Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

Unterschrift des Betreuers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Alte und neue Ruinformeln und deren Implementierung

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Engelbert Kegele
Keilgasse 2/23
1030 Wien

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel der Arbeit **3**
1.1 Das Ausgangsmodell . . . 3
1.2 Die Ruinzeit und deren Verteilung . . . 4
1.3 Zielsetzung . . . 5

2 Hilfsfunktionen **6**
2.1 Das Hilfspolynom e_n . . . 6
2.2 Die Hilfsfunktion h_n . . . 7
2.3 Gemeinsamkeiten von h_n und e_n . . . 10

3 Die erste Formel nach Picard und Lefèvre **12**
3.1 Grundlegendes . . . 12
3.2 Explizite Darstellung von A_n . . . 16
3.3 Die Ruinwahrscheinlichkeit im linearen Fall . . . 19
3.3.1 Die Wahrscheinlichkeit nie Ruin zu erleiden . . . 20

4 Die zweite Formel nach Picard und Lefèvre **22**
4.1 Allgemeines . . . 22
4.2 Rekursion in der Zeit . . . 22
4.3 Rekursion in der Anfangsreserve . . . 23
4.4 Reduktion auf die Anfangsreserve Null . . . 25

5 Direkte Faltung **28**
5.1 Eine Diskretisierung der Zeit . . . 28
5.2 Die dritte Ruinformel . . . 29
5.3 Der Sonderfall $j < u$ . . . 31

6 Eine rekursive Ruinformel **33**
6.1 Allgemeines . . . 33
6.2 Die rekursive Ruinformel . . . 34

7 Die Ruinformel nach Takács **37**
7.1 Der Satz von Dwass und Dinges . . . 37
7.2 Die Formel von Takács . . . 38

8 Übergang von den „Appell“- zu den „Seal“-Formeln **40**
8.1 Ganzzahlige Schäden 40
8.2 Die Äquivalenz zwischen Appell- und Seal-Formeln 42
8.3 Numerischer Vergleich der Appell- und Seal-Formeln 44

9 Die Diskretisierung von stetigen Verteilungen **45**
9.1 Die Ruinwahrscheinlichkeit und ihre Abhängigkeit 45
9.2 Die Diskretisierung von stetigen Verteilungen 45
9.3 Elimination von Nullschäden 47
9.4 Ein Beispiel mit exponentialverteilten Schadenshöhen 49

10 Der Zeitaufwand der Berechnungen **52**
10.1 Die Komplexität der ersten Picard-Lefèvre Formel 52
10.1.1 Die Zeitkomplexität der h_j 53
10.1.2 1. Fall $u \leq n$ 54
10.1.3 2. Fall $u > n$ 55
10.2 Die zweite Formel nach Picard und Lefèvre 59
10.3 Direkte Faltung 60
10.4 Der Aufwand der rekursiven Formeln 62
10.5 Formel von Takács 65

11 Appendix **67**
11.1 Notationen und Konventionen 67
11.1.1 Allgemeine Notationen 67
11.1.2 Notationen aus der Risikotheorie 67
11.2 Appellpolynome 68
11.3 Die Ruinwahrscheinlichkeit im inhomogenen Modell 68
11.4 Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen 69
11.5 Panjerrekursion 69
11.6 Mathematica-Codes zur Berechnung der Werte in den Tabellen 70
11.6.1 Die Codes zur Berechnung der Werte für die Tabelle 8.1 70
11.6.2 Der Code zur Tabelle 9.1 72

Kapitel 1

Ziel der Arbeit

1.1 Das Ausgangsmodell

Jeder Versicherer ist daran interessiert einen möglichst positiven Ausgleich zwischen Einnahmen und Ausgaben zu erzielen. In einem vereinfachten Modell entstehen die Einnahmen durch ein schon vorhandenes Startkapital und die Prämieneinnahmen. Die Ausgaben entstehen offensichtlich durch die eintretenden Schäden. Sobald der Versicherer erkennt, dass die Schäden die Einnahmen übertreffen könnten und somit der *versicherungstechnische Ruin* eintritt, kann er dies durch diverse Maßnahmen einleiten, wie zum Beispiel eine Erhöhung der Prämien. Um aber frühzeitig zu erkennen, wann der Ruin eintreten könnte, braucht das Versicherungsunternehmen geeignete Werktzeuge um die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen.

In dieser Arbeit werden diverse Möglichkeiten aufgezeigt um die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen. Als Ausgangsmodell wird dazu das klassische Cramer-Lundberg Modell verwendet.

Das bedeutet, wir betrachten den sogenannten Risikoreserveprozess

$$R_t = u + P_t - S_t. \tag{1.1}$$

Mit $R_0 = u$ wird die Anfangsrisikoreserve beziehungsweise das Startkapital bezeichnet. Mit P_t wird der Prämienprozess beschrieben, wobei in dieser Arbeit der Prämienprozess meist die Form $P_t = ct$ hat. Die Höhe des Gesamtschadens S_t zum Zeitpunkt $t \geq 0$ wird durch einen zusammengesetzten Poissonprozess modelliert.

$$\begin{aligned} S_0 :=& 0 \\ S_t :=& \sum_{i=1}^{N_t} W_i \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dabei beschreibt $(N_t)_{t\geq 0}$ einen Standard-Poisson-Prozess mit Intensität λ und W_i bezeichnet die i-te Einzelschadenshöhe. Die W_i sind nichtnegativ, ganzzahlig, unabhängig identisch verteilt (u.i.v.) mit $(q_i)_{i\geq 0}$. Ebenso sind die W_i unabhängig vom Poisson-Prozess

$(N_t)_{t\geq 0}$. Die gemeinsame Verteilung der W_i ist gegeben durch die Faltungspotenzen

$$\begin{aligned} q_j^{*k} &:= \mathbb{P}[W_1 + \cdots + W_k = j] \\ q_j^{*0} &:= \delta_{j0}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bemerkung 1.1.1. Die Faltungspotenzen lassen sich für für $k \geq 1$ und $n \geq 0$ wie folgt rekursiv darstellen.

$$q_n^{*0} = \delta_{n0} \tag{1.4}$$

$$q_n^{*k} = \sum_{j=0}^{n} q_j^{*(k-1)} \cdot q_{n-j} \tag{1.5}$$

Um diese Rekursion zu veranschaulichen, wird in Tabelle 1.1 ein Beispiel für q_n^{*k} mit $0 \leq n \leq 5$ und $k = 2$ dargestellt.

n	q_n^{*2}
0	0
1	0
2	q_1^2
3	$2q_1q_2$
4	$q_2^2 + 2q_1q_3$
5	$2q_2q_3 + 2q_1q_4$

Tabelle 1.1: Beispiel für die Rekursion der Faltungspotenz

1.2 Die Ruinzeit und deren Verteilung

Im Allgemeinen wird die Ruinzeit T als jener Zeitpunkt definiert, zu welchem der Risikoreserveprozess $(R_t)_{t\geq 0}$ zum ersten Mal negativ wird, also

$$T = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\}. \tag{1.6}$$

Da die Ruinzeit offensichtlich vom Zufall abhängt, ist man grundsätzlich an ihrer Verteilung interessiert. Mit der Verteilung erhält man sodann die nötige Information über die Eintrittswahrscheinlichkeit von T, die sogenannte *Ruinwahrscheinlichkeit*.
Wie nachfolgend ersichtlich, gibt es verschiedene Ansätze zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit und somit unterschiedliche Möglichkeiten, die gesuchte Verteilung der Ruinzeit zu berechnen. In Kapitel 3 wird zum Beispiel hauptsächlich mit der Arbeit von *Philippe Picard und Claude Lefèvre* [7] gearbeitet, in welcher

$$\mathbb{P}_n(x) = \mathbb{P}[S_x = n \quad und \quad T > x], \qquad x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \tag{1.7}$$

als Ausgangsformel zur Ruinwahrscheinlichkeit verwendet wird. Mit dieser wird versucht, die Verteilung der Ruinzeit, beziehungsweise die Überlebenswahrscheinlichkeit, abhängig

vom letzten Schaden, der vor T eintritt, zu beschreiben.
In Kapitel 4 wird die Ausgansformel insofern verändert, indem man die Ruinwahrscheinlichkeit zu einem beliebigen, aber fixierten Zeitpunkt betrachten kann. Dies sind aber keineswegs die zwei einzigen möglichen Methoden, wie in den anderen Kapiteln zu sehen sein wird.

1.3 Zielsetzung

In dieser Arbeit werden zunächst fünf verschiedene Ruinformeln hergeleitet, wobei ein besonderes Augenmerk auf den ersten beiden Formeln, jene von *Philippe Picard und Claude Lefèvre*, liegt.
Im Anschluss daran wird das Ziel verfolgt, Gemeinsamkeiten zwischen den Formeln zu finden. Es wird nicht überaschend sein, dass, obwohl verschieden hergeleitet, die Formeln äquivalent sind.
Da es sich bei den in dieser Arbeit behandelten Formeln um Ruinformeln für diskret verteilte Schäden handelt, wird die Diskretisierung von stetigen Verteilungen einzusätzlicher Schwerpunkt sein. Die Anwendung der Ruinformeln mit einer derartigen Diskretisierung wird sodann mit einem Beispiel veranschaulicht und genauer erläutert.
Schlussendlich wird überprüft, wie hoch der Zeitaufwand ist, die Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit mit den fünf Ruinformeln durzuführen. Dabei liegt der Schwerpunkt wieder auf den Formeln von *Philippe Picard und Claude Lefèvre*.

Kapitel 2

Hilfsfunktionen

Um die Ruinformeln leichter beschreiben zu können werden in diesem Kapitel zwei Hilfsfunktionen mit sehr nützlichen Eigenschaften eingeführt. In Abschnitt 2.3 wird beweisen, dass diese Funktionen in sehr engem Zusammenhang stehen. Sie sind unter gewissen Voraussetzungen sogar äquivalent, trotzdem ist es notwendig, beide Funktionen einzuführen.

2.1 Das Hilfspolynom e_n

Gegeben ist eine Familie $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Polynomen welche durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x)s^n = e^{xg(s)} \tag{2.1}$$

definiert wird. Dabei gilt

$$g(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j, \tag{2.2}$$

wobei λ, wie in Abschnitt 1.1 bereits erklärt, die Intensität des Poisson-Prozesses $(N_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet und q_j die Eintrittswahrscheinlichkeit des j-ten Einzelschadens darstellt. Zusätzlich definieren wir den Operator Δ durch die Eigenschaften

$$\Delta e_{n+1} = e_n \qquad n > 0 \tag{2.3}$$

$$\Delta e_0 = 0 \tag{2.4}$$

und durch die Potenzen

$$\Delta^{r+1} = \Delta(\Delta^r) \qquad r \geq 0 \tag{2.5}$$

$$\Delta^0 \ldots \text{Identitätsfunktion} \tag{2.6}$$

Offensichtlich ist e_n ein Polynom n-ten Grades, für das gilt:

$$\begin{aligned} e_0(x) &= 1 \\ e_1(x) &= \lambda q_1 x \\ e_n(0) &= \delta_{n0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bezüglich Δ ist e_n sogar ein Appell-Polynom (siehe: 11.2). Diese Eigenschaft wird in Abschnitt 3.2 benötigt.

Die Ableitung von e_n lässt sich auch in einer günstigen Form darstellen:

$$e_n' = \sum_{j=1}^{n} \lambda q_j e_{n-j} \qquad n > 0 \tag{2.8}$$

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n'(x) s^n = \left(e^{xg(s)}\right)' \tag{2.9}$$

$$= g(s) e^{xg(s)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda q_j s^j \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) s^n \tag{2.10}$$

Da beide Summen absolut konvergieren, kann das Cauchy-Produkt angewendet werden. Somit erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda q_j e_{n-j}(x) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda q_j e_{n-j}(x) \Big) \tag{2.11}$$

$$\underset{(2.9)}{\Rightarrow} e_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda q_j e_{n-j}(x).$$

[7], S.66 □

2.2 Die Hilfsfunktion h_n

Angeneommen es gilt $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}$ und $c > 0$. Zusätzlich sind die Faltungspotenzen q_n^{*i} aus (1.3) sowie von $(N_t)_{t \geq 0}$ die Intensität λ gegeben. Die Hilfsfunktion $h_n(x)$, mit $h_n{:}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wird definiert durch

$$h_n(0) := \delta_{n0} \tag{2.12}$$

$$h_n(x) := \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda \frac{x}{c}} \frac{(\frac{\lambda x}{c})^i}{i!} q_n^{*i}. \tag{2.13}$$

Bemerkung 2.2.1. Die Funktion h_n wurde zwar auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, jedoch wird h_n in dieser Arbeit nur für Argumente in $\mathbb{R}$ benötigt. Wenn jedoch h_n auf ganz $\mathbb{C}$ betrachtet wird, erkennt man unmittelbar an der Definition, dass es sich um *ganze Funktionen* handelt (siehe 11.4). Mit dieser Eigenschaft lassen sich so manche Beweise einfacher führen.

Ebenso wird für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) := \sum_{i=0}^{n} h_i(x) \tag{2.14}$$

definiert und für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^*$

$$\tilde{H}_n(x) := \sum_{i=0}^{n} h_i(x)\Big(1 - \frac{i}{x}\Big). \tag{2.15}$$

Der Grenzwert von $\tilde{H}_0(x)$ für $x \to 0$ existiert und dieser ist gleich 1, wie aus folgender kurzer Rechnung ersichtlich ist.

$$\lim_{x\to 0} \tilde{H}_0(x) = \lim_{x\to 0} h_0(t)\big(1 - \frac{0}{x}\big) = \lim_{x\to 0} e^{-\lambda x} = 1 \tag{2.16}$$

In der folgenden Tabelle werden die h_n für beliebiges x und c für $n = 5$ Schritte veranschaulicht.

n	$h_n(cx)$
0	$e^{-\frac{\lambda x}{c}}$
1	$\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda x q_1}{c}$
2	$\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^2 x^2 q_1^2}{2c^2} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda x q_2}{c}$
3	$\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^3 x^3 q_1^3}{6c^3} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^2 x^2 q_1 q_2}{c^2} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda x q_3}{c}$
4	$\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^4 x^4 q_1^4}{24c^4} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^3 x^3 q_1^2 q_2}{2c^3} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^2 x^2 (q_2^2+q_1 q_3)}{2c^2} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda x q_4}{c}$
5	$\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^5 x^5 q_1^5}{120c^5} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^4 x^4 q_1^3 q_2}{6c^4} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^3 x^3 (2q_1 q_2^2+q_1^2 q_3+q_1(q_2^2+2q_1 q_3))}{6c^3}$
	$+\frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda^2 x^2 (2q_2 q_3+2q_1 q_4)}{2c^2} + \frac{e^{-\frac{\lambda x}{c}}\lambda x q_5}{c}$

Tabelle 2.1: Veranschaulichung der Hilfsfunktion h_n

Lemma 2.2.1. sind $c, x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wiederum sind *Lambda* und q_i die aus Abschnitt 1.1 bekannten Größen. So gilt für den Gesamtschaden S_x und die Hilfsfunktion $h_n(x)$ der Zusammenhang

$$h_n(x) = \mathbb{P}\big[S_{\frac{x}{c}} = n\big]. \tag{2.17}$$

Beweis. Da $(N_x)_{x\geq 0}$ ein Poissonprozess ist, handelt es sich bei S_x definitionsgemäß um einen Compound-Poissonprozess, dessen Verteilung folgendermaßen gegeben ist:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_x = n] &= \mathbb{P}\Big[\sum_{k=0}^{N_x} W_k = n\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{n} q_n^{*k} \cdot \mathbb{P}[N_x = n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} q_n^{*k} \cdot e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Wobei λ die Intensität von $(N_x)_{x\geq 0}$ ist und die q_n^{*k} die Wahrscheinlichkeiten und Faltungspotenzen aus 1.1 sind. Da (2.18) genau die Definition von $h_n(\frac{x}{c})$ ist, folgt daraus Lemma 2.2.1 □

Eine angenehme Eigenschaft der Funktion h_n ist, dass sie sich relativ einfach rekursiv darstellen lässt.

Lemma 2.2.2. Sei $x \in \mathbb{C}$. Die Parameter λ und q_i sind gegeben, wie in Abschnitt 1.1 und es sei $c > 0$. So gilt für die Hilfsfunktion $h_n(x)$ die Rekursion

$$h_0(x) := e^{-\lambda \frac{x}{c}} \tag{2.19}$$

$$h_n(x) := \frac{\lambda x}{cj} \sum_{i=1}^{n} i q_i h_{n-i}(x). \tag{2.20}$$

Beweis zu Lemma 2.2.2. Für $x > 0$ ist (2.20) die Panjer-Rekursion aus Satz 11.5.1 mit

$$\begin{aligned} g(n) &= h_n \\ f(i) &= q_i \\ a &= 0 \\ b &= \frac{\lambda x}{c} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Da es sich bei den $h_n(x)$ um ganze Funktionen handelt, gilt hier der Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Satz 11.4.1) und somit gilt (2.20) auf ganz $\mathbb{C}$. □

Für die h_n existiert auch eine *Faltungsformel*, die sich zu späteren Zeitpunkten als sehr nützlich erweisen wird.

Satz 2.2.1. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$h_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k}(x) h_k(y) \tag{2.22}$$

Beweis. Sind $x, y \in \mathbb{R}_+$, dann gilt auf Grund von Lemma 2.2.1

$$h_n(x+y) = \mathbb{P}\big[S_{\frac{x+y}{c}} = n\big] \tag{2.23}$$

und

$$h_{n-k}(x) = \mathbb{P}\big[S_{\frac{x}{c}} = n-k\big] \tag{2.24}$$

$$h_k(y) = \mathbb{P}\big[S_{\frac{y}{c}} = k\big] \tag{2.25}$$

Da S_x als zusammengesetzter Poisson-Prozess unabhängige und stationäre Inkremente besitzt, gilt die Gleichung

$$\mathbb{P}\big[S_{\frac{x+y}{c}} = n\big] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big[S_{\frac{x}{c}} = n-k\big] \cdot \mathbb{P}\big[S_{\frac{y}{c}} = k\big] \tag{2.26}$$

und somit gilt (2.22) auch für $x, y \in \mathbb{R}_+$

Es ist nun noch zu zeigen, dass (2.22) für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt. Es wird $x \in \mathbb{R}_+$ fixirrt und es wird die linke und die rechte Seite von (2.22) als ganze Funktion von $y \in \mathbb{C}$ betrachtet. Die beiden Seiten stimmen für alle $y \in \mathbb{R}_+$ überein, also gilt (2.22), auf Grund des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen (Satz 11.4.1), für $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{C}$.

Sei umgekehrt ein $y \in \mathbb{C}$ fixiert und es wird wiederum (2.22) als ganze Funktion von $x \in \mathbb{C}$ betrachtet, so kann, wie im vorherigen Schritt wegen Satz 11.4.1, erneut geschlossen werden, dass die Funktion für alle $x \in \mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{C}$ gilt.

Somit ist Satz 2.2.1 bewiesen. □

2.3 Gemeinsamkeiten von h_n und e_n

Der Gesamtschaden wird zum Zeitpunkt $t = \frac{x}{c}$ betrachtet und es gilt der Prämienprozess $P_t = ct$. Somit erhält man einen vereinfachten, konstanten Prämienprozess

$$P_t = ct = \frac{x}{c}c = 1 \ . \tag{2.27}$$

Lemma 2.3.1. Sei λ die Intensität von $(N_x)_{x \geq 0}$. Sind zusätzlich $c > 0$ und $x > 0$ so gilt für die Funktion h_n aus dem vorangegangen Abschnitt folgende explizite Darstellung

$$h_n(cx) = e^{-\lambda x} e_n(x) \ . \tag{2.28}$$

Beweis. Für den Beweis wird in Kapitel 3 vorgegriffen.
Aus den Formeln (3.10) und (3.29) und daher, dass $(S_t)_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, folgt

$$e^{-\lambda x} e_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q_n^{*k}. \tag{2.29}$$

Da (N_x) ein Poisson-Prozess ist und mit der Definition der Faltungspotenzen aus Abschnitt 1.1, gelten offensichtlich die Gleichungen

$$e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \mathbb{P}[N_x = k] \tag{2.30}$$

$$q_n^{*k} = \mathbb{P}[W_1 + \cdots + W_k = n] \tag{2.31}$$

Es gilt daher:

$$e^{-\lambda x} e_n(x) = \mathbb{P}[S_x = n] \tag{2.32}$$

Es ist aber auch aus Lemma 2.2.1 bekannt, dass

$$h_n(x) = \mathbb{P}[S_{\frac{x}{c}} = n] \tag{2.33}$$

gilt. Es folgt die Gleichheit aus Lemma 2.3.1 für $x \geq 0$, das heißt, sie gilt in dem Definitionsbereich, in welchem h_n als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden kann. □

Somit ist die aus dem Beginn dieses Kapitel erwähnte Äquivalenz von h_n und e_n gezeigt.

