blockaden lassen sich mit Sport abbauen – so gesehen ist sportliche Betätigung mit Sicherheit auch für das Lernen hilfreich.⁵

Sepp Herberger⁶, legendärer Trainer der deutschen Weltmeistermannschaft von 1954, brachte Fußball auf eine einfache Formel: „Der Ball ist rund und das Spiel dauert 90 Minuten“.⁷

Bei genauerem Hinsehen stellt man jedoch fest: Er irrte! Der Ball ist gar nicht rund. Bei einem Spielgerät aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken handelt es sich vielmehr um ein abgestumpftes Ikosaeder. Dieses Beispiel aus der Geometrie zeigt: Es lohnt sich, Sport aus dem Blickwinkel der Mathematik genau zu betrachten.⁸

Mit Beispielen aus dem Sport lässt sich Mathematik für Schüler spannend aufbereiten. Ob Weltrekorde prognostizieren oder optimale Wurf- und Schusspositionen ermitteln – in der Welt des Sports lässt sich vieles mit Hilfe der Mathematik beschreiben, analysieren und berechnen.⁹

Anhänger komplexer Spiele wissen, dass im Sport und in sportlichen Spielen Verstand, Bildung und Rechenvermögen bei weitem keine überflüssigen Dinge sind.

² vgl. Internetquellen: Walk 2011, S. 27ff.

³ Jacobs 2008, S. 12

⁴ vgl. Jacobs 2008, S. 12

⁵ Jacobs 2008, S. 12

⁶ vgl. Wikipedia-Artikel: Sepp Herberger

⁷ Dorn 1984, S. 62ff.

⁸ vgl. Gerecke 1984, S. 58ff.

⁹ vgl. Internetquellen: CASIO Europe

Ein guter Tennisspieler muss über eine vielfältige und ausgefeilte Schlagtechnik verfügen. Dies allein aber genügt nicht. Steht er am Tennisplatz einem Gegner gegenüber, entscheiden Taktik, Findigkeit, Berechnung und Voraussicht das Spiel. Ähnliche Überlegungen lassen sich auch bezüglich anderer Sportspiele anstellen.

Der Sport wird immer intellektueller und damit auch die Anwendung mathematischer Methoden. Es ist bekannt, dass man mit Methoden der mathematischen Statistik die Zukunftsaussichten der SportlerInnen bestimmen, die Messdaten bearbeiten und auch die Belastbarkeit der SportlerInnen kontrollieren kann.

Diese Diplomarbeit erstreckt sich über mehrere mathematische Teilgebiete und schlägt eine Brücke zwischen den Fächern Sport und Mathematik, wobei auch Stoffbereiche der Physik gestreift werden. Der mathematische Weg zur Lösung bietet, ebenso wie der sportwissenschaftliche Hintergrund, eine optimale Gelegenheit, sich an Hand von realistischen Problemen aus dem Schüleralltag mit wissenschaftlich forschender Methodik und Denkweise auseinander zu setzen.

In den folgenden Kapiteln sind Beispiele angeführt, die für den Unterricht geeignet sind. Einige davon verlangen von der Lehrperson ein fundiertes Sportwissen, um den SchülerInnen einzelne Aufgaben verständlich zu machen und diese plausibel zu erklären. Neben dem Kennenlernen mathematischer und sportlicher Inhalte werden auch höhere Lernziele verfolgt. Die Entwicklung von Kreativität und Individualität bzw. die Fähigkeit, eigenständig Probleme zu lösen, bilden eine Einheit mit kritischem Denken und folgerichtigem Handeln. Durch den Einsatz von projektorientierten Aufgaben werden auch Fähigkeiten wie Kooperation, Selbstorganisation und Verantwortung gefördert.

Die gesellschaftliche Veränderung hat auch einen Wandel in der Lernkultur bewirkt. Heute macht es nicht mehr viel Sinn, die Jugend lediglich mit Wissen voll zu stopfen, Persönlichkeitsbildung muss vermehrt in den Vordergrund rücken. Die Rolle der Lehrperson ist einerseits die eines Wissensvermittlers, andererseits eines Organisators, der es versteht, helfend einzugreifen, wenn nötig.

Im ersten Kapitel werden allgemeine Gedanken zum projektorientierten und fächerübergreifenden Unterricht geäußert. Es werden Kompetenzen aufgezeigt, die durch diese Unterrichtsform im besonderen Maße gefördert werden.

Danach wird Bezug zum Lehrplan genommen, in dem fächerübergreifendes und projektorientiertes Arbeiten an mehreren Textstellen verankert ist.

In dem Kapitel „Praxisbeispiele aus dem Sport“ werden zunächst Überlegungen bzgl. des optimalen Freiwurfs im Basketball angestellt.

Im Anschluss werden sportwissenschaftliche Aspekte über den menschlichen Körper und die mathematische Betrachtung sportlicher Bewegungen beleuchtet.

Beispiele aus dem Fußball, der Leichtathletik und dem Bodenturnen bilden den Abschluss dieser Arbeit.

Die Projektbeispiele unterscheiden sich in ihrem Aufbau und Umfang. Nähert man sich z.B. im ersten Praxisbeispiel mit mehreren Arbeitsaufträgen der Endlösung, so wird man im zweiten Kapitel mit verschiedenen Problemstellungen aus der Sportbiomechanik konfrontiert. Diese Aufgaben werden in Arbeitsblättern verpackt und den SchülerInnen ausgehändigt. Teilweise werden in allen Praxisbeispielen ähnliche mathematische Stoffinhalte behandelt, die aber jeweils in einem anderen Kontext gedeutet werden. Die Beispiele können im Unterricht grundsätzlich in unterschiedlicher Reihenfolge bearbeitet werden.

In der Literatur werden von den Autoren zur Lösung der nachfolgenden Problemstellungen jeweils verschiedene Technologien genutzt. Um einen groben Überblick über die für den Mathematikunterricht zu Verfügung stehenden Technologien zu erhalten, werden in dieser Diplomarbeit zur Bewältigung der einzelnen Aufgaben verschiedene Technologien verwendet. Natürlich kann man sich auch auf eine spezielle computerunterstützte Lösungsmöglichkeit festlegen.

2. Projektorientierter und fächerübergreifender Unterricht

Die Bedeutung des Projektunterrichts als Methode wird ausdrücklich im Lehrplan betont. Es ist die Chance, ein umfangreicheres Thema zu behandeln, fächerübergreifend zu arbeiten und Kompetenzen wie z.B.: Kooperation und Eigenverantwortlichkeit der SchülerInnen zu entwickeln.

Im traditionellen Unterricht werden Zielsetzung, Planung, Durchführung und Erfolgskontrolle durch den/die LehrerIn im Rahmen vorgegebener Strukturen, wie Lehrplan oder Stundenplan, durchgeführt. Lehrpersonen, die Unterricht in Form kognitiv dominierter Lehrgänge abhalten, beklagen sich häufig über die Unkonzentriertheit und fehlende Ausdauer der Kinder. Dem kann der Projektunterricht vielfach entgegenwirken.¹⁰

Im Regelfall werden durch Übereinkunft von LehrerInnen und SchülerInnen die vorhandenen Strukturen (Stundenplan, Stundeneinheit, Raum, Klassenverband, usw.) teilweise aufgelöst und in neue übergeführt. Diese Unterrichtsform fördert durch die Verbindung von theoretisch-begrifflichem Lernen und Lernen durch konkretes Handeln und Experimentieren im besonderen Maße jene Kompetenzen, die heute als Schlüsselqualifikationen angesehen werden:

Teamfähigkeit, Eigenverantwortlichkeit, Kommunikation und praktische Fertigkeiten.¹¹

Grundsätzlich geht es also um elementare Bildungsinhalte, von denen ausgehend sich komplexere Einsichten herleiten lassen.

Auf den Begriff „Spezialisierung auf Zusammenhänge“ wird in der Literatur mehrmals eingegangen.¹² SchülerInnen dürfen nicht nur Experten für das Fachliche, für das Teilhafte, sein, sondern Schule müsse ebenfalls zur Spezialisierung auf Zusammenhänge qualifizieren. Eine fächerübergreifende Didaktik müsse unter anderen die Merkmale Problem- und Handlungsorientierung, Verantwortlichkeit, Lebensweltbezug, Mitbestimmung, Vernetzung und Perspektivität aufweisen.¹³

„Bildung muss sich als Prozess verstehen, in dem die Gesamtpersönlichkeit des Schülers entwickelt werden soll. Das Einzelunterrichtsfach bietet nicht genügend geeignete Ansatzpunkte, deshalb ist die Vernetzung mehrere Unterrichtsfächer von Vorteil.“¹⁴

Für das Gelingen eines fächerübergreifenden Projektunterrichts ist eine präzise Vorbereitung und das Einschätzen der Rahmenbedingungen eine wesentliche Voraussetzung. Inhalte und Thema sind zu diskutieren, Projekt-, Lernziele zu definieren, sowie das Endergebnis und die Form festzulegen.¹⁵

¹⁰ vgl. Flitner 1987, S. 29ff.

¹¹ vgl. Flitner 1987, S. 29ff.

¹² vgl. Popp 1997, S. 147ff.

¹³ vgl. Popp 1997, S. 149f.

¹⁴ vgl. Flitner 1987, S. 73

¹⁵ vgl. Internetquellen: Dörner

Wichtige Bereiche müssen in einer Arbeitsübereinkunft aller Beteiligten besprochen werden:

- Wann werden auftretende Probleme diskutiert?
- Wer trifft wie, welche, Entscheidungen?
- Welche Kriterien der SchülerInnenbeurteilung werden herangezogen?
- Wie wird die Verbindlichkeit der Arbeitsübereinkunft bestätigt?
- In welcher Form werden die Arbeitsabläufe festgelegt?
- Wer sind die Verantwortlichen für die Gruppen, Dokumentation der Arbeitsvorgänge usw.?

Des Weiteren muss der Bereich der Kommunikation innerhalb und außerhalb der Gruppe durchdacht und organisiert werden:¹⁶

- Erstellen und Austausch von Projektstagebüchern
- z.B.: Mittels einer Pinnwand kann die Zusammenarbeit zwischen den Gruppen im Unterricht sichergestellt werden
- Welche Informationen muss die Direktion bekommen? (z.B.: bzgl. Administration-Abweichung vom Stundenplan usw.)
- Inwieweit werden die Eltern mit einbezogen (Elternabend)
- Öffentlichkeitsarbeit (Plakate, Zeitungsartikel, usw.)

Der Projektunterricht ist durch einen klar erkennbaren Abschluss charakterisiert. Dadurch ist die Gelegenheit gegeben, die Arbeitsergebnisse einer breiteren Öffentlichkeit zu präsentieren. Außerdem muss den SchülerInnen Feedback gegeben werden.

Die LehrerInnen haben im Rahmen eines Projektunterrichts die Rolle von LernberaterInnen zu erfüllen. Neben der Einbringung ihres fachlichen Wissens sollen sie die SchülerInnen vorrangig bei Planungs- und Entscheidungsprozessen unterstützen. In Reflexionsphasen sollen die Lehrpersonen den SchülerInnen mit Hilfestellungen zur Seite stehen.¹⁷

Eine große Rolle dieser Unterrichtsform kommt auch im Bereich der Verbindung von Schule und außerschulischen Institutionen vor. Darauf näher einzugehen würde allerdings den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Tatsache ist, dass sich unser Schulsystem in diesem Arbeitsbereich noch entscheidend weiterentwickeln muss, um den Ansprüchen der Gesellschaft, Wirtschaft und Politik zu genügen.

¹⁶ vgl. Internetquellen: Dörner

¹⁷ vgl. Lang 2009, S. 578

3. Lehrplanbezug

In den **Leitvorstellungen** der **Allgemeinen Bildungsziele** werden erste Gedanken zur Förderung eines fächerübergreifenden und fächerverbindenden Unterrichts geäußert. Explizit wird gesagt, dass den SchülerInnen durch die Vernetzung und Ergänzung einzelner fachspezifischen Aspekte der einzelnen Unterrichtsgegenstände geholfen wird, sich den Herausforderungen des täglichen Lebens zu stellen.¹⁸

„Die einzelnen Unterrichtsgegenstände haben im integrativen Zusammenwirken – z.B.: im Sinne des Projektunterrichts – ihren themenspezifischen Beitrag zu leisten. [...] Die Organisation kann über längere Zeiträume, sowie über klassen- und schulstufenübergreifend erfolgen“.¹⁹

Die Kapitel Mathematik des Freiwurfs (vgl. Kapitel 4.1) und Mathematik des Kugelstoßens (vgl. Kapitel 4.4) eignen sich optimal für einen fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Bewegung und Sport. Hier können mathematische Ergebnisse bzgl. des optimalen Abwurfwinkels beim Freiwurf oder beim Kugelstoßen im Sportunterricht mittels Videoanalyse überprüft werden. Die Auswertung eines Freiwurf-Videoclips kann z.B. mit der Bewegungsanalysesoftware Kinovea²⁰ erfolgen. Es lässt sich mit diesem Freeware-Programm nach geeigneter Kalibrierung mit einfachen Werkzeugen nicht nur der Abwurfwinkel, sondern auch der zurückgelegte Weg des Balles und die momentane Ballgeschwindigkeit ermitteln. Zudem können auch mehrere Videoaufzeichnungen nach zeitlichem Abgleich simultan abspielt und miteinander verglichen werden. Die einzelnen Messdaten lassen sich des Weiteren in Excel exportieren.

Ein Projekt kann z.B. über mehrere aufeinander folgende Jahre oder gemeinsam mit Parallelklassen durchgeführt werden.

Im Mathematik-Lehrplan²¹ für die 5. Klasse stellen u.a. das Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, sowie das Beschreiben und Untersuchen von funktionalen Abhängigkeiten im anwendungsorientierten Kontext wesentliche Unterrichtsschwerpunkte dar. Die mathematische Erforschung der Hill'schen Gleichung in Kapitel 4.2 kann in diesem Zusammenhang als wertvolles Beispiel angegeben werden. In der 6. Klasse werden u.a. reelle Funktionen hinsichtlich ihrer Eigenschaften (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, usw.) untersucht. Im Zuge dieses Stoffkapitels kann die Hill'sche Kurve noch einmal aufgegriffen werden. Durch das Kennenlernen des Differentialquotienten, ausgehend vom Differenzenquotienten in der 7. Klasse können u.a. Extremstellen durch Monotonieüberlegungen und Wendestellen durch Überlegungen bzgl. des Krümmungsverhaltens berechnet werden. Die Ermittlung der maximalen Muskelleistung kann hier als sinnvolle Aufgabe erwähnt werden. Einfache Differentialgleichungen werden u.a. in der 8. Klasse gelöst. Das Beispiel

¹⁸ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 2

¹⁹ Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 11

²⁰ vgl. Internetquellen: *Kinovea*

²¹ vgl. Internetquellen: *bm:uk: Lehrplan Mathematik*, S. 3ff.

über den Muskelaktivierungsvorgang in Kapitel 4.2 lässt sich in dieses Stoffkapitel sehr gut einfügen.

In der Didaktik wird dieser Vorgang des Lernens auch als „**Lernen in Phasen**“ bezeichnet. Begriffe, Definitionen und Formeln werden zunächst in der ersten Phase auf einer intuitiven und anschaulichen Ebene behandelt und an einfachen Anwendungen erprobt. In einer späteren Phase werden diese einführenden Begriffe und Beispiele noch einmal aufgegriffen und vertieft, ergänzt oder exaktifiziert.²²

In den **Aufgabenbereichen der Schule** steht unter dem Aspekt **Kompetenzen** folgendes geschrieben:

„Die Aufgabe des Lernens in der Schule ist die Entwicklung von Fähigkeiten wie u.a. Verantwortung übernehmen, mit anderen kooperieren, Initiative ergreifen und der Gestaltung des sozialen Lebens innerhalb und außerhalb der Schule mitzuwirken.“²³

In den nachfolgenden Projektbeispielen müssen die SchülerInnen zu einem großen Teil selbstständig Lösungswege finden. Dabei erhalten sie die Möglichkeit, ihren Lernprozess selbst zu steuern und bekommen daher auch eine Rückmeldung über ihren Lernerfolg. Abrufbares Wissen bzw. erworbene Erfahrungen reichen dabei für die Lösungsfindung nicht immer aus. Die Infokästen sollen den SchülerInnen mit ihren Beschreibungen und Erläuterungen zu sportwissenschaftlichen und physikalischen Begriffen und Vorgängen helfen, Aufgabenteile zu verstehen und den Realitätssinn und Zweck solcher zu erkennen.

Bei mehreren Aufgaben wechselt die Sozialform von der Einzelarbeit zur Partner- und Gruppenarbeit. Auf die Unterrichtsform „kooperatives Lernen“ wird auch im **Bildungsbereich Sprache und Kommunikation** näher eingegangen. Ausdrucks-, Denk-, Kommunikations- und Handlungsfähigkeiten sollen unter vielfältigen Zugängen in hohem Maße erweitert werden.²⁴

Neu gewonnenes theoretisches Wissen soll nicht nur in der Schule mit den MitschülerInnen reflektiert werden, sondern soll auch „nach außen“ getragen werden. Außerhalb der Schule sollen die erworbenen Erkenntnisse im sozialen Austausch und Umgang mit anderen überprüft und angewendet werden.

Im **Bildungsbereich Natur und Technik** wird als Grundlage für die Orientierung in der modern geprägten Gesellschaft das Verständnis für Problemstellungen aus den Bereichen Mathematik, Naturwissenschaften und Technik angesehen.²⁵

²² vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan Mathematik*, S. 2

²³ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 2f.

²⁴ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 3

²⁵ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 4

„Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen“.²⁶

Formalisierung, Modellbildung und Abstraktionsvermögen stellen hier wichtige Voraussetzungen dar, um realitätsbezogene Probleme lösen bzw. analysieren zu können.

Bei der Suche nach dem optimalen Freiwurf im Basketball im Kapitel 4.1 findet zunächst der Abstraktionsprozess statt. Hier wird durch das Weglassen von Einzelheiten bzw. Aufstellen von Modellannahmen (z.B.: Der Ball muss direkt, ohne jegliche Korbberührung durch den Ring fallen) das reale Problem zu einem mathematischen Modell transferiert. Dieses abstrahierte Modell muss präzise formuliert sein, bevor mit der wissenschaftlichen Untersuchung begonnen werden kann. Auch reale Phänomene wie z.B. eine Bananenflanke beim Fußball (vgl. Kapitel 4.3) lassen sich mit mathematischen und physikalischen Methoden analysieren und verstehen.

Im Lehrplan für das Fach Mathematik findet man unter dem **Bildungsbereich Gesundheit und Bewegung** ebenfalls Querverbindungen zu dieser Arbeit. Die Bearbeitung von mathematisch beschreibbaren Vorgängen aus dem Gesundheitswesen oder Sport sollen den Mathematikunterricht bereichern.²⁷ Die SchülerInnen sollen dabei die Vielfältigkeit der Mathematik erkennen.

Besonderer Bezug besteht in dieser Diplomarbeit zu dem unter den allgemeinen didaktischen Grundsätzen angeführten Aspekt **Herstellen von Bezügen zu Lebenswelt**.

Durch die Bearbeitung von zeit- und lebensnahen Themen im Unterricht können die SchülerInnen Einsichten und Kenntnisse gewinnen, die sich eigenständig auf strukturverwandte Probleme übertragen lassen.²⁸ In den **didaktischen Grundsätzen** für das Fach Mathematik steht geschrieben, dass anwendungsorientierte Themen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen verdeutlichen und dazu motivieren, sich neues Wissen und neue Fähigkeiten anzueignen.²⁹

Zum Beispiel lässt sich mit Hilfe einfacher mechanischer und physikalischer Gesetzmäßigkeiten die Belastung an der Achillessehne bei einem Einbeinstand feststellen (vgl. Kapitel 4.2). Die SchülerInnen können mit diesem Wissen Belastungsanalysen an weiteren Gelenkspunkten (z.B.: Ellbogen, Knie, usw.) durchführen. Mit zusätzlichem Input kann u.a. die tatsächlich auf SportlerInnen einwirkende Kraft beim Gerätetraining im Fitnessstudio berechnet werden.

²⁶ Internetquellen: bm:uk: Lehrplan Mathematik, S. 2

²⁷ vgl. Internetquellen: bm:uk: Lehrplan Mathematik, S. 2

²⁸ vgl. Internetquellen: bm:uk: Lehrplan: Allgemeiner Teil, S. 7

²⁹ vgl. Internetquellen: bm:uk: Lehrplan Mathematik, S. 2

Im Unterricht sollen Aufgaben bzw. Projekte mit Mitteln der Informationstechnologie bereichert werden.³⁰ Auf die Unverzichtbarkeit von mathematiknahen Technologien wie Computeralgebra-Systeme oder dynamische Geometrie-Software wird auch in den **didaktischen Grundsätzen** für das Fach Mathematik hingewiesen.³¹

In dieser Arbeit werden verschiedene Technologien vorgestellt und zur Lösung von Aufgaben verwendet. Die Darstellung und Interpretation von Diagrammen und Tabellen stellen dabei sehr wichtige Lehrziele dar. So müssen im Kapitel 4.1 zunächst aus selbst erstellten Graphiken und Tabellen Einsichten gewonnen werden, bevor mit der Bearbeitung der nächsten Aufgabe fortgesetzt werden kann.

Im Punkt **Sicherung des Unterrichtsertrages und Rückmeldungen; Leistungsbeurteilungen** wird auf den Einsatz von produktorientierten Arbeitsformen mit dokumentierender Komponente, wie z.B. Projektarbeiten unter Verwendung des Computers eingegangen.³² Die Entwicklung der Selbst- und Sachkompetenz steht hier im Vordergrund.

Die Arbeitsblätter aus Kapitel 4.2 können z.B. zu einer Portfolio-Arbeit zusammengefasst und vor einzelnen Gruppen oder der gesamten Klasse präsentiert werden.

In dieser Arbeit werden unterschiedliche Themen aus dem Bereich der Sportwissenschaften behandelt. Diese Inhalte werden im Kernbereich der beiden Pflichtfächer Bewegung und Sport und Mathematik wohl kaum Berücksichtigung finden. Im Erweiterungsbereich kann die Lehrperson eine individuelle Lehrstoffauswahl vornehmen. Die Interessen und Begabungen der SchülerInnen sollen in dieser Entscheidung miteinbezogen werden. Sportwissenschaftliche Themen können dann in diesem zeitlichen Rahmen ausführlicher und vertiefend behandelt werden.

In einem Realgymnasium besteht aber auch die Möglichkeit, ein vertiefendes Wahlpflichtfach oder eine unverbindliche Übung „Mathematik und Sport“ zur allgemeinen Interessens- und Begabungsförderung anzubieten, sofern es die finanziellen Möglichkeiten der Schule erlauben.

Die SchülerInnen haben in diesem Unterricht die Gelegenheit, ihre persönlichen Interessen und individuellen Begabungen zu entdecken und ihre Fähigkeiten, Fertigkeiten sowie Kenntnisse in besonderer Weise zu entwickeln, zu entfalten, zu erweitern und zu vertiefen. Forschendes und angewandtes Lernen soll in diesem Gegenstand im Vordergrund stehen.³³

³⁰ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 7

³¹ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan Mathematik*, S. 3

³² vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan: Allgemeiner Teil*, S. 8

³³ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan Freigegenstand*, S. 1

Im Lehrplan eines Realgymnasiums mit besonderer Berücksichtigung der sportlichen Ausbildung ist im Gegensatz zu einem herkömmlichen Realgymnasium (ohne Sonderform) der Pflichtgegenstand „Sportkunde“ verankert. Das Wochenstundenausmaß des Faches Sportkunde beträgt in der 5. und 6. Klasse eine Stunde und in der 7. und 8. Klasse zwei Stunden. In einem herkömmlichen Realgymnasium kann das Fach Sportkunde jedoch auch als Wahlpflichtgegenstand angeboten werden.

In diesem Fach erwerben die SchülerInnen u.a. sportwissenschaftliche Kenntnisse in grundlegender und exemplarisch vertiefter Form und wenden diese an der eigenen Bewegungshandlung, sowie im eigenen sportpraktischen Handeln an. Die Unterrichtsthemen der Sportkunde eignen sich vermehrt für einen fächerübergreifenden Projektunterricht.³⁴

Im Lehrstoff des Gegenstandes Sportkunde der 5. bis 8. Klasse finden sich u.a. Themen wie „Bewegung und Bewegungslernen“ und „Training“. Mehrere sportwissenschaftlichen Erkenntnisse aus diesen Themenbereichen wurden in dieser Arbeit für die Entwicklung der nachfolgenden Projektaufgaben verwendet.

Im Kapitel Bewegung und Bewegungslernen werden beispielsweise folgende Inhalte behandelt:³⁵

- Bewegungsbeschreibung, Bewegungsphase
- Erklärung von Bewegungsabläufen (*Biologie und Umweltkunde/ Physik/ Informatik/ Bewegung und Sport*)

Im Kapitel Training werden beispielsweise Grundkenntnisse über Leistungsoptimierung und Tests vermittelt.

³⁴ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan Sportkunde*, S. 1f.

³⁵ vgl. Internetquellen: *bm:uk Lehrplan Sportkunde*, S. 2

4. Praxisbeispiele aus dem Sport

4.1 BASKETBALL: Mathematik des Freiwurfs

Das Thema Mathematik des Freiwurfs soll den SchülerInnen in der Form eines projektartigen Unterrichts mit zahlreichen einander aufbauenden Arbeitsaufträgen näher gebracht werden. Für die Lösung einer Aufgabe wird die, in Kapitel 4.4 hergeleitete Bahngleichung einer Kugel beim Kugelstoßen verwendet. Es werden mathematische Stoffinhalte wie Trigonometrie, Bewegungsgleichungen, Parameterfunktionen, Wurfparabeln und die Differentialrechnung behandelt. Als lernunterstützende Technologie wird neben dem Taschenrechner das Computeralgebra-System Wolfram Mathematica 8 verwendet. Grundkenntnisse im Umgang mit diesem Programm werden vorausgesetzt. Es wird empfohlen diesen Unterrichtsvorschlag fächerübergreifend mit dem Fächern Bewegung und Sport und Physik durchzuführen, um einerseits die Motivation zur weiteren, tieferen Auseinandersetzung stets aufrechtzuerhalten und um andererseits die Vielfalt und das Potential des Beispiels optimal auszuschöpfen.

In der NBA-Profiliga in den USA spielen die Profis über 100 Spiele in einer einzigen Saison, beschränkt man sich in der folgenden Betrachtung auf die Korbwürfe, so macht z.B. Dirk Nowitzki³⁶ (deutscher Basketballspieler, spielt bei den Dallas Mavericks) in der NBA-Saison 2010/2011 ungefähr 26 Würfe pro Spiel. Knapp 19-mal wirft er dabei aus dem Feld und 7-mal versucht er sein Glück von der Freiwurflinie. Seine durchschnittliche Trefferquote aus dem Feld beträgt 51,7 % und von der Linie 89,2 %.³⁷

Arbeitsauftrag 1: Versucht im Bewegung und Sportunterricht von 10 Würfungen von der Freiwurflinie so oft wie möglich in den Korb zu treffen! Variiert bei weiteren 5 Würfungen den Abwurfwinkel und die Abwurfgeschwindigkeit, das heißt, probiert die Flugbahn des Basketballes flacher bzw. steiler zu halten! Haben diese zwei Größen einen Einfluss aufeinander? Schreibt eure Überlegungen ins Heft! Schafft ihr es einen Korb zu erzielen, ohne dass der Ball das Brett bzw. den Ring berührt?



Abb. 1: Dirk Nowitzki beim Freiwurf
(Bildrechte: Creative Commons)

Lösungserwartung:

Für kleinere Abwurfwinkel braucht man entsprechend weniger Wurfkraft, das heißt auch eine geringere Ballgeschwindigkeit, da die Flugbahnlänge des Balles kürzer wird. Bei größeren Abwurfwinkeln bedarf es höherer Abwurfgeschwindigkeiten.³⁸

Arbeitsauftrag 2: Trifft der Ball den Korb?

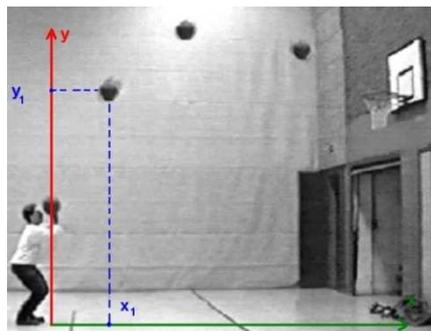


Abb. 2

Die Messwerte der jeweiligen Ballpositionen (vgl. Abb. 2) sind vorgegeben:

Ballposition (x y)	
x (Entfernung in m)	y (Höhe in m)
0	2,2
0,8	3,76
3,2	4

Tab. 1

³⁶ vgl. Wikipedia-Artikel: Dirk Nowitzki

³⁷ vgl. Internetquellen: NBA Saisonstatistik 2010/ 2011 von Dirk Nowitzki

³⁸ vgl. Ludwig 2008, S. 68

Der Korb hängt in einer Höhe y_k von fast genau $3,05 \text{ m}$. Die Entfernung des Abwurfpunktes vom Korbmittelpunkt x_k beträgt $4,191 \text{ m}$.³⁹ Der Innendurchmesser des Korbes beträgt 45 cm . Die Dicke des Ringes wird vernachlässigt. Der Umfang des Basketballs beträgt 75 cm .⁴⁰ Die Flugbahn des Basketballs wird, da wir in unserem Modell die Luftreibung vernachlässigen und die physikalischen Gesetzmäßigkeiten des schrägen Wurfs annehmen, eine Parabel sein. Wir setzen des Weiteren für unsere Berechnungen voraus, dass der Ball direkt durch den Ring fällt. Das heißt, er darf nicht zuerst das Brett berühren und dann durch den Ring fallen oder den Ring berühren.⁴¹

Fragestellungen:

- Trifft der Werfer in Abb. 2 in den Korb? Ermittle rechnerisch die zugehörige Funktionsgleichung zweiten Grades der Flugbahn des Balles!
- Auf welchen Flugbahnen gelangt der Ball direkt durch den Ring? Bestimme die zugehörige Funktionsschar im Mathematica! Führen alle Lösungsfunktionen in der Praxis zum Erfolg? Begründe!

Lösungserwartung zu a):⁴²

Wir nehmen zur Bestimmung der Funktionsgleichung eine allgemeine Gleichung zweiten Grades an:

$$y = f(x) = a * x^2 + b * x + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Aus der obigen Tabelle erhalten wir die Bedingungen

$$f(0) = 2,2; f(0,8) = 3,76 \text{ und } f(3,2) = 4.$$

Die Funktionsgleichung der Bahnkurve des Mittelpunkts des Balles als Lösung des Gleichungssystems lautet somit

$$f(x) \approx -0,578 * x^2 + 2,413 * x + 2,2.$$

Erfüllt jetzt diese Funktionsgleichung die Bedingung $f(4,191) = 3,05$, so geht auch der Ball durch den Korb.

$$f(4,191) = 2,156$$

Der erhaltene Funktionswert erfüllt nicht unsere geforderte Bedingung, was bedeutet, dass der Ball nicht durch den Korb fällt. Womöglich trifft der Ball nicht einmal den Korbring (mehr dazu später!). In der Basketballfachsprache nennt man einen solchen Wurf „Airball“.⁴³

Lösungserwartung zu b):⁴⁴

Soll der Ball im Korb landen, so muss seine Flugkurve durch den Anfangspunkt $S(0|2,2)$ und den Korbmittelpunkt $K(4,191|3,05)$ gehen.

Unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen erhalten wir folgende vereinfachte Funktionsgleichung: $f(x, a) \approx a * x^2 + (0,203 - 4,191 * a) * x + 2,2$.

Nun gibt es unendliche viele Parabeln, die durch diese beiden Punkte gehen.

Nehmen wir für die Größe a beliebige feste Werte an: $a = \{-0,3, -0,5, -1, -1,5\}$, so erhalten wir nach Eingabe der unteren Befehl im Mathematica eine Lösungsschar $f(x, a)$:

In[1]:= $a = \{-0.3, -0.5, -1, -1.5\}$

In[2]:= $f[x_, a_]:= a * x^2 + ((3.05 - 2.2)/4.191 - 4.191 * a) * x + 2.2$

³⁹ vgl. Internetquellen: Basketball

⁴⁰ vgl. Internetquellen: Basketball

⁴¹ vgl. Ludwig 2008, S. 64f.

⁴² vgl. Ludwig 2008, S. 66

⁴³ vgl. Phelps 2011, S. 347

⁴⁴ vgl. Ludwig 2008, S. 67

```
In[3]:= Plot[f[x, a], {x, 0.5}, AxesLabel -> {x"Entfernung"[m]", "Höhe [m]"}, PlotLabel ->
Style[f[x], {Blue, 11}], GridLines -> {{0,1,2,3,4,5}, {2,4,6,8,10}}, GridLinesStyle ->
Directive[Dotted], Epilog -> {PointSize[1/100], Point[{4.191,3.05}]}
```

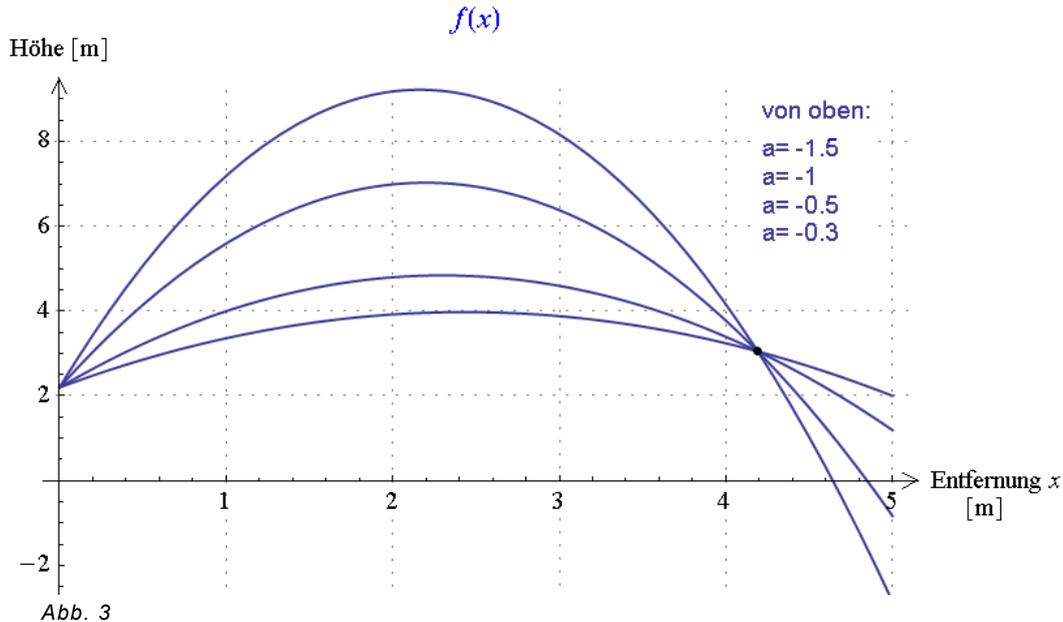


Abb. 3

Mögliche Interpretation:

Von den abgebildeten Parabeln wird die Flugkurve für $a = -0,3$ zu flach sein und der Ball vermutlich vom Ring abprallen. Bei der Funktion mit $a = -1,5$ könnte der Ball womöglich schon die Hallendecke berühren, während die beiden mittleren Flugparabeln mit bloßem Auge am geeignetsten aussehen.

Anhand dieser Veranschaulichung tauchen jetzt neue interessante Fragestellungen auf, wie z.B.: welche Wurfparabeln sind gerade noch erlaubt bzw. welche erlauben dem/der SportlerIn die meisten Fehler. Findet man den Einfallswinkel α , unter dem der Ball gerade noch durch den Ring fällt, so kann man die gültigen Wurfparabeln ausfindig machen und Rückschlüsse auf den Abwurfwinkel β ziehen.⁴⁵

Diese Überlegungen geben Hinweise für neue Unterrichtsschwerpunkte, die die Aufgabe bereichern und das mathematische Modellieren und die Herausbildung von Modellbildungsfähigkeiten weiter in den Mittelpunkt des Mathematikunterrichts rücken.⁴⁶

Der Mann hinter Nowitzkis Erfolg heißt Holger Geschwindner⁴⁷, Privattrainer und Mentor von Dirk. Dieser erzählte der Wochenzeitung DIE ZEIT im Jahre 2004, dass er mithilfe der Mathematik Dirks individuelle Wurftechnik weiterentwickelt hat. Der Ausgangspunkt seiner Überlegungen war die Frage: „Gibt es einen Schuss, bei dem ich Fehler machen darf und der Ball trotzdem durch den Ring fällt? [...]“⁴⁸ Er kam schlussendlich zum Ergebnis, dass für einen optimalen Wurf der *Einfallswinkel* des Basketballbales durch den Ring *nicht kleiner als 32°* sein darf. (Gemeint ist hier der Winkel in Normwurf-richtung (oder in der Sagittalebene). Es gibt auch eine seitliche Winkelabweichung von der Normwurf-richtung (Lateralebene) – mehr dazu später!).

Die Frage, wie er zu dieser Aussage kommt, kann als Beginn einer neuen interessanten Problemstellung, einem Optimierungsproblem im Mathematikunterricht in Verbindung mit dem Physikunterricht und Bewegung und Sport angesehen werden.

⁴⁵ vgl. Ludwig 2008, S. 67

⁴⁶ vgl. Henning & John 2011, S. 16

⁴⁷ vgl. Wikipedia-Artikel: Holger Geschwindner

⁴⁸ vgl. Henning & John 2011, S. 16. Zit. n. Internetquellen: Ewers

Wiederrum wird davon ausgegangen, dass der Ball direkt, ohne jegliche Ringberührung durch den Korb fällt.

Arbeitsauftrag 3: Überprüfe Geschwindners Aussage bezüglich des Einfallswinkels von 32° ! Wie würdest du den minimalen Einfallswinkel mathematisch definieren? Berechne den Einfallswinkel α mit Hilfe der gegebenen Skizze (vgl. Abb. 4)! Stelle anschließend die Gesamtsituation des Freiwurfs mit dem Einfalls- und Abwurfwinkel schematisch dar!

Lösungserwartung:⁴⁹

Der Einfallswinkel ist der Anstieg der Wurfparabel auf der Höhe des Ringes.

Der Umfang des Basketballs beträgt 75 cm , welcher umgerechnet einen Radius von $r = \frac{U}{2 \cdot \pi} = \frac{75\text{ cm}}{6,28} \approx 12\text{ cm}$ ergibt.

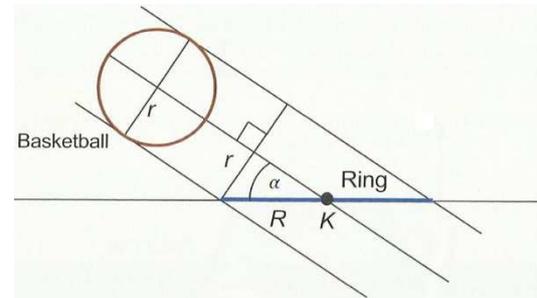


Abb. 4

Man kann den gesuchten Winkel α in Abb. 4 mit den trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck berechnen:

$$R = \frac{D}{2} = 22,5\text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{R} = \frac{12\text{ cm}}{22,5\text{ cm}} \approx 0,5333 \rightarrow \alpha = \sin^{-1} 0,5333 \approx 32,23^\circ$$

Geschwindner hat also mit seiner Aussage Recht.

