



**DIPLOMARBEIT**  
Master Thesis

**Experimentelle Bestimmung der dynamischen Parameter von  
Eisenbahnbrücken aus Stahl mit Schotteroberbau mittels Output  
Only Analyse**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplom-Ingenieurs

unter der Leitung von

**Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef FINK**

und als verantwortlich mitwirkenden Assistenten

**Dipl.-Ing Johannes KIRCHHOFER**

am

**Institut für Tragkonstruktionen Forschungsbereich Stahlbau**

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

**Georg Brandstetter, BSc**

**0525984**

Kainzing 7

A-4753 Taiskirchen im Innkreis

Wien, am

.....

## Kurzfassung

Für die Ertüchtigung von Eisenbahntrassen auf Hochgeschwindigkeitsstrecken ist die dynamische Zustandserhebung der bestehenden Brücken notwendig. Zur Ermittlung der dynamischen Eigenschaften werden bestehende Tragwerke experimentell untersucht. Diese Arbeit befasst sich speziell mit Eisenbahnbrücken aus Stahl mit Schotteroberbau. Bei den dynamischen Untersuchungen wird die Schwingungsantwort einer Struktur auf eine gezielte oder zufällige Anregung gemessen und analysiert. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten um ein Objekt in Schwingung zu versetzen. Brücken können durch eine Impulsanregung - wie zum Beispiel durch ein Fallgewicht - oder durch Zugsüberfahrten zum Schwingen angeregt werden. Bauwerke werden jedoch auch durch Umwelteinflüsse, wie Wind oder auch durch Vibrationen von Baustellen in der Nähe angeregt. Diese Einflüsse werden unter der Bezeichnung *ambiente Anregung* zusammengefasst. Eine weitere Möglichkeit besteht in der gezielten Frequenzanregung durch einen Unwucht-Erreger.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Auswirkungen der einzelnen Anregungsarten auf die Qualität der ermittelten Ergebnisse festzustellen. Zu diesem Zweck werden mehrere Brückentragwerke unter verschiedenen Anregungsarten auf die Qualität der daraus erhaltenen Ergebnisse hin untersucht.

Die Auswertung der Messungen erfolgt durch die Auswertesoftware *ARTEMIS*. Es handelt sich hierbei um ein *Output-Only-Analyse-Programm*, welches zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften einer Struktur nur Schwingungsmessungen des Objekts verwendet. Als Systemanregung wird dabei weißes Rauschen angenommen.

Diese Arbeit ist in drei Bereiche gegliedert. Der erste Teil gibt einen grundsätzlichen Einblick in die Grundlagen der Dynamik und der experimentellen Analyse. Im zweiten Teil werden die theoretischen Grundlagen, die *ARTEMIS* zum Auswerten der Messungen verwendet, kurz beschrieben. Der letzte Teil befasst sich mit der dynamischen Untersuchung von Brückentragwerken. Untersucht wird eine im Labor aufgebaute Versuchsbrücke (10 Meter Spannweite) und eine Eisenbahnbrücke (21 Meter Spannweite) der Donauuferbahn nahe Persenbeug. Die Auswertung wird mittels *ARTEMIS* durchgeführt. Analysiert werden dabei Messungen von Impulsanregungen, Zugsüberfahrten, gezielten Frequenzanregungen und ambienten Anregungen, welche im Zuge von experimentellen Messungen im Feld im Jahre 2011 gewonnen wurden.

## Abstract

For the upgrading of railway lines to high-speed the determination of the dynamic conditions of existing bridges is necessary. To evaluate the dynamic properties, experimental examinations of existing structures have to be carried out. This master thesis deals with steel railway bridges with ballasted tracks. For the dynamic investigations, the vibration response of a structure on a targeted or random excitation is measured and analyzed. There are various ways to excite a structure. Bridges can be caused to vibrate by pulse excitations for example through a falling weight or by trains. Buildings could also be excited by environmental influences such as wind etc. as well as through vibrations from nearby construction sites. These effects are referred to as ambient excitation. Another possibility is the targeted frequency excitation by an unbalance exciter.

The aim of this study is to determine the effect of the different ways of excitation on the quality of the obtained results. For this purpose, several bridge structures are examined under various kinds of excitation. The results are compared on their quality.

The analysis of the measurements is done with the evaluation software *ARTEMIS*. It is an output only analysis program, which uses vibration measurements of the object to determine the dynamic properties of a structure. The excitation is assumed to be white noise.

This work is divided into three sections. The first part is an introduction into the fundamental principles of dynamics and experimental analysis. The second part is a brief description of the theoretical foundation *ARTEMIS* uses to evaluate the measurements. The last part deals with the dynamic testing of bridge structures. A bridge built in the laboratory (10 m bearing distance) and a railway bridge (21 m bearing distance) of the 'Donauuferbahn' near Persenbeug were examined. The analysis is performed using *ARTEMIS*. In this thesis measurements of pulse excitations, excitations caused by trains, targeted frequency excitations and ambient excitations, which were obtained in the course of experimental measurements in the field in 2011, are analyzed.

## **Danksagung**

Ich bedanke mich bei Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink für die Möglichkeit, die Diplomarbeit am Institut für Tragkonstruktionen im Forschungsbereich Stahlbau zu verfassen. Ganz besonders bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing Johannes Kirchofer für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit.

Des Weiteren bedanke ich mich beim Institut für Hochbau und Technologie, Forschungsbereich für Baumechanik und Baudynamik, für die Bereitstellung der Räumlichkeiten und Gräte, zur Durchführung von Versuchen. Mein Dank gilt speziell den Herren Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Bucher, Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer und Dipl.-Ing. Maximilian Billmaier für fachliche Ratschläge.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meiner Familie und bei meinen Freunden und Kollegen, welche mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

## Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung .....	i
Abstract .....	ii
Danksagung .....	iii
Inhaltsverzeichnis .....	1
1 Dynamische Grundlagen .....	4
1.1 Bewegungsgleichungen .....	4
1.1.1 Einmassenschwinger (SDOF-System) .....	4
1.1.2 Mehrmassenschwinger (MDOF-System) .....	5
1.2 Lösung der Bewegungsgleichung .....	5
1.2.1 Freie ungedämpfte Schwingung .....	6
1.2.2 Freie viskos gedämpfte Schwingung .....	6
1.2.3 Zeitlich harmonisch erzwungene Schwingung .....	6
1.3 Amplitudenfrequenzgang .....	7
1.4 Übertragungsfunktion (FRF) .....	10
1.5 Modale Analyse .....	12
1.6 State Space .....	15
1.7 Frequency-Domain Analysis .....	16
1.7.1 Fourierreihe .....	16
1.7.2 Fourier-Transformation .....	18
1.7.3 Diskrete Fourier Transformation (DFT) .....	19
1.7.4 Fast Fourier Transformation (FFT) .....	20
2 Experimentelle Analyse von Brücken .....	23
2.1 Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten einer Brücke .....	23
2.2 Beschleunigungsgrenzwerte .....	25
2.3 Anregungsarten .....	26
2.3.1 Zugsüberfahrten .....	26
2.3.2 Ambiente Anregung .....	26
2.3.3 Anregung durch Impulshammer .....	26
2.3.4 Frequenzanregung .....	27
2.3.5 Zusammenfassung .....	27
2.4 Auswertung Allgemein .....	28
2.4.1 Auswertung der Zugsüberfahrten .....	28
2.4.2 Bestimmung der Dämpfung .....	29

---

2.5	Methoden im Zeitbereich.....	30
2.5.1	Logarithmisches Dekrement.....	30
2.5.2	Halbe Amplituden Methode.....	31
2.5.3	Least Square Fit Methode .....	32
2.6	Methoden im Frequenzbereich.....	33
2.6.1	Bandbreitenmethode .....	33
2.6.2	Curve Fitting .....	35
2.6.3	PSD.....	36
2.7	Ermittlung der Schwingungsformen.....	37
2.8	MAC Modal Assurance Criterion .....	38
3	ARTEMIS .....	41
3.1	Allgemeines .....	41
3.2	FDD Frequency Domain Decomposition .....	44
3.2.1	FDD Theorie.....	44
3.2.2	FDD .....	47
3.2.3	EFDD .....	48
3.2.4	CFDD .....	50
3.3	SSI Stochastic Subspace Identification Method .....	51
3.3.1	SSI Theorie .....	52
3.3.2	Unweighted Principal Components (UPC).....	56
3.3.3	Principal Components (PC).....	56
3.3.4	Canonical Vartate Analysis (CVA) .....	57
3.4	Signal Processing .....	58
3.4.1	Dezimierung .....	58
3.4.2	Filtern .....	59
3.4.3	Projektionskanäle .....	59
4	Messeinrichtung.....	61
4.1	Sensoren.....	61
4.2	Datenerfassung .....	61
4.3	Filterung .....	61
4.4	Output-Only Daten.....	62
4.5	Messlayout .....	62
4.6	Verwendetes Messsystem.....	63
5	Vorversuche.....	64
5.1	Rahmen .....	64

---

5.1.1	Objektbeschreibung .....	64
5.1.2	Messungen .....	65
5.1.3	Auswertung .....	65
5.1.4	Erkenntnisse .....	68
5.2	Versuchsbrücke Labor .....	69
5.2.1	Objektbeschreibung .....	69
5.2.2	Messungen .....	70
5.2.3	Auswertung .....	71
5.2.4	Erkenntnisse .....	75
6	Brücke Persenbeug.....	77
6.1	Objektbeschreibung .....	77
6.2	Messungen .....	78
6.3	Auswertung .....	79
6.4	Erkenntnisse .....	86
7	Schlussfolgerungen.....	90
8	Literaturverzeichnis.....	92
9	Abbildungsverzeichnis.....	93
10	Tabellenverzeichnis .....	95

# 1 Dynamische Grundlagen

## 1.1 Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt für dynamische Überlegungen sind die Bewegungsgleichungen der betrachteten Systeme. Dabei gibt es unterschiedliche Methoden, um diese Bewegungsgleichungen zu erhalten. Eine Variante ist das Freischneiden der Masse und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen, eine andere ist das Aufstellen der Lagrange Gleichung. Diese Methode basiert auf dem Energieerhaltungssatz.

### 1.1.1 Einmassenschwinger (SDOF-System)

Das Grundsystem der Dynamik ist der Einmassenschwinger oder auch *Single Degree of Freedom* (SDOF) System genannt. Das Besondere am Einmassenschwinger ist, dass, wie später gezeigt wird, sich auch die Schwingungen eines Mehrfreiheitsgradsystems in Form der Bewegungsgleichung des SDOF-Systems beschreiben lassen. Daher ist die Betrachtung der Bewegungsgleichung eines solchen Systems von besonderer Bedeutung.

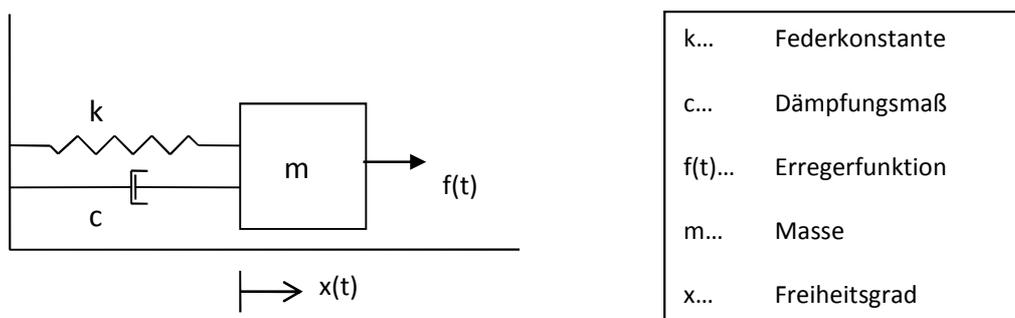


Abbildung 1.1: Modell eines linearen Einmassenschwingers (SDOF)

Angenommen werden Reibungsfreiheit, wegababhängige Federn und geschwindigkeitsabhängige Dämpfer. Die Erregerfunktion  $f(t)$  kann im Allgemeinen eine Kraftanregung  $p(t)$  oder eine Weganregung  $-M\ddot{w}_g(t)$  sein. Die Bewegungsgleichung einer erzwungenen Schwingung eines SDOF-Systems lässt sich somit zu

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (1.1)$$

formulieren. Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung 2ter Ordnung. Die Schwingungsgleichung kann auch in der Form von (1.2) dargestellt werden.

$$\ddot{x}(t) + 2 \zeta \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (1.2)$$

Wobei es sich bei  $\omega_n$  um die natürliche ungedämpfte Eigenkreisfrequenz handelt.  $\zeta$  wird als das Lehr'sche Dämpfungsmaß bezeichnet.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.3)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m k}} \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Mehrmassenschwinger (MDOF-System)

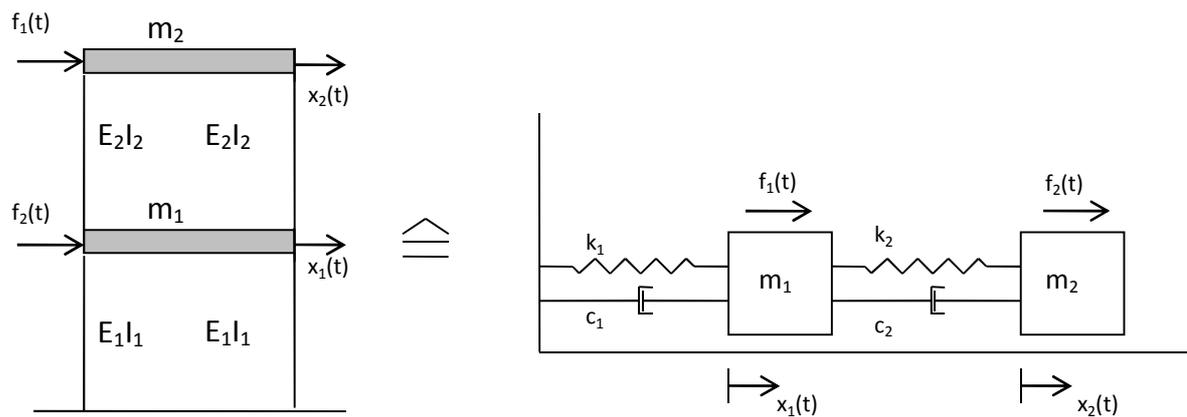


Abbildung 1.2: Modell eines linearen Mehrmassenschwingers

Die Bewegungsgleichungen des in Abbildung 1.2 dargestellten Mehrmassenschwingers oder *Multi Degree of Freedom* (MDOF) Systems ergeben sich in Matrizenform zu:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

In Matrixschreibweise sieht das Gleichungssystem folgendermaßen aus.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = \vec{f}(t) \quad (1.6)$$

Dabei stellt **M** die Massenmatrix, **C** die Dämpfungsmatrix und **K** die Steifigkeitsmatrix dar. Diese Matrizen sind symmetrisch und positiv definit.  $[x_1 \quad x_2]^T = \vec{x}$  ist der Ordinatenvektor,  $[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T = \dot{\vec{x}}$  sein Geschwindigkeitsvektor und  $[\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2]^T = \ddot{\vec{x}}$  der Beschleunigungsvektor.  $[f_1(t) \quad f_2(t)]^T = \vec{f}(t)$  sind die Erregerfunktionen in Vektorschreibweise. Vergleicht man (1.1) mit (1.6) so kann man erkennen, dass die Bewegungsgleichungen eines SDOF-System und eines MDOF-System dieselbe Form aufweisen. Die Lösungen eines Einmassenschwingers liefern also grundlegende Erkenntnisse über das Schwingungsverhalten.

## 1.2 Lösung der Bewegungsgleichung

Zu lösen ist die in (1.2) dargestellte Form der Bewegungsgleichung eines linearen Einmassenschwingers, die hier nochmals gezeigt wird.

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (1.2)$$

Die Lösung der Differentialgleichung besteht aus zwei Teilen, der homogenen Lösung und der partikulären Lösung.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.7)$$

Außerdem werden zusätzlich die Anfangsbedingungen des Systems benötigt, die sich, wie in Folge dargestellt wird, aus der Anfangsauslenkung und der Anfangsgeschwindigkeit zusammensetzen.

$$x(t = 0) = x_0 \quad (1.8)$$

$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = \dot{v}_0 \quad (1.9)$$

### 1.2.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Zunächst ist der homogene Teil der Schwingungsgleichung (1.2) zu lösen.

$$\ddot{x}_h + 2 \zeta \omega_n \dot{x}_h + \omega_n^2 x_h = 0 \quad (1.10)$$

Als Lösungsansatz für die homogene Differentialgleichung dient:

$$x_h = C e^{\alpha t} \quad (1.11)$$

Leitet man den Ansatz (1.11) nun zweimal ab und setzt die Ableitungen in (1.10) ein so erhält man die charakteristische Gleichung. Durch Auflösen dieser gelangt man zu dem in Folge beschriebenen Ergebnis.

$$\alpha_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.12)$$

Für den ungedämpften Spezialfall  $\zeta = 0$  werden  $\alpha_1, \alpha_2$  konjugiert komplex und die Lösung der ungedämpften freien Schwingung ergibt sich zu (1.13).

$$x_h(t) = A \cos(\omega_n t - \varepsilon) \quad (1.13)$$

$A$  stellt die Schwingungsamplitude dar und  $\varepsilon$  die Phasenverschiebung. Beides sind Konstanten und werden aus den in (1.8) und (1.9) erwähnten Anfangsbedingungen errechnet.

### 1.2.2 Freie viskos gedämpfte Schwingung

Für den meist betrachteten Fall einer untergedämpften Schwingung mit  $\zeta < 1$  ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung die Lösungen für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zu konjugiert komplexe Zahlen in der Form von

$$\alpha_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm i \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (1.14)$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ergibt sich somit zu:

$$x_h(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varepsilon) \quad (1.15)$$

Aus der obigen Gleichung ist erkennbar, dass die Amplitude mit dem Faktor  $e^{-\zeta \omega_n t}$  in der ungedämpften Eigenkreisfrequenz abklingt und mit  $\cos(\omega_d t - \varepsilon)$  in der gedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$  schwingt.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.16)$$

Für kleine Dämpfungen ( $\zeta \ll 1$ ) kann  $\omega_d \approx \omega_n$  angenommen werden.

### 1.2.3 Zeitlich harmonisch erzwungene Schwingung

Das System wird mit einer harmonischen Kraft

$$f(t) = p_0 \cos \Omega t \quad (1.17)$$

angeregt.  $p_0$  ist die Kraftamplitude und  $\Omega$  die Kreisfrequenz der Anregung.

$$\ddot{x}_p + 2 \zeta \omega_n \dot{x}_p + \omega_n^2 x_p = \frac{1}{m} p_0 \cos \Omega t \quad (1.18)$$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung muss eine partikuläre Lösung  $x_p(t)$  der homogenen Lösung  $x_h(t)$  überlagert werden. Die Lösung der partikulären Gleichung hat die Form der Lösung der homogenen Gleichung.

$$x_p(t) = A_p \cos(\Omega t - \varphi) \quad (1.19)$$

Die Amplitude  $A_p$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  der partikulären Lösung hängen rein von den Systemeigenschaften und der Erregerkraft ab. Die Gesamtlösung einer gedämpften harmonisch erzwungenen Schwingung lässt sich wie folgt darstellen.

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varepsilon) + A_p \cos(\Omega t - \varphi) \quad (1.20)$$

Wird ein System durch eine harmonische Kraftanregung in Schwingung versetzt, so klingt der von den Anfangsbedingungen abhängige erste Teil von (1.20)  $A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varepsilon)$  nach einer gewissen Zeit ab. Dieser Vorgang wird als Einschwingphase bezeichnet. Nach Abklingen des Einschwingvorgangs ist nur mehr der zweite Teil  $A_p \cos(\Omega t - \varphi)$  vorhandene, der eine stationäre Schwingung darstellt.  $A_p$  wird oft auch als stationäre Amplitude bezeichnet. Durch das Vorhandensein einer Dämpfung ist die stationäre Schwingung nicht in Phase (bzw.  $180^\circ$  aus der Phase) zur Anregung, sondern ist um die Phasenverschiebung  $\varphi$  versetzt. In vielen Fällen wird die Einschwingphase vernachlässigt oder ist unbekannt, da man die Anfangsbedingungen nicht kennt, und nur die stationäre Schwingung ist von Interesse.

### 1.3 Amplitudenfrequenzgang

Betrachtet man eine stationäre Schwingung und setzt man für die Amplitude  $X$  ein, so ergibt sich folgende Gleichung für die Verschiebung.

$$x(t) = X \cos(\Omega t - \varphi) \quad (1.21)$$

Durch das zweifache Ableiten nach der Zeit und Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = p_0 \cos \Omega t \quad (1.22)$$

ergibt sich

$$-m \Omega^2 X \cos(\Omega t - \varphi) - c \Omega X \sin(\Omega t - \varphi) + k X \cos(\Omega t - \varphi) = p_0 \cos \Omega t \quad (1.23)$$

Um die Komponenten der Kosinus und Sinus Terme zu vergleichen, wird in den komplexen Zahlenbereich gewechselt. Geht man davon aus, dass sich ein Vektor im komplexen Raum durch seine Amplitude und seinen Winkel darstellen lässt, so stellen die Terme in (1.23) die Abbildung der komplexen Vektoren auf der reellen Zahlenachse dar. Bei den Termen der Bewegungsgleichung handelt es sich um Kräfte, die auf die Masse wirken. Stellt man diese Kräfte in Form von Vektoren im komplexen Raum dar, so ergibt sich Abbildung 1.3.

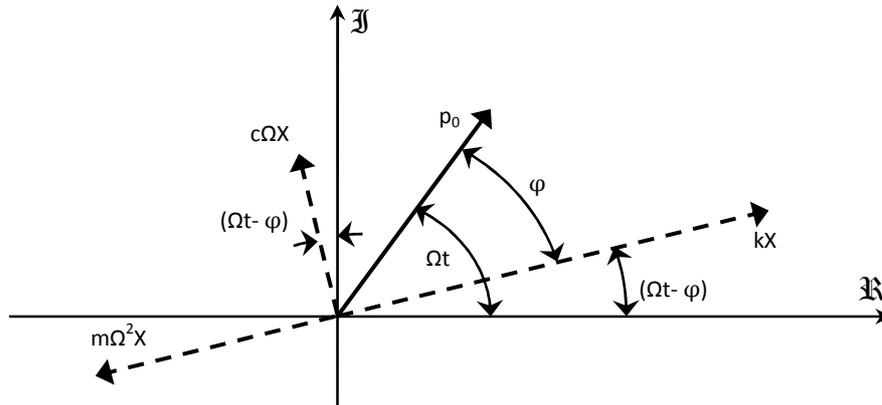


Abbildung 1.3: Darstellung der Kraftvektoren im komplexen Raum

Durch Umordnen der Vektoren in ein Vektorpolygon ergibt sich Abbildung 1.4.

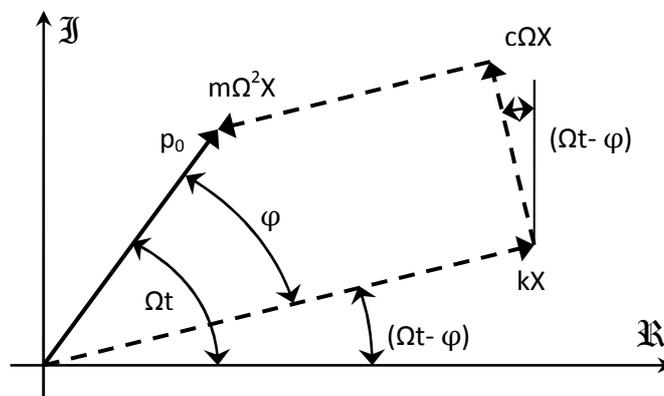


Abbildung 1.4: Kraftvektoren Polygon

Unter Verwendung des pythagoreischen Lehrsatzes  $a^2 + b^2 = c^2$  lässt sich aus Abbildung 1.4

$$(kX - m \Omega^2 X)^2 + (c \Omega X)^2 = p_0^2 \tag{1.24}$$

ablesen. Der Phasenwinkel  $\varphi$  ergibt sich zu:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{c \Omega}{k - m \Omega^2}\right) \tag{1.25}$$

Löst man (1.24) nach X auf und normiert das Ergebnis mit der statischen Auslenkung  $X_0 = X(\Omega = 0) = p_0/k$ , so erhält man den Amplitudenfrequenzgang  $\mathcal{X}_p$ .

$$\mathcal{X}_p = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right]^2}} \tag{1.26}$$

Durch Einführen des Frequenzverhältnisses  $r = \Omega/\omega_0$  lässt sich die Formel wie folgt vereinfachen.

$\mathcal{X}_p = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - r^2]^2 + [2\zeta r]^2}} \tag{1.27}$
--

Der Phasenfrequenzgang kann als

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) \quad (1.28)$$

angeschrieben werden. In Abbildung 1.5 und Abbildung 1.6 sind der Amplitudenfrequenzgang und der Phasenfrequenzgang eines Einmassenschwingers dargestellt.

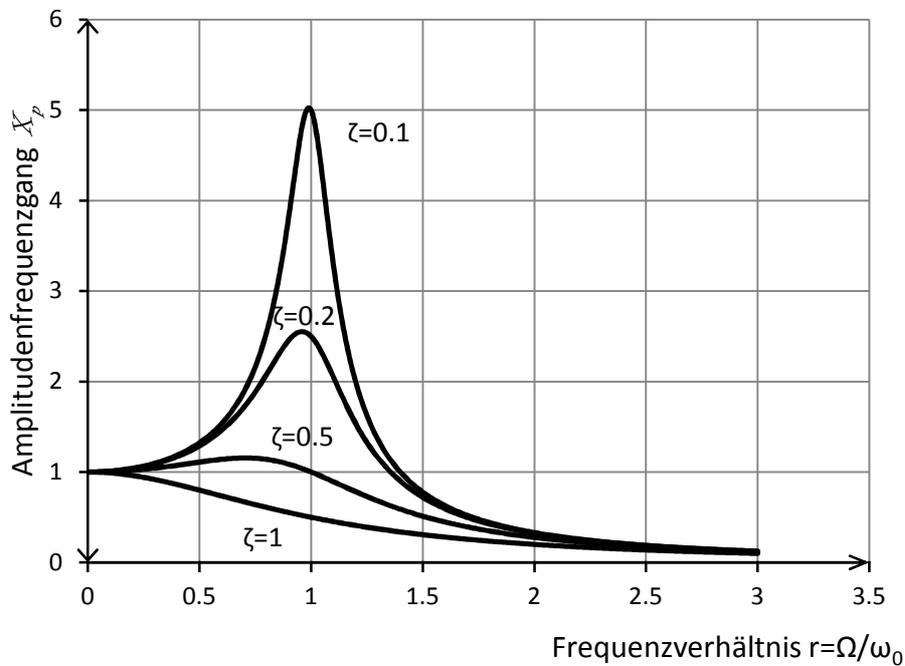


Abbildung 1.5: Amplitudenfrequenzgang eines Einmassenschwingers für unterschiedliche Dämpfungen

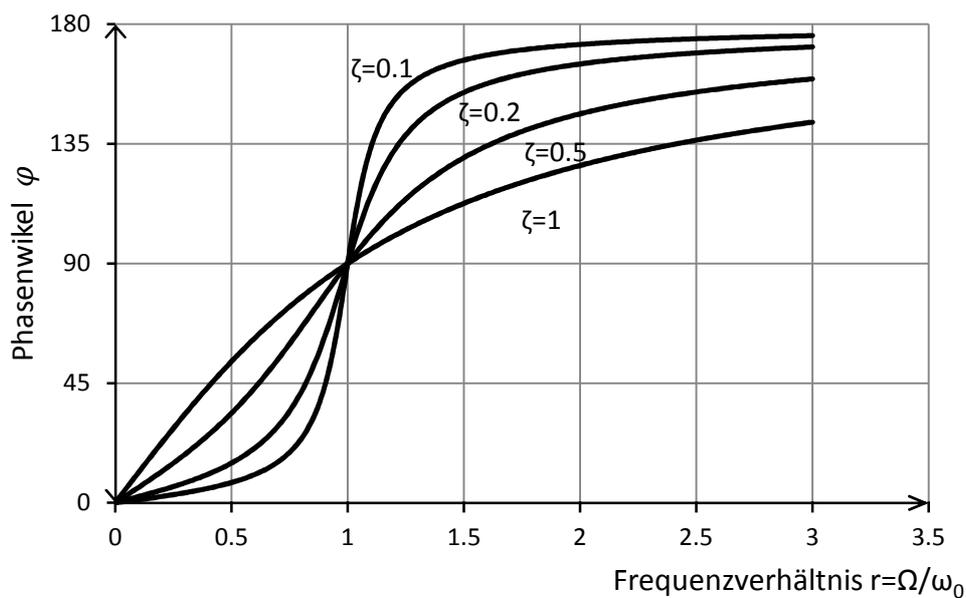


Abbildung 1.6: Phasenfrequenzgang eines Einmassenschwingers für unterschiedliche Dämpfungen

## 1.4 Übertragungsfunktion (FRF)

Durch die komplexe Erweiterung der stationären Schwingung erhalten wir die Übertragungsfunktion oder auch *Frequency Response Function* (FRF) genannt. Wie bereits gezeigt wurde hat die Lösung einer durch  $p_0 \cos \Omega t$  angeregten stationären Schwingung eines Einmassenschwingers

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = p_0 \cos \Omega t \quad (1.29)$$

die Form

$$x(t) = X \cos(\Omega t - \varphi) \quad (1.30)$$

Weiters kann gezeigt werden, dass die durch  $p_0 \sin \Omega t$  erzeugte stationäre Schwingung

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = p_0 \sin \Omega t \quad (1.31)$$

die Lösung

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \varphi) \quad (1.32)$$

hat. Wie im Abschnitt 1.3 gezeigt wurde, erhält man die Amplitude  $X$  und den Phasenwinkel  $\varphi$  einer Kosinus-Schwingung durch Projektion der komplexen Kraftvektoren auf die reelle Achse. Bei einer Sinus-Anregung ist es die Projektion auf die imaginäre Achse. Unter Heranziehen der Euler Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.33)$$

kann die Anregung in die allgemeinere Form

$$\bar{F}(\Omega) = \bar{p} = p_0 e^{i\Omega t} = p_0 (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \quad (1.34)$$

zusammengefasst werden. Der Querstrich bei  $\bar{p}$  kennzeichnet, dass es sich um eine komplexe Zahl handelt. Für eine komplexe Anregung wird nun auch ein komplexer Lösungsansatz gebraucht. Durch Kombination der Ansätze für Sinus- und Kosinus-Anregung im komplexen Raum erhalten wir als neuen Ansatz

$$\bar{x}(t) = \bar{X} e^{i\Omega t} \quad (1.35)$$

Die Bewegungsgleichung erhält nun die Gestalt

$$m \ddot{\bar{x}} + c \dot{\bar{x}} + k \bar{x} = p_0 e^{i\Omega t} \quad (1.36)$$

Wobei der reelle Teil der Gleichung für die Kosinus-Anregung und der imaginäre Teil für die Sinus-Anregung stehen. Durch Einsetzen des Ansatzes (1.35) und dessen Ableitungen lässt sich die Bewegungsgleichung auch wie folgt anschreiben.

$$(-m\Omega^2 + ic\Omega + k) \bar{X} e^{i\Omega t} = p_0 e^{i\Omega t} \quad (1.37)$$

Normiert man die komplexe Schwingungsamplitude

$$\bar{X}(\Omega) = \frac{p_0}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \quad (1.38)$$

mit der statischen Auslenkung  $X_0 = p_0/k$ , so erhält man den komplexen Frequenzgang  $\bar{H}(\Omega)$ , der auch Übertragungsfunktion genannt wird.

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{\bar{X}}{X_0} = \frac{1/k}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} = \frac{1}{(1 - (\Omega/\omega_0)^2) + i2\zeta(\Omega/\omega_0)} \quad (1.39)$$

In Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis ergibt sich die Übertragungsfunktion zu:

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{1}{(1 - r^2) + i2\zeta r} \quad (1.40)$$

Der Phasenwinkel lässt sich aus dem Verhältnis des imaginären Teils zum realen Teil berechnen.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\bar{H}_{\Im}}{\bar{H}_{\Re}}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right) \quad (1.41)$$

Der Zusammenhang zwischen der Systemantwort und der Erregerkraft lässt sich folgendermaßen beschreiben.

$$\bar{X}(\Omega) = \bar{H}(\Omega) \bar{F}(\Omega) \quad (1.42)$$

Die Übertragungsfunktion gibt also Auskunft darüber, wie ein System im Frequenzbereich auf eine bestimmte Anregung reagiert.

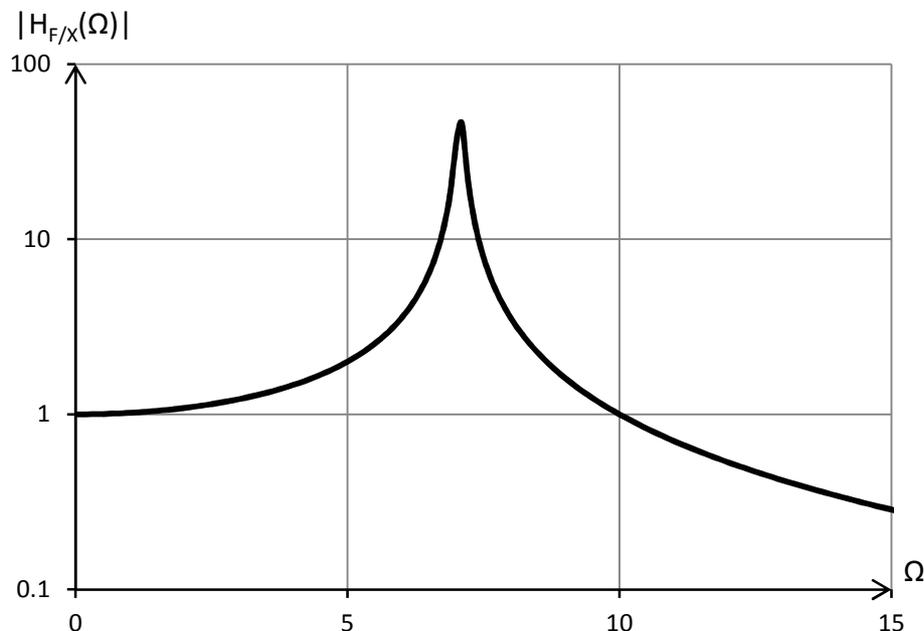


Abbildung 1.7: Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers

In Abbildung 1.7 ist der Betrag, also die Amplitude der Übertragungsfunktion, der Anregungsamplitude  $F$  auf die Systemreaktionsamplitude  $X$ , eines Einmassenschwingers dargestellt. Da sich bei geringer Dämpfung ein sehr hoher Peak im Bereich der Resonanz befindet, wird die Übertragungsfunktion meist in einem logarithmischen Maßstab dargestellt. Für energetische Betrachtungen wird diese logarithmische Darstellung oft durch eine dB Skala mit Referenzenergiepegel umgesetzt. Übertragungsfunktionen werden auch oft genutzt um den Zusammenhang zwischen Einwirkung und entstehenden Beschleunigungen an den Systemmesspunkten darzustellen, da in der Praxis oft Beschleunigungsmessungen zur Anwendung kommen und somit direkt ein Vergleich zwischen dynamischen Model und gemessenen Systemeigenschaften hergestellt werden kann.

Um die Systemantwort im Zeitbereich zu erhalten, wird wiederum von der Eulerformel Gebrauch gemacht und die Schwingung in einen Sinus- und Cosinus-Term geteilt. Aus der stationären Schwingung für Cosinus-Anregung ergibt sich

$$x(t) = p_0 |\bar{H}(\Omega)| \cos(\Omega t - \varphi). \quad (1.43)$$

Und für die Sinus-Anregung

$$x(t) = p_0 |\bar{H}(\Omega)| \sin(\Omega t - \varphi). \quad (1.44)$$

## 1.5 Modale Analyse

Ziel der modalen Analyse ist es, die Bewegungsgleichungen eines Mehrmassenschwingers in eine einfacher lösbare Form zu bringen. Aus  $n$  gekoppelten Bewegungsgleichungen eines  $n$ -Massenschwingers, werden dadurch  $n$  entkoppelte Bewegungsgleichungen der modalen Einmassenschwinger. [1]

Ausgegangen wird von der Schwingungsgleichung eines frei schwingenden, ungedämpften Mehrmassenschwingers.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = \vec{0} \quad (1.45)$$

Durch Anpassung der in Gleichung (1.13) dargestellten Lösung für den freien, ungedämpften Einmassenschwinger, auf den freien ungedämpften Mehrmassenschwinger, erhalten wir

$$\vec{x}(t) = \vec{X} \cos(\omega t - \varepsilon) \quad (1.46)$$

Wobei sich der Amplitudenvektor  $\vec{X}$  aus dem Einheitsvektor  $\vec{\phi}$  und einer Konstante  $C$  zusammensetzt. Durch zweimaliges Ableiten von (1.46) und Einsetzen der so erhaltenen Gleichung (1.46) in (1.45), ergibt sich nach weiterem Umformen

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\vec{\phi} C \cos(\omega t - \varepsilon) = \vec{0}. \quad (1.47)$$

Da der Kosinus und die Konstante  $C$  beliebig Werte annehmen können, können sie aus der Gleichung gekürzt werden. Um andere Lösungen als die triviale Lösung  $\vec{\phi} = \vec{0}$  zu erhalten, muss die nachfolgende Gleichung für alle Eigenwerte  $\omega_k$  ( $k = 1 \dots n$ ) erfüllt sein.

$$\det[\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (1.48)$$

Unter Voraussetzung der Symmetrie der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  können durch Methoden der linearen Algebra, aus der vorigen Gleichung die nachfolgenden Orthogonalitätseigenschaften gezeigt werden.

$$\vec{\phi}_l^T \mathbf{M} \vec{\phi}_k = \begin{cases} m_k^* & \dots k = l \\ 0 & \dots k \neq l \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\vec{\phi}_l^T \mathbf{K} \vec{\phi}_k = \begin{cases} k_k^* = \omega_k^2 m_k^* & \dots k = l \\ 0 & \dots k \neq l \end{cases} \quad (1.50)$$

Bei  $m_k^*$  und  $k_k^*$  handelt es sich dabei um die modale Masse und die modale Steifigkeit des jeweiligen Modes. Anders angeschrieben lassen sich die oben genannten Eigenschaften folgend darstellen.

$$\Phi^T M \Phi = \text{diag}(m_k^*) \quad (1.51)$$

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag}(c_k^*) \quad (1.52)$$

$\Phi$  ist die Modalmatrix, die durch die Aneinanderreihung der Einheitsvektoren gebildet wird. Des Weiteren wird der Ansatz verwendet, dass sich die Gesamtlösung  $\vec{x}(t)$  aus einer gewichteten Überlagerung der Eigenschwingungsformen  $\vec{\phi}_k$  zusammensetzt.

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n \vec{\phi}_k q_k(t) = \Phi \vec{q}(t) \quad (1.53)$$

$\vec{q}(t)$  stellt dabei die modalen Koordinaten dar. Multipliziert man nun das in (1.6) dargestellte Gleichungssystem eines Mehrmassenschwingers von links mit  $\Phi^T$  und setzt den obigen Ansatz in dieses Gleichungssystem ein, so erhält man die nachstehende Form der Bewegungsgleichungen.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\vec{q}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\vec{q}}(t) + \Phi^T K \Phi \vec{q}(t) = \Phi^T \vec{f}(t) \quad (1.54)$$

Durch Verwendung von (1.51) und (1.52) können der Massen- und der Steifigkeitsterm entkoppelt werden. Um das Gleichungssystem vollständig zu entkoppeln, muss auch der Dämpfungsterm entkoppelt werden. Daher muss auch der Dämpfungsterm in Form einer, durch die modale Dämpfung  $r_k^*$  besetzten, Diagonalmatrix dargestellt werden können.

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(c_k^*) = \text{diag}(2\zeta_k^* \omega_k m_k^*) \quad (1.55)$$

Da die tatsächlichen Dämpfungen meist nicht bekannt sind, müssen andere Ansätze bzw. Näherungen für die Dämpfung getroffen werden, die das Entkoppeln der Gleichungen gewährleisten. Der wohl bekannteste Ansatz ist die sogenannte *Rayleighdämpfung*. Dabei wird angenommen, dass sich die Dämpfungsmatrix als lineare Kombination aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix bilden lässt.

$$C = \alpha K + \beta M \quad (1.56)$$

Dadurch ergibt sich für die *Rayleighdämpfung* ein modales Lehr'sches Dämpfungsmaß von

$$\zeta_k^* = \frac{1}{2} (\alpha \omega_k + \frac{\beta}{\omega_k}). \quad (1.57)$$

Somit kann die Bewegungsgleichung eines Mehrmassenschwingers wie folgt dargestellt werden.

$$m_k^* \ddot{q}(t) + c_k^* \dot{q}(t) + k_k^* q(t) = \vec{f}^*(t) \quad k = 1 \dots n \quad (1.58)$$

Bei  $\vec{f}^*(t) = \Phi^T \vec{f}(t)$  handelt es sich um den modalen Erregerkraftvektor. Die Bewegungsgleichung kann auch in nachfolgender Form abgebildet werden.

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta_k^* \omega_k \dot{q}(t) + \omega_k^2 q(t) = \frac{\vec{f}^*(t)}{m_k^*} \quad k = 1 \dots n \quad (1.59)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich dabei zu:

$$\vec{q}_0 = \Phi^{-1} \vec{x}_0 \quad (1.60)$$

$$\dot{\vec{q}}_0 = \Phi^{-1} \dot{\vec{x}}_0 \quad (1.61)$$

In Abbildung 1.8 wird die modale Analyse anhand eines dreigeschossigen Stockwerksrahmen schematisch dargestellt. Dabei wird ein Drei-Freiheitsgradsystem in drei Ein-Freiheitsgradsysteme zerlegt, bei denen die Schwingungsformen bereits vorgegeben sind und nur mehr die Skalierungsfaktoren die Freiheitsgrade darstellen.