Kapitel 3

Die erste Formel nach Picard und Lefèvre

3.1 Grundlegendes

Bei der ersten Formel nach *Picard und Lefèvre* wird von dem Ruinmodell aus (1.1) ausgegangen und der hier verwendete Prämienprozess hat die Form

$$P_t = ct. \tag{3.1}$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wird hier von der folgenden Verteilung der Ruinzeit ausgegangen:

$$\mathbb{P}_n(x) = \mathbb{P}[S_x = n \quad \text{und} \quad T > x], \qquad x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Es ist zu beachten, dass $T = +\infty$ gilt für den Fall, dass kein Ruin eintritt. Da $(N_x)_{x\geq 0}$ einen Poissonprozess mit Intensität λ beschreibt, kann auch sofort die Ruinwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt x mit Gesamtschadenshöhe $S_x = 0$ geschrieben werden als

$$\mathbb{P}_0(x) = \mathbb{P}[S_x = 0] = \mathbb{P}[N_x = 0] = e^{-\lambda x} \tag{3.3}$$

Ebenso ist auch durch Einsetzen von $S_t = n$, $t = \frac{n-u}{c}$ und $P_t = ct$ in (1.1) leicht ersichtlich, dass für $x < \max\{0, \frac{n-u}{c}\}$ und $n > 0$

$$\mathbb{P}_n(x) = 0 \tag{3.4}$$

gilt, was die folgende kurze Rechnung beweist.

$$\begin{aligned} R_t &= u + ct - S_t \\ &= u + c\frac{n-u}{c} - n = 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall erkent man, wie in Figur 3.1 ersichtlich ist, dass der Zustand $\{S_x = n \text{ und } T > x\}$ nicht mehr möglich ist, da der Ruin schon eingetreten ist.

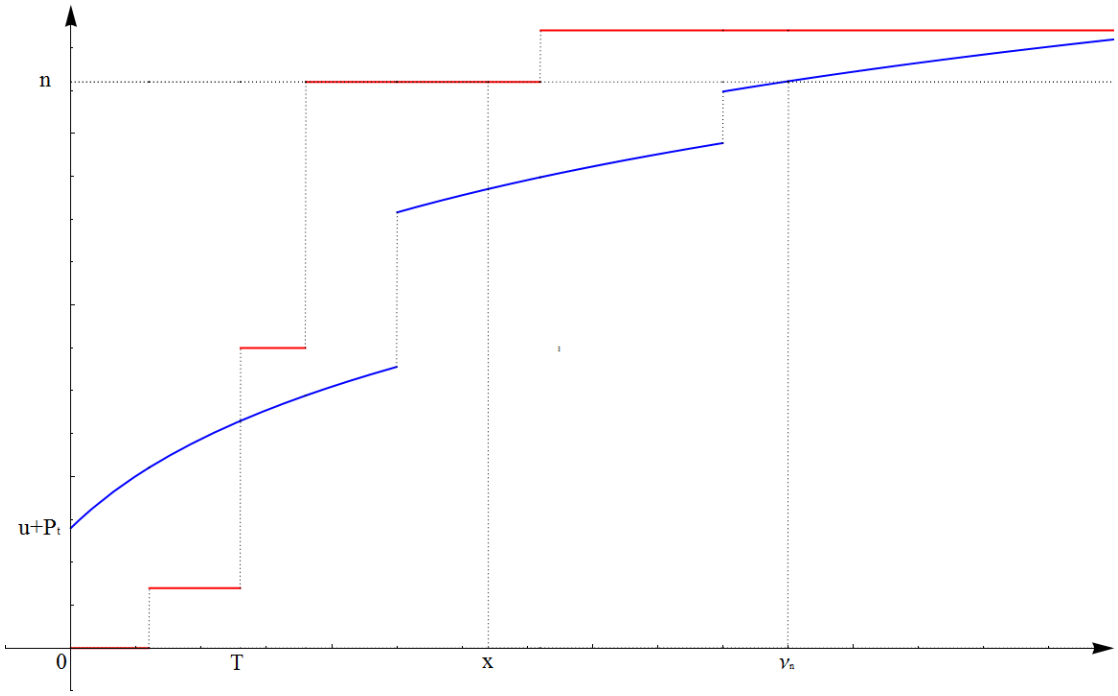

Abbildung 3.1: Ruin vor dem Zeipunkt x, konkret $x \leq \nu_n$

Proposition 3.1.1. Für $x \geq \max\{0, \frac{n-u}{c}\}$ und $n > 0$ gilt

$$\mathbb{P}_n(x) = \int_{\nu_n}^{x} \sum_{j=1}^{n} q_j \mathbb{P}_{n-j}(t) e^{-\lambda(x-t)} dt, \tag{3.5}$$

wobei ν_n folgendermaßen definiert ist:

$$\nu_n = \max\{0, \frac{n-u}{c}\} \tag{3.6}$$

[7], (2.4)

Beweisskizze. In Proposition 3.1.1 wird auf den letzten Schaden vor x bedingt. Die „Nummer“ des letzten Schadens vor x wird mit N_x bezeichnet. Ebenso ist bekannt, dass T_{N_x} der Zeitpunkt des letzten Schadens vor x ist.

Die Dichte von T_{N_x} gegeben durch

$$\mathbb{P}\big[T_{N_x} \leq t\big] = e^{-\lambda(x-t)} \tag{3.7}$$

Dies gilt da

$$\mathbb{P}\big[T_{N_x} \leq t\big] = \mathbb{P}[S_\xi = 0, t \leq \xi < x] \tag{3.8}$$

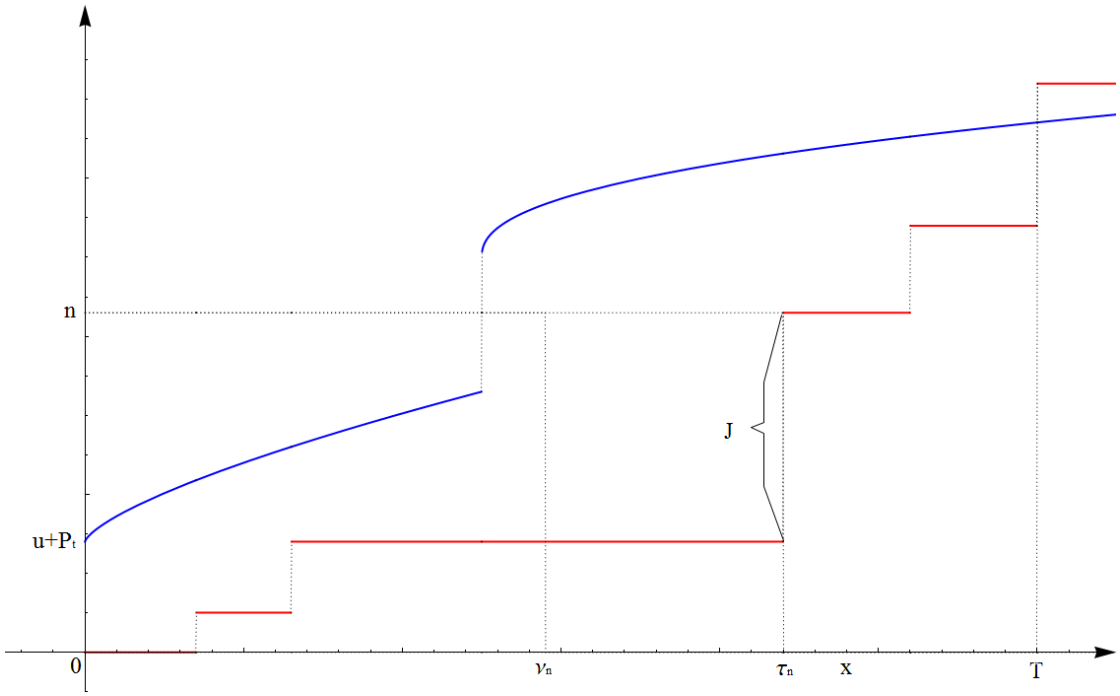

Abbildung 3.2: Ruin nach Zeitpunkt x, konkret $x > \nu_n$

Das bedeutet, dass im Intervall $[t, x[$ kein Schaden aufgetreten ist und somit kann (3.8) umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_\xi = 0, t \leq \xi < x] &= \mathbb{P}[N_x - N_t = 0] \\ &= e^{-\lambda(x-t)} \quad , 0 < t < x \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wenn man nun die Wahrscheinlichkeiten, dass überhaupt Schäden bis N_x aufteten, das heiSSt die Wahrscheinlichkeit, dass noch kein Ruin bis dahin aufgetreten ist, also die q_j und $\mathbb{P}_{n-j}$ für $j = 1, \ldots, n$ betrachtet und dazu noch ausschließt, dass der Gesamtschaden 0 ist, erhält man 3.1.1. □

Ein Beispiel für $x > \nu_n$ ist durch Abbildung 3.2 gegeben.

Um mit (3.5) leichter arbeiten zu können, wird die Substitution

$$\int_{\nu_n}^{x} \sum_{j=1}^{n} q_j \mathbb{P}_{n-j}(t) e^{\lambda t} = A_n(x) \tag{3.10}$$

angewendet. Folglich gilt

$$\mathbb{P}_n(x) = e^{-\lambda x} A_n(x) \qquad \text{für } x \geq \nu_n. \tag{3.11}$$

Substituiert man wiederum die $\mathbb{P}_n$ in (3.3) und (3.5) mit (3.11), so erhält man für $A_0(x)$

$$A_0(x) = 1. \tag{3.12}$$

Zusätzlich erhält man für das Polynom A_n eine zu $\mathbb{P}_n$ äquivalente rekursive Darstellung.

$$A_n(x) = \int_{\nu_n}^{x} \sum_{j=1}^{n} q_j A_{n-j}(t)dt \quad \text{für } x \geq \nu_n,\, n > 0 \tag{3.13}$$

Aus dieser Rekursion sieht man, dass

$$A_n(\nu_n) = 0 \tag{3.14}$$

und

$$A_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda q_j A_{n-j}(x), \qquad n > 0 \tag{3.15}$$

gelten muss. Durch (3.14) und (3.15) sind die A_n *eindeutig* bestimmt (*ohne Beweis*).

Bemerkung 3.1.1. : Im Fall, dass alle Einzelschäden die Höhe 1 haben, also im Poisson-Fall, gilt $q_j = 0$ für $j \neq 1$. Das bedeutet:

$$A_n' = \lambda A_{n-1}, \quad n > 0 \tag{3.16}$$

Äquivalent dazu gilt

$$(\lambda^{-n} A_n)' = \lambda^{-(n-1)} A_{n-1}, \qquad n > 0, \tag{3.17}$$

was zeigt, dass die Familie $\{\lambda^{-n}, n = 0, 1, \dots\}$ eine Familie von Appellpolynomen ist. [1], [5], [7] „Abschnitt 2“ S.59 und S.60

Satz 3.1.1. Sind die A_n durch (3.12), (3.14) und (3.15) gegeben, so gilt:

$$\mathbb{P}[S_x = n \quad \text{und} \quad T > x] = e^{-\lambda x} A_n(x) \mathbb{I}_{\{x \geq \nu_n\}} \tag{3.18}$$

[7] S.61 Theorem 2.1

Beweis. Durch die Herleitung der A_n und aus (3.11) ergibt sich der Satz direkt. □

Korollar 3.1.1. Es gilt unter den selben Voraussetzungen wie in Satz 3.1.1

$$\mathbb{P}[T > x] = e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \mathbb{I}_{\{x \geq \nu_n\}} \ . \tag{3.19}$$

Wird zusätzlich $\nu_j < x \leq \nu_{j+1}$ vorausgesetzt, so gilt auch

$$\mathbb{P}[T > x] = e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{j} A_n(x). \tag{3.20}$$

[7] S.61 Corollary 2.2

Beweisidee: Laut Satz 3.1.1 gilt

$$\mathbb{P}[S_x = n \quad \text{und} \quad T > x] = e^{-\lambda x} A_n(x) \mathbb{I}_{\{x \geq \nu_n\}} \tag{3.21}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[T > x] = e^{-\lambda x} A_0(x) \mathbb{I}_{\{x \geq \nu_0\}} + e^{-\lambda x} A_1(x) \mathbb{I}_{\{x \geq \nu_1\}}, \tag{3.22}$$

was die gesuchte Formel ist. □

3.2 Explizite Darstellung von A_n

In diesem Abschnitt wird eine explizite Darstellung der A_n im linearen Fall gesucht, wobei zu beachten ist, dass hier die Präminenzahlungen c konstant sind. Zur Vereinfachung verwendet man wieder $\nu_n := max\big(0, \frac{(n-u)}{c}\big), \quad n \geq 0$, sowie das Polynom $e_n(x)$ aus Kapitel 2.

Satz 3.2.1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$$(\alpha) \quad A'_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda q_j A_{n-j}, \qquad n > 0 \tag{3.23}$$

$$(\beta) \quad \Delta A_n = A_{n-1} \tag{3.24}$$

$$(\gamma) \quad A_n = \sum_{i=0}^{n} b_i e_{n-i}, \tag{3.25}$$

Dies gilt für eine geeignete Wahl der $\{b_i, i \geq 0\}$ und $n \geq 0$. [7], S.66

Zu diesen Äquivalenzen wird kein Beweis geführt.

Aufgrund dieser Äquivalenzen kann folgende Aussage getroffen werden.

Korollar 3.2.1. Sind die $\{b_i, i \geq 0\}$ rekursiv durch

$$\sum_{i=0}^{n} b_i e_{n-i}(\nu_n) = \delta_{n0} \tag{3.26}$$

gegeben, dann können die A_n aus Satz 3.1.1 für $n \geq 0$ dargestellt werden mit

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} b_i e_{n-i}. \tag{3.27}$$

[7], S.67

Satz 3.2.2 (Die explizite Darstellung der A_n)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ sei die Funktion $f_n(x)$ definiert durch:

$$f_n(x) := \frac{cx}{cx+n} e_n\Big(x + \frac{n}{c}\Big) \tag{3.28}$$

Mit der Funktion $f_n(x)$, $u \geq 0$ und der Hilfsfunktion e_n aus Kapitel 2 lassen sich im linearen Fall die A_n wie folgt explizit darstellen:

$$A_n(x) = \begin{cases} e_n(x) & \text{für } 0 \leq n \leq u \\ \sum\limits_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{j}\Big) f_{n-j}\Big(x - \frac{n-u}{c}\Big) & \\ = \sum\limits_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{j}\Big) \frac{cx-n+u}{cx-j+u} e_{n-j}\Big(x + \frac{u-j}{c}\Big) & \text{für } n > u \end{cases} \tag{3.29}$$

[7] S66. Theorem 4.1

Beweis. Um Satz 3.2.2 zu beweisen, muss überprüft werden, ob folgende bekannte Eigenschaften erfüllt sind:

$$(i) \quad A_0 = 1 \tag{3.30}$$

$$(ii) \quad A_n(\nu_n) = 0 \tag{3.31}$$

$$(iii) \quad \Delta A_n = A_{n-1} \qquad \text{für } n > 0 \tag{3.32}$$

(i). Der erste Punkt ist trivial, da aus $e_0(x) = 1$ direkt $A_0(x) = 1$ folgt. □

(ii). Hier müssen die Fälle $0 \leq n \leq u$ und $n > u$ getrennt betrachtet werden.
Für $n > u$ gilt:

$$cx - n + u = \tag{3.33}$$

$$c\nu_n - n + u = \tag{3.34}$$

$$c\frac{(n-u)}{c} - n + u = 0 \tag{3.35}$$

Somit wird in (3.29) über 0 summiert und es gilt (3.31) für $n > u$.

Gilt $0 \leq n \leq u$, so gilt $\nu_n = \max\{0, \frac{n-u}{c}\} = 0$. Daraus folgt mit (2.7)

$$A_n(\nu_n) = A_n(0) = e_n(0) = 0 \tag{3.36}$$

Somit ist (3.31) auch für $0 \leq n \leq u$ gezeigt. □

(iii). Der dritte Punkt ist etwas aufwändiger zu beweisen. Zuerst ist die Gleichung für $1 \leq n \leq u$ und für $1+u \leq n$ zu zeigen. Dann kann überprüft werden, ob sie für $u+1 = n$ gilt, das bedeutet, dass genau am Grenzübergang $\Delta A_{u+1} = e_u$ ist.
Der Fall $1 \leq n \leq u$ ist trivial. Hier gilt mit der Definition für Δ aus (2.3)

$$\Delta A_n = A_{n-1} \iff \Delta e_n = e_{n-1} \tag{3.37}$$

Für $1+u \leq n$ werden noch folgende Aussagen benötigt, welche *ohne Beweis* übernommen werden.

Lemma 3.2.1. Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass Δ shift-invariant ist. Das heißt, es gilt

$$\Delta S^a = S^a \Delta, \tag{3.38}$$

wobei S^a gegeben ist durch

$$S^a f(x) = f(x+a). \tag{3.39}$$

[7] S.64, Property 3.5

Lemma 3.2.2. So wie die Familie der Polynome $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ bezüglich Δ eine Appell-Struktur besitzt, so besitzt die Familie der Funktionen $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, mit den f_n aus (3.28), eine Appell-Struktur bezüglich $\tilde{\Delta}$. Dabei gilt die Definition

$$\tilde{\Delta} := \Delta S^{\frac{1}{c}} \tag{3.40}$$

[7] S.64, Property 3.6

Wird nun Lemma 3.2.1 und Lemma 3.2.2 in Satz 3.2.2 eingesetzt, so folgt

$$\Delta A_n = \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)\Delta f_{n-j}(x) \tag{3.41}$$

$$= \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)S^{\frac{(u-n+1)}{c}}\tilde{\Delta} f_{n-j}(x) \tag{3.42}$$

$$= \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)S^{\frac{(u-(n-1))}{c}} f_{n-1-j}(x) = A_{n-1}(x) \tag{3.43}$$

Für den dritten Fall, $u+1=n$, wird noch ein zusätzliches Lemma benötigt.

Lemma 3.2.3. Für jedes Polynom R gibt es eine Taylor-Entwicklung bezüglich der Familie von Polynomen $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ und dem Operator $\tilde{\Delta}$, d.h.

$$R(x) = \sum_r \tilde{\Delta} R(0) f_r(x) \tag{3.44}$$

[7], S65, Property 3.7

Beweis. Angenommen R ist ein Polynom n-ten Grades

$$R(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i(x), \tag{3.45}$$

mit geeigneten Koeffizienten α_i. Mit Lemma 3.2.2 kann man $\tilde{\Delta}^r R(0)$ schreiben als

$$\tilde{\Delta}^r R(0) = \sum_{i=r}^{n} \alpha_i \tilde{\Delta}^r f_i(0) = \sum_{i=r}^{n} \alpha_i f_{i-r}(0) \tag{3.46}$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \alpha_i \delta_{i-r,0} \tag{3.47}$$

$$= \alpha_r \tag{3.48}$$

Denn es gilt für $i = r, \ldots, n$ mit (3.28) und (2.7)

$$f_{i-r}(0) = \frac{cx}{cx+i-r} e_n\big(0 + \frac{i-r}{c}\big) = \delta_{i-r,0} \tag{3.49}$$

Daraus folgt direkt (3.44). □

Um nun $\Delta A_{u+1}(x) = e_u(x)$ für den Fall $n = u+1$ zu zeigen, rechnet man direkt nach.

$$\Delta A_{u+1}(x) = \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)\Delta f_{u+1-j}\Big(x + \frac{1}{c}\Big) \tag{3.50}$$

Auf Grund von Lemma 3.2.1 folgt

$$= \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)\Delta S^{-\frac{1}{c}} f_{u+1-j}(x) \tag{3.51}$$

$$= \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big)\tilde{\Delta} f_{u+1-j}(x) \tag{3.52}$$

$$= \sum_{j=0}^{u} e_j\Big(\frac{j-u}{c}\Big) f_{u-j}(x) \tag{3.53}$$

Wird nun $(u-j)$ mit i substituiert, so kann (3.53) in

$$\sum_{i=0}^{u} e_u - i\Big(\frac{-i}{c}\Big) f_i(x) \tag{3.54}$$

umgeschrieben werden, was wiederum, auf Grund von Lemma 3.2.3, weiter umgeschrieben werden kann in

$$\sum_{i=0}^{u} \tilde{\Delta}^i e_u(0) f_i(x) = e_u(x) \tag{3.55}$$

□

Somit sind die Punkte (i), (ii) und (iii) gezeigt und Satz 3.2.2 bewiesen. □

Es gibt zwei wichtige Spezialfälle von Satz 3.2.2:
Ist $u = 0$ so gilt:

$$A_n(x) = \frac{cx-n}{cx}, \qquad n \geq 0 \tag{3.56}$$

Mit $u = 1$ folgt

$$A_n(x) = \begin{cases} e_n(x) & \text{für } n = 0, 1 \\ \frac{cx-n-1}{cx+1} e_n\Big(x + \frac{1}{c}\Big) & \text{für } n > 1 \end{cases} \tag{3.57}$$

3.3 Die Ruinwahrscheinlichkeit im linearen Fall

Aus Korollar 3.1.1 folgt, mit der expliziten Darstellung der A_n aus Satz 3.2.2, für die Verteilung der Ruinzeit

$$\mathbb{P}[T > x] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} A_n(x) \mathbb{I}_{\{x \geq max\{0, \frac{(n-u)}{c}\}\}} \tag{3.58}$$

$$= e^{-\lambda x}\left(\sum_{n=0}^{u} e_n(x) + \sum_{n=u+1}^{[cx+u]} A_n(x)\right), \tag{3.59}$$

wobei hier $[cx+u]$ den ganzzahligen Teil von $cx+u$ beschreibt.