Unsere Freiwurfsituation lässt sich wie folgt schematisch veranschaulichen:

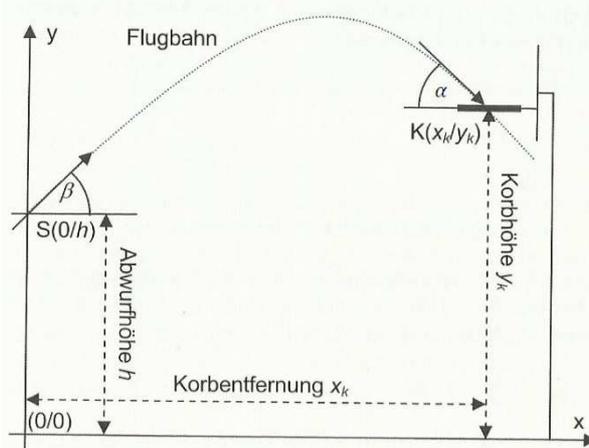


Abb. 5

Arbeitsauftrag 4: Bestimme die maximale seitliche Abweichung γ [°] von der Normwurfriichtung W_N bzw. in der lateralen Ebene! Nutze dafür die gegebene Skizze (vgl. Abb. 6)!

Lösungserwartung:⁵⁰

Für die Strecke Δr ergibt sich nach $R - r \approx 10,5\text{ cm}$.

Mit dem Tangens kann man sich jetzt den Winkel γ ausrechnen:

$$\tan \gamma = \frac{\Delta r}{x_k} \approx \frac{10,5\text{ cm}}{419,1\text{ cm}} \approx 0,025 \rightarrow \gamma = \tan^{-1} 0,025 \approx 1,44^\circ$$

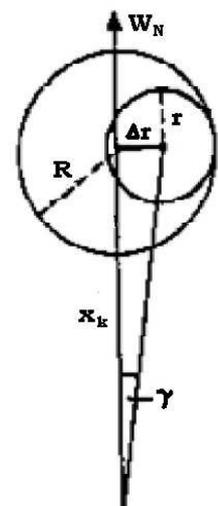


Abb. 6

⁴⁹ vgl. Ludwig 2008, S. 68, Henning & John 2011, S. 16 und Mathelitsch & Thaller 2008, S. 92

⁵⁰ vgl. Ballreich 1992, S. 10

Die maximale seitliche Abweichung ist sehr gering, was höchste Präzision beim Wurf – vor allem in der lateralen Ebene – verlangt.

Arbeitsauftrag 5: Wie lautet die allgemeine Funktionsvorschrift im Arbeitsauftrag 2 b), wenn der Einfallswinkel 32° betragen soll? Von welchen Größen hängt diese Funktionsgleichung eigentlich ab?

Lösungserwartung:

Die Zusatzbedingung $\frac{df(4,191)}{dx} = f'(4,191) = -\tan 32^\circ = -0,66$ wird in die 1. Ableitungsfunktion $f'(x) \approx 2 * a * x + 0,203 - 4,191 * a$ unserer bekannten Funktionsgleichung eingesetzt. Daraus ergibt sich $a \approx -0,206$ und die gesuchte Funktionsvorschrift $f(x) \approx -0,206 * x^2 + 1,067 * x + 2,2$.

Die Funktionsgleichung mit den Parametern a, b, c verändert sich, wenn man den Einfallswinkel α oder die Abwurfhöhe h verändert. Durch die Bedingung $f(0) = h$ ist der Parameter c schon bestimmt, nämlich $c = h$. Die Abwurfhöhe hängt natürlich auch im weiteren Sinne von der Körpergröße des/der werfenden SpielerIn ab. Kleinere SpielerInnen haben normalerweise auch kürzere Arme und werfen dadurch den Ball nicht so weit über dem Kopf ab. Bei einem Sprungwurf verändert sich die Abwurfhöhe zusätzlich.⁵¹

Arbeitsauftrag 6: Bestimme für die allgemeine Wurfparabel die Steigung im Punkt K (vgl. Abb. 5) und schätze einen Maximalwert für den Parameter a mit Hilfe der Beziehung zum minimalen Einfallswinkel α ab!

Lösungserwartung:⁵²

Die Gleichung aller Wurfparabel, die durch die Punkte S und K verlaufen, lässt sich schreiben als $f(x, a) = a * x^2 + \left(\frac{y_k - h}{x_k} - a * x_k\right) * x + h$ und ergibt einmal nach x differenziert

$$f'(x) = 2 * a * x + \frac{y_k - h}{x_k} - a * x_k.$$

Da der Einfallswinkel $\alpha > 32^\circ$ sein muss bzw. die Steigung im Punkt $K(x_k|y_k) \leq -\tan 32^\circ$ muss gelten:

$$f'(x_k) = a * x_k + \frac{y_k - h}{x_k} \leq -\tan 32^\circ$$

Diese Gleichung umgeformt ergibt die maximale Abschätzung für a :

$$a \leq -\frac{1}{x_k} * \left(\frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ\right)$$

Setzt man für a Zahlenwerte ein, die diese Ungleichung erfüllen, so erhält man gültige Wurfparabeln, die durch den Ring fallen.

Arbeitsauftrag 7: Ermittle die Steigung im Punkt S (vgl. Abb. 5)! (Hinweis: Setze für den Parameter a den zuvor berechneten Term ein. Welche Ungleichung entsteht? Begründe! Vereinfache dann die Ungleichung so weit wie möglich!)

⁵¹ vgl. Henning & John 2011, S. 17

⁵² vgl. Ludwig 2008, S. 69

Lösungserwartung:⁵³

Die Steigungen der Parabeln im Punkt $S(0|h)$ lauten $f'(0) = \frac{y_k - h}{x_k} - a * x_k$.

Der Parameter a in der nachfolgenden Gleichung ist nach Arbeitsauftrag 6 kleiner gleich als seine maximale Abschätzung $-\frac{1}{x_k} * \left(\frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ\right)$. Letzterer Ausdruck nimmt einen negativen Zahlenwert an. Auch nach der Multiplikation mit x_k ändert sich das Vorzeichen nicht. Wird eine negative Zahl abgezogen, so wird sie bekanntlich addiert. Da jetzt das a einen kleineren oder gleichen negativen Zahlenwert als seine maximale Abschätzung besitzt, wird daher ein größerer oder gleicher Zahlenwert addiert. Es entsteht schließlich folgende Ungleichung, die noch weiter vereinfacht werden kann:

$$f'(0) = \frac{y_k - h}{x_k} - a * x_k \geq \frac{y_k - h}{x_k} - \left[-\frac{1}{x_k} * \left(\frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ\right) \right] * x_k \geq 2 * \frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ$$

Arbeitsauftrag 8: Um auf den Abwurfwinkel β schließen zu können, fehlt dir noch eine Beziehung zwischen der Steigung im Punkt S und dem Winkel β . Welche ist das und wie lautet in weiterer Folge die allgemeine Gleichung für den Abwurfwinkel?

Lösungserwartung:⁵⁴

Der fehlende Zusammenhang kann schnell aus unserer Skizze entnommen werden:
 $f'(0) = \tan \beta$

Nachdem man diese beiden gefundenen Ausdrücke für $f'(0)$ gleichgesetzt hat, löst man die Gleichung nach β und erhält schlussendlich

$$\beta(h) \geq \tan^{-1} \left(2 * \frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ \right).$$

Arbeitsauftrag 9: Erstelle zunächst mit Mathematica eine Wertetabelle und stelle dann den Abwurfwinkel in Abhängigkeit von der Abwurfhöhe graphisch dar! Nimm an, deine Abwurfhöhe h betrage ungefähr Körpergröße+5 cm! Entnimm aus der Graphik deinen optimalen Abwurfwinkel und vergleiche ihn mit dem von Dirk Nowitzki ($h = 2,2m$)! Was fällt dir dabei auf und was kann man daraus allgemein folgern?

Lösungserwartung:

Eine Wertetabelle lässt sich in Mathematica wie folgt erstellen:

In die Inputzeile gibt man folgende Befehlsvorschrift ein:

```
In[1]:= Grid[Table[{h, ArcTan[2 * (3.05 - h)/4.191 + Tan [32°]] * 180/Pi}, {h, 0,4.5,0.5}]]
```

Die Ausgabe erfolgt in dieser Form:

⁵³ vgl. Ludwig 2008, S. 69

⁵⁴ vgl. Ludwig 2008, S. 69

```

0. 64.32715555952994
0.5 61.49989314375111
1. 58.04534102693185
1.5 53.76445316326054
2. 48.39029924433579
2.5 41.58381571128755
3. 32.972684746825536
3.5 22.29968504651084
4. 9.732496524954831
4.5 -3.838199671119633

```

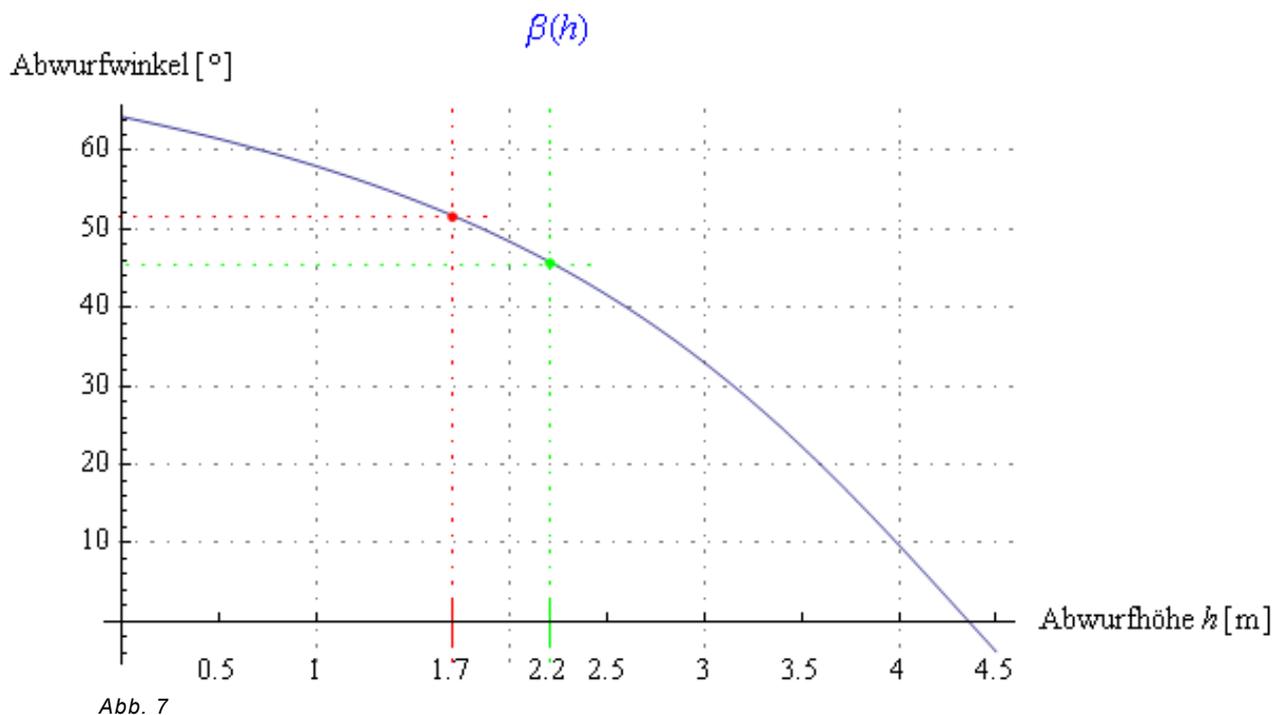
Der Graph lässt sich mit folgender Eingabe zeichnen:

```

In[2]:= Plot[ArcTan[2 * (3.05 - h)/4.191 + Tan[32°]] * 180/Pi, {h, 0, 4.5}, AxesLabel ->
{"Abwurfhöhe "h" [m]", "Abwurfwinkel [°]"}, PlotLabel ->
Style[β[h], {Blue, 11}], GridLines ->
{{0,1,2,3,4, {1.7, Red}, {2.2, Green}}, {10,20,30,40,50,60}}, GridLinesStyle ->
Directive[Dotted], Ticks ->
{{0,0.5,1,3,4, {1.7,1.7,0.05, Directive[Red]}, {2.2,2.2,0.05, Directive[Green]}},2.5,3.5,4.5}, Automatic}]

```

Wir erhalten folgenden Zusammenhang zwischen Abwurfhöhe und Abwurfwinkel:



Ein/e SchülerIn ist 1,65 m groß. Nach unserer Vorgabe wirft er/sie aus einer Höhe von 1,7 m auf den Korb. Bei einer Abwurfhöhe von $h = 1,7$ m ergibt sich für den/die SchülerIn ein minimaler Abwurfwinkel von $\beta \approx 52^\circ$ (rechnerisch: $\approx 51,8^\circ$). Im Vergleich zu ihm/ihr, reicht Dirk bereits ein Winkel von $\beta \approx 46^\circ$ (rechnerisch: $\approx 45,9^\circ$), um einen Korb zu erzielen.

Man kann allgemein festhalten, je größer die Abwurfhöhe, desto kleiner der Abwurfwinkel.

Abwurfwinkel schön und gut, aber was nützt uns dieser Winkel, wenn der Ball zu langsam abgeworfen wird. Die Flugbahn wird zu kurz und der Ball wird voraussichtlich nicht einmal den Ring erreichen. Auch bei einer zu hohen Geschwindigkeit des Balles würde sich kein Erfolg einstellen. Es stellt sich die Frage nach der optimalen Abwurfgeschwindigkeit, bei welcher der Ball ganz sicher durch die Korbmitte fallen wird.⁵⁵

Dazu bedienen wir uns zunächst der bekannten Funktionsgleichung für die vertikale Position einer Kugel beim Kugelstoßen und passen diese unserer Situation an.

Es gilt⁵⁶:

$$f(x) = \tan \beta * x - \frac{g}{2} * \frac{x^2}{v^2 * (\cos \beta)^2} + h.$$

Die Abwurfgeschwindigkeit v , der Abwurfwinkel β und Abwurfhöhe h sind hier unsere unbekannt Parameter.

Arbeitsauftrag 10: Überlege dir eine Vorgehensweise zur Bestimmung des funktionalen Zusammenhangs $v(\beta, h)$! (Hinweis: Durch welche Punkte sollen die Wurfparabeln verlaufen?) Erstelle dann mit Wolfram Mathematica ein Diagramm, in dem die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von dem Abwurfwinkel dargestellt wird! (Setze dabei für h deine persönliche Abwurfhöhe und die Werte $h = \{2, 2,2, 2,5, 3,05\}$ ein!) Was bedeuten eigentlich diese Graphen? Wie verändern sie sich bei steigender Abwurfhöhe? Welchen Schluss kann man daraus für unseren optimalen Wurf ziehen?

Lösungserwartung:⁵⁷

Wenn man den Punkt $S(0|h)$ in die Gleichung einsetzt, so hat man wieder das konstante Glied als Abwurfstelle gefunden. Durch diesen Punkt verlaufen aber wieder unendlich viele Parabeln, welche gar nicht durch die Mitte des Rings fallen. Deswegen fordern wir (vgl. Arbeitsauftrag 5), dass diese Wurfparabeln durch den Punkt $K(x_k|y_k)$, also durch die Mitte des Korbes, verlaufen müssen und setzen daher diesen Punkt in die oben angeführte Gleichung ein. Es ergibt sich daher folgender Zusammenhang:

$$y_k = \tan \beta * x_k - \frac{g}{2} * \frac{x_k^2}{v^2 * (\cos \beta)^2} + h.$$

Man kann erkennen, dass hier nur noch eine Abhängigkeit zwischen den Parametern v und β besteht.

Im nächsten Schritt wird die Gleichung nach v gelöst und wir erhalten

$$v(\beta, h) = \sqrt{\frac{g * x_k^2}{2 * (x_k * \tan \beta + h - y_k) * (\cos \beta)^2}}.$$

Setzt man die bekannten Größen $x_k = 3,05 \text{ m}$, $y_k = 4,191 \text{ m}$ ein und nimmt für die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ an, so bekommt man

$$v(\beta, h) \approx \sqrt{\frac{172,307}{2 * (4,191 * \tan \beta + h - 3,05) * (\cos \beta)^2}}.$$

⁵⁵ vgl. Ludwig 2008, S. 70

⁵⁶ vgl. Ludwig 2008, S. 71 und Mathelitsch & Thaller 2008, S. 91

⁵⁷ vgl. Ludwig 2008, S. 71

Die Darstellung der einzelnen Funktionen für unterschiedliche h (exemplarisch wurde hier $h = 2,2$ gewählt) kann in dieser Form erfolgen:

In[1]:= $h := 2.2$

In[2]:= $p1 = \text{Plot}[\text{Sqrt}[172.307/(2 * (4.191 * \text{Tan}[\beta * \text{Pi}/180] + h - 3.05)) * \text{Cos}[\beta * \text{Pi}/180] * \text{Cos}[\beta * \text{Pi}/180]], \{\beta, 0, 90\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 16\}].$

Die Ausgabe aller Funktionen mit geeigneter Graphikeinstellung kann mit folgendem Befehl realisiert werden:

In[3]:=

Show[p1, p2, p3, p4, p5, PlotLabel \rightarrow Style[v[β]], Ticks \rightarrow

Range 0,90,10, Range 0,16,2, GridLines \rightarrow Range 0,90,10, Range 0,16,2, GridLineStyle \rightarrow Directive Dotted, AxesLabel \rightarrow Abwurfwinkel β [°], Abwurfgeschwindigkeit [m/s].

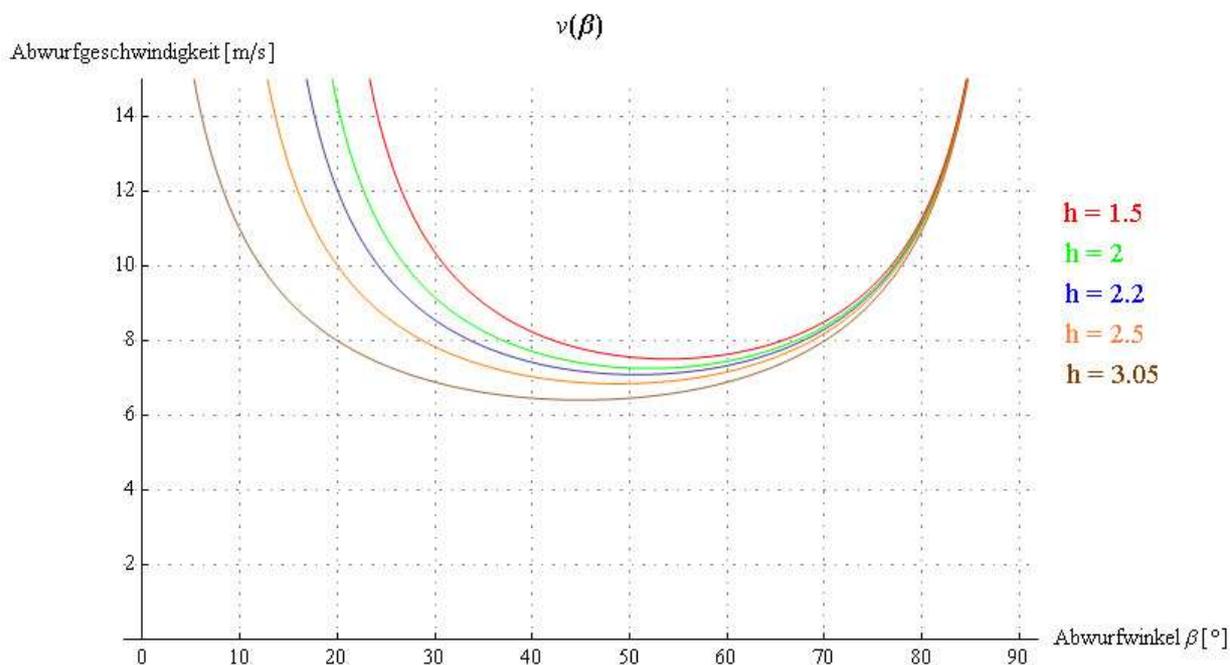


Abb. 8

In der Abb. 8 geben die dargestellten Kurven die Relation der beiden Parameter β und $v(\beta, h)$ wieder, wobei der Ball ganz sicher durch die Korbmitte fallen wird.⁵⁸

Bei näherer Betrachtung der einzelnen Graphen fällt auf, dass bei größeren Abwurfhöhen die Umgebung um das Geschwindigkeitsminimum immer flacher wird.

Dies hat den Vorteil, dass man den Abwurfwinkel β etwas variieren kann, ohne dabei die Abwurfgeschwindigkeit v stark verändern zu müssen. Der/Die SpielerIn kann sich also eine maximale Unsicherheit im Abwurfwinkel erlauben, wenn er möglichst mit geringer Geschwindigkeit abwirft.⁵⁹ Die Abwurfgeschwindigkeit nimmt zuerst bis zum Geschwindigkeitsminimum ab. Ab diesem Punkt steigt die Geschwindigkeit kontinuierlich mit dem Winkel an. Bei Abwurfwinkeln kleiner $\tan^{-1}\left(2 * \frac{y_k - h}{x_k} + \tan 32^\circ\right)$ (vgl. Arbeitsauftrag 8) würde sich unabhängig von der Abwurfgeschwindigkeit kein Korberfolg einstellen. Der Ball würde hier womöglich vom Ring abprallen. Zusammenfassend sollte die Abwurfgeschwindigkeit nicht zu stark verändert werden, sie sollte stets auf einem konstant optimalen Niveau gehalten werden.

⁵⁸ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 92

⁵⁹ vgl. Mathelitsch & Thaller 2007, S. 31

Um ein konstant optimales Geschwindigkeitsniveau zu erreichen, wird den BasketballspielerInnen geraten ein Saiteninstrument (meist Violine) zu erlernen, um ihre Drucksensitivität in den Fingern zu erhöhen.⁶⁰ Für unsere weitere Rechnung beschränken wir uns auf eine Abwurfhöhe von $h = 2,2 \text{ m}$.

Arbeitsauftrag 11: Bestimme im CAS die größtmögliche Definitionsmenge von $v(\beta, 2,2)$! Ermittle auch die Monotonieintervalle und die lokale Extremstelle! Berechne die Abwurfgeschwindigkeit an dieser Stelle!

Lösungserwartung:

Die Funktion kann an jeder Stelle $\beta \in \mathbb{R}$, ausgenommen an den Nullstellen des Nenners, definiert werden.

Die Nullstellen des Nenners sind nach Anwendung des Produkt-Null-Satzes die Lösungen der beiden goniometrischen Gleichungen in \mathbb{R} :

```
In[1]:=
Reduce[Cos[β * Pi/180] * Cos[β * Pi/180] == 0, β, GeneratedParameters → (Subscript[k, #]&)]
In[2]:= FullSimplify[%]
Out[2]:= k1 ∈ Integers&&(90 + β == 360k1 || β == 90 + 360k1)
```

```
In[3]:=
Reduce[2 * (4.191 * Tan[β] + 2.2 - 3.05) == 0, β, GeneratedParameters → (Subscript[k, #]&)]
In[4]:= FullSimplify[%]
Out[4]:= k1 ∈ Integers&&β == 11.464963097339343 + 180. k1
```

Die größtmögliche Definitionsmenge für $v(\beta, 2,2)$ lässt sich somit als $\mathbb{R} \setminus \{90^\circ + 360^\circ * k; \approx 11,46^\circ + 180^\circ * k\}$ anschreiben.

Übertragen auf unsere Situation, reicht es für β die Werte $90^\circ \wedge \approx 11,46^\circ$ auszuschließen, das heißt die Definitionsmenge ist $] \approx 11,46^\circ; 90^\circ[$.

Für die Bestimmung der Monotonieintervalle berechnen wir zunächst die Ableitung von $v(\beta)$ und suchen deren Nullstelle:

```
In[5]:= v[β_]:= Sqrt[172.307/(2 * (4.191 * Tan[β * Pi/180] + 2.2 - 3.05) * Cos[β * Pi/180] * Cos[β * Pi/180])]
In[6]:= Solve[D[v[β], β] == 0, β]
Out[6]:= {{β → -129.26751845133032}, {β → -39.26751845133033}, {β → 50.73248154866967}, β → 140.73248154866968}
```

Als einzige sinnvolle Lösung unseres Nullstellenproblems erhalten wir $\beta \approx 50,73^\circ$.

Die Definitionsmenge wird durch die einzige Nullstelle von $v'(\beta)$ in zwei Monotonieintervalle geteilt, in denen $v'(\beta)$ selbst keine Nullstellen aufzuweisen hat:

$$]11,46^\circ; 50,73^\circ] ; [50,73^\circ; 90^\circ[$$

Ermittelt man jetzt an einer inneren Stelle, z.B.: $\beta = 45^\circ$ des Intervalls $]11,46^\circ; 50,73^\circ[$ das Vorzeichen der Ableitungsfunktion, so kann man daraus direkt auf die Art der Monotonie schließen:

⁶⁰ vgl. Ludwig 2008, S. 72 und Mathelitsch & Thaller 2008, S. 93

In[7]:= D[v[β], β]

In[8]:= FullSimplify[%]

Out[8]:=

$$4.640945485566491 \left(\frac{0.07314674895108235 \operatorname{Sec}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right]^4}{(-0.8499999999999996 + 4.191 \operatorname{Tan}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right])^2} + \frac{\pi \operatorname{Sec}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right]^2 \operatorname{Tan}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right]}{90(-0.8499999999999996 + 4.191 \operatorname{Tan}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right])} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{Sec}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right]^2}{-0.8499999999999996 + 4.191 \operatorname{Tan}\left[\frac{\pi\beta}{180}\right]}}$$

In[9]:= β = 45

Out[9]:= -0.031888422859123605

In[10]:= β = 60

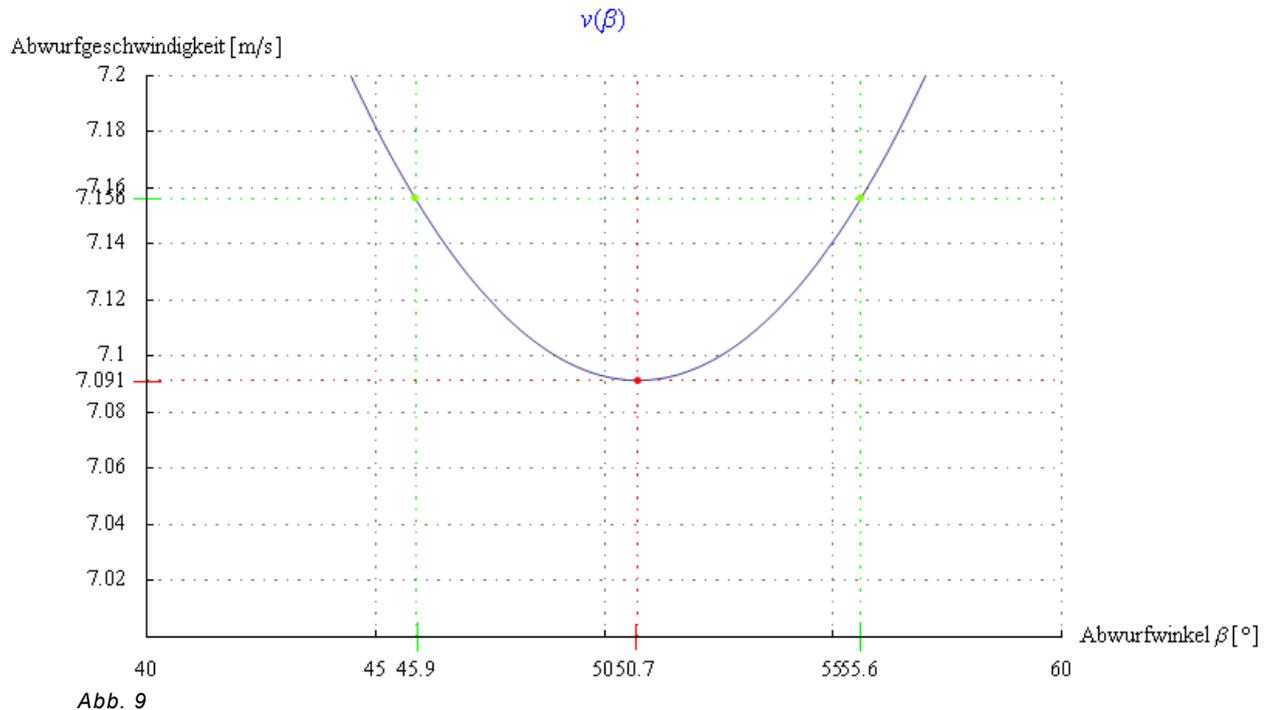
Out[10]:= 0.05429080069994191

Da der erhaltene Wert für $v'(45^\circ) \approx -0,032 < 0$ ist und die Ableitungsfunktion $v'(\beta)$ für $\forall \beta$ im Intervall $]11,46^\circ; 50,73^\circ[$ stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist die Funktion $v(\beta, 2, 2)$ in diesem Intervall streng monoton fallend.

Nach Berechnung und analoger Argumentation ist die Funktion $v(\beta, 2, 2)$ im Intervall $]50,73^\circ; 90^\circ[$ streng monoton steigend.

Daher liegt bei einem Abwurfwinkel von $\beta \approx 50,73^\circ$ eine lokale Minimumsstelle vor. Die dazugehörige optimale Abwurfgeschwindigkeit errechnet sich mit In[11]:= v[50.73248154866967] und beträgt ungefähr Out[8]:= 7.09148 $\frac{m}{s}$.

In der nachfolgenden Abbildung ist der Zusammenhang Abwurfwinkel und Abwurfgeschwindigkeit für eine Abwurfhöhe von $h = 2,2$ noch einmal dargestellt:



Mit einer letzten Untersuchung versuchen wir unser Modell des optimalen Basketballfreiwurfs noch einmal zu präzisieren. Berücksichtigt man die Tatsache, dass der Durchmesser des Korbs deutlich größer ist als der des Balles, so wird klar, dass auch Würfe erfolgreich im Korb landen, die von der optimalen Wurfparabel, welche genau durch die Korbmitte verläuft, abweichen. Wir werden später sehen, ob das Korbzentrum wirklich das bestmögliche Wurfziel bei einem Basketballfreiwurf ist.⁶¹

⁶¹ vgl. Ludwig 2008, S. 73 und Mathelitsch & Thaller 2008, S. 93

Arbeitsauftrag 12: Damit du als ExpertIn Bekannte bei der Ausführung eines Basketballfreiwurfs Tipps geben kannst, erstelle eine Tabelle, in der du für die Abwurfhöhen aus Arbeitsauftrag 10, die jeweiligen optimalen Abwurfwinkel, Abwurfgeschwindigkeiten und den erlaubten Winkelbereich für den Abwurfwinkel berechnest!⁶² Interpretiere deine Ergebnisse allgemein! (Hinweis: Berechne zur Überprüfung des erlaubten Winkelbereiches die Abweichung des Balles vom Korbmittelpunkt, den Einfallswinkel ρ und den minimalen Einfallswinkel α !)

Zur Erinnerung:

$$\text{Flugbahnverlauf einer Kugel: } y_k = \tan \beta * x_k - \frac{g}{2} * \frac{x_k^2}{v^2 * (\cos \beta)^2} + h$$

$$\text{Funktionsgleichung der Wurfparabel: } f(x, a) = a * x^2 + \left(\frac{y_k - h}{x_k} - a * x_k \right) * x + h$$

$$\text{Berechnung des Einfallswinkels: } -\tan \rho = f'(x_k)$$

$$\text{Gegeben: } x_k = 4,191 \text{ m, } y_k = 3,05 \text{ m, } g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ Korbradius } R = 22,5 \text{ cm, Ballradius } r = 12 \text{ cm}$$

Lösungserwartung:

Für die Abwurfhöhe $h = 2,2 \text{ m}$ haben wir bereits im Arbeitsauftrag 11 folgende Daten ermittelt (analoge Berechnung für andere Werte für h):

Bei einem optimalen Abwurfwinkel von $\beta \approx 50,73^\circ$ (=Funktionsargument der lokalen Minimumstelle von $v(\beta, 2,2)$) ergibt sich eine optimale Abwurfgeschwindigkeit von $v \approx 7,09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (=Funktionswert der lokalen Minimumstelle). Für die Berechnung des minimal- und maximal erlaubten Abwurfwinkels nutzt man die für unsere Zwecke angepasste Bewegungsgleichung

$$y_k = \tan \beta * x - \frac{g}{2} * \frac{x^2}{v^2 * (\cos \beta)^2} + h.$$

Man spielt dort mit verschiedenen Abwurfwinkeln und lässt sich die Entfernung $x \text{ [m]}$ des Balles zur Abwurfstelle bei gegebener Korbhöhe y_k , Abwurfhöhe und optimaler Abwurfgeschwindigkeit ausgeben. Mit dem Wissen von x_k , des Durchmessers des Balles und des Rings kann man jetzt mithilfe einfacher Streckensubtraktionen nachprüfen, ob der Ball aus seiner jeweiligen Position x durch den Ring fällt oder nicht. Zusätzlich ist zu überprüfen, ob der Einfallswinkel ρ des Balles im Durchgangspunkt größer ist als sein jeweiliger minimaler Einfallswinkel α .

Die Berechnung der Abweichung vom Korbzentrum und der beiden Einfallswinkel für verschiedene Abwurfwinkel und Abwurfhöhen (exemplarisch wurde hier $h = 2,2 \text{ m}$ gewählt) lässt sich im Mathematica wie folgt durchführen:

```
In[1]:= Clear[a]; Clear[x]; Clear[x1]; Clear[beta]; Clear[alpha]; Clear[abweichung]; Clear[rho]
```

```
In[2]:= h = 2.2; g = 9.81; v = 7.091482; beta = 49; y = 3.05; xmax = 4.191; r = 0.12; R = 0.225
```

Berechnung der Entfernung Abwurfstelle zum Schnittpunkt der Flugkurve mit der Korbhöhe:

```
In[3]:= Solve[y == Tan[beta * Pi/180] * x1 - g/2 * x1^2/(v^2 * (Cos[beta * Pi/180])^2) + h, x1]
```

```
Out[3]:= {{x1 -> 0.8976078121040955}, {x1 -> 4.178814891979281}}
```

```
In[4]:= x1 = 4.178814891979281
```

Berechnung der Abweichung vom Korbmittelpunkt [in m]:

```
In[5]:= abweichung = x1 - xmax
```

```
Out[5]:= -0.012185108020719149
```

⁶² vgl. Ludwig 2008, S. 73

Berücksichtigt man noch den Radius des Balles, so kommt man zur Erkenntnis, dass der Ball eindeutig innerhalb des Bereiches $]x_k - 0,225; x_k + 0,225[$ liegt und somit ganz sicher, ohne jegliche Berührung durch den Ring fällt.

Berechnung des Koeffizienten a der Funktionsgleichung:

$$\text{In[6]:= Solve[Tan[\beta * Pi/180] == (y - h)/x1 - a * x1, a]$$

$$\text{Out[6]:= {{a \to -0.22661005087217728}}$$

$$\text{In[7]:= a = -0.22661005087217728}$$

Bestimmung der Funktionsgleichung der Wurfparabel:

$$\text{In[8]:= f[x_, a_] = a * x^2 + ((y - h)/x1 - x1 * a) * x + h}$$

$$\text{Out[8]:= 2.2 + 1.1503684072210096x - 0.22661005087217728x^2}$$

Bestimmung der Ableitungsfunktion:

$$\text{In[9]:= f'[x_, a_] = D[f[x, a], x]$$

$$\text{Out[9]:= 1.1503684072210096 - 0.45322010174435456x}$$

Berechnung des Einfallswinkels ρ [in °]:

$$\text{In[10]:= Solve[-Tan[\rho * Pi/180] == f'[x1, a], \rho]$$

$$\text{Out[10]:= {{\rho \to 36.632813649978594}}$$

Berechnung des minimalen Einfallswinkels α [in °]:

$$\text{In[11]:= Solve[Sin[\alpha * Pi/180] == r/(R - Abs[abweichung]), \alpha]$$

$$\text{Out[11]:= {{\alpha \to 34.32388063251955}}$$

Da die zweite Bedingung (Einfallswinkel > minimaler Einfallswinkel) auch erfüllt ist, kann man sagen, dass der angenommene Abwurfwinkel im erlaubten Winkelbereich liegt. Drücken wir den Abwurfwinkel auf 48° herunter, so würde sein Einfallswinkel knapp unter dem erlaubten Minimalwert liegen. Das heißt mit dem Winkel $\beta = 49^\circ$ haben wir auch gleichzeitig die größte untere Schranke unseres Winkelbereiches gefunden.

Die ermittelten Daten werden sinnvoll gerundet und übersichtlich in eine Tabelle eingetragen:

Abwurfhöhe	Optimaler Abwurfwinkel	Optimale Geschwindigkeit	Winkelbereich Abwurfwinkel
1,7 m	54°	7,51 m/s	53° - 56°
2,0 m	52°	7,26 m/s	51° - 55°
2,2 m	51°	7,09 m/s	49° - 54°
2,5 m	49°	6,85 m/s	46° - 53°
3,05 m	45°	6,41 m/s	41° - 50°

Tab. 2

Man erkennt, dass bei Zunahme der Abwurfhöhe auch der jeweilige erlaubte Spielraum beim Abwurfwinkel größer wird. Allgemein heißt das, dass große SpielerInnen beim Abwurfwinkel etwas mehr variieren dürfen als SpielerInnen mit niedrigerer Körpergröße. Aufgrund der kleineren Distanz zum Korb machen sich bei den „Riesen“ Winkelabweichungen nicht so stark bemerkbar. Kleinere SpielerInnen müssen relativ zur Körpergröße und Abwurfhöhe einen größeren Höhenunterschied bewältigen, was bedeutet, dass sie für ihre Würfe mehr Kraft

aufwenden bzw. den Ball mit einer höheren Geschwindigkeit abwerfen müssen, um einen Korb zu erzielen.⁶³

Arbeitsauftrag 13: Zeichnet man die Wurfparabeln mit den gerade noch zulässigen Abwurfwinkeln, so sieht man, dass sie alle im vorderen Teil des Korbes eintreffen.⁶⁴ Wie kann man die Wurfweite erhöhen, damit die Parabeln durch den hinteren Teil des Korbes fallen? Welche Möglichkeiten gibt es hier?

Lösungserwartung:⁶⁵

Bei steigendem Abwurfwinkel wird die Wurfweite des Balles immer kürzer, da der Einfallswinkel auch immer größer wird. Verkleinert man jedoch kontinuierlich den Abwurfwinkel β , so wird der Einfallswinkel α irgendwann, aufgrund eines kleineren y -Wertes des Maximums seiner Wurfparabel, so klein sein, sodass der Ball womöglich vom Ring abprallt. Der Weg über den Abwurfwinkel führt also nicht zum Ziel.

Die zweite Möglichkeit wäre eine Erhöhung der Abwurfgeschwindigkeit. Bereits eine geringfügige Geschwindigkeitsänderung nach oben, würde eine, vom Korbmittelpunkt ausgehende horizontale Verschiebung des Schnittpunktes der Wurfparabel mit der Korbhöhe Richtung Brett bewirken.