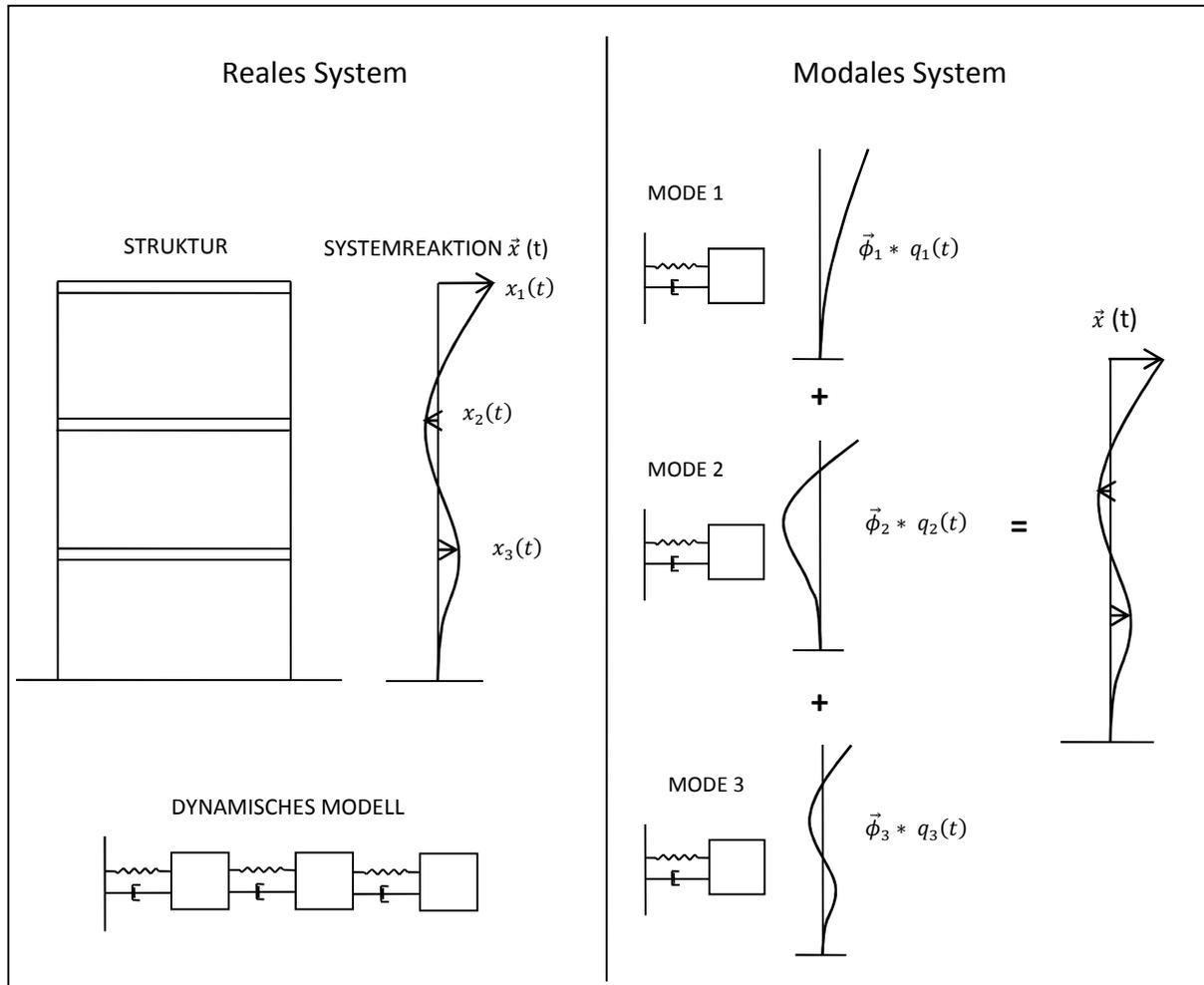


Abbildung 1.8: Schematische Darstellung der modalen Analyse

Ebenso wie die Schwingungsform kann auch die Übertragungsfunktion des wirklichen Systems aus einer Überlagerung der Übertragungsfunktionen der einzelnen Moden gewonnen werden. Exemplarisch ist dies in Abbildung 1.9 für ein drei Freiheitsgradsystem gezeigt.

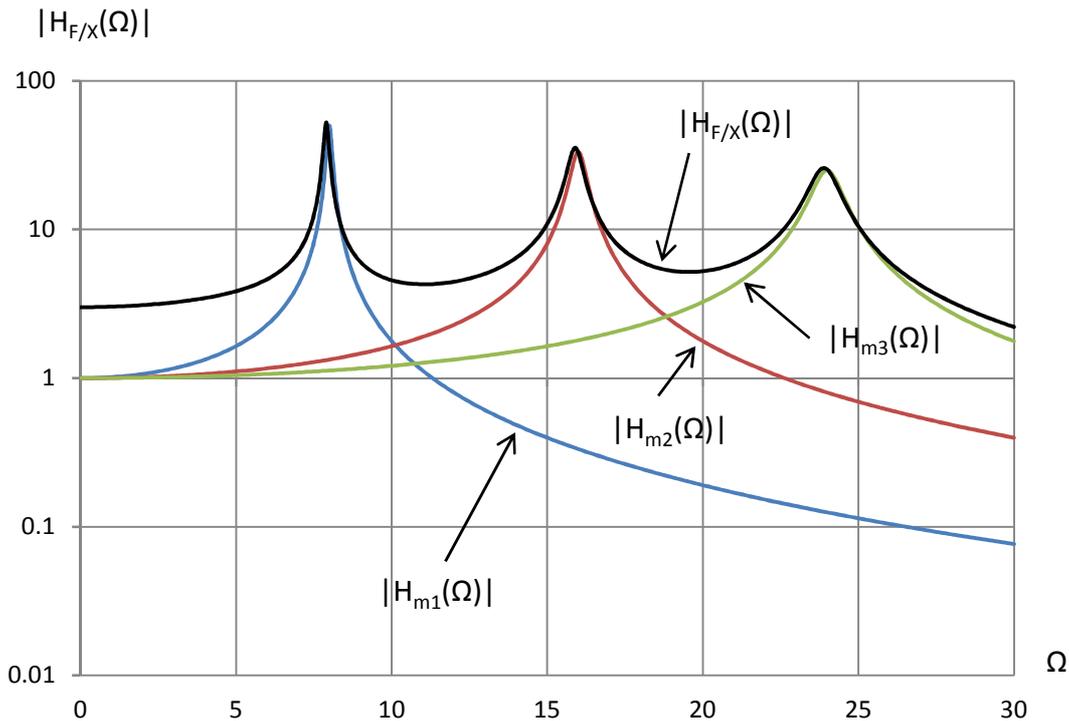


Abbildung 1.9: Modale Aufteilung einer Übertragungsfunktion

## 1.6 State Space

Da, wie im Kapitel Modale Analyse angenommen, die Dämpfungsmatrix meist nicht eine Form aufweist, mit der die Bewegungsgleichungen entkoppelt werden können, müssen andere Lösungen für dieses Problem gefunden werden. Eine sehr einfache Methode ist der Übergang in den Zustandsraum, auch *State Space* genannt. Dabei entstehen aus  $n$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $2n$  Differentialgleichungen erster Ordnung. Ausgehend von der Bewegungsgleichung eines Zweimassenschwingers

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\vec{x}}(t) + \mathbf{K}\vec{x}(t) = \vec{f}(t) \quad (1.62)$$

wird zunächst der Zustandsvektor  $\vec{y}$ , der sich aus den Verschiebungen und den Geschwindigkeiten zusammensetzt, eingeführt.

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \end{bmatrix} \quad \vec{y} \dots 2n - \text{Vektor} \quad (1.63)$$

Wird die Bewegungsgleichung zur Darstellung des Beschleunigungsterms umgeformt, nimmt die Ableitung des neuen Zustandsvektors die folgende Form an, [1].

$$\dot{\vec{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \vec{y}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \vec{f}(t) \quad (1.64)$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{A} \vec{y}(t) + \mathbf{B} \vec{f}(t) \quad \mathbf{A} \dots 2n \times 2n, \mathbf{B} \dots 2n \times n \quad (1.65)$$

Das somit entstandene Differentialgleichungssystem erster Ordnung kann mit dem Ansatz

$$\vec{y} = \vec{\phi} e^{\lambda t}, \dot{\vec{y}} = \vec{\phi} \lambda e^{\lambda t} \quad (1.66)$$

gelöst werden. Das Gleichungssystem besitzt  $2n$  Lösungen, die entweder reell oder konjugiert komplex sind.  $\lambda_k$  und die Werte des Vektors  $\vec{\phi}_k$  sind somit Elemente des komplexen Zahlenraums. Durch Betrachtung der Freien-Schwingung dieses Systems kann die folgende Orthogonalitätseigenschaft hergeleitet werden.

$$\Phi^{-1} \mathbf{A} \Phi = \mathit{diag}(\lambda_k) \quad (1.67)$$

Durch Einführen der neuen Variablen

$$\vec{y}(t) = \Phi \vec{z}(t). \quad (1.68)$$

entkoppelt sich das Gleichungssystem. Die Anfangsbedingungen ergeben sich dabei zu

$$\vec{z}_0 = \Phi^{-1} \vec{y}_0 \quad (1.69)$$

Die generelle Form eines Zustandsraummodells (*state space model*) sieht folgendermaßen aus.

$$\dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{A} \vec{y}(t) + \mathbf{B} \vec{f}(t) \quad \text{Zustandsgleichungen} \quad (1.70)$$

$$\vec{x}(t) = \mathbf{C} \vec{y}(t) + \mathbf{D} \vec{f}(t) \quad \text{Ausgabegleichungen} \quad (1.71)$$

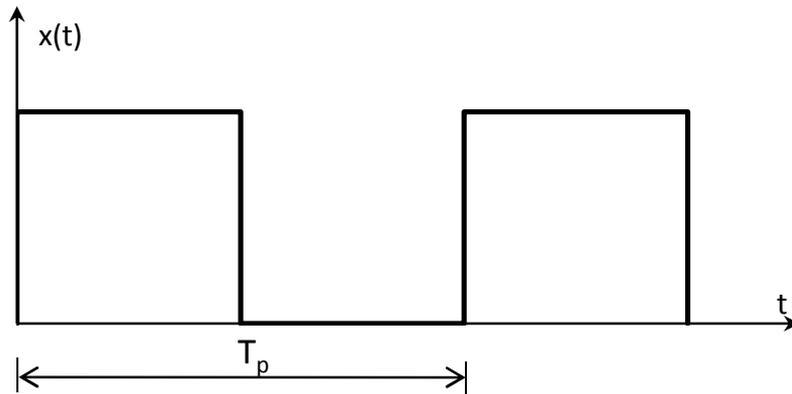
- **A** ist die **Systemmatrix** und gibt die Systemeigenschaften wieder.
- **B** ist die **Eingangsmatrix** und gibt an, in welcher Form die Kräfte  $\vec{f}(t)$  auf das System einwirken.
- **C** ist die **Ausgabematrix** und gibt an, welche Zustandsgröße in  $\vec{x}$  ausgegeben werde.
- **D** gibt einen direkten Zusammenhang zwischen den einwirkenden Kräften und den Ausgabewerten wieder - Ist meist **Null**, vergleiche [2]

## 1.7 Frequency-Domain Analysis

### 1.7.1 Fourierreihe

Mit Hilfe der Fourierreihe wird eine periodische Funktion

$$x(t) = x(t + T_p) \quad (1.72)$$

Abbildung 1.10: Periodische Funktion mit Periode  $T_p$ 

in eine Summe harmonischer Funktionen dargestellt.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t \quad (1.73)$$

Bei  $\Omega$  handelt es sich um die Fundamentalfrequenz.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_p} \quad (1.74)$$

Bei  $a_n$  und  $b_n$  handelt es sich um die Koeffizienten der  $n$ ten harmonischen Schwingung.

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt = \text{Durchschnittswert von } x(t) \quad (1.75)$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) \cos n\Omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.76)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) \sin n\Omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.77)$$

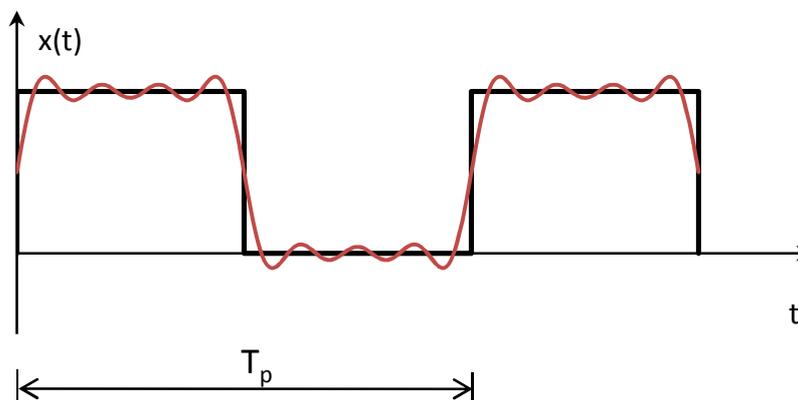


Abbildung 1.11: Darstellung einer Quadratwelle durch die ersten vier Sinusterme der zugehörigen Fourierreihe

$$\cos n\Omega t = \frac{1}{2} (e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}) \quad (1.78)$$

$$\sin n\Omega t = -i \frac{1}{2} (e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}) \quad (1.79)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (1.78) und (1.79) wird der Übergang auf eine komplexe Darstellung ermöglicht.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n e^{in\Omega t} \quad (1.80)$$

Bei  $\bar{X}_n$  handelt es sich um den Koeffizienten der komplexen Fourierreihe. Der Querstrich sagt dabei aus, dass es sich um eine komplexe Zahl handeln kann.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-in\Omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (1.81)$$

### 1.7.2 Fourier-Transformation

Eine periodische Funktion kann durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Eine nicht periodische Funktion dagegen, wird durch ein Fourier-Integral dargestellt. Die Transformation einer von der Zeit abhängigen Funktion durch ein Fourier-Integral in eine von der Frequenz abhängigen Funktion, wird Fourier Transformation genannt. Voraussetzung für die Integraltransformation ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.82)$$

Zunächst führen wir die folgenden Notationen ein.

$$\Omega = \Delta\Omega, \quad \Omega_n = n\Omega \quad (1.83)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{T_p} \bar{X}(\Omega_n) = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \bar{X}(\Omega_n) \quad (1.84)$$

Unter Verwendung dieser Voraussetzungen ergibt sich aus (1.80)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega \quad (1.85)$$

und aus (1.81)

$$\bar{X}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-i\Omega_n t} dt. \quad (1.86)$$

Um eine nicht periodische Funktion durch harmonische Ausdrücke darzustellen, lassen wir die Periode  $T_p \rightarrow \infty$  gehen, wodurch die gesamte Zeitgeschichte von  $x(t)$  inkludiert wird. Durch den Grenzübergang wird  $\Omega_n$  zu  $\Omega$  und der Frequenzschritt  $\Delta\Omega$  wird zum Differential  $d\Omega$ . Die dadurch erhaltenen Gleichungen werden auch Fourier Transformation Paar genannt.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (1.87)$$

$$\bar{X}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (1.88)$$

Setzen wir  $f = \Omega/2\pi$  in diese Gleichungen ein, ergibt sich die Fourier Transformation zu

$$\bar{X}(f) \equiv \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.89)$$

und ihre Inverse zu

$$x(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\bar{X}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(f) e^{i2\pi ft} df \quad (1.90)$$

Nachfolgend befinden sich die Abbildungen einer Zeitreihe und einer Frequenzbereichsdarstellung eines Ausschwingvorgangs eines Einmassenschwingers.

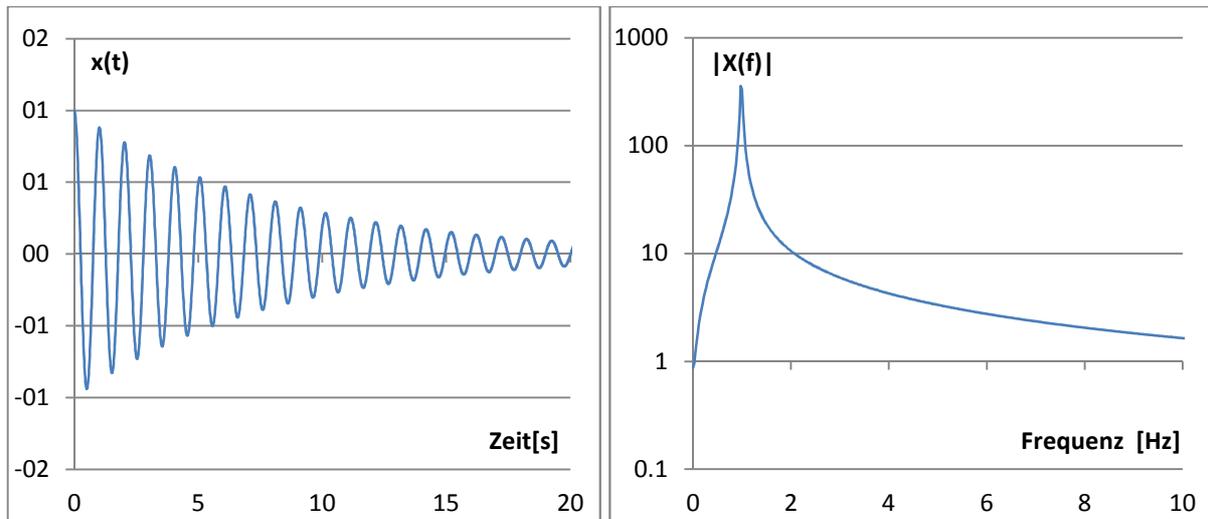


Abbildung 1.12:  $x(t)$  und  $|X(f)|$  eines Einmassenschwingers

### 1.7.3 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Die DFT nähert eine kontinuierliche Fourier-Transformation an die diskreten Frequenzen  $f_n$  an. Digitale Messungen liefern Messdaten in Form von endlich vielen Werten zu bestimmten Zeitpunkten. Die kontinuierliche Funktion  $x(t)$  ist dadurch in einem Zeitraum von  $T = N \Delta t$  in den äquidistanten Zeitschritten  $\Delta t$  als diskrete Funktion  $x_s(t)$  bekannt. Die Inverse dieses Zeitschrittes stellt die Abtastrate  $f_s$ , oder auch *sampling frequency* genannt, dar. Zur Auswertung stehen

$$N = \frac{T}{\Delta t} = f_s T \quad (1.91)$$

Messpunkte zur Verfügung. Um aus diesen Messwerten die diskrete Fourier Transformierte zu erhalten, wird die Messreihe periodisch fortgesetzt und mit der Periode  $T$  in eine komplexe Fourierreihe entwickelt. Das Zeitintervall ist dabei durch  $t_m = m \Delta t$  festgelegt, wobei  $m$  von 0 bis  $N$  läuft. Das Frequenzintervall bzw. die Frequenzbandbreite ist mit

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \Delta t} \quad (1.92)$$

festgelegt. Die DFT besteht aus  $N$  Werten und kann bis zu einer Frequenz von  $f_n = N \Delta f = f_s$  entwickelt werden. Die Frequenz  $f_n = n \Delta f$  läuft dabei von  $n = 0$  bis  $n = N - 1$ . Unter Verwendung dieser Ansätze wird aus dem Integral (1.89) die Summe

$$\bar{X}(f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) e^{-i2\pi(n \Delta f)(m \Delta t)} \Delta t \quad (1.93)$$

und (1.90) wird zu (1.94).

$$x(t_m) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{X}(f_n) e^{i2\pi(n \Delta f)(m \Delta t)} \Delta f \quad (1.94)$$

Durch weiteres Umformen gelangen wir auf die Darstellung

$$\bar{X}(f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) e^{-i2\pi(n/N)m} \quad (1.95)$$

und

$$x(t_m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{X}(f_n) e^{i2\pi(n/N)m} \quad (1.96)$$

Die Genauigkeit der diskreten Fourier Transformation hängt dabei von der Schrittweite  $\Delta t$  und der Anzahl  $N$  der Messpunkte, wird auch Gruppengröße genannt, ab. Je kleiner die Zeitschritte bzw. je höher die Anzahl der Messpunkte, desto höher wird die Genauigkeit der DFT.

### 1.7.4 Fast Fourier Transformation (FFT)

Die numerische Auswertung der diskreten Fourier Transformation erfolgt über die Fast Fourier Transformation. Die große Stärke der FFT liegt darin, dass die meisten Wiederholungen in der Berechnung der DFT eliminiert werden und somit eine wesentlich schnellere Berechnung ermöglicht wird.

Voraussetzung ist die Wahl der Messpunkte  $N$  zu  $N = 2^m$ . Grundgedanke der FFT ist die Aufspaltung der diskreten Zeitsignale in zwei Teilfolgen, welche wiederum in zwei Teilfolgen aufteilen, bis eine Teilfolge nur mehr einen Wert umfasst, der transformiert den Wert selbst wiedergibt. Die Berechnung der DFT aus  $N$  Signalwerten kann dadurch von  $N^2$  Rechenoperationen auf  $\left(\frac{N}{2}\right) \log_2(N)$  reduziert werden, vergleiche [3].

Eine wichtige Eigenschaft des aus  $N$  Punkten bestehenden Amplitudenspektrums der DFT ist

$$\bar{X}(f_n) = \bar{X}^*(f_{-n}) \quad (1.97)$$

Hierbei steht  $*$  für konjugiert komplex.  $f_n = f_s/2$  wird als Nyquistfrequenz bezeichnet.  $\bar{X}(f_{N/2})$  ist der Koeffizient, der bei der Nyquistfrequenz auftritt, und ist stets reell. Außerdem ist das Amplitudenspektrum  $|\bar{X}(f_n)|$  symmetrisch bezüglich der Nyquistfrequenz. Daher dürfen bei der Auswertung nur  $N/2$  Stützstellen verwendet werden. Das heißt es werden nur Frequenzen von 0 bis  $f_s/2$  herangezogen, vergleiche [4].

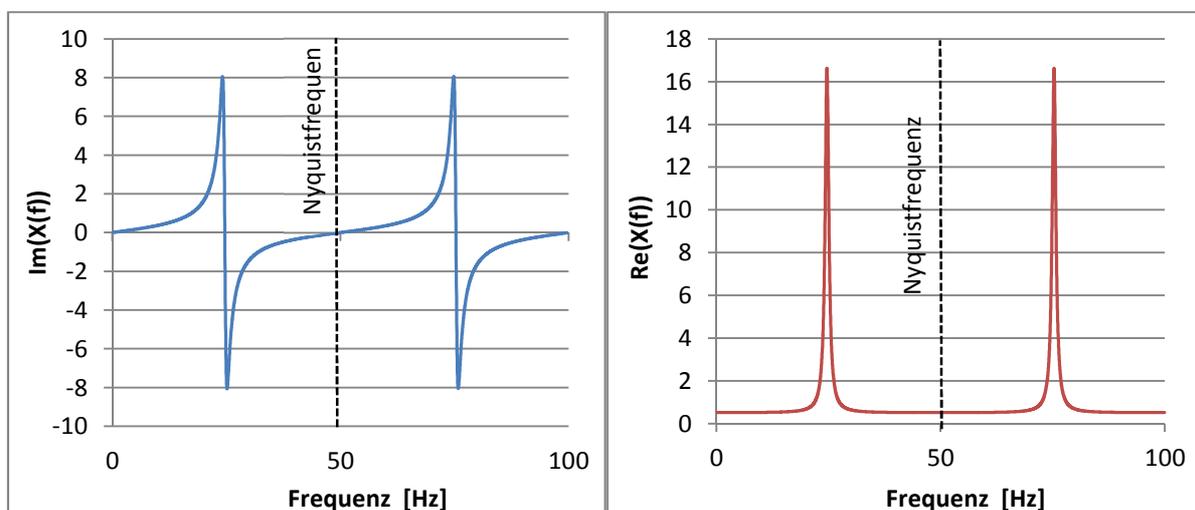


Abbildung 1.13: Real- und Imaginär-Teil einer FFT eines Einmassenschwingers (von 0 bis  $f_s$ )

In Abbildung 1.13 zeigt das Ergebnis einer FFT eines Einmassenschwingers. Die Abtastrate beträgt dabei 100 Hz, somit ergibt sich die Nyquist Frequenz zu 50 Hz, was durch die Symmetrie des Realteils, um eben diese 50 Hz, ersichtlich wird. In der Darstellung des Imaginär-Teils ist ersichtlich, dass dieser antimetrisch bezüglich der 50 Hz Achse ist. Daraus folgt, dass der Wert den die Funktion an der Nyquist Frequenz annimmt keinen Imaginär-Teil aufweist. In Abbildung 1.14 ist der Verlauf der oben dargestellten FFT im komplexen Zahlenraum dargestellt.

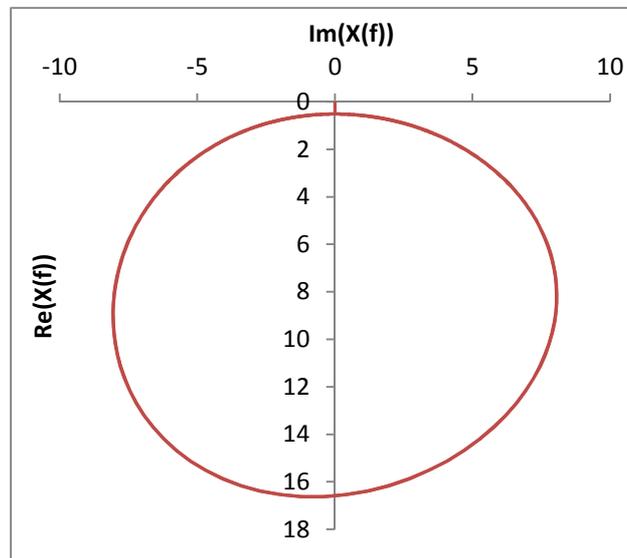


Abbildung 1.14: FFT eines Einmassenschwingers im komplexen Zahlenraum

In Abbildung 1.16 und Abbildung 1.15 sind die gemessene Schwingungsantwort eines Kragbalkens auf eine Impulsanregung und deren Fast Fourier Transformation dargestellt. Dabei sind die ersten beiden Eigenformen gut ersichtlich. Die dritte Spitze ist nicht so eindeutig, was durch zwei nahe beisammen liegenden Eigenfrequenzen zu erklären wäre, etwa die dritte Biegeeigenform und die erste Torsionseigenform.

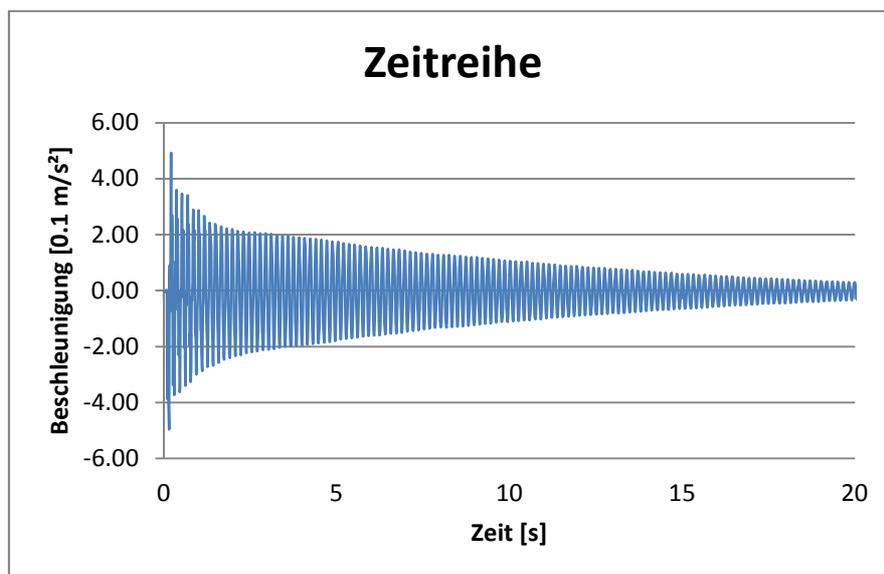


Abbildung 1.15: Zeitreihe eines Kragträgers nach Impulsanregung

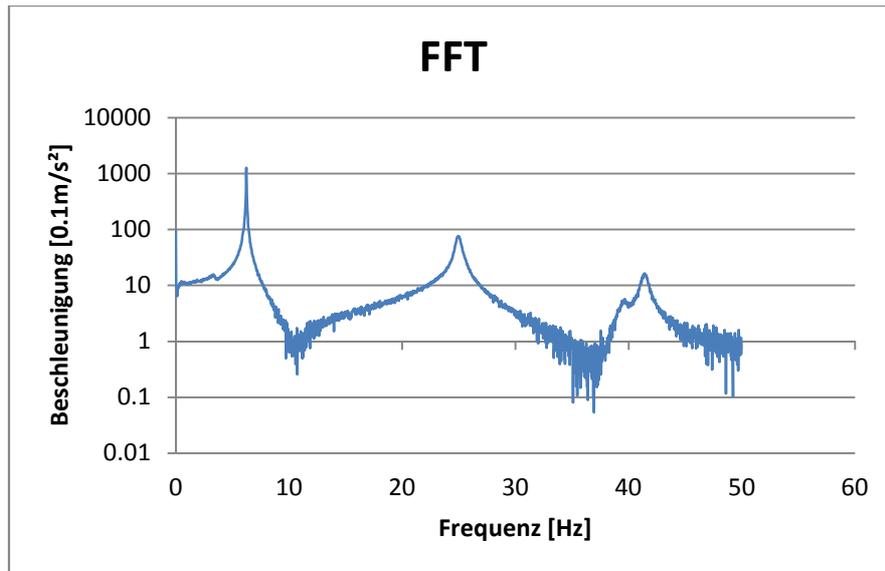


Abbildung 1.16: FFT eines Kragträgers nach Impulsanregung

Die in Abbildung 1.16 mittels FFT ausgewerteten Daten machen auf den ersten Blick einen relativ akzeptablen Eindruck. Es sind die Eigenfrequenzen gut erkennbar und auch die Glockenausbildung der Eigenformen scheint gut abgebildet. Bei genauerer Betrachtung, wie in Abbildung 1.17 im komplexen Raum, wird erkennbar, dass zwar Spitzen der höheren Eigenfrequenzen relativ genau dargestellt werden, der Resonanzbereich der ersten Eigenform allerdings unzureichend erfasst wurde. Die maximale Beschleunigungsamplitude könnte also noch um einiges größer sein. Daher ist bei Untersuchungen zum einen darauf zu achten, dass die Spitze, durch ausreichend Stützstellen, angemessen abgebildet ist und zum zweiten auf Auswertemethoden zurückgegriffen wird, die nicht mit dem Maximalwert arbeiten.

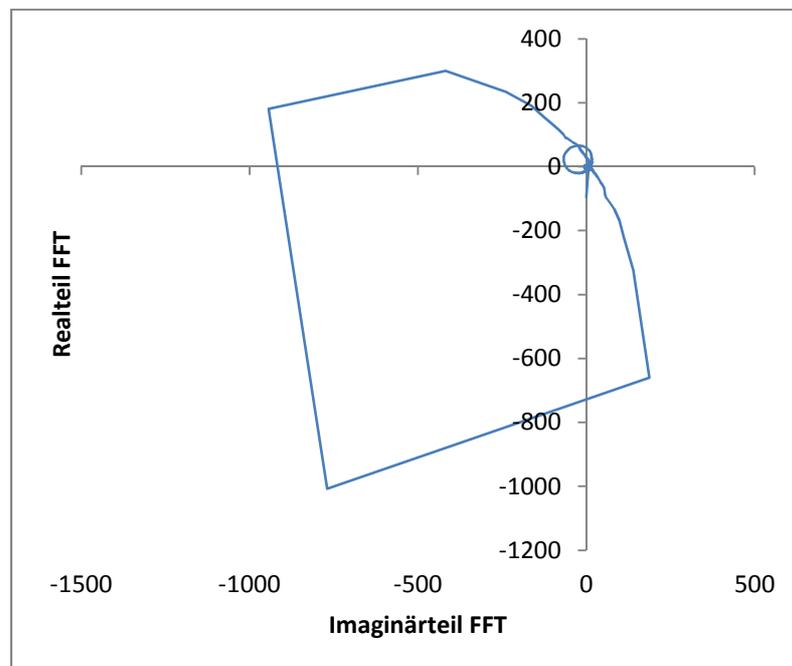


Abbildung 1.17: Darstellung der FFT aus Abbildung 1.16 im komplexen Zahlenraum

## 2 Experimentelle Analyse von Brücken

Ziel einer Schwingungsmessung ist die Ermittlung des Eigenschwingverhaltens einer Brücke. Darunter versteht man die auftretenden Eigenfrequenzen sowie die dazugehörigen Eigenformen und Dämpfungen. Je nach Problemstellung kann auch die maximal auftretende Beschleunigung von Bedeutung sein. Zur Verhaltensvorhersage bei Zugsüberfahrten, sind vor allem die Eigenfrequenzen und dazugehörigen Dämpfungen von großer Bedeutung. Schwingungsmessungen lassen aber auch Rückschlüsse über die Steifigkeiten zu. Kennt man das statische System und die Masse bzw. Massenverteilung eines Tragwerks, so lässt sich aus der ersten Biegeeigenfrequenz die Biegesteifigkeit des betrachteten Objekts abschätzen.

### 2.1 Einflussfaktoren auf das dynamische Verhalten einer Brücke

#### Brückenalter

Vor allem neuere Brücken sind auf Schwingungsanfälligkeit zu prüfen. Da sie meist nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten konstruiert sind, besitzen sie eine weichere Konstruktion als vergleichbare „ältere“ Brücken. Sie haben dadurch eine niedrigere erste Eigenfrequenz und werden durch die Verkehrslast somit eher im Resonanzbereich erregt, [5].

#### Brückenlänge

Auch die Länge einer Brücke hat einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten. Zum einen verändert sich mit der Länge auch das Masse zu Steifigkeitsverhältnis, da mit zunehmender Länge der Eigengewichtsanteil in der Belastung erhöht wird. Zum anderen gewinnen mit abnehmender Länge die Randbedingungen des Tragwerks immer mehr an Einfluss auf das Schwingungsverhalten. Die Bestimmung der Randbedingungen ist jedoch nur schwer möglich. Gerade bei Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau haben das Schotterbett und die durchgehenden Schienen einen großen Einfluss und erzeugen eine Art federnde Einspannung.

#### Einfluss der Temperatur

Der Einfluss der Temperatur setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Erstens kann es zu Temperatur bedingten Änderungen des E-Moduls kommen und zweitens können Zwangsspannungen entstehen. Die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls ist vor allem bei Betontragwerken zu beachten [5]. Wobei speziell zu erwähnen ist, dass sich im Bereich von Null Grad Celsius ein Steifigkeitssprung befindet. Auch Stahl verliert mit zunehmender Umgebungstemperatur an Steifigkeit. In dem Bereich in dem sich die Temperaturen für Brücken bewegen, kann der E-Modul annähernd als konstant angenommen werden. Die Zwangskräfte zufolge Temperatur bei statisch unbestimmten Systemen haben jedenfalls einen Einfluss auf das Schwingungsverhalten. Da Stahl sehr schnell auf Temperaturänderungen reagiert, müssen bei Messungen auch die tageszeitlichen Temperaturschwankungen berücksichtigt werden. Die Temperatur hat einen großen Einfluss auf das Schwingungsverhalten, vor allem auf die Randbedingungen der Tragstruktur, sprich etwaige Teileinspannungen an den Tragwerksenden, die durch den Schotteroberbau und die durchgehenden Schienen verursacht werden. Speziell bei Brücken mit Schotterbett, wo sich bei Temperaturen unter Null, also beim Gefrieren des Untergrunds und der Feuchte im Schotterbett die Randbedingungen sprunghaft ändern. Es erhöht sich in diesem Fall die Steifigkeit des Gesamttragwerks sowie die Teileinspannung der Tragwerksenden.

### **Tragwerksschäden**

Schäden im Tragwerk wie Risse und andere Querschnittsschwächungen können die dynamischen Eigenschaften einer Brücke wesentlich ändern. Grob gesprochen werden durch das Herabsetzen der Steifigkeiten die Eigenfrequenzen nach unten verschoben. Ein Vergleich des idealen Brückenmodells mit tatsächlichen Messungen macht Rückschlüsse über den Erhaltungszustand des Bauwerks möglich.

### **Zusatzlasten**

Grundsätzlich bewirken auch zusätzliche Lasten durch den Verkehr (Autos, LKWs, Züge) eine Änderung des schwingenden Systems. Da bei Straßenbrücken das Verhältnis der Verkehrslasten zu dem Brückeneigengewicht unter regulären Umständen eher gering ist, haben diese Zusatzlasten kaum Einfluss auf die Eigenschwingungsformen [6]. Bei Eisenbahnbrücken können zusätzliche Massen bei Zugsüberfahrten durchaus eine Änderung des Schwingungsverhaltens bewirken. Tendenziell verschieben sich die Eigenschwingungsformen durch eine Erhöhung der Systemmasse nach unten.

## 2.2 Beschleunigungsgrenzwerte

Für die Berechnung von neuen Brückenobjekten sind die maximalen Beschleunigungen nach ÖNORM EN 1990/A1 einzuhalten. Die Beschleunigungen dürfen dabei

- $3,5 \text{ m/s}^2$  für Brücken mit Schotterbett und
- $5,0 \text{ m/s}^2$  für Brücken mit fester Fahrbahn nicht überschreiten.

Zur Bewertung bestehender Eisenbahnbrücken, kann auf ONR 24008 zurückgegriffen werden. Für Brücken mit guten Erhaltungszustand dürfen dabei die zulässigen Beschleunigungswerte auf

- $6,0 \text{ m/s}^2$  für Brücken mit Schotterbett und
- $8,0 \text{ m/s}^2$  für Brücken mit fester Fahrbahn erhöht werden.

Die Beschleunigungsgrenzwerte sind mit einer maximal auftretenden Frequenz nach oben beschränkt. Die Frequenzschränke ergibt sich aus dem höheren Wert von

- 30 Hz und dem
- 1,5 fachen der ersten Biegeeigenfrequenz und der
- Frequenz der dritten Eigenform.

Für höher auftretende Frequenzen gibt es in den Normen keine Beschleunigungsbeschränkungen, da diese ohnehin nicht, bzw. nicht mit einem ausreichenden Energieinput, angeregt werden.

## 2.3 Anregungsarten

### 2.3.1 Zugsüberfahrten

Zugsüberfahrten sind eine gute Möglichkeit das Schwingungsverhalten einer Brücke zu beurteilen, da bei einer Zugsüberfahrt ein breites Spektrum von Schwingungsformen angeregt wird. Da eine schnellere Zugsüberfahrt eine höherfrequente Anregung bedeutet und ein langsamerer Zug diese höheren Eigenformen nicht anregt, lassen Zugsüberfahrten von langsameren Zügen wenig Aussagen über Überfahrten von schnelleren Zügen zu. Die Anregungsfrequenz  $f_{Zug}$  einer Zugsüberfahrt lässt sich aus der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v_{Zug}$  und dem Achsabstand  $L_{St}$  ermitteln.

$$f_{Zug} = \frac{v_{Zug}}{L_{St}} \quad (2.1)$$

Jeder Zug hat eine unterschiedliche Masse und regt bei unterschiedlicher Geschwindigkeit mit verschiedenen Frequenzen an. Daher kann es bei Auswertungen von einzelnen Zügen zu großen Streuungen der Ergebnisse kommen (falls die gesamte Überfahrt betrachtet wird). Während der Zugsüberfahrt kommt es zu Überlagerungen der Erregerfrequenz und der Eigenfrequenz.

Des Weiteren sollte auch nur der Ausschwingvorgang betrachtet werden, da sich bei der Überfahrt der Zug auf der Brücke befindet und somit eine nicht unwesentliche Erhöhung der schwingenden Masse stattfindet. Das Ausschwingverhalten einer Zugsüberfahrt erlaubt sehr eindeutige Aussagen über die erste Biegeeigenform und die dazugehörige Dämpfung.

### 2.3.2 Ambiente Anregung

Als ambient bezeichnet man die Anregungen durch Umwelteinflüsse. Ambient ist zum Beispiel die Anregung durch Erschütterungen in der Umgebung, verursacht durch Baustellen, benachbarten Industrieanlagen oder eine Anregung durch Wind. Aber auch durch sich in der Nähe befindende Fließgewässer kann ein System zum Schwingen angeregt werden. In erdbebengefährdeten Regionen kann es auch zum Auftreten von dominanten Nebenfrequenzen zufolge seismischer Aktivitäten kommen. Bei Brücken wird auch die Anregung durch den Verkehr als ambient bezeichnet. So gesehen stellt eine Zugsüberfahrt auch eine Art der ambienten Anregung dar. Verglichen mit der Windanregung findet bei einer Zugsüberfahrt ein wesentlich höherer Energieeintrag statt. Deshalb wird die Anregung durch Züge in dieser Arbeit als eigene Anregungsart betrachtet.

Bei ambienter Anregung durch Wind und Erschütterungen müssen jedoch längere Messungen durchgeführt werden um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten.

Um die Umwelteinflüsse, also den Systeminput aus Schwingungen des Untergrunds, Verkehr und Anregung durch Wind, zu erfassen, müssen Sensoren außerhalb des Schwingungssystems platziert werden. Die Erfassung dieser Systeminputs ist nur schwer bzw. gar nicht möglich. Da sich die vorliegende Arbeit jedoch auf eine *output only* Auswertung beschränkt, wird nicht näher auf die Messung ambienter Systemeingänge eingegangen.

### 2.3.3 Anregung durch Impulshammer.

Hierbei handelt es sich um eine Impulsanregung in bestimmten Punkten. Diese Art der Anregung ist vor allem zur Bestimmung höherer Eigenschwingungsformen, die durch Züge nicht angeregt werden, und zur Ermittlung von Torsionseigenformen geeignet. Da der Energieeintrag bei solchen Hammerschlaganregungen meist relativ gering ist, können nur geringe Schwingungsamplituden erzielt werden. Da die Dämpfung stark von der Schwingungsamplitude abhängig ist, sind nur bedingte Aussagen über die Dämpfungen möglich.

Es ist darauf zu achten, dass der volle Ausschwingvorgang aufgezeichnet wird. Somit muss zwischen den einzelnen Hammerschlägen gewartet werden bis die vorhergehende Schwingung abgeklungen ist.

Ein Impuls regt grundsätzlich alle Schwingungsformen an und ist somit die ideale Anregungsmethode. Problematisch wird es nur ab einer gewissen Objektgröße, da der Impuls ausreichend Energie benötigt, um das gesamte Objekt in Schwingung zu versetzen. Ein einfacher Impulshammer wird daher bei einer größeren Brücke nicht mehr ausreichen. Die Verwendung von Fallgewichten erfordert wieder einen höheren Kosten und Zeitaufwand, außerdem können auch Probleme mit der Zerstörungsfreiheit der Prüfung auftreten.

#### **2.3.4 Frequenzanregung**

Durch einen Shaker oder Unwucht-Erreger wird das Objekt in einer bestimmten Frequenz erregt und in Schwingung versetzt. Wenn das Objekt eingeschwingen ist und in der Erregerfrequenz schwingt, werden die Amplituden der Messpunkte ermittelt. Durch Anregung mit unterschiedlichen Frequenzen kann somit der Amplitudenfrequenzgang ermittelt werden. Die Frequenzanregung eines Objekts ist eine sichere Methode zur Ermittlung der Eigenfrequenzen. Durch Anwenden der Bandbreitenmethode kann aus dem Amplitudenfrequenzgang die Dämpfung relativ schnell bestimmt werden.