Aus (3.59) und Lemma 2.3.1 erhält man mit folgender expliziten Dartstellung der Überlebenswahrscheinlichkeit die *erste Ruinformel.*

Satz 3.3.1 (Die 1. Ruinformel nach *Philippe Picard und Claude Lefèvre*)**.** Die Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_+$ bei einer Anfangsrisikoreserve von $R_0 = u \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\varphi(u,x) =& \mathbb{P}[T > x \mid R_0 = u] \\ =& \sum_{j=0}^{u} \Big\{ h_j(cx) + h_j(j-u) \sum_{n=u+1}^{[cx+u]} \frac{u+cx-n}{u+cx-j} h_{n-j}(u+cx-j) \Big\} \end{aligned} \tag{3.60}$$

[7] S67, Satz 4.2
[9] S191, Theorem 2.3

Bemerkung 3.3.1. Ist $u = 0$ so gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit nach der 1. Formel von Picard-Lefèvre

$$\varphi(0,x) = \mathbb{P}[T > x \mid R_0 = u] = \sum_{n=0}^{[cx]} \frac{cx-n}{cx} h_n(cx) \tag{3.61}$$

[7] S67

Bemerkung 3.3.2. Sind alle Schäden gleich 1, das bedeutet, die Schäden sind Poissonverteilt und es gilt für $n \geq 0$

$$h_n(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!}, \tag{3.62}$$

so kann man (3.61) vereinfachen und es gilt:

$$\varphi(0,x) = \sum_{n=0}^{[cx]} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \Big(1 - \frac{n}{cx}\Big) \tag{3.63}$$

[7] S67, Satz 4.2 [10]

Bemerkung 3.3.3. Durch eine kleine Modifikation der Summationsgrenzen gilt Satz 3.3.1 auch für $R_0 = u \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\varphi(u,x) =& \mathbb{P}[T > x \mid R_0 = u] \\ =& \sum_{j=0}^{[u]} \Big\{ h_j(cx) + h_j(j-u) \sum_{n=[u]+1}^{[cx+u]} \frac{u+cx-n}{u+cx-j} h_{n-j}(u+cx-j) \Big\} \end{aligned} \tag{3.64}$$

3.3.1 Die Wahrscheinlichkeit nie Ruin zu erleiden

Möchte ein Versicherer wissen, wie wahrscheinlich es ist, keinen Ruin zu erleiden, so muss er die Überlebenswahrscheinlichkeit für $T = \infty$ berechnen.

Satz 3.3.2. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für $T = +\infty$, die Wahrscheinlichkeit, dass nie Ruin eintritt, ist

$$\varphi(u, \infty) = \mathbb{P}[T = +\infty \mid R_0 = u] = \left(1 - \frac{\lambda m}{c}\right) \sum_{j=0}^{u} h_j(j - u), \tag{3.65}$$

wobei m implizit gegeben ist durch

$$1 - \frac{\lambda m}{c} = \mathbb{P}[T = \infty \mid R_0 = 0] \tag{3.66}$$

[7] S.68, Theorem 4.3

Ohne *Beweis*.

Kapitel 4

Die zweite Formel nach Picard und Lefèvre

4.1 Allgemeines

In Kapitel 3 wurde bereits eine Ruinformel von Picard und Lefèvre beschrieben, welche ursprünglich über die Hilfsfunktion e_n aus Kapitel 2 hergeleitet wurde. Mit der im selben Kapitel eingeführten Funktion $h_j(\tau)$ haben Picard und Lefèvre die Ruinwahrscheinlichkeit noch auf eine andere Art und Weise beschrieben.Im Gegensatz zu Kapitel 3, bei dem gezielt mit dem letzten Schadenszeitpunkt vor T gearbeitet wurde wird hier nunmehr die Ruinwahrscheinlichkeit zu einem fixierten Zeitpunkt x betrachtet.

4.2 Rekursion in der Zeit

Angenommen, der Ruin ist bis zum Zeitpunkt $\frac{1}{c}$ noch nicht eingetreten, so kann man die Überlebenswahrscheinlichkeit rekursiv darstellen als die Summe der Überlebenswahrscheinlichkeiten für Risikoreserveprozesse mit Anfangskapital $u+1-n$, für den restlichen Zeitraum $x-\frac{1}{c}$, wobei immer darauf bedingt werden muss, dass mit $S_{\frac{1}{c}} = n$ noch kein Ruin eingetreten ist.

Satz 4.2.1 (Rekursion in der Zeit)**.** Gegeben sei die Anfangsrisikoreserve $R_0 = u$ mit $u \in \mathbb{R}_+$ und für den Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_+$ sei $x \geq \frac{1}{c}$, $c > 0$ gegeben. So gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\varphi(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]} h_n(1)\varphi\Big(u+1-n, x-\frac{1}{c}\Big) \tag{4.1}$$

[8], S164, (4.2)

Beweis. Offensichtlich gilt, per Definition für die Überlebenswahrscheinlichkeit, die Gleichung

$$\varphi(u,x) = \mathbb{P}[R_t \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq x]. \tag{4.2}$$

Gibt es keinen Ruin bis zum Zeitpunkt 1, gilt für den Gesamtschaden zum Zeitpunkt $\frac{1}{c}$

$$S_{\frac{1}{c}} \leq n \qquad \text{für } n \leq u \tag{4.3}$$

und somit folgt für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\varphi(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]} \mathbb{P}\Big[S_{\frac{1}{c}} = n,\, R_t \geq 0 \text{ für } \frac{1}{c} \leq t \leq x\Big] \tag{4.4}$$

Für die Risikoreserve R_t gilt durch einfaches *Erweitern mit Null* natürlich die Beziehung

$$R_t = R_{\frac{1}{c}} + R_t - R_{\frac{1}{c}} \tag{4.5}$$

Mit der Definition der Risikoreserve $R_t = u + ct - S_t$ und mit der Eigenschaft, dass S_t als ein zusammengesetzter Poisson-Prozess unabhängige Inkrementente hat, folgt aus der Unabhängigkeit von R_t und S_t

$$\varphi(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]} \mathbb{P}\big[S_{\frac{1}{c}} = n\big]\mathbb{P}\Big[\tilde{R}_t \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq x - \frac{1}{c}\Big] \tag{4.6}$$

mit

$$\tilde{R}_t = u + 1 - n - \big(S_{(t-\frac{1}{c})} - S_{\frac{1}{c}}\big). \tag{4.7}$$

Da der zusammengesetzte Poisson-Prozess $(S_t)_{t\geq 0}$ ein stationärer Prozess ist gilt auch:

$$\varphi(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]} \mathbb{P}\big[S_{\frac{1}{c}} = n\big]\mathbb{P}\Big[R_t \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq x - \frac{1}{c}\Big] \tag{4.8}$$

Somit ist Satz 4.2.1 bewiesen. □

4.3 Rekursion in der Anfangsreserve

Wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, kann die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Hilfe einer Rekursion in der Zeit beschrieben werden. Wie in folgendem Satz ersichtlich ist, kann aber umgekehrt auch der Zeitpunkt fixiert und dann die Überlebenswahrscheinlichkeit über eine Rekursion in der Anfangsreserve $R_0 = u$ dargestellt werden.

Satz 4.3.1 (Rekursion in der Anfangsreserve)**.** Für $u,\, x \in \mathbb{R}_+$ und $c > 0$ gilt:

$$\varphi(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]-1} h_n(-1)\varphi\Big(u - 1 - n, x + \frac{1}{c}\Big)\ . \tag{4.9}$$

[8], S164, (4.2)

Bemerkung 4.3.1. Im Gegensatz zu Satz 4.2.1 beschreibt hier h_n keine Wahrscheinlichkeit. Jedoch gelten dafür wie gewohnt alle Rechenregeln.

Beweis zur Rekursion in der Anfangsreserve. Es wird die Überlebenswahrscheinlichkeit $\varphi(u-1-n, x+\frac{1}{c})$ betrachtet. Dann wird diese mit $h_n(-1)$ multipliziert und anschließend über $n = 0, \ldots, [u]-1$ aufsummiert. So erhält man

$$\sum_{n=0}^{[u]-1} h_n(-1)\varphi\Big(u-1-n, x+\frac{1}{c}\Big). \tag{4.10}$$

Auf Grund von Satz 4.2.1 gilt mit den Übergängen $u \mapsto u-1-n$ und $x \mapsto x-\frac{1}{c}$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{[u]-1} h_n(-1) \sum_{k=0}^{[u]-1-n} h_k(1)\varphi((u-1-n)+1-k, x) = \\ &\sum_{n=0}^{[u]-1} \sum_{k=0}^{[u]-1-n} h_n(-1)h_k(1)\varphi(u-(n+k), x).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Setzt man nun $n+k$ gleich m und werden dann die Summen vertauscht, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{[u]-1} \sum_{k=0}^{[u]-1-n} h_n(-1)h_k(1)\varphi(u-(n+k), x) \\ &= \sum_{m=0}^{[u]-1} \varphi(u-m, x) \sum_{k=0}^{m} h_{m-k}(-1)h_k(1).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Auf Grund der Faltungsformel für die h_n

$$h_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k}(x)h_k(y) \tag{4.13}$$

und der Definition (2.12) der h_n gilt dann

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{[u]-1} \varphi(u-m, x) \sum_{k=0}^{m} h_{m-k}(-1)h_k(1) = \\ &\sum_{m=0}^{[u]-1} \varphi(u-m, x)h_m(0) = \\ &\sum_{m=0}^{[u]-1} \varphi(u-m, x) = \varphi(u, x)\ .\end{aligned} \tag{4.14}$$

Somit ist die Gleichheit aus Satz 4.3.1 gezeigt. □

4.4 Reduktion auf die Anfangsreserve Null

Da sich die Überlebenswahrscheinlichkeit, wie in Abschnit 4.3 gezeigt, über das Startkapital rekursiv darstellen lässt, liegt die Vermutung nahe, dass diese Rekursion auf die Anfangreserve $R_0 = 0$ reduzieren kann.

Satz 4.4.1 (Reduktion auf Anfangsreserve Null)**.** Gelte $u, x \in \mathbb{R}$ sowie $c > 0$ so folgt für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\varphi(u,x) = \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i)\varphi\Big(0, x + \frac{i}{c}\Big). \tag{4.15}$$

[8], S164, Theorem 4.1

Beweis. Sei $\hat{\varphi}(u,x)$ als die rechte Seite von (4.15) definiert, das heißt

$$\hat{\varphi}(u,x) := \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i)\hat{\varphi}\Big(0, x + \frac{i}{c}\Big). \tag{4.16}$$

Somit ist zu zeigen, dass $\hat{\varphi}(u,x)$ Satz 4.3.1 erfüllt und somit gleich $\varphi(u,x)$ ist.

$$\hat{\varphi}(u,x) = \sum_{n=0}^{[u]-1} h_n(-1)\hat{\varphi}\Big(u-1-n, x + \frac{1}{c}\Big) \tag{4.17}$$

Durch Einsetzen von (4.16) in (4.17), anschließendem Vertauschen der Summen und Anwenden von (2.22) erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(u,x) &= \sum_{n=0}^{[u]-1} h_n(-1) \sum_{i=0}^{[u]-1-n} h_{[u]-1-n-i}(-i)\hat{\varphi}\Big(0, x + \frac{i+1}{c}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{[u]-1} \sum_{j=1}^{[u]-n} h_n(-1)h_{[u]-n-j}(-j+1)\hat{\varphi}\Big(0, x + \frac{j}{c}\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{[u]} \hat{\varphi}\Big(0, x + \frac{j}{c}\Big) \sum_{n=0}^{[u]-j} h_n(-1)h_{[u]-j-n}(-j+1) \\
&\overset{(2.22)}{=} \sum_{j=0}^{[u]} \hat{\varphi}\Big(0, x + \frac{j}{c}\Big) h_{[u]-j}(-j) \ .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Somit genügt $\hat{\varphi}(u,x)$ der Darstellung aus Satz 4.3.1 und folglich ist Satz 4.4.1 bewiesen, denn es gilt

$$\hat{\varphi}(u,x) = \varphi(u,x). \tag{4.19}$$

□

Mit Hilfe der gerade hergeleiteten Rekursionen und (3.61) kann nun die zweite Ruinformel nach *Pilippe Picard und Claude Lefèvre*formuliert werden.

Satz 4.4.2 (Die 2. Ruinformel nach Picard und Lefèvre)**.** Seien h_j und $\tilde{H}_j$ wie in (2.20) und (2.15) definiert, $c, x \in \mathbb{R}_+$, bezeichne $[cx]$ den ganzzahligen Teil von cx und $u \in \mathbb{N}$. So gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\varphi(u,x) = \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i) \sum_{j=0}^{i+[cx]} \Big(1 - \frac{j}{i+cx}\Big) h_j(i+cx) \tag{4.20}$$

$$\varphi(u,x) = \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i) \tilde{H}_{i+[cx]}(i+cx) \tag{4.21}$$

[8] S.165, (4.6) [9] S. 191, Theorem 2.4

Beweis. Zum Beweis werden die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4 sowie (3.61) benötigt, denn es gilt durch einfaches Einsetzen

$$\begin{aligned}
\varphi(u,x) &= \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i) \varphi\Big(0, x + \frac{i}{c}\Big) \\
&\underset{(3.61)}{=} \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i) \sum_{j=0}^{c\left([x]+\frac{i}{c}\right)} \frac{c\big(x+\frac{i}{c}\big) - j}{c\big(x+\frac{i}{c}\big)} h_j\big(c\big(x+\frac{i}{c}\big)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i) \sum_{j=0}^{i+[cx]} \Big(1 - \frac{j}{i+cx}\Big) h_j(i+cx) \ .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Die zweite Gleichung von Satz 4.4.2 ergibt sich durch einfaches Einsetzen von (2.15), der Definition für $\tilde{H}_j$ in die erste Gleichung. Somit ist Satz 4.4.2 bewiesen. □

Korollar 4.4.1. Betrachtet man die Schäden nicht zum Startzeitpunkt, also ist $x > 0$, so gilt sogar

$$\varphi(0, \frac{x}{c}) = \tilde{H}_{[x]}(x) \qquad \text{und für } u > 0 \tag{4.23}$$

$$\varphi(u, \frac{x}{c}) = \sum_{i=0}^{u} h_{u-i}(-i) \varphi\Big(0, \frac{i+x}{c}\Big). \tag{4.24}$$

[9] S. 191, Corollary 2.1

Satz 4.4.3. Sind hier h_j und $\tilde{H}_j$ wie in (2.20) und (2.15) definiert und gilt ebenso wieder $c, x \in \mathbb{R}_+$ und $u \in \mathbb{N}$, so gelten mit Korollar 4.4.1 die Gleichungen

$$\varphi(u, \frac{x}{c}) = \sum_{j=0}^{[u]} h_j(j-u)\tilde{H}_{[x+u-j]}(x+u-j) \tag{4.25}$$

$$\varphi(u, \frac{x}{c}) = \sum_{i=0}^{[u]} h_{[u]-i}(-i-\epsilon_u)\tilde{H}_{[x+i+\epsilon_u]}(x+i+\epsilon_u) \tag{4.26}$$

mit $\epsilon_u = u - [u]$. [9], S192, Theorem 2.5

Ohne *Beweis.*

Kapitel 5

Direkte Faltung

5.1 Eine Diskretisierung der Zeit

Es wird die Ruinwahrscheinlichkeit zu *Bilanzzeitpunkten* betrachtet, das sind fixierte Zeitpunkte $\tau \in \mathbb{N}$, mit $\tau \leq x$. Genauer gesagt, ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass $R_\tau < 0$ gilt, für mindestens ein τ aus einer Menge von Bilanzzeitpunkten $\Gamma_x \subset [0, x]$. Um dies zu bewerkstelligen, ist es notwendig, mit einer geeigneten Diskretisierung der Zeit zu arbeiten.

Der größte ganzzahlige Wert von x wird mit $[x]$ bezeichnet. Daher folgt aus $S_t \in \mathbb{N}$, dass die Zustände $S_t \leq u + ct$ und $S_t \leq [u + ct]$ äquivalent sind, denn es gilt

$$S_t < [u + ct] \Rightarrow S_t < u + ct \qquad \text{und} \tag{5.1}$$

$$S_t < u + ct \underset{S_t \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} S_t \leq u + ct - 1 < [u + ct] \tag{5.2}$$

und

$$S_t = u + ct \underset{S_t \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} u + ct = [u + ct] = S_t \ . \tag{5.3}$$

Definieren wir

$$m := [u] + 1 \tag{5.4}$$

$$n := [u + cx] + 1 \tag{5.5}$$

$$\tau_i := \frac{i - u}{c} \quad \text{für } i = m, \ldots, n - 1 \tag{5.6}$$

$$\tau_n := x \tag{5.7}$$

Da S_t nicht fallend in t ist, gilt

$$\mathbb{P}[S_t \leq u + ct, \forall t \in [0, x]] = \mathbb{P}[S_{\tau_i} < i, i = m, \ldots, n]. \tag{5.8}$$

Da (5.8) die Definition der Überlebenswahrscheinlichkeit ist, schreibt man für die diskretisierte Zeit

$$\varphi(u, x) = \varphi^*(u, x) \quad \text{für } \Gamma_x = \{\tau_i, \quad i = m, \ldots, n\} \tag{5.9}$$

[9] S.189, 2.1

5.2 Die dritte Ruinformel

Da nun eine vernünftige Diskretisierung der Zeit eingeführt wurde, kann die Ruinwahrscheinlichkeit beziehungsweise die Überlebenswahrscheinlichkeit durch eine Summe von Überlebenswahrscheinlichkeiten, die für die einzelnen Zeitabschnitte berechnet werden, dargestellt werden.

Satz 5.2.1. Gegeben seien $j \in \mathbb{N}$, $i \geq m$ und τ_j wie in (5.6). Zusätzlich gelte die Definition

$$A_j(\tau_i) := \mathbb{P}[S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i]. \tag{5.10}$$

Sei auch $\tau_{m-1} = 0$ sowie $A_j(0) = \mathbb{I}_{j=0}$. Der Zählprozess $(N_t)_{t<0}$ von S_t sei ein *homogener* Poisson-Prozess, so gilt:

$$A_j(\tau_i) = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}(\tau_{i-1})\mathbb{P}[S_{\frac{1}{c}} = k] \tag{5.11}$$

und

$$\varphi(u, x) = \mathbb{P}[S_{\tau_k} < k, k = m, \ldots, i] = \sum_{j=0}^{i} A_j(\tau_i), \qquad i = m, \ldots, n\ . \tag{5.12}$$

[9], S189, Satz 2.1

Es gibt auch einen entsprechenden Satz für den Fall, dass $(N_t)_{t<0}$ *inhomogen* ist (siehe Abschnitt 11.3).

Beweis. Auf Grund der Wahl der τ_i gilt mit der Wahl der i wie in (3.30)

$$R_{\tau_i} = i - S_{\tau_i}\ . \tag{5.13}$$

Man erkennt dies ganz leicht, wenn die Definition von τ_i in die Formel für den Risikoreserveprozess eingesetzt wird, also

$$R_{\tau_i} = u + c\tau_i - S_{\tau_i} = u + c\frac{i-u}{c} - S_{\tau_i} = i - S_{\tau_i}\ . \tag{5.14}$$

Die Äquivalenz

$$S_{\tau_i} = j,\ R_{\tau_i} > 0 \Leftrightarrow S_{\tau_i} = j \qquad (j < i) \tag{5.15}$$

ergibt sich aus der folgenden einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned} &R_{\tau_i} > 0 \\ &\Leftrightarrow i - S_{\tau_i} > 0 \\ &\Leftrightarrow i > S_{\tau_i} \\ &\Leftrightarrow i > j = S_{\tau_j}\ . \end{aligned}$$

Daraus kann ohne Rechnung direkt abgeleitet werden , dass

$$j \geq i \Rightarrow \{S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i\} = \emptyset \tag{5.16}$$

gilt. Das bedeutet, dass mit $j \geq i$ schon Ruin eingetreten ist.

Sei $0 \leq j < i$ so gilt:

$$\{S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, \quad l = m, \ldots, i\} = \tag{5.17}$$

$$\bigcup_{k=0}^{j} \{(S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i) \cap S_{\tau_{i-1}} = j - k\} = \cdots \tag{5.18}$$

Da $j < i$ gilt, kann die Bedingung $R_{\tau_i} > 0$ weggelassen werden, was eindeutig aus der Äquivalenz (5.15) hervorgeht:

$$\cdots = \bigcup_{k=0}^{j} \{(S_{\tau_{i-1}} = j - k \cap R_{\tau_l} > 0, \quad l = m, \ldots, i) \cap S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}\} \ . \tag{5.19}$$

Auf Grund der Unabhängikeit von $\{S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}\}$ von der Filtration $\mathfrak{F}_{\tau_{i-1}}$ ergibt sich:

$$A_j(\tau_i) = \mathbb{P}[S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, \quad l = m, \ldots, i] = \tag{5.20}$$

$$\sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}[S_{\tau_{i-1}} = j - k \cap R_{\tau_l} > 0, \quad l = m, \ldots, i-1] \mathbb{P}[S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} = k] \tag{5.21}$$

Da hier $(N_t)_{t \geq 0}$ ein homogener Poisson-Prozess ist und mit $\tau_i - \tau_{i-1} = \frac{1}{c}$ die Gleichung $S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} \stackrel{d}{=} S_{\frac{1}{c}}$ folgt, kann man obige Formel noch weiter vereinfachen:

$$A_j(\tau_i) = \mathbb{P}[S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i] = \tag{5.22}$$

$$\sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}[S_{\tau_{i-1}} = j - k \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i-1] \mathbb{P}[S_{\frac{1}{c}} = k] = \tag{5.23}$$

$$\sum_{k=0}^{j} A_{j-k}(\tau_{i-1}) \mathbb{P}[S_{\frac{1}{c}} = k] \tag{5.24}$$

Somit wurde Satz 5.2.1 bewiesen. □

Um einen vereinfachten Prämien-Prozess $P_t = i$ zu erhalten, wird in Satz 5.2.1 τ_i durch $\frac{i}{c}$ substituiert, so erhält man direkt die dritte Ruinformel.