Arbeitsauftrag 14: Für die Abwurfhöhe $h = 2,2 \text{ m}$ wird die optimale Abwurfgeschwindigkeit um $0,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $v = 7,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erhöht. Ermittle die gerade noch erlaubten Abwurfwinkel für diese optimierte Abwurfgeschwindigkeit und gib für diese Grenzwinkel die Abweichung von der Korbmitte an? Welcher Einfallswinkel α ist bei diesen Winkeln zu erwarten?⁶⁶ Vergleiche den erhaltenen Winkelbereich mit dem aus dem Arbeitsauftrag 12! Was kannst du erkennen?

Lösungserwartung:

Der Rechengang ist derselbe wie im Arbeitsauftrag 11. Wir ändern nur den Wert der Geschwindigkeit.

$v = 7,11 \text{ m/s}; h = 2,2 \text{ m}; \text{erlaubter Winkelbereich } 48^\circ \text{ bis } 55^\circ$			
Winkel	48°	51°	55°
Abweichung von der Korbmitte	0,2 cm	+2,7 cm	-4,4 cm
Einfallswinkel ρ	$35,2^\circ$	$39,8^\circ$	$45,5^\circ$
Minimaler Einfallswinkel α	$32,6^\circ$	$37,3^\circ$	$41,4^\circ$

Tab. 3

Durch diese geringfügige Geschwindigkeitserhöhung können wir den Winkelbereich jeweils um einen Grad nach oben und unten, also insgesamt um 2° erweitern. Diese Steigerung des Winkelbereiches auf 48° bis 52° entspricht einer Verbesserung um 40 %.

⁶³ vgl. Ludwig 2008, S. 73 und Henning & John 2011, S. 18

⁶⁴ vgl. Ludwig 2008, S. 74

⁶⁵ vgl. Ludwig 2008, S. 74

⁶⁶ vgl. Ludwig 2008, S. 75

Zum Schluss, als Krönung des Beispiels behandeln wir eine utopische Fragestellung. Eine für unsere Basketballsituation unrealistische Aussage ist Auslöser von neuen Problemstellungen, die nicht nur die Grenzen der Mathematik aufzeigen, sondern auch Einblick in die Welt der Physik gewähren.

Arbeitsauftrag 15: Diskutiere die Aussage: „Der Einfallswinkel ρ beträgt 90° “ kurz mit deinem/r SitznachbarIn! Schreibt eure Überlegungen nieder!

Lösungserwartung:

Bei einem Einfallswinkel von 90° müsste der Ball senkrecht durch den Ring fallen. Wäre dies der Fall, so würde die Funktion am Durchgangspunkt einen unendlich großen Anstieg besitzen, was aber nicht möglich ist.

Arbeitsauftrag 16: Wir nehmen einen Einfallswinkel von 89° an. Bestimme für eine Abwurfhöhe von $h = 2,2 \text{ m}$ die Funktionsgleichung der Flugparabel und ihren höchsten Punkt!

Lösungserwartung:

Geht man bei der Bestimmung der Funktionsgleichung bzw. des Maximums gleich vor wie im Arbeitsauftrag 2 und 5, so erhält man nach Eingabe folgender Befehle ins CAS die Lösungen:

```
In[1]:= Solve[c == 2.2 && 3.05 == a * (4.191)^2 + b * 4.191 + c && -Tan[89 * Pi/180] == 2 * a * 4.191 + b, {a, b, c}]
Out[1]:= {{a -> -13.718152514413195, b -> 57.69559274505197, c -> 2.2}}.
```

Die Funktionsgleichung lautet:

```
In[2]:= f[x_]:= -13.718152514413195 * x^2 + 57.69559274505197 * x + 2.2.
In[3]:= Solve[D[f[x], x] == 0, x]
Out[3]:= {{x -> 2.102892232916684}}
```

```
In[4]:= f[2.102892232916684]
Out[4]:= 62.863806928546985
```

Das Maximum ergibt sich in der Höhe von $y_{max} \approx 62,86 \text{ m}$, also weit entfernt von realistischen Höhen, die bei einem Basketballwurf erreicht werden können.

Im Physikunterricht könnte jetzt berechnet werden, welche Geschwindigkeit, Kraft, usw. ein Mensch erzeugen muss, um einen Basketball auf diese Höhe zu befördern. Ist ein Mensch überhaupt zu einer solchen Leistung fähig? Wir wollen versuchen diese Fragen zu beantworten.

Arbeitsauftrag 17: Der Einfallswinkel soll wie schon zuvor 89° betragen. Der Basketball hat eine Masse von $m = 570 \text{ g}$. Der Ball wird $0,3 \text{ s}$ beschleunigt und dann mit einer Geschwindigkeit (Betrag) v_0 (Luftwiderstand wird vernachlässigt) aus der Höhe $h = 2,2 \text{ m}$ abgeworfen. Welche Abwurfgeschwindigkeit v_0 ist erforderlich, um den Ball auf die zuvor im Arbeitsauftrag 16 errechnete Höhe zu befördern? Welche Leistung

ist dafür notwendig? Ist ein Mensch zu einem solchen Wurf fähig? Diskutiere das Ergebnis! (Info: Die härtesten Handballschlagwürfe sind $\approx 122 \frac{km}{h}$ schnell⁶⁷.)

Wir betrachten zuerst die Bewegungsgleichungen des Balls. Wir können die Bewegung (schräger Wurf nach oben) in einen vertikalen und horizontalen Anteil zerlegen,

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{x0} * t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} * g * t^2 + v_{y0} * t + h\end{aligned}$$

wobei h die Abwurfhöhe und v_{x0} und v_{y0} die Geschwindigkeitskomponenten zum Zeitpunkt $t = 0$ sind.

Die Geschwindigkeit v_y wird in der Höhe des Extremums Null. Es gilt folgender vertikaler Geschwindigkeitszusammenhang:

$$v_y(t) = v_{y0} - g * t$$

$$v_y(t_{max}) = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_{y0}}{g}$$

t_{max} ist die Zeit, die der Ball benötigt, um die Höhe y_{max} zu erreichen.

$$\text{Es gilt: } y(t_{max}) = y\left(\frac{v_{y0}}{g}\right) = y_{max}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichung für $y(t)$ ein, so erhält man (bereits vereinfacht):

$$y_{max} = \frac{1}{2} * \frac{v_{y0}^2}{g} + h$$

Mit Äquivalenzumformungen und durch Einsetzen der bekannten Größen kommt man zum Ergebnis: $v_{y0} = \sqrt{2 * g * (y_{max} - h)} \approx 34,5 \frac{m}{s}$.

Für die Berechnung von v_{x0} verwenden wir die Anfangsbedingungen:

$$x(t_k) = x_k = 4,191 \text{ und } y(t_k) = y_k = 3,05.$$

Setzt man diese Beziehungen in die Ausgangsgleichungen ein, so sieht man, dass man sich aus der Gleichung (vertikaler Anteil) die Zeit t_k durch Lösen einer quadratischen Gleichung ausrechnen kann. Mit der Zeit t_k ist übrigens die Zeit vom Abwurf bis hin zum Korbdurchgang gemeint. Als sinnvolle Lösung für t_k bekommt man $t_k \approx 7 \text{ s}$.

v_{x0} ergibt sich aus der Gleichung für die horizontale Richtung und beträgt $v_{x0} = \frac{x_k}{t_k} \approx 0,6 \frac{m}{s}$.

Die Abwurfgeschwindigkeit v_0 errechnet sich mit dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \approx 34,5 \frac{m}{s}$$

Die gespeicherte kinetische Energie beträgt beim Abwurf

$$E_{Kin} = \frac{m * v_0^2}{2} \approx 339,2 \text{ J}$$

Der Ball besitzt aufgrund seiner erhöhten Lage eine potentielle Energie von

$$E_{Pot} = m * g * h \approx 12,3 \text{ J}$$

Die Gesamtenergie ist die Summe dieser beiden Energien und bleibt während der Bewegung stets gleich: $E = E_{Kin} + E_{Pot} \approx 351,5 \text{ J}$

⁶⁷ vgl. Internetquellen: RP Online

Für die beim Abwurf erforderliche Leistung ergibt sich

$$P = \frac{dE}{dt} \approx 1171,7 \text{ W} \approx 1,6 \text{ PS.}$$

Beim Handball wird der Ball bei den härtesten Würfen bis zu $34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ schnell. Wir verlangen von unserem/unserer ModellwerferIn in etwa dieselbe Wurfgeschwindigkeit, jedoch nicht in horizontaler Richtung, sondern beinahe senkrecht nach oben. Führt man sich vor Augen, dass der Ball aufgrund des großen Abwurfwinkels nur schwer aus einer biomechanisch günstigen Position zu beschleunigen ist, so wird klar, dass dieser Wurf von einem Mensch nicht ausgeführt werden kann.

Arbeitsauftrag 18: Fasse die wichtigsten Erkenntnisse und Aussagen dieses Projektbeispiels kurz zusammen! Was kannst du für dich persönlich mitnehmen?

Lösungserwartung:

Um einen Basketballfreiwurf erfolgreich zu verwandeln, bedarf es an einer für die Körpergröße passenden Abwurfgeschwindigkeit. Diese sollte zunächst mit der angegebenen Formel im Arbeitsauftrag 10 berechnet werden. Dass diese dann noch optimiert werden kann, zeigten wir im Arbeitsauftrag 14.

Wir brachten auch in Erfahrung, dass große SpielerInnen beim Freiwurf einen Vorteil gegenüber kleineren SpielerInnen haben, da ihnen aufgrund ihres höheren Abwurfes größere Winkelabweichungen gestattet sind. Sie können deshalb auch mit einer geringeren Geschwindigkeit abwerfen, was auch bedeutet, dass sie den Ball gefühlvoller beschleunigen können. Zusätzlich sparen sie aufgrund einer geringeren muskulären Anspannung noch ein wenig Energie.⁶⁸

In einem bewegten Basketballspiel geht das Ganze nicht so leicht von der Hand. Hier wirft man nicht nur aus unterschiedlichen Distanzen und es kommt auch der Gegner hinzu, über den man hinweg werfen muss. Nach Aussage von Holger Geschwinder liegt der optimale Abwurfwinkel für Dirk Nowitzki bei 60° .⁶⁹

⁶⁸ vgl. Ludwig 2008, S. 75 und Thaller & Mathelitsch 2007, S. 31

⁶⁹ vgl. Ludwig 2008, S. 76

4.2 KÖRPER: Mathematik hinter sportlichen Bewegungen

Dieser Projektvorschlag soll einen ersten Einblick in die Welt der Sportbiomechanik gewähren. Mit Hilfe vereinfachter Modelle werden den SchülerInnen zunächst biomechanische Grundlagen vermittelt, um zu verstehen, wie sportliche Bewegungen überhaupt funktionieren. Es werden Aufgaben zu verschiedenen Themen aus dem Sportbereich aufgezeigt und näher untersucht. Die einzelnen Problemstellungen werden in Arbeitsblättern verpackt und den SchülerInnen zu Bearbeitung ausgehändigt. Die Arbeitsblätter setzen sich aus Aufgaben mit unterschiedlichen Lehrzielen zusammen. So gibt es einerseits Beispiele, bei denen Sachverhalte, Gesetzmäßigkeiten und Diagramme erforscht, beschrieben und interpretiert werden müssen, aber auch Beispiele, bei denen mit Hilfe mathematischer und auch physikalischer Beziehungen gesuchte Größen berechnet werden müssen. Es werden dabei mathematische Stoffinhalte wie Bewegungsgleichungen, Differential- und Integralrechnung und Differentialgleichungen behandelt. Als lernunterstützende Technologien werden neben dem CAS, die interaktive dynamische Mathematik-Software Geogebra und das Tabellenkalkulationsprogramm Excel verwendet. Grundkenntnisse im Umgang mit diesen Programmen werden vorausgesetzt. Auch grundlegende physikalische Kenntnisse aus dem Bereich Mechanik fester Körper werden vorausgesetzt. Die Lösungen zu den einzelnen Aufgabenstellungen werden in den Arbeitsblättern sofort angegeben, um einen sofortigen Einblick in die jeweilige Thematik zu erhalten. Im Anschluss an diese Arbeit werden die Arbeitsblätter im Kopierformat für den Unterrichtseinsatz noch einmal angeführt. Einige Themen bieten sich für den Physikunterricht zur weiteren tieferen Behandlung optimal an und ermöglichen somit einen fächerübergreifenden Unterricht mit Mathematik und Bewegung und Sport.

4.2.1 Arbeitsblatt 1-1: Muskelkraft und Geschwindigkeit

Die Sportbiomechanik versucht Erscheinungen und Ursachen, sowie Wirkungen von Bewegungen im Sport innerhalb einer biologischen Struktur (=menschlicher Organismus) mechanisch zu beschreiben und zu erklären.⁷⁰ Um später Sportbewegungen verstehen und analysieren zu können, werden wir kurz zentrale Begriffe aus der Mechanik wie die Kraft ($F = m \cdot a$), Arbeit ($W = F \cdot s$) oder Leistung ($P = \frac{W}{t}$) im biomechanischen Kontext diskutieren.⁷¹

Aufgabe 1: Löst in Partnerarbeit: Leistet Matthias Steiner⁷² (Olympiasieger 2008 in Peking) in dieser Situation Arbeit? Bevor ihr eure Antwort abgibt und gründet, denkt daran, dass sein Körper irgendwann müde wird und die 258 kg nicht mehr halten kann!



Abb. 10

Antwort: _____.

[Lösung: Nach der klassischen Definition aus der Physik $W = F \cdot s$ wird keine Arbeit verrichtet. Man benötigt für das Halten zwar eine enorme Kraft, doch dem Gegenstand wird keine Bewegungsänderung erteilt. Die Ermüdung seiner Arme zeigt jedoch, dass Energie umgesetzt wird.]⁷³

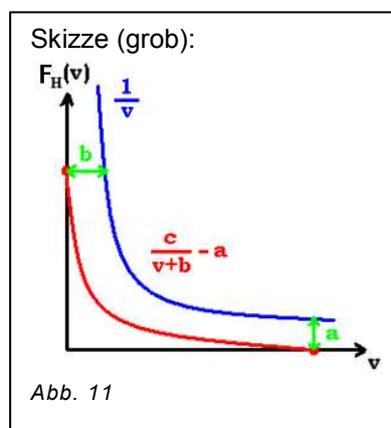
Wir wollen nun die Kräfte näher betrachten, die von einem Muskel hervorgerufen werden. Man unterscheidet die grundsätzlich mögliche Kraft eines Muskels F_H (Index H : Hill'sche Muskelkraft – mehr dazu später!) und die gerade gewollte bzw. tatsächlich auftretende Kraft F_M (Index M : Momentan auftretende Muskelkraft – mehr dazu später!). F_H hängt nun von der Kontraktionsgeschwindigkeit v ab: Je größer die erforderliche Muskelkraft ist, desto geringer wird die Bewegungsgeschwindigkeit.⁷⁴

Aufgabe 2: Überlege dir, durch welche Funktion (Annahme: F_H und $v \geq 0$) der Kraft-Geschwindigkeitszusammenhang eines Muskels dargestellt werden kann. Sind Einschränkungen bei der Definition notwendig? Wenn ja, wie ist demnach die Funktion zu verändern? (Hinweis: Es existiert eine realistische maximale Muskelkraft bzw. Kontraktionsgeschwindigkeit.) Führe deine Veränderungsschritte an und begründe! Skizziere deine Überlegung!

Überlegungen [Lösung]:

Aufgrund der gegenläufigen Beziehung zwischen F_H und v bietet sich eine Funktion der Bauart $F_H(v) = \frac{c}{v}$ an, die geometrisch eine Hyperbel darstellt⁷⁵ (vgl. Abb. 11: blaue Kurve mit $c = 1$). Da F_H und v in der Praxis nach oben hin beschränkt sind, gehen wir von Achsenschnittpunkten aus. Um diese zu erhalten, schieben wir $F_H(v)$ in die negative x -Richtung (Parameter b) und in die negative y -Richtung (Parameter a). Es entsteht somit folgende Funktion (vgl. Abb. 11: rote Kurve):

$$F_H(v) = \frac{c}{v+b} - a$$



⁷⁰ vgl. Willimczik 1989, S. 15 und Hochmuth 1982, S. 9

⁷¹ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 15 und Kraker & Paill 1990, S. 47, 60 und 66

⁷² vgl. Wikipedia-Artikel: Matthias Steiner

⁷³ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 15

⁷⁴ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 16 und Willimczik 1989, S. 90

⁷⁵ vgl. Wick 2005, S. 91

4.2.2 Arbeitsblatt 1-2: Hill'sche Gleichung

Diese Kraft-Geschwindigkeitsbeziehung aus Aufgabe 2 wird in der Literatur als Hill'sche Gleichung bezeichnet. Sie gilt für konzentrische Bewegungen ($v \geq 0$, siehe später!) und lässt sich folgendermaßen anschreiben:

$$F_H(v) = \frac{c}{v + b} - a.$$

$F_H(v)$ die Muskelkraft und v die Kontraktionsgeschwindigkeit kennen wir bereits. Die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sind Muskeleigenschaften, die von Mensch zu Mensch verschieden sind.⁷⁶

Aufgabe 3: Welche Dimensionen haben die einzelnen Muskelkonstanten a, b und c , wenn F_H die Dimension einer Kraft $[N]$ und v die Dimension einer Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$ hat? (Hinweis: Die Einheit der Leistung ist das Watt $[W = N * \frac{m}{s}]$.) Trage deine Vermutungen in die nachstehende Tabelle ein! Versuche des Weiteren den Konstanten die jeweils richtige Aussage über deren spezielle Muskeleigenschaft zuzuordnen!

[Lösung]:

Konstante	Dimension/ Einheit	Beschreibung ⁷⁷
[b]	Geschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Zusammenhang mit der Reaktionskonstanten der führenden chemischen Reaktion (=Ursache für eine Muskelkontraktion)
[c]	Leistung $[W]$	Maß für den Verbrauch an chem. Energie pro Zeitintervall (=chem. Leistung) während der chemischen Reaktion
[a]	Kraft $[N]$	Zusammenfassung aller auftretenden „Reibungskräfte“ während der chemischen Reaktion

Tab. 4

Überlegungen [Lösung]:

Setzt man die bekannten Einheiten der Größen F_H und v in die Hill'sche Gleichung ein, so erhält man folgenden Zusammenhang:

$$F_H(v) = \frac{c}{v + b} - a \quad | \quad [N] = \frac{c}{\left[\frac{m}{s}\right] + b} - a.$$

Man kann erkennen, dass die Konstante a und der Ausdruck $\frac{c}{\frac{m}{s} + b}$ die Dimension einer Kraft, also die Einheit $[N]$ haben müssen, damit eine Gleichheit bezüglich der Einheiten besteht. Es ist naheliegend, dass die Größe b die Dimension einer Geschwindigkeit bzw. die Einheit $\left[\frac{m}{s}\right]$ hat, da ansonsten der Nenner des Bruches nicht weiter vereinfacht werden kann. Für c versucht man jetzt eine passende Einheit zu finden, sodass $\frac{[c]}{\left[\frac{m}{s}\right]} = [N]$ gilt. Setzt man geeignet ein bzw. nutzt einfach den Hinweis aus der Angabe, so ergibt für c die Leistungsdimension bzw. die Einheit $[W]$.

Aufgabe 4: In der Trainingslehre wird grundsätzlich zwischen drei Muskularbeitsweisen unterschieden. Recherchiere im Sportkundebuch, welche das sind und wie sie dort definiert sind? Überlege dir zu jeder Arbeitsweise zwei Beispiele aus dem Sport!⁷⁸

⁷⁶ vgl. Thaller 2006, S. 87, Mathelitsch & Thaller 2008, S. 18, Wick 2005, S. 91f. und Sust 2009, S. 50

⁷⁷ vgl. Sust 2009, S. 50

⁷⁸ vgl. Apolin & Redl 2006 (Band 2), S. 51ff. und Wick 2005, S. 92f.

_____ : _____
 Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

_____ : _____
 Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

_____ : _____
 Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

[Lösung⁷⁹: Es wird zwischen der isometrischen (=Widerstand wird gehalten/ Sportbeispiele: Halteübungen beim Geräteturnen, Abfahrtschocke beim Skilauf), konzentrischen (=ein Widerstand wird überwunden/ Beispiele: Klettern, Radfahren) und exzentrischen Muskelaktivität (=einem Widerstand wird nachgegeben, Beispiele: Bremsvorgänge wie Telemark-Landung beim Skisprung, Landung beim Weitsprung) unterschieden.]

Aufgabe 5: Bei welcher Geschwindigkeit kann laut Graph von $F_H(v) = \frac{c}{v+b} - a$ der Muskel die sogenannte isometrische Kraft F_{max} , aufbringen? Bestimme auch die maximale Kontraktionsgeschwindigkeit v_{max} ?⁸⁰ (Hinweis: Betrachte die Erklärungen in Abb. 12!)

_____ $F_{max} =$ _____
 _____ $v_{max} =$ _____

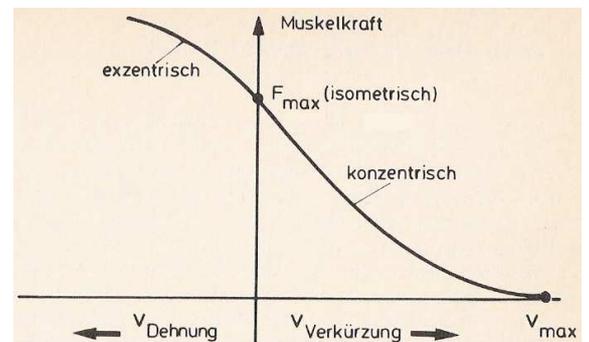


Abb. 12

[Lösung:

$$F_H(0) = F_{max} \Leftrightarrow F_{max} = \frac{c}{b} - a$$

$$F_H(v_{max}) = 0 \Leftrightarrow v_{max} = \frac{c}{a} - b]$$

Bei der konzentrischen Muskelarbeitsweise wird der aktive Muskel verkürzt und bei exzentrischer Kontraktion gedehnt. Man sieht, dass bei exzentrischer Kontraktion sogar noch größere Kräfte auftreten als die bei isometrischen Bedingungen gemessene Maximalkraft F_{max} (vgl. Abb. 12). Schafft man es z.B. 100 kg auf den Schultern zu halten, so könnte man ca. 120 kg bis zur Hocke absenken.⁸¹

Aufgabe 6: Die Muskeleigenschaftswerte zweier LeichtathletInnen liegen vor. Du als ihr Coach hast die Aufgabe ihnen Auskunft über ihren Ist-Leistungsstand zu geben! Zeichne dazu beide Funktionen (Annahme: F_H und $v \geq 0$) mit veränderbaren Muskelkonstanten in Geogebra und bestimme aussagekräftige Werte für dein Feedback! Bei welcher Geschwindigkeit sind beide Muskel gleich kräftig? Wie groß ist dort die Kraft? Sind die Maximalkraftwerte der SportlerInnen realistisch? Begründe!

5000 m LäuferIn	a= 300 N	b= 0,7 m/s	c= 2200 W
KugelstoßerIn	a= 400 N	b= 0,4 m/s	c= 1700 W

Tab. 5

⁷⁹ vgl. Apolin & Redl 2006 (Band 2), S. 51ff., Weineck 2004, S. 244. Zit.n. Harre 1976, S. 12f. und Martin 1977, S. 65 und Willimczik 1989, S. 88f.

⁸⁰ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 18 und Thaller 2003, S. 89

⁸¹ vgl. Willimczik 1989, S. 90 und Apolin & Redl 2006 (Band 2), S. 53

Ausführung in Geogebra [Lösung]:

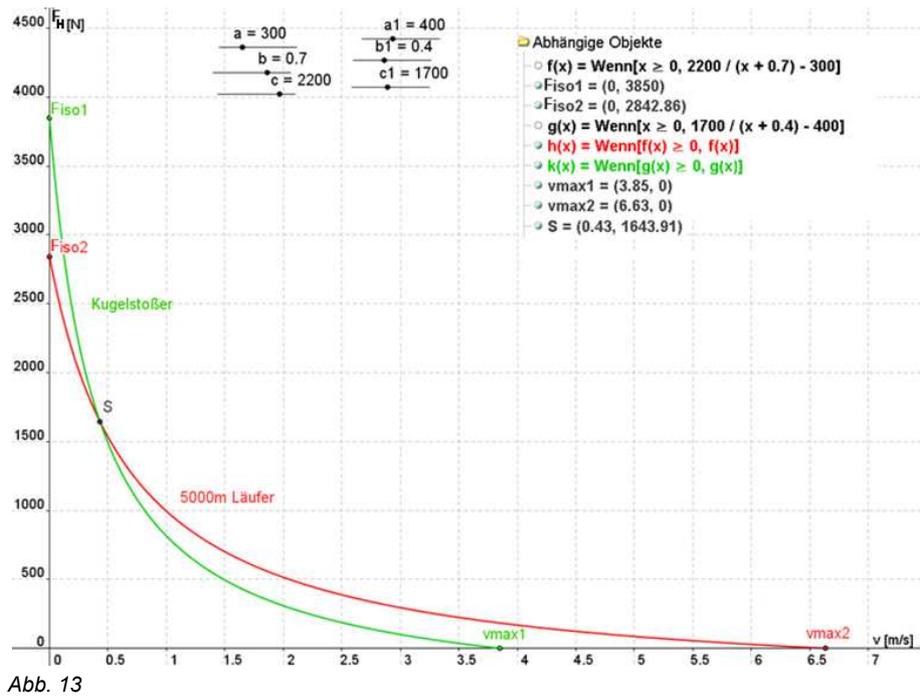


Abb. 13

Feedback für den/die KugelstoßerIn: _____.

[Lösung: Deine Maximalkraft beträgt 3850 N. Mit steigender Geschwindigkeit fällt jedoch die Kraft stark ab, das heißt dein Muskel ist während der Bewegung nicht so kräftig. Es ergibt sich eine maximale Geschwindigkeit von $3,85 \frac{m}{s}$.]

Feedback für den/die 5000 m LäuferIn: _____.

[Lösung: Deine isometrische Kraft beträgt ≈ 2843 N. Dein Muskel ist auch bei höheren Geschwindigkeiten kräftig. Deine maximale Kontraktionsgeschwindigkeit beträgt $\approx 6,63 \frac{m}{s}$.]

Die beiden Muskeln sind bei einer Geschwindigkeit von $0,43 \frac{m}{s}$ gleichkräftig. Sie können dort eine Kraft von ≈ 1644 N aufbringen.

Die Maximalkraftwerte sind _____.

[Lösung: Z.B.: 3850 N entsprechen 385 kg. Eine solche Last kann ein Mensch nicht anheben.]

4.2.3 Arbeitsblatt 1-3: Muskelleistung

Aufgabe 7: Leite allgemein die Formel für die Berechnung der maximalen Muskelleistung her! (Hinweis: Die mechanische Leistung ist definiert als $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$.)

Berechne diese dann für die Muskelwerte des/der KugelstoßerIn ($a = 400 \text{ N}$, $b = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $c = 1700 \text{ W}$)! Stelle mit Excel die funktionalen Zusammenhänge $F(v)$ und $P(v)$ gemeinsam in einem Diagramm dar und kennzeichne in beiden Graphen die maximale Leistung!

$P(v) = \underline{\hspace{10em}}$ [Lösung: $P(v) = F_H \cdot v = \left(\frac{c}{v+b} - a\right) \cdot v$]

Überlegungen:

[Zwischenlösungen: $\frac{dP}{dv} = F_H' \cdot v + F_H \cdot v' = \frac{-c}{(v+b)^2} \cdot v + \left(\frac{c}{v+b} - a\right) \cdot 1 = \frac{b \cdot c}{(v+b)^2} - a$

Durch Nullsetzen dieses Ausdrucks erhält man $v_{opt} = \sqrt{\frac{b \cdot c}{a}} - b \approx 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die optimale Kraft beträgt $F_{opt} = \sqrt{\frac{a \cdot c}{b}} - a \approx 904 \text{ N}$.]

$P_{max} = \underline{\hspace{10em}}$

[Lösung: $P_{max} = F_{opt} \cdot v_{opt} = a \cdot b + c - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c} \approx 817 \text{ W}$]

Ausführung in Excel [Lösung]:

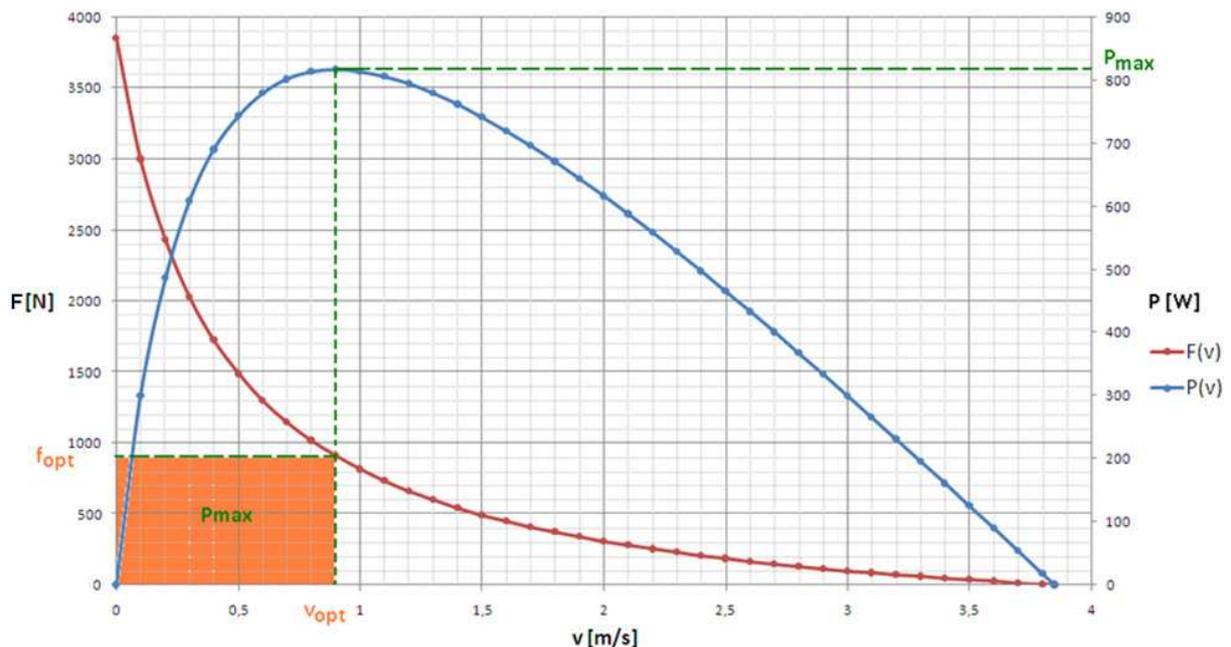


Abb. 14

4.2.4 Arbeitsblatt 1-4: Muskelsteuerung

Jeder Muskel besteht aus mehreren Muskelfasern, die vom Gehirn aus über einen Nerv angesteuert werden. Diese „motorischen Einheiten“ bekommen den Befehl zu kontrahieren oder nicht. Je mehr solcher Einheiten aktiviert werden, desto mehr Kraft steht für eine Bewegung zur Verfügung. Diese gerade gewollte bzw. tatsächlich wirkende Kraft F_M haben wir bereits im Arbeitsblatt 1 kurz angesprochen. Sie setzt sich zusammen aus der Aktivierungsfunktion $A(t)$, die Werte zwischen 0 (keine Ansteuerung, daher keine Kraft) und 1 (maximale Ansteuerung, isometrische Kraft) multipliziert mit der theoretisch möglichen Kraft F_H . Es gilt: $F_M = A(t) * F_H$.⁸²

Aufgabe 8: „Die zeitliche Änderung der Anzahl der eingeschalteten motorischen Einheiten ist proportional zur Zahl der noch nicht eingeschalteten, aber gleichzeitig einschaltbaren motorischen Einheiten multipliziert mit einem konstanten Einschaltparameter S [s^{-1}]“.⁸³

Versuche eine Gleichung aufzustellen, die diesen Sachverhalt (Aktivierungsvorgang) beschreibt! Löse die Gleichung, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ noch keine motorischen Einheiten aktiviert sind!

Überlegungen [Lösung]⁸⁴:

$n(t)$... Anzahl der aktivierten motorischen Einheiten zum Zeitpunkt t

n_{max} ... Maximal mögliche Anzahl von aktivierten motorischen Einheiten

Häufig werden solche Einschaltprozesse durch eine Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{dn(t)}{dt} = n_{max} - n(t) = S * (n_{max} - n(t)) \quad n(0) = 0, \quad S \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung kann mit der Methode der „Trennung der Variablen“ oder mit CAS gelöst werden:

$$\frac{dn(t)}{n_{max} - n(t)} = S * dt$$

Integriert man die Funktion nach der Zeit t , so erhält man folgenden Ausdruck:

$$-\ln(|n(t) - n_{max}|) = S * t + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$|n(t) - n_{max}| = e^{-S*t} * e^{C_1}$$

$$n(t) = C * e^{-S*t} + n_{max} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$n(0) = 0: C = -n_{max} \Rightarrow n(t) = n_{max} * (1 - e^{-S*t})$$

Aufgabe 9: Bestimme die Aktivierungsfunktion $A(t)$, welche durch $n(t) = A(t) * n_{max}$ gegeben ist! Was stellen die Größen $A(t)$ und S dar? Vervollständige den Text! Wie lautet schließlich die Beziehung für die tatsächlich wirkende Kraft F_M ?

$A(t) =$ _____

Die Aktivierungsfunktion bei maximaler willentlicher Anstrengung gibt an,

_____.

Der Einschaltparameter S (personenspezifisch) gibt _____ an. Je _____ / _____ S , desto _____ / _____ der Kurvenverlauf und desto _____ / _____ die Muskelsteuerung. [Auswahl: größer, schneller, flacher, kleiner, steiler, langsamer]

⁸² vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 21f. und Weineck 2004, S. 90

⁸³ vgl. Schmalz 1994, S. 76f.

⁸⁴ vgl. Sust 2009, S. 49f. und Thaller & Tilp 2004, S. 71 f.

$$F_M = \underline{\hspace{2cm}}$$

Überlegungen [Lösung]:

Vergleicht man die Beziehung für $n(t)$ aus Aufgabe 8 mit der aus der Angabe, so erkennt man, dass die Aktivierungsfunktion $A(t)$ durch $A(t) = 1 - e^{-S \cdot t}$ gegeben ist.

Die Aktivierungsfunktion $A(t)$ gibt an, wie viele von den maximal möglichen aktivierbaren motorischen Einheiten gerade eingeschaltet sind.⁸⁵

Der Einschaltparameter S (personenspezifisch) gibt an, wie schnell der Muskel angeregt wird. Je kleiner / größer S , desto flacher / steiler der Kurvenverlauf und desto langsamer / schneller die Muskelansteuerung.

Nach $F_M = A(t) \cdot F_H$ ergibt sich für die gerade gewollte Kraft: $F_M = (1 - e^{-S \cdot t}) \cdot F_H$

Aufgabe 10: Bei welchen Bewegungen ist die Geschwindigkeit der Aktivierung besonders wichtig? Nenne zwei Beispiele aus dem Sport, bei denen die Ansteuerungsgeschwindigkeit eine große Rolle spielt!

Antwort: _____

Beispiele aus dem Sport: _____, _____

[Lösung: Bei kurz andauernden Bewegungen ist es entscheidend, so schnell wie möglich die maximal verfügbare Kraft zu entwickeln. Beim Absprung beim Hochsprung oder bei einem Angriffsschlag beim Boxen ist eine schnelle Muskelaktivierung vonnöten.]

⁸⁵ Thaller & Tilp 2004, S. 71f.

4.2.5 Arbeitsblatt 2-1: Bestimmung der eigenen Sprungkraft

Der nachfolgende Test zur Ermittlung der konzentrischen Sprungkraft wird in der Sportwissenschaft als *Counter-Movement-Jump (CMJ)*⁸⁶ bezeichnet:

Stelle dich mit gestreckten Beinen seitlich zu einer Wand und markiere mit den Fingerspitzen, bei nach oben ausgestreckten Armen deine Standhöhe h_{ab} . Dann gehst du in die Hocke und springst möglichst gerade weit nach oben. Kennzeichne den Punkt, den du aus der Hockposition gerade noch erreichst (Hockhöhe h_0) und den maximal erreichbaren Punkt während des Sprungs (maximale Sprunghöhe h_{max}). Die Differenz $h_{ab} - h_0$ ergibt die Hocktiefe s bzw. $h_{max} - h_{ab}$ die tatsächliche Sprunghöhe h . In unserem Sprungmodell setzen wir die vom Muskel erzeugte Beschleunigungskraft F_B als konstant voraus.⁸⁷

Aufgabe 11: Bildet Paare und probiert den Test aus. Füllt die Datenfelder aus und versucht gemeinsam die nachfolgenden Gesetze nachzuvollziehen!

Beschreibt in Worten, was genau mit diesen physikalischen Formeln berechnet wird! (Hinweis: Siehe angegebenes Beispiel!) Setzt anschließend eure Werte ein und berechnet! Interpretiert eure Ergebnisse mit Hilfe der Tab. 6!

Eingangsdaten:

Name des Springers: _____ Masse: $m = \underline{\hspace{2cm}}$ kg
 Standhöhe: $h_{ab} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ m Hockhöhe: $h_0 \approx \underline{\hspace{2cm}}$ m
 Hocktiefe: $s \approx \underline{\hspace{2cm}}$ m Max. Sprunghöhe: $h_{max} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ m
 Erdbeschleunigung: $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ Sprunghöhe: $h \approx \underline{\hspace{2cm}}$ m

Objekt	Leistung
Mikrowelle	500- 800 W
Geschirrspüler	800- 1 kW
Haarfön	1- 1,4 kW
Elektro-Scooter	1,4- 1,6 kW
Motorsäge	1,6- 2 kW

Tab. 6

Auswertung:

_____ : $v_{ab} = \sqrt{2 * g * h} \approx \underline{\hspace{2cm}} \frac{m}{s}$ [Geschwindigkeit für einen h hohen Sprung]

_____ : $a = \frac{v_{ab}^2}{2*s} \approx \underline{\hspace{2cm}} \frac{m}{s^2}$ [Beschleunigung auf v_{ab} über h von Hockstellung bis Absprung]

Impuls, entspricht der „Wucht“, mit der man sich vom Boden abstößt⁸⁸ : $p = m * v_{ab} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ Ns

_____ : $F_B = m * a \approx \underline{\hspace{2cm}}$ N [Kraft, um Masse auf v_{ab} über h zu beschleunigen]

_____ : $F_g = m * g \approx \underline{\hspace{2cm}}$ N [Kraft, um die Erdanziehung zu überwinden]

_____ : $F_{ges.} = F_B + F_g \approx \underline{\hspace{2cm}}$ N [Gesamtkraft]

_____ : $E_{kin} = \frac{m*v_{ab}^2}{2} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ J [Kinetische Energie am Ende der Beschleunigung]

_____ : $t_{ab} = \frac{2*s}{v_{ab}} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ s [Absprunzeitpunkt]

_____ : $P = \frac{E_{kin}}{t_{ab}} \approx \underline{\hspace{2cm}}$ W [Erbrachte Leistung am Ende der Beschleunigung]

Interpretation: _____.