Der Erreger muss in der Lage sein das untersuchte Objekt in der Erregerfrequenz anzuregen. Bei großen Brücken ist dazu eine gewisse Größe bzw. Masse des Erregers erforderlich. Mit dieser Masse steigen natürlich auch die Kosten der Erregeranlage. Bei der Erregung von Brücken mittels Frequenzanregung ist zumindest eine teilweise Objektsperre erforderlich, welche erstens weitere Mehrkosten verursacht und zweitens bei Hauptverkehrsstrecken nahezu unmöglich zu bekommen ist.

#### **2.3.5 Zusammenfassung**

Baustrukturen werden für Untersuchungen im Generellen ambient oder durch einen Impuls erregt. Der große Vorteil bei der Messung unter ambienter Erregung ist, dass das Objekt im Betrieb gemessen wird und somit keine Nutzungsunterbrechung oder Einschränkung notwendig wird. Abgesehen von den Kosten, die ein entsprechend großer Shaker oder Unwucht-Erreger für eine Brücke mit sich bringt, ist es auch schwer niedrige Frequenzen unter einem Hertz zu erregen, was für eine Impulsanregung und eine ambiente Anregung kein Problem darstellt - bei hohen Frequenzen hat man das umgekehrte Problem. Diese werden durch ambiente Einwirkungen oft nicht ausreichend angeregt. Der große Vorteil von einer Anregung durch einen Unwucht-Erreger ist, dass die Systemanregung nicht nur bekannt sondern auch genau steuerbar ist. Es kann also, bei einer ausreichenden Kraftamplitude des Erregers, eine beliebige Konstruktion zum Schwingen in einer gewünschten Frequenz angeregt werden. Der Amplitudenfrequenzgang kann mit beliebiger Eingangsamplitude experimentell bestimmt werden. Um die korrekte Skalierung der Schwingungsformen zu erhalten, ist die Kenntnis der Eingangskraft notwendig. Für solch eine quantitative Ermittlung des Systemverhaltens ist folglich eine ambiente Anregung nicht geeignet, siehe [5].

## 2.4 Auswertung Allgemein

Für Brücken liegen die relevanten Frequenzen im Bereich von 0 bis 50 Hz. Für Durchlässe muss dieser Bereich auf 100 Hz erweitert werden, da die erste Biegeeigenfrequenz durchaus über 50 Hz liegen kann. Herausfiltern von höheren Frequenzen beeinflusst nicht die Frequenzen im betrachteten Frequenzbereich, hat aber Auswirkungen auf die absoluten Beschleunigungswerte, [7].

### 2.4.1 Auswertung der Zugsüberfahrten

Um Störungen durch Überlagerungen der Erregerfrequenz mit den Eigenfrequenzen und Systemänderungen durch die zusätzliche Masse des Zuges zu vermeiden, wird nur der Ausschwingvorgang betrachtet.

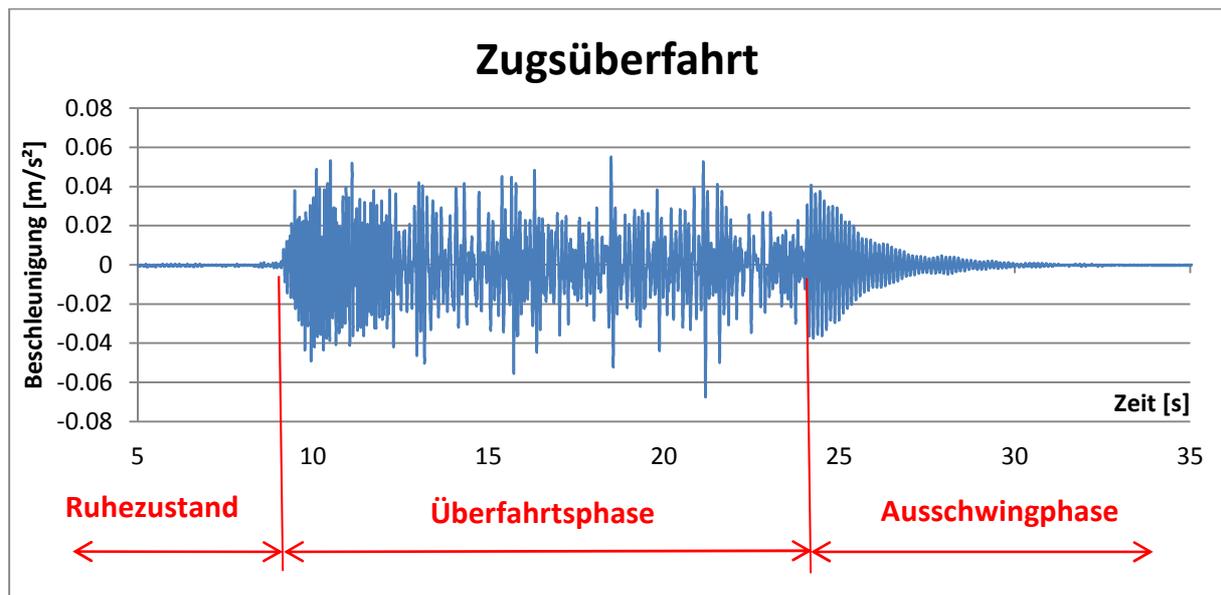


Abbildung 2.1: Darstellung einer Zugsüberfahrt im Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

Um erkenntlich zu machen wie sich das Weglassen der Überfahrtsphase bei der Auswertung auswirkt, zeigt Abbildung 2.2 eine FFT der Zugsüberfahrt, die in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Im ersten Diagramm wurde die gesamte Messung transformiert, im zweiten Diagramm ist eine FFT ohne Überfahrtsphase dargestellt. Aus der Darstellung ohne Überfahrtsphase ist eindeutig erkennbar, dass die erste Eigenfrequenz, der untersuchten Brücke, etwa bei 8 Hz liegt. Betrachtet man hingegen das erste Diagramm, so ist dies nur mehr schwer bzw. kaum mehr erkennbar.

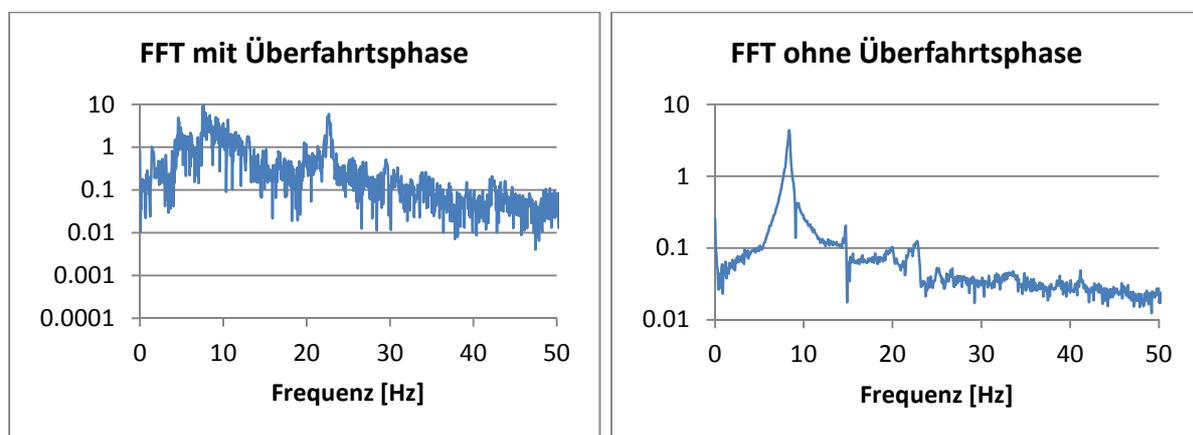


Abbildung 2.2: FFT einer Zugsüberfahrt mit und ohne Überfahrtsphase

Da bei Vergleichen der Auswertungen der Ausschwingvorgänge einzelner Zugsüberfahrten eine gewisse Streuung der Eigenfrequenzen festzustellen ist, werden um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten, die Ausschwingphasen beliebiger Überfahrten aneinandergereiht und ausgewertet.

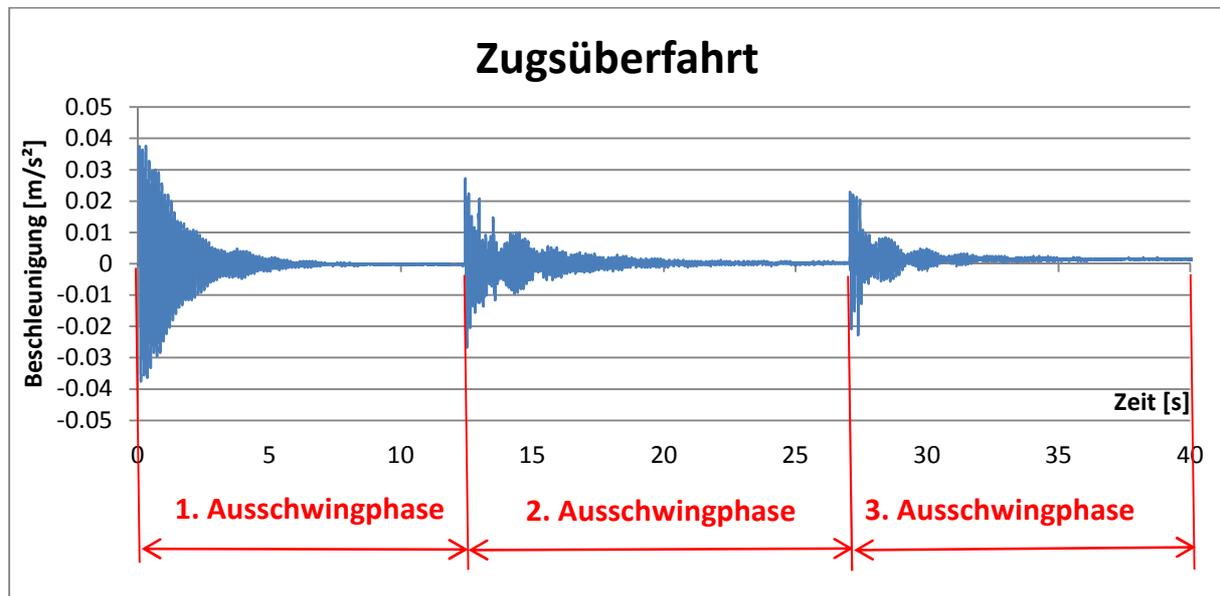


Abbildung 2.3: Die Ausschwingphasen mehrerer Zugsüberfahrt aneinander gereiht

#### 2.4.2 Bestimmung der Dämpfung

Bisherige Untersuchungen haben gezeigt, dass die Ausschwingvorgänge von Zugsüberfahrten eine gute Form zur Ermittlung der Dämpfung darstellen, da die Schwingungsamplituden unter den auftretenden Lastgrößen ermittelt werden und die Ergebnisse daher sehr realistisch sind. Diese guten Ergebnisse werden jedoch nur für die direkt angeregten Frequenzen erreicht. Antimetrische Schwingungsformen werden durch Zugsüberfahrten, vor allem bei kürzeren Bauwerken, kaum angeregt - dies kann zu Problemen bei der Ermittlung der zweiten Biegeeigenfrequenz führen.

Das größte Problem bei der Dämpfungsermittlung ist das mögliche nichtlineare Ausschwingverhalten, das in einer starken Größenabhängigkeit der Dämpfung von der Amplitude resultiert. Bei größeren Amplituden wird man im Allgemeinen größere Dämpfungswerte erhalten. [7]

## 2.5 Methoden im Zeitbereich

### 2.5.1 Logarithmisches Dekrement

Die Amplitude des Ausschwingvorgangs eines Einmassenschwingers nimmt logarithmisch ab. Diese Abnahme entspricht der Energiedissipation, also der Dämpfung des Systems. Voraussetzung für diese Methode ist ein eindeutiges Ausschwingverhalten in der ersten Biegeeigenfrequenz. Bei komplexen Systemen wird der Ausschwingvorgang durch höhere Eigenfrequenzen beeinflusst. Um diesen Effekt zu beseitigen, muss der Einfluss der höheren Frequenzen, durch eine entsprechende Filterung der Daten, eliminiert werden. Zur Anwendung kommt dabei etwa ein Tiefpass- oder ein Bandpass-Filter. Mehr dazu in Kapitel 4.3. Des Weiteren kann die Schwingungskurve durch Verwendung einer Ausgleichsfunktion zwischen den einzelnen Stützpunkten geglättet werden. Eine solche Ausgleichskurve kann zum Beispiel durch die Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate erzeugt werden. Dabei werden die Abstandsquadrate zwischen den gemessenen Stützstellen und der Ausgleichskurve minimiert, wodurch die am besten passende Ausgleichsfunktion ermittelt wird.

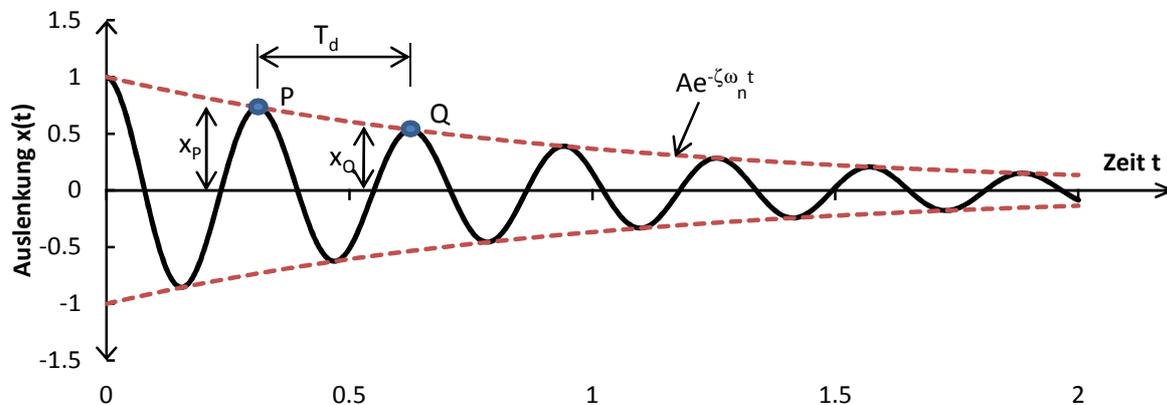


Abbildung 2.4: Ausschwingvorgang eines viskos gedämpften Einmassenschwingers

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung eines SDOF Systems, welche durch Gleichung (2.2) gegeben ist.

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad (2.2)$$

Für die Herleitung der Logarithmische-Dekrement-Methode werden die beiden Auslenkungen  $x_p$  und  $x_q$  betrachtet. Sie stellen zwei aufeinander folgende Schwingungsamplituden dar. Man bildet nun das Verhältnis der beiden Amplituden, wodurch sich Gleichung (2.3) ergibt.

$$\frac{x_p}{x_q} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha)}{Ae^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} \cos(\omega_d(t+T_d) - \alpha)} \quad (2.3)$$

Unter Berücksichtigung von  $T_d = 2\pi/\omega_d$  wird ersichtlich, dass der Cosinus nach einer vollständigen Schwingung wieder denselben Wert wie annimmt und somit aus der Gleichung gekürzt werden kann. Durch weiteres Kürzen der rechten Seite, lässt sich das Verhältnis wie folgt vereinfachen.

$$\frac{x_p}{x_q} = e^{\zeta\omega_n T_d} \quad (2.4)$$

Das logarithmische Dekrement ist durch Gleichung (2.5) definiert.

$$\delta = \ln \frac{x_p}{x_q} = \zeta\omega_n T_d \quad (2.5)$$

Die gedämpfte Schwingungsperiode  $T_d$  lässt sich wie folgt beschreiben.

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.6)$$

Durch Einsetzen von (2.6) in Gleichung (2.5) erhalten wir die in (2.7) dargestellte Form.

$$\delta = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.7)$$

Für geringe Dämpfungen von  $\zeta < 0.2$  darf vereinfachend

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad (2.8)$$

angenommen werden.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Dämpfungsfaktor aus den beiden Amplituden  $x_P$  und  $x_Q$ , wie in (2.9) dargestellt ermitteln. [8]

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_P}{x_Q} \quad (2.9)$$

Verwendet man anstelle einer vollständigen Schwingung  $n$  Schwingungen, so ergibt sich die Gleichung für den Dämpfungsfaktor zu

$$\zeta = \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{x_P}{x_Q} \quad (2.10)$$

Wobei hierbei  $x_P$  die Auslenkung zu Beginn der  $n$  Schwingungen und  $x_Q$  die Auslenkung am Ende der betrachteten Schwingungen darstellt.

### 2.5.2 Halbe Amplituden Methode

Eine Abwandlung der Logarithmischen-Dekrement-Methode stellt die *Halbe Amplituden Methode* dar. Hierbei werden die  $N$  Schwingungen gezählt, bis nur mehr die halbe Amplitude des Referenzpunktes  $P$  erreicht wird, wobei  $N$  nicht zwingend eine ganze Zahl sein muss.

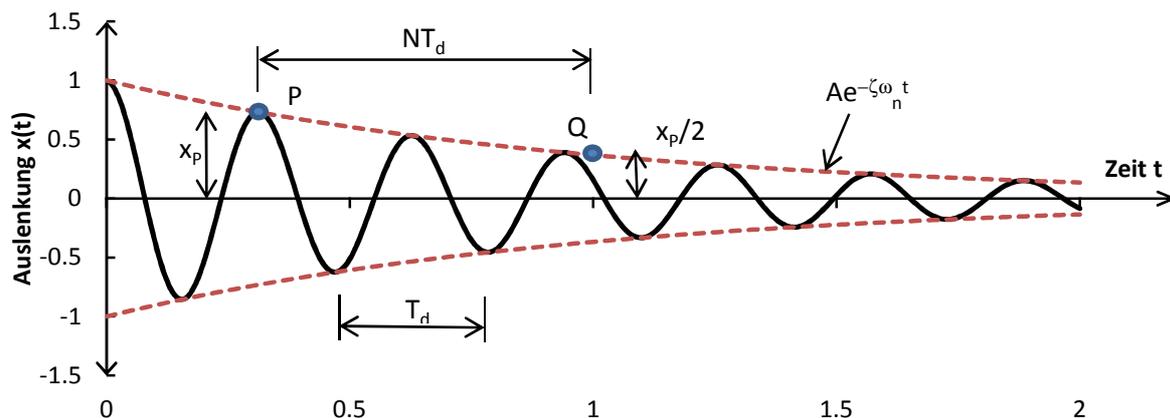


Abbildung 2.5: Ausschwingvorgang für Halbe Amplituden Methode

$$\frac{x_P}{x_Q} = 2 \quad (2.11)$$

Setzt man (2.11) in (2.10) ein, so erhält man

$$\zeta = \frac{1}{2\pi N} \ln(2) \quad (2.12)$$

was sich zu

$$\zeta = \frac{0.11}{N} \quad (2.13)$$

vereinfachen lässt. Dieses vereinfachte Verfahren liefert für leicht gedämpfte Schwingungen ( $\zeta < 0.1$ ) gute Werte für das Lehr'sche Dämpfungsmaß. [8]

Wie bereits oben erwähnt sind die Logarithmische-Dekrement-Methode und die Halbe Amplituden Methode nur für Systeme mit geringer Dämpfung geeignet, da ja die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1 \quad (2.14)$$

angenommen wurde. Des Weiteren sind die Ansprüche an die Qualität des Signals für die beiden genannten Auswertmethoden gleich hoch. Es ist eine eindeutige Schwingung in einer Eigenform notwendig. Da die Dämpfung stark amplitudenabhängig ist, empfiehlt es sich, die Ermittlung des Dämpfungsmaßes in unterschiedlichen Zeitfenstern durchzuführen und zu mitteln. Wobei speziell für eine Zugsüberfahrt das Dämpfungsmaß im höheren Amplitudenbereich von Interesse ist. Generell handelt es sich hierbei um eine sehr schnelle und einfache Auswertmethode, die auch relativ aussagekräftige Werte für die Dämpfung liefert. Beide Methoden eignen sich somit um noch „im Feld“, also während die Objekte getestet werden, Aussagen über die Dämpfung zu erhalten. Voraussetzung dafür ist jedoch das Vorhandensein eines Ausschwingvorgangs. Aus stationären Schwingungen oder ambienten Messungen können keine Dämpfungswerte ermittelt werden.

### 2.5.3 Least Square Fit Methode

Es handelt sich hierbei um eine Methode zur Ermittlung der ersten Biegeeigenform. Es werden dabei die Ausschwingvorgänge einzelner Zugsüberfahrten untersucht. Dabei werden in einem iterativen Prozess die wesentlichen Hauptparameter einer Schwingung (Amplitude, Frequenz, Phasenverschiebung und Dämpfung) solange verändert, bis die Quadrate der Abweichung ein Minimum erreichen. Als Ergebnis erhält man eine äußerst zuverlässige Aussage über die tatsächlich vorhandene erste Biegeeigenform und der dazugehörigen Dämpfung. Diese Methode ist jedoch nur für gut sichtbare Ausschwingvorgänge in einer Grundfrequenz möglich. Je nachdem ob das Verfahren im Zeit- oder im Frequenzbereich angewendet wird, muss also eine eindeutige, periodische und abklingende Schwingung oder ein gut erkennbarer *Peak* einer Übertragungsfunktion vorhanden sein. Arbeitet man im Zeitbereich wird oft auch die Bezeichnung *Curve Fitting* verwendet. Bei Schwebeerscheinungen, wo zwei Eigenfrequenzen knapp beieinander liegen, wird diese Methode zu keinem eindeutigen Ergebnis führen. [7]

## 2.6 Methoden im Frequenzbereich

### 2.6.1 Bandbreitenmethode

Die *Bandbreitenmethode* oder  $\sqrt{2}$ - Methode wird auch manchmal *Half-Power Methode* genannt. Alle diese Bezeichnungen haben ihren Ursprung in der Herleitung dieser Methode.

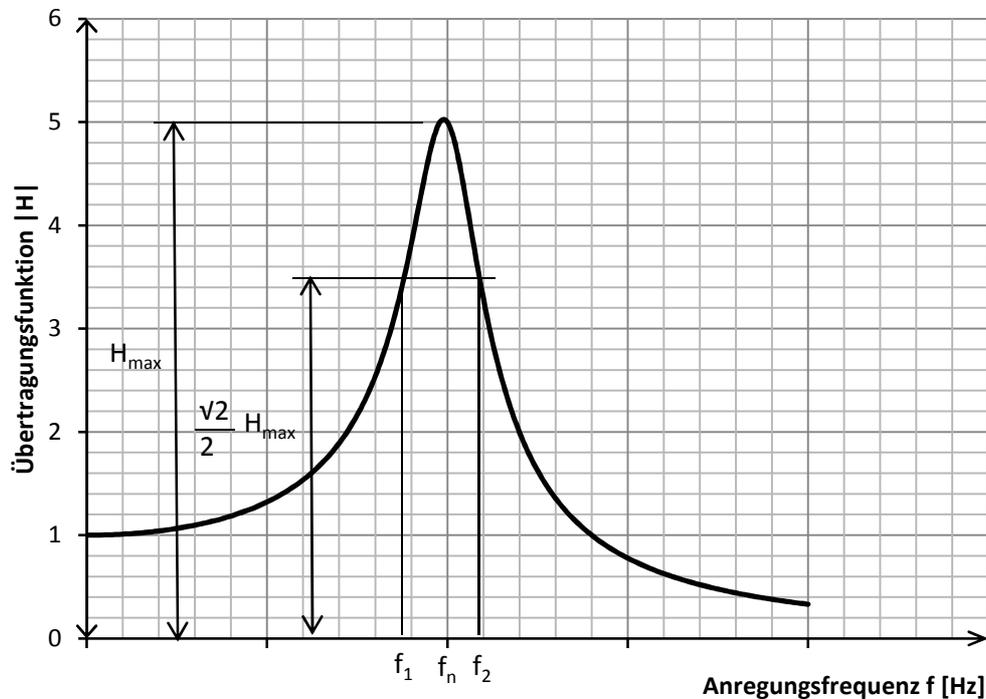


Abbildung 2.6: normalisierte Übertragungsfunktion für einen Einmassenschwinger

Ausgangspunkt der Herleitung ist die dimensionslose Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers, dargestellt in (2.15).

$$|\bar{H}_{X/X_0}| = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.15)$$

Wobei  $r$  das Frequenzverhältnis der Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  zur ungedämpften natürlichen Eigenkreisfrequenz  $\omega_n$  darstellt.

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{2\pi f}{\omega_n} \quad (2.16)$$

$f$  ist die Erregerfrequenz in Hertz.  $X$  ist die Amplitude einer Schwingung des Systems in der jeweiligen Frequenz.  $X_0$  stellt die statische Auslenkung des Einmassenschwingers dar und ergibt sich nach (2.17) zum Verhältnis der Erregerkraftamplitude  $p_0$  zur Federsteifigkeit  $k$ .

$$X_0 = \frac{p_0}{k} \quad (2.17)$$

Der Resonanzfall tritt bei  $\Omega = \omega_d$  ein. Für geringe Dämpfung kann wie in (2.18) vereinfacht werden.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \cong \omega_n \quad (2.18)$$

Vereinfachend kann für Resonanz  $r = 1$  angenommen werden. Aus Abbildung 2.6 ist ersichtlich, dass die maximale Amplitude knapp unter  $f = f_n$  auftritt. Setzt man in (2.15)  $r = 1$ , so ergibt sich die maximale Amplitude zu:

$$|\bar{H}_{X/X_0}|_{max} \approx |\bar{H}_{X/X_0}|_{r=1} = \frac{1}{2\zeta} \quad (2.19)$$

Da  $|\bar{H}|_{max}$  aus einem experimentell ermittelten Diagramm, speziell bei geringer Dämpfung, nur sehr ungenau abzulesen ist, eignet sich dieser Ansatz nicht um daraus die Dämpfung zu ermitteln. Diese Ungenauigkeit kommt daher, dass bei großen Neigungen der Übertragungsfunktion, also bei geringer Dämpfung des Systems, der Maximalwert stark von  $\Delta f$ , dem Abstand der bekannten Stützstellen der Übertragungsfunktion, abhängt. Die Bandbreitenmethode geht von gering gedämpften Systemen aus. Die Genauigkeitserhöhung im Vergleich zum direkten Anwenden von Gleichung (2.19) folgt aus eben diesem Ansatz der geringen Dämpfung. Bei leicht gedämpften Systemen weist die Übertragungsfunktion, im Resonanzbereich, eine große Steigung auf. Ungenauigkeiten im Ablesen bzw. Auftragen von Amplituden führt also nur zu geringen Fehlern in der zugehörigen Frequenz. Durch Verwendung der Frequenzen anstelle der Amplituden wird folglich eine Steigerung der Genauigkeit, bei der Bestimmung der Dämpfung, erzielt.

Aus dem nächsten Schritt leitet sich die Bezeichnung *Half-Power Methode* ab. Die Frequenzen unter und über der Resonanzfrequenz, an denen die Amplituden das  $\sqrt{2}/2$ -fache von  $|\bar{H}|_{max}$  betragen, werden als half-power Punkte bezeichnet. Half-power deshalb, da eine Reduktion um 3 dB eine Verringerung der Energie auf die Hälfte darstellt, was einem Multiplikationsfaktor von  $\sqrt{2}/2$  gleich kommt.

$$|\bar{H}_{X/X_0}|_i = \frac{\sqrt{2}}{2} |\bar{H}_{X/X_0}|_{r=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2\zeta} \quad (2.20)$$

Unter der Voraussetzung einer großen Kurvenneigung, also geringer Dämpfung, sind die Frequenzen dieser beiden Punkte relativ genau bestimmbar. Die so erhaltenen Frequenzen heißen  $f_1$  und  $f_2$  und die zugehörigen Frequenzverhältnisse sind  $r_1$  und  $r_2$ . Um die  $r_i$  Werte ( $i = 1, 2$ ) zu ermitteln wird (2.15) in (2.20) eingesetzt. Zur Vereinfachung wird die erhaltene Gleichung quadriert.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\zeta} \right)^2 = \frac{1}{(1 - r_i^2)^2 + (2\zeta r_i)^2} \quad (2.21)$$

Multipliziert man diese Gleichung aus erhält man:

$$r_i^4 - 2(1 - 2\zeta^2)r_i^2 + (1 - 8\zeta^2) = 0 \quad (2.22)$$

Die Wurzel von (2.22) ergibt sich zu

$$r_i^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \quad (2.23)$$

Unter der Annahme, dass  $\zeta \ll 1$  werden Terme höhere Ordnung in  $\zeta$  vernachlässigt.

$$r_i^2 = 1 \pm 2\zeta \quad (2.24)$$

$$r_i = (1 \pm 2\zeta)^{1/2} \quad (2.25)$$

Unter Verwendung der binomischen Reihe [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad (2.26)$$

und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung, ergeben sich  $r_1$  und  $r_2$  zu (2.27) und (2.28).

$$r_1 = 1 - \frac{1}{2}(2\zeta) \quad (2.27)$$

$$r_2 = 1 + \frac{1}{2}(2\zeta) \quad (2.28)$$

Durch Subtraktion von  $r_2$  von  $r_1$  ergibt sich (2.29).

$$r_2 - r_1 = 2\zeta \quad (2.29)$$

Durch weiteres Umformen lässt sich das Dämpfungsmaß nur in Abhängigkeit der Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  darstellen. [4]

$$\zeta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_n} = \frac{f_2 - f_1}{2f_n} \cong \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (2.30)$$

Da in der Praxis die statische Auslenkung  $X_0$  oft nicht bekannt ist, wird anstelle der Übertragungsfunktion  $|\overline{H}_{X/X_0}|$  die Übertragungsfunktion  $|\overline{H}_{X/p_0}|$  verwendet.  $|\overline{H}_{X/p_0}|$  gibt das Verhältnis der Schwingungsamplitude zur Erregerkraftamplitude an.

Zur Auswertung wird  $f_n$  an der Stelle des Maximalwertes  $|\overline{H}|_{max}$  angenommen. Für das Dämpfungsmaß werden bei der Bandbreitenmethode mittels  $|\overline{H}|_{max}$  in einem Schwingungsamplitude-Erregerfrequenz-Diagramm die beiden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  bestimmt und in (2.30) eingesetzt.

Durch diese Methode kann, je nach Qualität der Daten der Übertragungsfunktion, die natürliche Frequenz eines SDOF Systems mit einer Genauigkeit von  $\pm 5\%$  und das Dämpfungsmaß bis auf  $\pm 20\%$  bestimmt werden. [8]

## 2.6.2 Curve Fitting

Im Allgemeinen versteht man unter *Curve Fitting* das Anpassen der Parameter eines mathematischen Modells an tatsächlich gemessene Systemeigenschaften, um die Wirklichkeit durch das Modell so genau wie möglich abbilden zu können. Meist wird dazu ein modales Modell des Systems verwendet. Dabei wird zum Beispiel eine gemessene Übertragungsfunktion, wie in Abbildung 2.6 dargestellt, mit der entsprechenden Übertragungsfunktion des modalen Modells verglichen. Dabei wird mit Hilfe eines mathematischen Algorithmus, wie zum Beispiel die Minimierung der Abstandsquadrate, die modale Funktion durch Änderung der Modellparameters an die tatsächlich gemessene Übertragungsfunktion angepasst. Ziel ist es, über die dadurch erhaltenen modalen Parameter, Rückschlüsse auf die tatsächlichen Systemeigenschaften, wie Massen, Steifigkeiten und Dämpfungen, zu ziehen. Für dieses Verfahren sind allerdings qualitativ sehr hochwertige Messungen erforderlich. Das heißt, die Messdaten müssen über ausreichend Stützstellen verfügen, um das System möglichst genau abzubilden und sollten von störenden Einflüssen, wie aus der Messung resultierendes Rauschen und etwaige andere Störsignale, befreit werden. Des Weiteren sind für dieses Verfahren eindeutige und gut ausgeprägte Eigenformen erforderlich. Weist ein Amplitudenfrequenzgang keinen dominanten bzw. gut ausgeprägten Mode in einem Bereich auf, wird man mit dieser Methode auch kaum einen identifizieren können.

### 2.6.3 PSD

Sehr zuverlässig ist eine Analyse mittels einer PSD (*Power Spectral Density*) Abschätzung [7]. Dabei werden unterschiedliche FFT-Analysen in unterschiedlichen Zeitfenstern durchgeführt. Als Ergebnis erhält man sehr aussagekräftige Werte für die erste Biegeeigenfrequenz.

Dieses Verfahren wird sowohl bei der Auswertung von Zugsüberfahrten, Impulsanregung und ambienter Anregung verwendet. Wobei zu beachten ist, dass bei der Anregung durch einen Impuls (Hammerschlag oder springende Person) eine Vielzahl von Messreihen notwendig sind. Bei ambienter Anregung ist darauf zu achten, dass die Messung eine gewisse Mindestzeit nicht unterschreitet. Diese Mindestzeit ist von den Schwingungseigenschaften, speziell von der ersten Eigenfrequenz, des Objekts abhängig. Vereinfachend kann bei Eisenbahnbrücken ein Mindestzeitraum von 20 min verwendet werden, vergleiche [7].

## 2.7 Ermittlung der Schwingungsformen

Die Eigenformen bzw. Schwingungsformen sind neben den Eigenfrequenzen wichtige Indikatoren über das Verhalten eines Systems. Sie geben vor allem bei der Auswertung von Messdaten wichtige Informationen über die Qualität der Ergebnisse. Auch die Frage, bei welcher Frequenz eine bestimmte Schwingungsform auftritt, ist von großem Interesse.

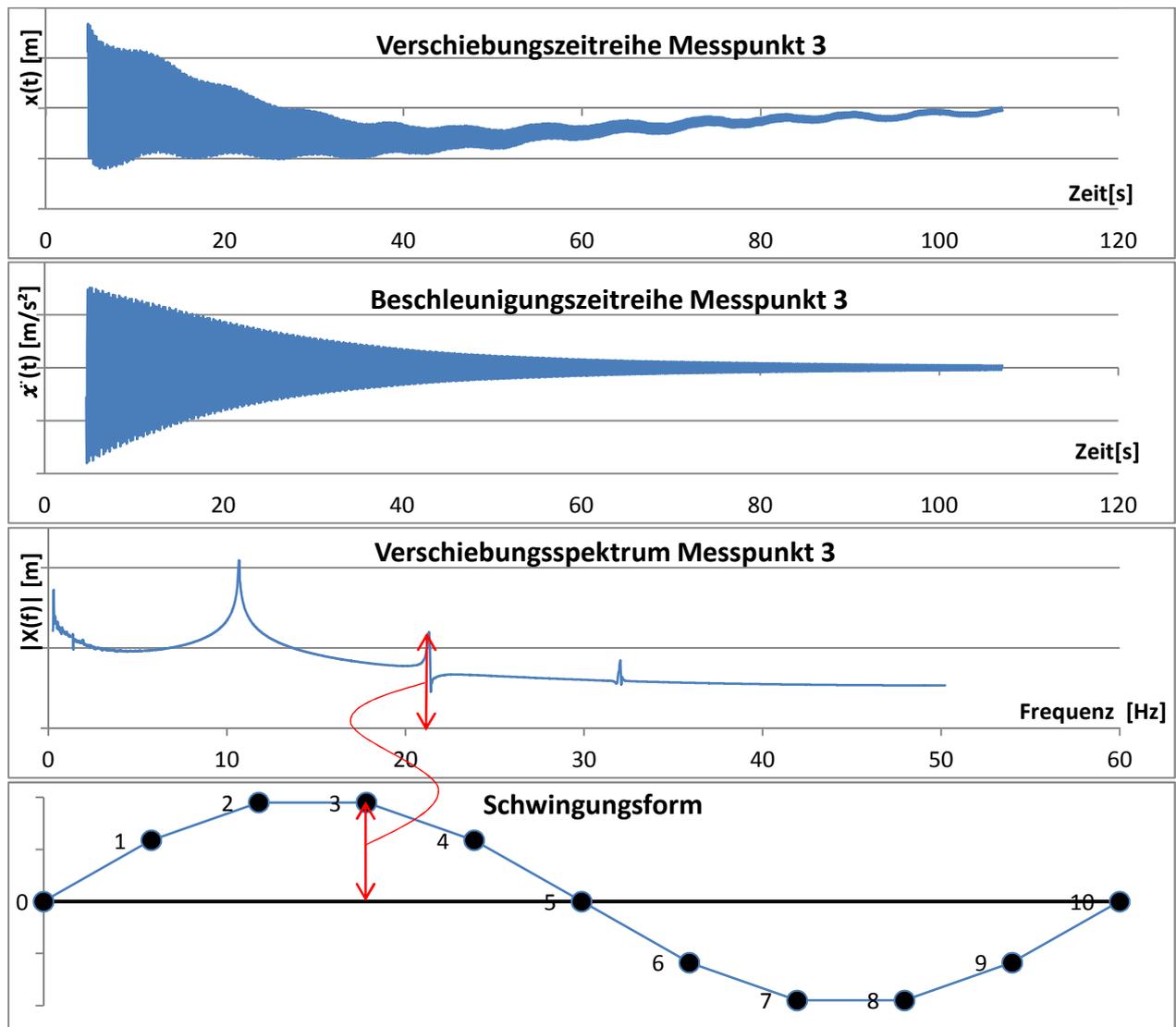


Abbildung 2.7: Ermittlung der Schwingungsform

Im Folgenden wird die Ermittlung einer Schwingungsform anhand eines exemplarischen Punktes gezeigt. Die gemessene Beschleunigung wird über doppelte Integration in ein Zeitverschiebungssignal umgeformt. Durch eine FFT dieses Signals erhält man ein Verschiebungsspektrum dieses Punktes. Durch das Verschiebungsspektrum und den dazugehörigen Phasenfrequenzgang eines Messpunktes, lässt sich die Auslenkungsamplitude dieses Punktes bei einer beliebigen Schwingungsfrequenz bestimmen. Wiederholen der Prozedur für alle Messpunkte gibt somit die Schwingungsform bei einer bestimmten Frequenz. Zu beachten ist, dass die Verschiebungsspektren zu normieren sind, um einen einheitlichen Maßstab der Verschiebungen zu gewährleisten.

## 2.8 MAC Modal Assurance Criterion

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten um die Aussagekraft der Ergebnisse einer Schwingungsanalyse zu bewerten. Zum einen können bei Ingenieurbauwerken mit einfachen Tragsystemen, wie bei manchen Brücken und Hochhäusern, die ersten Schwingungsformen bereits ohne genauere Informationen über die Steifigkeiten und Massen abgeschätzt werden. Eine Brücke die das statische System eines Einfeldträgers besitzt, wird als erste Eigenform vermutlich eine Art Sinushalbwellen aufweisen. Zum anderen kann durch die Erstellung dynamischer Modelle und die Abschätzung der Massen, der Steifigkeiten und der erwarteten Dämpfung bereits im Vorhinein eine qualitative Vorhersage über die erwarteten Schwingungseigenschaften getroffen werden. Um die erwarteten Schwingungsformen aus den dynamischen Modellen mit den experimentell ermittelten zu vergleichen und um die Parameter des Modells an die experimentell ermittelten Eigenschaften anzupassen, kann der MAC Wert herangezogen werden.

Der MAC Wert bietet eine Möglichkeit die Schwingungsformen unterschiedlicher Berechnungen zu vergleichen. So können experimentell ermittelte Eigenformen mit den Eigenformen aus einem FE-Modell oder aus einer modalen Analyse verglichen werden. Es wird dabei das Quadrat des Kosinus des Winkels den zwei Eigenvektoren zueinander einschließen gebildet, [10] [5].

$$\text{MAC}(\vec{\Phi}_i^E, \vec{\Phi}_j^M) = \frac{|(\vec{\Phi}_i^R)^T \vec{\Phi}_j^M|^2}{((\vec{\Phi}_i^E)^T \vec{\Phi}_i^E)((\vec{\Phi}_j^M)^T \vec{\Phi}_j^M)} \quad (2.31)$$

E und M bezeichnen in der Formeln, ob der Eigenvektor  $\vec{\Phi}$  experimentell ermittelt wurde oder aus dem rechnerischen Modell stammt. Die Indizes i und j stehen für die i-te oder j-te Schwingungsform.

$$(\vec{\Phi}_i^E)^T \vec{\Phi}_i^E = L_E^2 \quad (2.32)$$

$$(\vec{\Phi}_j^M)^T \vec{\Phi}_j^M = L_M^2 \quad (2.33)$$

$L_E$  und  $L_M$  bezeichnen die Längen bzw. die Beträge der Vektoren  $\vec{\Phi}_i^E$  und  $\vec{\Phi}_j^M$ . Das Skalarprodukt zweier Vektoren bildet die Projektion des einen Vektors auf den anderen, multipliziert mit dem Betrag des anderen Vektors, [9].

$$(\vec{\Phi}_i^R)^T \vec{\Phi}_j^M = L_E L_M \cos(\alpha_{E,M}) \quad (2.34)$$

Der Winkel den die zwei Eigenvektoren zu einander einschließen, wird dabei mit  $\alpha_{E,M}$  bezeichnet. Durch Einsetzen von (2.32), (2.33) und (2.34) in (2.31) und anschließendem Kürzen der Beträge bleibt nur mehr das Quadrat des Kosinus übrig.

$$(\vec{\Phi}_i^R)^T \vec{\Phi}_j^M = \cos^2(\alpha_{E,M}) \quad (2.35)$$

Der MAC Wert kann somit Werte von 0 bis 1 annehmen. Der Wert 1 bedeutet, die beiden verglichenen Eigenvektoren sind ident und 0 bedeutet die beiden Vektoren sind orthogonal zu einander. Je näher der Wert bei 1 liegt, umso ähnlicher sind die beiden Eigenformen. In Tabelle 2.1 ist ein nahezu ideales Beispiel für eine MAC Wert Tabelle dargestellt.

In Tabelle 2.1, Tabelle 2.2 und Tabelle 2.3 werden die aus den Messungen ermittelten Schwingungsformen untereinander verglichen. Die Zahlen in der obersten Reihe und in der rechten Spalte kennzeichnen die Frequenzen der jeweiligen Schwingungsformen. Diese Darstellung gibt eine gute Übersicht über die Übereinstimmungen der einzelnen Schwingungsformen untereinander, dadurch können leicht Aussagen über die orthogonale Unabhängigkeit der identifizierten Mode

getroffen werden. Im Idealfall ist die Diagonale mit lauter Einsen besetzt, da es sich ja dabei um den Vergleich von gleichen Schwingungsformen untereinander handelt. Es wird also ein Vektor auf sich selbst abgebildet. Da die Abbildung zweier orthogonal zu einander stehenden Vektoren gleich Null ist, müssen alle restlichen Werte im Idealfall Null sein, um die orthogonale Unabhängigkeit der Eigenformen zu bestätigen.

	3.73 Hz	11.21 Hz	18.13 Hz	23.17 Hz
3.73 Hz	1	0.02999	0.004636	0.0005969
11.21 Hz	0.02999	1	0.01886	0.003883
18.13 Hz	0.004636	0.01886	1	0.01938
23.17 Hz	0.0005969	0.003883	0.01938	1

Tabelle 2.1: Beispiel für MAC Werte.