Satz 5.2.2 (Die 3. Ruinformel)**.** Gegeben $u \in \mathbb{N}$, $c > 0$ und $x \in \mathbb{N}$. Zusätzlich sei $h_k(1)$ durch die zweite Hilfsfunktion aus Kapitel 2 definiert. So ergibt die folgende direkte Faltung die Überlebenswahrscheinlichkeit über einen endlichen Zeithorizont.

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 \\
A_k(0) &= \mathbb{I}_{k=0} \quad \text{und} \quad h_k = h_k(1), \qquad k = 1, \ldots, u+x \\
A_j\Big(\frac{i}{c}\Big) &= \mathbb{I}_{j<u+i} \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}\Big(\frac{i-1}{c}\Big) h_k, \qquad i = 1, \ldots, x, \quad j = 1, \ldots, u+i \\
\varphi\Big(u, \frac{i}{c}\Big) &= \sum_{j=0}^{u+i} A_j\Big(\frac{i}{c}\Big), \qquad i = 1, \ldots, x
\end{aligned} \tag{5.25}$$

[9] S.192, Theorem 2.6

Beweis. Der Beweis ist ident zum Beweis von Satz 5.2.1. □

5.3 Der Sonderfall $j < u$

Bei der Berechnung der A_j aus der dritten Ruinformel (5.25) könnte man für $j < u$ die Rekursion durch eine direkte Berechnung ersetzen, denn in diesem Fall gilt die Gleichheit von $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ und $h_j(n)$.

Satz 5.3.1. Gegeben sind $u, n \in \mathbb{N}$, $c > 0$, $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ wie in Satz 5.2.2 und die Hilfsfunktion $h_j(n)$. So gilt für $j < u$

$$A_j\Big(\frac{n}{c}\Big) = h_j(n) \ . \tag{5.26}$$

Beweis. Um leichter rechnen zu können wird $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ umgeschrieben in

$$A_j\Big(\frac{n}{c}\Big) = B_j(n) \tag{5.27}$$

Zum Beweis der Behauptung aus Satz 5.3.1 wird mit der vollständigen Induktion gearbeitet, wobei zu beachten ist, dass $j < u$ gilt.
Induktions-Anfang:

$$\begin{aligned}
B_j(0) &= \delta_{j0} = h_j(0) \\
B_j(1) &= \sum_{k=0}^{j} B_{j-k}(0) h_k = B_0(0) h_j(1) = h_j(1) \\
B_j(2) &= \sum_{k=0}^{j} B_{j-k}(1) h_k = \sum_{k=0}^{j} h_{j-k}(1) h_k(1) \overset{2.22}{=} h_j(2)
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

$$B_j(n+1) = \sum_{k=0}^{j} B_{j-k}(n) h_k$$

Durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung $B_j(n) = h_j(n)$ folgt

$$B_j(n+1) = \sum_{k=0}^{j} h_{j-k}(n) h_k(1) \overset{2.22}{=} h_j(n+1) \ . \tag{5.28}$$

Da $j < u$ angenommen wurde, konnte in allen Schritten die Indikatorfunktion weggelassen werden. Wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würde sich in jedem Schritt ($n \mapsto n+1$) das Argument in der Indikatorfunktion verändern und es wäre die Äquivalenz der linken und rechten Seite nicht mehr gegeben. In diesem Fall wäre nämlich zumindest für das größte j die Gleichheit von $B_{j-k}(n)$ und $h_{j-k}(n)$ nicht gegeben.

Dieses Phänomen ist auch in den Folgenden zwei Beispielen ersichtlich.

Beispiel .1 ($j \leq u$).

$$u = 1,\ n = 1,\ j = 1$$

$$A_1\left(\frac{1}{c}\right) = \mathbb{I}_{1<2} \sum_{k=0}^{1} A_{1-k}\left(\frac{0}{c}\right) h_k = A_0(0) h_1(1) = h_1(1) \tag{5.29}$$

Beispiel .2 ($j > u$).

$$u = 1,\ n = 1,\ j = 1$$

$$A_1\left(\frac{1}{c}\right) = \mathbb{I}_{1<1} \sum_{k=0}^{1} A_{1-k}\left(\frac{0}{c}\right) h_k = 0 \tag{5.30}$$

□

Kapitel 6

Eine rekursive Ruinformel

6.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird versucht, eine Formel zu finden, bei der die Ruinwahrscheinlichkeit mit Startkapital $R_0 = u$, abhängig von der Ruinwahrscheinlichkeit ausgehend von $R_0 = 0$, dargestellt werden kann.

Die Menge Ω_x ist definiert durch $\Omega_x := \{t : t \in]0, x], u + ct \in \mathbb{N}^*\}$. Das bedeutet, Ω_x ist eine Zerlegung von $R_x \geq 0$ bedingt auf den letzten Zeitpunkt eines Nulldurchgangs. Dies bedeutet, dass schon einmal ein versicherungstechnischer Ruin eingetreten ist, dieser wieder ausgeglichen wurde und nun von Neuem die Überlebenwahrscheinlichkeit berechnet wird. Formal bedeutet das, dass $R_t = 0$ gilt, wobei $x > t > 0$ gilt. Über diese Zerlegung kann die Überlebenswahrscheinlichkeit dargestellt werden mit

$$\mathbb{P}[R_t \geq 0] = \mathbb{P}[T_u > x] + \sum_{t \in \Omega_x} \mathbb{P}[R_t = 0] \cdot \mathbb{P}[T_0 > x - t]. \tag{6.1}$$

Um konstante Prämienzahlungen der Höhe eins zu erhalten, dh. $P_t = 1 \, \forall \, t > 0$, verwendet man wieder die Zeitpunkte $t = \frac{x}{c}$. In diesem Fall kann (6.1) geschrieben werden als

$$\mathbb{P}[cT_u > x] = \mathbb{P}\big[S_{\frac{x}{c}} \leq u + x\big] - \sum_{t \in \Omega_{\frac{x}{c}}} \mathbb{P}[S_t = u + ct] \cdot \mathbb{P}[cT_0 > x - ct] \qquad x > 1. \tag{6.2}$$

Da in diesem Modell der Gesamtschaden ganzzahlige Werte annimmt, folgt, dass für $\frac{x}{c}$, mit $x \leq 1$, der Ruin nur dann nicht eintritt, wenn $S_{\frac{x}{c}} \leq u$ gilt und

$$\mathbb{P}[cT_u > x] = \mathbb{P}\big[S_{\frac{x}{c}} \leq u\big] \quad \text{mit } x \leq 1 \ . \tag{6.3}$$

Zusätzlich zur Definition der Zerlegung Ω_x wird mit ϵ_ρ der nicht ganzzahlige Teil von $\rho \in \mathbb{R}$ beschrieben, dh.

$$\epsilon_\rho = \rho - [\rho] \qquad \epsilon_\rho \in [0, 1] \tag{6.4}$$

$$\bar{\epsilon}_\rho = 1 - \epsilon_\rho \ , \tag{6.5}$$

wobei $[\rho]$ den ganzzahligen Teil von ρ beschreibt. Zusätzlich wird

$$\nu := [\epsilon_u + \epsilon_x] \tag{6.6}$$

und

$$\epsilon := \epsilon_u + \epsilon_x - \nu \tag{6.7}$$

definiert ([9] S.193).

6.2 Die rekursive Ruinformel

Mit den neuen Notationen aus Abschnitt 6.1 können die folgenden Lemmata formuliert werden, welche direkt die Herleitung der 4. Ruinformel erlauben.

Lemma 6.2.1. Ist die Ruinwahrscheinlichkeit mit Anfangsrisikoreserve $R_0 = 0$ bekannt, so ist die Überlebenswahrscheinlichkeit für einen endlichen Zeithorizont $[0, x]$, mit Anfangsrisikoreserve u durch folgende *rekursive* Formel gegeben:
Für $n = 1, \ldots, [x]$ gilt

$$\varphi\Big(u, \frac{\epsilon_x}{c}\Big) = H_u(\epsilon_x) \tag{6.8}$$

$$\varphi\Big(u, \frac{n+\epsilon_x}{c}\Big) = H_{u+n+\nu}(n+\epsilon_x) - \sum_{k=1}^{n+\nu} h_{[u]+k}(k-\epsilon_u)\varphi\Big(0, \frac{n-k+\nu+\epsilon}{c}\Big)\ , \tag{6.9}$$

wobei die Funktionen h_n und H_n durch (2.13) und (2.14) gegeben sind.
[9] S.193 Lemma 2.1

Beweis. Für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $u + c(\frac{(i+\bar{\epsilon}_u)}{c}) \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Omega_{\frac{x}{c}} = \{(i + \bar{\epsilon}_u), i = 0, \ldots, [x - \bar{\epsilon}_u]\}. \tag{6.10}$$

Gilt $k = i + 1$, so kann $\mathbb{P}[cT_u > x]$ beschrieben werden durch

$$\mathbb{P}[cT_u > x] = \mathbb{P}[S_{\frac{x}{c}} \leq [u+x]] - \sum_{k=1}^{[x]+\nu} \mathbb{P}[S_{\frac{(k-\epsilon_u)}{c}} = [u]+k] \cdot \mathbb{P}[cT_0 > [x]-k+\epsilon_u+\epsilon_x]. \tag{6.11}$$

Mit Lemma 2.2.1 und den Definitionen von H_n sowie h_n kann man die Wahrscheinlichkeiten aus (6.11) direkt umschreiben in

$$\mathbb{P}[cT_u > x] = H_{u+n+\nu}(n+\epsilon_x) - \sum_{k=1}^{n+\nu} h_{[u]+k}(k-\epsilon_u), \tag{6.12}$$

was genau die Aussage aus Lemma 6.2.1 ist. □

Aus Lemma 6.2.1 erhält man durch Einsetzen von $u = 0$ folgendes Lemma.

Lemma 6.2.2. Die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zur Zeit $n+\epsilon$ bei Anfangsrisikoreserve $R_0 = 0$ ist wie folgt rekursiv gegeben:
Für $n = 1, 2, \ldots, [x]$ gilt:

$$\varphi\Big(\frac{\epsilon}{c}\Big) = H_0(\epsilon) \tag{6.13}$$

$$\varphi\Big(0, \frac{n+\epsilon}{c}\Big) = H_n(n+\epsilon) - \sum_{k=1}^{n} h_k(k)\varphi\Big(0, \frac{n-k+\epsilon}{c}\Big). \tag{6.14}$$

[9] S.193 Lemma2.2

Der folgende Satz ist eine direkte Anwendung der Lemmata 6.2.1 und 6.2.2

Satz 6.2.1. Sei $x > 1$ und gilt $n = 1, 2, \ldots [x]$ und ist ϵ_x definiert wie in Abschnitt 6.1, dann sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten zu den Zeiten $n + \epsilon_x$ mit der Anfangsrisikoreserve $R_0 = u$ durch die folgende Rekursion gegeben.

1. Schritt: $\varphi\Big(0, \frac{\epsilon}{c}\Big) = H_x(\epsilon)$ und (6.15)

$$\varphi\Big(u, \frac{\epsilon_x}{c}\Big) = H_{u+x}(\epsilon_x) \tag{6.16}$$

2. Schritt: $$\varphi\Big(0, \frac{n+\epsilon}{c}\Big) = H_n(n+\epsilon) - \sum_{k=1}^{n} h_k(k)\varphi\Big(0, \frac{n-k+\epsilon}{c}\Big) \tag{6.17}$$

3. Schritt: $$\varphi\Big(u, \frac{n+\epsilon_x}{c}\Big) = H_{[u]+n+v}(n+\epsilon_x) - \sum_{k=1}^{n+\nu} h_{[u]+k}(k-\epsilon_u)\varphi\Big(0, \frac{n-k+\nu+\epsilon}{c}\Big) \tag{6.18}$$

[9] S.193 2.7

Mit Satz 6.2.1 kann man die Überlebenswahrscheinlichkeiten für die Ruinzeiten T_0 und T_u zu „$[x]$“ Zeitpunkten aus dem Zeitraum $[0, x]$ berechnen.
Sei zusätzlich bemerkt, dass, wenn $u \in \mathbb{N}$ gilt, so muss $\epsilon_u = 0$, $\epsilon_x = 0$ und $\nu = 0$ gelten. Somit sind die Formeln für T_0 und T_u gleich.
Gilt $x \in \mathbb{N}^*$ so ist $\epsilon = \epsilon_x = 0$ und somit ist folgendes Korollar eine direkte Anwendung von Satz 6.2.1.

Korollar 6.2.1 (Die 4. Ruinformel)**.** Sei $u \in \mathbb{N}$, $c > 0$ und $x \in \mathbb{N}^*$. Seien die Funktionen h_n und H_n durch (2.13) und (2.14) gegeben, so sind die Ruinwahrscheinlichkeiten zu den Zeiten $n = 1, \ldots, x$ mit Anfangsrisikoreserve $R_0 = u$ gegeben durch folgende rekursive Darstellung.

1. Schritt: $\varphi(0,0) = 1$ und (6.19)

$$\varphi(u,0) = 1 \tag{6.20}$$

2. Schritt: $$\varphi\Big(0, \frac{n}{c}\Big) = H_n(n) - \sum_{k=1}^{n} h_k(k)\varphi\Big(0, \frac{n-k}{c}\Big), \qquad n = 1, \ldots, x \tag{6.21}$$

3. Schritt: $$\varphi\Big(u, \frac{n}{c}\Big) = H_{u+n}(n) - \sum_{k=1}^{n} h_{u+k}(k)\varphi\Big(0, \frac{n-k}{c}\Big), \qquad n = 1, \ldots, x \tag{6.22}$$

[9] S.194, Corollary 2.2

Ein Beweis zur 4. Ruinformel ist nicht notwendig, da diese direkt aus den Lemmata 6.2.1 und 6.2.2 sowie aus dem Satz 6.2.1 hervorgeht.

Kapitel 7

Die Ruinformel nach Takács

7.1 Der Satz von Dwass und Dinges

Satz 7.1.1 (Dwass und Dinges)**.** Sei $\{S_n\}_{n\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit konstantem und ganzzahligem $S_0 = x$. Die Inkremente $X_n = S_n - S_{n-1}$ seien austauschbar, das heißt für jede beliebige Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$ ist die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ gleich der von $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$. Der Zustandsraum von $\{S_n\}_{n\geq 0}$ sei diskret und $\{S_n\}_{n\geq 0}$ sei *„skip free upwards“*, das heißt die Inkremente können nur die Werte $-1, 0, 1, 2, \ldots$ annehmen. So folgt:

$$\mathbb{P}[S_n = y \text{ und } S_i < y \quad , i = 1, \ldots, n-1] = \frac{y-x}{n}\mathbb{P}[S_n = y] \qquad , y \in \mathbb{Z}, y > x \ . \tag{7.1}$$

[3] S.21 2.Kapitel, 3. Abschnitt, (3.8)

Für den Beweis von Satz 7.1.1 wird zuerst eine Eigenschaft zyklischer Permutationen betrachtet.

Lemma 7.1.1. Seien $x_1, \ldots, x_n$ ganzzahlige Werte mit $x_1 \leq 1$ und $x_1 + \cdots + x_n = y > 0$. So existieren y zyklische Permutationen $(i_1, \ldots, i_n)$ für die gilt

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} < y \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \ . \tag{7.2}$$

[3] S.22 2.Kapitel, 3. Abschnitt, (3.9)

Beweis. Seien M und m definiert durch

$$M = max\{x_1 + \cdots + x_k \mid k = 1, \ldots, n\} \quad \text{und} \tag{7.3}$$

$$m = min\{k \mid x_1 + \cdots + x_k = M\}. \tag{7.4}$$

Die Folge $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n, \ldots, x_1, \ldots, x_m)$ erfüllt die Bedingung (7.2). Da es eine Folge gibt, welche die Bedingung (7.2) erfüllt, kann auch angenommen werden, dass die ursprüngliche Folge $(x_1 \ldots, x_n)$ auch diese Bedingung erfüllt. Sei nun

$$t_1 = min\{m \mid x_1 + \cdots + x_m = i\} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, y. \tag{7.5}$$

Daher erfüllen genau die folgenden y Folgen

$$\begin{gathered}(x_1, \ldots, x_n)\\ (x_{t_1+1}, \ldots, x_{t_1})\\ \vdots\\ (x_{t_{y-1}+1}, \ldots, x_{t_{y-1}})\end{gathered} \tag{7.6}$$

die Bedingung (7.2). Somit ist Lemma 7.1.1 bewiesen. □

Beweis des Satzes von Dwass und Dinges. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x = 0$ ist. Man betrachtet eine Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$ der Inkremente $X_1, \ldots, X_n$ mit $x_1 + \cdots + x_n = y$. Die Austauschbarkeit der Inkremente impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit der Folge $(x_1, \ldots, x_n)$ gleich der Wahrscheinlichkeit der $n-1$ Folgen ist, welche aus zyklischen Permutationen der ersten hervorgehen, z.B. $(x_2 \ldots, x_n, x_1)$, $(x_3 \ldots, x_n, x_1, x_2), \ldots$.
Aus dieser Eigenschaft der Austauschbarkeit und aus dem Lemma 7.1.1 folgt direkt der Satz von Dwass und Dinges. □

Der Satz von *Dwass und Dinges* beschreibt also die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt n der Prozess $\{S_n\}_{n\geq 0}$ zum ersten mal den Wert y annimmt und welchen er davor noch nie überschritten hat. Dieser Satz ist daher ein Schlüsselsatz für die Ruinformeln nach *H.L. Seal* [10].

7.2 Die Formel von Takács

Eine direkte Anwendung von Satz 7.1.1 ist das Lemma von *Takács*.

Lemma 7.2.1 (Takács)**.** Sei $Y_n = \nu_1 + \cdots + \nu_n$, mit u.i.v., nichtnegativen, ganzzahligen ν_j, $j = 1, \ldots, n$. Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ gilt

$$\mathbb{P}[\{Y_r < r, r = 1, \ldots, n\} \cap \{Y_n = n - i\}] = \frac{i}{n}\mathbb{P}[Y_n = n - i]. \tag{7.7}$$

[12], [9], S.194, Lemma 2.3

Zuerst wird die Überlebenswahrscheinlichkeit für Prämienzahlungen in ganzzahligen Zeitabständen betrachtet, wobei die Anfangsrisikoreserve $R_0 = 0$ ist.

Satz 7.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zusätzlich sei $c > 0$ und $i \in \mathbb{N}$, so gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Startkapital $R_0 = 0$

$$\mathbb{P}\Big[S_{\frac{n}{c}} = i \cap R_t \geq 0, t \in \Big[0, \frac{n}{c}\Big]\Big] = \frac{n-i}{n}\mathbb{P}[S_{\frac{n}{c}} = i], \qquad i = 0, \ldots, n \tag{7.8}$$

$$\varphi\Big(0, \frac{n}{c}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n}\mathbb{P}[S_{\frac{n}{c}} = i]. \tag{7.9}$$

[12], [9] S.194, Theorem 2.8

Beweis. Setzt man in Lemma 7.2.1 Y_n gleich $S_{\frac{n}{c}}$ so erhält man direkt Satz 7.2.1. □

Theoretisch müssen die Zahlungsabstände nicht ganzzahlig sein, daher kann man den Satz 7.2.1 durch eine leichte Modifikation der Summationsgrenzen verallgemeinern.

Satz 7.2.2. Sei $t \in \mathbb{R}^+$ und $c > 0$

$$\varphi(0,t) = \sum_{i=1}^{[ct]} \frac{ct-i}{ct} \mathbb{P}[S_t = i] \tag{7.10}$$

und speziell für $t = \frac{x}{c}$ gilt

$$\varphi\Big(0, \frac{x}{c}\Big) = \sum_{i=1}^{[x]} \Big(1 - \frac{i}{x}\Big) \mathbb{P}[S_{\frac{x}{c}} = i] = \tilde{H}_{[x]}(x) \ . \tag{7.11}$$

[13],[10], [9] S.194, Theorem 2.9

Mit Satz 7.2.2 kann nun die Ruinwahrscheinlichkeit ohne Anfangsrisikoreserve über einen endlichen Zeithorizont $[0,t]$ von der Verteilung des Gesamtschadens zum Zeitpunkt t direkt hergeleitet werden.
Angenommen, es ist schon einmal Ruin eingetreten und das Versicherungsunternehmen ist wieder im „positiven“ Bereich, dann kann mit dem Satz 7.2.2 die Überlebenswahrscheinlichkeit folgendermaßen angegeben werden.