[Meine erbrachte Leistung beim CMJ entspricht z.B. der Leistung einer Motorsäge]

⁸⁶ vgl. Weineck 2004, S. 329

⁸⁷ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 57 und Thaller 2003, S. 87

⁸⁸ vgl. Müller 2009, S. 206

4.2.6 Arbeitsblatt 2-2: Sprunganalyse mit Hilfe von Kraftmessplatten

In der Biomechanik und Sportwissenschaft werden für die Bestimmung vertikaler und horizontaler Kraftkomponenten *Kraftmessplatten* verwendet. Dabei lassen sich mit Piezo-Kraftsensoren, die unter einer Messplattform befestigt sind, Bodenreaktionskräfte messen. Auf der Oberfläche eines Piezokristalls (besteht z.B. aus Quarz) entsteht aufgrund der Einwirkung von Druck- oder Zugkräften eine zur Kraft proportionale elektrische Spannung. Mit entsprechender Software können die erzeugten Spannungen erfasst und ausgewertet werden. Solche Kraftmessplatten werden unter anderem bei sportmotorischen Leistungstests, im Weit-/ Hochsprung, im Geräteturnen, Schwimmsport sowie bei der Gang- und Laufanalyse eingesetzt.⁸⁹

Aufgabe 12: Die Kraft F_z in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der Zeit t eines CMJ wurde mit einer Kraftmessplatte aufgezeichnet (vgl. Abb. 15). Ordne mit Pfeilen den Sprungphasen die jeweils richtige Zeitspanne (A, B, usw.) und Aussage zu!

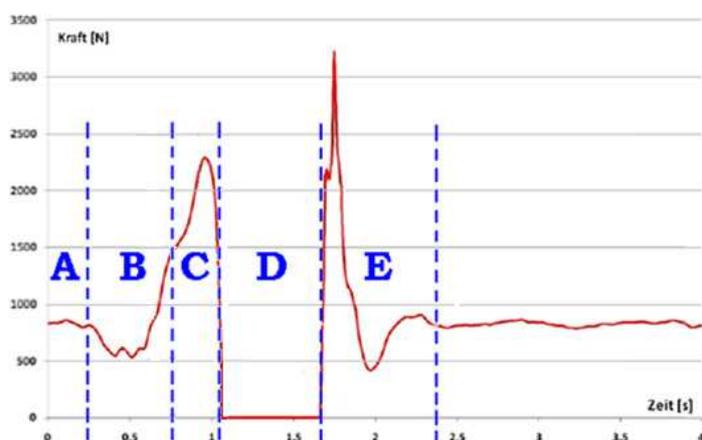
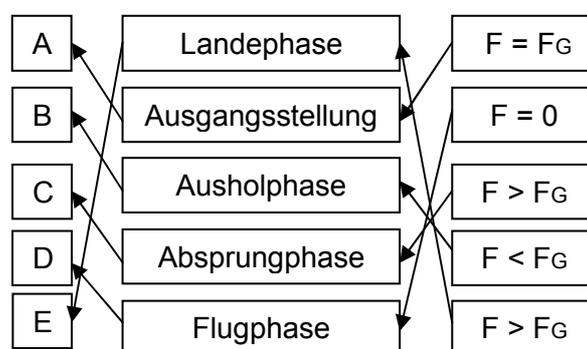


Abb. 15



Aufgabe 13: Wir betrachten den CMJ bis zum Erreichen der höchsten Position des Körperschwerpunkts. Beantworte die nachfolgenden Fragen! Begründe die Zusammenhänge mit Hilfe von Differentialquotienten, nämlich $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$!

- a) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn der Körperschwerpunkt an der tiefsten bzw. höchsten Stelle ist?

Antwort: _____.

[Lösung: v ist die Steigung der Tangente der s, t -Kurve. Bei Extremwerten (Minima- und Maxima) ist diese Steigung null. v ist daher bei den Extremwerten von s null.]

- b) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn die Geschwindigkeit ihren niedrigsten (=während der Abwärtsbewegung des KSP) bzw. höchsten Wert (=unmittelbar vor dem Absprung) erreicht?

Antwort: _____.

[Lösung: a ist die Steigung der Tangente der v, t -Kurve. Bei Extremwerten (Minima und Maxima) ist diese Steigung null. a ist daher bei den Extremwerten von v null.]

- c) Nehmen wir den Landezeitpunkt in unser Betrachtungsfenster auf. Wie groß ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt der Landung? Ist die Kurve an dieser Stelle differenzierbar? Begründe!

⁸⁹ vgl. Wick 2009, S. 144ff.

Antwort: _____.

[Lösung: Zum Zeitpunkt der Landung weist die Kurve einen Knick auf. Das würde bedeuten, dass sich v in Nullzeit von einem Wert auf den anderen verändert. Die Beschleunigung wäre also an dieser Stelle unendlich groß. Die Kurve ist an dieser Stelle nicht differenzierbar, weil sie dort nicht definiert ist.]

Aufgabe 14: Skizziere in den nachfolgenden drei Diagrammen den jeweils gesuchten Funktionsverlauf! (Hinweis: Die abhängige Größe s beschreibt hier den Weg des Körperschwerpunkts.) Wie könntest du die gesuchten Funktion $v(t)$ und $s(t)$ mathematisch beschreiben? Verwende für diese Aufgabe deine Erkenntnisse aus Aufgabe 13!

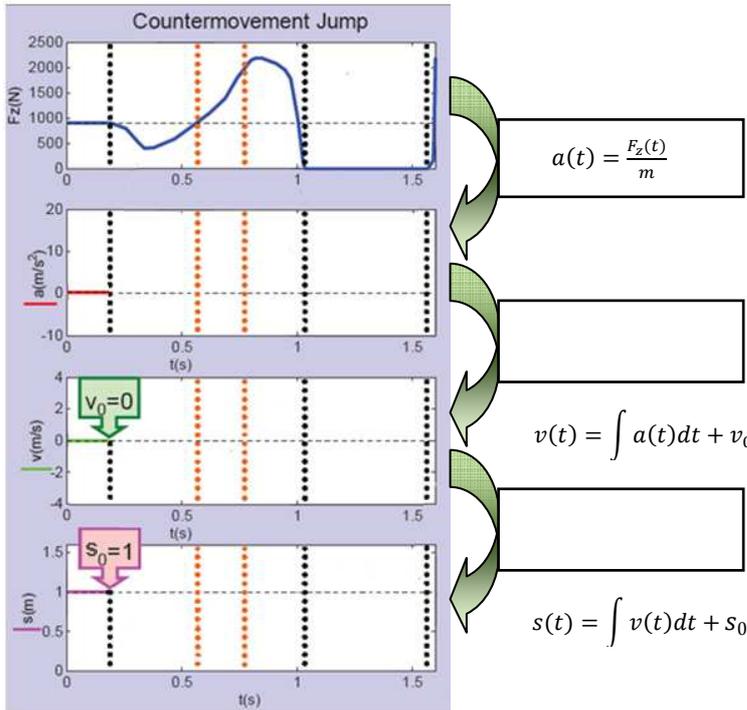


Abb. 16

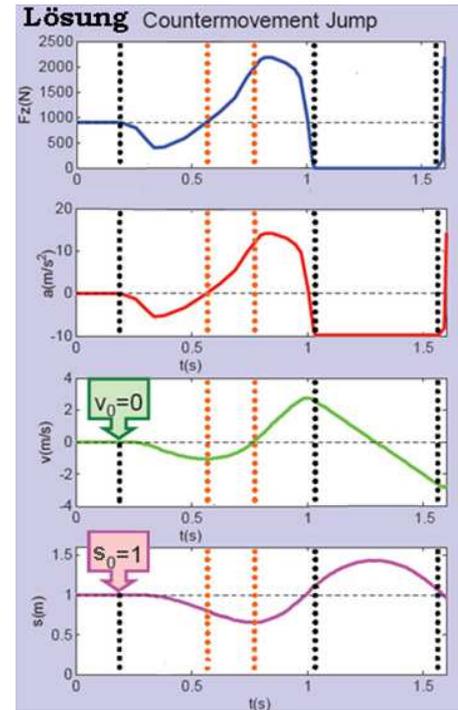


Abb. 17

4.2.7 Arbeitsblatt 2-3: Belastung der Achillessehne

Wir nehmen an, dass die Kräfte im rechten Winkel auf den Fuß wirken (vgl. Abb. 18). Die vom Muskel erzeugte Beschleunigungskraft F_B kann in Aufgabe 15 vernachlässigt werden, da hier der einbeinige Zehenstand betrachtet wird und keine Gelenkbewegung stattfindet. Für Aufgabe 16 setzen wir eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und eine konstant wirkende Kraft F_B voraus.

Aufgabe 15: Überprüfe, ob die Aussage: „Die Kraft an der Achillessehne ist 2,5-mal so groß, wie die Kraft am Fußballen“⁹⁰ stimmt!

Wie groß ist die Kraft F_L am Fußballen? Überlege! Bestimme dann die Kraft F_K , die auf die Achillessehne wirkt? (Hinweis: Wende das Hebelgesetz: Kraft*Kraftarm=Last*Lastarm an! Verwende die Abmessungen aus Abb. 18!)

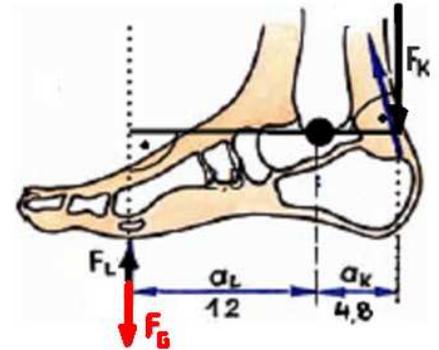


Abb. 18: Maße in cm

Überlegungen [Lösung]⁹¹:

Am Fußballen drückt die Gewichtskraft F_g auf den Boden.

Der Boden seinerseits übt die Kraft F_L senkrecht nach oben auf den Fuß aus. Es gilt somit: $F_L = F_g$. Die Kraft F_K auf die Achillessehne kann man mit dem Hebelgesetz berechnet werden: $F_K * a_K = F_L * a_L$, wobei $F_L = F_g$ ist.

Setzt man die gegebenen Werte ein, so ergibt sich für die Kraft $F_K = F_g * \frac{a_L}{a_K} = F_g * 2,5$.

Die Achillessehne wird mit einer 2,5-mal so großen Kraft belastet wie der Fußballen.

Aufgabe 16: Welche Kräfte wirken bei einem senkrechten Sprung auf die Achillessehne? Verwende deine Werte (Masse $m = \underline{\hspace{2cm}}$ kg, Beschleunigung $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $\frac{m}{s^2}$) aus Aufgabe 11! Welche maximale Sehnenbelastung tritt auf? (Hinweis: Die Maximalkraft beträgt in etwa das 1,5-fache der Durchschnittskraft.)

Die Belastung meiner Achillessehne beträgt N.

Meine Achillessehne erfährt eine maximale Belastung von N.

Überlegungen [Lösung]:

Addieren wir zur bekannten Beschleunigung a noch die Erdbeschleunigung g dazu, so erhalten wir nach Newton die Kraft $F = m * (a + g)$.

Für eine Person (Masse $m = 66$ kg, Beschleunigung $a \approx 14,72 \frac{m}{s^2}$, Hocktiefe $s = 0,5$ und Sprunghöhe $h = 0,75$) ergibt sich eine Kraft von $F \approx 1619$ N, also $\approx 809,5$ N pro Fuß. Multipliziert mit dem Faktor 2,5 aus Aufgabe 15 erhält man eine mittlere Belastung von ≈ 2023 N auf die Achillessehne. Für die maximale Belastung ergibt sich daher ≈ 2023 N * 1,5 ≈ 3035 N.

Im Sport treten die größten Kräfte beim Beschleunigen und Abbremsen von bewegten Körperteilen auf. Beim Hochsprung wirken beim Absprung beispielsweise bis zu 18 000 N auf die Achillessehne. Man könnte theoretisch mit dieser Sehne einen 1,8 t schweren PKW heben. Der menschliche Körper besitzt keine stärkere Sehne als die Achillessehne.⁹²

⁹⁰ vgl. Apolin & Redl 2006, S. 95

⁹¹ vgl. Willimczik 1989, S. 93ff.

4.2.8 Arbeitsblatt 2-4: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 1)

Die Änderung des *Impulses* wird mit $\Delta p = m \cdot \Delta v$ angegeben. Der Impuls p gibt die Wucht eines Aufpralls an, z.B.: Tennisball auf einen harten Untergrund. Die Kraft F , die dem Ball beim Aufprall entgegenwirkt, ist definiert als Impulsänderung pro Zeit, also $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Diese Kraft erzeugt einen Gegenimpuls, der das Eindringen des Balles verursacht. Umgeformt ergibt sich $\Delta p = F \cdot \Delta t$, wobei in dieser Gleichung p als *Kraftstoß* bezeichnet wird. Es gilt schließlich die Beziehung: $F \cdot \Delta t = \Delta p = m \cdot \Delta v$. Für zeitlich konstante bzw. veränderliche Kräfte, stellt der Kraftstoß den Flächeninhalt unter dem Kraft-Zeit Verlauf dar (vgl. gelb schraffierte Fläche in Abb. 19)⁹³.

Aufgabe 17: In Abb. 19 wurde der Impuls eines Tennis- und eines Cricketballes mit Hilfe der Beziehung $p = m \cdot v$ berechnet. Überprüfe die Impuls-Ergebnisse durch Berechnung der Kraftstöße mittels Integration! (Hinweis: Es wird angenommen, dass die Bälle auf einen harten Untergrund auftreffen und sich die Kraft *linear* mit der Ballverformung erhöht. Zum Zeitpunkt Null findet noch keine Ballverformung statt.)

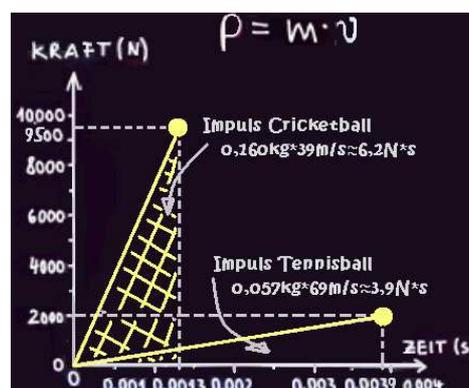


Abb. 19

Überlegungen [Lösung]:

Der Kraftstoß stellt, wie bereits schon gesagt, den Flächeninhalt zwischen zwei Zeitpunkten unter der Kraft-Zeit-Funktion $F(t)$ dar.

Die mathematische Formulierung dieses Satzes lautet: $p = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt$.

Die Zeitdauer der Krafteinwirkung ist für den Tennisball $t_T = 0,0039 s$ und für den Cricketball $t_C = 0,0013 s$. Zu diesen Zeitpunkten lassen sich die Kraftwerte $F(t_T) = 2000 N$ und $F(t_C) = 9500 N$ ablesen.

Mit diesen Angaben lassen sich die linearen Funktionen für den Tennis- und den Cricketball aufstellen:

$$F_T(t) = \frac{2000}{0,0039} * t \text{ und } F_C(t) = \frac{9500}{0,0013} * t$$

Durch Integration der Funktionen im jeweils vorliegenden Zeitintervall erhält man folgende Kraftstöße:

$$p_T = \int_0^{t_T} F_T(t) dt = \int_0^{0,0039} \frac{2000}{0,0039} * t dt = \frac{2000}{0,0039} * \frac{t^2}{2} \Big|_0^{0,0039} \approx 3,9 Ns$$

$$p_C = \int_0^{t_C} F_C(t) dt \approx 6,2 Ns$$

Die errechneten Kraftstoß-Werte stimmen mit den in Abb. 19 angegebenen Impuls-Werten überein.

Beim Cricket entsteht bei einem Aufprall eine ungefähr fünfmal so große Kraft als beim Tennis. Der Grund dafür ist die größere Masse des Cricketballes gegenüber der gelben Filzkugel. Der Verformungsprozess des Balles läuft hier kürzer ab, wodurch größere Kräfte entstehen. Deswegen wird einem auch schnell klar, warum CricketspielerInnen eine Schutzkleidung tragen und TennisspielerInnen keine.⁹⁴

⁹² vgl. Apolin & Redl 2006, S. 95ff.

⁹³ vgl. Wick 2005, S. 46f. und Hochmuth 1982, S. 36f.

⁹⁴ vgl. Apolin 2010, S. 24f.

Aufgabe 18: Thomas Morgenstern⁹⁵ (österreichischer Skispringer und Sportler des Jahres 2007 und 2011) besitzt bei einem CMJ folgendes Dynamogramm⁹⁶ (Kraft-Zeit-Funktion):

$$F(t) = -44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t + 647,5; \quad [t_0 \leq t \leq t_{ab}]$$

Zeichne den Kraft-Zeit-Verlauf im angegebenen Intervall mit Geogebra!

Bestimme die gesuchten Größen im rechten Textfeld mit Hilfe der Graphik! (Hinweis: Verschiebe die Funktion in den Koordinatenursprung. Bestimme mit Hilfe der neuen Funktion den Kraftstoß graphisch und rechnerisch!) Bestimme dann seine vertikale Absprunggeschwindigkeit v_{ab} und seine Sprunghöhe h ! (Hinweis: Es gilt im freien Fall folgende Beziehung: $v_{ab} = \sqrt{2 * g * h}$ (vgl. Arbeitsauftrag 11).) Setze schlussendlich die Ergebnisse in den Lückentext ein!

Thomas Morgenstern zählt mit einer Sprunghöhe aus dem Stand von _____ cm und einer Absprunggeschwindigkeit von _____ $\frac{m}{s}$ zu den absprungkräftigsten Springern im Skisprungweltcup⁹⁷.

Ausführung in Geogebra [Lösung]:

Wir verschieben die Funktion (vgl. Abb. 20: blaue Kurve) um F_g und berechnen die Nullstellen der verschobenen Funktion (vgl. Abb. 20: rote Kurve), welche später unsere Integrationsgrenzen darstellen. Diese wurden graphisch bestimmt. Geogebra rechnet mit dem Befehl `Integral[Funktion, Startwert a, Endwert b]` die Fläche im Intervall $[a, b]$ zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse aus.

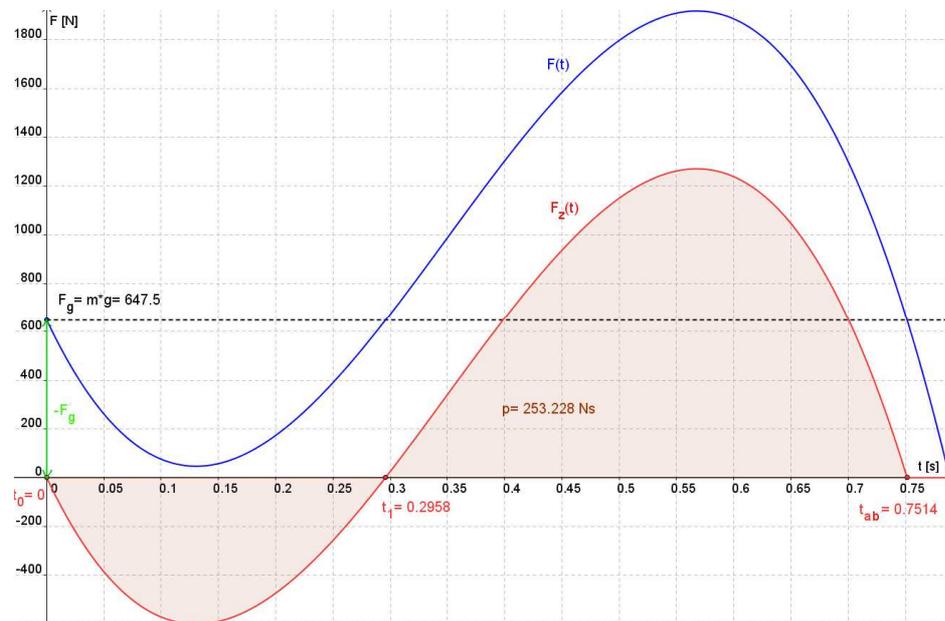


Abb. 20

$F_g = \underline{\hspace{2cm}} \text{ N [647,5 N]}$
$m \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg}$ $[m = \frac{F_g}{g} \approx 66 \text{ kg}]$
Absprungzeitpunkt t_{ab}: $t_{ab} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ s } [\approx 0,75 \text{ s}]$
Kraftstoß p: Befehl in Geogebra: <hr/> $p \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ Ns}$ $[\approx 253,2 \text{ Ns}]$

Rechnerische Ausführung [Lösung]:

$$F_z(t) = F(t) - F_g = -44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t$$

$$p = \int_{t_0}^{t_{ab}} F_z(t) dt \approx \int_0^{0,75} (-44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t) dt \approx$$

$$\frac{-44838 * t^4}{4} + \frac{46956 * t^3}{3} - \frac{9967 * t^2}{2} \Big|_0^{0,75} \approx 253,21 \text{ Ns}$$

⁹⁵ vgl. Wikipedia-Artikel Thomas Morgenstern

⁹⁶ vgl. Willimczik 1989, S. 47ff.

⁹⁷ vgl. Internetquellen: Salzburger Nachrichten

Da der Kraftstoß $\int_{t_0}^{t_{ab}} F(t) dt$ eine Impulsänderung $m * \Delta v$ bewirkt, kann man aus der zweiten Beziehung die Abfluggeschwindigkeit $v_{ab} = \frac{p}{m} \approx 3,84 \frac{m}{s}$ ermitteln.⁹⁸

Für die Sprunghöhe ergibt sich aus $h = \frac{v_{ab}^2}{2 * g} \approx 0,75 m$.⁹⁹

Nachbemerkung: Die Kraft-Zeit Verläufe sportlicher Bewegungen können im Allgemeinen nicht durch mathematische Funktionen beschrieben werden. Eine Integration in diesem Sinne wäre also nicht möglich. Eine numerische Methode zur Bestimmung des Kraftstoßes in diesem Beispiel wäre die Zerlegung des Flächeninhaltes unter der Kraft-Zeit Kurve in eine Summe von Rechteckflächen, welche in $[mm^2]$ oder $[cm^2]$ angegeben werden. Diese werden dann nach den Kraft- und Zeit-Maßstäben auf die Einheit des Kraftstoßes $[Ns]$ umgerechnet.¹⁰⁰

4.2.9 Arbeitsblatt 2-5: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 2)

Entscheidend beim Skisprung ist ein zeitlich optimal koordinierter und explosiver Absprung. Die *Explosivkraft* ist neben der *Startkraft* eine Teilkomponente der *Schnellkraft* und ist definiert als der steilste Kraftzuwachs pro Zeiteinheit. Sie wird am Wendepunkt der Kraft-Zeit-Kurve gemessen. Die Startkraft kennzeichnet den mittleren Kraftanstieg in den ersten 30 ms der Kraftentfaltung bei vorausgesetzter isometrischer Kontraktion. Der Schnellkraftindex ist der Quotient aus dem Maximalkraftwert und der Zeit, die notwendig ist, um diesen Maximalkraftwert zu erreichen (vgl. rot umrahmte Definitionen in Abb. 21).¹⁰¹

Aufgabe 19: Bestimme Morgensterns Explosivkraft F_{EXK} , Startkraft F_{STK} und Schnellkraft F_{SK} ! (Hinweis: Ermittle zur Berechnung von F_{STK} und F_{SK} den zeitlichen Beginn t_{auf} der Aufwärtsbewegung des Körperschwerpunkts (vgl. Abb. 21). Wie groß ist die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt? Nutze die bereits bekannte Beziehung: $F_z * dt = m * dv$, um $v(t)$ mit $v(0) = 0$ zu berechnen!)

Zur Erinnerung: $F_z(t) = -44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t$

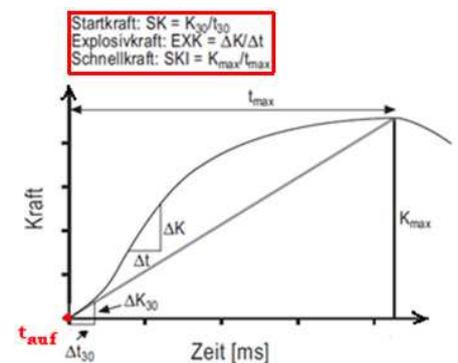


Abb. 21

Berechnung der Explosivkraft:

Morgensterns Explosivkraft $F_{EXK} \approx \frac{\quad}{s} \frac{N}{s}$

Überlegungen [Lösung]:

$$F_z(t) = -44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t$$

Da die Startkraft am Wendepunkt der Kraft-Zeit-Kurve gemessen wird, bilden wir zuerst die zweite Ableitungsfunktion:

$$\frac{d^2 F_z(t)}{d^2 t} = -269028 * t - 93912$$

Man bestimmt die Nullstelle der zweiten Ableitungsfunktion:

⁹⁸ vgl. Hochmuth 1982, S. 37

⁹⁹ vgl. Thaller 2003, S. 87

¹⁰⁰ vgl. Hochmuth 1982, S. 37

¹⁰¹ vgl. Weineck 2004, S. 241f.

$$-269028 * t - 93912 = 0 \Rightarrow t_{WP} \approx 0,35 \text{ s (Wendepunkt an der Stelle } t_{WP})$$

Die Explosivkraft ist die Steigung der Tangente im Wendepunkt der Kraft-Zeit-Kurve:

$$F_{EXK} = \frac{dF_z(t_{WP})}{dt} = -134514 * t_{WP}^2 + 93912 * t_{WP} - 9967 \approx 6424,3 \frac{N}{s}$$

Berechnung der Startkraft:

$$\text{Morgensterns Startkraft } F_{STK} \approx \frac{N}{s}$$

Überlegungen [Lösung]:

Die Höhe des Körperschwerpunktes nimmt, bevor der Körper aufwärts beschleunigt wird, seinen minimalen Wert an. Zu diesem Zeitpunkt ist die vertikale Geschwindigkeit gleich Null. Die Nullstelle der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion würde uns demnach den zeitlichen Beginn der Aufwärtsbewegung liefern.

Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ergibt sich durch Integration der Gleichung $F_z = m * \frac{dv}{dt}$ nach der Zeit und kann wie folgt angeschrieben werden:

$$v(t) = \frac{1}{m} * \int F_z(t) dt + v_0 \text{ mit der Anfangsbedingung } v(0) = 0.$$

Integriert man jetzt nach der Zeit (vgl. Aufgabe 14) und fordert $v(t) = 0$, so erhält man als Nullstelle $t_{auf} \approx 0,49 \text{ s}$, die den zeitlichen Beginn der Aufwärtsbewegung darstellt.

Nun bildet man den Differenzenquotienten $\frac{F_z(t_{auf} + \Delta t) - F_z(t_{auf})}{t_{auf} + \Delta t - t_{auf}}$ mit $\Delta t = 0,03 \text{ s}$, der uns die mittlere Kraftänderung im Zeitintervall $[t_{auf} + \Delta t, t_{auf}]$, also direkt die Startkraft liefert.

Setzt man richtig ein, so erhält man für die Startkraft $F_{STK} \approx 3095 \frac{N}{s}$.

Berechnung der Schnellkraft:

$$\text{Morgensterns Schnellkraft } F_{SK} \approx \frac{N}{s}$$

Überlegungen [Lösung]:

Es liegt nahe, zuerst die Extremwerte bzw. die Nullstellen der Ableitungsfunktion der Kraft-Zeit-Kurve zu finden.

Setzt man den erhaltenen Zeitwert t_{max} zurück in die Kraft-Zeit-Funktion ein, so erhält man den dazugehörigen Funktionswert der Maximumstelle F_{max} .

Löst man die nachfolgende Gleichung

$$0 = \frac{dF_z(t_{max})}{dt} = -134514 * t_{max}^2 + 93912 * t_{max} - 9967$$

nach t_{max} , so bekommt man als Lösungen: $\Rightarrow t_{1max} \approx 0,13 \text{ s}$ oder $t_{2max} \approx 0,57 \text{ s}$.

Blickt man zurück auf die graphische Darstellung der Funktion (vgl. Abb. 20 im Arbeitsblatt 2-4), so kann man leicht einsehen, dass die Stelle t_{2max} unsere gesuchte t_{max} ist. t_{1max} stellt eine Minimumstelle dar.

Das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte $F_z(t_{max}) - F_z(t_{auf})$ zur Änderung der Argumente $t_{max} - t_{auf}$ ergibt unseren Schnellkraftindex $F_{SK} \approx 1985,4 \frac{N}{s}$.

Nachbemerkung: Zum Zeitpunkt t_{auf} ist bereits eine positive Kraft F_z oder eine Kraft F , die größer ist als die Gewichtskraft F_G vorhanden. Diese Kraft wird in der Sportbiomechanik als *Anfangskraft* bezeichnet. Das *biomechanische Prinzip der Anfangskraft* besagt, dass eine Bewegung, mit der eine hohe Endgeschwindigkeit erreicht werden soll, durch eine entgegengesetzt gerichtete (Auftakt-)Bewegung einzuleiten ist. Durch das Abbremsen der Beugebewegung durch positive, nach oben gerichtete Kräfte ist zu Beginn der Streckbewegung bereits eine positive Anfangskraft für die Beschleunigung vorhanden, wenn sich der Übergang flüssig vollzieht. Der Kraftstoß zu Beginn der Beschleunigungsphase wird dadurch vergrößert.¹⁰² Beim Tennis kann die Schwungbewegung und Schwungübertragung auch mit dem Prinzip der Anfangskraft erklärt werden.¹⁰³

4.2.10 Arbeitsblatt 3-1: Sprung auf dem Mond

Eine weitverbreitete Hypothese ist, dass AstronautInnen am Mond, aufgrund der um ein Sechstel geringeren Schwerkraft als auf der Erde sechsmal so hoch springen müssten. Videoaufzeichnungen von Mondlandungen zeigen jedoch, dass sich diese Sprünge hinsichtlich der Sprunghöhe nicht viel von Sprüngen auf der Erde unterscheiden. Wir gehen diesen Aussagen auf den Grund und nehmen in unserem nachfolgenden physikalischen *Modell* an, dass die *Kraft* F_B , die der Muskel auf den Boden ausübt, *konstant* und auf der Erde und Mond *gleich groß* ist.¹⁰⁴

Aufgabe 20: Wie hoch und um welchen Faktor würdest du am Mond (ohne Raumanzug) höher springen? Verwende deine Sprungdaten aus Aufgabe 11! Vergleiche anschließend dein Ergebnis mit dem deines Sitznachbarn/ deiner Sitznachbarin! Wieso lässt sich eine allgemeine Aussage, um wie viel man in einem geringeren Gravitationsfeld, z.B. am Mond, höher springt als auf der Erde nicht formulieren? (Hinweis: Was wurde im Arbeitsblatt 1-1 über Muskeleigenschaften gesagt?) Interpretiere in diesem Zusammenhang die Ergebnisse einer Simulation für zwei SportlerInnen in unterschiedlichen Gravitationsfeldern!

Meine Sprunghöhe beträgt auf der Erde _____ m und auf dem Mond _____ m.
Das ist eine prozentuelle Steigerung von \approx _____ %.

Überlegungen [Lösung]¹⁰⁵:

Unter der Annahme, dass F_B konstant ist, bildet man das Verhältnis der Sprunghöhen $\frac{h_M}{h_E}$ (Indizes M ... Mond, E ... Erde) und setzt unter Berücksichtigung der Gravitation $g_M = \frac{1}{6} * g_E$ ein, so ergibt sich bereits vereinfacht: $\frac{h_M}{h_E} = \frac{g_E * (F_B - m * g_M)}{g_M * (F_B - m * g_E)} = \frac{6 * F_B - m * g_E}{F_B - m * g_E}$. Für meine Sprungdaten ($m = 83 \text{ kg}$, $F_B \approx 1628 \text{ N}$ und $h = s = 0,4 \text{ m}$) errechnet sich ein Verhältnis von fast genau 11. Meine Sprunghöhe würde demnach auf dem Mond 4,4 m anstelle von lediglich 0,4 m auf der Erde betragen. Das entspricht einer prozentuellen Steigerung um $\approx 1100\%$.

¹⁰² vgl. Wick 2005, S. 120 und Hochmuth 1982, S. 163ff.

¹⁰³ vgl. Internetquellen: Sport Multimedial

¹⁰⁴ vgl. Mathelitsch & Thaller 2008, S. 64f.

¹⁰⁵ vgl. Internetquellen: Rexin

Hinweis: Die Sprunghöhe und Hochtiefe wurden bei dieser Simulation¹⁰⁶ vom Boden weg gemessen.

	Erde		Mars		Mond	
	Person 1	Person 2	Person 1	Person 2	Person 1	Person2
Sprunghöhe [m]	1,03	1,02	1,28	1,29	1,81	1,88
Absprunggeschw. [m/s]	1,13	1,03	1,55	1,55	1,68	1,73
Absprunzeit [s]	0,65	0,74	0,41	0,4	0,37	0,36
Energie [J]	230	221	155	155	131	136

Tab. 7: Person 1: $m = 70 \text{ kg}$, $f_{\max} = 10000 \text{ N}$, $v_{\max} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $p_{\max} = 1000 \text{ W}$, $A = 5 \text{ s}^{-1}$, $s = 0,7$, $v_0 = 0$

Person 2: $m = 70 \text{ kg}$, $f_{\max} = 9000 \text{ N}$, $v_{\max} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $p_{\max} = 900 \text{ W}$, $A = 8 \text{ s}^{-1}$, $s = 0,7$, $v_0 = 0$

Diskussion [Lösung]:

Abgesehen von der Tatsache, dass ein Mensch am Mond ohne Raumanzug nicht lange überleben würde, widerspricht unsere Modellannahme den Aussagen über die Eigenschaften der Muskulatur im Arbeitsblatt 1-1. Es ist uns bereits bekannt, dass die Muskelkraft von den verschiedenen motorischen Eigenschaften (z.B.: Kontraktionsgeschwindigkeit, Ansteuerung, usw.) einer Person abhängig ist. Folglich wirkt sich auch die Gravitation je nach individueller Eigenschaft unterschiedlich aus. Die Tabelle 7 zeigt zudem noch etwas Interessantes: Eine Person 2, die auf der Erde niedriger springt als Person 1, kann auf dem Mond und Mars der Sieger in diesem Hochsprungduell sein.¹⁰⁷

¹⁰⁶ vgl. Internetquellen: Thaller

¹⁰⁷ vgl. Thaller, Sust 2003, S. 66ff., Mathelitsch & Thaller 2008, S. 65 und Thaller 2003, S. 88f.

4.2.11 Arbeitsblatt 3-2: Mondlandung der Apollo 16

Aufgabe 21: Die Bewegungsgleichung des freien Falls (ohne Luftwiderstand) lautet: $m * a(t) = -m * g$. Zeige, dass sich aus dieser Gleichung die Weg-Zeit-Beziehung $s(t) = -g * \frac{t^2}{2} + v_0 * t + s_0$ herleiten lässt! Beschreibe deine Vorgehensweise ausführlich!

Überlegungen [Lösung]:

Bei konstanter Erdbeschleunigung g erhält man aus $\frac{dv}{dt} = a$ durch Integration eine linear von der Zeit abhängige Geschwindigkeit: $v(t) = -g * t + v_0$. Die Integrationskonstante v_0 beinhaltet die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Aus $\frac{ds}{dt} = v$ erhält man durch nochmalige Integration schließlich die gesuchte Weg-Zeit-Beziehung: $s(t) = -g * \frac{t^2}{2} + v_0 * t + s_0$, wobei s_0 der Anfangsweg zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Aufgabe 22: Bestimme die Sprunghöhe des Apollo 16-Astronauten John Young¹⁰⁸ anhand der Sprungzeit! (Hinweis: Bestimme zunächst den Absprung- und Landezeitpunkt und dann die Sprungzeit. Verwende für die Sprunghöhenbestimmung die Formel aus Aufgabe 21!) Der bekannte Filmstreifen (vgl. Abb. 22) wurde mit 30 f/s Bilder je Sekunde übertragen! Hier ist nur jedes zweite Bild der Szene dargestellt.¹⁰⁹

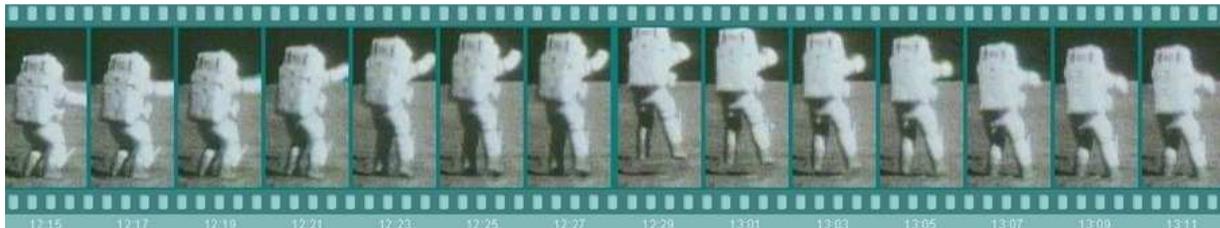


Abb. 22

Überlegungen:

[Lösung: Im Bild 12:23 springt Young ab und im Bild 13:07 landet er wieder. Das sind insgesamt in etwa 44 Bilder. Die Sprungzeit beträgt $t_M = \frac{\text{Bildanzahl}}{\text{Bildgeschwindigkeit}} = \frac{44 \text{ f}}{30 \text{ f/s}} \approx 1,47 \text{ s}$. Die

Sprunghöhe wird mit Hilfe der Gesetzmäßigkeiten des freien Falls: $h = \left(\frac{t_M}{2}\right)^2 * \frac{g_M}{2} = \frac{t_M^2 * g_E}{48} \approx 0,44 \text{ m}$ bestimmt.]

Aufgabe 23: Wie hoch würde der Astronaut springen, wenn er den Sprung aus Aufgabe 22 auf der Erde durchgeführt hätte? Interpretiere dein Ergebnis!¹¹⁰

Überlegungen:

¹⁰⁸ vgl. Wikipedia-Artikel: John Young

¹⁰⁹ vgl. Internetquellen: Regin

¹¹⁰ vgl. Internetquellen: Regin

[Lösung: $h = \left(\frac{t_M}{2}\right)^2 * \frac{g_E}{2} = \frac{t_M^2 * g_E}{8} \approx 2,64 \text{ m}$. Eine solche Sprunghöhe aus dem Stand ist für einen Menschen ohne Verwendung von Hilfsmitteln unmöglich.]

Aufgabe 24: Es gibt nicht wenige Personen, die behaupten, dass die Wiedergabegeschwindigkeit des obigen Videos manipuliert sei. Um wie viel schneller/ langsamer müsste die Geschwindigkeit des Films gemacht werden, damit die errechnete Sprungzeit und Sprunghöhe auf dem Mond annähernd den Ergebnissen auf der Erde entsprechen?¹¹¹

Überlegungen:

[Lösung: Man löst die Weg-Zeit Gleichung des freien Falls nach der Sprungzeit und erhält $t_E = 2 * \sqrt{\frac{2 * h}{g_E}} \approx 0,6 \text{ s}$. Der Quotient $\frac{t_M}{t_E} \approx \frac{1,47}{0,6} = 2,45$ sagt aus, um wie viel die Wiedergabe des Videos erhöht werden muss.]