Beim Vergleich von beispielsweise einem Finite-Elemente-Modell und dem Ergebnissen einer Modalanalyse kann es zum Auftreten gewisser Inkompatibilitäten kommen. Zum einen hat ein FE-Modell mehrere Freiheitsgrade als eine Modalanalyse anhand von Messdaten, die durch die Anzahl der Messpunkte begrenzt ist. Um die Eigenvektoren auf gleiche Dimension (Länge), also auf gleiche Anzahl der Koordinaten zu bringen, reicht es, im FE-Modell des Systems nur die Daten der zu den Messpunkten adäquaten FE Knoten zu verwenden.

Ein weiteres Problem stellt der Umstand dar, dass man aus FE Berechnungen reale Eigenvektoren bekommt und aus der Analyse von Messdaten als Folge der Dämpfung komplexe Eigenvektoren resultieren. Handelt es sich um nur gering komplexe Schwingungen ist das Problem zu beheben, indem man nur den realen Teil des Eigenvektors verwendet. Weisen die Ergebnisse jedoch einen größeren komplexen Anteil auf, so ist das Problem genauer zu betrachten, vergleiche [5].

Verwendet man den MAC Wert um die unterschiedlichen Eigenformen einer Auswertmethode untereinander zu vergleichen, ergibt sich folgendes Problem. Diese Form des MAC Wertes bezieht sich nur auf die Modelform. Da jedoch quasi nie alle Freiheitsgrade bekannt bzw. angesetzt sind, kann es vorkommen, dass einzelne Schwingungen, wie in Tabelle 2.2 dargestellt, nahezu dieselbe Schwingungsform aufweisen, also einen MAC Wert von nahezu 1 haben, obwohl Sie energetisch absolut verschieden sind. Ein Beispiel dafür ist der in Abbildung 2.8 dargestellte Einfeldträger, der nur durch einen Sensor experimentell überprüft wird. Theoretisch müssten alle ungeraden Schwingungsformen zueinander den MAC Wert 1 haben.

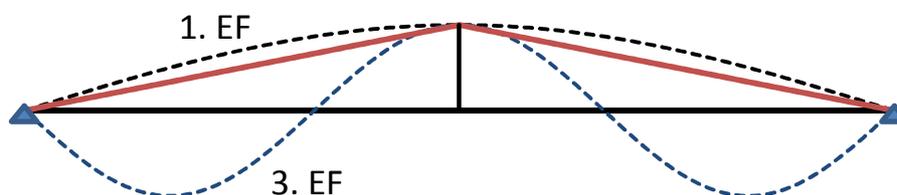


Abbildung 2.8: Erste und dritte Schwingungsform eines Einfeldträgers

In Tabelle 2.2 sind die MAC Werte einer Schwingungsanalyse eines Kragträgers durch nur einen Sensor dargestellt. Der Messpunkt war am Ende des Kragträgers positioniert. Da für jede ermittelte Schwingungsform der Sensor eine Auslenkung aufweist, werden alle MAC Werte zu 1 ermittelt.

	6.133 Hz	6.22 Hz	24.94 Hz	41.39 Hz
6.133 Hz	1	1	1	1
6.22 Hz	1	1	1	1
24.94 Hz	1	1	1	1
41.39 Hz	1	1	1	1

**Tabelle 2.2:** MAC Werte einer Schwingungsanalyse eines MDOF Systems mit nur einem Sensor.

Wird also nur ein Sensor verwendet, wird nur Punkt abgebildet und es ist unmöglich einzelne Schwingungsformen voneinander zu unterscheiden. Um dieses Problem zu beheben werden Messungen an mehreren Punkten gleichzeitig durchgeführt und analysiert. Dadurch wird es möglich komplexere Schwingungsformen darzustellen und voneinander zu unterscheiden. Es kann jedoch auch bei einer größeren Anzahl von Sensoren zu hohen Ähnlichkeiten der Modeformen kommen (siehe Tabelle 2.3).

	3.285 Hz	4.95 Hz	7.185 Hz	12.55 Hz	14.23 Hz
3.285 Hz	1	0.009023	0.8707	0.8442	0.007186
4.95 Hz	0.009023	1	0.001198	0.0004132	0.002181
7.185 Hz	0.8707	0.001198	1	0.9571	0.01714
12.55 Hz	0.8442	0.0004132	0.9571	1	0.06209
14.23 Hz	0.007186	0.002181	0.01714	0.06209	1

**Tabelle 2.3:** MAC Werte der ersten Fünf Schwingungsformen einer Brücke.

Um diesem Effekt beizukommen muss auch der Anordnungen der Messpunkte zueinander und der Steifigkeitsverteilung der Struktur Rechnung getragen werden. Zu diesem Zweck wäre allerdings eine andere Formulierung des MACs notwendig. In die neue Formulierung könnte zum Beispiel eine Gewichtung der Absolut- oder Relativverschiebungen der Knotenpunkte aufgenommen werden.

### 3 ARTEMIS

*ARTEMIS* ist ein Programm zur modalen Identifikation von Betriebsschwingungen. Es ermittelt die modalen Parameter einer Struktur aus der gemessenen Schwingungsantwort des Systems. Dazu werden *Output Only* Analyse Methoden benötigt. *ARTEMIS* stellt dem Benutzer zu diesem Zweck verschiedene *Frequency Domain Decomposition* (FDD) und *Stochastic Subspace Identification* (SSI) Methoden zur Verfügung. Diese Analyse-Methoden gehen alle von einer *ambienten Anregung* durch weißes Rauschen aus. Im Zuge dieses Kapitels werden diese Verfahren näher erläutert.

#### 3.1 Allgemeines

Die modale Identifikation ist die Ermittlung der modalen Parameter aus Schwingungsmessungen. Bestimmt werden dabei die natürliche Eigenfrequenz, die Schwingungsformen und die dazugehörigen Dämpfungen. Ein physikalisches System reagiert jeweils auf einen Systeminput mit einem Systemoutput. Generell werden in dieser Erklärung der Systemeingang sowie die Systemantwort in einen bekannten und einen nicht bekannten Teil aufgeteilt. Ein Schwingungssystem wird ständig angeregt. Einerseits durch gezielte Anregung, die auch relativ leicht erfassbar ist und andererseits durch „störende“ Umwelteinflüsse, deren Erfassung schon wesentlich schwerer fällt. Das Verhältnis der bekannten Systemantwort zur unbekanntem, also die Frage in wie weit der *Output* erfasst wird, ist unter anderem von der Art der Messung, von der Qualität der Messeinrichtung und natürlich vom Messlayout abhängig. Je nachdem in wie weit *Input* und *Output* bekannt sind, werden unterschiedliche Analyse-Verfahren angewandt.

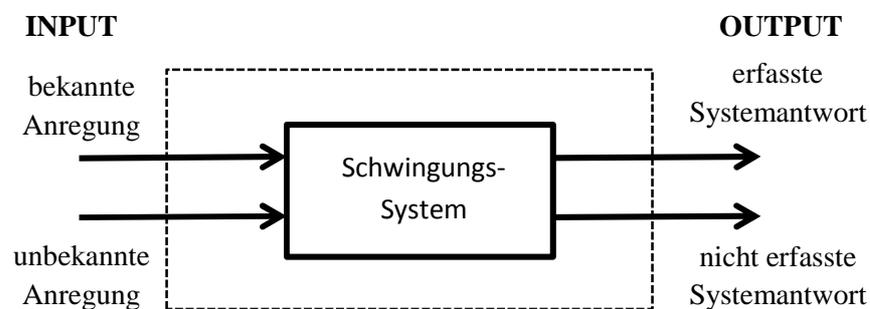


Abbildung 3.1: Schwingungssystem

Die konventionelle Methode der modalen Identifikation ist die Input-Output modale Identifikation. Bei dieser Methode wird davon ausgegangen, dass man den gesamten Systemeintrag sowie die gesamte Systemantwort, auf diesen Energieeintrag, kennt. Es wird dazu eine Messung der Eingangskräfte sowie der resultierenden Schwingungen der Struktur vorgenommen. Zur Identifikation der modalen Parameter wird dazu ein *Curve Fitting*, an die experimentell ermittelte Übertragungsfunktion, durchgeführt. Da auch der Systemeingang aufgezeichnet wird, kann die Übertragungsfunktion skaliert werden und es ist möglich eine Aussage über die Reaktion eines Systems auf eine Anregung, durch eine bestimmte Kraft, zu treffen.

Da es für große Bauwerke, wie Hochhäuser oder Brücken, kaum möglich ist, die gesamte Systemanregung zu messen, bzw. die Systeme gezielt zu erregen, wird für solche Konstruktionen eine *Output Only* Analyse sinnvoll. Da nur die Systemantwort gemessen wird, muss eine Annahme für den Systemeingang, den *Input* getroffen werden. Der *Input* wird vereinfachend als weißes Rauschen

angesetzt. Es wird also eine gleichmäßig verteilte Anregung des gesamten Frequenzspektrums angenommen. In der Realität trifft dies, vor allem bei einer kurzen Messdauer, oft nicht zu. Tragwerke werden zum Beispiel durch sich in der Nähe befindender Maschinen, in der Arbeitsfrequenz dieser Maschinen, zum Schwingen angeregt. Ein weiteres Problem ist, dass das Messsignal meist durch Rauschen verunreinigt ist. Bei der modalen Identifikation müssen also nicht nur die Moden bestimmt werden, sondern auch die Strukturmoden von den, in der Anregung wurzelnden, Betriebsmoden und von den, durch das Signalauschen entstehenden, Störmoden unterschieden werden.

Durch den Wegfall der gezielten Systemanregung, die unter anderem kosten- und zeitaufwendig sein kann, ist es möglich, bei Verwendung einer *Output Only* Analyse, Tragwerke günstig und schnell zu testen. Messungen können im normalen Gebrauchszustand durchgeführt werden, was vor allem bei Brücken von wesentlicher Bedeutung ist. Durch Messung unter Gebrauchslast können jene für das Tragwerk wirklich auftretenden Zustände untersucht werden. Es ist jedoch, neben einer hochwertigen Messeinrichtung und besonderer Sorgfalt bei der Durchführung der Messungen, eine genaue und sorgfältige Datenanalyse erforderlich.

ARTEMIS ermöglicht es, auch unterschiedliche Testsetups zusammen zu fügen. Das ist vor allem bei größeren Strukturen von Vorteil. Werden zum Beispiel 100 Messpunkte gewählt, so ist es möglich mit etwa 15 Sensoren und 10 verschiedenen Messlayouts diese 100 Messpunkte zu erfassen. Dadurch ist es nicht notwendig eine so große Anzahl an Sensoren vorzuhalten und auch der Aufbau der Messvorrichtung bleibt übersichtlich. Gewisse Sensoren (Referenzsensoren) müssen jedoch bei allen Messungen an derselben Position belassen werden, um die unterschiedlichen Messlayouts nachher richtig zusammen fügen zu können. Die restlichen Sensoren können bei jedem Messlayout an einem anderen Punkt positioniert werden.

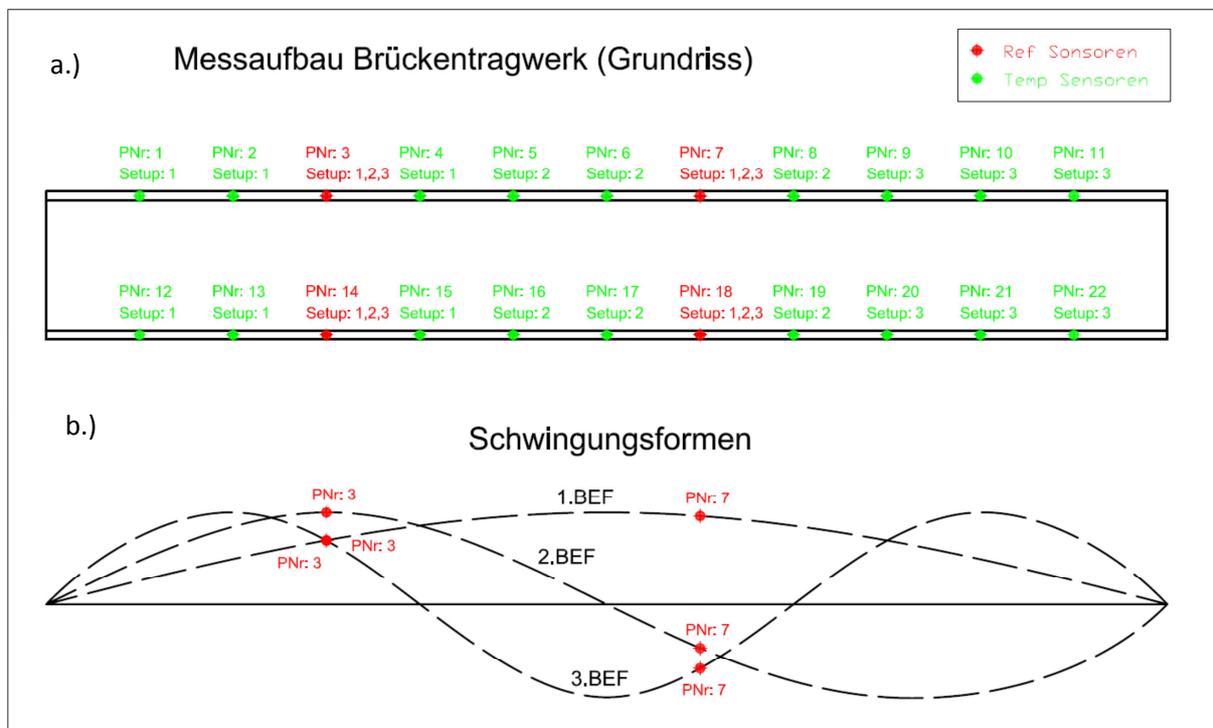


Abbildung 3.2: Messlayout und Schwingungsformen einer Brücke

In Abbildung 3.2.a ist ein möglicher Messaufbau für ein Brückentragwerk dargestellt. Es werden dabei 22 Messpunkte mit 10 Sensoren erfasst. Hierfür wird die Messung in drei unterschiedliche Messsetups unterteilt. Wie eingetragen, wurden vier Referenzsensoren gewählt deren Lage in allen Messsetups gleich bleibt. Es muss jedoch darauf geachtet werden, dass, vor allem bei nahe beisammen liegenden Schwingungsformen, alle Schwingungen in jedem Test Setup gut repräsentiert werden. Diese Bedingung gilt vor allem für die Referenzsensoren. Es werden somit besondere Anforderungen an die Positionierung dieser Sensoren gestellt. Wie in Abbildung 3.2.b dargestellt, befinden sich die Positionen der vier Referenzsensoren in keiner der ersten drei Biegeeigenformen an einem Schwingungsknoten und enthalten somit Informationen über diese Biegeeigenformen und die dazugehörigen Torsionseigenformen.

## 3.2 FDD Frequency Domain Decomposition

Bei der Frequenzbereich Zerlegung wird die gemessene Systemantwort in ein Set von unabhängigen Einmassenschwinger (SDOF) zerlegt. Jeder Einmassenschwinger stellt einen Mode dar. Die Zerlegung wird mittels einer Einzelwertzerlegung (*Singular Value Decomposition* SVD) der Spektralen Dichte Matrizen (*Power Spectral Density* PSD) durchgeführt [11].

Dabei wird zuerst die Spektrale Dichte Matrix für jede betrachtete Frequenz abgeschätzt. Jede dieser Spektralen Dichte Matrizen wird anschließend einer Einzelwertzerlegung (SVD) unterzogen. Als Ergebnis erhält man Einzelwerte und Einzelvektoren. Falls mehrere Datensets vorhanden sind, werden die Ergebnisse der SVD gemittelt. Trägt man die Einzelwerte in Abhängigkeit von der Frequenz nun in ein Diagramm ein, so lässt sich mittels einfachem *Peak Picking*, also Wählen der Spitzen, die Eigenfrequenzen abschätzen. Die Einzelvektoren der gewählten Frequenzen stellen eine Abschätzung der Eigenformen dar. Die *Enhanced Frequency Domain Decomposition* (EFDD) und die *Curve-fitted Frequency Domain Decomposition* (CFDD) sind Erweiterungen der FDD. Dabei werden neben den Eigenfrequenzen und Eigenformen noch weitere Systemparameter, wie etwa die Dämpfung, ermittelt.

### 3.2.1 FDD Theorie

Im folgenden Teil wird die Theorie der FDD kurz erläutert. Ausgegangen wird von dem, in der folgenden Gleichung nochmals dargestellten, Zusammenhang zwischen Systemeingang  $\vec{\bar{F}}(\Omega)$  und Systemantwort  $\vec{\bar{X}}(\Omega)$ . Da es sich bei den betrachteten Systemen um Mehrfreiheitsgradsysteme handelt, sind  $\vec{\bar{X}}$  und  $\vec{\bar{F}}$  Vektoren,  $\bar{\mathbf{H}}$  ist eine Matrix. Der Querstrich kennzeichnet, dass es sich um komplexe Matrizen handelt.

$$\vec{\bar{X}}(\Omega) = \bar{\mathbf{H}}(\Omega) \vec{\bar{F}}(\Omega) \quad (3.1)$$

Im Weiteren wird jedoch, zum Behalten der Übersicht, auf die Kennzeichnung der komplexen Terme durch den Querstrich, verzichtet. Multipliziert man die oben dargestellte Gleichung mit ihrer hermiteschen Darstellung von rechts, so erhält man den Zusammenhang von Systemeingang und Systemantwort in der PSD Darstellung. Eine Matrix ist hermitesch, wenn sie gleich ihrer konjugiert komplexen transponierten Form ist ( $A^* = A^T$ ).  $T$  steht für transponiert und  $*$  für konjugiert komplex. Der Hermitesche Operator  $H$  bedeutet konjugiert komplex und transponiert zugleich. Die Bedingung für eine hermitesche Matrix lässt sich somit auch als  $A = A^H = (A^*)^T$  anschreiben.

$$\vec{X}^*(\Omega) \vec{X}^T(\Omega) = \mathbf{H}^*(\Omega) \vec{F}^*(\Omega) \vec{F}^T(\Omega) \mathbf{H}^T(\Omega) \quad (3.2)$$

In einer anderen Form lässt sich das Gleichungssystem wie folgt anschreiben.

$$\mathbf{G}_{XX}(\Omega) = \mathbf{H}^*(\Omega) \mathbf{G}_{FF}(\Omega) \mathbf{H}^T(\Omega) \quad (3.3)$$

Wobei

$$\mathbf{G}_{FF}(\Omega) = \vec{F}^*(\Omega) \vec{F}^T(\Omega) \quad (3.4)$$

und

$$\mathbf{G}_{XX}(\Omega) = \vec{X}^*(\Omega) \vec{X}^T(\Omega) \quad (3.5)$$

die Leistungsspektraldichte Matrizen des Systemeingangs bzw. der Systemantwort darstellen.  $\mathbf{G}_{XX}$  ist eine  $m \times m$  und  $\mathbf{G}_{FF}$  eine  $l \times l$  Matrix.  $m$  steht dabei für die Anzahl der Systemeingänge und  $l$  für die Anzahl der Systemreaktionen. Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}$  hat folglich die Dimension  $m \times l$ .

Die Übertragungsfunktion eines SDOF Systems lässt sich durch eine Partialbruchzerlegung wie folgt darstellen.

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} = \frac{R}{i\Omega - p} - \frac{R^*}{i\Omega - p^*} \quad (3.6)$$

Bei  $p$  handelt es sich um die konjugiert komplexe Polstelle, die sich wie folgt berechnet.

$$p = -\frac{c}{2m} + i\omega_d \quad (3.7)$$

$R$  und  $R^*$  stellen die ebenfalls konjugiert komplexen Koeffizienten dar.

$$R = \frac{1}{i2m\omega_d} \quad (3.8)$$

Wendet man die Partialbruchzerlegung auf die Übertragungsfunktion eines Mehrmassenschwingers an, so erhalten wir

$$\mathbf{H}(\Omega) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathbf{R}_k}{i\Omega - \lambda_k} - \frac{\mathbf{R}_k^*}{i\Omega - \lambda_k^*} \right) \quad (3.9)$$

Es wird dabei die Summe über die  $n$  Schwingungsmoden gebildet.  $\lambda_k$  ist die Polstelle der  $k$ -ten Schwingungsform. Der dazugehörige Koeffizient  $\mathbf{R}_k$  setzt sich aus dem Vektor der  $k$ -ten modalen Schwingungsform und dem entsprechenden Gewichtungsvektor zusammen.

$$\mathbf{R}_k = \vec{\phi}_k \vec{\gamma}_k^T \quad (3.10)$$

Als Erregung wird von weißem Rauschen, also einer unkorrelierten und gleichmäßig über das gesamte System verteilten Anregung des gesamten Spektrums, ausgegangen. Das Leistungsdichtespektrum einer solchen Anregung ist konstant, vergleiche [11].

$$\mathbf{G}_{FF}(\Omega) = \mathbf{C} \quad (3.11)$$

Durch Einsetzen von (3.9) und (3.11) in (3.3) ergibt sich:

$$\mathbf{G}_{XX}(\Omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \left[ \left( \frac{\mathbf{R}_k}{i\Omega - \lambda_k} - \frac{\mathbf{R}_k^*}{i\Omega - \lambda_k^*} \right) \mathbf{C} \left( \frac{\mathbf{R}_s}{i\Omega - \lambda_s} - \frac{\mathbf{R}_s^*}{i\Omega - \lambda_s^*} \right)^H \right] \quad (3.12)$$

Durch weitere mathematische Umformungen lässt sich für ein schwach gedämpftes System folgender Ausdruck für die Leistungsspektraldichte der Systemantwort ableiten.

$$\mathbf{G}_{FF}(\Omega) = \sum_{k=1}^N \frac{d_k \vec{\phi}_k \vec{\phi}_k^T}{i\Omega - \lambda_k} - \frac{d_k^* \vec{\phi}_k^* \vec{\phi}_k^{*T}}{i\Omega - \lambda_k^*} \quad (3.13)$$

$d_k$  stellt einen konstanten skalaren Wert dar. Es haben meist nur wenige Schwingungsformen einen maßgebenden Einfluss auf das Systemverhalten, bei einer bestimmten Frequenz, siehe [11].

Durch Übergang auf die modalen Koordinaten

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n \vec{\phi}_k q_k(t) = \Phi \vec{q}(t) \quad (3.14)$$

kann die Korrelationsfunktion

$$\mathbf{C}_{xx}(\tau) = E\{\vec{x}(t + \tau)\vec{x}(t)^T\} \quad (3.15)$$

wie folgt angeschrieben werden, [2].

$$\mathbf{C}_{xx}(\tau) = E\{\Phi \vec{q}(t + \tau) \vec{q}(t)^H \Phi^H\} = \Phi \mathbf{C}_{qq}(\tau) \Phi^H \quad (3.16)$$

Für die Fourier-Transformierte, sprich für die Darstellung im Frequenzbereich, ergibt sich somit:

$$\mathbf{G}_{XX}(\Omega) = \Phi \mathbf{G}_{QQ}(\Omega) \Phi^H \quad (3.17)$$

Dieselbe Form weist die Einzelwertzerlegung (SVD) auf.

$$\mathbf{G}_{XX}(\Omega) = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \quad (3.18)$$

$\mathbf{V}$  stellt die Matrix der Einzelvektoren, bzw. der Eigenvektoren von  $\mathbf{G}_{XX}$ , dar.  $\mathbf{S}$  ist eine Diagonalmatrix. Die Diagonale ist dabei mit den Eigenwerten von  $\mathbf{G}_{XX}$  besetzt.

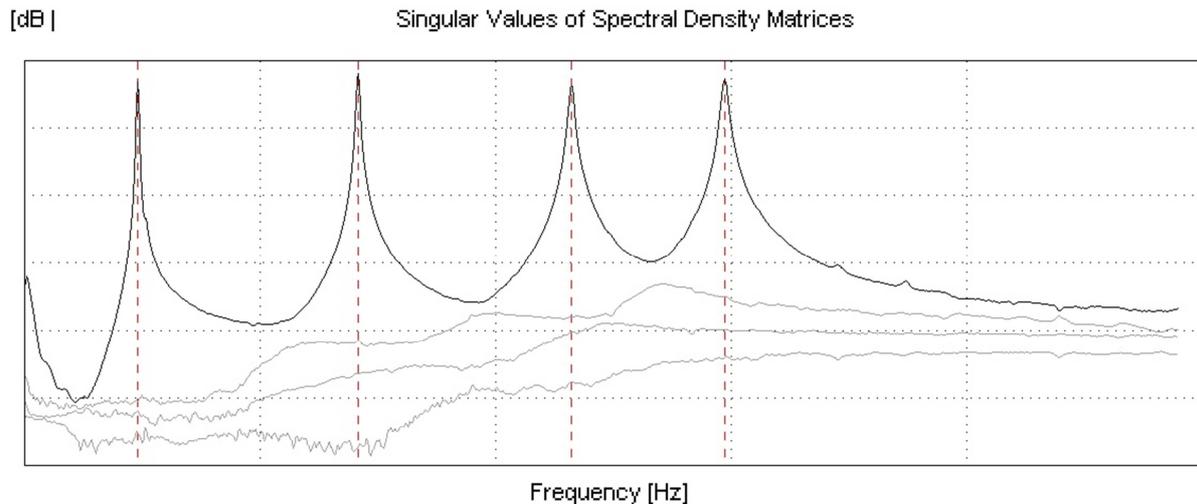


Abbildung 3.3: SVD eines 4-Freiheitsgradsystems

In Abbildung 3.3 ist die SVD einer Messung eines vier geschossigen Rahmens dargestellt. Wie in Abbildung 3.4 gezeigt, sind in dieser SVD die Antwortspektren der einzelnen Moden klar erkennbar. Des Weiteren wird eine größenmäßige Ordnung der SVD ersichtlich. Die obere Linie zeigt immer den größten Wert, die zweite Linie immer den zweitgrößten Wert, usw. Die oberen Linien stellen quasi einen Großteil der Energie dar, bzw. beinhalten bereits alle wichtigen Informationen über das gesamte System. Es ist daher nicht notwendig alle möglichen SVD-Linien darzustellen oder zu ermitteln, da, wie in der oberen Darstellung gezeigt, bereits wenige, in diesem konkreten Fall bereits eine SVD-Linie ausreicht, um die Systemeigenschaften zu bestimmen. Die unteren Linien sind mehr oder weniger konstant, enthalten also keine neuen Informationen. Eine deutliche Spitze in der zweiten oder dritten SVD-Linie, die fast den Wert der ersten SVD Kurve erreicht, ist meist ein Indikator für mehrfache oder nah beieinander liegende Eigenformen. Abbildung 3.4 zeigt die

ARTEMIS Darstellung eines SVD-Diagramms eines 4-Freiheitsgradsystems mit nachträglich eingetragenen SDOF Übertragungsfunktionen der einzelnen Moden.

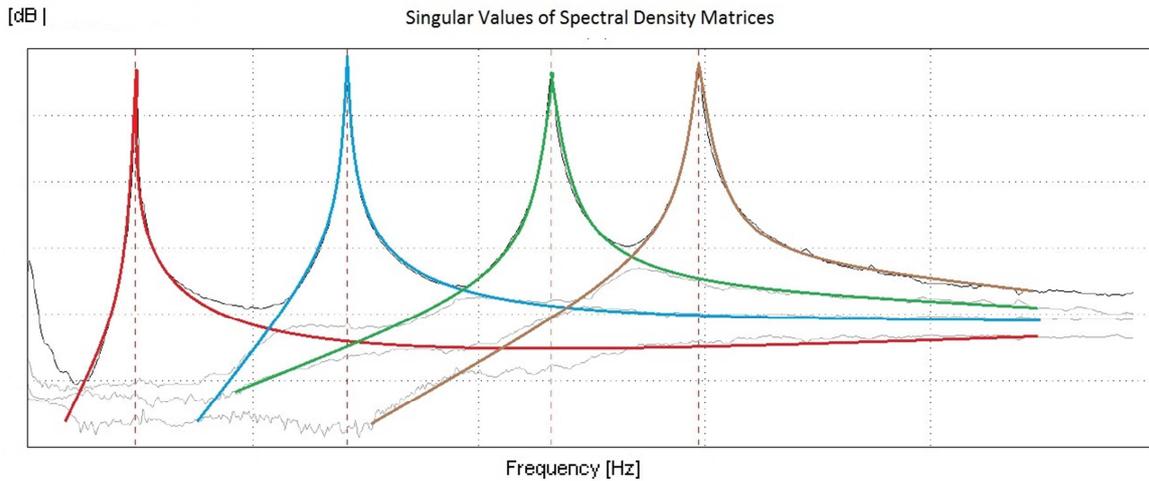


Abbildung 3.4: SVD eines 4-Freiheitsgradsystems mit eingetragenen Moden

### 3.2.2 FDD

Bei der Standard FDD werden, wie oben bereits beschrieben, zuerst die Leistungsspektralmatrizen für alle betrachteten Frequenzen aufgestellt. Danach werden die Antwortspektren mittels SVD zerteilt. Aus diesen SVD Kurven werden die Systemparameter der modalen Einmassenschwinger abgeleitet. Die Eigenfrequenzen werden mittels *Peak-Picking* aus den Spitzten der Einzelwerte ermittelt. Die dazugehörigen Schwingungsformen erhält man aus den Einzelvektoren. Bei der FDD handelt es sich um reines *Signal Processing*.

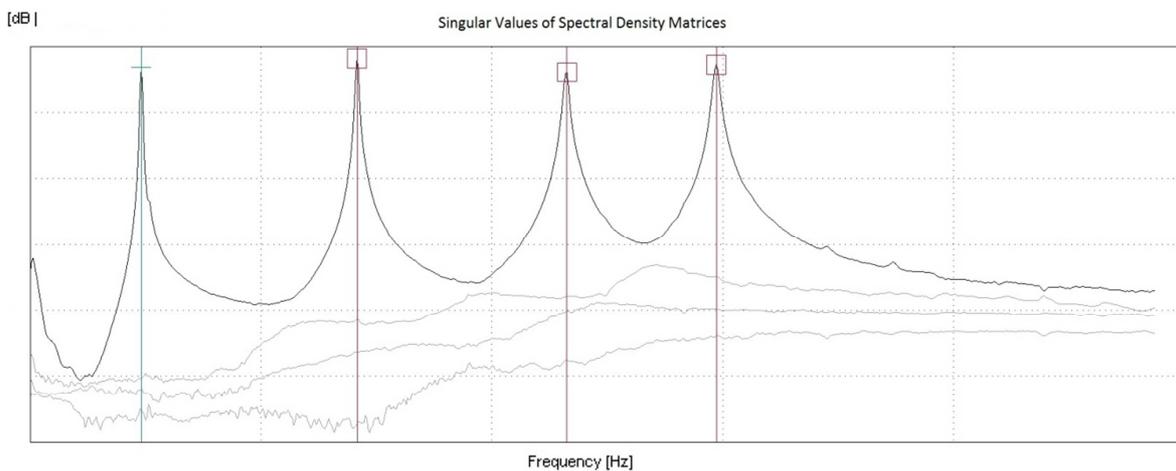


Abbildung 3.5: SVD Auswertung durch Peak Picking (FDD)

Es handelt sich hierbei um ein sehr einfaches und schnelles Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenformen. Außerdem ist es möglich, sich die Schwingungsform für jede beliebige Frequenz anzeigen zu lassen. Wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens ist, dass kein Dämpfungsmaß ermittelt wird. Des Weiteren ist die Genauigkeit der Resonanzfrequenzen durch die Abstände der Stützstellen der Antwortspektren beschränkt. [2]

### 3.2.3 EFDD

Die *Enhanced Frequency Domain Decomposition* ist eine Erweiterung der FDD. Es werden dabei für jedes Datenset die Eigenfrequenzen, Eigenformen und die zugehörigen Dämpfungen ermittelt. Der Mittelwert und die Standardabweichung der Frequenzen und Dämpfungen werden in Tabellenform aufgelistet. Die Ermittlung der Systemparameter erfolgt durch ein einfaches *Curve-Fitting* mittels linearer Regression. Es handelt sich hierbei um eine Zeitbereichs *Curve-Fitting* Methode. Die Genauigkeit der Eigenfrequenzen und der Dämpfungsmaße wird durch die Verwendung der Korrelationsfunktionen erhöht. Um die Korrelationsfunktion zu erhalten, wird eine IFFT, eine *Inverse Fast Fourier Transformation* durchgeführt. Durch Einführen einer gewichteten Summe der Einzelvektoren wird die Qualität der Schwingungsform gesteigert.

$$\vec{\phi}_{\text{gewichtet}} = \sum_i \vec{\phi}_i s_i \quad (3.19)$$

Betrachtet werden die Einzelvektoren die sich im Frequenzbereich der SDOF Glocke befinden. Diese Einzelvektoren werden durch ihre Einzelwerte gewichtet und aufsummiert. Um den Frequenzbereich, der zur Ermittlung der modalen Parameter herangezogen wird, zu bestimmen, wird ein Modal Assurance Criterion (MAC) herangezogen. Es wird dabei die Übereinstimmung der Einzelvektoren der einzelnen Frequenzen verglichen. Der mitberücksichtigte Frequenzbereich endet dort, wo ein Einzelvektor, der jeweiligen Frequenz, die gewählte minimale Übereinstimmung mit dem Einzelvektor, der bezogenen Eigenfrequenz, nicht mehr erfüllt. Es werden dabei alle Einzelvektoren der jeweiligen Frequenz berücksichtigt, die SDOF Glocke kann also auch von einer SVD-Kurve in eine andere springen, wie in Abbildung 3.6 gezeigt wird.

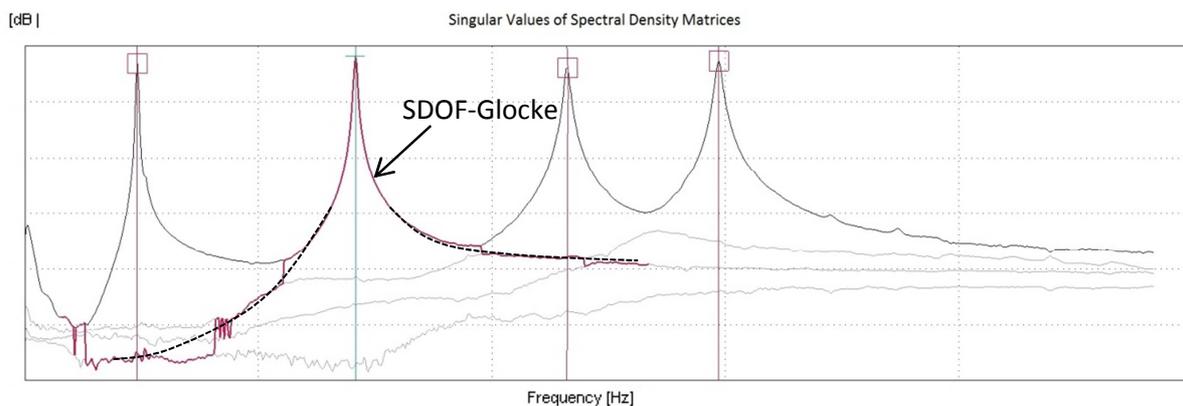


Abbildung 3.6: SDOF Glocke der zweiten Eigenform (EFDD; MAC 0.35)

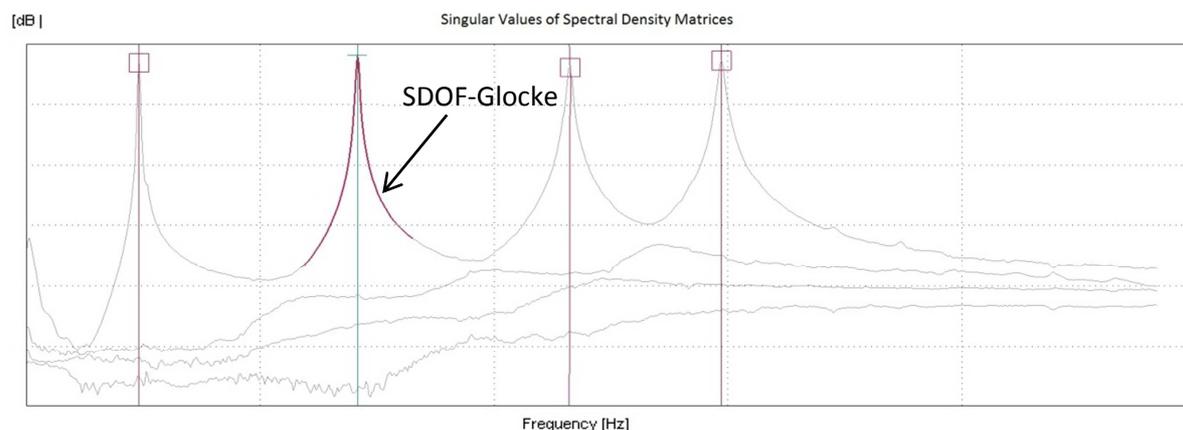
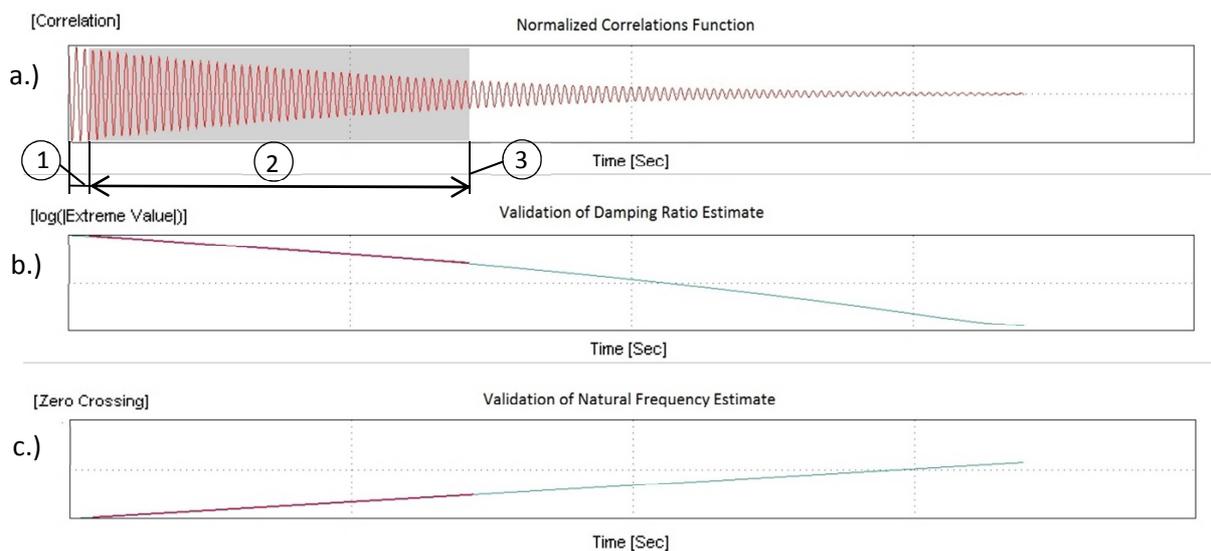


Abbildung 3.7: SDOF Glocke der zweiten Eigenform (EFDD; MAC 0.8)

Einen guten Ansatz bietet ein MAC Wert von 0,8, der auch standardmäßig eingestellt ist. Ein niedrigerer Wert erweitert den Frequenzbereich, ein größerer Wert verkleinert den Frequenzbereich. Eine nähere Beschreibung des MAC befindet sich in Kapitel 2.8.

In Abbildung 3.7 ist der Frequenzbereich, der zur weiteren Auswertung der zweiten Eigenform herangezogen wird, gekennzeichnet. In der obersten SVD-Kurve ist dabei gut erkennbar, dass die zweite modale Eigenform in diesem Bereich stark dominiert.

In Abbildung 3.8.a ist die normalisierte Korrelationsfunktion, der Spektralen SDOF Glocke, dargestellt. Der Bereich der tatsächlich zur Auswertung herangezogen wurde ist, grau markiert **(2)**. Der obere Korrelationsbereich **(1)** wird weggelassen, da breitbandiges Rauschen diesen Bereich oft stört. Eine untere Korrelationsgrenze **(3)** wird benötigt, da mit zunehmender Unbestimmtheit große Totzeiten entstehen. Standardmäßig sind die Grenzen mit 0,95 und 0,3 vorgegeben. In Abbildung 3.8.b ist der Logarithmus der Schwingungsamplitude eingetragen. Für lineares Dämpfungsverhalten sollte sich eine gerade Linie ergeben. Durch lineare Regression kann eine Ausgleichsgerade ermittelt werden. Die Dämpfung kann folgend direkt von der Neigung dieser Linie abgelesen werden. Der in Abbildung 3.8.c dargestellte Graph zeigt die Anzahl der Nulldurchgänge im Verhältnis zu der Zeit. Durch Verwendung einer Ausgleichsgeraden kann daraus die Eigenfrequenz abgeleitet werden. [12]



**Abbildung 3.8: Modale Abschätzung (EFDD)**

Dieses Verfahren ist im Gegensatz zur FDD auch in der Lage die Dämpfung zu ermitteln. Außerdem kommt es zu einer wesentlichen Genauigkeitssteigerung der ermittelten Frequenzen und Schwingungsformen. Durch Ermittlung des Mittelwerts und der Standardabweichung kann die Qualität der Auswertung besser beurteilt werden.

Dadurch, dass Feineinstellungen der MAC Grenzwerte und der Korrelationsgrenzwerte bei jeder Eigenfrequenz erforderlich sind, kann diese Methode sehr zeitaufwendig werden. Ein wesentlicher Nachteil ist auch, dass für jede modale Schwingungsform ausgeprägte Spitzen in jedem Daten Set erforderlich sind, um gute Ergebnisse zu erzielen.

### 3.2.4 CFDD

Die *Curve-fitted Frequency Domain Decomposition* baut wie die EFDD auf die FDD auf. Die Eigenfrequenz und die Dämpfung werden dabei aus einem *Curve Fitting* im Frequenzbereich ermittelt.

Wie bei dem FDD wird über *Peak Picking* eine Resonanzfrequenz aus dem SVD Diagramm gewählt. Über dem MAC Wert wird, wie bei der EFDD, im Weiteren ein Frequenzbereich für die SDOF Glockenkurve ausgewählt. Mit Hilfe der *Hilbert Transformation* wird, für die gewählte Glockenkurve, das komplexe Spektrum  $P_X(f)$  eines SDOF Systems aus dem Antwortsektum  $G_{XX}(f)$  eines MDOF Systems berechnet. Über die Methode der kleinsten Abstandsquadrate wird das Antwortspektrum eines SDOF Systems an  $P_X(f)$  angepasst. Dieses Antwortspektrum weist dabei folgende Form auf.

$$H(f) = \frac{B(f)}{A(f)} = \frac{B_0 + B_1 e^{i2\pi f T} + B_2 e^{i4\pi f T}}{1 + A_1 e^{i2\pi f T} + A_2 e^{i4\pi f T}} \quad (3.20)$$

Nach dem *Curve Fitting* werden die Eigenfrequenz und Dämpfung aus den Ursprüngen (*roots*) von  $A(f)$  abgeleitet. Die Schwingungsform wird, wie bei der EFDD, durch eine Gewichtung der Einzelvektoren, im betrachteten Bereich, ermittelt. [2]

In der folgenden Abbildung 3.9 ist ein SVD Diagramm einer CFDD Auswertung dargestellt. Dabei ist rot die aus der SVD erhaltene Glockenkurve eingetragen und blau das angepasste SDOF Antwortspektrum.