Satz 7.2.3 (Die Ruinformel nach Takács)**.** Sei $x > 1$. Aus (4.26) sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten zu den Zeiten $n + \epsilon_x$, $n = 1, \ldots, [x]$, mit Anfangskapital $R_0 = u$ gegeben durch:

$$\varphi\Big(u, \frac{n+\epsilon_x}{c}\Big) = H_{[u+n+\nu]}(n+\epsilon_x) - \sum_{k=1}^{[n+\nu]} h_{[u]+k}(k-\epsilon_u) \tilde{H}_{[n-k+\nu]}(n-k+\nu+\epsilon) \tag{7.12}$$

Speziell gilt für $n = [x]$

$$\varphi\Big(u, \frac{x}{c}\Big) = H_{[u+x]}(x) - \sum_{k=1}^{[x+\nu]} h_{[u]+k}(k-\epsilon_u) \tilde{H}_{[x-k+\nu]}(x-k+\nu) \ . \tag{7.13}$$

[10], [3],[9] S.195, Theorem 2.10

Beweis. Der Satz ist sehr einfach zu beweisen, denn man muss nur Satz 7.2.2 in 6.2.1 einsetzen und so hat man schon (7.12). Für (7.13) muss man nur $n = [x]$ in (7.12) einsetzen. Somit ist Satz 7.2.3 bewiesen. □

Wie bei den Picard-Lefèvre Formeln hängt hier die Formel nur von den $h_j(\tau)$ ab. Jedoch sind diese hier eindeutig Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, was bei Picard-Lefèvre nicht gegeben ist (siehe: [9] S.192), und die Werte der $h_j(\tau)$, $H_j(\tau)$ und $\tilde{H}_j(\tau)$ liegen daher zwischen 0 und 1.

Kapitel 8

Übergang von den „Appell“- zu den „Seal“-Formeln

Es wurden nun fünf Ruinformeln hergeleitet, die drei verschiedenen Typen zuzuordnen sind: Formeln, die sogenannte Appell-Polynome enthalten (Appell-Formeln), Formeln, welche mit der Formel von Seal [10] verwand sind und eine Formel, die die Ruinwahrscheinlichkeit mittels direkter Faltung beschreibt. Zu den Appel-Formeln zählen die beiden Ruinformeln von Picacrd und Lefèvre. Die Formel von Takács und die rekursive Formel aus Kapitel 6 sind Ruinformeln vom Seal-Typus. Zwischen diesen Formeln besteht ein wichtiger Zusammenhang. Diser Zusammenhang ist der Gegenstand dieses Kapitels.

8.1 Ganzzahlige Schäden

Proposition 8.1.1. Seien $m, n, j \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$, $0 \leq n \leq m$, $0 \leq j \leq m-n$, dann gilt:

$$\mathbb{P}[S_m = n] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[S_{m-j-k} = n-k] \frac{t-j-n}{t-j-k} \mathbb{P}[S_{k+j} = k] \tag{8.1}$$

[9] S195, (3.2)

Beweis. Wir definieren:

$$K := \sup\{l \in \mathbb{N} : 0 \leq l \leq n, S_{j+l} \geq l\}. \tag{8.2}$$

Die Menge rechts ist offensichtlich nichtleer, wegen $S_0 = 0$ enthält sie zumindest $l = 0$. Folglich ist K eine Zufallsvariable, welche Werte in $\{0, 1, \ldots, n\}$ annimmt.
1. Schritt:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$. So wird zuerst gezeigt

$$S_m = n, \quad K = k \quad \Rightarrow \quad S_{j+k} = k \tag{8.3}$$

Angenommen $k = n$, dann ergibt (8.2), dass $S_{j+n} \geq n$. Offensichtlich ist aber $S_{j+n} \leq S_m$.

Angenommen es gilt $0 \leq k < n$. So ergibt (8.2), dass $S_{j+k} \geq k$ und $S_{j+k+1} \leq k+1$. Folglich ist klar, dass $S_{j+k} \leq S_{j+k+1}$ gilt. Insgesamt gilt also:

$$k \leq S_{j+k} \leq S_{j+k+1} < k+1 \tag{8.4}$$

Da $S_{j+k} \in \mathbb{N}$ gilt, so muss $S_{j+k} = k$ gelten.
2.Schritt:
Es ist zu zeigen, dass folgende Gleichung gilt.

$$\begin{aligned} &\{S_m = n, K = k\} = \\ &\{S_{j+k} = k, S_{j+l} < l, \text{ für } l = k+1, \ldots, m-j \text{ und } S_m = m\} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Aus dem 1. Schritt ist klar, dass $S_{j+k} = k$ gilt. Nach (8.2) folgt weiters

$$S_{j+l} < l \quad \text{für } k+1 \leq l \leq n \tag{8.6}$$

Für $S_m = n$ gelten die Ungleichungen

$$S_{j+l} < l \quad \text{für } n < l \leq m-j \tag{8.7}$$

automatisch. Somit wurde gezeigt, dass folgende Implikation gilt.

$$\begin{aligned} &S_m = n, K = k \Rightarrow \\ &S_{j+k} = k, S_{j+l} < l, \text{ für } l = k+1, \ldots, m-j \text{ und } S_m = m. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Die Umkehrung dieser Implikation gilt offensichtlich auch.
3.Schritt:
Es ist zu zeigen, dass folgende Gleichung gilt.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[S_m = n, K = k] = \\ &\mathbb{P}[S_{j+k} = k]\mathbb{P}[S_l < l, \text{ für } l = 1, \ldots, m-j-k \text{ und } S_{m-j-k} = n-k] \end{aligned} \tag{8.9}$$

Zuerst wird l in (8.5) mit $l \mapsto l+k$ verschoben. Somit erhält man

$$\begin{aligned} &\{S_m = n, K = k\} = \\ &\{S_{j+k} = k, S_{j+k+1} < k+l \text{ für } 1 \leq l \leq m-j-k \text{ und } S_m = m\} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Wird nun $S_{j+k} = k$ von den Ungleichungen subtrahiert, so ergib das

$$\begin{aligned} &\{S_m = n, K = k\} = \\ &\{S_{j+k} = k, S_{j+k+1} - S_{j+k} < l \text{ für } 1 \leq l \leq m-j-k \text{ und } S_m - S_{j+k} = n-k\} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Aus der Unhabhängigkeit der Inkremente

$$S_{j+k+1} - S_{j+k}, \ldots, S_m - S_{j+k} \tag{8.12}$$

von S_{j+k} und aus der Tatsache, dass die Inkremente die gleiche Verteilung haben wie

$$S_1, \ldots, S_{m-j-k}, \tag{8.13}$$

folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[S_m = n, K = k] = \\ &\mathbb{P}[S_{j+k} = k]\mathbb{P}[S_l < l \text{für } 1 \leq l \leq m-j-k \text{ und } S_{m-j-k} = n-k]. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Nun wird das Resultat von Takás (Lemma 7.2.1) mit $n \mapsto m-j-k$ und $i \mapsto m-j-n$ angewand und somit folgt aus der disjunkten Vereinigung

$$\{S_m = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S_m = n, K = k\}, \tag{8.15}$$

die Behauptung der Proposition. □

8.2 Die Äquivalenz zwischen Appell- und Seal-Formeln

Mit der Proposition 8.1.1 kann nun die Äquivalenz zwischen „Seal“ und „Appel“-Formeln gezeigt werden.

Satz 8.2.1. Sei $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}$ mit

$$z \neq -t, \ldots, -t+n \tag{8.16}$$

dann gilt:

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k}(z+t-k)h_k(k-z)\frac{z+t-n}{z+t-k} \tag{8.17}$$

Um den Satz zu beweisen wird noch folgendes Polynom-Lemma benötigt.

Lemma 8.2.1 (Polynomlemma)**.** Sei

$$g_n(t) := e^{\lambda t} h_n(t) \qquad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}) \tag{8.18}$$

(i) Für $n \geq 0$ gilt: Die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto g_n(t) \in \mathbb{R}$ ist ein Polynom von Grad n in t.

(ii) Für $n \geq 1$ gilt: Die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{g_n(t)}{t} \in \mathbb{R}$ besitzt eine Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$, die ein Polynom von Grad $n-1$ in t ist.

Beweis. Es gilt per Definition der h_n

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} t^k q_n^{*k} \tag{8.19}$$

Dies beweist offensichtlich *(i)*.

Für $n \geq 1$ gilt $q_n^{*0} = 0$ und daher

$$\frac{g_n(t)}{t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} t^{k-1} q_n^{*k} \tag{8.20}$$

Betrachtet man den Limes für $t \to 0$ von (8.20)

$$\lim_{t \to 0} \frac{g_n(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\lambda q_n + \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} t^{k-1} q_n^{*k} \right) = \lambda q_n \tag{8.21}$$

so ist *(ii)* bewiesen. □

Beweis des Satzes 8.2.1. Für den Fall $n = 0$ gilt die Aussage von Satz 8.2.1 sofort, da

$$h_0(t) = e^{-\lambda t} = e^{\lambda z} e^{-\lambda(t+z)} = h_0(-z) h_0(c+t) \frac{z+t}{z+t} \tag{8.22}$$

Für den Fall $n > 1$ folgt aus dem *Polynomlemma* wegen

$$g_n(t) := e^{\lambda t} h_n(t) \tag{8.23}$$

und

$$g_{n-k}(z+t-k) g_k(k-z) = e^{\lambda(z+t-k)} h_{n-k}(z-t+k) e^{\lambda(k-z)} h_k(z) \tag{8.24}$$

die Äquivalenz von (8.17) mit

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} g_{n-k}(z+t-k) g_k(k-z) \frac{z+t-n}{z+t-k} \tag{8.25}$$

Schlussendlich wird Satz 8.2.1 in den nächsten zwei Schritten bewiesen.
1.Schritt:
Sei $n, j \in \mathbb{N}$ fixiert, so ist zu zeigen, dass (8.25) für alle $t \in \mathbb{R} \backslash \{j, \ldots, j+n\}$ gilt. Sei $r(t)$ gegeben durch

$$r(t) = g_n(t) - \sum_{k=0}^{n} g_k(j+k) \frac{g_{n-k}(t-j-k)}{t-j-k} (t-j-n). \tag{8.26}$$

Nach dem *Polynomlemma* ist das ein Polynom in t und nach der Proposition 8.1.1 hat es jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n+j$ als Nullstelle. Daraus folgt, dass es identisch verschwinden muss.
2.Schritt:
Sei $t \in \mathbb{R}$ fix und seien $n, z \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig. So sei $s(z)$ definiert als

$$s(z) := g_n(t) - \sum_{k=0}^{n} g_k(k-z) \frac{g_{n-k}(t+z-k)}{t+z-k} (t+z-n) \tag{8.27}$$

Nach dem *Polynomlemma* ist das ein Polynom in z und nach dem 1. Schritt gilt, dass jede Zahl $z = -j$, mit $j \in \mathbb{N}$ und $j \neq t, \ldots, t+n$, eine Nusstelle ist. Dann muss es identisch verschwinden.

Somit ist die Aussage aus Satz 8.2.1 gezeigt. □

Satz 8.2.1 besagt also, dass die Ruinformeln vom Seal-Typus und die Appellformeln äquivalent sind. Somit sollten sie die gleichen numerischen Ergebnis liefern.

8.3 Numerischer Vergleich der Appell- und Seal-Formeln

In Tabelle 8.1 sind die mit Mathematica und mit den Appell- und Sealformeln berechneten Werte dargestellt. Die Ruinwahrscheinlichkeit wurde mit $\lambda = 1$, $t = 10$, $c = 1.25$ und Dirac-Verteilten Schäden, also $W_i \sim Dirac(1)$, berechnet.

u	1. Ruinformel	2. Ruinformel	4.Ruinformel	5.Ruinformel
0	0,765864441	0,765864441	0,765864441	0,765864441
1	0,485526109	0,485526109	0,485526109	0,485526109
2	0,279436383	0,279436383	0,279436383	0,279436383
3	0,152325055	0,152325055	0,152325055	0,152325055
4	0,0795721992	0,0795721992	0,0795721992	0,0795721992
5	0,0399015950	0,0399015950	0,0399015950	0,0399015950
6	0,0192089868	0,0192089868	0,0192089868	0,0192089868
7	0,00888050234	0,00888050234	0,00888050234	0,00888050234
8	0,00394498698	0,00394498698	0,00394498698	0,00394498698
9	0,00168523785	0,00168523785	0,00168523785	0,00168523785
10	0,000692886838	0,000692886838	0,000692886838	0,000692886838
11	0,000274443200	0,000274443198	0,000274443204	0,000274443204
12	0,000104820852	0,000104820855	0,000104820835	0,000104820835
13	0,000038642588	0,000038642574	0,000038642620	0,000038642620
14	0,000013763374	0,000013763367	0,000013763367	0,000013763367
15	$4{,}7408381*10^{-6}$	$4{,}7408975*10^{-6}$	$4{,}7405587*10^{-6}$	$4{,}7405587*10^{-6}$
16	$1{,}5789135*10^{-6}$	$1{,}5784899*10^{-6}$	$1{,}5804395*10^{-6}$	$1{,}5804395*10^{-6}$
17	$5{,}1564288*10^{-7}$	$5{,}1653478*10^{-7}$	$5{,}1045110*10^{-7}$	$5{,}1045110*10^{-7}$
18	$1{,}4688248*10^{-7}$	$1{,}4016404*10^{-7}$	$1{,}5985610*10^{-7}$	$1{,}5985610*10^{-7}$
19	$7{,}9709688*10^{-8}$	$8{,}6147338*10^{-8}$	$4{,}8580292*10^{-8}$	$4{,}8580292*10^{-8}$
20	$-4{,}9398987*10^{-8}$	$-6{,}8219378*10^{-8}$	$1{,}4338038*10^{-8}$	$1{,}4338038*10^{-8}$
21	$5{,}9185680*10^{-9}$	$-3{,}5855919*10^{-8}$	$4{,}1128895*10^{-9}$	$4{,}1128895*10^{-9}$
22	$5{,}6627668*10^{-7}$	$8{,}9965760*10^{-7}$	$1{,}1474862*10^{-9}$	$1{,}1474862*10^{-9}$
23	$-2{,}0247724*10^{-6}$	$-3{,}2298266*10^{-6}$	$3{,}1159708*10^{-10}$	$3{,}1159708*10^{-10}$
24	$6{,}1939380*10^{-6}$	0,000011004507	$8{,}2408857*10^{-11}$	$8{,}2408857*10^{-11}$
25	-0,000018956542	-0,000028461217	$2{,}1240564*10^{-11}$	$2{,}1240564*10^{-11}$

Tabelle 8.1: Vertgleich der Appell- und Sealformeln mit $W_i \sim Dirac(1)$, $\lambda = 1$, $c = 1,25$ und $t = 10$

Man sieht, dass die Werte beider Formeltypen gleich sind. Erst ab einem kritischen Wert von $u = 20$ weichen die *Picard-Lefèvre-Formeln* ab. Das ist jedoch kein Problem der Risikotheorie sondern ein Problem der Numerik.

Kapitel 9

Die Diskretisierung von stetigen Verteilungen

Die Ruinwahrscheinlichkeit lässt sich mit den Formeln von *Philippe Picard und Claude Lefèvre*, (3.60) und (4.20) berechnen, wenn die Schäden diskret verteilt sind. Diese Ruinformeln lassen sich aber auch mit kontinuierlichen Verteilungen anwenden, wenn man diese entsprechend diskretisiert. Dies gilt auch für die restlichen drei Ruinformeln, welche in dieser Arbeit hergeleitet wurden.

9.1 Die Ruinwahrscheinlichkeit und ihre Abhängigkeit

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Überlebenswahrscheinlichkeit mit $\varphi(u,x)$ und die Ruinwahrscheinlichkeit mit $\psi(u,x)$ bezeichnet. Das kommt daher, da der Ruin über den Zeithorizont x mit Anfangsrisikoreserve u betrachtet wurde. Diese zwei Größen sind jedoch nicht nur von u und x abhängig, sondern sie hängen auch von der Prämienrate c, von der Intensität λ sowie von der Schadenverteilung $(q_j)_{j\geq 0}$ ab. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt auch die folgende Notation verwendet:

$$\varphi(u,x) = \varphi(u,x;c,\lambda,q) \tag{9.1}$$

und

$$\psi(u,x) = \psi(u,x;c,\lambda,q) \tag{9.2}$$

9.2 Die Diskretisierung von stetigen Verteilungen

Sei $F(x)$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung und sei $\delta > 0$ ein Parameter, der die Schrittlänge der Diskretisierung darstellt, der Diskretisierungsparameter. So lässt sich $F(x)$ durch die Verteilung $F_\delta(x)$ ersetzten. Die Verteilung $F_\delta(x)$ ist konstant auf den äquidistanten Intervallen $[0,\delta), [\delta,2\delta), [2\delta,3\delta), \ldots$ (siehe Abbildung 9.1).

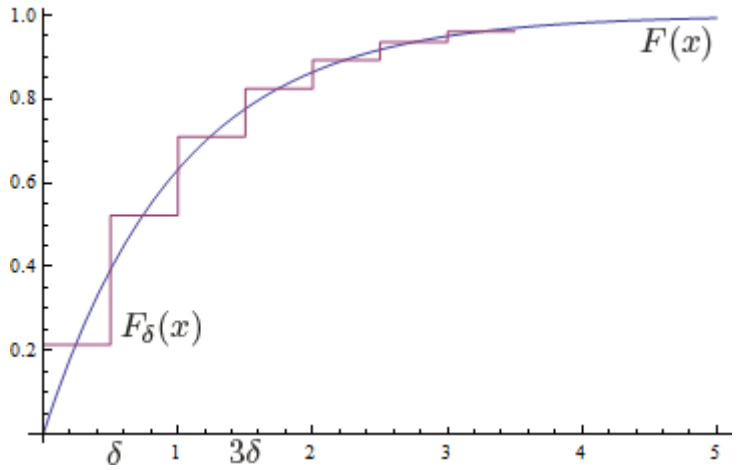

Abbildung 9.1: Beispiel für die Diskretisierung einer Exponentialverteilung mit $\mu = 1$ und Diskretisierungsfaktor $\delta = 0,5$

Proposition 9.2.1. Die Werte für die diskretisierte Verteilung in den Intervallen $[i\delta, (i+1)\delta)$, $i \geq 0$, sind gegeben durch

$$\delta F_\delta = \int_{i\delta}^{(i+1)\delta} F(x)\mathrm{d}x \tag{9.3}$$

Der Erwartungswert μ von $F(x)$ stimmt sogar mit dem Erwartungswert μ_δ der diskretisierten Verteilung $F_\delta(x)$ überein,

$$\mu = \int_0^\infty [1 - F(x)]\mathrm{d}x = \int_0^\infty [1 - F_\delta(x)]\mathrm{d}x = \mu_\delta \tag{9.4}$$

[2],S.101, (11)

Folgender Satz ermöglicht nun das Arbeiten mit den in dieser Arbeit behandelten Ruinwahrscheinlichkeiten bei Risikoreserveprozessen mit stetigen Schadenshöhenverteilungen.

Satz 9.2.1. Seien $\psi(u,t)$ und $\psi(u)$ die Ruinwahrscheinlichkeiten mit endlichem und unendlichem Zeithorizont bezüglich einer beliebigen Schadenshöhenverteilung F. Seien ebenso $\psi_\delta(t,u)$ und $\psi_\delta(u)$ die entsprechenden Ruinwahrscheinlichkeiten zur diskretisierten Verteilung F_δ, so gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} \psi_\delta(u,t) = \psi(u,t) \qquad (t > 0,\ \lambda > 0,\ u \geq 0,\ c > 0). \tag{9.5}$$

Zusätzlich gilt für jede Schadenshöhenverteilung F mit Erwartungswert μ

$$\lim_{\delta \searrow 0} \psi_\delta(u) = \psi(u) \qquad (\lambda > 0,\ u \geq 0,\ c > \lambda\mu). \tag{9.6}$$

Die Diskretisierung kann man sich als Währungswechsel vorstellen, das bedeutet das Geld, welches in der *alten Währung* einen Wert von $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ annimmt, hat in der *neuen Währung* einen Wert von $0, 1, 2, 3, \ldots$. Daraus folgen auch die Übergänge

$$u \to \frac{u}{\delta} \quad \text{und} \quad c \to \frac{c}{\delta} \tag{9.7}$$

Bei der Schadensanzahlverteilung F_δ hat man die Schadenshöhen $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden die Höhe $i\delta$ hat beträgt dann geau den Wert der Sprunghöhe von F_δ an der Stelle $i\delta$, also

$$\begin{aligned} q_0 &= F_\delta(0) = F(0) \\ q_i &= F_\delta(i\delta) - F_\delta(i\delta-) \qquad (i \geq 1) \end{aligned} \tag{9.8}$$

9.3 Elimination von Nullschäden

In seiner Arbeit aus dem Jahr 1999 schreibt *De Vylder* über die erste Ruinformel von Picard und Lefèvre

> The restriction $q_0 = 0$ is essential in the proof of the Picard-Lefère formula.[1]

Zusätzlich bemerken Picard und Lefèvre zu ihrer Foremel

> Notice that the W_i's are supposed to be *strictly* positive but this is not a restriction if the process $(N_t)_{t\geq 0}$ is conveniently defined.[2]

Das bedeutet, dass mindestens ein Schaden bis zum beobachteten Zeipunkt x aufgetreten sein muss damit die Ruinwahrscheinlichkeit mit (3.60) berechenbar ist.