¹¹¹ vgl. Internetquellen: Regin

4.3 FUSSBALL: Mathematik und Bananenflanken

Fußball ist der wohl beliebteste Sport der Welt. Millionen Menschen üben ihn aus, und noch weit mehr verfolgen ihn als Zuschauer. Dass beispielsweise im Fußball Elfmetertaktiken oder Schüsse mit Hilfe teilweise einfacher mathematischer und physikalischer Kenntnisse detailliert beschrieben und untersucht werden können, ist vielen unbekannt. Dieser Projektvorschlag soll daher einen kurzen Einblick in die Welt der „Fußballphysik“ geben und zur weiteren tieferen Behandlung und Umsetzung im Unterricht anregen. Es werden dabei mathematische Stoffkapitel wie Trigonometrie, Differentialrechnung und Differentialgleichungen behandelt. Als lernunterstützende Technologie wird der TI Voyage 200 verwendet. Grundkenntnisse im Umgang mit diesem Medium werden vorausgesetzt. Auf grundlegende physikalische Kenntnisse wird an gegebener Stelle eingegangen.

Am Fußballplatz, bei Nachwuchsspielen hört man beispielsweise von TrainerInnen nach misslungenen Offensivaktionen: „Nicht einmal von 8 m Entfernung treffen wir das Tor. Das gibt's doch nicht!“. Abgesehen davon, dass ein solcher Kommentar total unsinnig und demotivierend für das Team ist, stellt sich die Frage, ob es weniger verwerflich ist, aus 6 m, 8 m oder 10 m Entfernung das Tor zu verfehlen. Um diesen Sachverhalt mathematisch zu untersuchen, nehmen wir an, dass sich der/die StürmerIn entlang einer gedachten Linie parallel zur seitlichen Torauslinie und orthogonal zur Torlinie in Richtung gegnerisches Tor bewegt. Der Normalabstand dieser Linie zum näheren Torpfosten ist d . Die Torbreite wird mit b angegeben. Zu jeder Entfernung x des/der StürmerIn von der Torauslinie existiert genau ein „horizontaler Einschusswinkel ϵ “.¹¹²

Aufgabe 1: Veranschauliche diesen Sachverhalt zunächst in einer Skizze!

Beschrifte und benenne fehlende Größen! Bildet Paare und versucht gemeinsam mehrere Lösungsansätze für einen funktionalen Zusammenhang zwischen x und ϵ zu finden! Vergleicht dann eure Ergebnisse untereinander!

¹¹² vgl. Ambrus & Walsch 1996, S. 449ff. und Heinrich & Esper 2002, S. 2

Lösungserwartung:

Die Ansätze für den funktionalen Zusammenhang zwischen x und ε können unterschiedlich aussehen:

Ansatz 1:

$$\varepsilon = \varepsilon(x)$$

Nach $\varepsilon = \alpha - \beta$ und $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

ergibt sich mit $\tan \alpha = \frac{b+d}{x}$ und $\tan \beta = \frac{d}{x}$ fol-

gende Beziehung: $\varepsilon(x) = \sin^{-1} \frac{b \cdot x}{x^2 + b \cdot d + d^2}$

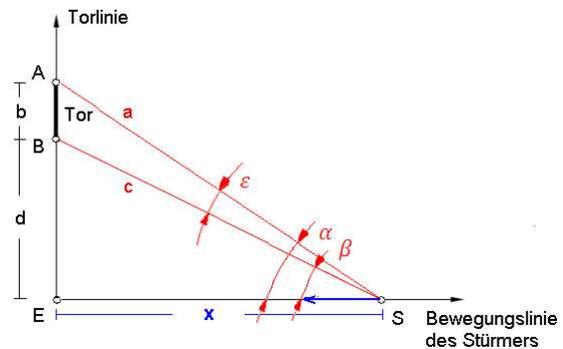


Abb. 23

Ansatz 2:

α und β können mit Hilfe der Winkelfunktionen bestimmt werden. Wegen $\varepsilon = \alpha - \beta$ gilt:

$$\varepsilon(x) = \tan^{-1} \frac{b+d}{x} - \tan^{-1} \frac{d}{x}$$

Ansatz 3:

Wendet man den Kosinussatz (=Hauptbedingung) auf das Dreieck ASB an:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos \varepsilon$, so erhält man durch äquivalentes Umformen

$\varepsilon = \cos^{-1} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 * a * c}$. Die Strecken a und c (=Nebenbedingungen) lassen sich wie folgt definieren:

$a = a(x) = \sqrt{(b+d)^2 + x^2}$ bzw. $c = c(x) = \sqrt{d^2 + x^2}$

Man erhält schlussendlich folgende Zielfunktion: $\varepsilon(x) = \cos^{-1} \frac{x^2 + b \cdot d + d^2}{\sqrt{(b+d)^2 + x^2} \cdot \sqrt{d^2 + x^2}}$

Ansatz 4:

Neben der Lösungsmethode des systematischen Probierens durch maßstäbliches Zeichnen kann diese Aufgabe auch mit Hilfe geometrischer Kenntnisse und der analytischen Geometrie gelöst werden¹¹³. Auf diese Lösungswege wird aber nicht weiter eingegangen.

Aufgabe 2: Gibt es unter allen Einschusswinkeln einen maximalen? Falls ja, in welcher Entfernung von der Torauslinie hat der/die SpielerIn die günstigste Schussposition? Sind alle erhaltenen Lösungen realistisch? Begründe! (Anleitung: Nimm als Hauptbedingung Ansatz 3 aus der letzten Aufgabe an. Verwende als Nebenbedingungen anstelle der Wurzelausdrücke zunächst die Abkürzungen a und c . Differenziere implizit und vereinfache die Gleichung soweit wie möglich!)

Lösungserwartung:

Diese Extremwertaufgabe kann mit Hilfe der Differentialrechnung gelöst werden.

Der beste Schusswinkel ist gleichzeitig der Maximale: Es ist daher das Maximum der Funktion $\varepsilon(x)$ gesucht.

Ausgegangen wird, wie bereits erwähnt vom Kosinussatz

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos \varepsilon.$$

Die erste Ableitung wird durch implizites Differenzieren nach x gebildet:

$$0 = 2 * a * a' + 2 * c * c' - 2 * (a' * c * \cos \varepsilon + a * c' * \cos \varepsilon - a * c * \sin \varepsilon * \varepsilon')$$

¹¹³ vgl. Ambrus & Walsch 1996, S. 451ff. und Heinrich & Esper 2002, S. 2

Mit der für lokale Maximumstellen notwendigen Bedingung $\varepsilon' = 0$ vereinfacht sich der Ausdruck zu $0 = a * a' + c * c' - (a' * c + a * c') * \cos \varepsilon$.

Bildet man die Ableitungsfunktionen $a'(x) = \frac{x}{\sqrt{(b+d)^2+x^2}} = \frac{x}{a}$ bzw. $c'(x) = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{x}{c}$ und bedient sich $\cos \varepsilon = \frac{a^2+c^2-b^2}{2*a*c}$, so erhält man nach Vereinfachungen schließlich die Gleichung $\Rightarrow 0 = x * (4 * a^2 * c^2 - (c^2 + a^2) * (a^2 + c^2 - b^2))$.

Der Produkt-Null-Satz liefert die erste Lösung $x_1 = 0$. Diese Lösung ist sicherlich nicht unsere Gesuchte, da sich der/die StürmerIn in diesem Fall auf der Torlinie befindet und einen Schusswinkel von 0° hat. Wir werden später sehen, dass es mit einer speziellen Schusstechnik trotzdem möglich ist, den Ball aus dieser Position in das Tor zu befördern.

Vereinfacht man den zweiten Faktor des Produkts weiter zu

$$0 = 4 * a^2 * c^2 - (a^2 + c^2)^2 + (a^2 + c^2) * c^2 \Rightarrow 0 = -(a^2 + c^2)^2 + (a^2 + c^2) * c^2$$

und setzt für die Abkürzungen a und c nun die Wurzelausdrücke ein, so ergibt sich in vereinfachter Form:

$$0 = -(b^2 + 2 * b * d)^2 + (2 * x^2 + 2 * d^2 + 2 * b * d + b^2) * b^2$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleichartiger Terme entsteht schließlich wegen $b \neq 0$ eine Gleichung zweiten Grades

$$0 = -b * d - d^2 + x^2$$

mit den Lösungen $x_{2,3} = \pm \sqrt{d * (d + b)}$.

Die negative Lösung x_2 lässt sich streichen, da der/die StürmerIn unmöglich aus einer Position hinter dem Tor treffen kann. Der/Die StürmerIn hat somit bei einer Entfernung von $x_3(d) = \sqrt{d * (d + b)}$ die bestmögliche Schussposition. Es ergibt sich dabei ein maximaler Einschusswinkel von $\varepsilon(d, x) = \cos^{-1} \frac{x^2 + d * (d + b)}{\sqrt{(b+d)^2 + x^2} * \sqrt{d^2 + x^2}}$

Die rechnerische Überprüfung der hinreichenden Bedingung $\varepsilon'' < 0$ wird außen vor gelassen. In der nächsten Aufgabe wird graphisch gezeigt, dass es sich hier tatsächlich um ein Maximum handelt.

Aufgabe 3: Der/Die zuvor kritisierte StürmerIn soll sich auf einer gedachten Linie im Abstand von $d = 5 \text{ m}$ in Richtung Tor bewegt haben (vgl. Aufgabe 1). Das Tor ist entsprechend der FIFA-Statuten $7,32 \text{ m}$ breit. Überprüfe rechnerisch, ob die Trainerkritik von vorhin gerechtfertigt ist! Stelle mit dem TI-Voyage die Lösungsschar $\varepsilon(d, x)$ für verschiedene $d = \{0, 5, 16, 22\}$ graphisch dar! Bestimme graphisch das Maximum von $\varepsilon(5, x)$! Dokumentiere deine CAS-Eingabe gründlich!

Lösungserwartung:

Mit den Angaben für d und b erhält man für $x = \sqrt{5 * (5 + 7,32)} \approx 7,85 \text{ m}$ und für $\varepsilon = \cos^{-1} \frac{2 * 7,9}{\sqrt{4 * 7,9^2 + 7,32^2}} \approx 25^\circ$.

Mathematisch gesehen, ist überraschenderweise der Zorn des/der TrainerIn berechtigt, denn der/die StürmerIn hatte bei seiner Schussabgabe aus 8 m tatsächlich den bestmöglichen Schusswinkel. Ob der/die TrainerIn das gewusst hat? Sicher Nicht!

Graphische Darstellung der Funktion $\varepsilon(d, x)$ mit Hilfe des TI-Voyage:¹¹⁴

Die Eingabe der Funktion $\varepsilon(d, x)$ erfolgt über den Befehl F4-DEFINIER. Statt $f(x)$ wird jetzt $f(d, x)$ mit dem Parameter d geschrieben. Bei der Eingabe des [GRAPH]-Befehls geben wir anstelle des Parameters eine Liste an, die die Werte enthält, die der Parameter annehmen soll. Diese Liste wird durch geschweifte Klammern begrenzt (vgl. Abb. 24).

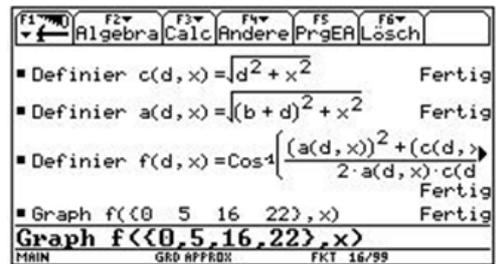


Abb. 24

Bevor die Funktionsschar allerdings gezeichnet werden kann, müssen realistische [WINDOW]-Einstellungen vorgenommen werden (vgl. Abb. 25): Die x -Achse repräsentiert die Entfernung [m] des Spielers zur Torauslinie. Hier sollte das Intervall $[0; 100]$ genügen. Auf der y -Achse wird die Größe des Schusswinkels [$^\circ$] abgetragen. Der Darstellungsbereich beträgt hier $[0; 90]$.

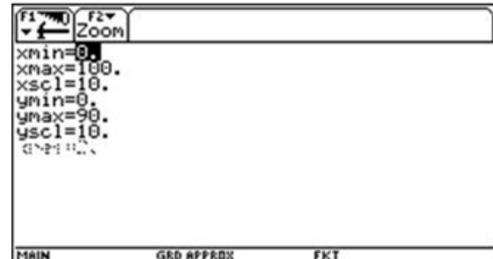


Abb. 25

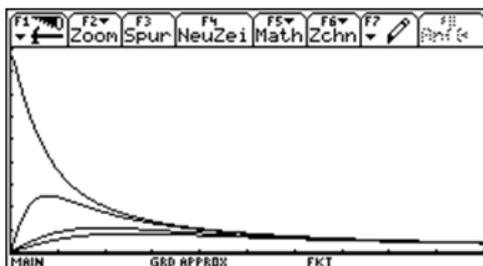


Abb. 26

Die Lösungsschar $\varepsilon(d, x)$ ist in Abb. 26 dargestellt. Mit steigendem Abstand d wird auch der Maximalwinkel immer kleiner. Bei großem seitlichem Abstand zum Tor ist daher meistens eine Ballabgabe zu einem/einer besser postierten MitspielerIn sinnvoller, als von dort selbst einen Torschuss abzugeben.

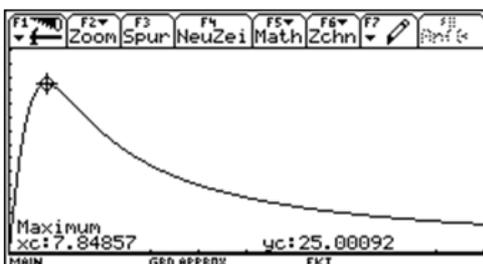


Abb. 27

Abb. 27 zeigt die Funktion $\varepsilon(5, x)$. Das Maximum wurde hier unter dem Menüpunkt F5-[MATH] mit dem Befehl Maximum bestimmt. Nach interaktiver Eingabe der Unter- und Obergrenze erhalten wir dasselbe Wertepaar wie zuvor bei der Rechnung.

Der Fußball im Flug

Bei der Berechnung des optimalen Basketballfreiwurfs ließen wir nur die Gravitation als einzige Kraft auf den Ball einwirken. Es ergaben sich schöne parabelförmige Flugkurven. Berücksichtigt man jetzt den Luftwiderstand, so wird die Flugbahnbestimmung eines Fußballs schon etwas komplizierter. Bevor wir uns diesem Punkt im Detail zuwenden, wollen wir zunächst grundlegende Aspekte über den Luftwiderstand und über seine Auswirkungen auf die Flugeigenschaften eines Fußballs festhalten.

Umströmt die Luft den Ball im Flug, so entsteht hinter ihm eine Wirbelstraße (vgl. Abb. 28), die hauptverantwortlich für den Luftwiderstand ist. Diese Wirbel bilden sich durch das ungleichmäßige Ablösen der umströmenden Luft in einer dünnen Grenzschicht von der Oberfläche des Fußballs. Der Ball verliert an Bewegungsenergie und wird langsamer. Je höher die Ballgeschwindigkeit, desto zeitiger erfolgt das Ablösen der Luft von der Oberfläche des Balles und desto mehr Wirbel werden erzeugt. Der Luftwiderstand erhöht sich.¹¹⁵

¹¹⁴ vgl. Heinrich & Esper 2002, S. 3

¹¹⁵ vgl. Tolan 2010, S. 198ff.

Aufgabe 4: In Abb. 29 ist die Luftwiderstandskraft in Vielfachen des Ballgewichts als Funktion der Ballgeschwindigkeit dargestellt. Die rechte Achse repräsentiert die Widerstandskraft (in Vielfachen des Ballgewichts), die der Luftwiderstand für die Bremsung des Balles aufbringt. Beschreibe den Kurvenverlauf einer ideal glatten Kugel der Größe eines Fußballs (vgl. Abb. 29: schwarz gestrichelter Graph) und eines realen Fußballs (vgl. Abb. 29: roter Graph) hinsichtlich der Monotonie und besonderer Punkte!

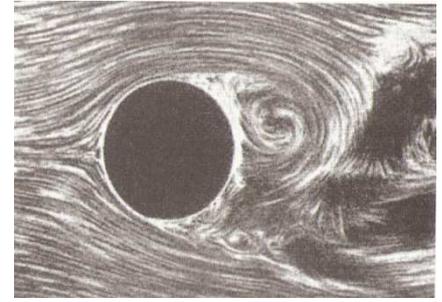


Abb. 28

Lösungserwartung:¹¹⁶

In etwa bis zum Maximum (bei ca. $75 \frac{km}{h}$) der schwarz gestrichelten Funktion steigt der Luftwiderstand der glatten Kugel mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Ab diesem Punkt fällt der Luftwiderstand mit zunehmender Geschwindigkeit stark ab, bevor er bei ca. $90 \frac{km}{h}$ bei weiter steigender Geschwindigkeit wieder schwach zunimmt. Der Luftwiderstand eines realen Fußballs kann durch eine monoton ansteigende Funktion ohne besondere Auffälligkeiten in ihrem Verlauf beschrieben werden. Der Luftwiderstand steigt hier nur für kleine Geschwindigkeiten mit dem Quadrat der Geschwindigkeit an. Bei ca. $100 \frac{km}{h}$ wird der Fußball vom Luftwiderstand mit einer Kraft gebremst, die fast genau seinem Gewicht entspricht.

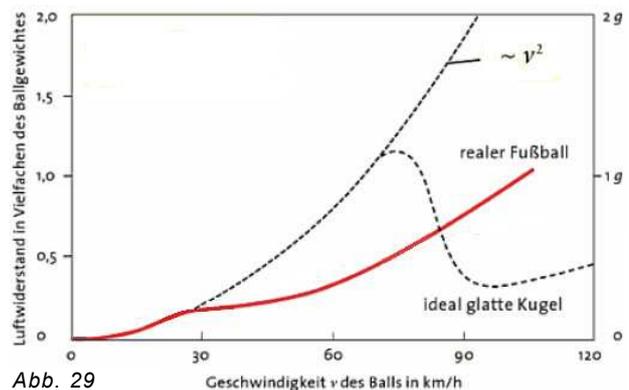


Abb. 29

Aufgabe 5: Welche Konsequenz hätte der Einsatz einer ideal glatten Kugel aus Abb. 29 als Spielball für das Fußballspiel? (Hinweis: Was passiert bei niedrigeren/höheren Geschwindigkeiten jenseits der kritischen Geschwindigkeit (=Funktionsargument des Maximum) mit dem Luftwiderstand? Überlege dir, wie der Ball demnach durch die Luft fliegen würde!) Für welche Spielposition im Fußball wäre diese Änderung bzgl. des Spielgerätes besonders von Nachteil? Begründe!

Lösungserwartung:¹¹⁷

Im Fußball erreichen Schüsse oft Geschwindigkeiten von über $90 \frac{km}{h}$. Bei solchen Geschwindigkeiten oberhalb der kritischen Geschwindigkeit (bei ca. $75 \frac{km}{h}$) würde der Luftwiderstand nach Abb. 29 bei fallender Geschwindigkeit zuerst bis zum Maximum zunehmen und danach wieder abnehmen. Das heißt der Ball würde zuerst langsamer und dann wieder schneller werden. TorhüterInnen würden diese Regeländerung sicher nicht begrüßen, denn dann wäre die Flugbahnbestimmung des Balles für sie noch schwieriger.

Für eine ideal glatte Kugel würde der Luftwiderstand bis zur kritischen Geschwindigkeit zunächst ansteigen und dann wieder abfallen. Die Flugkurve würde merkwürdig aussehen. Man spricht hier von sogenannten „Flutterbällen“.
Der Grund für den gleichmäßig ansteigenden Kurvenverlauf eines realen Fußballs (vgl. Aufgabe 4) ist, dass ein solcher Fußball keine glatte, sondern aufgrund seiner Mulden und Nähte eine raue Oberfläche besitzt. Diese Oberflächenrauheit macht den Ball aerodynamisch stabiler und

¹¹⁶ vgl. Wesson 2006, S. 62ff.

¹¹⁷ vgl. Wesson 2006, S. 62ff. und Tolan 2010, S. 202f.

verhindert das Auftreten einer kritischen Geschwindigkeit und somit auch das „Flattern“ der Bälle bei großen Geschwindigkeiten.¹¹⁸ Eine weitere Erklärung, warum Fußballstars den *Jabulani*-Ball der WM 2010 nicht zum Flattern bringen können, wird zu einem späteren Zeitpunkt abgegeben. In der Praxis werden diese Luftwiderstandskurven im Windkanal gemessen und vom Hersteller geheim gehalten.¹¹⁹

Aufgabe 6: Bei einem Torabstoß durch den/die TorwartIn wird ein Fußball unter einem Neigungswinkel α_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 abgeschossen. Neben der Gravitation F_G wird jetzt auch der Luftwiderstand F_L (vgl. nachfolgende Erklärung) berücksichtigt. Der Wind und der Drall des Balles werden hingegen vernachlässigt. Im Folgenden wird zunächst die Differentialgleichung für die horizontale Ballgeschwindigkeit v_x hergeleitet! Erkläre jeden einzelnen Schritt dieser Herleitung! (Hinweis: Überlege dir anhand der Abb. 30, welche Kräfte bei dieser Bewegung auf den Ball einwirken. In welcher mathematischen Beziehung stehen die auftretenden Kräfte?)

Für die Luftwiderstandskraft (Betrag), die ein bewegter Körper erfährt, gilt die Beziehung $F_L = \frac{1}{2} * c_w * \rho * A * v^2$. Dabei ist c_w der sogenannte Luftwiderstandsbeiwert, der die „Windschlüpfrigkeit“ eines Körpers angibt und ρ die Dichte des Strömungsmediums. Für einen Fußball verwenden wir den c_w -Wert einer Kugel ($c_w = 0,4$). Zur Vereinfachung wird c_w (geschwindigkeitsabhängig) als *konstant* angenommen. Die Luftdichte betrage $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$. Die Querschnittsfläche A einer Kugel ist die Fläche eines Kreises mit $A = \pi * r^2$, wobei r den Radius eines FIFA-Fußballs ($r = 0,11 m$, $m = 0,43 kg$) darstellt. v bezeichnet die Geschwindigkeit des Fußballs relativ zur Luft. Die Luftwiderstandskraft wirkt der Bewegungsrichtung des Fußballs immer direkt entgegen. Die Richtung dieser einwirkenden Kraft ändert sich daher während der Flugphase des Balles permanent.¹²⁰

Die zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen für v lassen sich mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetz ($F = m * a$) wie folgt herleiten:¹²¹

Horizontale Ballgeschwindigkeit v_x :

- (1) $\cos \alpha = \frac{F_x}{-F_L}$ _____
- (2) $m * a_x = -F_L * \cos \alpha$ _____
- (3) $m * \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} * c_w * \rho * A * v^2 * \cos \alpha$ _____
- (4) $\frac{dv_x}{dt} = -k * v^2 * \cos \alpha$ _____
- (5) $\frac{dv_x}{dt} = -k * v_x * v$ _____
- (6) $\frac{dv_x}{dt} = -k * v_x * \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ _____

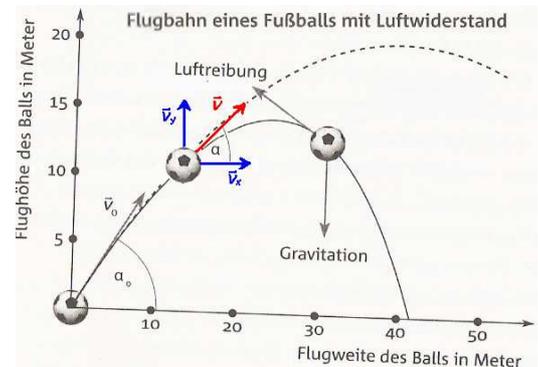


Abb. 30

[Lösung: Das Verhältnis aus (1) ergibt sich aus Abb. 30. F_L hat ein negatives Vorzeichen, da die Luftwiderstandskraft dem Ball entgegenwirkt. In (2) wird die Gleichung umgeformt und $F_x = m * a_x$ genutzt. In (3) wird die Beschleunigung mit $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ und die Luftreibung $F_L = \frac{1}{2} *$

¹¹⁸ vgl. Wesson 2006, S. 64f., Bray 2006, S. 106 und Tolan 2010, S. 202f.

¹¹⁹ vgl. Tolan 2010, S. 205

¹²⁰ vgl. Tolan 2010, S. 200f. und Wesson, 2006, S. 188

¹²¹ vgl. Wesson 2006, S. 188f. und Oswald & Schneebeli 2004, S. 1

$c_w * \rho * A * v^2$ angeschlossen. Nach der Division durch m werden in (4) alle konstanten Ausdrücke durch die Variable $k (= \frac{c_w * \rho * A}{2 * m})$ ersetzt. Bedient man sich der Beziehung $v_x = v * \cos \alpha$, so führt dies zur Gleichung in (5). Nach Einsetzen von $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ergibt sich schlussendlich die Differentialgleichung für die horizontale Ballgeschwindigkeit v_x .]

Aufgabe 7: Die Differentialgleichung für die vertikale Ballgeschwindigkeit v_y ist in folgender Form gegeben: $m * \frac{dv_y}{dt} = -F_L * \sin \alpha - F_G$. Leite diese Gleichung wie in Aufgabe 6 ab! Schreibe das vorliegende Differentialgleichungssystem für die Ballgeschwindigkeit (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) an!

Lösungserwartung:¹²²

Dividiert man beide Gleichungen durch m , so erhält man nach Einsetzen für F_L auf der rechten Seite den Ausdruck $\frac{c_w * \rho * A}{2 * m}$, der folglich mit k abgekürzt wird. Aus Abb. 30 kann man die Beziehungen $v_x = v * \cos \alpha$, $v_y = v * \sin \alpha$ und $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ entnehmen. Setzt man diese Ausdrücke ein, so ergibt sich folgendes gekoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = -k * v_x * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = -k * v_y * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g \end{cases}$$

Aufgabe 8: Bestimme das Differentialgleichungssystem für den zurückgelegten Weg (Flugbahn) des Fußballes!

Lösungserwartung:

Die Ortsfunktion ist die Stammfunktion der Geschwindigkeitsfunktion. Integriert man die beiden Geschwindigkeitsfunktionen $v_x(t)$ und $v_y(t)$ nach der Zeit, so erhält man die Ortskoordinaten $s_x(t)$ und $s_y(t)$ der Bahn des Balles¹²³. Es kann somit folgendes Differentialgleichungssystem angeschlossen werden:

$$\begin{cases} \frac{ds_x}{dt} = \dot{s}_x = v_x \\ \frac{ds_y}{dt} = \dot{s}_y = v_y \end{cases}$$

Auch wenn man c_w als konstant annimmt, können diese gewöhnlichen Differentialgleichungen algebraisch nicht gelöst werden. Mit dem Computer oder CAS können diese Gleichungen numerisch ausgewertet werden.

¹²² vgl. Wesson 2006, S. 188f. und Oswald & Schneebeil 2004, S. 1

¹²³ vgl. Spirig 2005, S. 1

Aufgabe 9: Wir betrachten nun wieder den Torabstoß aus Aufgabe 6. Es sind folgende Größen gegeben: $c_w = 0,4$, $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$, $A = 0,038 m^2$, $m = 0,43 kg$, $v_0 = 33,3 \frac{m}{s}$, $\alpha_0 = 38,5^\circ$, $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Löse das Differentialgleichungssystem aus Aufgabe 7 und 8 numerisch mit dem TI-Voyage! Berücksichtige folgende Anfangsbedingungen: $\begin{cases} v_x(0) = v_0 * \cos \alpha_0, v_y(0) = v_0 * \sin \alpha_0 \\ s_x(0) = 0, s_y(0) = 0 \end{cases}$. Dokumentiere deine CAS-Eingabe ausführlich und stelle die speziellen Lösungskurven in geeigneten Diagrammen graphisch dar! (Info: Betrachte die Graphen ausschließlich im ersten Quadranten!) Beschreibe und interpretiere die Kurvenverläufe!

Lösungserwartung:

Eingabe:

Mit dem Befehl [STO>] lassen sich bekannte Werte in Variablen abspeichern. Diese Funktion nutzen wir und weisen $\frac{c_w * \rho * A}{2 * m} \rightarrow k$, $9,81 \rightarrow g$, $38,5 \rightarrow a$, $33,3 \rightarrow v_0$ zu (vgl. Abb. 31).

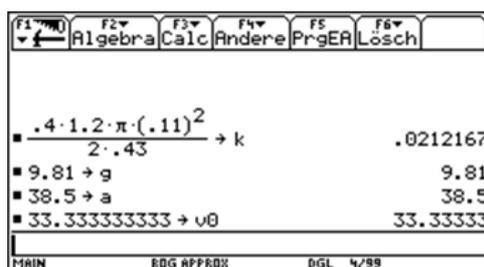


Abb. 31

Im [MODE] wird unter GRAPH der Punkt DIFFGLEICHUNG ausgewählt (vgl. Abb. 32). In den [Y=]-Editor werden die einzelnen Differentialgleichungen in folgender Form angeschrieben: $v_x \rightarrow y3$, $v_y \rightarrow y4$, $\dot{v}_x \rightarrow y3'(t)$, $\dot{v}_y \rightarrow y4'(t)$, $s_x \rightarrow y1'(t)$ und $s_y \rightarrow y2'(t)$. (Hinweis: Der Strich bedeutet die Ableitung nach der Zeit t . Anstelle des gewohnten unabhängigen Parameters x wird jetzt der Parameter t verwendet!) Die Funktionswerte der Anfangsbedingungen werden für $t_0 = 0$ zu den zugehörigen Gleichungen unter $yi1$, $yi2$, $yi3$ und $yi4$ eingetragen (vgl. Abb. 33).



Abb. 32

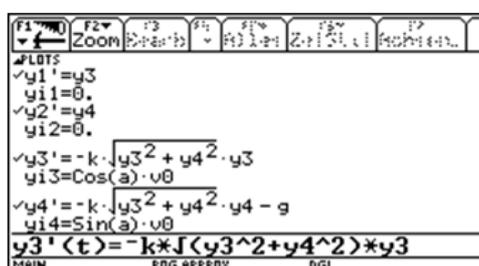


Abb. 33

Für eine übersichtliche Graphik-Darstellung werden folgende [WINDOW]-Einstellungen vorgenommen. Der Parameter *difto1* gibt beim Runge-Kutta Verfahren die Schrittlänge zur Lösung der Differentialgleichung an. Der Parameter *tstep* kommt nur bei Euler-Verfahren zur Anwendung. Mit *ncurves* kann man sich gleichmäßig über den y -Bereich verteilte Lösungskurven zeichnen lassen (vgl. Abb. 34).

Befindet sich man im [Y=]-Editor, so kommt man unter F1-Format zu den Graphik-Formaten. Hier wählt man unter Lösungsmethode das Runge-Kutta Verfahren (Funktionsweise wird nicht genauer erläutert) aus. Unter dem Punkt Felder kann das Zeichnen der Richtungsfelder ein- bzw. ausgeschaltet werden (vgl. Abb. 35).

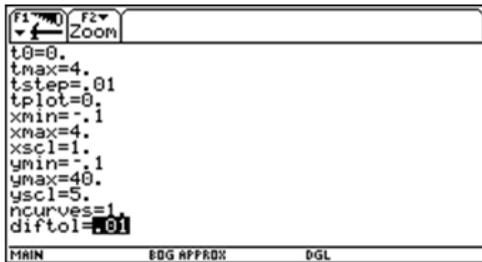


Abb. 34



Abb. 35

Graphische Darstellung:

Im [GRAPH]-Editor werden für die beiden Geschwindigkeits- und Ortsfunktionen die folgenden speziellen Lösungskurven angezeigt (vgl. Abb. 36 und 38). In Abb. 37 werden alle Funktionen gemeinsam in einem Diagramm dargestellt.

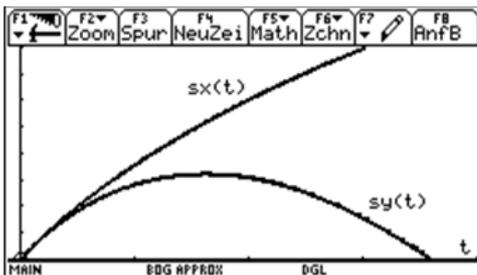


Abb. 36

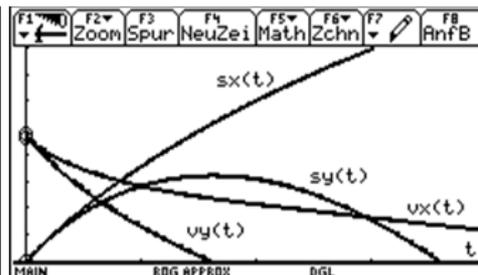


Abb. 37

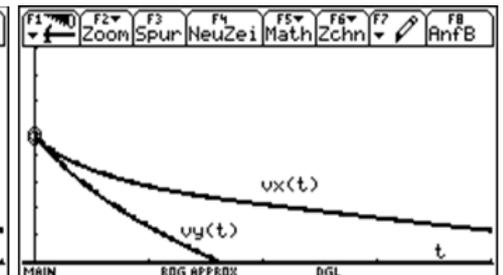


Abb. 38

Die Geschwindigkeitsfunktionen nehmen mit zunehmender Zeitdauer ab. $v_y(t)$ fällt dabei rapider ab als $v_x(t)$, da bei der vertikalen Bewegung neben der Luftwiderstandskraft noch die Gewichtskraft auf den Ball einwirkt. Hat der Ball keine vertikale Geschwindigkeit, so erreicht er seine maximale Flughöhe. Der Ball erreicht den Boden, wenn $s_y(t)$ Null wird. $s_x(t)$ liefert uns an dieser Stelle die maximale Schussweite.

Aufgabe 10: Bestimme mithilfe der Wertetabellen die ungefähre maximale Flughöhe und Schussweite des Balles! Ist diese Weite realistisch? Mit welcher Ballgeschwindigkeit muss der/die StürmerIn bei der Ballannahme (mit dem Fuß beim ersten Bodenkontakt des Balles) rechnen? Wie groß ist dabei der Aufprallwinkel?

Lösungserwartung:

Wird der Ball standesgemäß von der 5 m-Linie geradlinig abgeschossen, so landet er ungefähr auf der Höhe der Mittellinie. Die maximale Flughöhe ergibt sich bei einer vertikalen Geschwindigkeit gleich Null (vgl. Abb. 39: $y_4(1,62)$) und beträgt $\approx 16,22$ m.

Im [TABLE]-Editor werden die Wertepaare der ausgewählten Funktionen in einer Tabelle aufgelistet. Der Startwert und die Schrittweite lassen sich unter [TBLSET] konfigurieren.

Der schwarz hinterlegte Wert in Abb. 40 gibt die maximale Schussweite des Balles wider. Nach $t \approx 3,6$ s und einer horizontal gemessenen Strecke von $\approx 44,4$ m trifft der Ball auf den Boden auf. Das ist eine durchaus realistische Weite für einen Torabstoß.

t	y1	y2	y3	y4
1.6	25.689	16.219	11.989	2.0634
1.61	25.809	16.221	11.958	1.0793
1.62	25.928	16.222	11.928	0.0978
1.63	26.048	16.222	11.898	-.0881
1.64	26.167	16.22	11.868	-.1858
1.65	26.285	16.218	11.838	-.2832
1.66	26.404	16.215	11.808	-.3803
1.67	26.522	16.211	11.779	-.4773

y2=16.221862150217

Abb. 39

t	y1	y2	y3	y4
3.58	44.266	6.38129	6.929	-14.59
3.59	44.335	6.23563	6.9053	-14.63
3.6	44.404	6.08949	6.8817	-14.68
3.61	44.472	5.94316	6.8581	-14.73
3.62	44.541	5.79683	6.8346	-14.78
3.63	44.609	5.6505	6.8111	-14.82
3.64	44.677	5.50417	6.7876	-14.87
3.65	44.745	5.35783	6.7642	-14.92

y1=44.40385067353

Abb. 40

Nach Ablesen der Geschwindigkeitskomponenten ($v_x \rightarrow y3$, $v_y \rightarrow y4$) aus Abb. 40 lässt sich die Gesamtgeschwindigkeit v und der Aufprallwinkel α leicht errechnen:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx \sqrt{6,88^2 + (-14,68)^2} \approx 16,21 \frac{m}{s}$$

$$v_x = v * \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{v_x}{v} \approx 64,9^\circ$$

Der Ball kommt unter einem Winkel von $\approx 64,9^\circ$ und mit einer Geschwindigkeit von umgerechnet $\approx 58,4 \frac{km}{h}$ bei dem/der StürmerIn an.

Die Annahme dieses Balles ist definitiv keine leichte Aufgabe, doch für unseren/unsere StürmerIn mit Weltklasseformat sicherlich machbar.

Aufgabe 11: Wie weit würde der Ball theoretisch fliegen, wenn er sich im Vakuum fortbewegen würde? (Hinweis: Verwende dafür die bereits bekannte Bahngleichung im Ortsraum: $y(x) = \tan \alpha * x - \frac{g}{2} * \frac{x^2}{v_0^2 * (\cos \alpha)^2}$, wobei $y(x)$ und x in unserer Situation die Ortskoordinaten s_y und s_x sind! Verwende die Werte aus Aufgabe 9!) Stelle die Funktion $s_y(t)$ mit/ohne Berücksichtigung der Luftreibung im Vergleich in einem Diagramm graphisch dar! Betrachte die Funktionsverläufe genau! Was fällt dir auf?

Lösungserwartung:

Fordert man wie schon in Aufgabe 10 $s_y = 0$ und formt die gegebene Bahngleichung nach s_x um, so erhält man unter Verwendung von $\sin(2 * \alpha) = 2 * \sin \alpha * \cos \alpha$ folgenden vereinfachten Ausdruck für die Flugweite des Balles:

$$s_x = \frac{v_0^2 * \sin(2 * \alpha)}{g} \approx 113,21 m$$

Die Schussweite des Balles bei vernachlässigtem Luftwiderstand ist in unserem Fall ungefähr 2,5-mal so groß als jene, bei der der Luftwiderstand entgegenwirkt.

Stellt man beide Funktionen in einem gemeinsam Diagramm anschaulich dar (vgl. Abb. 41), so erkennt man, dass die obige Funktion symmetrisch um ihren Scheitelpunkt liegt. Die untere Kurve scheint asymmetrisch zu sein.

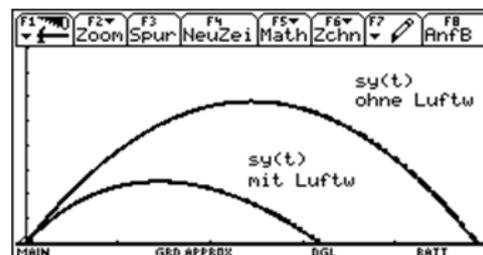


Abb. 41

Die Flugbahn, die ein Körper unter Einfluss des Luftwiderstandes und der Gravitation beschreibt, nennt man „ballistische Kurve“.¹²⁴ Der Ball fliegt, nachdem er die maximale Flughöhe erreicht hat, nicht mehr so weit wie im Steigflug (vgl. Abb. 39 und 40: Wertevergleich der Funktion $y1$). Wird der Luftwiderstand außen vor gelassen, so ergibt sich bekanntlich eine parabelförmige Flugkurve des Balles.