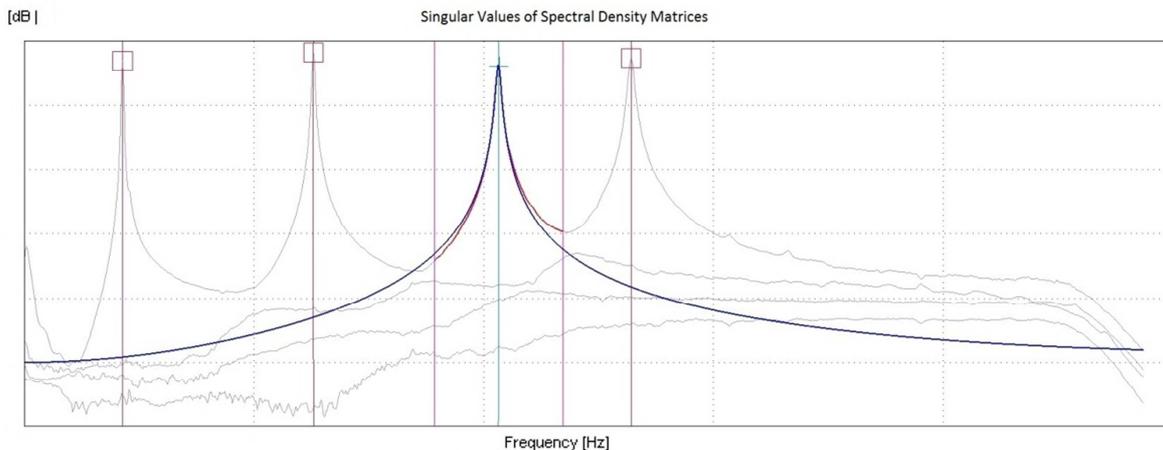


Abbildung 3.9: SVD einer CFDD Auswertung

Durch das *Curve-Fitting* liefert diese Methode verglichen mit der FDD genauere Eigenfrequenzen. Des Weiteren wird auch die Dämpfung ermittelt. Die Ermittlung der Form der Eigenschwingungen wird durch Gewichtung der Einzelvektoren verbessert. Wie bei der EFDD werden auch der Mittelwert und die Standardabweichung errechnet. Da es sich um eine Anpassung im Frequenzbereich handelt, fallen einige einstellbare Parameter weg. Für den Benutzer bleibt lediglich das Definieren des Frequenzbereichs wahlweise über den MAC Wert bzw. durch Verschiebung der Begrenzungslinien im Diagramm.

### 3.3 SSI Stochastic Subspace Identification Method

Der Prozess, aus Schwingungsmessungen das modale Modell zu ermitteln, wird System Identifikation genannt. Ermittelt werden dabei die Eigenfrequenzen, die modalen Schwingungsformen, die modale Dämpfung und die modalen Gewichtungsfaktoren.

Bei der SSI wird ein mathematisches Modell an die Daten der Zeitreihe angepasst. Die Anpassung erfolgt dabei durch Abschätzen der modalen Parameter. Eine 100 prozentige Übereinstimmung kann dabei nicht erreicht werden, da dazu die genaue Anzahl der Schwingungsmoden und eine unendlich lange Messreihe erforderlich wären.

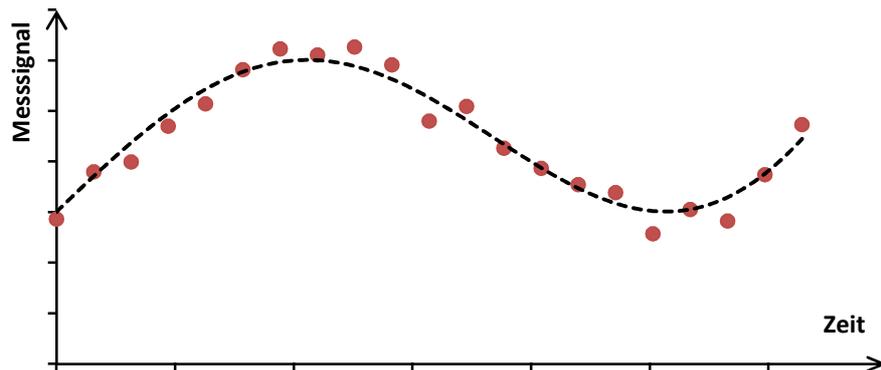


Abbildung 3.10: Zeit-Messsignal Diagramm

Als mathematisches Modell dient dabei das folgende Zustandsraummodell.

$$\vec{y}_{k+1} = \mathbf{A}\vec{y}_k + \mathbf{K}\vec{e}_k \quad (3.21)$$

$$\vec{x}_k = \mathbf{C}\vec{y}_k + \vec{e}_k \quad (3.22)$$

$\mathbf{A}$  beinhaltet die Informationen über die Eigenschaften des Systems.  $\mathbf{K}$  enthält statistische Informationen über die Anregung und  $\mathbf{C}$  gibt den Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor und den gemessenen Systemantworten wieder. Näheres wird im folgenden Kapitel erklärt. Zur Auswertung ist die Anzahl der zu ermittelnden Modellparameter  $n$  notwendig. Es sind zwei Modellparameter zur Ermittlung einer Schwingungsform notwendig.  $n$  gibt die Dimension der quadratischen Systemmatrix  $\mathbf{A}$  an. Die Anzahl dieser Modellparameter ist von essentieller Bedeutung. Ist sie zu gering, kann das System nicht richtig modelliert werden, siehe Abbildung 3.11. Ist sie zu hoch, wird das System überstimmt, was zu einer unnötig großen statistischen Unbestimmtheit der modalen Parameter führt, [12].

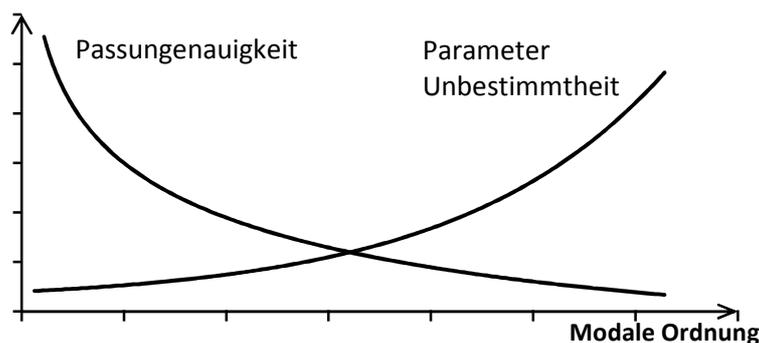


Abbildung 3.11: Zusammenhang Modale Ordnung, Passungsgenauigkeit und Parameter Unbestimmtheit [12]

Bei der Auswertung der Messungen wird eine Gewichtung gewisser Datensätze vorgenommen. Nach Art der Gewichtungsmatrizen unterscheidet man zwischen der *Unweighted Principal Component* (UPC), der *Principal Component* (PC) und der *Canonical Variate Analysis* (CVA) Methode.

### 3.3.1 SSI Theorie

Es gibt mehrere Arten von Modellen für schwingende Strukturen. Angefangen von den sehr realitätsnahen FE-Modellen bis zu den rein dynamischen Modellen wie das Zustandsraum Modell (*State Space*) und das modale Modell.

Bei der System Identifikation wird ein Modell erstellt, das der wirklichen Struktur entsprechen soll. Hierfür werden die Modellparameter so angepasst, dass das Schwingungsverhalten des Modells mit den Messwerten der wirklichen Struktur übereinstimmt. Bei den Stochastischen-System-Identifikations-Methoden werden die Modellparameter an Output-Only Daten angepasst. Diese Methoden können des Weiteren nach der Art der benötigten Daten, wie Daten im Frequenzbereich und im Zeitbereich oder Kovarianzen, unterteilt werden.

Im Bauwesen ist die Abschätzung der modalen Parameter das Hauptziel der System-Identifikation. Stochastisch bezieht sich hierbei auf die Art der Anregung, da die Erregerkräfte nicht gemessen werden können und nur die Systemantwort zur Verfügung steht. Es wird angenommen, dass es sich bei der Anregung um weißes Rauschen (*white noise*) handelt.

Die zeitbereichsdatengetriebenen stochastischen Methoden identifizieren die Modellparameter direkt vom Zeit-Antwort Signal. Die datengetriebenen stochastischen Identifikations-Methoden (*SSI Stochastic Subspace Identification*) streichen unkorreliertes Rauschen durch Projektion des Reihenraums von zukünftigen Outputs in den Reihenraum von vergangenen Outputs. Die Idee hinter dieser Projektion ist es, jede Information in der Vergangenheit zu behalten, die für die Vorhersage der Zukunft nützlich ist. In der Datenverarbeitung werden dafür robuste numerische Methoden, wie die QR Faktorisierung, Einzelwertzerlegung (*SVD Singular Value Decomposition*) und die Methode der kleinsten Quadrate benötigt. Das Prinzip des nichtstationären Kalman-Filters wird für die Identifikation eines stochastischen Zustandsraummodells benötigt. [5]

Ausgegangen wird von den in Kapitel 1.6 hergeleiteten Zustandsraumgleichungen. Durch Variation der Konstanten und für den Sonderfall einer im Zeitintervall  $\Delta t$  konstanten Belastung, lassen sich die Zustandsraumgleichungen in folgender rekursiver Form angeben, vergleiche [1].

$$\vec{y}_{k+1} = \mathbf{A}\vec{y}_k + \mathbf{B}\vec{f}_k \quad (3.23)$$

$$\vec{x}_k = \mathbf{C}\vec{y}_k + \mathbf{D}\vec{f}_k \quad (3.24)$$

$\vec{y}_k$  ist der Zustandsraumvektor zu der Zeit  $t = k \Delta t$ . Die gemessenen Systemantworten (Verschiebung, Geschwindigkeit oder Beschleunigung) werden im Vektor  $\vec{x}_k$  dargestellt.  $\vec{f}_k$  stellt einen Systemeingang bzw. die Systemanregung zum Zeitpunkt  $k$  dar. Die Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  spiegeln das Systemverhalten wieder und sind somit von der Massen-, der Dämpfungs- und der Steifigkeitsmatrix abhängig - aber auch der Zeitschritt  $\Delta t$  hat einen Einfluss. Dieses Zustandsraummodell ist für ein lineares und zeitunabhängiges System gültig. Das heißt zum einen, dass bei einer doppelt so starken Anregung das System mit einer doppelt so großen Antwort reagiert und zum anderen, dass das Systemverhalten zeitlich konstant ist. Da die Systemanregung nicht bekannt ist bzw. nicht gemessen werden kann, werden zwei Zufallsvariablen  $\vec{v}_k$  und  $\vec{w}_k$  eingeführt.

$\vec{w}_k$  enthält neben der Anregung auch Störungen und Ungenauigkeiten in der Modellierung.  $\vec{v}_k$  dagegen beinhaltet zusätzlich zum Systemeingang auch Messungenungenauigkeiten, [5]. Das diskrete stochastische Zustandsraummodell ergibt sich somit zu:

$$\vec{y}_{k+1} = \mathbf{A}\vec{y}_k + \vec{w}_k \quad \textbf{Zustandsgleichungen} \quad (3.25)$$

$$\vec{x}_k = \mathbf{C}\vec{y}_k + \vec{v}_k \quad \textbf{Ausgabegleichungen} \quad (3.26)$$

Die Zufallsvariablen  $\vec{v}_k$  und  $\vec{w}_k$  werden als weißes Rauschen mit Mittelwert Null angenommen. Als Folge dieses Systemeingangs werden auch  $\vec{y}_{k+1}$ ,  $\vec{y}_k$  und  $\vec{x}_k$  als Zufallsvariable mit Mittelwert Null angesetzt. Stochastische Prozesse die ein Null Mittel aufweisen, können durch ihre Kovarianz beschrieben werden.

Da die Erregerkraft dominante Frequenzen enthält, entstehen zufolge dieser dominanten Frequenzen Nullstellen in der Zustandsmatrix  $\mathbf{A}$ . Diese Nullstellen scheinen als Eigenfrequenzen auf und müssen später von den tatsächlichen natürlichen Eigenfrequenzen des Systems unterschieden werden.

Als Lösung dieses Gleichungssystems soll sich eine Abschätzung der modalen Parameter des Systems ergeben. Um diese Parameter abschätzen zu können, müssen die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  ermittelt werden. Für das Abschätzen dieser Matrizen wäre jedoch die Kenntnis des Systemeingangs und der Systemantwort erforderlich. Die Systemantwort lässt sich mehr oder weniger genau durch Messungen ermitteln. Der Systeminput bleibt jedoch unbekannt. Um die Gleichungen trotzdem lösen zu können, wird die Systemanregung in Form eines Weißes Rauschens angesetzt.

Ein anderes stochastisches Model erhält man durch Anwenden des instationären Kalman Filters auf die Gleichungen (3.25) und (3.26). Das folgende Model wird auch *Forward Innovation Model* genannt.

$$\vec{y}_{k+1} = \mathbf{A}\vec{y}_k + \mathbf{K}\vec{e}_k \quad (3.27)$$

$$\vec{x}_k = \mathbf{C}\vec{y}_k + \vec{e}_k \quad (3.28)$$

$\vec{e}_k$  wird *Innovation* genannt und stellt ein Weißes Rauschen dar. Die Matrix  $\mathbf{K}$  wird als die instationäre Form der Kalman-Matrix bezeichnet und stellt das System der Störsignale dar. Der Zweck des Kalman Filters ist es, eine optimale Vorhersage für den Zustandsvektor  $\vec{y}_k$  zu treffen. Diese Vorhersage wird auf Grund von den beobachteten Systemantworten von  $\vec{x}_0$  bis  $\vec{x}_{k-1}$ , den verfügbaren Systemmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  und den bekannten Kovarianzen

$$\mathbf{R}_e \delta_{pq} = \mathbf{E}[\vec{e}_p \vec{e}_q^T], \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{E}[\vec{x}_{k+i} \vec{x}_k^T], \quad \mathbf{G} = \mathbf{E}[\vec{y}_{k+i} \vec{x}_k^T] \quad (3.29)$$

getroffen und wird als  $\vec{y}_{k+1}$  bezeichnet. Die Kovarianz des vorhergesagten Zustandsvektors wird  $\mathbf{P}$  genannt und aus der sogenannten Ricatti-Gleichung bestimmt. Für die Kalman-Matrix  $\mathbf{K}_t$  und die Kovarianz-Matrix  $\mathbf{P}_k$  gibt es rekursive Formeln. Als Anfangszustandsvorhersage wird  $\vec{y}_0 = 0$  und  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$  angesetzt. Falls die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  stabil ist, werden  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{P}$  im Unendlichen konstant und der Kalman Filter wird stationär, [12]. Die Kalman Filter Zustandsfolge ist wie folgt definiert.

$$\hat{\mathbf{Y}}_i = [\hat{y}_i \hat{y}_{i+1} \dots \hat{y}_{i+j-1}] \quad (3.30)$$

Die  $n$ -te Spalte  $\hat{y}_{i+n-1}$  wird dabei aus den  $i$  vorherigen Messungen  $\vec{x}_{n-1}$  bis  $\vec{x}_{i+n-2}$  ermittelt, [5]. Die zur Auswertung vorhandenen Messungen sind in Form von Zustandsvektoren  $\vec{x}_i$  vorhanden. Wobei es sich dabei je nach Messungsart um Verschiebungen, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen handelt. Die Systemantwort ist somit in diskreten Zeitschritten vorhanden.  $i$  und  $j$  stellen beliebige Zeitpunkte dar. Wobei  $i \ll j$  ist und es  $(2i + j - 2)$  Messungszeitpunkte gibt. Die Vektoren der Systemantwort werden nun in eine Blockmatrix zusammengefasst. Die Matrix besteht aus zwei Blöcken mit jeweils  $i$  Reihen und  $j$  Spalten von Vektoren. Die zwei Blöcke stehen dabei für den Vergangenheitsteil  $p$  und den Zukunftsteil  $f$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_p \\ \mathbf{X}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0|i-1} \\ \mathbf{X}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_{j-1} \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{i-1} & \vec{x}_i & \dots & \vec{x}_{i+j-2} \\ \vec{x}_i & \vec{x}_{i+1} & \dots & \vec{x}_{i+j-1} \\ \vec{x}_{i+1} & \vec{x}_{i+2} & \dots & \vec{x}_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{2i-1} & \vec{x}_{2i} & \dots & \vec{x}_{2i+j-2} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$\mathbf{H}$  wird auch als Hankel Matrix bezeichnet und weist die Dimension  $(l2i \times j)$  auf.

Geht man davon aus, dass die Messwertaufnehmer nicht auf einem Schwingungsknoten positioniert sind, so enthält jedes Messsignal dieselben Informationen über das System. Um diese Redundanz zu reduzieren, werden Referenzsensoren eingeführt. Dies sind speziell ausgewählte Sensoren mit besonders guten Messwerten. Es werden nur die Signale dieser Sensoren für die weitere Analyse der modalen Parameter verwendet, was eine schnellere und einfachere Auswertung ermöglicht. Zur Bestimmung der Schwingungsform werden jedoch die vorher vernachlässigten Signalreihen wieder herangezogen.  $r$  stellt dabei die Anzahl der Referenzsensoren dar. Die Gesamtanzahl der Signale wird mit  $l$  bezeichnet. Der Zustandsvektor kann durch Neuordnung in folgende Form gebracht werden.

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} \vec{x}_k^{ref} \\ \vec{x}_k^{\sim ref} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$\vec{x}_k^{ref}$  ist der Referenzvektor und weist die Länge  $r$  auf.  $\vec{x}_k^{\sim ref}$  beinhaltet die restlichen Signale zum Zeitpunkt  $k$  und hat somit die Länge  $l - r$ . Durch Anwenden der Idee der Referenzsignale kann man die Hankel Matrix auf  $\mathbf{H}^{ref}$  vereinfachen. Dies geschieht durch Streichen der nicht Referenzsignale aus dem Vergangenheitsblock. Dadurch verkürzt sich die Matrix um  $(l - r)i$  Reihen.

$$\mathbf{H}^{ref} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_p^{ref} \\ \mathbf{X}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{0|i-1}^{ref} \\ \mathbf{X}_{i|2i-1} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Um diese kurze Erläuterung möglichst einfach zu halten, wird jedoch nicht weiter auf die Reduktion des Systems mittels Referenzsensoren eingegangen und mit der gewöhnlichen Hankel Matrix weiter gearbeitet.

Im nächsten Schritt wird die Projektionsnotation eingeführt. Es wird dabei der Reihenraum von zukünftigen Messungen auf den Reihenraum von vergangenen Messungen projiziert.

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p \quad (3.34)$$

Es handelt sich hierbei jedoch nicht um eine Formel zur Durchführung der Projektion, sondern um die Definition dieser. Der Grundgedanke ist, dass diese Projektion alle Informationen der Vergangenheit behält, die zur Vorhersage der Zukunft nötig sind. Die Projektion kann durch eine Faktorisierung in ein Produkt aus der erweiterten Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{O}_i$  und der Kalman Filter Zustandsfolge  $\hat{\mathbf{Y}}_i$  zerlegt werden.

$$\mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{Y}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{y}}_i \hat{\mathbf{y}}_{i+1} \dots \hat{\mathbf{y}}_{i+j-1}] \quad (3.35)$$

Die Projektionsmatrix  $\mathbf{\Gamma}_i$  ist dabei mit den Elementen  $\vec{\hat{x}}_i$  bis  $\vec{\hat{x}}_{2i+j-2}$  besetzt.  $\vec{\hat{x}}_{i+x}$  stellt dabei die erwartete störungsfeie Antwort des Systems zum  $(i+x)$ -ten Zeitschritt auf den erwarteten Anfangszustand  $\vec{\hat{y}}_i$  dar.

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \vec{\hat{x}}_i & \vec{\hat{x}}_{i+1} & \dots & \vec{\hat{x}}_{i+j-1} \\ \vec{\hat{x}}_{i+1} & \vec{\hat{x}}_{i+2} & \dots & \vec{\hat{x}}_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{\hat{x}}_{2i-1} & \vec{\hat{x}}_{2i} & \dots & \vec{\hat{x}}_{2i+j-2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{O}_i$  gibt somit den Zusammenhang zwischen der Vorhersage des Zustandsvektors und der zukünftigen Systemantwort wieder. Um eine Vorstellung zu bekommen, wie man auf die Form dieser Matrix kommt, gehen wir von den Gleichungen (3.25) und (3.26) aus und bilden den Erwartungswert für alle Terme. Dadurch, dass  $\vec{v}_k$  und  $\vec{w}_k$  nicht mit  $\vec{x}_k$  korrelieren, fallen diese zwei Terme aus der Gleichung.

$$\vec{\hat{y}}_{k+1} = \mathbf{A} \vec{\hat{y}}_k \quad (3.37)$$

$$\vec{\hat{x}}_k = \mathbf{C} \vec{\hat{y}}_k \quad (3.38)$$

Durch  $i$ -faches Einsetzen in die obere Rekursionsformel und anschließend Einbeziehen in die untere Formel, ergibt sich:

$$\vec{\hat{x}}_{k+i} = \mathbf{C} \mathbf{A}^i \vec{\hat{y}}_k \quad (3.39)$$

Aus dieser Gleichung ist der Ursprung der Beobachtbarkeitsmatrix klar ersichtlich. Um die Systemmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  zu bestimmen, wird zuerst die Beobachtungsmatrix  $\mathbf{O}_i$  bestimmt. Es gibt unterschiedliche Methoden dies zu machen. Genau aus diesen verschiedenen Varianten entspringen die unterschiedlichen SSI Methoden. Zuerst führen wir die Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{W}_1$  und  $\mathbf{W}_2$  ein. Die Form eben dieser Gewichtungsmatrizen macht den Unterschied der verschiedenen Methoden aus.

$\mathbf{O}_i$  wird durch eine Einzelwertzerlegung der Projektionsmatrix ermittelt. Vor dieser SVD wird  $\mathbf{\Gamma}_i$  jedoch noch mit den Gewichtungsmatrizen multipliziert.

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{W}_2 = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T = \mathbf{W}_1 \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{Y}}_i \mathbf{W}_2 \quad (3.40)$$

Die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix kann somit aus dem reduzierten Unterraum von  $\mathbf{W}_1 \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{W}_2$  gewonnen werden, [12].

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{W}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{T} \quad (3.41)$$

Bei  $T$  handelt es sich um eine beliebige Ähnlichkeitstransformation. Durch eine SVD der Projektionsmatrix und weiteren Umformungen lässt sich das Problem auf das Lösen des überbestimmten Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{i+1} \\ X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \hat{Y}_i \quad (3.42)$$

für die Zeitpunkte  $i$  bis  $i + j - 1$  zurückführen.  $\hat{Y}_i$  und  $\hat{Y}_{i+1}$  werden dabei nur aus den Messdaten ermittelt. Da das Gleichungssystem überbestimmt ist, werden die Systemmatrizen  $A$  und  $B$  im Sinne von Ausgleichswerten ermittelt.

$A$  und  $B$  sind ausreichend, um die modalen Parameter zu ermitteln. Durch Darstellen des Zustandsraummodells im Frequenzbereich

$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}K + I \quad (3.43)$$

und Lösen eines Eigenwertproblems können die natürlichen Frequenzen und die Dämpfungen aus den Diagonalen der Matrix  $[\mu_i]$  gewonnen werden, [12].

$$H(z) = \Phi(Iz - [\mu_i])^{-1}\Psi + I \quad (3.44)$$

Die Schwingungsformen erhält man aus den Spalten von  $\Phi$ .

### 3.3.2 Unweighted Principal Components (UPC)

Bei der Unweighted Principal Component Methode handelt es sich um das Einfachste der drei Verfahren. Wie der Name schon sagt, wird die Projektionsmatrix vor der SVD nicht gewichtet. Die beiden Gewichtungsmatrizen stellen also eine Einheitsmatrix dar.

$$W_1 = I \quad (3.45)$$

$$W_2 = I \quad (3.46)$$

Für die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich somit folgende Gleichung, vergleiche [12].

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} T \quad (3.47)$$

Dieser Algorithmus stellt einen Kompromiss zwischen PC und CVA dar. Das Verfahren eignet sich gut zur Identifikation von Moden mit vergleichbarem Energieniveau. Es liefert bereits bei angemessen kleiner Dimension des Zustandsraums gute Ergebnisse. Diese Methode ist bei gleichmäßiger Erregung aller Schwingungsformen auf jedem Fall gegenüber dem CVA zu bevorzugen, [2].

### 3.3.3 Principal Components (PC)

Als Gewichtungsmatrizen für diese Methode dienen:

$$W_1 = I \quad (3.48)$$

$$W_2 = Y_p^T L_0^{1/2} Y_p \quad (3.49)$$

Wobei  $L_0$  als Kovarianz der Vergangenheitsmatrix  $Y_p$  bzw. der Zukunftsmatrix  $Y_f$ .

$$L_0 = E[Y_f Y_f^T] = E[Y_p Y_p^T] \quad (3.50)$$

Für die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich somit folgende Gleichung, vergleiche [12].

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{T} \quad (3.51)$$

Der Anwendungsbereich dieser Methode ist etwa wie bei dem UPC Algorithmus. Am besten geeignet ist sie zur Analyse von Daten mit energetisch vergleichbaren Moden. Das heißt, dass alle betrachteten Moden im SVD Diagramm durch etwa gleich große Energiespitzen vertreten sind. Für gleich starke Moden kann bereits bei geringer Zustandsraumdimension ein gutes Ergebnis erzielt werden. Die PC Methode ist bei gleichmäßiger Erregung aller Schwingungsformen auf jedem Fall gegenüber der CVA Methode zu bevorzugen, [12]. Dies wäre zum Beispiel bei einer Impulsanregung der Fall.

### 3.3.4 Canonical Variate Analysis (CVA)

Als Gewichtungsmatrizen für diese Methode dienen:

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{E}[\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_f^T]^{-1/2} = \mathbf{E}[\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T]^{-1/2} = \mathbf{L}_0^{-1/2} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{I} \quad (3.53)$$

Für die erweiterte Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich somit folgende Gleichung, vergleiche [12].

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{L}_0^{1/2} \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{T} \quad (3.54)$$

Diese Methode hat das größte Potential alle Moden zu identifizieren. Es ist vor allem zur Auswertung von Daten mit Moden, die stark unterschiedliche Energieniveaus aufweisen, geeignet. Ist bekannt, dass manche Moden der Messung im Vergleich zu anderen nur schwach erregt werden, so ist sicherlich dieses Verfahren zu bevorzugen. Dafür wird jedoch eine höhere Zustandsraumdimension, als bei den beiden anderen Methoden, erforderlich. Dies führt zu einem höheren Rechenaufwand, da die Dimension der zu bestimmenden Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zunimmt. Durch eine höhere Zustandsraumdimension werden mehr Moden identifiziert, welche wiederum im Bezug auf ihren Ursprung (Struktur-, Betriebs- oder Störungsmoden) identifiziert werden müssen.

### 3.4 Signal Processing

Vor der Analyse der Messdaten mittels FDD oder SSI kann, bzw. muss noch eine gewisse Signalbearbeitung durchgeführt werden. Die wichtigsten Signalbearbeitungsschritte, die in *ARTEMIS* ermöglicht werden, sind im folgenden Teil kurz beschrieben.

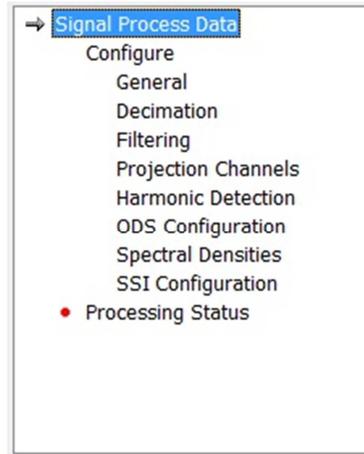


Abbildung 3.12: Signal Processing von *ARTEMIS*

In den generellen Einstellungen können Konfigurationen der Signalbearbeitung abgespeichert und später wieder geladen werden.

#### 3.4.1 Dezimierung

Standard mäßig wird mit einer höheren Abtastrate aufgezeichnet, als für die Auswertung erforderlich ist. Durch die Dezimierung des Signals wird in den Frequenzbereich gezoomt. Wurde zum Beispiel eine Messung mit 100 Hz aufgezeichnet, so ergibt sich eine Nyquist Frequenz von 50 Hz. Liegt der interessante Bereich jedoch zwischen 0 und 10 Hz, so sollte das Signal auf ein Fünftel reduziert werden. Dies geschieht durch eine Dezimierung der Ordnung fünf. Die Dezimierung in den relevanten Frequenzbereich ist sowohl für Auswertungen im Frequenzbereich als auch für Auswertungen im Zeitbereich sinnvoll.

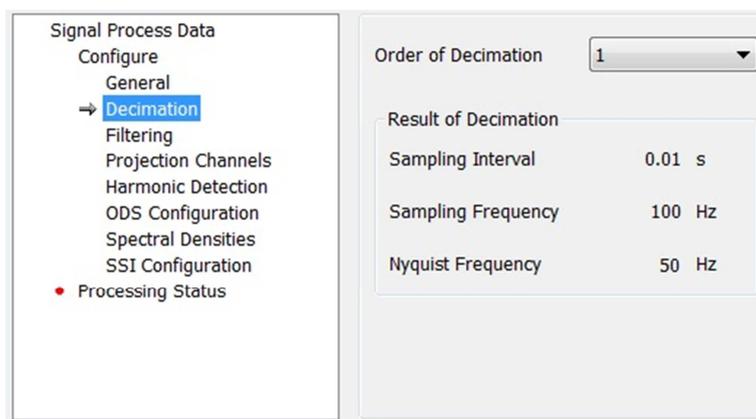


Abbildung 3.13: Decimation; Auszug aus *ARTEMIS*

Bei der Dezimierung wird, zwecks Vermeidung von Alias Effekten, automatisch zuerst eine Tiefpassfilterung im gewünschten Frequenzbereich durchgeführt. Anschließend wird das Signal dezimiert. Das heißt, bei einer Dezimierung der fünften Ordnung wird nur mehr jeder fünfte Wert

behalten. Wegen der Anti-Alias Filterung sollten nur die Ergebnisse der unteren 80%, der neuen Nyquist Frequenz, verwendet werden. Als Filter dient ein 8. Ordnung Chebyshev Tiefpassfilter, [12].

### 3.4.2 Filtern

Die Filterung wird benutzt, um das Signal im betrachteten Frequenzbereich zu bearbeiten. Zur Auswahl stehen Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass- und Bandstopfilter.

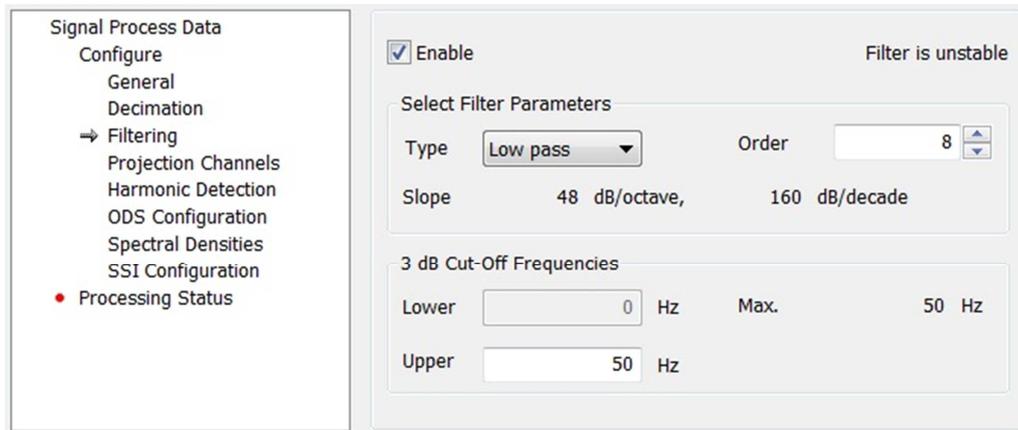


Abbildung 3.14: Filtering; Auszug aus ARTEMIS

Ein Hochpassfilter wird zum Beispiel verwendet, um die Auswirkungen von Nullpunktverschiebungen zu vermeiden. Ein Bandpassfilter führt zur Verringerung der erforderlichen modalen Ordnung der Auswertung. Verwendet werden Butterworth Filter Typen. Die Ordnung der Filter ist zwischen 1 und 50 wählbar.

Die Ordnung der Filterung ändert die Neigung im Bode Diagramm. Je höher die Ordnung desto schärfer ist der Abschnitt des Frequenzspektrums. Mit zunehmender Ordnung steigt auch die Gefahr, dass ein Filter instabil wird. An der Cut-Off-Frequenz wird die Energie um 3 dB verringert. Bei einem Filter 1. Ordnung nimmt das Energieniveau um 6 dB pro Oktave bzw. um 20 dB pro Dekade ab, [13].

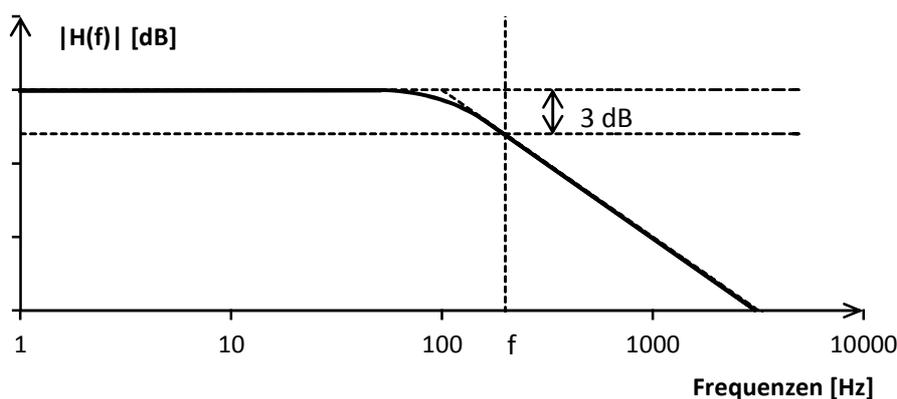
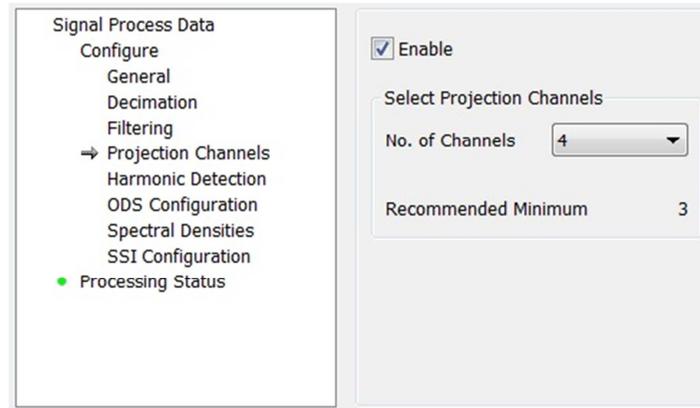


Abbildung 3.15: Bode Diagramm Tiefpassfilter

### 3.4.3 Projektionskanäle

Geht man davon aus, dass die Messwertaufnehmer nicht auf einem Schwingungsknoten positioniert sind, so enthält jedes Messsignal dieselben Informationen über das System. Um diese Redundanz zu reduzieren, werden Projektionskanäle eingeführt. Dies sind speziell ausgewählte Sensoren mit besonders guten Messwerten. Es werden nur die Signale dieser Sensoren für die weitere Analyse der

modalen Parameter verwendet, was eine schnellere und einfachere Auswertung ermöglicht. Zur Bestimmung der Schwingungsform werden jedoch die vorher vernachlässigten Signalreihen wieder herangezogen. Die Wahl der Projektionskanäle wird automatisch durchgeführt. Die Anzahl dieser kann jedoch vom Nutzer bestimmt werden. Es müssen zumindest drei Kanäle gewählt werden. Die maximale Anzahl richtet sich nach der Anzahl der vorhandenen Eingänge. Welche Anzahl die besten Ergebnisse liefert, kann so generell nicht gesagt werden. Die optimale Anzahl hängt vom gemessenen System, der Anzahl der Messpunkte und von der Qualität der einzelnen Messpunkte ab.



**Abbildung 3.16: Projection Channels; Auszug aus ARTEMIS**

## 4 Messeinrichtung

### 4.1 Sensoren

Es gibt mehrere Arten von Messsensoren die für dynamische Messungen geeignet sind, wie z.B.: Beschleunigungsaufnehmer, Wegaufnehmer oder aber auch Dehnmessstreifen. Am häufigsten zum Einsatz kommen Wegaufnehmer, da sie als Ausgabe gleich ein Weg-Zeit Diagramm liefern, oder Beschleunigungsaufnehmer, die ein Beschleunigung Zeit-Diagramm ausgeben, was durch doppelte Integration wieder in eine Weg-Zeit Messreihe umgewandelt werden kann. Beschleunigungsaufnehmer haben den weiteren Vorteil, dass sie keinen starren Referenzpunkt benötigen, was gerade bei Brückenobjekten etwas schwierig ist.

Für die in dieser Arbeit ausgewerteten Messdaten, wurden zur Erhebung ausschließlich Beschleunigungsaufnehmer verwendet.

### 4.2 Datenerfassung

Da sich im Regelfall die wesentlichen Schwingungsformen einer Brücke in einem Frequenzbereich von 0 bis 50Hz befinden, ist eine Schwingungsanalyse in diesem Frequenzbereich sinnvoll. Da für eine Frequenzanalyse eine Abtastrate von dem Doppeltem der Nyquist Frequenz benötigt wird, ist für eine Untersuchung mit einer Nyquist Frequenz von 50 Hz eine Abtastfrequenz von 100 Hz ausreichend. Ein besonderes Augenmerk ist Durchlässen mit geringen Spannweiten zu schenken, da die ersten Biegeeigenfrequenzen sogar über 50 Hz liegen können. Es bietet sich auch an, sicherheitshalber eine höhere Abtastrate zu wählen und später, falls erforderlich, das Signal zu dezimieren, [7].

Für die erforderliche Messdauer bzw. die Anzahl der erforderlichen Messpunkte gilt überschlagsmäßig, dass mindestens 1000 Schwingungen der kleinsten erwarteten Eigenfrequenz erfasst werden sollten. Das würde bei einer ersten Eigenschwingungsform bei 5 Hz eine Messungsdauer von mindestens 200 Sekunden bedeuten, vergleiche [12]. Generell kann man jedoch sagen, umso länger die Messung, umso besser das Ergebnis. Für Brücken empfiehlt sich für ambiente Messungen eine Messdauer von 20 min pro Messlayout.

### 4.3 Filterung

Filterungen können auf zweierlei Weisen realisiert werden. Zum einen im Rahmen der Elektronik, durch eine bestimmte Anordnung von Widerständen, Spulen und Kondensatoren. Zum anderen kann eine Filterung auch im Zuge der digitalen Signalanalyse durchgeführt werden. Dabei können verschiedene mathematische Algorithmen zur Anwendung kommen.

Um beim Abtasten mit einer geringen Abtastrate nicht niedrige Frequenzen vorzutauschen, ist es erforderlich das Messsignal vor der Durchführung einer DFT zu filtern und alle Frequenzen oberhalb der Nyquistfrequenz zu unterdrücken. Dieser Filter wird auch Anti-Alias-Filter genannt. Diese Filterung wird standardmäßig vor der Signalaufzeichnung, etwa im Zuge der Signalverstärkung durchgeführt.

Zur Aufbereitung der Daten vor der Analyse sind jedoch noch andere Formen der Filterung möglich. Häufig verwendet werden Hochpass oder Tiefpass Filter. Dabei werden entweder die Frequenzen über bzw. unter einer bestimmten Frequenz raus gefiltert. Eine Kombination aus beiden ist der Bandpass Filter, der nur die Frequenzen innerhalb einer gewissen Bandbreite im Datensatz belässt

bzw. rausfiltert. Verwendet werden diese Filterungen um Störfrequenzen, etwa resultierend aus den Oberschwingungen des verwendeten Stromnetzes oder aus anderen periodisch wiederkehrenden Störeinflüssen, zu eliminieren.

Zur Bestimmung der Dämpfung werden die Daten durch einen Bandpass Filter, um die betrachtete Energiespitze herum, herausgefiltert. Es sollte dabei darauf geachtet werden, dass nur jene Bandbreite verwendet wird, in der der jeweilige Mode auch wirklich dominant ist.

Aus den aufgezeichneten Daten wird mit Hilfe der FFT ein Amplitudenspektrum (zum Beispiel ein Beschleunigungsspektrum) erstellt. Anschließend wird anhand dieses Spektrums eine Bandbreite zu näherer Betrachtung ausgewählt. Durch eine inverse FFT werden die Schwingungen im betrachteten Frequenzbereich wieder in den Zeitbereich rücktransformiert. Das somit erhaltene Signal kann nun durch Analysemethoden im Zeitbereich ausgewertet werden.

#### 4.4 Output-Only Daten

Für die Auswertung mittels Output-Only Methoden werden nur die Reaktionen des Systems benötigt. Es wird also nicht, wie bei den traditionellen dynamischen Analyse-Methoden, die Systemanregung in Form der einwirkenden Kräfte und die Systemantwort benötigt, was messtechnisch ein großer Vorteil ist. Die Systemantwort kann relativ leicht, durch Setzen bestimmter Messpunkte auf der untersuchten Struktur, ermittelt werden. Bei der Systemanregung ist dies jedoch nicht mehr so einfach. Gerade im Bauingenieurwesen, bei der Untersuchung von größeren Objekten, wie Brücken oder Gebäuden ist es fast unmöglich die Anregung zu erfassen, da diese durch ambiente Einflüsse wie Wind oder Verkehrslasten in Schwingung versetzt werden.

#### 4.5 Messlayout

Am häufigsten zur Verwendung kommen Beschleunigungsaufnehmer, welche am Tragwerk nach einem vorher bestimmten Raster angeordnet werden. Bei der Wahl der Messpunkte, ist vor allem darauf Rücksicht zu nehmen, dass Messungen, die in einem Knoten einer Schwingungsform aufgenommen werden, keine Aussage über diejenige Schwingungsform zulassen. Es müssen jedenfalls ausreichend Messpunkte gesetzt werden, um die wichtigsten Schwingungsformen eindeutig identifizieren zu können und die maximale Beschleunigung aufzunehmen.