Wenn man jedoch einer stetigen Schadensverteilungen arbeitet und diese stetige Verteilung diskretisiert um die in Kapitel 3-7 beschriebenen Ruinformeln anwenden zu können, kann es sich ergeben, dass mehrere *Nullschäden* auftreten. Somit könnte es sein, dass, obwohl Schäden aufgetreten sind, die Formeln durch die Diskretisierung nicht mehr anwendbar sind. Folglich versucht man die Nullschäden durch eine Transformation der diskretisierten Schadenverteilung zu eliminieren.

Mit der erweiterten Notation für die Ruin- und Überlebenswahrscheinlichkeit wird folgender Satz formuliert.

Satz 9.3.1. Sei $(q_j)_{j\geq 0}$ eine $\mathbb{N}_0$-wertige Schadenverteilung mit $q_0 < 1$, dann definiert

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0 &= 0, \\ \tilde{q}_j &= \frac{q_j}{1 - q_0} \qquad (j \geq 1) \end{aligned} \tag{9.9}$$

eine $\mathbb{N}_0$-wertige Schadenverteilung $(\tilde{q}_j)_{j\geq 0}$ ohne Nullschaden. Sei zusätzlich noch

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 - q_0) \tag{9.10}$$

[1] [2], Abschnitt 4, S.99
[2] [8], Abschnitt1, S.198

dann gilt

$$\psi(u, x; c, \lambda, q) = \psi(u, x; c, \tilde{\lambda}, \tilde{q}) \tag{9.11}$$

und

$$\varphi(u, x; c, \lambda, q) = \varphi(u, x; c, \tilde{\lambda}, \tilde{q}). \tag{9.12}$$

[2], Theorem 3, S.99

Um den Satz zu beweisen benötigen wir folgende Proposition.

Proposition 9.3.1. Sei $S = (S_t)_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität λ und Schadenshöhenverteilung $(q_j)_{j\geq 0}$. Sei ebenso $\tilde{S} = (\tilde{S})_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, jedoch mit Intensität $\tilde{\lambda}$ und Schadenshöhenverteilung $(\tilde{q}_j)_{j\geq 0}$. Dann haben S und $\tilde{S}$ die gleichen endlichdimensionalen Verteilungen.

Beweis. Der Beweis zu Proposition 9.3.1 wird mit Hilfe der Momenterzeugenden Funktion

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \tag{9.13}$$

geführt, genauer gesagt, mit der Eigenschaft der Momenterzeugenden Funktion für zusammengesetzte Poisson-Prozesse. Diese besagt, dass die Momenterzeugende Funktion eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses

$$S_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i \tag{9.14}$$

berechnet wird durch

$$M_{S_t}(\theta) = M_{N_t}(\log(M_X(\theta))), \tag{9.15}$$

wobei $M_{N_t}(\cdot)$ die Momenterzeugende des Poissonprozesses und $M_X(\cdot)$ die Momenterzeugende der Verteilung der X_i beschreibt. Die Monenterzeugende eines Poissonprozesses mit Intensität λ, somit auch für den Prozess aus Proposition 9.3.1, ist gegeben durch

$$M_{N_t}(\theta) = e^{\lambda t(e^{\theta}-1)}. \tag{9.16}$$

Zusätzlich ist für die Schadenshöhenverteilung $(q_j)_{j\geq 0}$ der W_i die Momenterzeugende durch

$$M_W(\theta) = \sum_{i\geq 0} e^{i\theta} q_i \tag{9.17}$$

gegeben. Setzt man in $M_W(\theta)$ die Definitionen für $\tilde{\lambda}$ und $(\tilde{q}_j)_{j\geq 0}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} M_{\tilde{W}}(\theta) &= \sum_{i\geq 1} e^{\theta i} \tilde{q}_i \\ &= \frac{1}{1-q_0} \sum_{i\geq 1} e^{\theta i} q_i \\ &= \frac{1}{1-q_0} [M_W(\theta) - q_0]. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Genauso erhält man

$$M_{\tilde{N}_t}(\theta) = e^{\lambda(1-q_0)t(e^{\theta}-1)} \tag{9.19}$$

Nun ist zu zeigen, dass die Momenterzeugenden Funktionen der beiden zusammengesetzten Poissonprozesse $(S_t)_{t\geq 0}$ und $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ gleich sind, denn dann sind auch deren Verteilungen gleich.

$$\begin{aligned} M_{\tilde{S}_t}(\theta) &= M_{\tilde{N}_t}(\log(M_{\tilde{W}}(\theta))) \\ &= \exp\Big[\lambda(1-q_0)t\Big(\frac{1}{1-q_0}[M_W(\theta)-q_0]-1\Big)\Big] \\ &= e^{\lambda t(M_W(\theta)-1)} = M_{N_t}(\log(M_W(\theta))) \\ &= M_{S_t}(\theta) \end{aligned} \tag{9.20}$$

Somit ist gezeigt, dass die Prozesse $(S_t)_{t\geq 0}$ und $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ die selbe Verteilung besitzen und somit ist Proposition 9.3.1 bewiesen □

Das Ergebnis aus Proposition 9.3.1 lässt sich nun verwenden um Satz 9.3.1 zu beweisen.

Beweis von Satz 9.3.1. Der Schadensanzahl-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess. Die Schadenszeitpunkte werden mit $T_1 < T_2 < T3 < \ldots$ beschrieben. Zu jedem Schadenzeitpunkt T_i mit $i > 0$ gibt es den zugehörigen unabhängigen Schaden W_i. Die Schadenszeitpunkte T_i mit Schadenshöhe $W_i = 0$ werden nun eliminiert und man erhält einen neuen, den restlichen Schadenszeitpunkten zugeordneten, Schadensanzahl-Prozess $(\tilde{N})_{t\geq 0}$. Mit Proposition 9.3.1 sieht man, dass $(\tilde{N})_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda(1-q_0)$ sein muss und somit gilt die Aussage von Satz 9.3.1. □

Mit Satz 9.3.1 wurde eine vernünftige Grundlage geschaffen, mit der nun die Ruinformeln aus dieser Arbeit auch mit stetiger Schadenshöhenverteilung angewendet werden können. Um dies zu veranschaulichen folgt dazu ein Beispiel für die Ruinwahrscheilichkeit eines Ruinprozesses mit Exponentialverteilten Schäden.

9.4 Ein Beispiel mit exponentialverteilten Schadenshöhen

Um die Anwendung der Diskretisierung zur Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten mit stetigen Schadenshöhenverteilungen zu veranschaulichen wird hier ein Beispiel mit exponentialverteilten Schadenshöhen angeführt.

Ausgehend vom klassischen Cramer-Lundberg-Modell sei die Intensität des Poisson-Prozesses gegeben mit $\lambda = 1$. Zusätzlich wird angenommen, dass die Schadenshöhen W_i exponentialverteilt mit Erwartungswert $\mu = 1$ sind. Das bedeutet, die Verteilungsfunktion $F(x)$ hat die Form

$$F(x) = 1 - e^{-x} \qquad x \geq 0 \tag{9.21}$$

Somit ist die diskretisierte Verteilung F_δ auf Grund von (9.3) gegeben durch

$$\begin{aligned} F_\delta(i\delta) &= \frac{1}{\delta} \int\limits_{i\delta}^{(i+1)\delta} F(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\delta} \int\limits_{i\delta}^{(i+1)\delta} 1 - e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\delta}\big[((i+1)\delta - i\delta) + (e^{-(i+1)\delta} - e^{-i\delta})\big] \\ &= 1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} e^{-i\delta} \qquad ,(i \geq 0). \end{aligned} \tag{9.22}$$

Folglich gilt für $i\delta = x$

$$F_\delta(x) = 1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} e^{-\left[\frac{x}{\delta}\right]} \qquad ,(x \geq 0) \tag{9.23}$$

Mit dieser Diskretisierung und (9.8) erhält man also die zur Berechnung von $\varphi(u, x; c, \lambda, q)$ notwendigen q_i's.

$$q_0 = F_\delta(0) = 1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned} q_i &= F_\delta(i\delta) - F_\delta(i\delta-) \\ &= 1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} e^{-i\delta} - \left(1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} e^{-(i-1)\delta}\right) \\ &= \frac{(e^\delta - 1)^2}{\delta e^\delta} e^{-i\delta} \end{aligned} \tag{9.25}$$

Da nun, wie in Abschnitt 9.3, ungewollt falsche Nullschäden auftreten können, müssen diese mit dem dort beschriebenen Verfahren elimiert werden. Somit gilt

$$\tilde{\lambda} = \lambda(1 - q_0) = \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \tag{9.26}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0 &= 0 \\ \tilde{q}_i &= \frac{q_i}{1-q_0} = \frac{\frac{(e^\delta-1)^2}{\delta e^\delta} e^{-i\delta}}{1 - \left(1 - \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\right)} \\ &= -e^{i\delta}(e^\delta - 1) \end{aligned} \tag{9.27}$$

Somit erhalten wir, ausgehend von exponentialverteilten Schäden, zur Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\varphi(u, \frac{x}{c}; \lambda, c, q) \tag{9.28}$$

die passende Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\varphi\Big(\frac{u}{\delta}, \frac{x}{c}; \tilde{\lambda}, \frac{c}{\delta}, \tilde{q}\Big) = \begin{cases} \varphi\Big(\frac{u}{\delta}, \frac{x}{c}; \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}, \frac{c}{\delta}, 0\Big) & \text{für } i = 0 \\ \varphi\Big(\frac{u}{\delta}, \frac{x}{c}; \frac{1-e^{-\delta}}{\delta}, \frac{c}{\delta}, -e^{i\delta}(e^{\delta}-1)\Big) & \text{für } i > 0 \end{cases} \tag{9.29}$$

mit der der diskretisierten Schadenshöhenverteilung. Mit Satz 9.2.1 sind beide Wahrscheinlichkeiten für $\delta \searrow 0$ gleich.
In Tablelle 9.1 sind die mit Mathematica errechneten Zahlen-Werte zu (9.29), mit $u = 10$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ und $x = 10$, tabbelliert. Es fällt auf, dass in diesem Beispiel der Diskretisierungsparameter $\delta = 0.5$ für praktische Anwendungen ausreichend ist.

c	δ=1	δ=0,5	δ=0,25	δ=0,1	δ=0,05
1,05	0,04197914	0,03819054	0,03706733	0,03675380	0,03670905
1,10	0,03734277	0,03324678	0,03223781	0,03195654	0,03191640
1,15	0,03213374	0,02892957	0,02802474	0,02777279	0,02773685
1,20	0,02848433	0,02516575	0,02435555	0,02413021	0,02409808
1,25	0,02455628	0,02188926	0,02116478	0,02096351	0,02093481
1,30	0,02171278	0,01904072	0,01839368	0,01821411	0,01818851
2,00	0,00355380	0,00299878	0,00286990	0,00283452	0,00282949

Tabelle 9.1: Ergebnisse von $\varphi(10, 10)$ zur diskretisierten Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\mu = 1$

Kapitel 10

Der Zeitaufwand der Berechnungen

Ein Ziel dieser Arbeit ist, einen gewissen Überblick über die sogenannte Komplexität (auch Aufwand oder Kosten) der in Kapitel 3-7 vorgestellten Ruinformeln zu erstellen. Genauer gesagt, wird hier nur die Zeitkomplexität, die Berechnung der benötigten „Zeit“ für die Ruinwahrscheinlichkeitsberechnung, analysiert.

10.1 Die Komplexität der ersten Picard-Lefèvre Formel

In diesem Abschnitt geht es darum abzuschätzen, welche Größenordnung die Anzahl der Rechenschritte zur Berechnung der ersten Ruinformel (3.60) hat. Verwendet wird dazu (3.60) mit $x = \frac{n}{c}$

$$\varphi\left(u, \frac{n}{c}\right) = \sum_{j=0}^{u} h_j(n) + h_j(j-u) \sum_{i=u+1}^{u+n} h_{i-j}(u+n-j)\frac{u+n-i}{u+n-j}, \quad n = 1, \ldots, x \tag{10.1}$$

Sehr leicht ist zu erkennen, dass der Rechenaufwand von (10.1) stark von jenem der h_j abhängt und der Aufwand der restlichen Rechenoperationen vernachlässigbar ist. Also versucht man deren Rechenaufwand zu berechnen. Dazu muss zuerst geklärt werden, welche h_j benötigt werden.

Betrachtet man die innere Summe von (10.1) sieht man, dass man als erstes folgende h_j benötigt.

$$h_{i-j}(u+n-j) \quad \text{für} \quad \begin{cases} i = [u]+1, \ldots, [u+n] & \text{aus der inneren Summe} \\ j = 0, \ldots, u & \text{aus der äußeren Summe} \end{cases} \tag{10.2}$$

also für $j = 0, \ldots, u$

$$h_{u+1-j}(u+n-j), \ldots, h_{[u+n]-j}(u+n-j) \tag{10.3}$$

Da die h_j aus der Rekursion von Lemma 2.2.2 berechnet werden, benötigt man für $j = 0, \ldots, u$ noch

$$h_0(u+n-j), \ldots, h_{u-j}(u+n-j). \tag{10.4}$$

Betrachtet man erneut (10.1), so sieht man, dass die h_j *vor* der inneren Summe, das heiSSt

$$h_j(j-u) \qquad j = 0, \ldots, u \tag{10.5}$$

auch berechnet werden müssen.
Ebenfalls ist aus der Rekusion aus Lemma 2.2.2 ersichtlich, dass auch

$$h_0(j-u), \ldots, h_{j-1}(j-u) \tag{10.6}$$

für $j = 0, \ldots, u$ benötigt wird. Schlussendlich fehlen noch aus der äußeren Summe

$$h_j(n) \qquad j = 0, \ldots, u \tag{10.7}$$

Da nun bekannt ist, welche h_j berechnet werden müssen, ist noch die Komplexität der h_j zu klären.

10.1.1 Die Zeitkomplexität der h_j

Die Rekursion der h_j ist schon aus Lemma 2.2.2 bekannt.

$$\begin{aligned} h_0(x) &:= e^{-\lambda \frac{x}{c}} \\ h_j(x) &:= \frac{\lambda x}{cj} \sum_{i=1}^{j} i q_i h_{j-i}(x) \end{aligned} \tag{10.8}$$

Um die Frage nach dem Zeitaufwand zur Berechnung von $h_j(x)$ zu beantworten ist es offensichtlich nötig, die Summanden der Rekursionsformel, genauer gesagt, die Zeitwerte der Summanden, zu zählen.
Ausgehend davon, dass

$$h_0(s) = e^{-\lambda \frac{s}{c}} \tag{10.9}$$

den Zeitwert 1 hat, also 1 zählt, kann man sagen, dass auch

$$h_1(s) = \frac{\lambda s}{c} q_1 h_0(s) \tag{10.10}$$

wieder 1 zählt. Der nächste Summand,

$$h_2(s) = \frac{\lambda s}{c}[q_1 h_1(s) + 2q_2 h_0(s)], \tag{10.11}$$

hat in diesem Fall den Zeitwert 2.

Wenn man nun diese Zählweise schrittweise fortführt erkennt man, dass die Berechnung von $h_j(x)$ schließlich den Zeitwert j hat, denn in

$$h_j(s) = \frac{\lambda s}{c}[q_1 h_{j-1}(s) + \cdots + j q_j h_0(s)] \tag{10.12}$$

stecken j Summanden, die jeweils 1 zählen.

Folglich zählt man zur Berechnung von

$$h_0(s), \ldots, h_j(s) \tag{10.13}$$

insgesamt

$$a(j) = 1 + 1 + 2 + \cdots + j = \frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j + 1 \tag{10.14}$$

Summanden.

Da nun den Aufwand $a(j)$ zur Berechnung der h_j bekannt ist, kann man angeben wieviel Schritte nötig sind, um die jeweiligen Summen von (10.1) zu berechnen. Dazu sind die Fälle $u \leq n$ und $u > n$ zu Unterscheiden.

10.1.2 1. Fall $u \leq n$

Für $j = 0, \ldots, u$ wird aus der inneren Summe

$$h_0(u + n - j), \ldots, h_{u+n-j}(u + n - j) \tag{10.15}$$

berechnet, was also insgesamt einen Aufwand von

$$\begin{aligned} a(n) + \cdots + a(u+n) &= \sum_{j=n}^{u+n} (\frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j + 1) \\ &= \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 n + \frac{1}{2}un^2 + \frac{1}{2}u^2 + un + \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}n + 1 \end{aligned} \tag{10.16}$$

bedeutet. Veranschaulicht sind das die grünen und türkisen Punkte in den Abbildungen 10.1 und 10.2.

Ebenso sind für den Term vor der inneren Summe und für $j = 0, \ldots, u$

$$h_0(j - u), \ldots, h_j(j - u) \tag{10.17}$$

zu berechnen. Das heißt also, dass für diesen Term insgeamt

$$\begin{aligned} a(0) + \ldots, a(u) &= \sum_{j=0}^{u} \left(\frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j + 1\right) \\ &= \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{4}{3}u + 1 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Berechnungsschritte notwendig sind. Dies sind in den Abbildungen 10.1 und 10.2 die roten und rosaroten Punkte. Addiert man nun (10.16) und (10.18) so erhältman einen Gesamtzeitbedarf $\tilde{n}_u$ für die Innere Summe mit dem direkt vorangestellten Term von

$$\begin{aligned}\tilde{n}_u = &\Big(\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2n + \frac{1}{2}un^2 + \frac{1}{2}u^2 + un + \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}n + 1\Big)\\ &+\Big(\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{4}{3}u + 1\Big)\\ \cong &\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2n + \frac{1}{2}un^2 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Schlussendlich fehlt uns noch der Zeitaufwand für die h_j aus der äußeren Summe. Dazu sind für $j = 0, \ldots, u$ jeweils j Schritte notwendig, das heißt der Bedarf $\hat{n}_u$ für die äußere Summe ist

$$\hat{n}_u = \frac{1}{2}u(u+1) \tag{10.20}$$

Wie man sieht, hat $\hat{n}_u$ eine geringere Ordnung wie $\tilde{n}_u$ und somit gilt für die Zeitkomplexität n_u der Berechnung von $\varphi(u, \frac{x}{c})$

$$n_u = \tilde{n}_u + \hat{n}_u \cong \frac{u^3}{3} + \frac{ux(x+u)}{2} \tag{10.21}$$

wobei x das maximale n darstellt (siehe [9], S198, (3)).

10.1.3 2. Fall $u > n$

Im zweiten Fall $u > n$ werden für die Innere Summe mehr Schritte benötigt, denn die Anzahl der Schritte ist im Gegensatz zum ersten Fall ist gleich

$$a(n) + \cdots + a(u-1) + a(u) + a(u+1) + \cdots + a(u+n). \tag{10.22}$$

Wenn man genau hinsieht, erkennt man jedoch, dass sich an der Ordnung des Aufwands nichts ändert, denn man erhält wieder das gleiche Ergebnis wie in (10.16)

$$\begin{aligned} &a(n) + \ldots + a(u-1) + a(u) + a(u+1) + \cdots + a(u+n)\\ &\quad= \sum_{j=n}^{u+n}(\frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j + 1)\\ &\quad= \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2n + \frac{1}{2}un^2 + \frac{1}{2}u^2 + un + \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}u + \frac{1}{2}n + 1 \end{aligned} \tag{10.23}$$

Beim Errechnen des Aufwands für die restlichen Summanden kann man analog feststellen, dass sich der Aufwand in der Ordnung nicht verändert und somit gilt auch für den zweiten Fall

$$\boxed{n_u \cong \frac{u^3}{3} + \frac{ux(x+u)}{2}.} \tag{10.24}$$

Es ist nun klar wie groß der Aufwand zur Berechnung von $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ nach der ersten Ruinformel (10.1) ist. Man ist aber eigentlich auch daran interessiert, wie es mit der Zeitkomplexität aussieht, wenn man (10.1) für jedes $n = 1, \ldots, x$ berechnet. Der Zeitaufwand für diese Berechnung wird mit $N_u(x)$ bezeichnet.