¹²⁴ vgl. Kraker & Pail 1990, S. 26

Welches Geheimnis steckt hinter Eckbällen, die direkt verwandelt werden oder Freistößen, die in einem scharfen Bogen um die gegnerische Mauer ins Tor gezirkelt werden? Bei solchen Kunstschüssen oder „Bananenflanken“, wie man sie in Fußballfachsprache nennt, muss der Ball in eine Rotation versetzt werden, sodass er sich während seines Fluges um seine eigene Achse dreht. Trifft der Fuß den Ball nicht mittig, sondern seitlich, so wird dieser „angeschnittene“ Ball in Rotation versetzt. Die durch den Drall entstehende Kraft wirft ihn aus seiner geradlinigen Flugbahn und lenkt ihn in Drehrichtung des Balles ab. Es wird hier vom sogenannten *Magnus-Effekt* gesprochen. Die Entstehung des *Magnus-Kraft* wird in Abb. 42 angedeutet.¹²⁵

Aufgabe 12: Beim Tennis spielt der Magnus-Effekt auch eine große Rolle. Welche Auswirkungen hat er auf das Flugverhalten des Spielballes, wenn der Ball einmal vorwärts („Topspin“), rückwärts („Slice“) bzw. gar nicht rotiert („Drive“)? Beschreibe mit Hilfe von Abb. 43 (Links: Flugbahnen bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit und gleichem Anfangswinkel, Rechts: Flugbahnen bei gleichem Auftreffpunkt)!

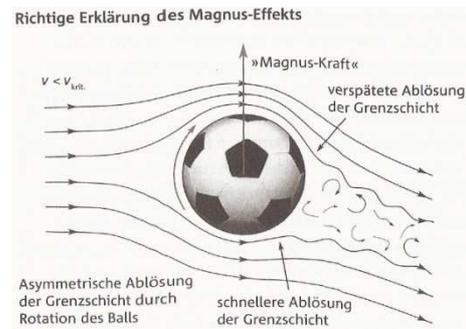


Abb. 42

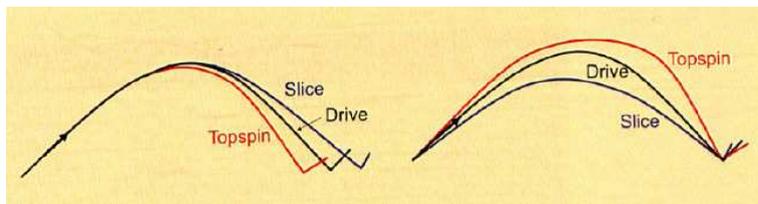


Abb. 43:

Lösungserwartung:¹²⁶

Beim Topspin wird dem Ball ein Vorwärtsdrall erteilt, sodass die Magnus-Kraft nach unten wirkt und den Ball vor allem im zweiten Flugabschnitt stark nach unten drückt. Es ergibt sich eine verkürzte Flugbahn. Beim „Slice“ dreht sich die Ballunterseite in Flugrichtung des Balles. Durch diesen Rückwärtsdrall entsteht eine flachere und längere Flugbahn gegenüber einem Drive. Bei einem Drive wird die Bewegung lediglich durch die Luft abgebremst. Treffen die Bälle am selben Punkt auf, so fliegen Slices flacher und Topspin-Bälle höher. Während zum Zeitpunkt des Auftreffens des Balls am Boden bei einem Drive der Einfallswinkel etwa gleich dem Ausfallswinkel ist, so springen Slices steiler und Topspin-Bälle flacher ab.

Die Magnus-Kraft (Betrag) lässt sich ausdrücken als: $F_M = \frac{1}{2} * c_M * \rho * A * r * \omega * v$. Dabei ist ω die Winkelgeschwindigkeit ($\omega = 2 * \pi * f$) bzw. f die Frequenz, mit der der Ball rotiert. c_M ist der Magnus-Koeffizient, der experimentell bei Kugeln zwischen 0,25 und 1 liegt. Die Querschnittsfläche $A = r^2 * \pi$ mit dem Ballradius r , die Luftdichte ρ und die Geschwindigkeit des Balles v sind von früher schon bekannt. Setzt man die Ausdrücke für ω und A ein und ersetzt die konstanten Größen durch den Parameter ϑ , so ergibt sich: $F_M = \vartheta * f * v$ mit $\vartheta = c_M * \pi^2 * r^3 * \rho$. Die Magnus-Kraft wirkt immer senkrecht zur Rotationsachse und zur Bewegungsrichtung des Balles (vgl. Abb. 42).¹²⁷

¹²⁵ vgl. Falta 2006, S. 39 und Tolan 2006, S. 214ff.

¹²⁶ vgl. Thaller & Mathelitsch 2006, S. 123f., Thaller & Mathelitsch 2007, S. 124f. und Apolin & Redl 2006 (Band2), S. 91ff.

¹²⁷ vgl. Falta 2006, S. 39, Tolan 2006, S. 224f. und Wesson 2006, S. 192f.

Aufgabe 13: Roberto Carlos¹²⁸ (ehemaliger brasilianischer Nationalteamspieler) erzielte im Spiel gegen Frankreich im Jahre 1997 ein legendäres Freistoßtor. Sein mit voller Wucht geschossener Ball scheint zuerst deutlich rechts an der gegnerischen Mauer ins Toraus zu gehen, doch im letzten Moment ändert der Ball seine Flugrichtung und findet per Innenpfosten den Weg ins Tor (vgl. Abb. 44: braune Kurve)¹²⁹. (Annahme: Der Luftwiderstand wird vernachlässigt und es wird vorausgesetzt, dass die rote Bahnkurve in Abb. 44 eine konstante Krümmung hat. Der Ball bewegt sich dann auf einer horizontalen Kreisbahn in Richtung Tor. Die Rotationsachse des Balles soll senkrecht zum Boden stehen.) Berechne den Krümmungsradius R dieser Modellflugkurve mithilfe der nachfolgenden schematischen Darstellung (nicht maßstabsgetreu!) der Freistoßsituation!

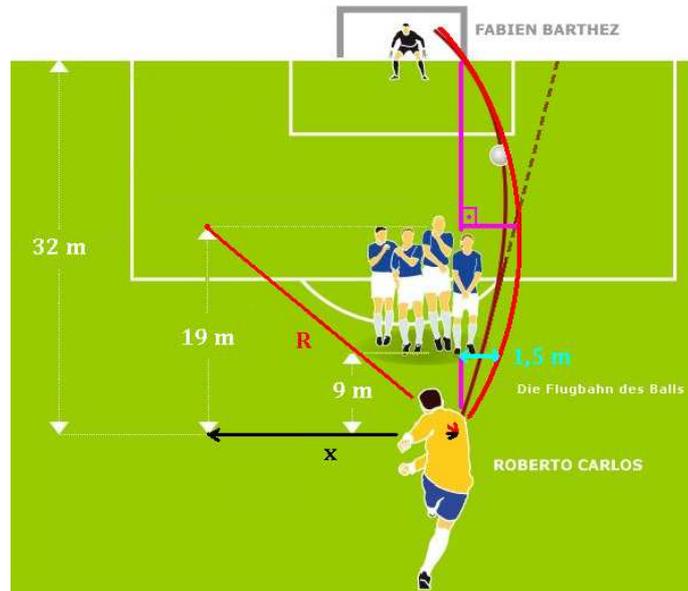


Abb. 44

Lösungserwartung:

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich zwei Beziehungen für die Größe R^2 finden. Nach Gleichsetzen dieser Ausdrücke ergibt sich die Größe x , mit welcher man schließlich den Krümmungsradius R ausrechnen kann. Es ergibt sich also folgender mathematischer Rechengang:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= 19^2 + x^2 \\ R^2 &= 10^2 + (x + 1,5)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 19^2 + x^2 = 10^2 + (x + 1,5)^2 \Rightarrow x = 86,25 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{19^2 + 86,25^2} \approx 88,32 \text{ m}$$

Der Magnus-Effekt ist für die plötzliche Änderung der Flugrichtung des Balles verantwortlich. Die Magnus-Kraft übernimmt dabei die Rolle der Zentripetalkraft (Betrag), die in Richtung des Mittelpunktes des Krümmungskreises und damit senkrecht zur Bahngeschwindigkeit, auf den Ball einwirkt. Der Ball bewegt sich nach wie vor auf einer angenommenen Kreisbahn. Die physikalische Definition der Zentripetalkraft lautet $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{R}$.¹³⁰ Ein weiteres Beispiel: Damit z.B. ein Auto durch eine Kurve fahren kann, braucht es Seitenführungskräfte. Die Summe dieser Kräfte bildet die Zentripetalkraft.¹³¹

¹²⁸ vgl. Wikipedia-Artikel: Roberto Carlos

¹²⁹ vgl. Bray 2006, S. 95 und Tolan 2010, S. 222

¹³⁰ vgl. Wesson 2006, S. 193f. und Apolin 2008, S. 22f.

¹³¹ vgl. Apolin 2009, S. 22f.

Aufgabe 14: Mit welcher Rotationsfrequenz bzw. mit wie vielen Umdrehungen pro Sekunde hat sich Carlos Ball ungefähr gedreht, wenn für die Berechnung folgende Werte zugrunde gelegt werden: $c_M = 0,75$, $\rho = 1,2 \frac{kg}{m^3}$, $r = 0,11 m$, $m = 0,43 kg$, $v = 108 \frac{km}{h} \approx 30 \frac{m}{s}$ und $R = 88,32 m$. (Hinweis: Magnus-Kraft $F_M = \vartheta * f * v$ mit $\vartheta = c_M * \pi^2 * r^3 * \rho$.)

Lösungserwartung:

Die Magnus-Kraft fungiert als Zentripetalkraft.¹³² Setzt man daher beide Kraftterme gleich, so kann man die Gleichung nach f auflösen:

$$F_M = F_Z$$

$$\vartheta * f * v = \frac{m * v^2}{R} \Leftrightarrow f = \frac{m * v}{\vartheta * R} \approx 12 s^{-1}$$

Der Ball rotierte bei diesem Musterfreistoß ungefähr 12-mal pro Sekunde um seine senkrechte Achse.

Bei gut geschossenen „Sidespin“-Freistößen rotiert der Ball ungefähr mit 8 – 12 Umdrehungen pro Sekunde. „Topspin“-Schüsse sind bei Torhütern besonders gefürchtet, da sich hier der Ball durch die nach unten wirkende Magnus-Kraft schnell senkt. Solche Schüsse können zudem noch härter getreten werden als Sidespin-Schüsse. Den TorhüterInnen bleibt dadurch noch weniger Zeit zum Reagieren.¹³³ Im Tennis hingegen sind bei Topspin-Bällen 80 Umdrehungen pro Sekunde keine Seltenheit!¹³⁴

Aufgabe 15: Verwende die Angaben aus Aufgabe 14 und beantworte folgende Fragen: Mit welcher seitlichen Kraft wird der Ball abgelenkt? (Annahme: Die Geschwindigkeit aus Aufgabe 14 wird als konstant angenommen.) Berechne zum Vergleich auch die Gravitationskraft ($g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$)! Welche seitliche Beschleunigung erfährt der Ball? Wie weit weicht der Ball von seiner normalen geradlinigen Flugbahn ab, wenn seine Flugzeit mit $t = \frac{s}{v}$ grob abgeschätzt wird? (Hinweis: Wie lautet das Weg-Zeit Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung?)

Lösungserwartung:

Setzt man die bekannten Werte ein, so ergibt sich eine Magnus-Kraft von $\approx 4,4 N$. Befänden sich auf dem Ball vier Tafeln Schokolade á 100 g, so würden sie auf ihn ungefähr dieselbe Kraft ausüben. Die Gewichtskraft ist hingegen mit $\approx 4,2 N$ kleiner als die Seitenkraft. Dies zeigt, dass die Magnus-Kraft während der Flugphase des Balles die dominierende Kraft ist. Aus dem 2. Newtonschen Gesetz ($F = m * a$) erhält man eine Beschleunigung von $\approx 10,2 \frac{m}{s^2}$. Die seitliche Ablenkung des Balles von seiner geraden Flugbahn beträgt demnach $s = \frac{a * t^2}{2} \approx 5,8 m$.

Wissenschaftler sind sich einig: Bei diesem Traumtor passte einfach alles. Die Schusshärte, die richtige Rotation des Balles und die große Entfernung zum Tor. Warum machte Carlos Ball aber plötzlich eine scharfe Linkskurve? Dazu fanden sie heraus, dass der Luftwiderstand die Vorwärtsbewegung des Balles ab einer bestimmten Entfernung bremst. Durch die Verringerung der

¹³² vgl. Wesson 2006, S. 193f.
¹³³ vgl. Bray 2006, S. 108f.
¹³⁴ vgl. Apolin 2011, S. 24

Geschwindigkeit wird die Flugrichtung durch die Rotation stärker beeinflusst. Deshalb krümmt sich eine gute Banane gegen Ende ihrer Flugbahn besonders stark. Im Fall Carlos würde sich übrigens eine spiralförmige Flugbahn ergeben.¹³⁵ Doch wo genau muss man den Ball mit dem Fuß eigentlich treffen, um ihn in eine derart optimale Rotation zu versetzen?

Aufgabe 16: Gibt es überhaupt einen solchen optimalen Treffpunkt, bei dem die größtmögliche Magnus-Kraft ausgeübt wird? Betrachte die nachfolgenden Abbildungen und diskutiere qualitativ, welche Geschwindigkeit und Rotation dem Ball erteilt wird und wohin er fliegen würde, wenn man ihn genau dort (vgl. nachfolgende Abb.: weißes Kreuz) mit dem Fuß treffen würde! Welche Magnus-Kraft würde in beiden Fällen vorliegen? Beantworte dann die Eingangsfrage!

Treffpunkt in der Ballmitte



Abb. 45

Treffpunkt am äußersten Rand



Abb. 46

Lösungserwartung:¹³⁶

Der Ball in Abb. 45 würde mit maximaler Geschwindigkeit abfliegen, aber keine Rotation erhalten. Die Magnus-Kraft F_M hängt vom Produkt aus der Ballgeschwindigkeit und der Rotationsfrequenz ab. Da sich der Ball in diesem Fall nicht dreht, würde $f = 0$ und somit auch $F_M = 0$ sein. Das Leder würde genau geradeaus fliegen.

Touchiert man den Ball hingegen so wie in Abb. 46, so würde der Ball in eine extreme Rotation versetzt werden. Das würde im theoretischen Extremfall zu $v = 0$ und ebenso zu $F_M = 0$ führen. Das Leder würde so gut wie gar nicht nach vorne fliegen.

Es muss also zwischen der Mitte und dem äußersten Rand einen optimalen Treffpunkt geben, bei dem die Magnus-Kraft maximal wird. In der Mathematik deutet eine solche Fragestellung auf eine Extremwertaufgabe hin.

Aufgabe 17: Wie weit vom Mittelpunkt des Balles entfernt, muss man den Ball jetzt treffen, um die größtmögliche Magnus-Kraft ($F_M = \vartheta * f * v$ mit $\vartheta = konst$) bei gleichbleibender Schusskraft und somit die „krummste“ aller möglichen Bananenflanken zu erzeugen? In der nachfolgenden Abbildung wird der Sachverhalt dargestellt. Stelle die Hauptbedingung (HB) auf und substituier die Geschwindigkeit und Frequenz?

¹³⁵ vgl. Internetquellen: Berres und Schäfer 2008, S. 16f.

¹³⁶ vgl. Tolan 2010, S. 227f.

(Hinweis: Bestimme die beiden Kraftkomponenten F_{II} und F_{\perp} der Kraft F mit Hilfe der Winkelfunktionen und setze sie in Beziehung mit den gegebenen Gleichungen!)

Erklärung¹³⁷:

F ... Auf den Fußball übertragene (Schuss-)Kraft

F_{II} ... Kraft, die dem Ball in der Kontaktzeit t des Fußes mit dem Ball eine Geschwindigkeit v erteilt

$$(F_{II} = m * a = m * \frac{v}{t}).$$

F_{\perp} ... Kraft, die auf den Ball in der Zeit t ein Drehmoment ($M = F_{\perp} * r$ oder $M = J * \frac{\omega}{t}$) ausübt und somit die Rotationsfrequenz f bewirkt. Das Trägheitsmoment J gibt an, wie schwer sich der Ball in Drehung versetzen lässt und repräsentiert eine Konstante. r ist der Radius des Balles

Der optimale Treffpunkt für eine Bananenflanke

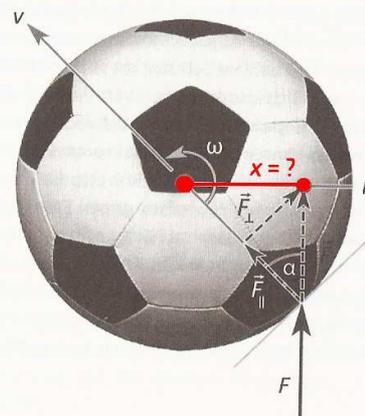


Abb. 47

Lösungserwartung:

$$HB: F_M = \vartheta * f * v \rightarrow maximal$$

Mit dem Cosinus lässt sich die Beziehung $F_{II} = F * \cos \alpha$ und mit dem Sinus $F_{\perp} = F * \sin \alpha$ aufstellen. Nimmt man jetzt die erste Gleichung her und setzt sie mit dem Ausdruck $F_{II} = m * \frac{v}{t}$ aus der Angabe gleich, so kann man sich problemlos das v ausdrücken. Es ergibt sich

$$v = \frac{F * \cos \alpha * t}{m}.$$

Setzt man die beiden Gleichungen für das Drehmoment M gleich und bedenkt, dass $F_{\perp} = F * \sin \alpha$ und $\omega = 2 * \pi * f$, so lässt sich mit Äquivalenzumformungen $f = \frac{F * \sin \alpha * r * t}{J * 2 * \pi}$ ermitteln. Ersetzt man nun die Geschwindigkeit und die Frequenz in der HB durch diese erhaltenen Ausdrücke, so erhält man

$$HB: F_M = \vartheta * f * v = \vartheta * \frac{F * \sin \alpha * r * t}{J * 2 * \pi} * \frac{F * \cos \alpha * t}{m} = \frac{\vartheta * F^2 * t^2 * r * \sin \alpha * \cos \alpha}{2 * \pi * J * m} \rightarrow maximal.$$

Aufgabe 18: Stelle nun Nebenbedingungen (NB) auf, in denen die gesuchte Variable x enthalten ist und löse die Extremwertaufgabe mit CAS! Gib die optimale Entfernung x im Bezug zum Ballradius r an!

Lösungserwartung:

Für die Nebenbedingungen lassen sich nach Anwendung der Winkelfunktionen folgende Beziehungen anschreiben:

$$NB: \sin \alpha = \frac{x}{r} \text{ und } \cos \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

Setzt man diese NB in die HB ein und eliminiert konstante Größen,

$$HB: F_M = \frac{\vartheta * F^2 * t^2 * r * \sin \alpha * \cos \alpha}{2 * \pi * J * m} = \frac{\vartheta * F^2 * t^2}{2 * \pi * J * m} * x * \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = konst * x * \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

¹³⁷ vgl. Tolan 2010, S. 228

so erhält man folgende vereinfachte Funktion:

$$F_M(x) = x * \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$$

Als einzige sinnvolle Nullstelle der Ableitungsfunktion ergibt sich im Definitionsintervall $[0; r]$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} * r \approx 0,707 * r.$$

Die Schusskraftrichtung muss vom Ballmittelpunkt ca. $0,7 * r$ entfernt sein (vgl. Abb. 47), um die größtmögliche seitliche Ablenkung bei konstanter Schusskraft zu bewirken.

Aufgabe 19: Zeige, dass die Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{2}} * r$ eine Maximumstelle der Funktion

$F_M: x \mapsto x * \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}$ im Intervall $[0; r]$ ist! Wie groß ist die maximale Magnus-Kraft?

Lösungserwartung:

Aus $F_M(0) = 0$, $F_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} * r\right) = \frac{1}{2} * r$ und $F_M(r) = 0$ ergibt sich:

Die Funktion $F_M(x)$ ist in $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}} * r\right]$ streng monoton steigend und in $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} * r; r\right]$ streng monoton fallend. $F_M(x)$ besitzt in $[0; r]$ an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{2}} * r$ ein Maximum.

Die maximale Magnus-Kraft beträgt demnach $F_M = \frac{1}{2} * r$.

Erstaunlich ist, dass Roberto Carlos bei seinem Freistoß den Ball wirklich etwa 70 % vom Mittelpunkt entfernt getroffen hat. Das Tor gilt bis heute noch als eines der schönsten Freistoßstore in der Fußballgeschichte.¹³⁸

¹³⁸ vgl. Tolan 2010, S. 230

4.4 LEICHTATHLETIK: Mathematik des Kugelstoßens

Kugelstoßen zählt neben dem Speerwurf, Diskuswurf und Hammerwurf zu den technischen leichtathletischen Disziplinen. Das sportmotorische Ziel beim Kugelstoßen ist eine maximale Stoßweite.¹³⁹ Um diese Weite zu erreichen, muss die Kugel mit der größtmöglichen Geschwindigkeit abgeworfen werden. Nimmt man an, dass der/die Athletin die Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Höhe h über dem Boden wegstößt, so lässt sich mit Hilfe des Abwurfwinkels α , den der Geschwindigkeitsvektor mit der Horizontalen einschließt, leicht die Flugbahn der Kugel bestimmen (vgl. Abb. 48). Aufgrund der hohen Masse und des relativ geringen Querschnitts der Kugel (bei den Männern: $m = 7,26 \text{ kg}$ und $d \approx 13 \text{ cm}$) kann die Luftreibung vernachlässigt werden. Es wirkt daher praktisch nur die Stoßkraft und die Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung g auf die Kugel.¹⁴⁰

Aufgabe 1: Zerlege die Geschwindigkeit (Betrag) in ihre horizontale und vertikale Komponente! Nutze dafür Abb. 48! Bestimme den Weg, den die Kugel in x bzw. y -Richtung zurücklegt! (Hinweis: Welche Bewegung führt die Kugel in die jeweilige Richtung aus?)

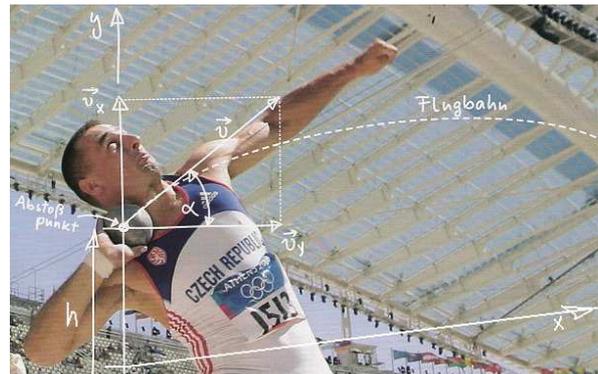


Abb. 48

Lösungserwartung:

Die Horizontalgeschwindigkeit beträgt

$v_x = v \cdot \cos \alpha$ und die Vertikalgeschwindigkeit $v_y = v \cdot \sin \alpha$. In der Zeit t legt die Kugel den Weg $x(t) = v_x \cdot t$. Der vertikale Weg setzt sich aus einer gleichmäßig linearen Bewegung und einer durch die Schwerkraft verursachten beschleunigten Bewegung zusammen. Berücksichtigt man die Abwurfhöhe h , so kann die vertikale Position der Kugel wie folgt angeschrieben werden: $y(t) = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h$.

Aufgabe 2: Diese beiden Parametergleichungen für den zurückgelegten Weg beschreiben die Bahnkurve des schiefen Wurfs. Drücke dir aus $x(t)$ den Parameter t aus und setze sie in $y(t)$ ein! Ersetze die beiden Geschwindigkeitskomponenten durch die zuvor bestimmten Ausdrücke und vereinfache!

Lösungserwartung:

Die Bahnkurve der Kugel kann schlussendlich mit folgender Beziehung beschrieben werden:

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v^2 \cdot \cos^2 \alpha} + h.$$

In der Literatur wird folgende Faustregel zur Maximierung der Stoßweite angegeben: Variiert man den Abwurfpunkt um 5 cm nach oben, dann verlängert man die Stoßweite um 5 cm . Bei einer Abwurfhöhe von Null ergibt sich der bekannte optimale Abwurfwinkel von 45° .¹⁴¹ Da jeder/jede AthletIn aus einer anderen Position abwirft, existieren verschiedene optimale Abwurfwinkel. Diese Abwurfwinkel lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung und dem CAS problemlos bestimmen. Entscheidend für große Stoßweiten im Leistungssport ist aber eine hohe Abwurfgeschwindigkeit. Diese gilt es durch gezieltes (Schnellkraft-)Training zu entwickeln und zu maximieren.¹⁴²

¹³⁹ vgl. Ballreich & Kuhlowl 1986, S. 89

¹⁴⁰ vgl. Ludwig 2008, S. 47f., Schrefl 2011, S. 25 und Willimczik 1989, S. 208

¹⁴¹ vgl. Schrefl 2011, S. 25

¹⁴² vgl. Ludwig 2008, S. 47

4.5 BODENTURNEN: Mathematik des Flick-Flack

Das Thema Mathematik des Flick-Flack soll den SchülerInnen in der Form von Arbeitsaufträgen näher gebracht werden. In den ersten drei Arbeitsaufträgen werden von den SchülerInnen Informationen über die Flick-Flack-Bewegung gesammelt. Es wird auch über die Notwendigkeit der Kenntnis des Körperschwerpunktes bei sportlichen Bewegungen gesprochen. Im vierten Arbeitsauftrag wird ein Flick-Flack Sprung modelliert. Mehrere, stoffinhaltlich unterschiedliche Aufgaben werden hier von den SchülerInnen selbstständig bearbeitet und gelöst. Als lernunterstützende Technologie wird neben dem Taschenrechner die Mathematiksoftware Mathcad 2001 Professional verwendet. Grundkenntnisse im Umgang mit diesem Programm werden vorausgesetzt. Es werden in diesem Kapitel mathematische Stoffinhalte wie Parabelgleichungen, Differential- und Integralrechnung und Fourier-Reihen behandelt. Dieser Unterrichtsvorschlag eignet sich auch bestens für eine fächerübergreifende Vernetzung mit Bewegung und Sport und/ oder Physik.

Arbeitsauftrag 1: Bildet Paare und informiert euch im Internet über den Bewegungsablauf beim Flick-Flack (Handstützüberschlag rückwärts)!

Versucht dann folgende Fragen zu beantworten:

- 1) Was sind die Knotenpunkte der Bewegung?
- 2) Welche vorbereitenden Übungen gibt es für Lernanfänger?

Lösungserwartung:¹⁴³

ad 1): Aus gebeugter Kniestellung wird mit den Armen Schwung geholt und rückwärts abgesprungen. In der ersten Flugphase sollte der Körper überstreckt werden. Das folgende Stützen erfolgt mit einwärts gedrehten Händen. Der Abdruck vom Boden erfolgt durch Abbremsen der Beugebewegung der Hüftgelenke. In der zweiten Flugphase wird der Körper dann wieder langsam in Ausgangsposition gebracht.

ad 2): Die „Brücke“ ist ein erster Schritt zum Flick-Flack. Man versucht dann, ausgehend von der Brücke rückwärts in den Handstand zu gehen. Danach kann schon dynamischer bzw. von einer erhöhten Plattform (z.B.: schräggestellter Kastendeckel) abgesprungen werden. Der Handabdruck und Beinschlag können noch in weiteren speziellen Übungen geschult werden.

Arbeitsauftrag 2: Wofür ist die Kenntnis des Körperschwerpunkt (KSP) innerhalb der Biomechanik notwendig? Überlegt gemeinsam!

Lösungserwartung:

Für bestimmte Überlegungen kann man sich vorstellen, dass alle äußeren Kräfte (z.B.: Schwerkraft), die auf den Körper einwirken, am theoretischen Massenzentrum, am KSP, angreifen. Drehungen während Flugphasen erfolgen nur um Achsen, die durch den KSP gehen.¹⁴⁴

¹⁴³ vgl. Internetquellen: Nolden

¹⁴⁴ vgl. Baca 2010, S. 68 und Apolin & Redl 2006 (Band 1), S. 65

Das Modell von Hanavan (1964) (vgl. Abb. 49) ist eines der bekanntesten mathematischen Modelle zur individuellen Körperschwerpunkt-Bestimmung. Dabei wird der Gesamt-KSP aus den relativen Teilmassen und Teilschwerpunktlagen, der als starr angenommenen einzelnen Körpersegmente (15 Segmente) mit homogener Dichte bei definierter geometrischen Form näherungsweise berechnet. Auf die explizite Berechnung wird hier nicht näher eingegangen. In der heutigen Forschung übernehmen komplexe Computerprogramme die Bestimmung des KSP. Abb. 50 zeigt aus Gründen der Anschaulichkeit eine mögliche graphische KSP-Bestimmung (Rot: Gelenkspunkte, Grün: Teilkörperschwerpunkte, Blau: Teilschwerpunkte für jeweils zwei benachbarte Körperteile, Gelb: Gesamtkörperschwerpunkt).¹⁴⁵

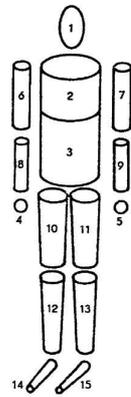


Abb. 49

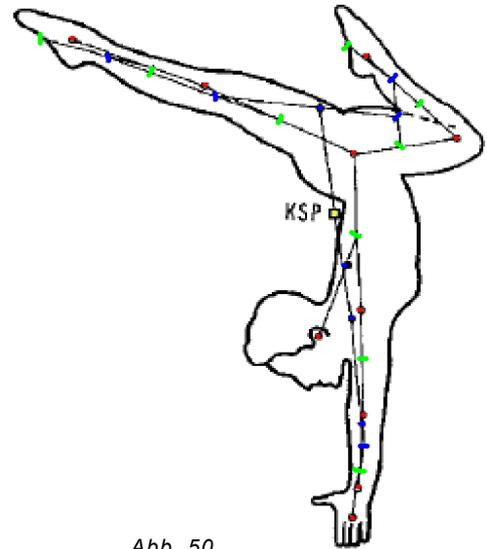


Abb. 50

Arbeitsauftrag 3: Versuche in der nachfolgenden Bildreihe (vgl. Abb. 51) für jede einzelne Körperstellung den ungefähren KSP des/der AthletIn zu bestimmen! Zeichne ihn mit Farbe ein!

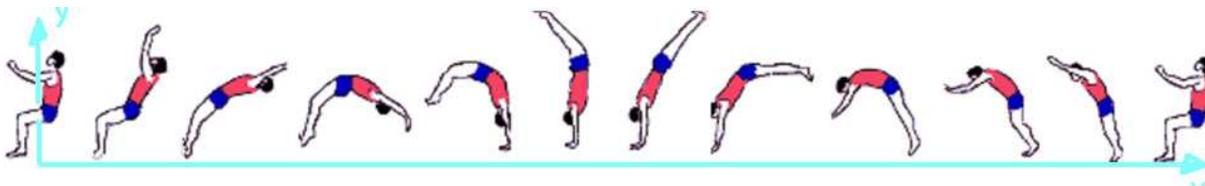


Abb. 51

Lösungserwartung:

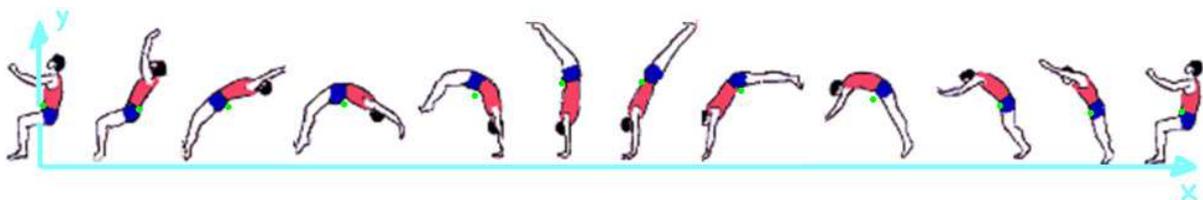


Abb. 52

¹⁴⁵ vgl. Willimczik 1989, S. 35ff.

Arbeitsauftrag 4: Der Videoaufnahme eines Flick-Flack Sprungs wurden in gleichen Wegstrecken folgende KSP-Höhen entnommen:

x: Sprungweite [m]	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2
y: KSP-Höhe [m]	0,75	1,1	1,2	1,1	0,75	1,1	1,2	1,1	0,75

Tab. 8

- a) Stelle die Datenpunkte mit Mathcad graphisch dar!
- b) Führe in Mathcad aus: Nähere die erste Teilbewegung $[0; 1,6]$ durch eine Parabel mit drei Stützpunkten an und stelle sie graphisch dar!
- c) Unter Voraussetzung, dass der Flick-Flack andauernd wiederholt wird, erhält man eine stückweise stetige Funktion mit der Periodendauer $T = 1,6$. Definiere diese Funktion unter Verwendung der Modulo-Funktion in Mathcad und zeichne sie im Intervall $[0; 4 * T]$!
- d) Ermittle rechnerisch die Fourier-Reihe, der in Aufgabe b) aufgestellten Polynomfunktion mit der Periode $T = 1,6$ und gib sie in der Sinus-Kosinusform an! Berechne explizit die ersten drei Näherungsfunktionen!
- e) Entwickle die Fourier-Reihe auch mit Mathcad! Zeige zudem, dass die zu untersuchende Funktion eine gerade Funktion ist! Stelle die periodisch fortgesetzte Funktion aus Aufgabe c) und die ersten drei Näherungsfunktionen im Intervall $[0; 2 * T]$ gemeinsam graphisch dar!
- f) Berechne die Länge $[m]$ der KSP-Bahn (beschrieben durch Parabelfunktion) für einen vollständigen Flick-Flack Sprung $[0; 2 * T]$! (Hinweis: Verwende die SIMPSON'sche Formel für $n = 5$ als Verfahren der numerischen Integration!)
- g) Kontrolliere mit Mathcad das Ergebnis der händischen Rechnung aus f) und bestimme zum Vergleich die Bahnlänge des KSP bei Verwendung der dritten Näherungsfunktion!
- h) Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit des KSP, wenn angenommen der Sprung $1,5 s$ dauert und eine gleichförmige Bewegung ($v = konst$) vorliegt!

Lösungserwartung:

a) Grafische Darstellung der Datenpunkte

$$x_w := (0 \ 0.4 \ 0.8 \ 1.2 \ 1.6 \ 2.0 \ 2.4 \ 2.8 \ 3.2)^T$$

$$y_h := (0.75 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.1 \ 0.75 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.1 \ 0.75)^T$$

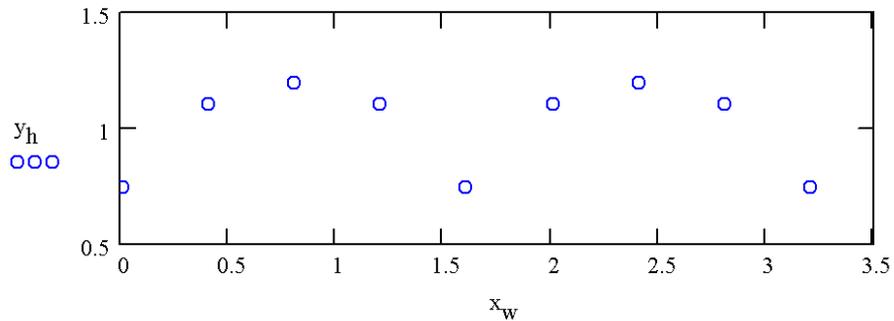


Abb. 53

b) Annäherung durch Parabel

Der Funktionsansatz lautet dann:

$$y_{\text{Näherung}}(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$$

Die drei Stützstellen sind: B0(0/0,75) B1(0,8/1,2) B2(1,6/0,75)

$$\begin{pmatrix} b_0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0.75 \\ b_0 + b_1 \cdot 0.8 + b_2 \cdot 0.8^2 = 1.2 \\ b_0 + b_1 \cdot 1.6 + b_2 \cdot 1.6^2 = 0.75 \end{pmatrix} \text{ solve, } \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow (.75000000000000000000 \quad 1.12500000000000000000 \quad -.70312500000000000000)$$

Somit lautet die Funktionsgleichung unser
Näherungsparabel:

$$f(x) := 0.75 + 1.125 \cdot x - 0.703125 \cdot x^2$$

$$x := 0, 0.01 .. 1.6$$

Abb. 54

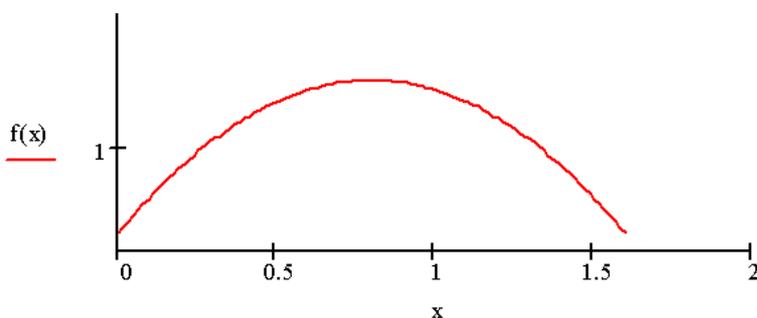


Abb. 55

c) Im nachfolgenden Schaubild wurde die Polynomfunktion $f(x)$ mit Hilfe der Modulo - Funktion periodisch fortgesetzt $\rightarrow f(z)$:

$T := 1.6$ Periode

$$f(x) := 0.75 + 1.125 \cdot x - 0.703125 \cdot x^2$$

$x := 0, 0.01 \dots T$ Intervall für $f(x)$

$$f(z) := -0.703125 \cdot (|\text{mod}(z, T)|)^2 + 1.125 \cdot |\text{mod}(z, T)| + 0.75$$

$z := 0, \frac{T}{100} \dots 4T$ Intervall für $f(z)$

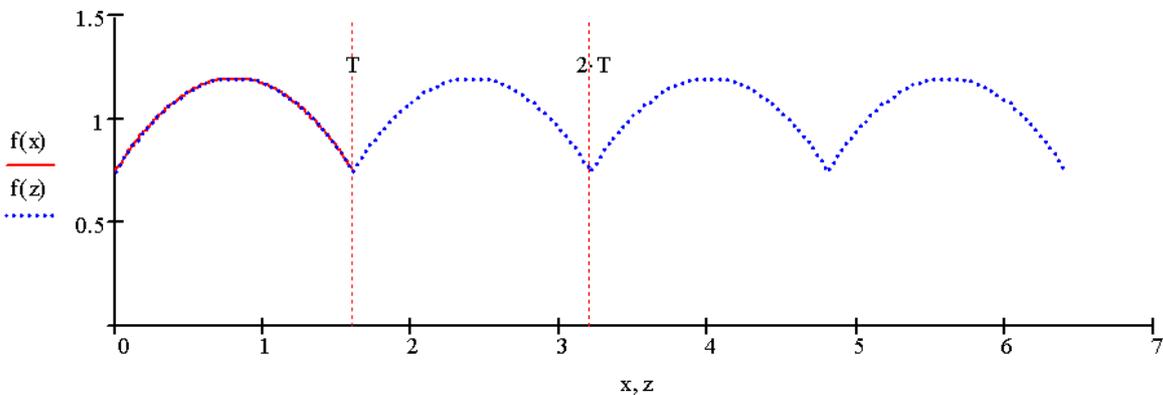


Abb. 56

d) Fourieranalyse – Rechnerische Lösung:

Die Polynomfunktion $f(x) = -0,703125 \cdot x^2 + 1,125 \cdot x + 0,75$, $0 \leq x \leq T$ ist eine gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$). Die Fourier-Reihe enthält daher keine Sinusglieder..

Somit ist $b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ und es gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}$.