Bei zu wenigen Messpunkten, wie z.B. bei einem Einfeldträger mit nur einem Sensor in Balkenmitte, werden zum einen die antimetrischen Schwingungsformen nicht erfasst (siehe Abbildung 4.1), da dabei der Mittelpunkt einen Schwingungsknoten darstellt. Andererseits kann anhand der Schwingungsform nicht zwischen der ersten und der dritten Eigenform unterschieden werden, da diese für den Fall von nur einem Messpunkt gleich aussehen.

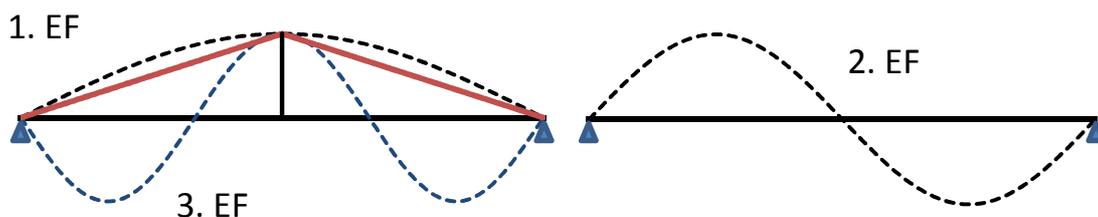


Abbildung 4.1: Erste und dritte Schwingungsform eines Balkens; zweite Schwingungsform eines Balkens

## 4.6 Verwendetes Messsystem

In der folgenden Abbildung ist ein Standard-Messaufbau dargestellt. Dieser Messaufbau wurde für die Messungen, die im Zuge dieser Arbeit ausgewertet wurden, verwendet.

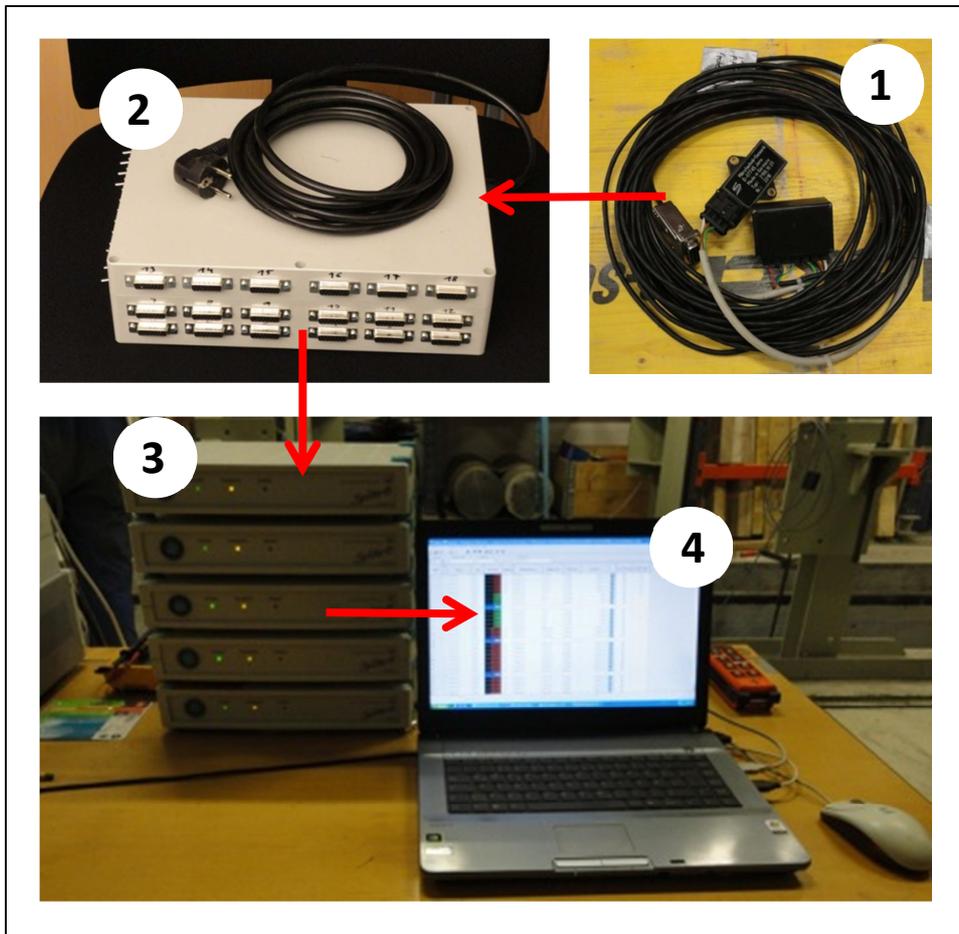


Abbildung 4.2: Messaufbau

1. Beschleunigungsgeber:  $\pm 2g$ ; Hersteller MIKROTECHNIK + SENSORIK GmbH; Type BG2166.10; Hierbei handelt es sich um einen kapazitiver Beschleunigungssensor. Das Ausgangssignal ist eine der Beschleunigung proportionale Spannung.
2. Signalverstärker: Marke Eigenbau (Dipl.-Ing. Herbert PARDATSCHER, TU Wien); Das Gerät führt einen Nullabgleich durch und kann wahlweise (jedes Signal einzeln wählbar) die Eingangsspannung ver Hundertfacht an den Ausgang weiterleiten.
3. Spider 8: Besitzt 8 Eingänge; Können auch in Serie geschaltet werden. Wandelt das analoge Signal in ein digitales um und leitet sie gesammelt an den PC weiter.
4. PC und Einlese Software: CATMAN 5.0 stellt die Einlese-Software dar, mit der die Daten zur Weiterverarbeitung abgespeichert werden.

## 5 Vorversuche

Vor der Ausführung von Versuchen an bestehenden Brückentragwerken wurden einige Untersuchungen an kleineren Tragstrukturen im Labor durchgeführt. Zum einen, um aus möglichst guten Daten aus Laborversuchen eine Referenzanalyse zu erzeugen, welche die Möglichkeiten der modalen Identifikation unter optimalen Bedingungen aufzeigt und zum anderen, um im Vorfeld der tatsächlichen Brückentests unterschiedliche Auswertmethoden untereinander zu vergleichen. Des Weiteren sollten bereits Erkenntnisse über die Auswirkung unterschiedlicher Anregungsarten auf die Qualität der Ergebnisse gewonnen werden.

### 5.1 Rahmen

Um Messungen unter optimalen Bedingungen zu erhalten, wurde ein Modell eines Tragwerkrahmens im Labor getestet. Ziel dieser Versuche war es, zum einen ein ideales Messsignal zu erhalten und somit für die Auswertung mit *ARTEMIS* die bestmögliche Grundlage für optimale Ergebnisse zu erhalten. Wodurch im Weiteren die unterschiedlichen Auswertverfahren untereinander quantifiziert werden können. Zum anderen sollten erste Erkenntnisse über die Aussagekraft von Auswertungen aus rein ambienten Messungen gewonnen werden.

#### 5.1.1 Objektbeschreibung

Bei dem untersuchten Objekt handelt es sich um einen viergeschossigen Rahmen, der sich am Institut für Hochbau und Technologie, Forschungsbereich für Baumechanik und Baudynamik an der TU Wien befindet (Abbildung 5.1). Die Riegel aus Aluminium sind auf Stahl Stützen aufgeschraubt. Der Rahmen weist eine Breite von etwas mehr als 35 cm und eine Gesamthöhe von gut 70 cm auf. Der Versuch wird als ebenes Schwingungsproblem betrachtet. Da die Riegel eine wesentlich höhere Steifigkeit als die Stützen aufweisen, werden keine Knotenpunktverdrehungen erwartet. Es kann also von einem 4-Freiheitsgrad System ausgegangen werden. Durch die Ausführung der Stützen aus Stahl wird ein sehr geringes Dämpfungsmaß erwartet.

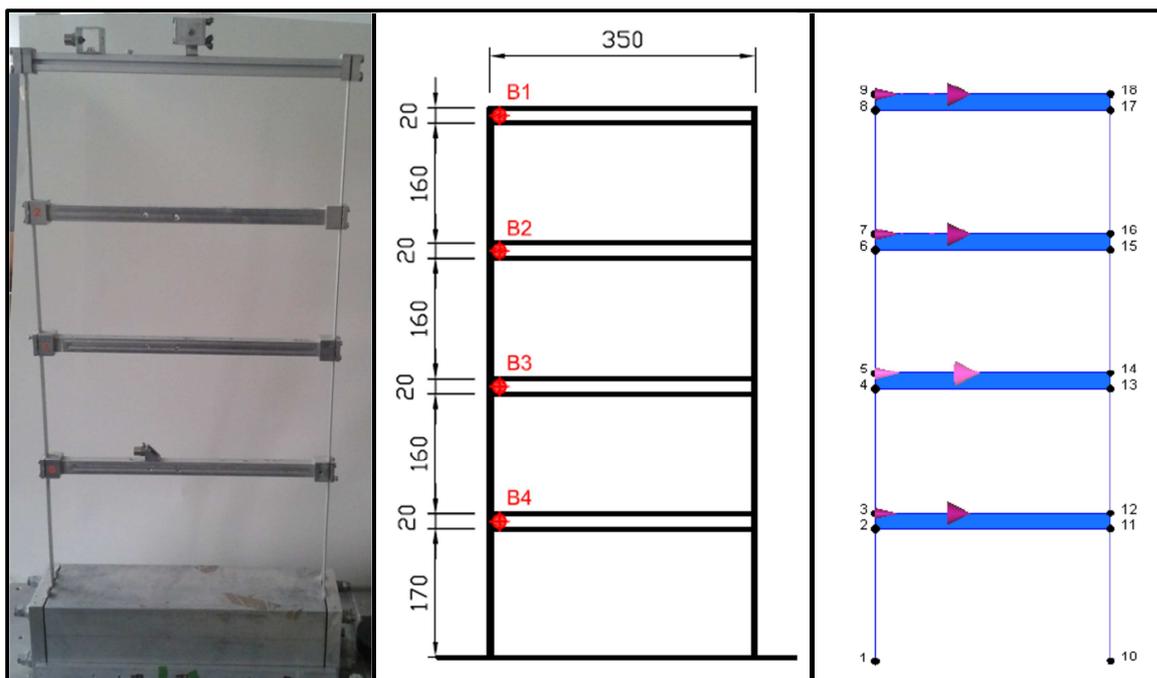


Abbildung 5.1: Versuchsrahmen: Foto; Plandarstellung; *ARTEMIS* Model

### 5.1.2 Messungen

Dies ist der einzige Versuch der im Zuge dieser Arbeit ausgewertet wird und nicht mit dem oben beschriebenen Messsystem aufgezeichnet wurde. Als Sensoren wurden piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer verwendet. Es wurde in diesem Fall auf die messtechnische Ausrüstung des Forschungsbereichs für Baumechanik und Baudynamik, die speziell für die Messung von Strukturen dieser Größenordnung ausgelegt ist, zurückgegriffen. Die Signale wurden über einen Verstärker mit integriertem Anti-Alias-Filter an einen Analog-Digital Wandler übergeben. Von diesem Wandler wurden die Daten direkt an einen Computer übergeben und mittels der Software *MatLab* eingelesen und gespeichert. Die abgespeicherten Daten wurden anschließend mittels *ARTEMIS* ausgewertet.

Es wurden zwei unterschiedliche Anregungsarten untersucht. Eine Impulsanregung und eine ambiente Anregung. Als Abtastrate wurden 200 Hz gewählt und der Anti-Alias-Filter wurde auf 100 Hz eingestellt.

### 5.1.3 Auswertung

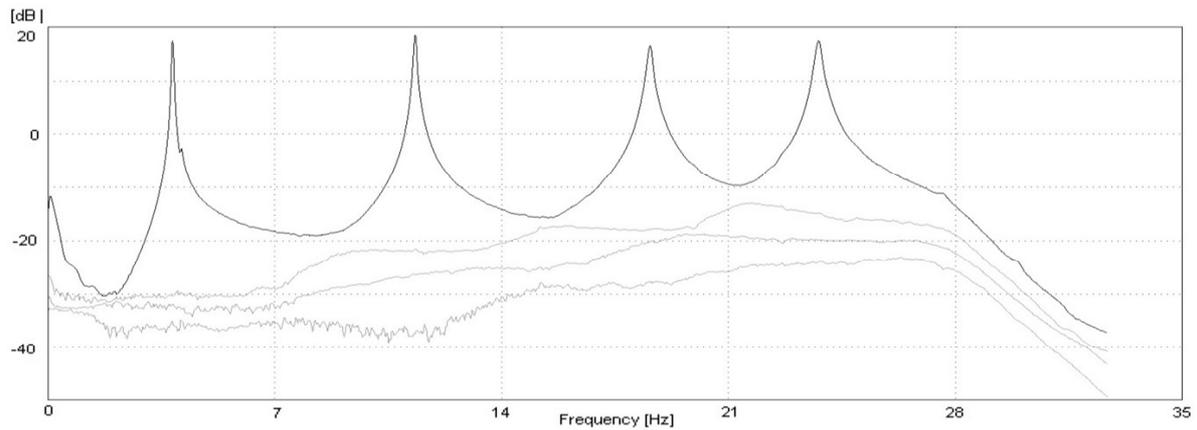
Zum Zweck der Vergleichbarkeit werden eine ambiente Messung und die Messung einer Impulsanregung ausgewertet. Die Auswertung wird mittels FDD, EFDD, CFDD, UPC, PC und CVA durchgeführt.

**Impulsanregung:** Das Ergebnis dieser Auswertung sollte ein Vergleich der unterschiedlichen Auswertmethoden bei Verwendung von optimalen Messdaten sein. Als Grundlage diene die Messung einer Serie von Impulsanregungen. Es wurde dabei abwechselnd an allen vier Messpunkten angeregt und gewartet bis die Schwingung abgeklungen ist. Die Messdauer betrug 5 Minuten. Geht man von einer ersten Eigenkreisfrequenz von 3,8 Hz aus, so ergibt sich die geforderte Mindestmessdauer um 1000 Schwingungen zu erfassen, zu 4,4 Minuten. Diese Anforderung wird also erfüllt. Aufgezeichnet wurde mit 200 Hz, wodurch sich eine Nyquistfrequenz von 100 Hz ergibt. Die Signale wurden um die Ordnung 3 auf 33,3 Hz dezimiert (siehe Kapitel 3.4.1). In Abbildung 5.2 ist das resultierende SVD Diagramm ersichtlich.

**Ambiente Anregung:** Die Auswertung sollte eine erste Auskunft darüber geben, wie aussagekräftig die Analysen von ambienten Messungen, im Bezug auf die Dämpfungs- und Eigenfrequenzermittlung, sind. Zur Auswertung herangezogen wurde eine dreiminütige ambiente Messung des Rahmens. Da die erste Eigenfrequenz gut in den vorliegenden Daten repräsentiert ist, werden diese Messdaten zur Auswertung herangezogen. Aufgezeichnet wurde mit 200 Hz, wodurch sich eine Nyquistfrequenz von 100 Hz ergibt. Die Signale wurden um die Ordnung 3 dezimiert, dadurch erhält man eine neue Nyquistfrequenz von 33,3 Hz. In Abbildung 5.4 ist das resultierende SVD Diagramm ersichtlich.

Auf den folgenden beiden Seiten befindet sich eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Datenanalyse. In Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2 werden die ermittelten Frequenzen und Dämpfungen (Lehr'sches Dämpfungsmaß = Prozent der kritischen Dämpfung) inklusive ihrer Standardabweichungen dargestellt. Die Werte sind nach der Größe der zugehörigen Frequenzen sortiert und gekennzeichnet durch welches Verfahren sie ermittelt wurden. Da sechs unterschiedliche Methoden angewandt wurden, stehen die ersten sechs Moden für die erste Eigenfrequenz, sowie die nächsten sechs für die zweite Eigenfrequenz und so weiter.

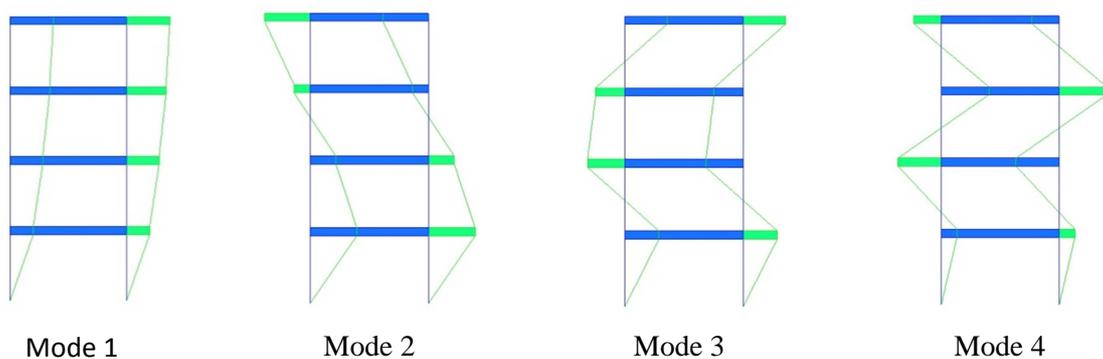
**Ergebnisse Impulsanregung Rahmen**



**Abbildung 5.2: SVD Diagramm Rahmen Impulsanregung (ARTEMIS)**

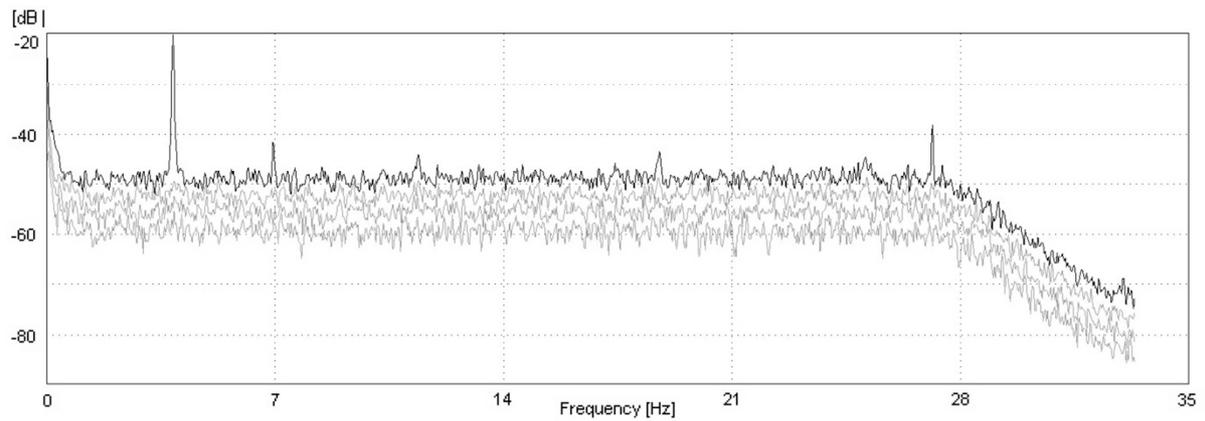
	Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
M O D E 1	FDD Mode 1	3.841	0	0	0
	SSI-CVA Mode 2	3.853	0.0003972	0.3648	0.02117
	SSI-PC Mode 3	3.853	0.000004332	0.3788	0.0006499
	CFDD Mode 4	3.854	0	0.5312	0
	EFDD Mode 5	3.854	0	0.6098	0
	SSI-UPC Mode 6	3.856	0.00006315	0.4246	0.009724
M O D E 2	FDD Mode 7	11.33	0	0	0
	SSI-CVA Mode 8	11.33	0.0008626	0.3247	0.007202
	SSI-PC Mode 9	11.33	0.00005589	0.3264	0.0002138
	EFDD Mode 10	11.33	0	0.3475	0
	CFDD Mode 11	11.34	0	0.3432	0
	SSI-UPC Mode 12	11.34	0.0001462	0.3329	0.001827
M O D E 3	SSI-PC Mode 13	18.57	0.000007158	0.4639	0.0001895
	EFDD Mode 14	18.57	0	0.4449	0
	SSI-CVA Mode 15	18.57	0.001805	0.4595	0.01577
	SSI-UPC Mode 16	18.58	0.0003669	0.4755	0.003094
	CFDD Mode 17	18.58	0	0.4529	0
	FDD Mode 18	18.59	0	0	0
M O D E 4	FDD Mode 19	23.76	0	0	0
	EFDD Mode 20	23.77	0	0.4345	0
	SSI-CVA Mode 21	23.77	0.00599	0.4238	0.04512
	SSI-PC Mode 22	23.77	0.00004056	0.4345	0.0002722
	CFDD Mode 23	23.78	0	0.4163	0
	SSI-UPC Mode 24	23.78	0.001537	0.435	0.004853

**Tabelle 5.1: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung des Rahmens (ARTEMIS).**



**Abbildung 5.3: Schwingungsformen - Rahmen Impulsanregung (ARTEMIS)**

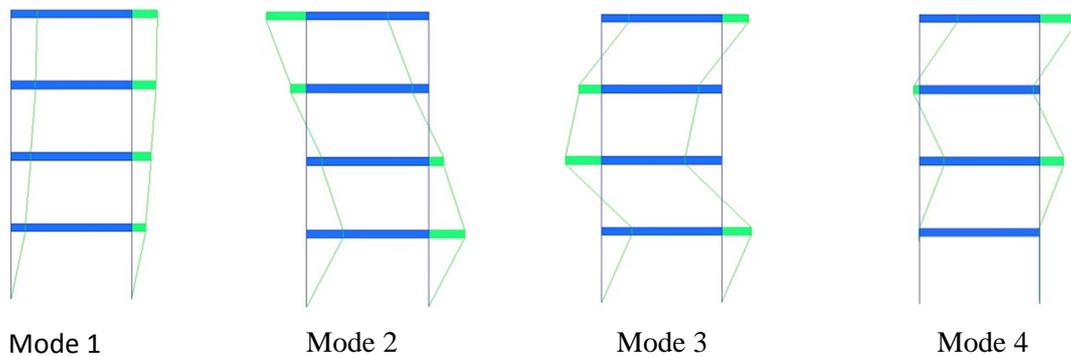
**Ergebnisse ambiente Anregung Rahmen**



**Abbildung 5.4: SVD Diagramm Rahmen ambiente Anregung (ARTEMIS)**

	Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
M O D E 1	FDD Mode 1	3.874	0	0	0
	EFDD Mode 2	3.874	0	0.4272	0
	SSI-CVA Mode 3	3.875	0.0009481	0.1956	0.1619
	SSI-PC Mode 4	3.875	0.0003255	0.1648	0.004263
	SSI-UPC Mode 5	3.875	0.0005401	0.2339	0.04003
	CFDD Mode 6	3.88	0	0.6579	0
M O D E 2	SSI-UPC Mode 7	11.3	0.007333	3.498	0.2413
	SSI-CVA Mode 8	11.34	0.07401	1.797	0.3991
	CFDD Mode 9	11.38	0	0.09192	0
	EFDD Mode 10	11.39	0	0.239	0
	FDD Mode 11	11.39	0	0	0
	SSI-PC Mode 12	11.47	0.003596	5.755	0.1548
M O D E 3	SSI-CVA Mode 13	18.7	0.002872	0.8073	0.01209
	CFDD Mode 14	18.77	0	0.108	0
	EFDD Mode 15	18.78	0	0.2164	0
	FDD Mode 16	18.78	0	0	0
	SSI-UPC Mode 17	18.91	0.01561	2.207	0.152
	SSI-PC Mode 18	18.97	0.00741	2.089	0.1946
M O D E 4	CFDD Mode 19	25.08	0	0.04162	0
	EFDD Mode 20	25.09	0	0.1023	0
	FDD Mode 21	25.1	0	0	0
	SSI-PC Mode 22	26.99	0.001677	1.596	0.04729
	SSI-CVA Mode 23	27.16	0.02584	0.8562	0.2157
	SSI-UPC Mode 24	27.23	0.005254	2.315	0.05245

**Tabelle 5.2: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung des Rahmens (ARTEMIS).**



**Abbildung 5.5: Schwingungsformen - Rahmen ambiente Anregung (ARTEMIS)**

#### 5.1.4 Erkenntnisse

**Impulsanregung:** Das SVD Diagramm der Impulsanregung zeigt vier eindeutig ausgeprägte Schwingungsformen, die eine gut ausgeprägte SDOF Glockenkurve aufweisen. Aus Tabelle 5.1 ist ersichtlich, dass die Ergebnisse für die Eigenfrequenzen und die Dämpfungen quasi unabhängig von der Wahl der Analyseverfahren sind. Auch die Standardabweichungen der einzelnen Werte sind nahezu Null, das stellt wiederum ein Indiz für die gute Qualität der Daten dar. Lediglich das Dämpfungsmaß der ersten Eigenfrequenz weicht bei der EFDD und der CFDD Methode etwas von den Werten der SSI Analysen, die die genaueren Ergebnisse liefern sollten, ab. Zu erklären ist dies durch die Tatsache, dass bei näherer Betrachtung die SDOF Glocke der ersten Eigenform einen kleinen Knick aufweist. Da die FDD Methoden die SVD Daten zur Bestimmung der Dämpfung verwenden, kann gerade bei geringem Dämpfungsmaß eine kleine Störung bereits eine größere Auswirkung auf das Ergebnis haben. Bei guten Messdaten und eindeutig erkennbaren Eigenformen ist also die Wahl der Auswertemethode nebensächlich. Da es sich hierbei um eine sehr weiche Konstruktion mit geringer Dämpfung handelt und die Erregung durch einen Impulshammer, bezogen auf die Masse der Konstruktion, einen relativ großen Energieeintrag darstellt, kann davon ausgegangen werden, dass die ermittelten Ergebnisse die reale Struktur gut abbilden.

**Ambiente Anregung:** Im SVD Diagramm der ambienten Anregung ist eindeutig erkennbar, dass die SVD Daten kaum Informationen über das Schwingungsverhalten enthalten. Außer im Bereich der ersten Eigenform ist im gesamten Frequenzspektrum kein eindeutiger Peak erkennbar. Man kann also bereits davon ausgehen, dass mit den FDD Methoden kaum vernünftige Ergebnisse erzielbar sind. Vergleichen wir zuerst die ermittelten Frequenzen, die in Tabelle 5.2 dargestellt sind. Die Werte für die ersten drei Eigenformen sind für die unterschiedlichen Auswertemethoden nahezu gleich. Die Frequenzen weichen auch nur bis zu einem Prozent von den Werten, die aus der Impulsanregung ermittelt wurden, ab. Bei der vierten Eigenform weisen die ermittelten Frequenzen bereits Abweichungen untereinander von bis zu 9 Prozent auf. Verglichen mit den Ergebnissen der Impulsanregung wird ersichtlich, dass man bis zu 15 Prozent über den tatsächlichen Frequenzen liegt. Durch Betrachten der besagten vierten Schwingungsform wird ersichtlich, dass es sich hierbei nicht exakt um die vierte Eigenform handelt. Bezogen auf die Qualität des SVD Diagramms sind diese Ergebnisse dennoch mehr als man erwarten konnte. Man muss aber auch sagen, dass bei den FDD Methoden alle Frequenzen über der ersten Eigenform rein durch Betrachtung der Schwingungsformen im Bereich der vermuteten Frequenzen ermittelt wurden. Sind die Schwingungsformen nicht bekannt, bzw. ist nicht klar in welchem Frequenzbereich sich die Eigenfrequenzen befinden, stellen nur mehr die SSI Verfahren eine sinnvolle Auswertemethode dar. Die Dämpfungswerte liegen bei der ersten Eigenfrequenz, unabhängig von dem Analyseverfahren, noch in der Größenordnung der durch die Impulsanregung ermittelten Werte. Bei allen anderen Frequenzen liegen die ermittelten Dämpfungen teils um das Fünf- bis Zehnfache unter oder über den tatsächlichen Werten.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass es bei guter Qualität der Signale, die im SVD Diagramm sichtbar wird, die Daten mit einer beliebigen FDD oder SSI Methode ausgewertet werden können. Bei schlechten Daten ist die Wahl einer SSI Methode zu empfehlen. Die FDD Verfahren eignen sich auch bei nicht eindeutig erkennbaren Resonanzbereichen um die Schwingungsform bei einer gewünschten Frequenz zu ermitteln. Das Dämpfungsmaß kann, zumindest bei sehr gering gedämpften Strukturen, aus ambienten Messungen nicht zuverlässig ermittelt werden.

## 5.2 Versuchsbrücke Labor

Es handelt sich hierbei um eine im Labor aufgebaute Versuchsbrücke. Die Brücke wurde im Zuge der Dissertationen von Herrn Tobias Christoph Mähr und Herrn Johannes Kirchhofer errichtet und dynamisch getestet. Da die Versuchsbrücke bereits mehrmals untersucht wurde und somit ihre dynamischen Eigenschaften bereits bekannt sind, sollte die Auswertung der ambienten Daten einen guten Anhaltspunkt für die Genauigkeit ambientser Untersuchungen geben. Des Weiteren sollte die praktische Anwendbarkeit von *ARTEMIS* überprüft werden.

### 5.2.1 Objektbeschreibung

Statisch betrachtet wirkt das Tragwerk als Einfeldträger. Die Brücke besitzt eine Stützweite von 10 Meter und weist eine Breite von knapp 3 Meter auf. Das Haupttragwerk bildet ein Trägerrost aus aus zwei Längsträgern und fünf Querträgern (alle HEA 340). Anstelle des Tragblechs und zur Einfassung des Schotterbetts werden Schalplatten verwendet. Zwischen den Schalplatten und dem Trägerrost befindet sich ein Raster aus Kanthölzer. Der Aufbau des Schotterbetts und die Verlegung der Gleise entspricht dem Standardaufbau für Eisenbahnbrücken (siehe Abbildung 5.7). Zur Frequenzanregung der Brücke wurden für die Befestigung der Unwucht-Erreger drei Stahlrahmen an die Hauptträger angeschweißt. Um das Abheben der Auflager zu verhindern wurde das Tragwerk an den vier Eckpunkten mit Gewindestangen Durchmesser 16 mm im Fundamentkörper verankert. Es handelt sich hierbei, verglichen mit wirklichen Eisenbahnbrücken, um eine sehr leichte und weiche Konstruktion. Das Haupttragwerk besitzt eine sehr geringe Dämpfung. Es wird somit davon ausgegangen, dass die Dämpfungseigenschaften hauptsächlich auf das Schotterbett zurückzuführen sind. Eine nähere Beschreibung der Versuchsbrücke und der Durchführung der Impuls- und der Frequenzanregung findet sich in der Dissertation von Herrn Mähr [14].



Abbildung 5.6: Bild der Versuchsbrücke [14]

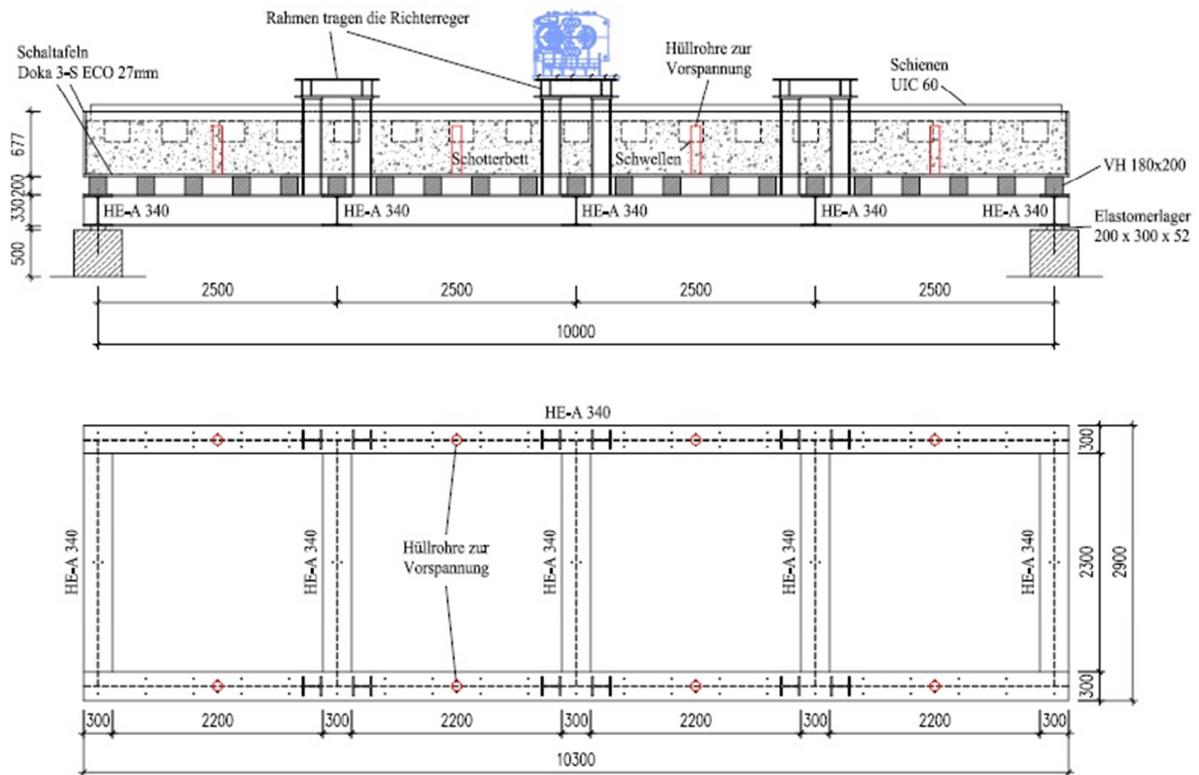


Abbildung 5.7: Ansicht und Grundriss der Versuchsbrücke [14]

### 5.2.2 Messungen

Zur Auswertung wurden die Signale von 13 Beschleunigungsaufnehmern herangezogen. Sämtliche Beschleunigungsaufnehmer weisen eine vertikale Messrichtung auf. Die Anordnung dieser Aufnehmer ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

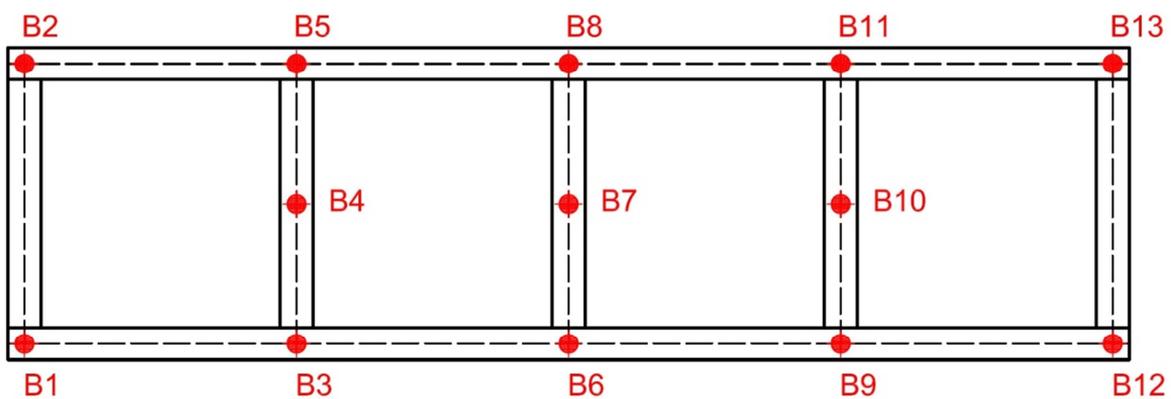


Abbildung 5.8: Messlayout Versuchsbrücke

Die Beschreibung der Messkette befindet sich in Kapitel 4.6. Es wurde eine Abtastrate von 600 Hz verwendet, wodurch eine Anti-Alias Filterung bei 300 Hz vorgenommen wurde. Es werden Messungen einer Impulsanregung [14], einer Frequenzanregung [14] und einer ambiente Anregung zur näheren Untersuchung herangezogen. Für die Auswertung der Impuls- und Frequenzanregung werden die Daten, die im Zuge der Dissertation von Herrn Mähr [14] (Messungen 2008) ermittelt wurden, verwendet. Für die ambiente Anregung wurden Messungen von Herrn Kirchhofer aus dem Jahr 2011 herangezogen.

### 5.2.3 Auswertung

Zur Auswertung der Messungen wurden die SSI Methoden von *ARTeMIS* verwendet, da diese Verfahren, wie in Kapitel 5.1 gezeigt, eine sichere Möglichkeit zur Ermittlung der dynamischen Parameter darstellen. Im Zuge der Auswertung hat sich gezeigt, dass die Ergebnisse der SSI-UPC Methode am besten mit den Ergebnissen aus [14] übereinstimmen. Deshalb werden in der folgenden Darstellung der Ergebnisse nur mehr die Resultate dieses Verfahrens angeführt.

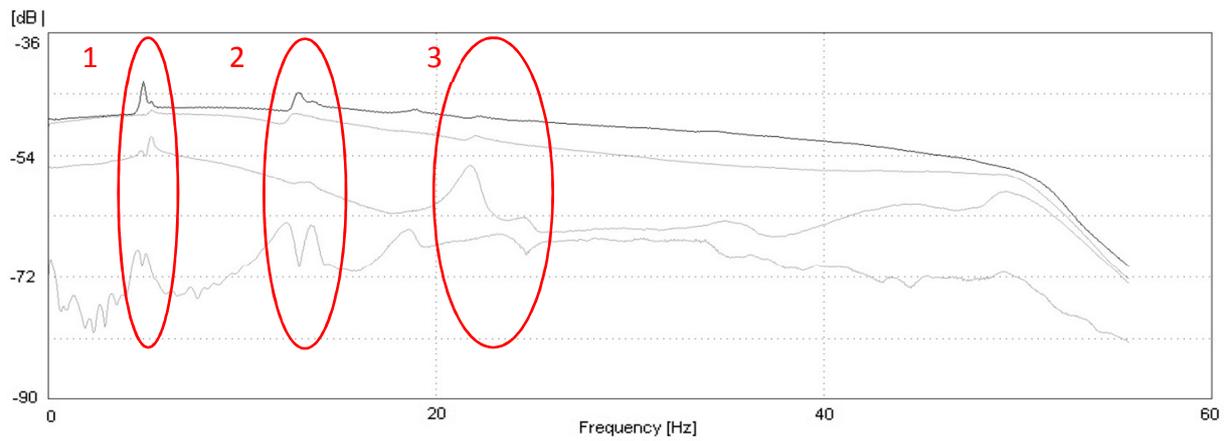
**Impulsanregung:** Es wird eine Serie von Impulsanregungen zur Auswertung herangezogen. Als Punkte für die Impulsanregung dienten dabei die Stellen an denen die Messsensoren angeordnet waren. Die Anregung erfolgte durch einen 5 kg Hammer. Die Gesamtmessdauer beträgt drei Minuten. Da die Messungen mit einer Abtastrate von 600 Hz durchgeführt wurden, ergibt sich eine Nyquistfrequenz von 300 Hz. Durch eine Dezimierung um die Ordnung 5 (siehe Kapitel 3.4.1) wird eine neue Nyquistfrequenz von 60 Hz erzielt. Da bei dieser Art der Anregung das gesamte Frequenzspektrum erregt wird, sollte dieser Versuch die besten Resultate liefern.

**Frequenzanregung:** In [14] wurde der Amplitudenfrequenzgang von 1-8,5 Hz experimentell bestimmt. Es wurde dabei das System in einer bestimmten Frequenz zum Schwingen gebracht und einige Sekunden der stationären Schwingung aufgezeichnet und ausgewertet. Hierbei wurde durch eine reine Biegeanregung die erste Biegeeigenfrequenz und durch eine Torsionsanregung die erste Torsionseigenfrequenz ermittelt. Zur Auswertung für diese Arbeit wurden die Datensätze der stationären Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen für Biege- und Torsionsschwingungen in einen Datensatz vereint. Die Gesamtdauer der Messungen ergab sich zu 200 Sekunden. Ausgewertet wurden die Messungen für ein statisches Moment der Unwucht von 5,25 kgm je Erreger. Da sich bei allen Messungen (Impulsanregung, Frequenzanregung und ambiente Anregung) beide Unwucht-Erreger auf der Brücke befanden, wurde bei allen Anregungsarten dasselbe dynamische System getestet. Die Messungen wurden mit einer Abtastrate von 600 Hz durchgeführt, wodurch sich eine Nyquistfrequenz von 300 Hz ergibt. Durch eine Dezimierung um die Ordnung 5 wird eine neue Nyquistfrequenz von 60 Hz erzielt. Die Auswerteverfahren von *ARTeMIS* gehen von einer gleichmäßigen Anregung aller Frequenzen aus. Deshalb muss erwartet werden, dass mit den Daten der Frequenzanregung nur die erste Torsions- und Biegeeigenform erkannt wird.

**Ambiente Anregung:** Während der ambienten Messungen wurden kleinere Arbeiten auf der Brücke verrichtet. Die Anregung stammt also nicht nur von „reinen“ Umwelteinflüssen sondern auch von den sich auf der Konstruktion befindenden Personen. Wie bei den anderen Messungen wurde bei der ambienten Anregung mit einer Abtastrate von 600 Hz aufgezeichnet, wodurch sich die Nyquistfrequenz zu 300 Hz ergibt. Das Signal wurde wie bei den anderen Auswertungen um die Ordnung 5 dezimiert, um eine neue Nyquistfrequenz von 60 Hz zu erhalten. In Summe wurden über 90 Minuten ambienter Messungen zur Auswertung herangezogen. Geht man von einer niedrigsten ersten Eigenfrequenz von ungefähr 4 Hz aus, so ist zum Erfassen von 1000 Schwingungen eine Messdauer von mindestens 250 Sekunden, also etwas mehr als 4 Minuten erforderlich. Durch die lange Messdauer ist gewährleistet, dass die von den Auswertemethoden vorausgesetzte, gleichmäßige Anregung des gesamten Frequenzspektrums bei dieser Messung annähernd erfüllt wurde.

In Tabelle 5.3, Tabelle 5.4 und Tabelle 5.5 sind die ermittelten Frequenzen und Dämpfungen (Lehr'sches Dämpfungsmaß = Prozent der kritischen Dämpfung) inklusive ihrer Standardabweichungen dargestellt.