Zur Berechnung von $N_u(x)$ wird n_u nicht einfach über $n = 1, \ldots, x$ aufsummiert. Es reich schon, wenn man für $j = 0, \ldots, u$ den Aufwand für $h_{u+n-j}(u + n - j)$, also die h_j aus der inneren Summe, berechnet. Das bedeutet, man benötigt zusätzlich das Dreieck

$$\begin{array}{ll} h_0(u+n), \ldots, h_{u+n-1}(u+n), h_{u+n}(u+n) & \\ h_0(u+n-1), \ldots, h_{u+n-1}(u+n-1) & \\ \vdots & \iddots \\ h_0(u), \ldots, h_u(u) & \end{array}$$

Wenn dieses Dreieck errechnet wird, sind darin alle Werte der inneren Summe von $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ mit $n = 1, \ldots, x$ enthalten. Man benötigt daher zusätzlichen Aufwand von

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(u+1) = \frac{n^2u}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{3nu}{2} + \frac{3n}{2}. \tag{10.25}$$

Die Zeitkomplexität für die Terme vor der inneren Summe und der äußeren Summe ändert die höchste Ordnung des zusätzlichen Aufwands nicht und ist somit vernachlässigbar. Somit ergibt sich für den Gesamtaufwand N_u ein Wert von

$$\boxed{N_u(x) \cong \frac{u^3}{3} + \frac{u^2x)}{2} + x^2u \qquad (10.26)}$$

Graphische Beispiele der Zeitkomplexität

In Abbildung 10.1 wird das Beispiel für $u = 10$, $x = 10$ und $c = 2$ dargestellt. Dies ist ein Beispiel zum ersten Fall (siehe Abschnitt 10.1.2) mit $n = cx > u$, wobei die Punkte folgenderweise nach Farbe zu interpretieren sind:

- Grün... $h_{i-j}(u + ct - j)$ für $i = u + 1, \ldots, u + ct$ und $j = 0, \ldots, [u]$, siehe (10.3)
- Türkis... Werte für die rekursive Berechnung der *grünen* Werte, siehe (10.4)
- Blau... $h_j(ct)$ für $j = 0, \ldots, u$, siehe (10.7)
- Rot... $h_j(j - u)$ für $j = 0, \ldots, u$, siehe (10.5)
- Rosa... Werte für die rekursive Berechnung der *roten* Werte, siehe (10.6)

Die Abbildung 10.2 stellt das Beispiel $u = 20$,$x = 10$ und $c = 1$ dar. Dies ist ein Beispiel aus dem zweiten Fall (siehe Abschnitt 10.1.3) mit $cx = n < u$, wobei die Punkte wieder wie bei Abbildung 10.1 zu interpretieren sind.

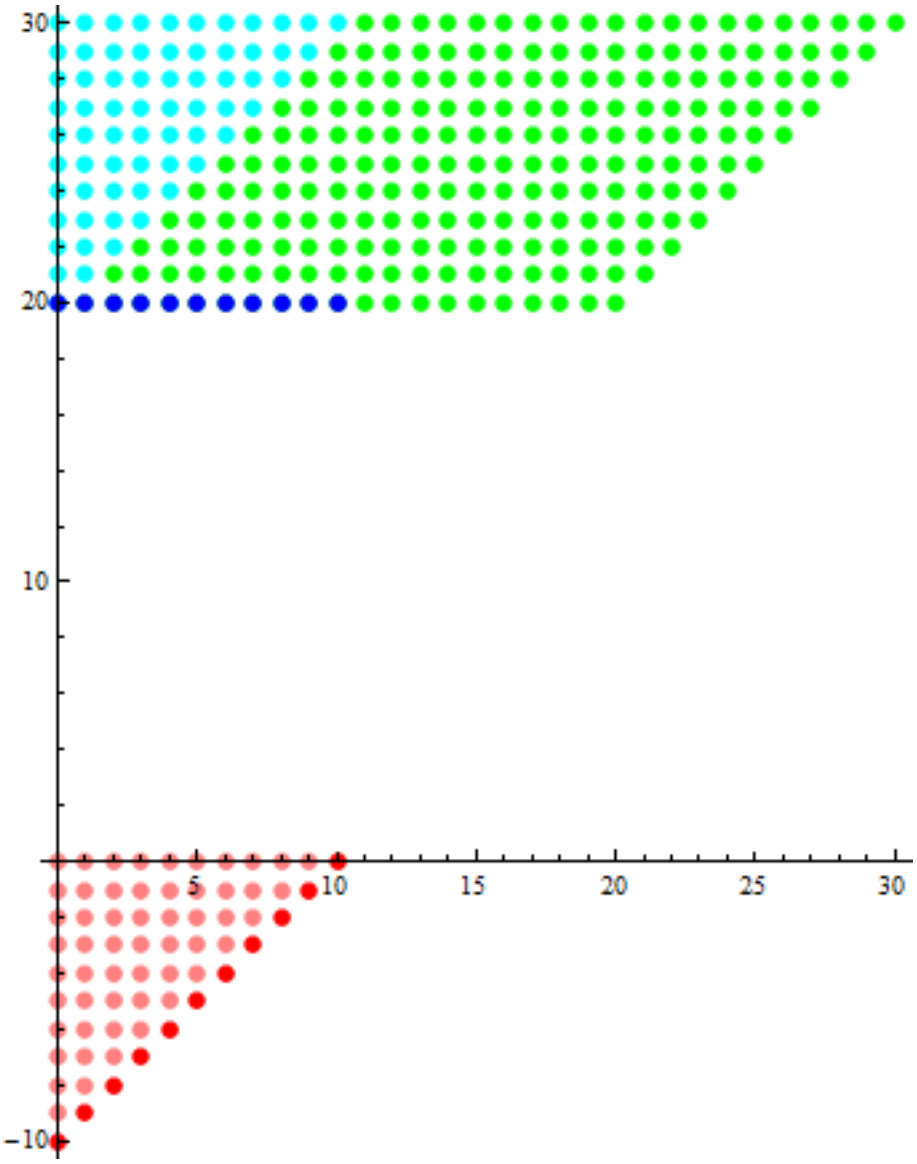

Abbildung 10.1: Die Komplexität der 1. Ruinformel mit $u < n$, konkret $u = 10$, $x = 10$, $c = 2$

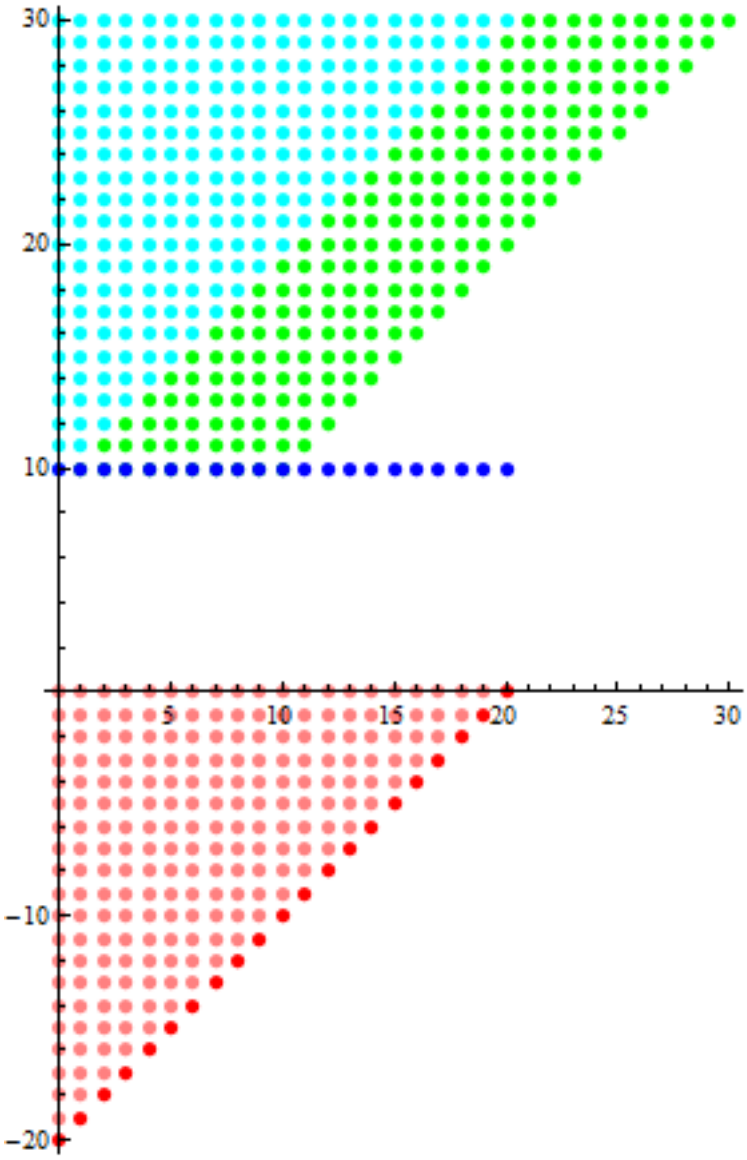

Abbildung 10.2: Die Komplexität der 1. Ruinformel mit $u > n$, konkret $u = 20$, $x = 10$, $c = 1$

10.2 Die zweite Formel nach Picard und Lefèvre

In diesem Abschnitt geht es um den Rechenaufwand der Ruinformel aus Kapitel 4.

$$\varphi\left(u, \frac{n}{c}\right) = \sum_{j=0}^{u} h_{u-j}(-i)\tilde{H}_{i+n}(i+n), \quad n = 1, \ldots, x \tag{10.27}$$

Wie in Abschnitt 10.1 muss man zuerst überlegen, wovon $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ abhängig ist. In diesem Fall ist die Ruinformel abhängig von h_{u-j} und $\tilde{H}_{i+n}$. Eigentlich ist sie jedoch, wie bei der ersten Ruinformel, nur von der Hilfsfunktion h_j abhängig, da $\tilde{H}_{j+n}$ bekannterweise gegeben ist durch

$$\tilde{H}_{i+n}(i+n) = \sum_{k=0}^{i+n} h_{i+n}\big(1 + \frac{k}{i+n}\big) \tag{10.28}$$

Da aus dem Unterabschnitt 10.1.1 bekannt ist, dass $a(j)$ mit

$$a(j) = \frac{j^2}{2} + \frac{j}{2} + 1 \tag{10.29}$$

der nötige Zeitaufwand zur Berechnung von

$$h_0(\cdot), \ldots, h_j(\cdot) \tag{10.30}$$

ist, ist der Zeitaufwand zur Berechnung von $\tilde{H}_{i+n}(i+n)$ gleich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[u+n]} a(k) &= \sum_{k=0}^{[u+n]} \big(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1\big) \\ &= \frac{u^3}{6} + \frac{n^3}{6} + \frac{2nu^2}{3} + \frac{n^2u}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{4u}{3} + \frac{4n}{3} + nu + 1\end{aligned} \tag{10.31}$$

Somit ist klar, dass für die Berechnung von $\tilde{H}_{i+n}(i+n)$ ein Zeitaufwand von

$$\tilde{n}_u = \frac{u^3 + n^3}{6} + un\left(\frac{2u}{3} + \frac{n}{2}\right) \tag{10.32}$$

benötigt wird.

Für die h_j vor $\tilde{H}_{i+n}(i+n)$ sind wie bei der 1. Ruinformel für $j = 0, \ldots, u$

$$h_0(j-u), \ldots, h_j(j-u) \tag{10.33}$$

zu berechnen. Das heißt wiederum, dass für diesen Term

$$\begin{aligned}a(0) + \ldots, a(u) &= \sum_{j=0}^{u} \left(\frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j + 1\right) \\ &= \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{4}{3}u + 1\end{aligned} \tag{10.34}$$

Schritte notwendig sind. Somit benötigt man zur Berechnung von $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ einen Zeitaufwand von

$$\boxed{n_u = \frac{u^3}{3} + \frac{x^3}{6} + ux\left(\frac{2u}{3} + \frac{x}{2}\right) \qquad (10.35)}$$

So wie bei der 1. Ruinformel ergibt sich hier für $n = 1, \ldots, x$ ein zusätzlicher Aufwand von

$$\tilde{N}_u \cong \frac{x^2 u}{2}, \tag{10.36}$$

und somit ein Gesamtaufwand von

$$\boxed{N_u \cong \frac{u^3}{3} + \frac{x^3}{6} + x^2 u + \frac{2u^2 x}{3}. \qquad (10.37)}$$

10.3 Direkte Faltung

Zur Berechnung der Komplexität der *Direkten Faltung*

$$A_j\Big(\frac{n}{c}\Big) = \mathbb{I}_{j<u+n} \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}\Big(\frac{n-1}{c}\Big) h_k(1), \quad n = 1, \ldots, x, \quad j = 1, \ldots, u+n \tag{10.38}$$

$$\varphi\Big(u, \frac{n}{c}\Big) = \sum_{j=0}^{u+n} A_j\Big(\frac{n}{c}\Big), \quad n = 1, \ldots, x \tag{10.39}$$

ist es zuerst nötig, festzustellen, wieviele Summationsschritte nötig sind um $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ für ein fixes j zu berechnen.

Offensichtlich, da der Summationsindex $k = 0, \ldots, j$ ist, ist die Anzahle der Summanden von $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ gleich $j+1$. Betrachtet man nun alle $j = 1, \ldots, u+n-1$ so ist die Summandenanzahl für alle $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ gleich $j+1$, ausgenommen bei $j = u+n-1$. Bei $A_{u+n-1}\big(\frac{n}{c}\big)$ ist der letzte Summand gleich 0 und somit werden dafür $u+n-1$ Schritte benötigt. Folglich benötigt man für $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$ mit $j = 1, \ldots, u+n-1$ eine Anzahl von $\bar{n}_u(n)$ Rechenschritten mit

$$\bar{n}_u(n) = \left(\sum_{k=1}^{u+n-1} k\right) + (u+n-1) = \frac{n^2+u^2}{2} + \frac{n+u}{2} + nu - 1 \tag{10.40}$$

Um den Anzahl der Rechenschritte $\tilde{n}_u(x)$ zu berrechnen, welche nötig ist, um alle A_j für $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ zu berechnen, muss $\bar{n}_u(n)$ nocheinmal über $n = 1, \ldots, x$ aufsummiert werden. Denn, um $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ zu erhalten, sind alle $A_j\big(\frac{n}{c}\big)$, mit $j = 1, \ldots, u+n-1$ und $n = 1, \ldots, x$ nötig. Somit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{n}_u(x) = \sum_{n=1}^{x} = \bar{n}_u(n) &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + \frac{x^2}{2} + ux - \frac{2x}{3} \\ &\cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(x+u)}{2}. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Um schlussendlich die Komplexität von $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ zu erhalten muss man noch die $u + x + 1$ Summationsschritte aus (10.39) zu $\tilde{n}_u(x)$ addieren, was jedoch nichts an der Größenordnung der Komplexität ändert. Somit gilt für den Aufwand $n_u(x)$ von $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$

$$\begin{aligned} n_u(x) &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + \frac{x^2}{2} + ux - \frac{2x}{3} + u + x + 1 \\ &\cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(x+u)}{2}. \end{aligned} \tag{10.42}$$

In Grafik 10.3 ist dargestellt, welche A_j zur Berechnung von $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ notwendig sind. Konkret wurde $u = 10$, $n = 10$ und $c = 1$ verwendet.

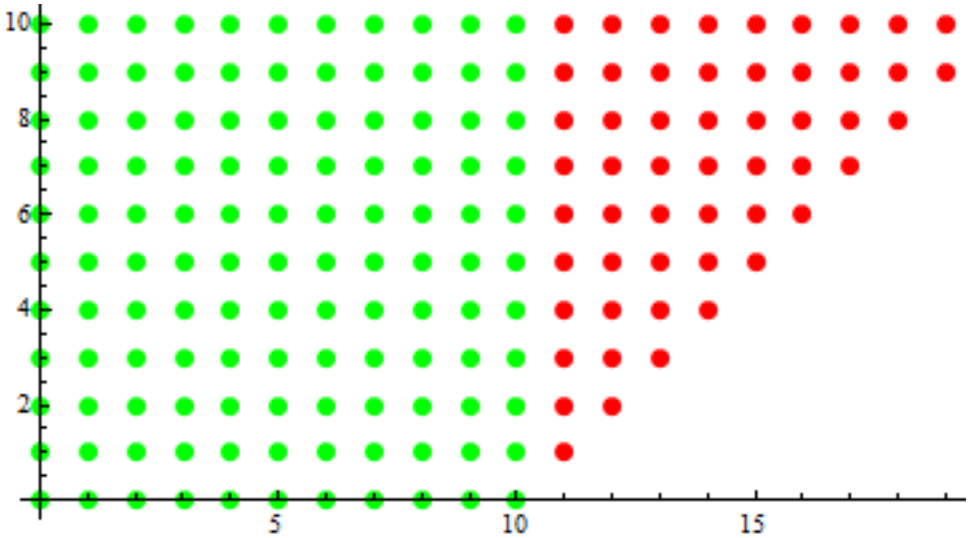

Abbildung 10.3: Die $A_j(\frac{n}{c})$ zur Berechnung von $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ nach der 3. Ruinformel am Beispiel $u = 10$, $n = 10$ und $c = 1$

Die Punkte aus Grafik 10.3 sind nach folgendem Schema zu deuten.

$$\begin{array}{lllllll}
A_0(\frac{n}{c}) & \dots & A_u(\frac{n}{c}) & A_{u+1}(\frac{n}{c}) & \dots & A_{u+n-2}(\frac{n}{c}) & A_{u+n-1}(\frac{n}{c}) \\
A_0(\frac{n-1}{c}) & \dots & A_u(\frac{n-1}{c}) & A_{u+1}(\frac{n-1}{c}) & \dots & A_{u+n-2}(\frac{n-1}{c}) & A_{u+n-1}(\frac{n-1}{c}) \\
A_0(\frac{n-2}{c}) & \dots & A_u(\frac{n-2}{c}) & A_{u+1}(\frac{n-2}{c}) & \dots & A_{u+n-2}(\frac{n-2}{c}) & \\
\vdots & & & \vdots & \iddots & & \\
A_0(\frac{1}{c}) & \dots & A_u(\frac{1}{c}) & A_{u+1}(\frac{1}{c}) & & & \\
A_0(0) & \dots & A_u(0) & & & &
\end{array}$$

Für den Gesamtaufwand $N_u(x)$ müssen nun noch die Schritte hinzugezählt werden, die zusätzlich benötigt werden, um $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ für alle $n = 1, \dots, x$ zu berechnen. Da für $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ alle benötigten A_j ermittelt wurden, muss man nur noch die Anzahl der Summanden der abschließenden Summationen aus (10.39) für alle $n = 1, \dots, x$ zusammenzählen. Somit

muss man für $N_u(x)$ nur $\hat{n}_u(x)$ Schritte, mit

$$\hat{n}_u(x) = \sum_{n=1}^{x}(u+n+1) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + ux, \tag{10.43}$$

zu $n_u(x)$ addieren. Da dies jedoch die Größenordnung der Komplexität nicht beeinflusst, gilt auch für $N_u(x)$ das Ergebnis von $n_u(x)$, also

$$\boxed{N_u(x) \cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(x+u)}{2}. \qquad (10.44)}$$

10.4 Der Aufwand der rekursiven Formeln

Aus der Form der *rekursiven Ruinformel*

$$\varphi(0,0) = 1 \tag{10.45}$$

$$\varphi\left(0, \frac{n}{c}\right) = H_n(n) - \sum_{k=1}^{n} h_k(k)\varphi\left(0, \frac{n-k}{c}\right) \qquad n = 1, \ldots, x \tag{10.46}$$

$$\varphi\left(u, \frac{n}{c}\right) = H_{u+n}(n) - \sum_{k=1}^{n} h_{u+k}(k)\varphi\left(0, \frac{n-k}{c}\right) \qquad n = 1, \ldots, x \tag{10.47}$$

erkennt man sofort, dass man die Aufwandsberechnung zuerst in zwei Schritte teilen muss, den Aufwand für $H_n(n)$ und den Aufwand für die Summe.
1. Schritt: Zur Berechnung des Aufwandes für $H_n(n)$ erkennt man aus der Definition (2.14), dass

$$h_1(1), h_2(2), \ldots, h_n(n) \tag{10.48}$$

benötigt werden. Es ist jedoch schon aus Abschnitt 10.1 bekannt, dass für $h_j(j)$ auch alle $h_0(j), \ldots, h_{j-1}(j)$ benötigt werden und somit braucht man für $H_n(n)$ das gesamte Dreieck aus der Grafik 10.4.