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) dx = \frac{2}{1,6} \cdot [-0,234375 \cdot x^3 + 0,5625 \cdot x^2 + 0,75 \cdot x]_0^{1,6} = 2,1$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n ($n = 1, 2, 3 \dots$):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T (-0,703125 \cdot x^2 + 1,125 \cdot x + 0,75) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \left[\underbrace{-0,703125 \cdot \int_0^T x^2 \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx}_{I_1} + \underbrace{1,125 \cdot \int_0^T x \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx}_{I_2} + 0,75 \right. \\ &\quad \left. \cdot \underbrace{\int_0^T \cos(n \cdot \omega_0 \cdot x) dx}_{I_3} \right] = \frac{2}{T} \cdot (-0,703125 \cdot I_1 + 1,125 \cdot I_2 + 0,75 \cdot I_3) \end{aligned}$$

Berechnung der Teilintegrale I_1, I_2 und I_3 :

$$I_1 = \int_0^T \underbrace{x^2}_u * \underbrace{\cos(n * \omega_0 * x)}_{v'} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \cos(n * \omega_0 * x) \\ u' = 2 * x \quad v = \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \end{array} \right.$$

Für man eine partielle Integration durch, so ergibt sich

$$= x^2 * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} - \frac{2}{n * \omega_0} * \int \underbrace{x}_u * \underbrace{\sin(n * \omega_0 * x)}_{v'} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin(n * \omega_0 * x) \\ u' = 1 \quad v = -\frac{\cos(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \end{array} \right.$$

Nach nochmaliger Integration erhält man

$$\begin{aligned} &= x^2 * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} - \frac{2}{n * \omega_0} * \left\{ x * \left[-\frac{\cos(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \right] + \frac{1}{n * \omega_0} * \int \cos(n * \omega_0 * x) \right\} = \\ &= x^2 * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} - \frac{2}{n * \omega_0} * \left\{ x * \left[-\frac{\cos(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \right] + \frac{1}{n * \omega_0} * \left[\frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \right] \right\} = \\ &= \left[x^2 * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} + x * \frac{2 * \cos(n * \omega_0 * x)}{n^2 * \omega_0^2} - \frac{2 * \sin(n * \omega_0 * x)}{n^3 * \omega_0^3} \right]_0^T = \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Integrationsgrenzen und bedient sich $\omega_0 = \frac{2 * \pi}{T}$, so lässt sich der Ausdruck wie folgt vereinfachen:

$$= T^2 * \underbrace{\frac{\sin(2 * \pi * n)}{n * \frac{2 * \pi}{T}}}_0 + T * \frac{2 * \overbrace{\cos(2 * \pi * n)}^1}{n^2 * \left(\frac{2 * \pi}{T}\right)^2} - \frac{2 * \overbrace{\sin(2 * \pi * n)}^0}{n^3 * \left(\frac{2 * \pi}{T}\right)^3} = \frac{T^3}{2 * \pi^2 * n^2}$$

Das zweite Teilintegral kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \underbrace{x}_u * \underbrace{\cos(n * \omega_0 * x)}_{v'} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos(n * \omega_0 * x) \\ u' = 1 \quad v = \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \end{array} \right. \\ &= x * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} - \frac{1}{n * \omega_0} * \int \sin(n * \omega_0 * x) dx = \\ &= x * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} - \frac{1}{n * \omega_0} * \left[-\frac{\cos(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \right] = \\ &= \left[x * \frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} + \frac{\cos(n * \omega_0 * x)}{n^2 * \omega_0^2} \right]_0^T = T * \underbrace{\frac{\sin(2 * \pi * n)}{n * \frac{2 * \pi}{T}}}_0 + \frac{\overbrace{\cos(2 * \pi * n)}^1}{n^2 * \left(\frac{2 * \pi}{T}\right)^2} - \frac{\overbrace{\cos(0)}^1}{n^2 * \left(\frac{2 * \pi}{T}\right)^2} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für das dritte Teilintegral ergibt sich:

$$I_3 = \int_0^T \cos(n * \omega_0 * x) dx = \left[\frac{\sin(n * \omega_0 * x)}{n * \omega_0} \right]_0^T = \underbrace{\frac{\sin(n * \omega_0 * T)}{n * \omega_0} - \frac{\sin(n * \omega_0 * 0)}{n * \omega_0}}_0 = 0$$

Die Teilintegrale werden nun in $a_n = \frac{2}{T} * (-0,703125 * I_1 + 1,125 * I_2 + 0,75 * I_3)$ eingesetzt. Mit $T = 1,6$ lässt sich a_n weiter vereinfachen:

$$a_n = \frac{2}{T} * (-0,703125 * \frac{T^3}{2 * \pi^2 * n^2} + 1,125 * 0 + 0,75 * 0) = \frac{-0,703125 * T^2}{\pi^2 * n^2} \approx \frac{-0,18}{n^2}$$

Die Sinus-Kosinusform der Fourier-Reihe lautet also:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(n * \omega_0 * x) \approx \frac{2,1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-0,18}{n^2} * \cos(n * \frac{2 * \pi}{1,6} * x) \approx 1,05 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-0,18}{n^2} * \cos(3,93 * n * x)$$

Es ergeben sich folgende Näherungsfunktionen für fortlaufende Werte von n :

$$n = 1: f_1(x) \approx 1,05 - 0,18 * \cos(3,93 * x)$$

$$n = 2: f_2(x) \approx 1,05 - 0,18 * \cos(3,93 * x) - 0,04 * \cos(7,85 * x)$$

$$n = 3: f_3(x) \approx 1,05 - 0,18 * \cos(3,93 * x) - 0,04 * \cos(7,85 * x) - 0,02 * \cos(11,78 * x)$$

e) Fourieranalyse:

$$T := 1.6$$

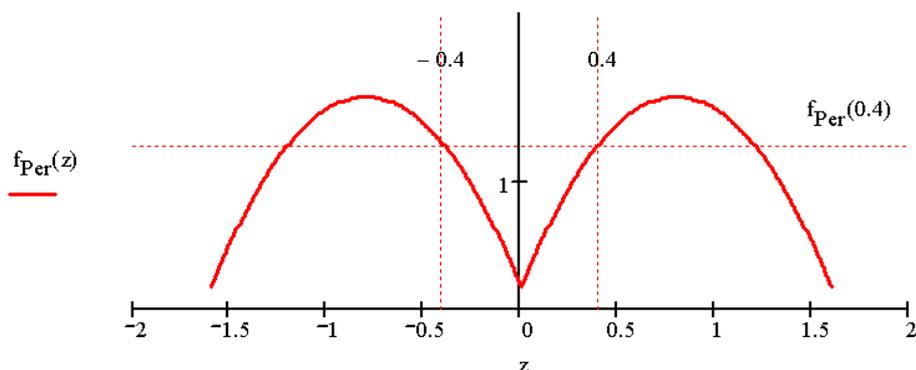
$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \text{Kreisfrequenz}$$

$$z := -T, -T + 0.01 \dots T$$

$$f_{\text{Per}}(z) := -0.703125 \cdot (|\text{mod}(z, T)|)^2 + 1.125 \cdot |\text{mod}(z, T)| + 0.75$$

$$f_{\text{per}}(z) \text{ ist eine gerade Funktion: } f_{\text{per}}(z) = f_{\text{per}}(-z)$$

$$f_{\text{Per}}(0.4) = 1.087 \quad f_{\text{Per}}(-0.4) = 1.087$$



Da die Funktion $f_{\text{per}}(z)$ eine **gerade Funktion** ist, ergibt sich folgende Vereinfachung: **$b(n)=0$**

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_0 und a_n : $n := 0 \dots 4$ $f_{\text{Parabel}}(x) := 0.75 + 1.125 \cdot x - 0.703125 \cdot x^2$

$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f_{\text{Parabel}}(x) dx$$

$$a(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f_{\text{Parabel}}(x) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot x) dx$$

$$b(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f_{\text{Parabel}}(x) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot x) dx$$

$$a_0 = 2.1$$

$a(n) =$

$a(0)$	2.1
$a(1)$	-0.182
...	-0.046
	-0.02
	-0.011

$b(n) =$

0
0
0
0
0

Abb. 57

Entwickelte Fourier-Reihe in Sinus-Cosinusform: $f_{\text{Four}}(x, k) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot x))$

$$f_{\text{Per}}(z) := -0.703125 \cdot (|\text{mod}(z, T)|)^2 + 1.125 \cdot |\text{mod}(z, T)| + 0.75$$

$$T := 3.2$$

$$x := 0, \frac{T}{100} .. T \quad z := 0, \frac{T}{100} .. T \quad \text{Definitionsintervalle}$$

Abb. 58

Graphische Darstellung der Funktion fper(z) und der ersten drei bzw. der 10. Näherungsfunktion:

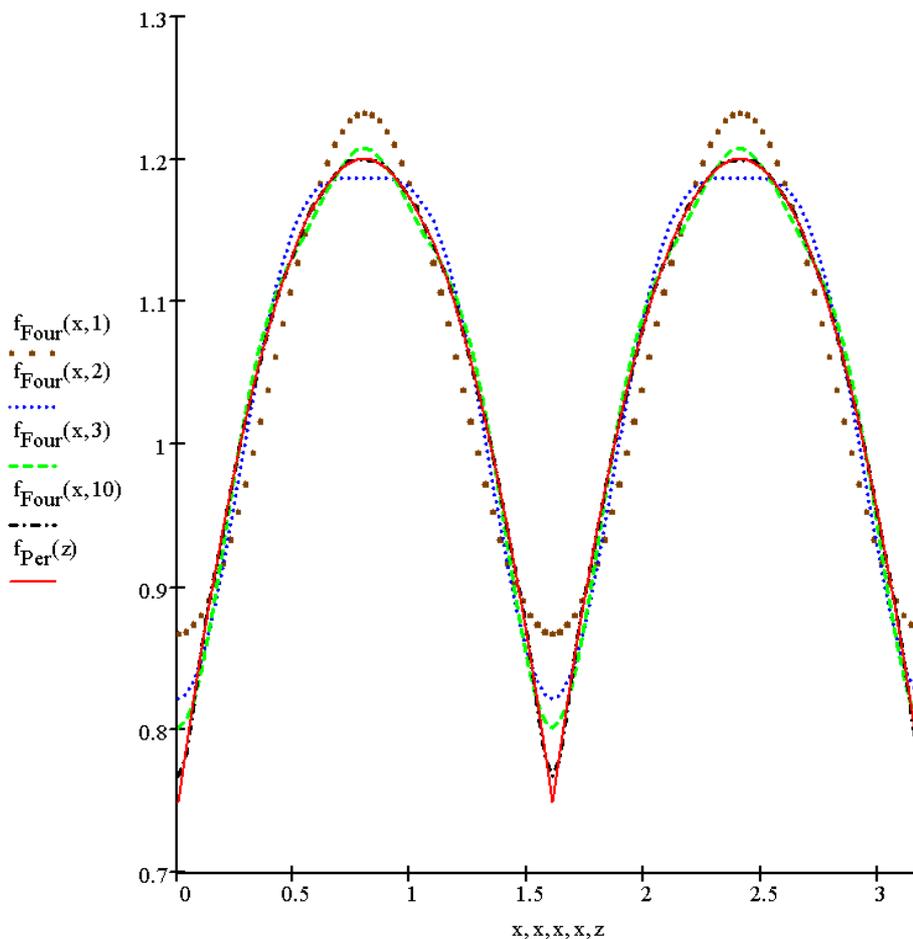


Abb. 59

f) Länge der KSP-Bahn – Rechnerische Lösung:

Es wird von der bekannten Parabelgleichung $f(x) = -0,703125 * x^2 + 1,125 * x + 0,75$ ausgegangen. Die Länge der KSP-Bahn kann mit der Integralformel für die Bogenlänge einer Kurve in einem festgelegten Intervall berechnet werden.

Für die Bogenlänge s eines Funktionsgraphen $y = f(x)$ im Intervall $[a; b]$ gilt:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Differenziert man $f(x)$ nach x , so ergibt sich:

$$y' = -1,40625 * x + 1,125$$

Die Intervallgrenzen werden mit $a = 0$ und $b = 1,6$ festgelegt. Da sich $f(x)$ nicht periodisch fortsetzt, kann die Bogenlänge nicht direkt für den gesamten Sprungvorgang $[0; 3,2]$ bestimmt werden. Es erscheint schlüssig, die Bogenlänge im Intervall $[0; 1,6]$ zu berechnen und das Ergebnis dann zu verdoppeln.

Es ergibt sich folgende Berechnung:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{1,6} \sqrt{1 + (-1,40625 * x + 1,125)^2} dx$$

$$\approx \int_0^{1,6} \sqrt{1,977 * x^2 - 3,164 * x + 2,265} dx$$

Das vorliegende Integral kann nur näherungsweise berechnet werden. Eine der effizientesten Methoden zur Lösung solcher komplizierten Integrale ist die SIMPSON'sche Regel.

Die SIMPSON-Formel wird in folgender Form angegeben:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6 * n} * [f(a) + f(b) + 4 * (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2*n-1})) + 2 * (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2*n-2}))]$$

Es wird von $n = 5$ gleich breiten Doppelstreifen ausgegangen, wobei jeder die Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1,6}{5} = 0,32$ hat. Der Abstand zweier aufeinander folgender Stützpunkte ist jeweils $\frac{b-a}{2*n}$.

Die Bogenlänge beträgt demnach:

$$s \approx \int_0^{1,6} \sqrt{1,977 * x^2 - 3,164 * x + 2,265} dx \approx$$

$$\approx \frac{0,32}{6} * [f(0) + f(1,6) + 4 * (f(0,16) + f(0,48) + f(0,8) + f(1,12) + f(1,44)) +$$

$$2 * (f(0,32) + f(0,64) + f(0,96) + f(1,28))] \approx$$

$$\approx \frac{0,32}{6} * 35,47 \approx \mathbf{1,89 m}$$

Die Gesamtbogenlänge bzw. die Länge der KSP-Bahn für einen vollständigen Flick-Flack Sprung $[0; 2 * T]$ ist dann:

$$s_{ges.} = 2 * s \approx \mathbf{3,78 m}$$

g) Berechnung der Länge der KSP-Bahn für einen vollständigen Flick-Flack Sprung:

Annäherung durch Fourier:

$$f_{\text{Four}}(x, k) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot x)$$

$$f_{\text{FourAbl}}(x) := \frac{d}{dx} f_{\text{Four}}(x, 3)$$

$$T := 3.2$$

$$\text{bogenlänge}_{\text{four}} := \int_0^T \sqrt{1 + (f_{\text{FourAbl}}(x))^2} dx$$

$$\text{bogenlänge}_{\text{four}} = 3.687$$

Abb. 60

Annäherung durch Parabel (T=1.6!):

$$f_{\text{Parabel}}(x) := 0.75 + 1.125 \cdot x - 0.703125 \cdot x^2$$

$$f_{\text{ParabelAbl}}(x) := \frac{d}{dx} f_{\text{Parabel}}(x)$$

$$\text{bogenlänge}_{\text{par}} := \int_0^T \sqrt{1 + (f_{\text{ParabelAbl}}(x))^2} dx$$

$$\text{bogenlänge}_{\text{gesamt}} := 2 \cdot \text{bogenlänge}_{\text{par}}$$

$$\text{bogenlänge}_{\text{gesamt}} = 3.784$$

h) Geschwindigkeit des KSP – Rechnerische Lösung:

Nach dem Weg-Zeit-Gesetz $v = \frac{s}{t}$ der gleichförmigen Bewegung lässt sich nach Einsetzen der Länge der KSP-Bahn und der Zeitdauer des Sprungs problemlos die durchschnittliche Geschwindigkeit des KSP berechnen:

$$v = \frac{s}{t} \approx \frac{3,78 \text{ m}}{1,5 \text{ s}} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

5. Schlusswort

Es war mir in dieser Arbeit zunächst ein Anliegen darauf hinzuweisen, dass ein fächerübergreifender und projektorientierter Unterricht das Interesse und die Motivation der SchülerInnen fördern kann. Dies wird vor allem durch die unterschiedlichen Aufgabenstellungen, die viele sportwissenschaftliche Aspekte näher beleuchten, hoffentlich erreicht.

Die Arbeit mit diesem Thema war für mich sehr interessant, aber auch eine Herausforderung, da sich in der Literatur bisher nur wenige Werke ausgiebig der Mathematik im Sport bzw. der Mathematik hinter den Sportarten widmen. Den Großteil meiner Erkenntnisse bezog ich aus wissenschaftlichen Arbeiten zu diesem Thema, Veröffentlichungen in pädagogischen Fachzeitschriften und aus sportwissenschaftlichen Fachbüchern.

Besonders wichtig war mir die Entwicklung eines Beispiels zum Thema Fußball. Ich wurde im Laufe meiner Tätigkeit als Nachwuchstrainer von meinen Torhütern oftmals mit Aussagen über die „böartigen Flatterbälle“ überschüttet. Durch die intensive Auseinandersetzung mit dieser Thematik weiß ich jetzt über dieses Phänomen Bescheid und kann meinen Torhütern wohlwissend Auskunft geben.

Während des Schreibprozesses sind auch viele neue Ideen für weitere interessante Unterrichtsstunden entstanden. Durch die tiefere Beschäftigung mit verschiedenen Themen aus dem Bereich des Sports habe ich bereits eine umfangreiche Sammlung von sportwissenschaftlichen Materialien für den Mathematikunterricht erhalten, die ich auch in meinen Unterricht einsetzen werde.

Als engagierter und wissbegieriger Sportler habe ich auch in Zukunft vor, ständig „am Ball“ zu bleiben und neueste sportwissenschaftliche Erkenntnisse, sowohl in meine außerschulische Arbeit als Trainer und Betreuer, als auch in den Unterrichtsalltag einfließen zu lassen.

6. Anhang: Arbeitsblätter aus Kapitel 4.2 im Kopierformat

Arbeitsblatt 1-1: Muskelkraft und Geschwindigkeit

Die Sportbiomechanik versucht Erscheinungen und Ursachen, sowie Wirkungen von Bewegungen im Sport innerhalb einer biologischen Struktur (=menschlicher Organismus) mechanisch zu beschreiben und zu erklären. Um später Sportbewegungen verstehen und analysieren zu können, werden wir kurz zentrale Begriffe aus der Mechanik wie die Kraft ($F = m * a$), Arbeit ($W = F * s$) oder Leistung ($P = \frac{W}{t}$) im biomechanischen Kontext diskutieren.

Aufgabe 1: Löst in Partnerarbeit: Leistet Matthias Steiner (Olympiasieger 2008 in Peking) in dieser Halteposition Arbeit? Bevor ihr eure Antwort abgebt und begründet, denkt daran, dass sein Körper irgendwann müde wird und die 258 kg nicht mehr halten kann!



Antwort: _____.

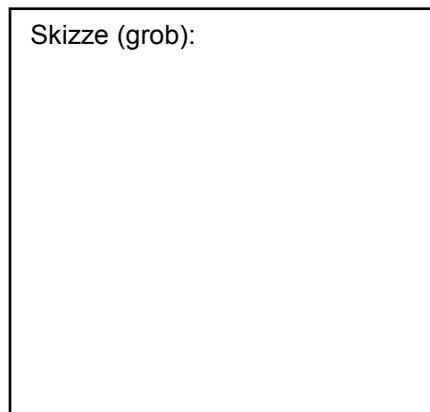
Wir wollen nun die Kräfte näher betrachten, die von einem Muskel hervorgerufen werden. Man unterscheidet die grundsätzlich mögliche Kraft eines Muskels F_H (Index H : Hill'sche Muskelkraft – mehr dazu später!) und die gerade gewollte bzw. tatsächlich auftretende Kraft F_M (Index M : Momentan auftretende Muskelkraft – mehr dazu später!). F_H hängt nun von der Kontraktionsgeschwindigkeit v ab: Je größer die erforderliche Muskelkraft ist, desto geringer wird die Bewegungsgeschwindigkeit.

Aufgabe 2: Überlege dir, durch welche Funktion (Annahme: F_H und $v \geq 0$) der Kraft-Geschwindigkeitszusammenhang eines Muskels dargestellt werden kann. Sind Einschränkungen bei der Definition notwendig? Wenn ja, wie ist demnach die Funktion zu verändern? (Hinweis: Es existiert eine realistische maximale Muskelkraft bzw. Kontraktionsgeschwindigkeit.) Führe deine Veränderungsschritte an und begründe! Skizziere deine Überlegung!

Überlegungen:

$F_H(v) =$ _____

Skizze (grob):



Arbeitsblatt 1-2: Hill'sche Gleichung (Teil 1)

Diese Kraft-Geschwindigkeitsbeziehung aus Aufgabe 2 wird in der Literatur als Hill'sche Gleichung bezeichnet. Sie gilt für konzentrische Bewegungen ($v \geq 0$, siehe später!) und lässt sich folgendermaßen anschreiben:

$$F_H(v) = \frac{c}{v + b} - a.$$

$F_H(v)$ die Muskelkraft und v die Kontraktionsgeschwindigkeit kennen wir bereits. Die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sind Muskeleigenschaften, die von Mensch zu Mensch verschieden sind.

Aufgabe 3: Welche Dimensionen haben die einzelnen Muskelkonstanten a, b und c , wenn F_H die Dimension einer Kraft [N] und v die Dimension einer Geschwindigkeit [$\frac{m}{s}$] hat? (Hinweis: Die Einheit der Leistung ist das Watt [$W = N * \frac{m}{s}$].) Trage deine Vermutungen in die nachstehende Tabelle ein! Versuche des Weiteren den Konstanten die jeweils richtige Aussage über deren spezielle Muskeleigenschaft zuzuordnen!

Konstante	Dimension/ Einheit	Beschreibung
		Zusammenhang mit der Reaktionskonstanten der führenden chemischen Reaktion (=Ursache für eine Muskelkontraktion)
		Maß für den Verbrauch an chem. Energie pro Zeitintervall (=chem. Leistung) während der chemischen Reaktion
		Zusammenfassung aller auftretenden „Reibungskräfte“ während der chemischen Reaktion

Überlegungen:

Aufgabe 4: In der Trainingslehre wird grundsätzlich zwischen drei Muskularbeitsweisen unterschieden. Recherchiere im Sportkundebuch, welche das sind und wie sie dort definiert sind? Überlege dir zu jeder Arbeitsweise zwei Beispiele aus dem Sport!

_____:

Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

_____:

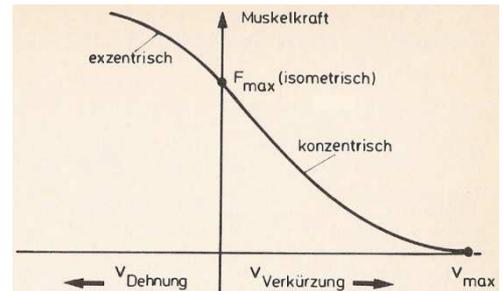
Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

_____:

Sportbeispiel: 1) _____, 2) _____

Arbeitsblatt 1-2: Hill'sche Gleichung (Teil 2)

Aufgabe 5: Bei welcher Geschwindigkeit kann laut Graph von $F_H(v) = \frac{c}{v+b} - a$ der Muskel die sogenannte isometrische Kraft F_{max} , aufbringen? Bestimme auch die maximale Kontraktionsgeschwindigkeit v_{max} ? (Hinweis: Betrachte die Erklärungen in der nebenstehenden Abb.!)



_____ $F_{max} =$ _____

_____ $v_{max} =$ _____

Bei der konzentrischen Muskelarbeitsweise wird der aktive Muskel verkürzt und bei exzentrischer Kontraktion gedehnt. Man sieht, dass bei exzentrischer Kontraktion sogar noch größere Kräfte auftreten als die bei isometrischen Bedingungen gemessene Maximalkraft F_{max} (vgl. obige Abb.) Schafft man es z.B.: 100 kg auf den Schultern zu halten, so könnte man ca. 120 kg bis zur Hocke absenken.

Aufgabe 6: Die Muskeleigenschaftswerte zweier LeichtathletInnen liegen vor.

Du als ihr Coach hast die Aufgabe ihnen Auskunft über ihren Ist-Leistungsstand zu geben! Zeichne dazu beide Funktionen (Annahme: F_H und $v \geq 0$) mit veränderbaren Muskelkonstanten in Geogebra und bestimme aussagekräftige Werte für dein Feedback! Bei welcher Geschwindigkeit sind beide Muskel gleich kräftig? Wie groß ist dort die Kraft? Sind die Maximalkraftwerte der SportlerInnen realistisch? Begründe!

5000 m LäuferIn	a= 300 N	b= 0,7 m/s	c= 2200 W
KugelstoßerIn	a= 400 N	b= 0,4 m/s	c= 1700 W

Ausführung in Geogebra:



Feedback für den/die KugelstoßerIn: _____.

Feedback für den/die 5000 m LäuferIn: _____.

Die beiden Muskeln sind bei einer Geschwindigkeit von _____ $\frac{m}{s}$ gleichkräftig.

Sie können dort eine Kraft von _____ N aufbringen.

Die Maximalkraftwerte sind _____.

Arbeitsblatt 1-3: Muskelleistung

Aufgabe 7: Leite allgemein die Formel für die Berechnung der maximalen Muskelleistung her! (Hinweis: Die mechanische Leistung ist definiert als $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$.)

Berechne diese dann für die Muskelwerte des Kugelstoßers ($a = 400 \text{ N}$, $b = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $c = 1700 \text{ W}$)! Stelle mit Excel die funktionalen Zusammenhänge $F(v)$ und $P(v)$ gemeinsam in einem Diagramm dar und kennzeichne in beiden Graphen die maximale Leistung!

$$P(v) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Nebenrechnungen:

$$P_{\max} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ausführung in Excel:

Arbeitsblatt 1-4: Muskelansteuerung

Jeder Muskel besteht aus mehreren Muskelfasern, die vom Gehirn aus über einen Nerv angesteuert werden. Diese „motorischen Einheiten“ bekommen den Befehl zu kontrahieren oder nicht. Je mehr solcher Einheiten aktiviert werden, desto mehr Kraft steht für eine Bewegung zur Verfügung. Diese gerade gewollte bzw. tatsächlich wirkende Kraft F_M haben wir bereits im Arbeitsblatt 1 kurz angesprochen. Sie setzt sich zusammen aus der Aktivierungsfunktion $A(t)$, die Werte zwischen 0 (keine Ansteuerung, daher keine Kraft) und 1 (maximale Ansteuerung, isometrische Kraft) multipliziert mit der theoretisch möglichen Kraft F_H . Es gilt: $F_M = A(t) * F_H$.

Aufgabe 8: „Die zeitliche Änderung der Anzahl der eingeschalteten motorischen Einheiten ist proportional zur Zahl der noch nicht eingeschalteten, aber gleichzeitig einschaltbaren motorischen Einheiten multipliziert mit einem konstanten Einschaltparameter S [s^{-1}]“.

Versuche eine Gleichung aufzustellen, die diesen Sachverhalt (Aktivierungsvorgang) beschreibt! Löse die Gleichung, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ noch keine motorischen Einheiten aktiviert sind!

$n(t) \dots$ _____

$n_{max} \dots$ _____

Beschreibung des Einschaltprozesses durch: _____

Lösung des vorliegenden Problems: _____

Aufgabe 9: Bestimme die Aktivierungsfunktion $A(t)$, welche durch $n(t) = A(t) * n_{max}$ gegeben ist! Was stellen die Größen $A(t)$ und S dar? Vervollständige den Text! Wie lautet schließlich die Beziehung für die tatsächlich wirkende Kraft F_M ?

$A(t) =$ _____

Die Aktivierungsfunktion bei maximaler willentlicher Anstrengung gibt an, _____.

Der Einschaltparameter S (personenspezifisch) gibt _____ an.

Je _____ / _____ S , desto _____ / _____ der Kurvenverlauf und desto _____ / _____ die Muskelansteuerung. [Auswahl: größer, schneller, flacher, kleiner, steiler, langsamer]

$F_M =$ _____

Aufgabe 10: Bei welchen Bewegungen ist die Geschwindigkeit der Aktivierung besonders wichtig? Nenne zwei Beispiele aus dem Sport, bei denen die Ansteuerungsgeschwindigkeit eine große Rolle spielt!

Antwort: _____.

Beispiele aus dem Sport: _____, _____.

Arbeitsblatt 2-1: Bestimmung der eigenen Sprungkraft

Der nachfolgende Test zur Ermittlung der konzentrischen Sprungkraft wird in der Sportwissenschaft als *Counter-Movement-Jump (CMJ)* bezeichnet:

Stelle dich mit gestreckten Beinen seitlich zu einer Wand und markiere mit den Fingerspitzen, bei nach oben ausgestreckten Armen deine Standhöhe h_{ab} . Dann gehst du in die Hocke und springst möglichst gerade weit nach oben. Kennzeichne den Punkt, den du aus der Hockposition gerade noch erreichst (Hockhöhe h_0) und den maximal erreichbaren Punkt während des Sprungs (maximale Sprunghöhe h_{max}). Die Differenz $h_{ab} - h_0$ ergibt die Hocktiefe s bzw. $h_{max} - h_{ab}$ die tatsächliche Sprunghöhe h . In unserem Sprungmodell setzen wir die vom Muskel erzeugte Beschleunigungskraft F_B als konstant voraus.

Aufgabe 11: Bildet Paare und probiert den Test aus. Füllt die Datenfelder aus und versucht gemeinsam die nachfolgenden Gesetze nachzuvollziehen!

Beschreibt in Worten, was genau mit diesen physikalischen Formeln berechnet wird! (Hinweis: Siehe angegebenes Beispiel!) Setzt anschließend eure Werte ein und berechnet! Interpretiert eure Ergebnisse mit Hilfe der nebenstehenden Tabelle!

Eingangsdaten:

Name des Springers: _____

Masse: $m = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg}$

Standhöhe: $h_{ab} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$

Hockhöhe: $h_0 \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$

Hocktiefe: $s \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$

Max. Sprunghöhe: $h_{max} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$

Erdbeschleunigung: $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Sprunghöhe: $h \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$

Objekt	Leistung
Mikrowelle	500- 800 W
Geschirrspüler	800- 1 kW
Haarfön	1- 1,4 kW
Elektro-Scooter	1,4- 1,6 kW
Motorsäge	1,6- 2 kW

Auswertung:

_____ : $v_{ab} = \sqrt{2 * g * h} \approx \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

_____ : $a = \frac{v_{ab}^2}{2*s} \approx \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Impuls, entspricht der „Wucht“, mit der man sich vom Boden abstößt

_____ : $p = m * v_{ab} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ Ns}$

_____ : $F_B = m * a \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ N}$

_____ : $F_g = m * g \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ N}$

_____ : $F_{ges.} = F_B + F_g \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ N}$

_____ : $E_{kin} = \frac{m*v_{ab}^2}{2} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ J}$

_____ : $t_{ab} = \frac{2*s}{v_{ab}} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ s}$

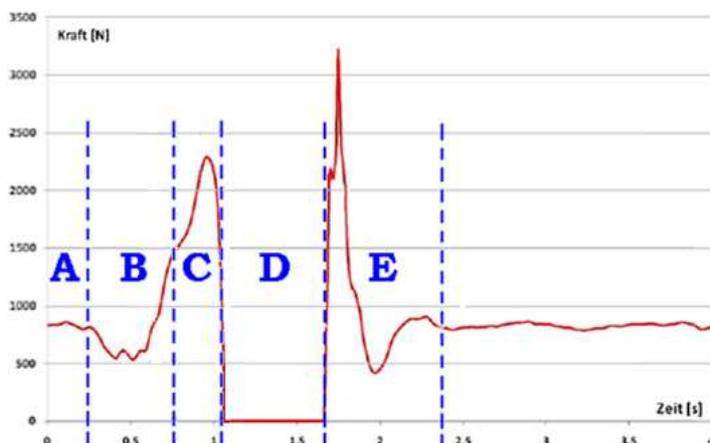
_____ : $P = \frac{E_{kin}}{t_{ab}} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$

Interpretation: _____.

Arbeitsblatt 2-2: Sprunganalyse mit Hilfe von Kraftmessplatten (Teil 1)

In der Biomechanik und Sportwissenschaft werden für die Bestimmung vertikaler und horizontaler Kraftkomponenten *Kraftmessplatten* verwendet. Dabei lassen sich mit Piezo-Kraftsensoren, die unter einer Messplattform befestigt sind, Bodenreaktionskräfte messen. Auf der Oberfläche eines Piezokristalls (besteht z.B. aus Quarz) entsteht aufgrund der Einwirkung von Druck- oder Zugkräften eine zur Kraft proportionale elektrische Spannung. Mit entsprechender Software können die erzeugten Spannungen erfasst und ausgewertet werden. Solche Kraftmessplatten werden unter anderem bei sportmotorischen Leistungstests, im Weit-/ Hochsprung, im Geräteturnen, Schwimmsport sowie bei der Gang- und Laufanalyse eingesetzt.

Aufgabe 12: Die Kraft F_z in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der Zeit t eines CMJ wurde mit einer Kraftmessplatte aufgezeichnet (vgl. nachfolgende Abb.). Ordne mit Pfeilen den Sprungphasen die jeweils richtige Zeitspanne (A, B, usw.) und Aussage zu!



A	Landephase	$F = F_G$
B	Ausgangsstellung	$F = 0$
C	Ausholphase	$F > F_G$
D	Absprungphase	$F < F_G$
E	Flugphase	$F > F_G$

Aufgabe 13: Wir betrachten den CMJ bis zum Erreichen der höchsten Position des Körperschwerpunkts. Beantworte die nachfolgenden Fragen! Begründe die Zusammenhänge mit Hilfe von Differentialquotienten, nämlich $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$!

- a) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn der Körperschwerpunkt an der tiefsten bzw. höchsten Stelle ist?

Antwort: _____.

- b) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn die Geschwindigkeit ihren niedrigsten (=während der Abwärtsbewegung) bzw. höchsten Wert (=unmittelbar vor dem Absprung) erreicht?

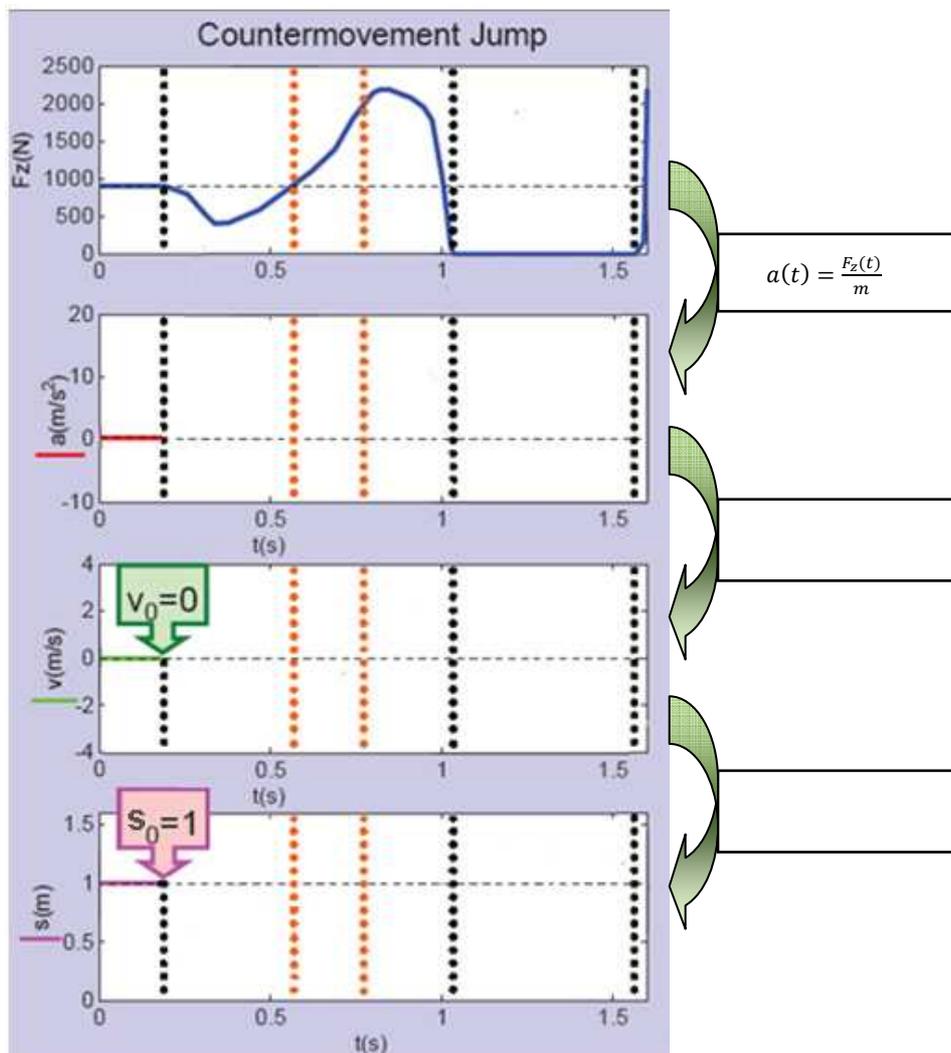
Antwort: _____.

- c) Nehmen wir den Landezeitpunkt in unser Betrachtungsfenster auf. Wie groß ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt der Landung? Ist die Kurve an dieser Stelle differenzierbar? Begründe!

Antwort: _____.

Arbeitsblatt 2-2: Sprunganalyse mit Hilfe von Kraftmessplatten (Teil 2)

Aufgabe 14: Skizziere in den nachfolgenden drei Diagrammen den jeweils gesuchten Funktionsverlauf! (Hinweis: Die abhängige Größe s beschreibt hier den Weg des Körperschwerpunkts.) Wie könntest du die gesuchten Funktion $v(t)$ und $s(t)$ mathematisch beschreiben? Verwende für diese Aufgabe deine Erkenntnisse aus Aufgabe 13!

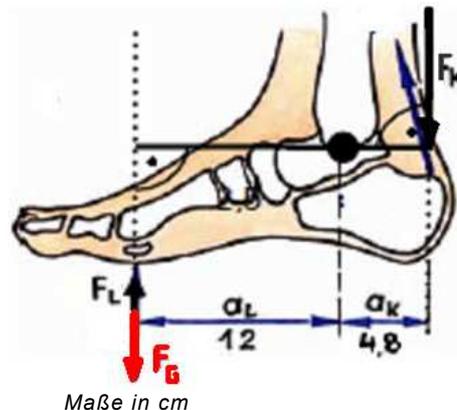


Arbeitsblatt 2-3: Belastung der Achillessehne

Wir nehmen an, dass die Kräfte im rechten Winkel auf den Fuß wirken (vgl. nachfolgende Abb.). Die vom Muskel erzeugte Beschleunigungskraft F_B kann in Aufgabe 15 vernachlässigt werden, da hier der einbeinige Zehenstand betrachtet wird und keine Gelenkbewegung stattfindet. Für Aufgabe 16 setzen wir eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und eine konstant wirkende Kraft F_B voraus.

Aufgabe 15: Überprüfe, ob die Aussage: „Die Kraft an der Achillessehne ist 2,5-mal so groß, wie die Kraft am Fußballen“ stimmt!

Wie groß ist die Kraft F_L am Fußballen? Überlege! Bestimme dann die Kraft F_K , die auf die Achillessehne wirkt? (Hinweis: Wende das Hebelgesetz: $Kraft \cdot Kraftarm = Last \cdot Lastarm$ an! Verwende die Abmessungen aus der nebenstehenden Abb.!)