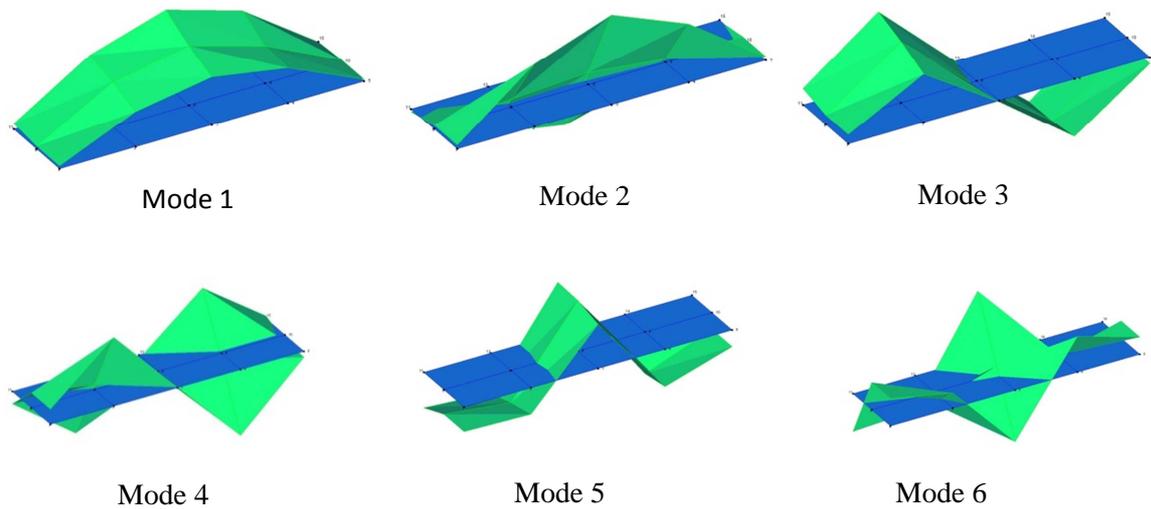
**Ergebnisse der Impulsanregung der Versuchsbrücke**



**Abbildung 5.9: SVD Diagramm Versuchsbrücke Impulsanregung (ARTEMIS)**

Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-UPC Mode 1	4.835	0.006938	2.763	0.3586
SSI-UPC Mode 2	5.267	0.01148	3.94	0.2425
SSI-UPC Mode 3	12.6	0.005229	2.689	0.1066
SSI-UPC Mode 4	13.32	0.006741	3.064	0.04471
SSI-UPC Mode 5	21.79	0.02085	2.643	0.08497
SSI-UPC Mode 6	24.28	0.001879	2.965	0.02997

**Tabelle 5.3: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung der Versuchsbrücke (ARTEMIS).**



**Abbildung 5.10: Schwingungsformen - Versuchsbrücke Impulsanregung (ARTEMIS)**

### Ergebnisse der Frequenzanregung der Versuchsbrücke

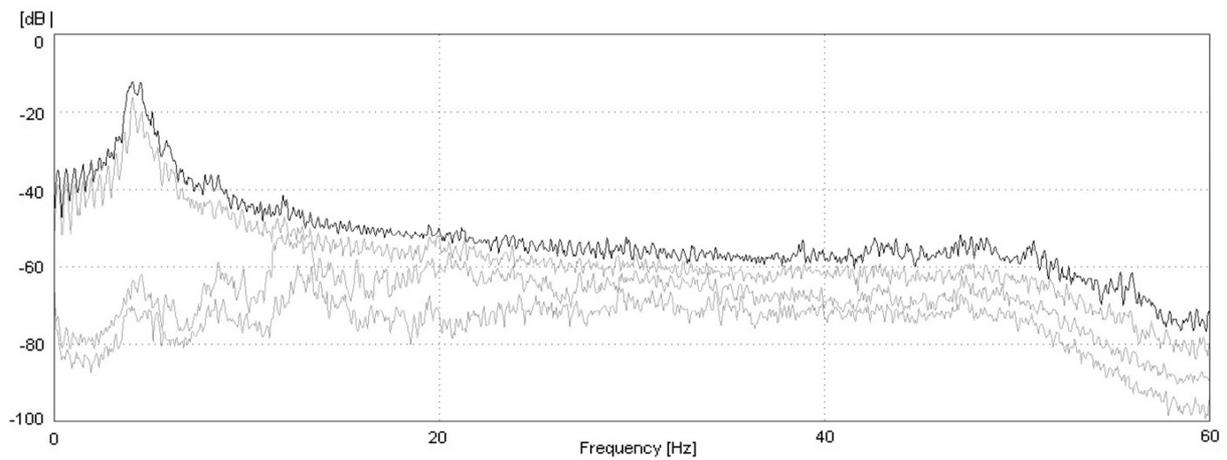
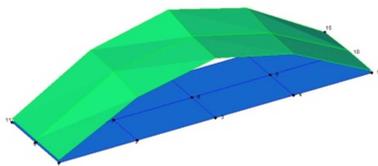


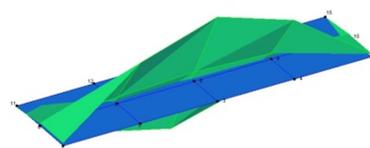
Abbildung 5.11: SVD Diagramm Versuchsbrücke Frequenzanregung (ARTEMIS)

Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-UPC Mode 1	4.043	0.007662	3.484	0.09868
SSI-UPC Mode 2	4.292	0.009506	3.358	0.1031

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Analyse der Frequenzanregung der Versuchsbrücke (ARTEMIS).



Mode 1



Mode 2

Abbildung 5.12: Schwingungsformen - Versuchsbrücke Frequenzanregung (ARTEMIS)

### Ergebnisse der ambienten Anregung der Versuchsbrücke

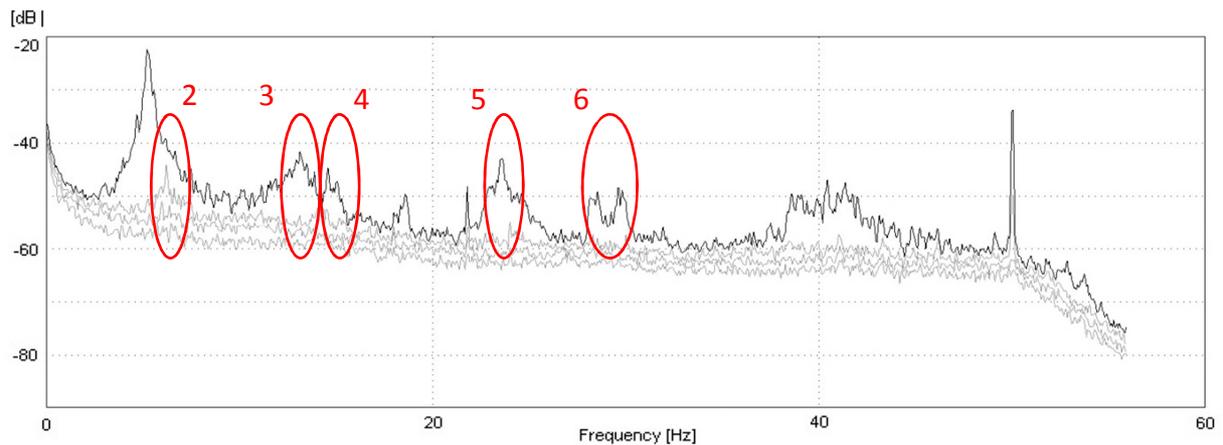


Abbildung 5.13: SVD Diagramm Versuchsbrücke ambiente Anregung (ARTEMIS)

Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-UPC Mode 1	5.269	0.0007663	1.878	0.01279
SSI-UPC Mode 2	6.169	0.008219	2.993	0.3519
SSI-UPC Mode 3	13.18	0.02744	3.422	0.06965
SSI-UPC Mode 4	14.72	0.005532	2.419	0.06065
SSI-UPC Mode 5	23.48	0.06582	1.701	0.235
SSI-UPC Mode 6	28.96	0.03466	1.332	0.0521

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung der Versuchsbrücke (ARTEMIS).

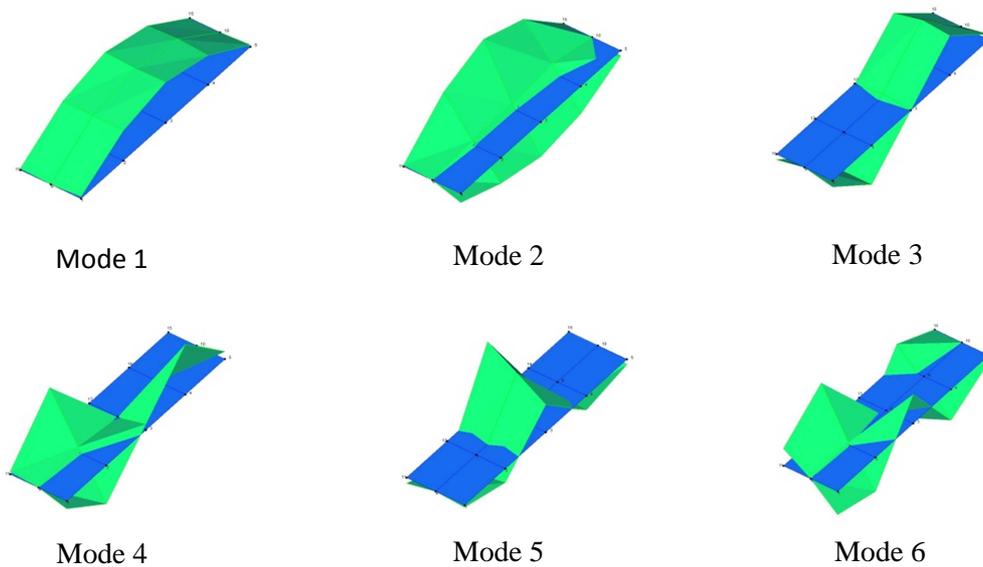


Abbildung 5.14: Schwingungsformen - Versuchsbrücke ambiente Anregung (ARTEMIS)

### 5.2.4 Erkenntnisse

**Impulsanregung:** Im SVD Diagramm der Impulsanregung sind keine besonders gut ausgeprägten SDOF Glocken zu erkennen. Es sind jedoch die mit 1, 2 und 3 gekennzeichneten Bereiche ersichtlich, die jeweils den Frequenzbereich eines Schwingungspaars (Biege- und Torsionsschwingung) darstellen. Aus der Betrachtung der Schwingungspaare ist gut ersichtlich, dass mit Höhe der Schwingungsform immer der Frequenzunterschied zwischen Biege- und zugehöriger Torsionsfrequenz immer größer wird.

Impulsanregung												
	1.BEF		1.TEF		2.BEF		2.TEF		3.BEF		3.TEF	
	f [Hz]	$\zeta$ [%]										
<b>Mähr</b> [14]	4,90	2,43	5,24	2,67	12,73	3,20	-	-	21,89	2,47	-	-
<b>ARTEMIS</b>	4,84	2,76	5,27	3,94	12,60	2,69	13,32	3,06	21,79	2,64	24,28	2,97
<b>Diff. [%]</b>	-1,22	13,58	0,57	47,57	-1,02	-15,94	-	-	-0,46	6,88	-	-

Tabelle 5.6: Ergebnisse der Impulsanregung der Versuchsbrücke aus [14] und ARTEMIS.

Im Großen und Ganzen decken sich die Ergebnisse der beiden Auswertungen sehr gut, nur die Dämpfung der ersten Torsionseigenform wurde bei dieser Auswertung als etwas höher und die Dämpfung der zweiten Biegeeigenform als etwas niedriger ermittelt. Betrachtet man die ermittelten Werte in Tabelle 5.3 genauer, wird ersichtlich, dass für alle Biegeeigenformen annähernd das gleiche Dämpfungsmaß, im Bereich zwischen 2,6% und 2,8%, errechnet wurde. Auch für die unterschiedlichen Torsionseigenformen wurden relativ ähnliche Dämpfungen mit einem Wert zwischen 3,0 % und 3,9 % festgestellt. Bei der Betrachtung der ermittelten Schwingungsformen wird ersichtlich, dass bis zum vierten Mode die Formen sehr gut mit den Ergebnissen eines idealen Einfeldträgers übereinstimmen. Die dritte Biege- und Torsionseigenschwingung sind zwar auch noch sehr gut erkennbar, weisen jedoch große Verschiebungen in den Auflagern auf. Diese Verschiebungen sind Zeichen der mit den Frequenzen zunehmenden Ungenauigkeiten.

**Frequenzanregung:** Aus dem SVD Diagramm der Frequenzanregung wird ersichtlich, dass sich in den ausgewerteten Daten kaum Informationen über eine andere als die erste und zweite Schwingungsform befinden. Dafür sind diese beiden Schwingungsformen in Abbildung 5.12 eindeutig dargestellt. Der Vergleich in Tabelle 5.7 zeigt kaum Differenzen zwischen den Resultaten aus ARTEMIS mit denen aus [14]. Die Frequenzen weichen um maximal 3 Prozent ab und auch die Dämpfungen weisen eine gute Übereinstimmung auf. Der maximale Unterschied der Dämpfungswerte von 12 Prozent ist noch tolerierbar.

Frequenzanregung				
	1.BEF		1.TEF	
	f [Hz]	$\zeta$ [%]	f [Hz]	$\zeta$ [%]
<b>Mähr</b> [14]	3,93	3,95	4,26	3,51
<b>ARTEMIS</b>	4,04	3,48	4,29	3,36
<b>Differenz [%]</b>	2,80	-11,90	0,70	-4,27

Tabelle 5.7: Ergebnisse der Frequenzanregung der Versuchsbrücke aus [14] und ARTEMIS.

Die in Abbildung 5.12 dargestellten Schwingungsformen bestätigen die gute Qualität der Auswertung. Vergleicht man die Resultate der Frequenzanregung mit denen der Impulsanregung, fällt auf, dass sich die ermittelten Eigenfrequenzen deutlich nach unten verschieben und auch der

Abstand zwischen Biege und Torsionseigenformen deutlich geringer wird. Da die Dämpfung amplitudenabhängig ist, überrascht es nicht, dass bei dem - durch die Unwucht-Erreger erzielten - höheren Energieeintrag ins System eine höhere Dämpfung als bei der Impulsanregung resultiert.

Da zur Auswertung eine Reihe von stationären Schwingungen im Frequenzbereich der ersten Biege- und Torsionseigenform herangezogen wurden, konnten wie erwartet nur die ersten beiden Eigenfrequenzen ermittelt werden.

**Ambiente Anregung:** Betrachtet man das SVD Diagramm der ambienten Anregung, so sind in einigen Frequenzbereichen eindeutige Energiespitzen erkennbar. Am besten ausgeprägt ist dabei die Spitze der ersten Eigenfrequenz. Es sind jedoch auch die rot gekennzeichneten Frequenzbereiche der weiteren Moden eindeutig ersichtlich. Es konnten, wie bei der Impulsanregung, die ersten drei Biege- und Torsionsschwingungen erkannt werden. Ein Vergleich der Schwingungsformen der Impulsanregung und der ambienten Anregung zeigt eine etwas schlechtere Qualität der ambienten Ergebnisse. Die identifizierten Eigenfrequenzen der ambienten Anregung sind deutlich höher als jene der Impulsanregung. Der Frequenzunterschied entspricht etwa dem Unterschied von der Frequenzanregung auf die Impulsanregung. Es erhöhen sich nicht nur die einzelnen Frequenzen, durch die Überschätzung der Steifigkeit vergrößert sich auch der Frequenzunterschied zwischen Biege- und Torsionseigenformen. Die Dämpfungen der Impulsanregung und der ambienten Anregung unterscheiden sich mit Ausnahme der sechsten Eigenform um maximal 35 Prozent. Für die meisten Moden liegen die ermittelten ambienten Dämpfungen sogar im Bereich von plus minus 30 Prozent der Werte der Impulsanregung. Ein Vergleich mit den durch die Frequenzanregung erzielten Dämpfungen zeigt eine hohe Übereinstimmung der Werte bei der zweiten Eigenform. Für die erste Eigenfrequenz beträgt die ambiente Dämpfung nur etwa die Hälfte des aus der Frequenzanregung ermittelten Wertes. Die gute Qualität der Ergebnisse der ambienten Anregung kann auch Großteils daher stammen, das auf der Brücke gearbeitet und somit doch ein nicht unwesentlicher Energieeintrag in das System generiert wurde.

Vergleich												
	1.BEF		1.TEF		2.BEF		2.TEF		3.BEF		3.TEF	
	f [Hz]	$\zeta$ [%]										
<b>Frequenz</b>	4,04	3,48	4,29	3,36	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>Impuls</b>	4,84	2,76	5,27	3,94	12,60	2,69	13,32	3,06	21,79	2,64	24,28	2,97
<b>ambient</b>	5,27	1,88	6,17	2,99	13,18	3,42	14,72	2,42	23,48	1,70	28,96	0,33
<b>Diff. Imp/amb</b>	8,88	31,88	17,08	24,11	4,60	27,14	10,51	20,92	7,76	35,61	19,28	88,89

Tabelle 5.8: Vergleich der Ergebnisse der unterschiedlichen Anregungen; Werte aus ARTeMIS.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass je größer der Energieeintrag während der Messung ist, desto niedriger die errechneten Eigenfrequenzen werden. Bei geringerer Anregungsamplitude wird also die Steifigkeit des Systems überschätzt. Weiters unterschätzen die Ergebnisse aus einer ambienten Anregung und einer Impulsanregung die Dämpfungswerte, die bei einer gezielten Anregung mittels Unwucht-Erreger in der Resonanzfrequenz erhalten würden. Bei einer guten Qualität der Messungen, sprich bei ausreichend Energieeintrag bei der Impulsanregung und bei entsprechend langer Messdauer bei der ambienten Anregung, lässt sich die Größenordnung der tatsächlichen Dämpfung relativ gut abschätzen. Berücksichtigt man, dass bei geringer Erregung die Steifigkeit überschätzt und die Dämpfung unterschätzt wird, so bilden ambiente Messungen eine gute Grundlage zur Abschätzung des Schwingungsverhaltens von Brückentragwerken.

## 6 Brücke Persenbeug

Für dieses Objekt wurden einige unterschiedliche Anregungsarten getestet. Die Auswertung der Messungen an dieser Brücke sollte Auskunft darüber geben, wie sich die Ergebnisse der einzelnen Anregungen zueinander verhalten.

### 6.1 Objektbeschreibung

Bei dem untersuchten Objekt handelt es sich um eine eingleisige Eisenbahnbrücke (Abbildung 6.1). Das Tragwerk befindet sich bei KM 57,576 der Donauuferbahn zwischen Weins und Persenbeug. Das Objekt ist in einer Kurve der Bahntrasse situiert, dies kann zu einer Torsionsanregung bei Zugüberfahrten führen.



Abbildung 6.1: Bild der Brücke in Persenbeug

Das statische System der Brücke ist ein Einfeldträger. Ausgeführt wurde dieser in Form einer orthotropen Platte aus Stahl. Die Stützweite beträgt dabei 21,35 m bei einer Hauptträgerhöhe von 1,5 m. Die Breite der Tragkonstruktion beträgt etwa 4,5 m. Eine nähere Beschreibung des Tragwerks findet sich in [15].

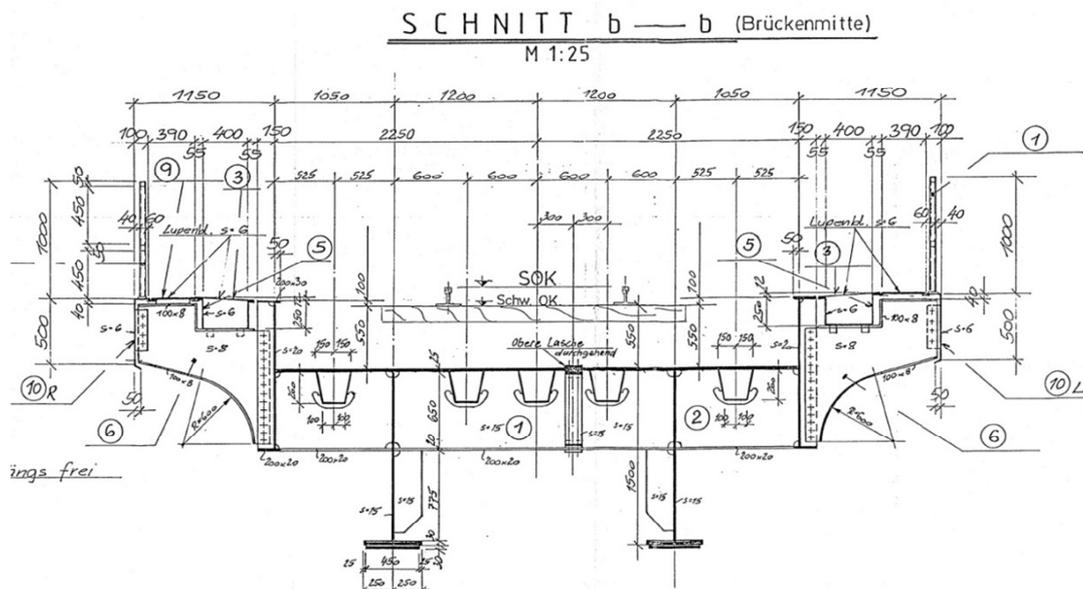


Abbildung 6.2: Schnitt in Brückenmitte (Brücke Persenbeug) [15]

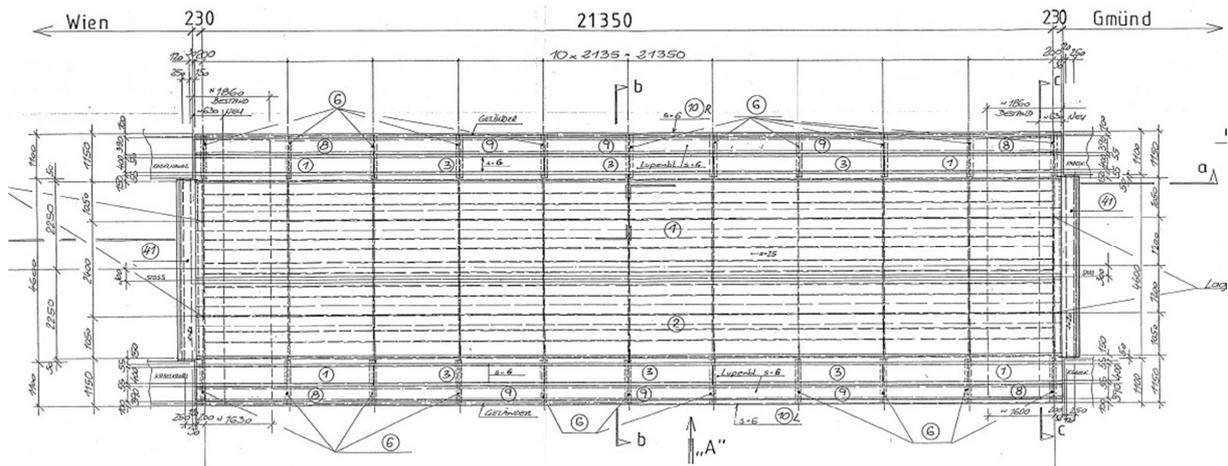


Abbildung 6.3: Draufsicht (Brücke Persenbeug) [15]

## 6.2 Messungen

Zur Auswertung der Messung wurden die Signale von 14 Beschleunigungsaufnehmern verwendet. Die Anordnung der Sensoren bei den Messungen ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Der Aufbau der verwendeten Messkette wird in Kapitel 4.6 näher beschrieben.

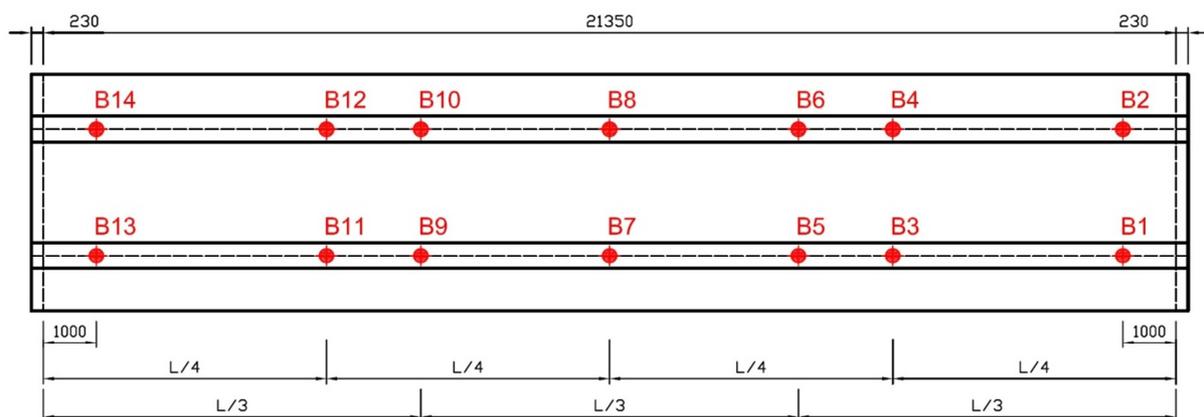


Abbildung 6.4: Messlayout Brücke Persenbeug

Gemessen wurden vier unterschiedliche Anregungsarten: Anregung durch einen Impulshammer, eine Frequenzanregung, eine ambiante Anregung und Zugsüberfahrten. Die Impulsanregung und die Zugsüberfahrten wurden mit den Sensoren B1 bis B12 aufgezeichnet. Für die Frequenzanregung standen alle 14 Sensoren zur Verfügung. Die ambienten Messungen mussten um das 100 fache verstärkt werden. Da nur die ersten vier Nachkommastellen der Messung gespeichert wurden und die maximalen Amplituden der ambienten Messungen um ein vielfaches geringer waren, als bei den Zugsüberfahrten. Zum Zeitpunkt der Messungen war nur eine Signalverstärkung für 6 Kanäle möglich, deshalb wurde für die ambienten Messungen das Messlayout auf zwei Teile (B4 bis B8 und B7 bis B12) aufgeteilt. Als Referenzsensoren dienen die beiden mittleren Sensoren B7 und B8.

Die Aufzeichnungen wurden mit einer Abtastrate von 300 Hz durchgeführt. Als Anti-Alias Filterung wurde bei der ambienten Messung und bei der Frequenzanregung ein Butterworth Tiefpassfilter mit 40 Hz verwendet. Für die Zugsüberfahrten und die Impulsanregung wurde mit 100 Hz gefiltert.

### 6.3 Auswertung

Zur ersten Abschätzung der Eigenfrequenzen werden die in [15] ermittelten Werte für die Masse und die Biegesteifigkeit der Brücke ( $G=8120 \text{ kg/lfm}$ ,  $I=9765040 \text{ cm}^4$ ) verwendet. Für die erste Biegeeigenform wird eine Sinuswelle und für die zweite Biegeeigenform eine Doppelsinuswelle angesetzt.

$$\phi_1(x) = \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \quad (6.1)$$

$$\phi_2(x) = \sin\left(\frac{2x\pi}{L}\right) \quad (6.2)$$

$$u(x, t) = \phi_1(x)q_1(t) + \phi_2(x)q_2(t) \quad (6.3)$$

$u(x, t)$  steht für die zeitabhängige Durchbiegung an der Stelle  $x$ .  $q_1(t)$  und  $q_2(t)$  stellen die zeitabhängigen Freiheitsgrade dar. Durch anwenden des Prinzips der virtuellen Kräfte und nachfolgender Integration über die Trägerlänge ergeben sich die modalen Massen und die modalen Steifigkeiten wie folgt:

$$m_1 = \int_0^L \rho A \sin^2\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx = \frac{\rho A L}{2} = \frac{G L}{2} = 86681 \text{ kg} \quad (6.4)$$

$$m_2 = \int_0^L \rho A \sin^2\left(\frac{2x\pi}{L}\right) dx = \frac{\rho A L}{2} = \frac{G L}{2} = 86681 \text{ kg} \quad (6.5)$$

$$k_1 = \int_0^L E I \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx = E I \frac{\pi^4}{L^3} = 102,63 \text{ MN/m} \quad (6.6)$$

$$k_2 = \int_0^L E I \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2\left(\frac{2x\pi}{L}\right) dx = E I \frac{\pi^4}{L^3} = 1642,06 \text{ MN/m} \quad (6.7)$$

Die beiden natürlichen Eigenfrequenzen können somit wie in Folge gezeigt wird abgeschätzt werden.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 34,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_1 = 5,48 \text{ Hz} \quad (6.8)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 137,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_2 = 21,9 \text{ Hz} \quad (6.9)$$

Die Auswertungen der Messungen wurden mit den FDD und SSI Methoden von *ARTEMIS* durchgeführt.

**Impulsanregung:** Es wurde eine Serie von Impulsanregungen und zugehörigen Ausschwingvorgängen aufgezeichnet. Zur Anregung wurde ein 5 kg Hammer verwendet. Die Summe der Messungsdauer beläuft sich auf etwa 1000 Sekunden. Da zum Erfassen von 1000 Schwingungen bei 5 Hz 200 Sekunden ausreichen sollten, stellt sich nur mehr die Frage, ob mit dem vorhandenen Gerät die Konstruktion ausreichend angeregt werden konnte. Zur Auswertung wurde das Signal um die Ordnung 3 dezimiert (siehe Kapitel 3.4.1), wodurch eine Nyquistfrequenz von 50 Hz erreicht wurde. Der analysierte Frequenzbereich bewegt sich somit zwischen 0 und 50 Hz, wodurch eine Aussage, über das generelle Schwingungsverhalten der Brücke, erzielt werden sollte.

**Frequenzanregung:** Die Brücke wurde mit den institutseigenen Unwucht-Erregern der Firma Convi Tec, in einer gewissen Frequenz zum Schwingen angeregt. Die stationären Schwingungen wurden aufgezeichnet, aneinander gereiht und ausgewertet. Es wurden zwei Unwucht-Erreger verwendet. Die Masse eines Unwucht-Erregers samt fahrbarem Unterbau beläuft sich auf ca. 8 Tonnen. Eine nähere Beschreibung der Unwucht-Erreger und des Unterbaus findet sich in [15]. Bei diesem Versuch wurde der Amplitudenfrequenzgang der ersten Biegeeigenfrequenz schrittweise ermittelt. Die gesamte Dauer der Aufzeichnungen beträgt etwa 400 Sekunden. Ausgewertet wurden die Messungen für ein statisches Moment der Unwucht von 326 Nm je Erreger. Da durch eine gezielte Anregung der ersten Biegeeigenfrequenz nur Resultate über diese erwartet werden, wurden die Messungen um die Ordnung 10 dezimiert und somit nur mehr der Frequenzbereich von 0 bis 15 Hz betrachtet.

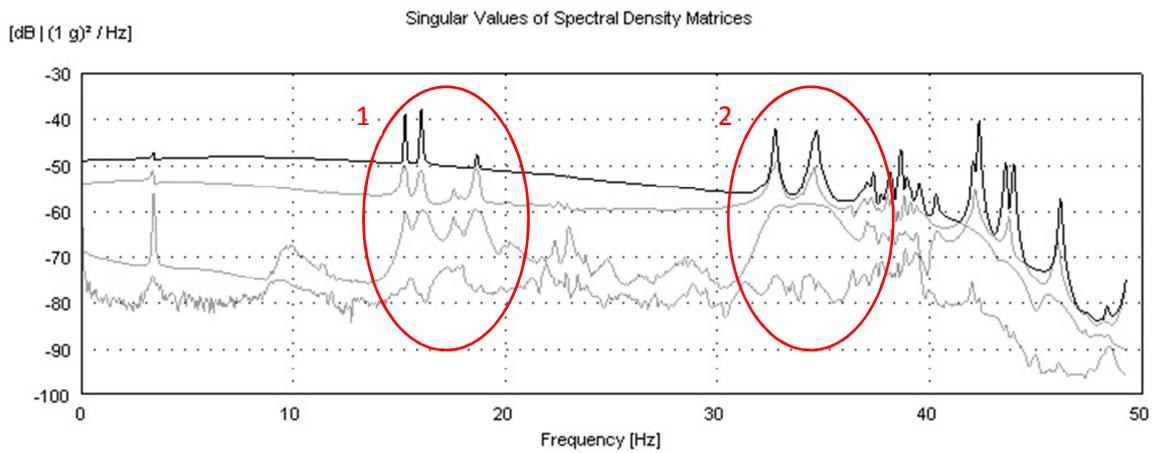
**Ausschwingvorgang Frequenzanregung:** im Zuge der oben erwähnten Frequenzanregung wurden auch Messungen des Ausschwingvorgangs nach einer stationären Schwingung durchgeführt. Durch die Unwucht-Erreger wurde die Brücke in eine stationäre Schwingung im Bereich der Resonanzfrequenz versetzt. Nach dem Aufzeichnen der stationären Schwingung wurden die Erreger abgestellt und der folgende Ausschwingvorgang des Tragwerks aufgezeichnet. Es wurden Ausschwingversuche für ein statisches Moment der Unwucht von 110 Nm, 326 Nm und 363 Nm durchgeführt. Insgesamt wurden acht Messungen der Ausschwingvorgänge aufgezeichnet. Zur Auswertung wurden diese Daten aneinander gereiht. In Summe beläuft sich die Messdauer der Ausschwingvorgänge auf 170 Sekunden. Um zu überprüfen, ob sich daraus Aussagen über zweite Biegeeigenform treffen lassen, wurde das Signal um die Ordnung 5 dezimiert. Die neue Nyquistfrequenz beträgt somit 30 Hz.

**Zugsüberfahrt:** Im Zuge der Messungen wurden auch vier Zugsüberfahrten aufgezeichnet. Da die Strecke nach diesen Versuchen aufgelassen wurde war es nicht möglich weitere Überfahrtsmessungen durchzuführen. Bei den Zügen handelte es um zum Teil relativ leichte Garnituren (leer bei der Fahrt in eine Richtung), außerdem war die Überfahrtsgeschwindigkeit relativ gering. Es stellt sich also die Frage, ob das Tragwerk ausreichend angeregt wurde. Es wurden nur die Ausschwingvorgänge der Messungen untersucht. Die Dezimierung wurde mit Ordnung 5 durchgeführt, um wieder einen Frequenzbereich von 0 bis 30 Hz zu erhalten.

**Ambiente Anregung:** Die ambienten Messungen wurden in zwei unterschiedlichen Messsetups durchgeführt. Die Messdauer jeder Messsetups beläuft sich auf etwa 55 Minuten. Um den Bereich zwischen 0 und 30 Hz näher zu betrachten wurden Daten um die Ordnung 5 dezimiert.

Auf den folgenden Seiten werden die Ergebnisse der Analyse der einzelnen Anregungsarten gezeigt. In Tabelle 6.1, Tabelle 6.2, Tabelle 6.3, Tabelle 6.4 und Tabelle 6.5 sind die ermittelten Frequenzen und Dämpfungen (Lehr'sches Dämpfungsmaß = Prozent der kritischen Dämpfung) inklusive ihrer Standardabweichungen dargestellt.

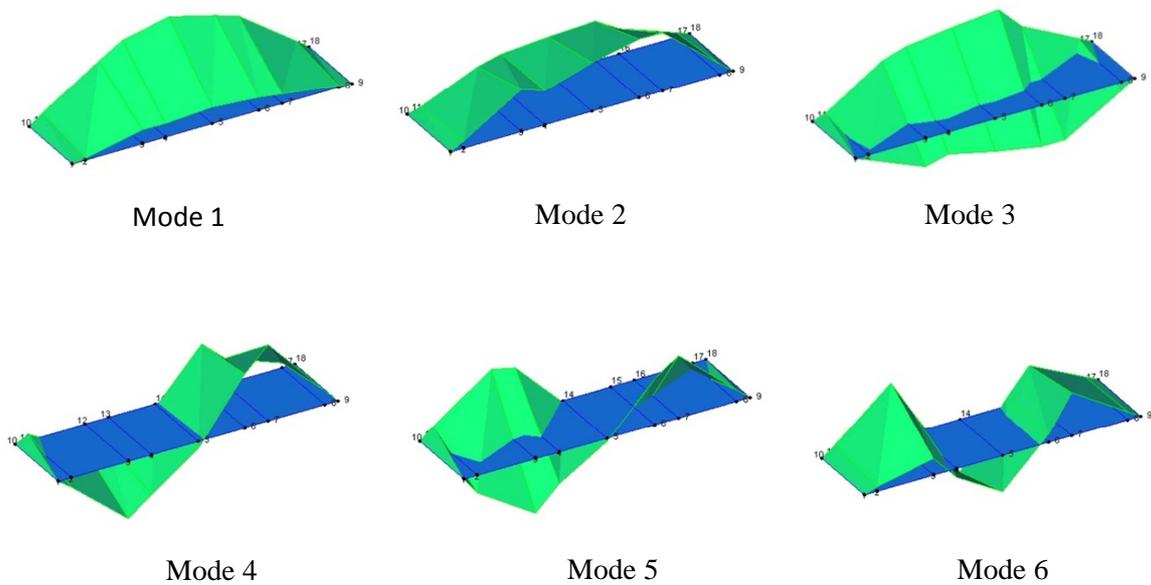
**Ergebnisse der Impulsanregung der Brücke in Persenbeug**



**Abbildung 6.5: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Impulsanregung (ARTEMIS)**

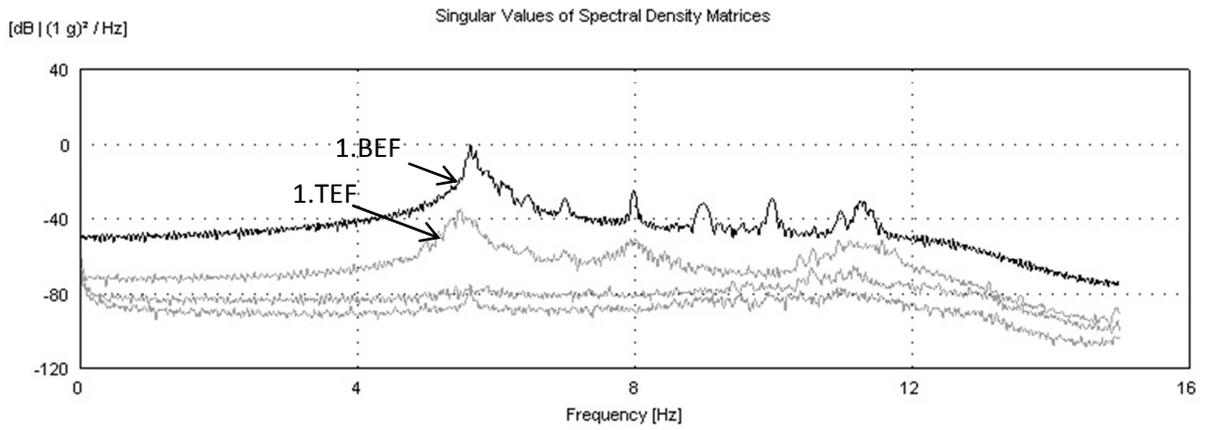
Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-UPC Mode 1	3.414	0.008633	1.092	0.4659
SSI-UPC Mode 2	15.28	0.009148	0.2177	0.2122
SSI-UPC Mode 3	16.05	0.005743	0.2107	0.07282
SSI-UPC Mode 4	17.99	0.02278	1.087	0.226
SSI-UPC Mode 5	18.65	0.007585	0.4978	0.04769
SSI-UPC Mode 6	23.1	0.005621	2.035	0.05253

**Tabelle 6.1: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung der Brücke in Persenbeug (ARTEMIS).**



**Abbildung 6.6: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Impulsanregung (ARTEMIS)**

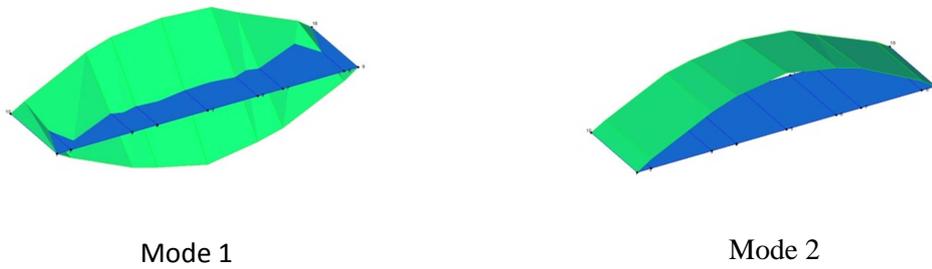
**Ergebnisse der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug**



**Abbildung 6.7: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Frequenzanregung (ARTEMIS)**

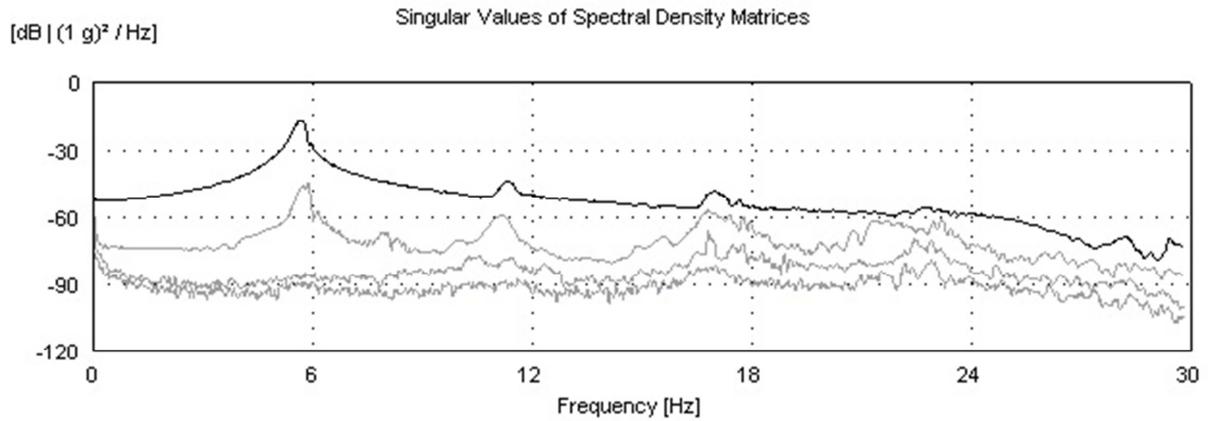
Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
CFDD Mode 1	5.497	0	1.341	0
SSI-UPC Mode 2	5.637	0.005083	0.608	0.1663

**Tabelle 6.2: Ergebnisse der Analyse der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug (ARTEMIS).**



**Abbildung 6.8: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Frequenzanregung (ARTEMIS)**

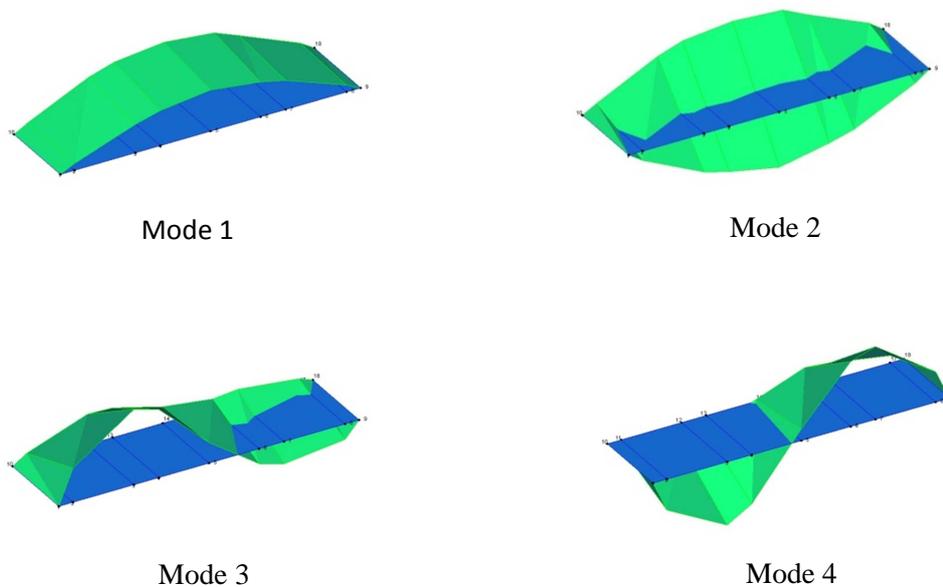
**Ergebnisse des Ausschwingvorgangs der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug**



**Abbildung 6.9: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Ausschwingvorgang der Frequenzanregung (ARTEMIS)**

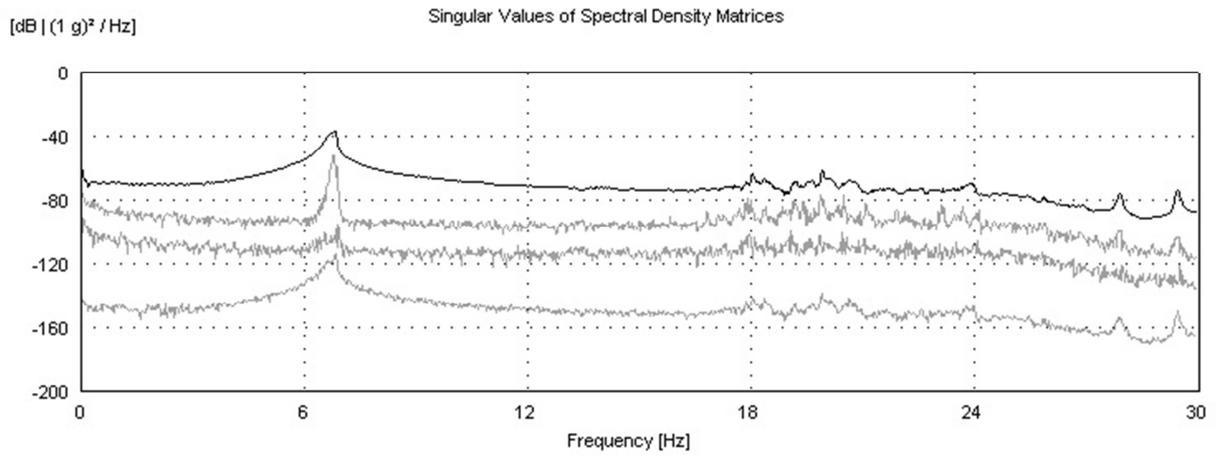
Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-UPC Mode 1	5.749	0.008019	1.182	0.2595
CFDD Mode 2	5.804	0	1.567	0
SSI-UPC Mode 3	16.91	0.009847	0.9569	0.03512
SSI-UPC Mode 4	17.35	0.006489	1.07	0.04206

**Tabelle 6.3: Ergebnisse der Analyse des Ausschwingvorgangs der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug (ARTEMIS).**



**Abbildung 6.10: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Ausschwingvorgang der Frequenzanregung (ARTEMIS)**

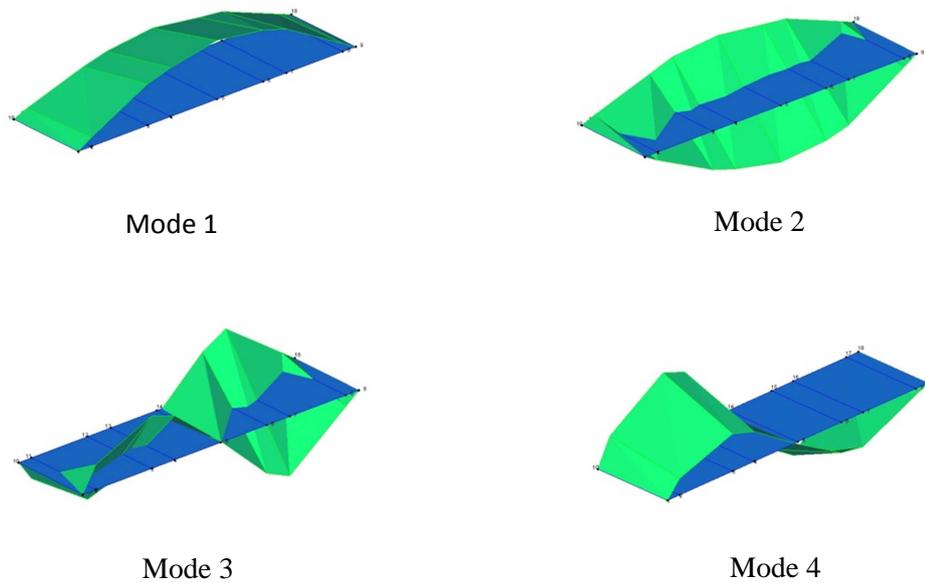
**Ergebnisse der Zugsüberfahrten der Brücke in Persenbeug**



**Abbildung 6.11: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Zugsüberfahrten (ARTEMIS)**

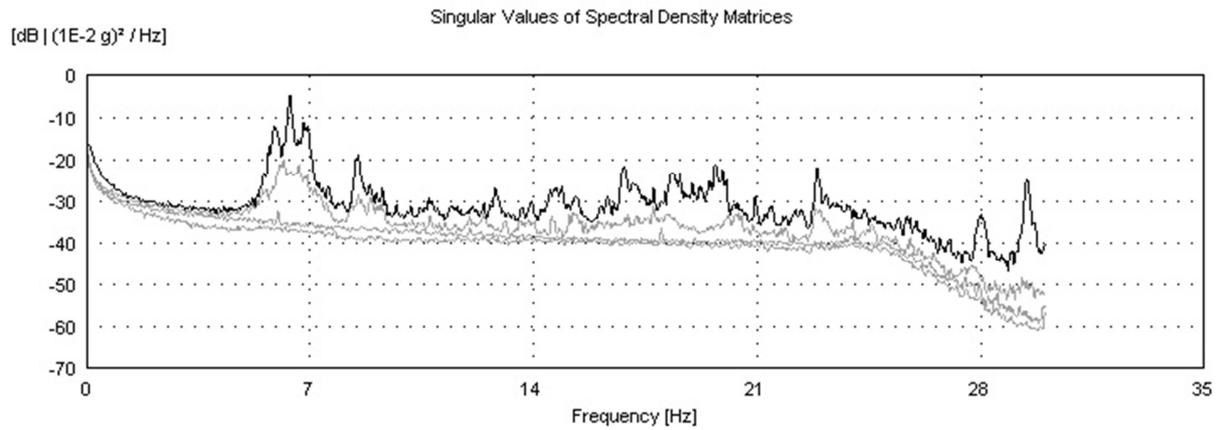
Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-CVA Mode 1	6.643	0.02018	1.665	0.4901
SSI-CVA Mode 2	6.782	0.005367	1.051	0.0412
SSI-CVA Mode 3	17.67	0.02397	1.806	0.3351
SSI-CVA Mode 4	19.05	0.0746	1.201	0.4018

**Tabelle 6.4: Ergebnisse der Analyse der Zugsüberfahrten der Brücke in Persenbeug (ARTEMIS).**



**Abbildung 6.12: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Zugsüberfahrten (ARTEMIS)**

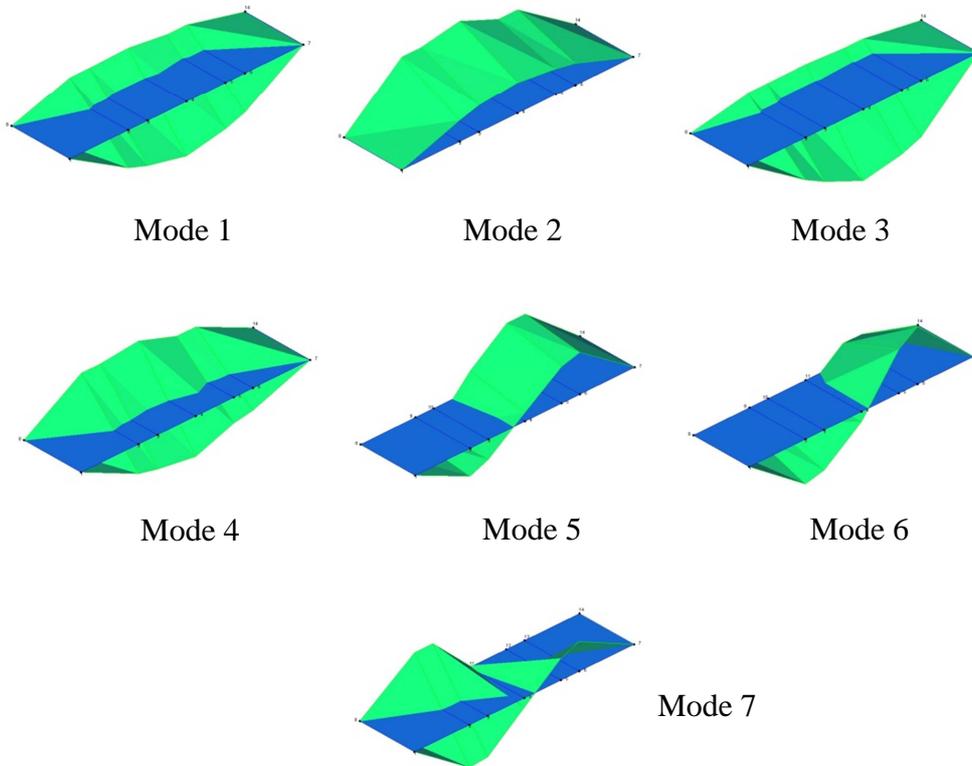
**Ergebnisse der ambiente Anregung der Brücke in Persenbeug**



**Abbildung 6.13: SVD Diagramm Brücke Persenbeug ambiente Anregung (ARTEMIS)**

Mode	Frequency [Hz]	Std. Frequency [Hz]	Damping Ratio [%]	Std. Damping Ratio [%]
SSI-CVA Mode 1	5.898	0.01995	1.369	0.3349
SSI-CVA Mode 2	6.359	0.01319	0.7304	0.1768
SSI-CVA Mode 3	6.889	0.02894	1.268	0.3916
SSI-CVA Mode 4	8.439	0.06884	1.461	0.4249
SSI-CVA Mode 5	14.74	0.06001	1.641	0.2462
SSI-CVA Mode 6	17.08	0.1061	1.855	0.2293
SSI-CVA Mode 7	19.47	0.3827	0.6389	0.1825

**Tabelle 6.5: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung der Brücke in Persenbeug (ARTEMIS).**



**Abbildung 6.14: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug ambienten Anregung (ARTEMIS)**

## 6.4 Erkenntnisse

**Impulsanregung:** Im SVD Diagramm der Impulsanregung sind deutliche Energiespitzen erkennbar. Die als erster Mode identifizierte Schwingung bei 3,4 Hz stellt eine reine Durchbiegung eines Hauptträgers dar. Die Anregungen durch den Hammer sind nur an einem Hauptträger erfolgt, dies könnte der Ursprung dieses Modes sein. Mode 2 bis 5 stellen die ersten und zweiten Biege- und Torsionseigenformen dar. Es ist jedoch auch erkennbar, dass keine dieser Schwingungsformen einwandfrei abgebildet werden kann. Die erste Biege und Torsionseigenform, die im SVD Diagramm durch eindeutige Spitzen im gekennzeichneten Bereich 1 erkennbar sind, liegen eindeutig nicht in dem durch Gleichung (6.8) und (6.9) ermittelten Frequenzbereich. Auch die ermittelte Dämpfung scheint sehr gering und unrealistisch. Die zweite Torsions- und Biegeeigenform wirken im Bezug auf ihre Form, Frequenzen und Dämpfungswerte sehr realistisch. Mode 6 erinnert stark an die dritte Biegeeigenform. Die Schwingungswellen sind jedoch nicht symmetrisch und es sind auch keine eindeutigen Schwingungsnulppunkte vorhanden - es handelt sich mehr um eine bewegte Welle. Man kann also davon ausgehen, dass die erhaltene Frequenz und das errechnete Dämpfungsmaß nicht sehr genau sind. Die im Bereich 1 identifizierten Schwingungsformen 2 bis 5 wurden in leicht abgewandelter Form auch im Frequenzbereich 2 identifiziert. Dieses Phänomen zeigt sich in allen Auswertungen für diese Brücke. Am auffälligsten an dieser Auswertung ist, dass die ersten und zweiten Biege- und Torsionsformen so nahe bei einander identifiziert wurden. Aus dieser Untersuchung konnten kaum Aussagen über die dynamischen Eigenschaften des Tragwerks getroffen werden. Die Vermutung liegt nahe, dass die relativ guten Ergebnisse für die zweite Biege- und Torsionseigenform (vergleiche Tabelle 6.6) Zufallstreffer sein könnten. Da bei den vorigen Untersuchungen die Impulsanregung sehr genaue Werte für die Frequenzen geliefert hat, war entweder der Energieeintrag ins System zu gering oder die Erfassung des Ausschwingvorgangs zu ungenau. Eine Erhöhung der Impulsmasse würde somit zu einem besseren Resultat führen. Auch eine Verstärkung der erfassten Signale könnte bessere Werte liefern, da somit der Ausschwingvorgang genauer erfasst werden würde.

**Frequenzanregung:** Im SVD Diagramm ist die SDOF Glocke der ersten Biegeeigenform klar erkennbar. Die weiteren Energiespitzen kennzeichnen die Frequenzen der stationären Schwingungen, die zur Auswertung herangezogen wurden. Wie in Tabelle 6.2 ersichtlich wird, konnte mit den SSI Methoden nur die erste Biegeeigenform identifiziert werden. Durch Verwendung der FDD Verfahren kann auch die erste Torsionseigenform bestimmt werden. Die Torsionseigenform wird dabei aus der Glocke der zweiten SVD Linie ermittelt. Da diese Glocke keinen eindeutigen Spitz aufweist kann die Frequenz nicht genau bestimmt werden und wird daher unter der ersten Biegenfrequenz ermittelt. Dafür, dass bei den Messungen nur die Biegeeigenform angeregt wurde, ist die errechnete Torsionsform sehr deutlich. Der Grund dafür wird wohl sein, dass die Gleisführung über dem Tragwerk gekrümmt ist und somit ein Hauptträger mehr als der andere belastet wurde. Es wurde also doch auch die Torsionsform leicht angeregt. Da jedoch nicht einmal die Frequenz dieses Modes genau bestimmt werden konnte, sind auch die Dämpfungswerte mit Vorsicht zu genießen. Man kann aber davon ausgehen, dass die Werte der Biegeeigenform der Realität entsprechen sollten.

**Ausschwingvorgang Frequenzanregung:** Aus dem SVD Diagramm sind außer der SDOF Glocke der ersten Biegeeigenform auch Energiespitzen alle ca. 5,6 Hz ersichtlich. Es ist also anzunehmen, dass diese Energiespitzen vom Ausschwingvorgang in der ersten Eigenfrequenz stammen. Ein Blick auf die Schwingungsformen zeigt als ersten Mode eindeutig die erste Biegeschwingung. Die Frequenz für die erste Biegeeigenform wurde durch alle Auswertemethoden in der gleichen Größe ermittelt, bei den

Dämpfungswerten traten jedoch schon größere Abweichungen auf. Die FDD Verfahren ermittelten eine Lehr'sches Dämpfungsmaß von etwa 1,7%, was sich auch durch Anwenden einer einfachen logarithmischen Dekrementen Methode ergibt. Die Dämpfungen aus der logarithmischen Dekrementen Methode bewegen sich im Bereich von 1,5% bis 1,8%.

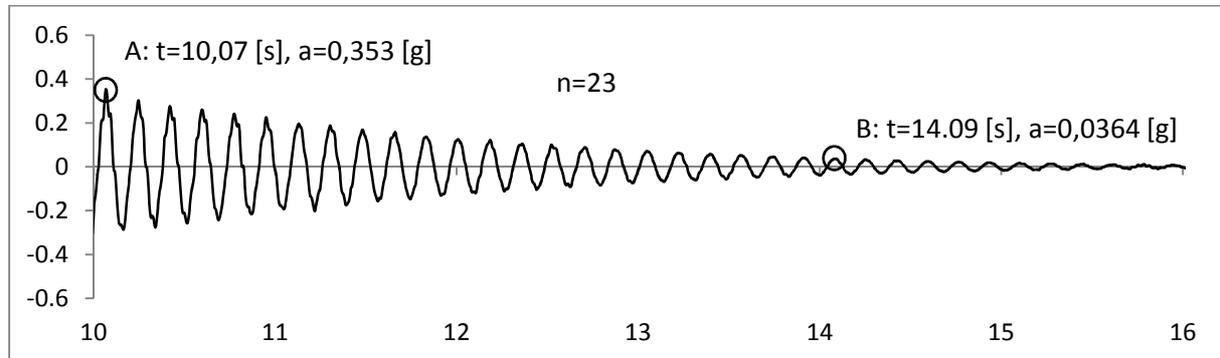


Abbildung 6.15: Beispiel einer logarithmischen Dekrementen Methode des Signals in Brückenmitte

$$f_1 = \frac{n}{t_b - t_a} = \frac{23}{14,09 - 10,07} = 5,72 \text{ Hz} \quad (6.10)$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2 \pi n} \ln \left( \frac{a_A}{a_B} \right) = \frac{1}{2 \pi \cdot 23} \ln \left( \frac{0,353}{0,0364} \right) = 0,0157 = 1,57\% \quad (6.11)$$

Durch die SSI Methoden wurde ein Wert um 1,2% ermittelt. Da für die meisten Auswertungen die Ergebnisse der SSI-UPC Methode am aussagekräftigsten sind, werden auch hier die Ergebnisse dieses Verfahrens angegeben. Die erste Torsionseigenform konnte nur durch die FDD Methoden identifiziert werden. Das ermittelte Dämpfungsmaß von 1,57% scheint zwar sehr realistisch, da die Torsionsschwingung jedoch kaum erregt wurde und von den SSI Methoden nicht einmal erkannt wurden, stellt sich die Frage, ob es sich vielleicht nur um einen Zufallstreffer handelt. Den dritten Mode kann man als eine Mischung aus erster und zweiter Biegeeigenform und zweiter Torsionseigenform interpretieren. Der vierte Mode setzt sich aus der zweiten Biege- und Torsionseigenform zusammen. Man kann also sagen, dass nur die erste Biegeeigenform einwandfrei erkannt wurde. Der vierte Mode gibt eine Auskunft darüber in welchem Frequenzbereich sich die zweite Biege- und Torsionseigenform befinden, kann aber nicht als eindeutig bestimmt, angenommen werden. Generell scheinen die Ergebnisse dieser Messung sehr gute Auskünfte über das tatsächliche Schwingungsverhalten des Tragwerks zugeben.

**Zugsüberfahrt:** Das SVD Diagramm zeigt eine eindeutige Energiespitze bei der ersten Eigenfrequenz. Es kann also nicht erwartet werden, dass man aus den SVD Daten verlässliche Aussagen über die zweite Biege- und Torsionseigenform treffen kann. Unter Verwendung des CVA Algorithmus konnten dennoch Werte für diese beiden Schwingungsformen getroffen werden. Der vierte erkannte Mode stellt keine reine Biegeeigenform dar, sondern weist auch Einflüsse einer Torsionsschwingung auf. Dies mag der Grund dafür sein, dass die zugehörige Frequenz höher ist, als die der zweiten Torsionseigenform.

**Ambiente Anregung:** Am SVD Diagramm fällt als erstes der Dreizacke im Bereich der ersten Eigenfrequenzen auf. Im weiteren Frequenzbereich gibt es zwar zahlreiche Energiespitzen, aber keine davon ist ein wirklicher Indikator für einen eindeutigen Mode. Im Gegensatz zu den anderen

Anregungsarten wurden hier mehrere Varianten der ersten Torsionseigenform identifiziert. Der erste und dritte Mode weisen eine stark vergrößerte Amplitude an einem Hauptträger auf. Am ehesten entspricht der vierte Mode einer Torsionsschwingung erster Ordnung. Mode fünf und sechs stellen die zweite Biegeeigenform dar. Mode fünf weist zwar die eindeutigere Schwingung auf, ist jedoch nicht symmetrisch um die Brückenmitte. Der sechste Schwingungsmodus besitzt zwar einen Schwingungsnullpunkt in der Brückenmitte, weist aber leichte Einflüsse einer Torsionsschwingung auf. Der siebte Mode stellt eindeutig die zweite Torsionseigenform dar. Durch die ambienten Messungen konnten zwar die ersten und zweiten Biege- und Torsionsformen erkannt werden, problematisch ist nur, dass mehrere Frequenzen für eine Form zur Auswahl stehen.

Vergleich								
	1.BEF		1.TEF		2.BEF		2.TEF	
	f [Hz]	ζ [%]						
<b>Frequenzanregung</b>	5,64	0,61	5,50	1,34	-	-	-	-
<b>Ausschwing Frequenzanregung</b>	5,75	1,18	5,80	1,57	17,35	1,07	17,35	1,07
<b>Impulsanregung</b>	15,28	0,22	16,05	0,21	17,99	1,09	18,65	0,50
<b>Zugsüberfahrt</b>	6,64	1,67	6,78	1,05	17,67	1,81	19,05	1,20
<b>Ambiente Anregung</b>	6,36	0,73	5,90	1,37	17,08	1,86	19,47	0,64

Tabelle 6.6: Vergleich der Ergebnisse der Brücke in Persenbeug (Werte aus ARTeMIS).

Man geht davon aus, dass die Ergebnisse der Frequenzanregung für die erste Biegeeigenform die Realität am ehesten wiedergeben. Durch Auswertung der Messdaten durch konventionelle Verfahren kann zwar dieselbe Frequenz ermittelt werden, die Dämpfung wird jedoch im Bereich von 1,5 bis 1,8 Prozent eingeordnet. Da im SVD Diagramm Energiespitzen bei den Frequenzen der stationären Schwingungen auftreten, kann davon ausgegangen werden, dass die Frequenzschritte zwischen den stationären Messungen zu groß waren um eine eindeutige SDOF Glocke zu ergeben. Da ARTeMIS mit einer gleichmäßigen Erregung aller Frequenzen rechnet, kann angenommen werden, dass die ermittelten Dämpfungen zu niedrig sind. Die aus der Impulsanregung ermittelten Werte für die erste Biegeeigenform scheinen kaum realistisch. Die Frequenzen der 1.BEF aus der Zugsüberfahrt und der ambienten Messung sind beide etwas höher als bei der Frequenzanregung. Zum einen wird wohl die Steifigkeit überschätzt und zum anderen haben sich bei diesen Messungen die Unwucht-Erreger nicht auf der Brücke befunden, wodurch die schwingende Masse um etwa 16 Tonnen geringer war. Bei einer modalen Masse der ersten Eigenform von 87 Tonnen hat dies schon erkennbare Auswirkungen. Setzt man die Masse der Unwucht-Erreger vereinfachend in Brückenmitte an, so hat diese keine Auswirkung auf die zweite Biegeeigenfrequenz, da der Mittelpunkt bei dieser Schwingungsform keine Vertikalverschiebung aufweist. Um den Einfluss auf die erste Eigenfrequenz zu ermitteln, muss die zusätzliche Masse nur in Gleichung (6.10) zur modalen Masse dazu addiert werden. Die neue Frequenz ergibt sich somit wie folgt.

$$\omega_{1,UW} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{102,6 \cdot 10^6}{(86,7 + 16) \cdot 10^3}} = 31,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad f_1 = 5,03 \text{ Hz} \quad (6.12)$$

Die erste Eigenfrequenz sinkt nach diesen Annahmen durch eine zusätzliche Masse von 16 Tonnen um 9 Prozent ab.

Die tatsächliche Dämpfung der 1.BEF der Brücke konnte anscheinend nur durch Auswertung der Ausschwingvorgänge der Zugsüberfahrten und der Frequenzanregung annähernd bestimmt werden.

Die erste Torsionseigenform konnte nur bei der Zugsüberfahrt eindeutig erkannt werden. Der Frequenzbereich der zweiten Biege- und Torsionseigenform konnte durch alle Anregungsarten relativ genau bestimmt werden. Auch die ermittelten Dämpfungen diese Schwingungsformen bewegen sich in derselben Größenordnung. Die Zugsüberfahrten ergeben, verglichen mit den anderen Anregungsarten, eindeutig höhere Dämpfungswerte. Diese könnten durchaus realistisch sein, eigenartig ist nur, dass für die Torsionsschwingungen geringere Dämpfungen als für die Biegeschwingungen ermittelt wurden. Der Grund dafür könnte sein, dass bei der Überfahrt die Biegeeigenformen stärker angeregt wurden als die Torsionsformen.

Um genauere Werte für die Frequenzen und Dämpfungen der Torsionseigenformen und der zweiten Biegeeigenform zu erhalten, müsste die Brücke in dem betrachteten Frequenzbereichen, durch eine gezielte Anregung dieser Schwingungsformen, getestet werden.

## 7 Schlussfolgerungen

Aus der Auswertung der Messungen der Versuchsbrücke konnte festgestellt werden, dass die durch *ARTEMIS* ermittelten Werte und die Ergebnisse aus [14] relativ genau übereinstimmen. Die Annahme von *ARTEMIS*, dass die Anregung durch weißes Rauschen geschieht, hat - zumindest für diese Messungen - keinen erkennbaren Einfluss auf die Resultate. Dadurch wird gewährleistet, dass die Ergebnisse der beiden unterschiedlichen Auswerteverfahren auch für andere Objekte untereinander verglichen werden können, falls gewisse Anforderungen bezüglich Signallänge und Form der Anregung eingehalten werden.

Wie aus den Auswertungen der Messungen der Frequenzanregungen der Brücke in Persenbeug ersichtlich wird, gibt es durchaus Fälle in denen die Auswertung durch *ARTEMIS* nicht die besten Ergebnisse liefert. *ARTEMIS* kann eine Summe stationärer Schwingungen nur richtig auswerten, falls sehr geringe Frequenzschritte gewählt wurden. Zumindest für den gesamten Bereich der zur Ermittlung eines Modes herangezogen wird. Das heißt, es muss ein ausreichend großer Frequenzbereich vor und nach der betreffenden Resonanzfrequenz in sehr kleinen Frequenzschritten in stationäre Schwingungen versetzt und gemessen werden. Für die Laborbrücke war dies der Fall, für die Brücke in Persenbeug waren die Frequenzschritte oberhalb der Resonanzfrequenz zu groß.

Eine Frequenzanregung liefert generell gute Resultate, Vorsicht ist nur bei der Wahl der Auswertemethode geboten. Des Weiteren ist bei der Bestimmung der dynamischen Parameter von Brücken durch gezielte Frequenzanregung, die durch die Unwucht-Erreger verursachte zusätzliche Masse zu berücksichtigen, die die ermittelten Frequenzen etwas nach unten drückt.

Eine Auswertung der ambienten Messungen ohne Zugsüberfahrten liefert zwar, wie die Analyse der Ausschwingvorgänge nach Zugsüberfahrten, im Bezug auf die Frequenzen ähnliche Ergebnisse, die ermittelten Dämpfungen sind aber auf Grund der kleineren Amplituden um einiges geringer. Ambiente Messungen sind also eine gute Möglichkeit um aussagekräftige Werte für die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen einer Brücke zu erhalten. Um realistische Dämpfungswerte zu ermitteln, muss jedoch eine ausreichende Anregung des Tragwerks sichergestellt werden.

Zugsüberfahrten sind eine gute Anregungsart für Schwingungsmessungen von Brücken. Die Analyse von Ausschwingvorgängen von Zugsüberfahrten liefert gute Werte für die Frequenzen der ersten Eigenformen. Durch die starke Erregung des Tragwerks bei dieser Anregungsart, können auch die Dämpfungswerte in einer realistischen Größenordnung ermittelt werden. Die Auswertung von ambienten Schwingungen und Zugsüberfahrten in einer Messdatei wäre sehr interessant und vermutlich für die Auswertung durch *ARTEMIS* ideal. Die Messgenauigkeit müsste mittels Verstärkung so gewählt werden, dass sowohl die Spitzen der Zugsüberfahrt, als auch der Übergang des Ausschwingvorgangs dieser Überfahrt in eine „rein“ ambiente Schwingung erfasst werden können.

Der größte Vorteil ambienter Messungen von Brücken mit oder ohne Verkehrslast (Züge bzw. Straßenverkehr) ist, dass sie schnell und einfach durchzuführen sind. Es ist nur das Messequipment erforderlich und es erfolgt keine Beeinträchtigung des Verkehrs.

Eine Impulsanregung liefert bei ausreichend starker Anregung des Systems eine gute Grundlage für die Ermittlung der dynamischen Eigenschaften. Der untersuchte Rahmen konnte mit dem Impulshammer stark erregt werden, wobei große Schwingungsamplituden erzielt wurden. Die Resultate dieser Messungen ergaben deshalb ein sehr gutes Ergebnis.

Auf Grund der sehr weichen Konstruktion der Laborbrücke konnte auch diese durch den Impulshammer angeregt werden. Der Energieeintrag war aber (im Verhältnis zur Steifigkeit) gering, mit dem Ergebnis, dass die Steifigkeit des Systems etwas überschätzt und die Dämpfungen unterschätzt wurden.

Noch extremer war dieses Verhältnis bei der getesteten Brücke in Persenbeug, als Folge dessen konnte gezeigt werden, dass bei einer derart großen Struktur (Eisenbahnbrücken im Allgemeinen) mit einem Impulshammer unseres Formats keine vernünftigen Ergebnisse mehr erzielt werden können. Abhilfe könnten hier Messungen mit schweren Fallgewichten, die einen deutlich höheren Energieeintrag ermöglichen, schaffen.

Die Wahl der Anregungsart und der damit verbundene Energieeintrag in das System sind somit ausschlaggebend für die Qualität der Ergebnisse. Des Weiteren spielt auch die Wahl der Analyseverfahren eine große Rolle, da manchmal mit einfacheren Mitteln bessere Resultate erzielt werden können. Daher sollte man sich schon vor der Analyse Gedanken darüber machen, welches Auswerteverfahren, im Bezug auf die Art und Qualität der Messungen, die besten Ergebnisse liefern könnte. Bezogen auf *ARTEMIS* empfiehlt es sich, sich zu Beginn einer Analyse durch eine FDD Methode einen Überblick über das dynamische Systemverhalten zu verschaffen. Die Resultate der FDD Methoden bilden, vor allem bei deutlich erkennbaren Resonanzbereichen im SVD Diagramm, einen gut Vergleichswert für die Ergebnisse der SSI Verfahren.

Mit den komplexen Algorithmen der SSI Verfahren lassen sich für jede Messung Ergebnisse (Eigenfrequenzen, Dämpfungswerte und zugehörige Schwingungsformen) erzielen. Sogar für die Impulsanregung der Persenbeug Brücke wurden eine erste Biege- und Torsionseigenform identifiziert, mit dem Problem, dass die Frequenzen um das Zwei- bis Dreifache höher als die tatsächlichen Eigenfrequenzen ermittelt wurden. Würde man solchen Ergebnissen Glauben schenken, könnte dies schwerwiegende Folgen haben. Die Steifigkeit der Struktur würde wesentlich überschätzt werden und die Resonanzfrequenzen würde man in viel zu hohen Frequenzbereichen vermuten. Gerade bei Systemen bei denen die dynamischen Eigenschaften nicht bekannt sind, gibt es daher die Ergebnisse einer solchen Datenanalyse genau zu hinterfragen. Für die Frequenzen lassen sich oft sogar aus schlechten Messdaten realistische Werte erzielen, für die richtige Bestimmung der Dämpfungen werden jedoch wesentlich höhere Anforderungen gestellt.

Die Messung einer ambienten Anregung eignet sich ideal für eine Erstuntersuchung von Brückentragwerken. Falls die Messung von Zugsüberfahrten möglich ist, kann die Qualität der Resultate dadurch verbessert werden. Es wird somit möglich, auch Aussagen über die Dämpfungen zu treffen. Wird jedoch auch für die Dämpfungen eine große Genauigkeit gefordert, so empfiehlt sich die gezielte Anregung des Tragwerks im Bereich der betrachteten Frequenzen. Man muss somit von Projekt zu Projekt entscheiden, welche Genauigkeit erforderlich ist und dementsprechend eine passende Anregungsart wählen. Auf jeden Fall muss die Person, die die Auswertung durchführt, viel Erfahrung mitbringen, um die Ergebnisse im Hinblick auf ihre Zuverlässigkeit beurteilen zu können.

## 8 Literaturverzeichnis

- [1] C. Bucher, „Studienblätter zur Lehrveranstaltung Baudynamik,“ TU-Wien, 2009.
- [2] Brüel & Kjaer, *State Space Model, IOMAC, OMA Pre-conference Course, Vortragspräsentation*, Istanbul, 2011.
- [3] H. G. Natke, „Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse,“ Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1992.
- [4] R. Heuer, „Studienblätter zur Lehrveranstaltung Baudynamik,“ TU-Wien, 2007.
- [5] D. P. Helmut Wenzel, *Ambient Vibration Monitoring*, Chichester, West Sussex, England: John Wiley & Sohn Ltd, 2005.
- [6] V. Bungard, J. Mahowald, D. Waldmann, S. Maas und A. Zürbes, „Dynamische Zustandsbewertung einer Verbundbrücke: Beobachtung äußerer und nichtlinearer Einflüsse auf die modalen Eigenschaften,“ *Beton- und Stahlbeton*, Nr. Heft 8, 2010.
- [7] Nipitsch-Heiden, „Westbahnstrecke Wien-Salzburg, Ertüchtigung für 250km/h,“ Ingenieurbüro DI Nipitsch & DI Heiden, Graz, 2007.
- [8] R. R. J. Craig und A. J. Kurdila, *Fundamentals of Structural Dynamics*, Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons., 2006.
- [9] G. Merzinger und T. Wirth, *Repetitorium der Höheren Mathematik*, Hannover: Binomi, 2002.
- [10] R. Allemang und D. Brown, „A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, In Proc. 1st International Modal Analysis Conference (IMAC I),“ Orlando, Florida, USA, 1982.
- [11] S. El-Borgi, S. Choura, C. Ventura, M. Baccouch und F. Cherif, „Modal identification and model updating of a reinforced concrete bridge,“ 2005.
- [12] P. Andersen, *Artemis Programmhilfe, A/S*, Structural Vibrations Solutions.
- [13] G. Doblinger, *Zeitdiskrete Signale und Systeme*, Wilburgstetten: j.Schlembach Fachverlag, 2007.
- [14] T. C. Mähr, *Dissertation: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau unter Verkehrslast*, TU Wien, 2008/09.
- [15] J. Kirchhofer, „Forschungsbericht: Dynamische Untersuchungen an einer Eisenbahnbrücke,“ TU Wien, 2010.

## 9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Modell eines linearen Einmassenschwingers (SDOF) .....	4
Abbildung 1.2: Modell eines linearen Mehrmassenschwingers .....	5
Abbildung 1.3: Darstellung der Kraftvektoren im komplexen Raum .....	8
Abbildung 1.4: Kraftvektoren Polygon .....	8
Abbildung 1.5: Amplitudenfrequenzgang eines Einmassenschwingers für unterschiedliche Dämpfungen.....	9
Abbildung 1.6: Phasenfrequenzgang eines Einmassenschwingers für unterschiedliche Dämpfungen..	9
Abbildung 1.7: Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers .....	11
Abbildung 1.8: Schematische Darstellung der modalen Analyse.....	14
Abbildung 1.9: Modale Aufteilung einer Übertragungsfunktion .....	15
Abbildung 1.10: Periodische Funktion mit Periode $T_p$ .....	17
Abbildung 1.11: Darstellung einer Quadratwelle durch die ersten vier Sinusterme der zugehörigen Fourierreihe.....	17
Abbildung 1.12: $x(t)$ und $ X(f) $ eines Einmassenschwingers.....	19
Abbildung 1.13: Real- und Imaginär-Teil einer FFT eines Einmassenschwingers (von $0$ bis $f_s$ ) .....	20
Abbildung 1.14: FFT eines Einmassenschwingers im komplexen Zahlenraum .....	21
Abbildung 1.15: Zeitreihe eines Kragträgers nach Impulsanregung .....	21
Abbildung 1.16: FFT eines Kragträgers nach Impulsanregung .....	22
Abbildung 1.17: Darstellung der FFT aus Abbildung 1.16 im komplexen Zahlenraum .....	22
Abbildung 2.1: Darstellung einer Zugsüberfahrt im Beschleunigungs-Zeit-Diagramm.....	28
Abbildung 2.2: FFT einer Zugsüberfahrt mit und ohne Überfahrtsphase .....	28
Abbildung 2.3: Die Ausschwingphasen mehrerer Zugsüberfahrt aneinander gereiht .....	29
Abbildung 2.4: Ausschwingvorgang eines viskos gedämpften Einmassenschwingers .....	30
Abbildung 2.5: Ausschwingvorgang für Halbe Amplituden Methode.....	31
Abbildung 2.6: normalisierte Übertragungsfunktion für einen Einmassenschwinger .....	33
Abbildung 2.7: Ermittlung der Schwingungsform .....	37
Abbildung 2.8: Erste und dritte Schwingungsform eines Einfeldträger .....	39
Abbildung 3.1: Schwingungssystem .....	41
Abbildung 3.2: Messlayout und Schwingungsformen einer Brücke .....	42
Abbildung 3.3: SVD eines 4-Freiheitsgradsystems .....	46
Abbildung 3.4: SVD eines 4-Freiheitsgradsystems mit eingetragenen Moden.....	47
Abbildung 3.5: SVD Auswertung durch Peak Picking (FDD) .....	47
Abbildung 3.6: SDOF Glocke der zweiten Eigenform (EFDD; MAC 0.35) .....	48
Abbildung 3.7: SDOF Glocke der zweiten Eigenform (EFDD; MAC 0.8) .....	48
Abbildung 3.8: Modale Abschätzung (EFDD).....	49
Abbildung 3.9: SVD einer CFDD Auswertung .....	50
Abbildung 3.10: Zeit-Messsignal Diagramm.....	51
Abbildung 3.11: Zusammenhang Modale Ordnung, Passungenauigkeit und Parameter Unbestimmtheit [12].....	51
Abbildung 3.12: Signal Processing von ARTeMIS .....	58
Abbildung 3.13: Decimation; Auszug aus ARTeMIS .....	58

Abbildung 3.14: Filtering; Auszug aus <i>ARTEMIS</i> .....	59
Abbildung 3.15: Bode Diagramm Tiefpassfilter .....	59
Abbildung 3.16: Projection Channels; Auszug aus <i>ARTEMIS</i> .....	60
Abbildung 4.1: Erste und dritte Schwingungsform eines Balkens; zweite Schwingungsform eines Balkens .....	62
Abbildung 4.2: Messaufbau.....	63
Abbildung 5.1: Versuchsrahmen: Foto; Plandarstellung; <i>ARTEMIS</i> Model.....	64
Abbildung 5.2: SVD Diagramm Rahmen Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	66
Abbildung 5.3: Schwingungsformen - Rahmen Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	66
Abbildung 5.4: SVD Diagramm Rahmen ambiente Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	67
Abbildung 5.5: Schwingungsformen - Rahmen ambiente Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	67
Abbildung 5.6: Bild der Versuchsbrücke [14] .....	69
Abbildung 5.7: Ansicht und Grundriss der Versuchsbrücke [14] .....	70
Abbildung 5.8: Messlayout Versuchsbrücke .....	70
Abbildung 5.9: SVD Diagramm Versuchsbrücke Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	72
Abbildung 5.10: Schwingungsformen - Versuchsbrücke Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	72
Abbildung 5.11: SVD Diagramm Versuchsbrücke Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	73
Abbildung 5.12: Schwingungsformen - Versuchsbrücke Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	73
Abbildung 5.13: SVD Diagramm Versuchsbrücke ambiente Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	74
Abbildung 5.14: Schwingungsformen - Versuchsbrücke ambiente Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	74
Abbildung 6.1: Bild der Brücke in Persenbeug .....	77
Abbildung 6.2: Schnitt in Brückenmitte (Brücke Persenbeug) [15] .....	77
Abbildung 6.3: Draufsicht (Brücke Persenbeug) [15].....	78
Abbildung 6.4: Messlayout Brücke Persenbeug.....	78
Abbildung 6.5: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	81
Abbildung 6.6: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Impulsanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	81
Abbildung 6.7: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	82
Abbildung 6.8: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	82
Abbildung 6.9: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Ausschwingvorgang der Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	83
Abbildung 6.10: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Ausschwingvorgang der Frequenzanregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	83
Abbildung 6.11: SVD Diagramm Brücke Persenbeug Zugsüberfahrten ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	84
Abbildung 6.12: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug Zugsüberfahrten ( <i>ARTEMIS</i> ).....	84
Abbildung 6.13: SVD Diagramm Brücke Persenbeug ambiente Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ) .....	85
Abbildung 6.14: Schwingungsformen – Brücke Persenbeug ambienten Anregung ( <i>ARTEMIS</i> ).....	85
Abbildung 6.15: Beispiel einer logarithmischen Dekrementen Methode des Signals in Brückenmitte	87

## 10 Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: Beispiel für MAC Werte. ....	39
Tabelle 2.2: MAC Werte einer Schwingungsanalyse eines MDOF Systems mit nur einem Sensor. ....	40
Tabelle 2.3: MAC Werte der ersten Fünf Schwingungsformen einer Brücke. ....	40
Tabelle 5.1: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung des Rahmens ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	66
Tabelle 5.2: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung des Rahmens ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	67
Tabelle 5.3: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung der Versuchsbrücke ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	72
Tabelle 5.4: Ergebnisse der Analyse der Frequenzanregung der Versuchsbrücke ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	73
Tabelle 5.5: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung der Versuchsbrücke ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	74
Tabelle 5.6: Ergebnisse der Impulsanregung der Versuchsbrücke aus [14] und <i>ARTEMIS</i> . ....	75
Tabelle 5.7: Ergebnisse der Frequenzanregung der Versuchsbrücke aus [14] und <i>ARTEMIS</i> . ....	75
Tabelle 5.8: Vergleich der Ergebnisse der unterschiedlichen Anregungen; Werte aus <i>ARTEMIS</i> . ....	76
Tabelle 6.1: Ergebnisse der Analyse der Impulsanregung der Brücke in Persenbeug ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	81
Tabelle 6.2: Ergebnisse der Analyse der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug ( <i>ARTEMIS</i> ). ...	82
Tabelle 6.3: Ergebnisse der Analyse des Ausschwingvorgangs der Frequenzanregung der Brücke in Persenbeug ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	83
Tabelle 6.4: Ergebnisse der Analyse der Zugsüberfahrten der Brücke in Persenbeug ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	84
Tabelle 6.5: Ergebnisse der Analyse der ambienten Anregung der Brücke in Persenbeug ( <i>ARTEMIS</i> ). ....	85
Tabelle 6.6: Vergleich der Ergebnisse der Brücke in Persenbeug (Werte aus <i>ARTEMIS</i> ). ....	88