Kraft F_L am Fußballen: _____

Kraft F_K an der Achillessehne: _____

Aufgabe 16: Welche Kräfte wirken bei einem senkrechten Sprung auf die Achillessehne? Verwende deine Werte (Masse $m = \underline{\hspace{2cm}} \text{ kg}$, Beschleunigung $a = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) aus Aufgabe 11! Welche maximale Sehnenbelastung tritt auf? (Hinweis: Die Maximalkraft beträgt in etwa das 1,5-fache der Durchschnittskraft.)

Die Belastung meiner Achillessehne beträgt _____ N.

Meine Achillessehne erfährt eine maximale Belastung von _____ N.

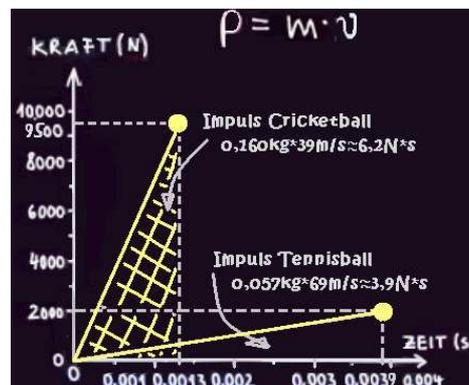
Überlegungen:

Im Sport treten die größten Kräfte beim Beschleunigen und Abbremsen von bewegten Körperteilen auf. Beim Hochsprung wirken beim Absprung beispielsweise bis zu 18 000 N auf die Achillessehne. Man könnte theoretisch mit dieser Sehne einen 1,8 t schweren PKW heben. Der menschliche Körper besitzt keine stärkere Sehne als die Achillessehne.

Arbeitsblatt 2-4: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 1)

Die Änderung des *Impulses* wird mit $\Delta p = m \cdot \Delta v$ angegeben. Der Impuls p gibt die Wucht eines Aufpralls an z.B.: Tennisball auf einen harten Untergrund. Die Kraft F , die dem Ball beim Aufprall entgegenwirkt, ist definiert als Impulsänderung pro Zeit, also $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Diese Kraft erzeugt einen Gegenimpuls, der das Eindringen des Balles verursacht. Umgeformt ergibt sich $\Delta p = F \cdot \Delta t$, wobei in dieser Gleichung p als *Kraftstoß* bezeichnet wird. Es gilt schließlich die Beziehung: $F \cdot \Delta t = \Delta p = m \cdot \Delta v$. Für zeitlich konstante bzw. veränderliche Kräfte, stellt der Kraftstoß den Flächeninhalt unter dem Kraft-Zeit Verlauf dar (vgl. gelb schraffierte Fläche in Abb.).

Aufgabe 17: In der nebenstehenden Abb. wurde der Impuls eines Tennis- und eines Cricketballes mit Hilfe der Beziehung $p = m \cdot v$ berechnet. Überprüfe die Impuls-Ergebnisse durch Berechnung der Kraftstöße mittels Integration! (Hinweis: Es wird angenommen, dass die Bälle auf einen harten Untergrund auftreffen und sich die Kraft *linear* mit der Ballverformung erhöht. Zum Zeitpunkt Null findet noch keine Ballverformung statt.)



Mathematische Formulierung des Kraftstoß: _____

Berechnung: _____

Beim Cricket entsteht bei einem Aufprall eine ungefähr fünfmal so große Kraft als beim Tennis. Der Grund dafür ist die größere Masse des Cricketballes gegenüber der gelben Filzkugel. Der Verformungsprozess des Balles läuft hier kürzer ab, wodurch größere Kräfte entstehen. Deswegen wird einem auch schnell klar, warum CricketspielerInnen eine Schutzkleidung tragen und TennisspielerInnen keine.

Aufgabe 18: Thomas Morgenstern (österreichischer Skispringer und Sportler des Jahres 2007 und 2011) besitzt bei einem CMJ folgendes Dynamogramm (Kraft-Zeit-Funktion):

$$F(t) = -44838 \cdot t^3 + 46956 \cdot t^2 - 9967 \cdot t + 647,5; \quad [t_0 \leq t \leq t_{ab}]$$

Zeichne den Kraft-Zeit-Verlauf im angegebenen Intervall mit Geogebra!

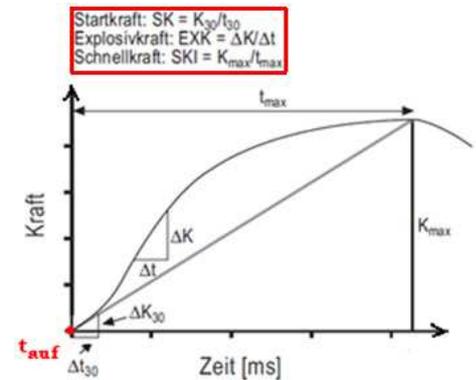
Bestimme die gesuchten Größen im rechten Textfeld mit Hilfe der Graphik! (Hinweis: Verschiebe die Funktion in den Koordinatenursprung. Bestimme mit Hilfe der neuen Funktion den Kraftstoß graphisch und rechnerisch!) Bestimme dann seine vertikale Absprunggeschwindigkeit v_{ab} und seine Sprunghöhe h ! (Hinweis: Es gilt im freien Fall folgende Beziehung: $v_{ab} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (vgl. Aufgabe 11).) Setze schlussendlich die Ergebnisse in den Lückentext ein!

Thomas Morgenstern zählt mit einer Sprunghöhe aus dem Stand von _____ cm und einer Absprunggeschwindigkeit von _____ $\frac{m}{s}$ zu den absprungkräftigsten Springern im Skisprungweltcup.

Arbeitsblatt 2-5: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 2)

Entscheidend beim Skisprung ist ein zeitlich optimal koordinierter und explosiver Absprung. Die *Explosivkraft* ist neben der *Startkraft* eine Teilkomponente der *Schnellkraft* und ist definiert als der steilste Kraftzuwachs pro Zeiteinheit. Sie wird am Wendepunkt der Kraft-Zeit-Kurve gemessen. Die Startkraft kennzeichnet den mittleren Kraftanstieg in den ersten 30 ms der Kraftentfaltung bei vorausgesetzter isometrischer Kontraktion. Der Schnellkraftindex ist der Quotient aus dem Maximalkraftwert und der Zeit, die notwendig ist, um diesen Maximalkraftwert zu erreichen (vgl. rot umrahmte Definitionen in der nachstehenden Abb.).

Aufgabe 19: Bestimme Morgensterns Explosivkraft F_{EXK} , Startkraft F_{STK} und Schnellkraft F_{SK} ! (Hinweis: Ermittle zur Berechnung von F_{STK} und F_{SK} den zeitlichen Beginn t_{auf} der Aufwärtsbewegung des Körperschwerpunkts (vgl. Abb. rechts). Wie groß ist die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt? Nutze die bereits bekannte Beziehung: $F_z * dt = m * dv$, um $v(t)$ mit $v(0) = 0$ zu berechnen!)



Zur Erinnerung: $F_z(t) = -44838 * t^3 + 46956 * t^2 - 9967 * t$

Berechnung der Explosivkraft:

Morgensterns Explosivkraft $F_{EXK} \approx$ _____ $\frac{N}{s}$

Überlegungen:

Berechnung der Startkraft:

Morgensterns Startkraft $F_{STK} \approx$ _____ $\frac{N}{s}$

Überlegungen:

Berechnung der Schnellkraft:

Morgensterns Schnellkraft $F_{SK} \approx$ _____ $\frac{N}{s}$

Überlegungen:

Arbeitsblatt 2-5: Sprungkraftdiagnostik - Morgenstern (Teil 2)

Nachbemerkung: Zum Zeitpunkt t_{auf} ist bereits eine positive Kraft F_z oder eine Kraft F , die größer ist als die Gewichtskraft F_G vorhanden. Diese Kraft wird in der Sportbiomechanik als *Anfangskraft* bezeichnet. Das *biomechanische Prinzip der Anfangskraft* besagt, dass eine Bewegung, mit der eine hohe Endgeschwindigkeit erreicht werden soll, durch eine entgegengesetzt gerichtete (Auftakt-)Bewegung einzuleiten ist. Durch das Abbremsen der Beugebewegung durch positive, nach oben gerichtete Kräfte ist zu Beginn der Streckbewegung bereits eine positive Anfangskraft für die Beschleunigung vorhanden, wenn sich der Übergang flüssig vollzieht. Der Kraftstoß zu Beginn der Beschleunigungsphase wird dadurch vergrößert. Beim Tennis kann die Schwungbewegung und Schwungübertragung auch mit dem Prinzip der Anfangskraft erklärt werden.

Arbeitsblatt 3-1: Sprung auf dem Mond

Eine weitverbreitete Hypothese ist, dass AstronautInnen am Mond, aufgrund der um ein Sechstel geringeren Schwerkraft als auf der Erde sechsmal so hoch springen müssten. Videoaufzeichnungen von Mondlandungen zeigen jedoch, dass sich diese Sprünge hinsichtlich der Sprunghöhe nicht viel von Sprüngen auf der Erde unterscheiden. Wir gehen diesen Aussagen auf den Grund und nehmen in unserem nachfolgenden physikalischen Modell an, dass die Kraft F_B , die der Muskel auf den Boden ausübt, *konstant* und auf der Erde und Mond *gleich groß* ist.

Aufgabe 20: Wie hoch und um welchen Faktor würdest du am Mond (ohne Raumanzug) höher springen? Verwende deine Sprungdaten aus Aufgabe 11! Vergleiche anschließend dein Ergebnis mit dem deines Sitznachbarn/ deiner Sitznachbarin! Wieso lässt sich eine allgemeine Aussage, um wie viel man in einem geringeren Gravitationsfeld, z.B. am Mond, höher springt als auf der Erde nicht formulieren? (Hinweis: Was wurde im Arbeitsblatt 1-1 über Muskeleigenschaften gesagt?) Interpretiere in diesem Zusammenhang die Ergebnisse einer Simulation für zwei SportlerInnen in unterschiedlichen Gravitationsfeldern!

Meine Sprunghöhe beträgt auf der Erde _____ m und auf dem Mond _____ m.
Das ist eine prozentuelle Steigerung von \approx _____ %.

Überlegungen:

Diskussion:

Hinweis: Die Sprunghöhe und Hochtiefe wurden bei dieser Simulation von Boden weg gemessen.

	Erde		Mars		Mond	
	Person 1	Person 2	Person 1	Person 2	Person 1	Person 2
Sprunghöhe [m]	1,03	1,02	1,28	1,29	1,81	1,88
Absprunggeschw. [m/s]	1,13	1,03	1,55	1,55	1,68	1,73
Absprunzeit [s]	0,65	0,74	0,41	0,4	0,37	0,36
Energie [J]	230	221	155	155	131	136

Person 1: $m = 70 \text{ kg}$, $f_{\max} = 10000 \text{ N}$, $v_{\max} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $p_{\max} = 1000 \text{ W}$, $A = 5 \text{ s}^{-1}$, $s = 0,7$, $v_0 = 0$

Person 2: $m = 70 \text{ kg}$, $f_{\max} = 9000 \text{ N}$, $v_{\max} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $p_{\max} = 900 \text{ W}$, $A = 8 \text{ s}^{-1}$, $s = 0,7$, $v_0 = 0$

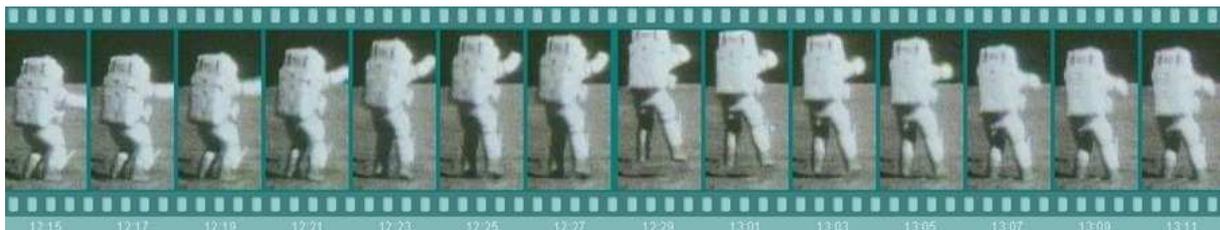
Interpretation der Simulationsergebnisse:

Arbeitsblatt 3-2: Mondlandung der Apollo 16

Aufgabe 21: Die Bewegungsgleichung des freien Falls (ohne Luftwiderstand) lautet: $m \cdot a(t) = -m \cdot g$. Zeige, dass sich aus dieser Gleichung die Weg-Zeit-Beziehung $s(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0$ herleiten lässt! Beschreibe deine Vorgehensweise ausführlich!

Herleitung der Weg-Zeit-Beziehung des freien Falls:

Aufgabe 22: Bestimme die Sprunghöhe des Apollo 16-Astronauten John Young anhand der Sprungzeit! (Hinweis: Bestimme zunächst den Absprung- und Landezeitpunkt und danach die Sprungzeit. Verwende für die Sprunghöhenbestimmung die Formel aus Aufgabe 21!) Der bekannte Filmstreifen (vgl. nachstehende Abb.) wurde mit 30 f/s Bilder je Sekunde übertragen! Hier ist nur jedes zweite Bild der Szene dargestellt.



Absprung im Bild: _____

Sprungzeit: $t_M = \text{_____} \approx \text{_____} \text{ s}$

Landung im Bild: _____

Sprunghöhe am Mond: $h = \text{_____} \approx \text{_____} \text{ m}$

Bilderanzahl insgesamt: _____

Aufgabe 23: Wie hoch würde der Astronaut springen, wenn er den Sprung aus Aufgabe 22 auf der Erde durchgeführt hätte? Interpretiere dein Ergebnis!

Sprunghöhe auf der Erde: $h = \text{_____} \approx \text{_____} \text{ m}$

Interpretation: _____.

Aufgabe 24: Es gibt nicht wenige Personen, die behaupten, dass die Wiedergabegeschwindigkeit des obigen Videos manipuliert sei. Um wie viel schneller/ langsamer müsste die Geschwindigkeit des Films gemacht werden, damit die errechnete Sprungzeit und Sprunghöhe auf dem Mond annähernd den Ergebnissen auf der Erde entsprechen?

Überlegungen:

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Dirk Nowitzki beim Freiwurf: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen).....	14
Abb. 2 Freiwurfanalyse: Kröpfl Thomas (2012).....	14
Abb. 3 Verschiedene Wurfparabeln, die durch den Ring gehen: Kröpfl Thomas (2012)	16
Abb. 4 Bestimmung des minimalen Einfallswinkel: Ludwig (2008), S. 68.....	17
Abb. 5 Schematische Darstellung der Freiwurfsituation: Ludwig (2008), S. 65.....	17
Abb. 6 Bestimmung der maximalen seitlichen Abweichung: Kröpfl Thomas (2012).....	17
Abb. 7 Abwurfwinkel in Abhängigkeit von der Abwurfhöhe: Kröpfl Thomas (2012).....	20
Abb. 8 Abwurfgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abwurfwinkel: Kröpfl Thomas (2012)	22
Abb. 9 Abwurfwinkel und Abwurfgeschwindigkeit für $h=2,2$ m: Kröpfl Thomas (2012).....	24
Abb. 10 Matthias Steiner beim Olympiasieg 2008 in Peking: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen)	32
Abb. 11 Hill'sche Gleichung: Kröpfl Thomas (2012)	32
Abb. 12 Gesamtkraft des Muskels in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit seiner Dehnung bzw. Verkürzung: Willimczik (Hrsg.) (1989), S. 91	34
Abb. 13 Hill'sche Kurven eines 5000 m Läufers und Kugelstoßers: Kröpfl Thomas (2012).....	35
Abb. 14 Darstellung der Muskelleistung des Kugelstoßers: Kröpfl Thomas (2012).....	36
Abb. 15 Kraft-Zeit-Kurve eines CMJ: vgl. Apolin (2007), S. 105 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	40
Abb. 16 Kinematische Untersuchung eines CMJ: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen) (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	41
Abb. 17 Kinematische Untersuchung eines CMJ (Lösung): (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen) (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	41
Abb. 18 Kräfte an der Achillessehne, Maße in cm: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen)	42
Abb. 19 Impuls eines Tennis- und Cricketballs: vgl. Apolin (2010), S. 25 (neu gestaltet von Kröpfl Thomas, 2012)	43
Abb. 20 Dynamogramm eines CMJ von Thomas Morgenstern: Kröpfl Thomas (2012)	44
Abb. 21 Kraft-Zeit-Kurve mit ihren charakteristischen Kennwerten bei maximaler isometrischer Kontraktion: Weineck (2010), S. 374 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	45
Abb. 22 Filmstreifen über den Mondsprung von John Young: (Siehe Lit. Verz.: Internetquellen)	49
Abb. 23 Schematische Darstellung der Stürmersituation: Kröpfl Thomas (2012).....	52
Abb. 24 Definition von Parameterfunktionen: Kröpfl Thomas (2012).....	54
Abb. 25 Funktionseinstellungen: Kröpfl Thomas (2012)	54
Abb. 26 Einschusswinkel in Abhängigkeit von der Torentfernung und verschiedenen seitlichen Torabständen. Dargestellt mit dem TI Voyage: Kröpfl Thomas (2012)	54
Abb. 27 Graphische Bestimmung des maximalen Einschusswinkels: Kröpfl Thomas (2012).....	54
Abb. 28 Wirbelbildung als Ursache des Luftwiderstands: Tolan (2010), S. 199	55
Abb. 29 Luftwiderstand eines Fußballs in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit: vgl. Wesson (2006), S. 63 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	55
Abb. 30 Flugbahn eines Fußballs mit Luftwiderstand: vgl. Tolan (2010), S. 207 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	56
Abb. 31 Variablenzuweisung: Kröpfl Thomas (2012).....	58
Abb. 32 Mode-Einstellungen: Kröpfl Thomas (2012)	58
Abb. 33 Eingabe des Differentialgleichungssystem für die Ballgeschwindigkeit und den zurückgelegten Weg des Fußballs: Kröpfl Thomas (2012).....	58
Abb. 34 Deaktivierung der Felderanzeige: Kröpfl Thomas (2012).....	59
Abb. 35 Festlegung der Graphikeinstellungen: Kröpfl Thomas (2012)	59
Abb. 36 Geschwindigkeitsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit: Kröpfl Thomas (2012).....	59
Abb. 37 Ortsfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit: Kröpfl Thomas (2012).....	59
Abb. 38 Gemeinsame Darstellung aller Lösungsfunktionen: Kröpfl Thomas (2012)	59
Abb. 39 Tabellarische Bestimmung der maximalen Flughöhe: Kröpfl Thomas (2012).....	59
Abb. 40 Tabellarische Bestimmung der Schussweite des Balles: Kröpfl Thomas (2012)	59
Abb. 41 Darstellung beider Ortsfunktionen (mit/ ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands) in einem gemeinsamen Diagramm: Kröpfl Thomas (2012).....	60

Abb. 42	Erklärung des Magnus-Effekts: Tolan (2010), S. 215.....	61
Abb. 43	Flugbahnen von Drive, Topspin und Slice: Thaller & Mathelitsch (2007), S. 125	61
Abb. 44	Freistoß von Roberto Carlos: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen) (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	62
Abb. 45	Qualitative Schussanalyse:Trefferpunkt in der Ballmitte: vgl. Tolan (2010), S. 229 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	64
Abb. 46	Qualitative Schussanalyse: Trefferpunkt am äußersten Rand: vgl. Tolan (2010), S. 229 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012.....	64
Abb. 47	Optimale Trefferpunkt für eine Bananenflanke: vgl. Tolan (2010), S. 229.....	65
Abb. 48	Abwurfposition beim Kugelstoßen: vgl. Schrefl (2011), S. 24 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	67
Abb. 49	Modell von Hanavan: Havanen (1964), S. 8.....	69
Abb. 50	Näherungsweise graphische Körperschwerpunktbestimmung: vgl. Willimczik (1989), S. 36 (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	69
Abb. 51	Bewegungsablauf beim Flick-Flack: (Siehe Lit. Verz.: Internetquellen) (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012).....	69
Abb. 52	Bewegungsablauf beim Flick-Flack mit Kennzeichnung des KSP: (Siehe Lit.Verz.: Internetquellen) (nachbearbeitet von Kröpfl Thomas, 2012)	69
Abb. 53	Graphische Darstellung der Datenpunkte: Kröpfl Thomas (2012).....	71
Abb. 54	Annäherung durch eine Parabel: Kröpfl Thomas (2012)	71
Abb. 55	Graphische Darstellung der Parabelfunktion mit Mathcad: Kröpfl Thomas (2012)	71
Abb. 56	Periodische Fortsetzung der Parabelfunktion: Kröpfl Thomas (2012).....	72
Abb. 57	Berechnung der Fourier-Koeffizienten: Kröpfl Thomas (2012).....	74
Abb. 58	Darstellung der entwickelten Fourier-Reihe in Sinus-Kosinusform: Kröpfl Thomas (2012) ...	75
Abb. 59	Graphische Darstellung verschiedener Näherungsfunktionen der Fourier-Reihe: Kröpfl Thomas (2012).....	75
Abb. 60	Berechnung der Länge der KSP-Bahn eines Flick-Flack Sprungs: Kröpfl Thomas (2012)....	77

Tabellenverzeichnis

Tab. 1	Messpunkte der Ballposition beim Freiwurf: Kröpfl Thomas (2012)	14
Tab. 2	Optimalen Freiwurfwerte bei verschiedenen Abwurfhöhen: Kröpfl Thomas (2012)	26
Tab. 3	Zulässiger Winkelbereich bei optimierter Abwurfgeschwindigkeit: Kröpfl Thomas (2012)	27
Tab. 4	Charakterisierung der Muskelkonstanten der Hill'schen Gleichung: Kröpfl Thomas (2012) ...	33
Tab. 5	Muskeleigenschaftswerte zweier Leichtathleten: Kröpfl Thomas (2012).....	34
Tab. 6	Leistungsaufnahme verschiedener elektrischer Geräte: Kröpfl Thomas (2012).....	39
Tab. 7	Simulationsergebnisse eines Streckgesprunges für zwei verschiedene Personen in unterschiedlichen Gravitationsfeldern: vgl. Thaller & Sust (2004), S. 66	48
Tab. 8	Messdaten eines Flick-Flack Sprungs: Kröpfl Thomas (2012)	70

Literaturverzeichnis

- Apolin, M. (2007). *Big Bang 5: Physikbuch für die 5. Klasse* (S. 105). Wien: öbv & hpt.
- Apolin, M. & Redl, S. (2006, 2. Aufl.). *Know-how: Ausgewählte Materialien und Übungen zur Sportkunde, Band 1* (S. 65). Wien: öbv.
- Apolin, M. & Redl, S. (2006, 2. Aufl.). *Know-how: Ausgewählte Materialien und Übungen zur Sportkunde, Band 2*. Wien: öbv.
- Baca, A. (2010, 2. überarbeitete Aufl.). *Biomechanische Grundlagen Teil 1+2*. Ein Begleit-skriptum zu der Lehrveranstaltung Biomechanische Grundlagen im SS 10 (S. 68). Sport-universität Wien.
- Ballreich, R. & Kuhlow, A. (1986). *Biomechanik der Leichtathletik*, Band 1 der Biomechanik der Sportarten (S. 89). Stuttgart: Enke.
- Ballreich, R. & Kuhlow-Ballreich, A. [Hrsg.] (1992). *Biomechanik der Sportspiele*, Band 3 der Biomechanik der Sportarten (S. 10). Stuttgart: Enke.
- Bray, K. (2006). *Wie man richtig Tore schießt: Die geheimen Gesetze des Fußballs*. Mün-chen, Zürich: Pendo.
- Bührle, M. (Hrsg.) (1985). *Grundlagen des Maximal- und Schnellkrafttrainings*. Bericht über ein internationales Symposium vom 6. bis 8. Oktober 1983 in Freiburg (S. 86). Schorn-dorf: Hofmann.
- Duncker, L. & Popp, W. (Hrsg.) (1997). *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*. Band 1: Grundlagen und Begründungen (S.135-154). Heinsberg: Agentur Dieck.
- Flitner, A. (1987). *Für das Leben – Oder für die Schule?* Pädagogische und politische Es-says. Weinheim: Beltz.
- Hanavan, E. (1964). *A mathematical model of the human body* (S. 8). Dayton, Ohio: AMRL.
- Harre, D. (1976). *Trainingslehre* (S. 12-13). Berlin: Sportverlag Berlin.
- Harre, D. (1976). *Trainingslehre* (S. 12-13). Berlin: Sportverlag Berlin und Martin, D. (1977). *Grundlagen der Trainingslehre Teil 1: Die inhaltliche Struktur des Trainingsprozesses* (S. 65). Schorndorf: Hoffmann. In: Weineck, J. (2004, 14. Aufl.). *Optimales Training: Lei-stungsphysiologische Trainingslehre unter besonderer Berücksichtigung des Kinder und Jugendtrainings* (S. 244). Balingen: Spitta Verlag.
- Hochmuth, G. (1982, 5. Aufl.). *Biomechanik sportlicher Bewegungen*. Leipzig: Sportverlag Berlin.
- Kraker, N. & Paill, F. (1990). *Physik HTL, Band 1*. Wien: E. Dorner.

- Ludwig, M. (2008). *Mathematik + Sport: Olympische Disziplinen im mathematischen Blick*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Mathelitsch, L & Thaller, S. (2008). *Sport und Physik*. Praxis Schriftenreihe Physik, Band 64. Köln: Aulis Verlag Deubner.
- Martin, D. (1977). *Grundlagen der Trainingslehre Teil 1: Die inhaltliche Struktur des Trainingsprozesses* (S. 65). Schorndorf: Hofmann.
- Müller, R. (2009). *Klassische Mechanik: Vom Weitsprung zum Marsflug* (S. 206). Berlin: de Gruyter Verlag.
- Phelps, R. (2011, 3rd Edition). *Basketball For Dummies* (S. 347). Hoboken, New Jersey: Wiley&Sons.
- Popp, W. (1997). *Die Spezialisierung auf Zusammenhänge als regulatives Prinzip der Didaktik*. In: Duncker, L. & Popp, W. (Hrsg.) (1997). *Über Fachgrenzen hinaus. Chancen und Schwierigkeiten des fächerübergreifenden Lehrens und Lernens*. Band 1: Grundlagen und Begründungen (S.135-154). Heinsberg: Agentur Dieck.
- Schmalz, T. (1994). *Biomechanische Modellierung menschlicher Bewegungen*. Schriftenreihe des Deutschen Sportbundes, Band. 26 (S. 76-77). Schorndorf: Hofmann.
- Tolan, M. (2010). *So werden wir Weltmeister: Die Physik des Fußballspiels*. München: Piper Verlag.
- Weineck, J. (2004, 14. Aufl.). *Optimales Training. Leistungsphysiologische Trainingslehre unter besonderer Berücksichtigung des Kinder und Jugendtrainings* (S. 244). Balingen: Spitta Verlag.
- Weineck, J. (2010, 16. Aufl.). *Optimales Training. Leistungsphysiologische Trainingslehre unter besonderer Berücksichtigung des Kinder und Jugendtrainings* (S. 374). Balingen: Spitta Verlag. Zit. n.: Bührle, M. [Hrsg.] (1985). *Grundlagen des Maximal- und Schnellkrafttrainings*. Bericht über ein internationales Symposium vom 6. bis 8. Oktober 1983 in Freiburg (S. 86). Schorndorf: Hofmann.
- Wesson, J. (2006). *Fußball – Wissenschaft mit Kick: Von der Physik fliegender Bälle und der Statistik des Spielausgangs*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Wick, D. (2005). *Biomechanische Grundlagen sportlicher Bewegungen*. Balingen: Spitta Verlag.
- Wick, D. (2009, 2. überarbeitete und erweiterte Aufl.). *Biomechanik im Sport* (S. 144-146). Balingen: Spitta Verlag.
- Willimczik, K. (Hrsg.) (1989). *Biomechanik der Sportarten*. Hamburg: Rowohlt Verlag.

Zeitschriften

- Ambrus, A. & Walsch, W. (1996). *Suche nach verschiedenen Lösungswegen bei Anwendungsaufgaben*. In: Mathematik in der Schule, Jhg. 34 (Heft 9), S. 449-456. Berlin: Pädagogischer Zeitschriftenverlag.
- Apolin, M. (2009). *Formelsammlung: Hintern raus!*. In: The Red Bulletin (Heft 2), S. 22-23. Wien: Red Bulletin Verlag.
- Apolin, M. (2010). *Formelsammlung: Jetzt kann es weh tun*. In: The Red Bulletin (Heft 9), S. 24-25. Wien: Red Bulletin Verlag.
- Apolin, M. (2011). *Formelsammlung: Der Zauber des Dralls*. In: The Red Bulletin (Heft 12), S. 24. Wien: Red Bulletin Verlag.
- Dorn, G. (1984). *Die Entwicklung sportlicher Leistungen und die Grenzen der Mathematik*. In: Mathematik lehren (Heft 4), S. 62-65. München: Friedrich Verlag.
- Falta, J. (2006). *König Fußball*. In: Physik Journal, Jhg. 5 (Heft 6), S. 39. Weinheim: Wiley Verlag.
- Gerecke, W. (1984). *Fußball-Geometrie. Unterrichtsbeispiel aus dem 8. Schuljahr*. In: Mathematik lehren (Heft 4), S. 58-61. München: Friedrich Verlag.
- Heinrich, R. & Esper, N. (2002). *Wozu Fußballer den TI-83-plus und dynamische Geometrie-software nutzen können*. In: TI-Nachrichten (Heft 1), S. 2-3. München: Texas Instruments.
- Henning, H. & John, B. (2011). *So wirft Dirk Nowitzki!* In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jhg. 64 (Heft 1), S. 15-18. Neuss: Verlag Seeberger.
- Jacobs, C. (2008). *20 Irrtümer übers Lernen*. In: FOCUS-SCHULE (Heft 2), S. 12. München: Burda.
- Lang, C. (2009). *Projektunterricht – Was ist das? Essay*. In: Erziehung und Unterricht, Jhg. 159 (Heft 5-6), S. 570-579. Wien: öbv.
- Oswald, U. & Schneebeli, H. (2004). *Kugelstoßen mit Luftwiderstand*. In: TI-Nachrichten (Heft 2), S. 1-3. München: Texas Instruments.
- Schäfer, M. (2008). *Formelsammlung: Warum die Banane krumm ist*. In: The Red Bulletin (Heft 4), S. 17. Wien: Red Bulletin Verlag.
- Schrefl, M. (2011). *Formelsammlung: Die Welt ist eine Kugel*. In: The Red Bulletin (Heft 10), S. 24-25. Wien: Red Bulletin Verlag.
- Spirig, F. (2005). *Der schiefe Wurf mit Luftwiderstand*. In: TI-Nachrichten (Heft 2), S. 6-8. München: Texas Instruments.

- Sust, M. (2009). *Hillsche Gleichung und die Sportwissenschaft – 70 Jahre Hillsche Gleichung*. In: *Spectrum der Sportwissenschaften*, Jhg. 21 (Heft 1), S. 49-51. Wien: ÖSG.
- Thaller, S. (2003). *Hochsprung auf dem Mond*. In: *Physik in unserer Zeit*, Jhg. 34 (Heft 2), S. 87-89. Weinheim: Wiley Verlag.
- Thaller, S. & Mathelitsch, L. (2006). *Was leistet ein Sportler?* In: *Physik in unserer Zeit*, Jhg. 37 (Heft 2), S. 87. Weinheim: Wiley Verlag.
- Thaller, S. & Mathelitsch, L. (2006). *Fußball mit Wissenschaftlichem Maß*. In: *Physik in unserer Zeit*, Jhg. 37 (Heft 3), S. 123-124. Weinheim: Wiley Verlag.
- Thaller, S. & Mathelitsch, L. (2007). *Jeder Schuss ein Treffer*. In: *Physik in unserer Zeit*, Jhg. 38 (Heft 1), S. 30-31. Weinheim: Wiley Verlag.
- Thaller, S. & Mathelitsch, L. (2007). *Spiel, Satz und Sieg*. In: *Physik in unserer Zeit*, Jhg. 38 (Heft 3), S. 124-125. Weinheim: Wiley Verlag.
- Thaller, S. & Sust, M. (2003). *Die Bedeutung der Muskeleigenschaften in unterschiedlichen Gravitationsfeldern*. In: *Spectrum der Sportwissenschaften*, Jhg. 15 (Heft 2), S. 66-67. Wien: ÖSG.
- Thaller, S. & Tilp, M. (2004). *Bewertung von gemessenen isometrischen Kraftkurven*. In: *Spectrum der Sportwissenschaften*, Jhg. 16 (Heft 1), S. 71-72. Wien: ÖSG.

Internetquellen

- Abb. 1: Dirk Nowitzki beim Freiwurf (2005). Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Dirk_Nowitzki (13.03.2012).
- Abb. 10: Matthias Steiner beim Olympiasieg 2008 in Peking. Zugriff unter <http://1asport.de/sportmix/gewichtheben/000029816/wm-generalprobe-fuer-steiner-und-co..html> (13.03.2012).
- Abb. 18: Kräfte an der Achillessehne, Maße in cm. In: Apolin, M. (2008). *Physik und Sport-Einfache Abschätzungen von Leistungen und Kräften im Sport*. Zugriff unter http://pluslucis.univie.ac.at/FBW0/FBW2008/Material/Apolin_Sport_und_Physik_sw.pdf (13.03.2012).
- Abb. 16: Blickhan, R (2005). *Forschungsmethoden in der Sportwissenschaft*. Teil III: Bewegungswissenschaft. Vorlesungsskriptum zur Lehrveranstaltung Forschungsmethoden in der Sportwissenschaft im WS 2005/2006. Zugriff unter http://www.personal.uni-je-na.de/~beb/Lectures/Forschungsm_Web/Forschungsmethoden_Biomechanik_neu_b.pdf (13.03.2012).
- Abb. 17: Blickhan, R (2005). *Forschungsmethoden in der Sportwissenschaft*. Teil III: Bewegungswissenschaft. Vorlesungsskriptum zur Lehrveranstaltung Forschungsmethoden in der Sportwissenschaft im WS 2005/2006. Zugriff unter <http://www.personal.uni->

je-
na.de/~beb/Lectures/Forschungsm_Web/Forschungsmethoden_Biomechanik_neu_b.pdf
(13.03.2012).

Abb. 22: Filmstreifen über den Mondsprung von John Young. Zugriff unter
<http://www.mondlandung.pcdl.de/index.htm> (13.03.2012).

Abb. 51: Bewegungsablauf beim Flick-Flack. Zugriff unter
<http://www.sportunterricht.de/lksport/flickflack.html> (13.03.2012).

Abb. 52: Bewegungsablauf beim Flick-Flack mit Kennzeichnung des KSP. Zugriff unter
<http://www.sportunterricht.de/lksport/flickflack.html> (13.03.2012).

Basketball (2012). *NBA Rules - Court Dimensions and Equipment*. Zugriff unter
<http://www.basketball.com/nba/rules/rule1.shtml#l> (13.03.2012).

Berres, I. (2010). *Forscher lüften Geheimnis des Wundertors*. In: SPIEGEL Online. Zugriff
unter <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,715238,00.html> (13.03.2012).

bm:uk. *Lehrplan der allgemein bildenden höheren Schulen (AHS-Oberstufe)*. Zugriff unter
<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf> (13.03.2012).

bm:uk. *Lehrplan für den Pflichtgegenstand Mathematik (AHS-Oberstufe)*. Zugriff unter
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (13.03.2012).

bm:uk. *Lehrplan für den Pflichtgegenstand Sportkunde (AHS mit besonderer Berücksichtigung der sportlichen Ausbildung-Oberstufe)*. Zugriff unter
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11918/lp_neu_ahs_64.pdf (13.03.2012).

bm:uk. *Freigegenstände*. Zugriff unter <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/900/hs36.pdf>
(13.03.2012).

CASIO Europe (2009). *Mathematik und Sport: Zwei Welten ganz nah beieinander*. Pressemitteilung. Norderstedt am 24.11.2009. Zugriff unter
<http://bildungsklick.de/pm/70999/mathematik-und-sport-zwei-welten-ganz-nah-beieinander/> (13.03.2012).

Dorner, H. (2009). *Lernkulturen*. Institut für LehrerInnenbildung und Schulforschung: Universität Innsbruck. Zugriff unter
<http://www.uibk.ac.at/ils/downloads/lernkulturen/projektunterricht.pdf> (13.03.2012).

Ewers, C. (2004). *Angewandte Theorie*. Zugriff unter
http://www.zeit.de/2004/04/Sport_2fBasketball_kurz (13.03.2012).

Kinovea (2011, latest version 0.8.15). *Video Analysis Software for Sports*. Zugriff unter
<http://www.kinovea.org/en/> (13.03.2012).

NBA(2012). *NBA Saisonstatistik 2010/2011 von Dirk Nowitzki*. Zugriff unter
<http://www.nba.com/statistics/player/Scoring.jsp?league=00&season=22010&conf=OVER>

ALL&position=0&splitType=9&splitScope=GAME&qualified=N&yearsExp=-1&splitDD=
(13.03.2012).

Nolden, P. (2010). *Sportprüfung Turnen: So klappt der Flick-Flack*. Zugriff unter http://www.helpster.de/sportpruefung-turnen-so-klappt-der-flick-flack_14277#zur-anleitung (13.03.2012).

Rexin, U. (2002). *Bestimmung der Sprunghöhe des Apollo 16-Astronauten John Young anhand der Sprungzeit*. Zugriff unter <http://www.mondlandung.pcdl.de/index.htm> (13.03.2012).

RP-Online (2012). *So hart werfen unsere Handballer*. Zugriff unter <http://www.rp-online.de/sport/mehr/handball/em/so-hart-werfen-unsere-handballer-1.1455843#> (13.03.2012).

Salzburger Nachrichten (2011). *Das Erfolgspuzzle des Thomas Morgenstern*. Zugriff unter <http://search.salzburg.com/articles/15776300?highlight=Das+Erfolgspuzzle+des+Thomas+Morgenstern> (13.03.2012).

Sport Multimedial (2012). *Biomechanische Prinzipien im Tennis*. Wien: Institut für Sportwissenschaft. Zugriff unter <http://iacss.org/~multi/test/sportarten/tennis/biomechanische-aspekte/biomechanische-prinzipien-im-tennis/> (13.03.2012).

Thaller, S. (2006). *Simulation of a squat jump - Simulation program*. Zugriff unter <http://www.uni-graz.at/sigrid.thaller/muskelapplet.html> (13.03.2012).

Walk, L. (2011). *Bewegung formt das Hirn* (S. 27-29). Transferzentrum für Neurowissenschaften und Lernen (ZNL): Universität Ulm. Zugriff unter <http://www.diezeitschrift.de/12011/walk1001.pdf> (13.03.2012).

Wikipedia-Artikel

Wikipedia (2012). *Dirk Nowitzki*. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Dirk_Nowitzki (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *Holger Geschwindner*. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Holger_Geschwindner (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *John Watts Young*. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/John_W._Young (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *Matthias Steiner*. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Matthias_Steiner (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *Roberto Carlos (Fußballspieler)*. Zugriff unter [http://de.wikipedia.org/wiki/Roberto_Carlos_\(Fußballspieler\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Roberto_Carlos_(Fußballspieler)) (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *Thomas Morgenstern*. Zugriff unter http://de.wikipedia.org/wiki/Thomas_Morgenstern (13.03.2012).

Wikipedia (2012). *Sepp Herberger*. http://de.wikipedia.org/wiki/Sepp_Herberger
(13.03.2012).