Mit Aufwand zur Berechnung von $h_j(j)$, der gegeben ist durch $a(j)$ aus (10.14), gilt für die Zeitkomplexität $\tilde{n}_u(n)$ für $H_j(n)$

$$\tilde{n}_u(n) = \sum_{k=1}^{x} a(j) = \frac{j^2x + jx}{2} + x. \tag{10.49}$$

Somit gilt für $H_x(x)$ bei (10.46)

$$\tilde{n}_0(x) = \sum_{k=1}^{x} a(x) = \frac{x^3 + x^2}{2} + x \tag{10.50}$$

und für $H_{u+x}(x)$ bei (10.47)

$$\tilde{n}_u(x) = \sum_{k=1}^{x} a(u+x) = \frac{x(u+x)^2 + x(u+x)}{2} + x \tag{10.51}$$

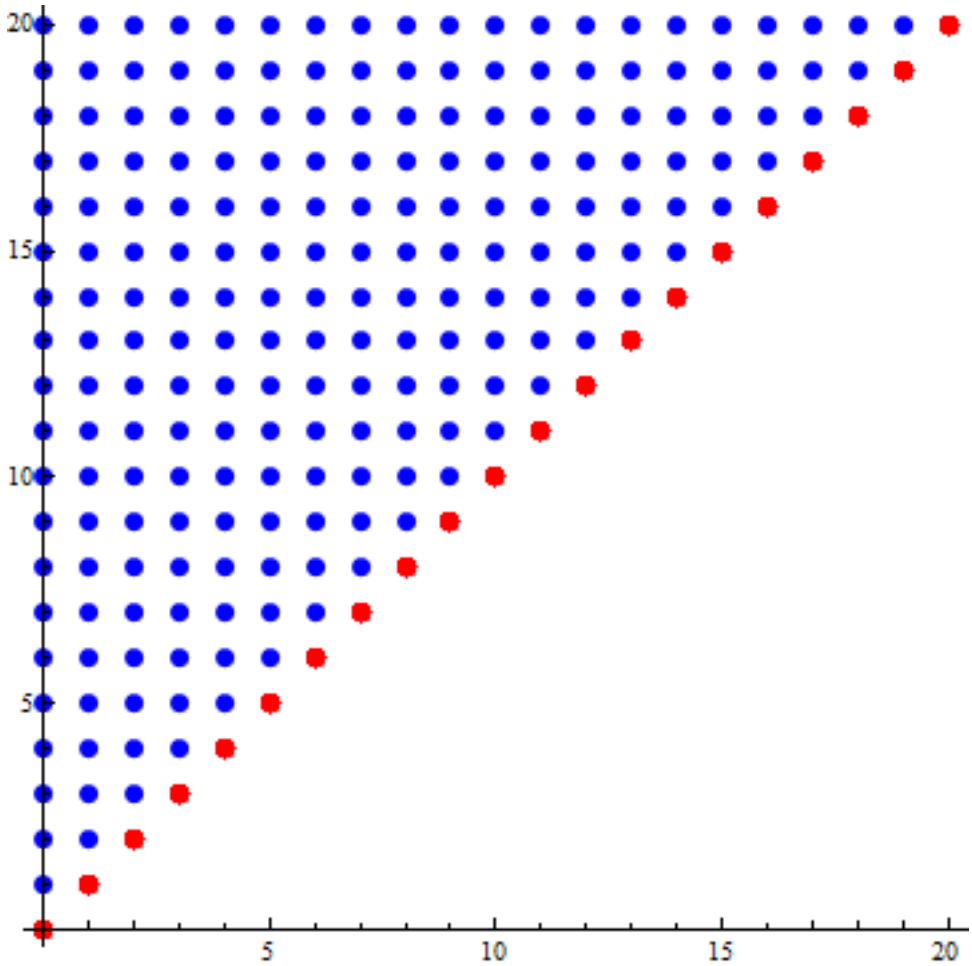

Abbildung 10.4: Die benötigten h_j zur Berechnung von $H_n(n)$ mit $n = 20$

2. Schritt: Bei der Summe der Rekursion

$$\varphi\left(0, \frac{x-1}{c}\right) = H_{x-1}(x-1) - h_1(1)\varphi\left(0, \frac{x-2}{c}\right) + \cdots + h_{x-1}(x-1)\varphi(0,0) \quad (10.51)$$

ist zu beachten, dass die dort vorkommenden h_j und $H_n(n)$ mit $n < x$ schon bei der Berechnung von $H_x(x)$ eruiert worden sind und daher keinen nennenswerten Einfluss auf die Komplexität der Summe haben.

Somit ist der Berechnungsaufwand $\hat{n}_u(x)$ für die Summe gegeben mit

$$\hat{n}_u(x) = \sum_{k=1}^{x} k = \frac{x(x+1)}{2} \quad (10.51)$$

Dieses Ergebnis gilt für (10.46) und auch für (10.47).

Aus den Ergebnissen aus Schritt 1 und Schritt 2 gilt nun für den Aufwand $n_u(x)$ für die vierte Ruinformel im Fall $u = 0$

$$\begin{aligned} n_0(x) = \tilde{n}_0(x) + \hat{n}_0(x) &= \frac{x^3 + x^2}{2} + x + \frac{x(x+1)}{2} \\ &\cong \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

und im Fall $u \neq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} n_u(x) = \tilde{n}_u(x) + \hat{n}_u(x) &= \frac{x(u+x)^2 + x(u+x)}{2} + x + \frac{x(x+1)}{2} \\ &\cong \frac{x^3}{2} + \frac{u^2 x}{2} + x^2 u \end{aligned} \quad (10.51)}$$

Will man den Gesamtaufwand für $\varphi\left(u, \frac{n}{c}\right)$ mit $n = 1, \ldots, x$ wissen, so muss man noch den zusätzlichen Summationsaufwand bei $H_{u+n}(n)$ berücksichtigen. Dieser beträgt

$$\bar{N}_u = \sum_{n=1}^{x} (u + n + 1) = \frac{x^2}{2} + xu + \frac{3x}{2}. \quad (10.51)$$

Der Aufwand für die Summanden in der Summe der vierten Ruinformel verändert sich nicht, da durch die Berechnung der Werte für $n = x$ auch gleich jene für $n < x$ mitberechnet wurden. Somit ist bei der Summe der Formel nur die Anzahl der Summationsschritte nocheinmal aufzusummieren, um den zusätzlichen Aufwand zu bestimmen.

$$\tilde{N}_u(x) = \sum_{n=1}^{x} (n + 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \quad (10.51)$$

Dieser zusätzliche Aufwand ist zu vernachlässigen und somit ergibt sich auch für den Gesamtaufwand

$$\boxed{N_u(x) \cong \frac{x^3}{2} + \frac{u^2 x}{2} + x^2 u. \quad (10.52)}$$

10.5 Formel von Takács

Die nichtrekursive alternative Formel, die 5. Ruinformel

$$\varphi\left(u, \frac{n}{c}\right) = H_{u+n}(n) - \sum_{k=1}^{n} h_{u+k}\tilde{H}_{n-k}(n-k) \qquad n = 1, \ldots, x \tag{10.52}$$

hängt, ähnlich wie die rekursive Ruinformel, von der Funktion H_j ab. Im Gegensatz zur Formel aus Satz 6.2.1 benötigt man hier aber auch die $\tilde{H}_j$. Da diese zwei Funktionen im Grunde nur von h_j abhängen, ist wieder zu überlegen, welche h_j zu berechnen sind.
Im ersten Teil der Gleichung, für $H_{u+n}(n)$, benötigt man

$$\begin{aligned} h_j(s) \qquad & \text{mit } j = 0, \ldots, u+s \\ & \text{und } s = 1, \ldots, x. \end{aligned}$$

Für die $H_{n-k}(n-k)$ aus der Summe ist

$$\begin{aligned} h_j(s) \qquad & \text{mit } j = 0, \ldots, s \\ & \text{und } s = 1, \ldots, x. \end{aligned}$$

zu berechnen. Das bedeutet, dass mit der Berechnung von $H_{u+x}(x)$ alle benötigten h_j berechnet wurden.

Zur Berechnung des nötigen Aufwandes für die h_j wird zuerst der Aufwand $\tilde{a}(j)$ für die erste Laufvariable, also $j = 0, \ldots, u+s$, berechnet.

$$\tilde{a}(j) = 1 + \sum_{j=0}^{u+s} j = \frac{u^2}{2} + \frac{s^2}{2} + us + \frac{u}{2} + \frac{s}{2} + 1 \tag{10.50}$$

Für den Gesamtaufwand $a(j,s)$ für die h_j muss nun noch die zweite Laufvarialble, $s = 1, \ldots, x$ berücksichtigt werden und somit erhält man

$$\begin{aligned} a(j,s) = \sum_{s=1}^{x} \tilde{a}(j) &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + \frac{x^2}{2} + ux + \frac{4x}{3} \\ &\cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} \end{aligned}$$

Um die Komplexität $n_u(x)$ zu erhalten ist es zusätzlich noch nötig, die Rechenschritte aus den Summationen der Berechnungen von H_{u+x} und $\tilde{H}_{n-k}(n-k)$ miteinzubeziehen. Dies gilt auch für die Summationsschritte der Ruinformel selbst. Das bedeutet, man benötigt noch $\tilde{n}_u(x)$ zusätliche Schritte mit

$$\begin{aligned} \tilde{n}_u(x) &= \underbrace{(u+x+1)}_{\text{Summe } H_{u+x}(x)} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)}_{\text{Summe } \tilde{H}_{n-k}(n-k)} + \underbrace{(x+1)}_{\text{Summe Formel}} \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + u + 2. \end{aligned}$$

Dabei wird die Anzahl $\bar{n}_u(x)$ Rechenschritte für $\tilde{H}_{n-k}(n-k)$ durch einfaches Summieren der einzelnen Schritte über k ermittelt,

$$\bar{n}_u(x) = \sum_{k=1}^{x} k = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \tag{10.48}$$

da $\tilde{H}_{n-k}(n-k)$ für alle $k = 1, \ldots, x$ berechnet werden muss. Somit ist die Komplexität $n_u(x)$ für $\varphi\big(u, \frac{x}{c}\big)$ nach der Formel von Takács gegeben durch

$$\begin{aligned} n_u(x) &= a(j,s) + \tilde{n}_u(x) \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + x^2 + ux + \frac{23x}{6} + u + 2 \\ &\cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} \end{aligned} \tag{10.49}$$

Um den Aufwand $N_u(x)$ zu ermitteln, welcher nötig ist um alle $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ mit $n = 1, \ldots, x$ zu berechnen muss man sich nur auf $H_{u+n}(n)$ und die Summationsschritte der Ruinformel konzentrieren. Dies kommt daher, dass der Aufwand für die h_j und für $\tilde{H}_j$ hier nicht verändern, denn bei diesen Funktionen muss man für $n = x$ schon alle anderen Funktionen mit $n < x$ berechnen.

Die Komplexität der Summation für $H_{u+n}(n)$ mit $n = 1, \ldots, x$ ist gegeben durch

$$\hat{N}_u(x) = \sum_{n=1}^{x} (u + n + 1) = \frac{x^2}{2} + xu + \frac{3x}{2}. \tag{10.49}$$

Für die Summation in der Ruinformel ergibt sich ein zusätzlicher Aufwand von

$$\bar{N}_u(x) = \sum_{n=1}^{x} (n + 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \tag{10.49}$$

Somit gilt für den Gesamtaufwand

$$\begin{aligned} N_u(x) &= a(j,s) + \bar{n}_u(x) + \hat{N}_u(x) + \bar{N}_u(x) \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + \frac{x^2}{2} + ux + \frac{4x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + xu + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} + 2x^2 + 2ux + \frac{29x}{6} \\ &\cong \frac{x^3}{6} + \frac{ux(u+x)}{2} \end{aligned} \tag{10.50}$$

Kapitel 11

Appendix

11.1 Notationen und Konventionen

11.1.1 Allgemeine Notationen

Es gelten die üblichen Mengenangaben:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$
- $R_+ = [0, \infty)$

Zusätzlich verwenden wir zur Unterscheidung zwischen reellen und natürlichen Variablen die folgende Konvention.

- i, j, k, l, m, n sind natürliche Zahlen
- r, s, t, x, y, z sind reelle Zahlen

Es ist auch nützlich sich folgende Notationen merken.

- $[x]$... die gröSSte ganze Zahl von x
- $\epsilon_x = x - [x]$... der nicht ganzzahlige Rest von x

11.1.2 Notationen aus der Risikotheorie

Da es sich um eine Risikotheoretische arbeit handelt, gibt es natürlich hier eigene Notationen

- R_t... der Risikoreserveprozess.
- P_t ... der Prämienprozess.
- S_t ... der Gesamtschaden, bzw. der stochastisch Prozess, welcher den Gesamtschaden beschreibt.

- W_i... die i-te Einzelschadenshöhe
- $(N_t)_{t\geq 0}$... die Schadensanzahl, welche durch einen Zählprozess beschrieben wird.
- $\varphi(u,x)$... die Überlebenswahrscheinlichkeit
- $\psi(u,x)$... die Ruinwahrscheinlichkeit
- $T = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0\}$... die Ruinzeit
- $(q_i)_{i\geq 0}$... die Verteilung der W_i
- q_i^{*k}... die k-te Faltungspotenz von q_i

11.2 Appellpolynome

Lemma 11.2.1 (Appellpolynome)**.** Sei b_n ein Polynom und der lineare Operator Δ sei *shift-äquivariant* und gelte

$$\Delta b_n = b_{n-1} \tag{11.0}$$

so heißt ist b_n ein Appell Polynom.
[1], [7],S. 61 ,(2.11)

11.3 Die Ruinwahrscheinlichkeit im inhomogenen Modell

In Kapitel 5 wurde nach Rulliére und Loisel [9] die Ruinwahrscheinlichkeit im homogenen Model beschrieben. Ist das Modell inhomogen, das bedeutet, der Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ ist inhomogen, so kann die Ruinwahrscheinlichkeit wie folgt beschrieben werden.

Satz 11.3.1. Sei $j \in \mathbb{N}$, $i \geq m$ und $A_j(\tau_i) = \mathbb{P}[S_{\tau_i} = j \cap R_{\tau_l} > 0, l = m, \ldots, i]$
Sei auch $\tau_{m-1} = 0$ sowie $A_j(0) = \mathbb{I}_{j=0}$ und $(N_t)_{t\geq 0}$ ein *inhomogener* Poissonprozess so gilt:

$$A_j(\tau_i) = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}(\tau_{i-1})\mathbb{P}[S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} = k] \tag{11.0}$$

und

$$\varphi(u,x) = \mathbb{P}[S_{\tau_k} < k, k = m, \ldots, i] = \sum_{j=0}^{i} A_j(\tau_i), \qquad i = m, \ldots, n \tag{11.0}$$

[9], S.190, Theorem 2.2

Beweis. Der Beweis folgt analog zum Beweis Satz 5.2.1. Da wir hier jedoch mit einem *inhomogenen* Poissonprozess arbeiten kann der letzte Schritt von
$S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} = k$ auf $S_{\frac{1}{c}} = k$ nicht gemacht werden. So gilt:

$$A_j(\tau_i) = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k}(\tau_{i-1})\mathbb{P}[S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} = k] \tag{11.0}$$

□

11.4 Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

In Bemerkung 2.2.1 wurde erwähnt, dass es sich bei den h_j, auf Grund ihrer Definition, um ganze Funktionen handelt. Ganze Funktionen sind Funktionen die auf Ganz $\mathbb{C}$ *holomorph* sind, das bedeutet, dass sie auf ganz $\mathbb{C}$ *komplex differenzierbar* sind. Der folgende Satz betrifft nun die Eindeutigkeit dieser ganzen Funktionen, welche dann bei diversen Beweisen benötigt wird.

Satz 11.4.1 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** Sind zwei Funktionen f und g auf einm Gebiet G holomorph und stimmen sie auch nur auf einer abzählbaren Teilmenge von G überein, die sich in einem Punkt z_0 von G häuft, so sind sie völlig identisch, das bedeutet es gilt:

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in G \tag{11.0}$$

[4], S404, 187.7

11.5 Panjerrekursion

Schadenanzahlverteilungen $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die der Rekursion

$$p_n = p_{(n-1)}(a + \frac{b}{n}) \quad , a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a + b > 0 \tag{11.0}$$

genügen, zählt man zur *Panjer-Klasse* [6]. Zu diesen Verteilungen zählen ausschließlich

- die Poisson-Verteilung mit $a = 0$ und $b = \lambda$,
- die Biniomial-Verteilung mit $a = -\frac{p}{1-p}$ und $b = (N+1)\frac{p}{(1-p)}$,
- die Negativ-Biniomial-Verteilung mit$a = p$ und $b = \frac{(\alpha-1)}{p}$ und
- die geometrische Verteilung mit $a = 1$ und $b = 0$.

wie *Sundt* und *Jewell* [11]bewiesen.

Satz 11.5.1 (Die Panjer-Rekursion)**.** Gegeben seien der Gesamtschaden nach der Formel aus Abschnitt 1.1. Sei die Wahrscheinlichkeisverteilung von N_t aus der Panjer-Klasse. Mit

$$p_n = \mathbb{P}[N_t = n], \quad f(j) = \mathbb{P}[W_i = j], \quad g(j) = \mathbb{P}[S_t = j], \quad n, i \in \mathbb{N} \tag{11.0}$$

gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= p(0) \\ g(i) &= \sum_{i=1}^{j} \Big(a + \frac{bi}{j}\Big) f(i) g(j-i), \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

[6]

11.6 Mathematica-Codes zur Berechnung der Werte in den Tabellen

Um die für diese Arbeit mit Mathematica produzierten Zahlenwerte nachvollziehen zu können sind in diesem Abschnitt die notwendigen Mathematica-Codes abgebildet.

11.6.1 Die Codes zur Berechnung der Werte für die Tabelle 8.1

```
(*Daten zu den Ruinformeln 1,2,4 und 5*)
Remove["Global`*"] (*Alle Daten, Definitionen, etc. einer \
vorrangegangenen Berechnung werden gelöscht*)
Unprotect[Power]; (*Definition 0^0:=1*)
Power[0, 0] = 1;
Protect[Power];


de = 1.; (*Diskretisierungsparameter für stetige \
Einzelschadensverteilungen*)

c = 1.25; (*c*)
l = 1; (*Lambda*)

(*Die Einzelschadensverteilung*)
qd[j_, t_] := KroneckerDelta[j, t]; (*Dirac-Verteilung*)
(*q[j_] := If[j == 0, 0, PDF[,]*)(*Für andere Verteilungen*)

(*Die Faltungspotenzen*)
qd[k_, n_, t_] := (*bei Dirac Verteilung*)
 qd[k, n, t] =
  If[k == 0, KroneckerDelta[n, 0],
   Sum[qd[k - 1, i, t]*qd[n - i, t], {i, 0,
     n}]] (*für die Diracverteilung*)

(* q[k_, n_] := (*bei anderen Verteilungen*)
 q[k, n] =
  If[k == 0, KroneckerDelta[n, 0],
   Sum[q[k - 1, i]*q[n - i], {i, 0, n}]] *)


(*Die Hilfsfunktion h_n*)
(*h_j*)
(*bei der Dirac-Verteilung*)
h[j_, t_] := Sum[Exp[-l*t/c] ((l*t/c)^i)/i! * qd[i, j], {i, 0, j}];
```

```
(*bei anderen Verteilungen*)
(*h[j_,t_]:=Sum[Exp[-l*t/c]((l*t/c)^i)/i! * q[i,j],{i,0,j}];*)
(*H_j*)
hg[j_, t_] := Sum[h[i, t], {i, 0, Floor[j]}]
(*H_j-Tilde*)
hgt[j_, t_] := If[j == 0, 1, Sum[h[i, t] (1 - i/t), {i, 0, Floor[j]}]]

(*Ruinformel1*)
phi1[u_, x_] :=
  If[x == 0, 0,
   Sum[(h[j, c*x] +
      h[j, j - u] *
       Sum[(u + c*x - n)/(u + c*x - j)*h[n - j, u + c*x - j], {n,
         u + 1, Floor[c*x + u]}]), {j, 0, u}]];

(*Ruinformel2*)
phi2[u_, x_] :=
 If[x == 0, 0,
  Sum[h[u - i, -i]*hgt[i + Floor[c*x], i + c*x], {i, 0, Floor[u]}]]

(*3. Ruinformel*)
bn[j_, n_, u_] := bn[j, n, u] =
   If[n == 0, KroneckerDelta[j, 0],
    If[j < u + n, Sum[bn[j - k, n - 1, u] h[k, 1], {k, 0, j}], 0]];
phi3[u_, x_] := Sum[bn[j, x, u], {j, 0, Floor[u + x]}];

(*Ruinformel4*)
phi4null[n_] := phi4null[n] = If[n == 0, 1,
    hg[c*n, c*n] -
     Sum[h[k, k]*phi4null[(c*n - k)/c], {k, 1, Floor[c*n]}]];
phi4u[u_, n_] := phi4u[u, n] = If[n == 0, 1,
    hg[u + c*n, c*n] -
     Sum[h[u + k, k] phi4null[(c*n - k)/c], {k, 1, c*n}]];
phi4[u_, n_] := If[u == 0, phi4null[n], phi4u[u, n]];

(*Ruinformel5*)
e[x_] := x - Floor[x];
nu[u_, x_] := Floor[e[u] + e[x]];
e[u_, x_] := e[u] + e[x] - nu[u, x];
(*Formel5 für n=x*)
phi5nx[u_, x_] :=
  hg[Floor[u + c*x], c*x] -
   Sum[h[Floor[u + k], k - e[u]]*
```

```
     hgt[Floor[c*x - k + nu[u, x]], c*x - k + nu[u, x]], {k, 1,
     Floor[c*x + nu[u, x]]}];
(*Formel5 für n=1,..,[x]*)
phi5n1tox[u_, x_] :=
 hg[Floor[u + c*x - e[x] + nu[u, x]], c*x] -
  Sum[h[Floor[u + k], k - e[u]]*
    hgt[c*x - e[x] - k + nu[u, x],
     c*x - e[x] - k + nu[u, x] + e[u, x]], {k, 1,
    Floor[c*x - e [x] + nu[u, x]]}];
(*Schlussendliche 5. Formel*)
phi5[u_, x_] := If[x == Floor[x], phi5n1tox[u, x], phi5nx[u, x]];

(*Ausgabe der Werte der jeweiligen Formel*)
Ruin1 = Table[N[1 - phi1[u, 10]], {u, 0, 25}]
Ruin2 = Table[N[1 - phi2[u, 10]], {u, 0, 25}]
Ruin3 = Table[1 - phi3[u, Floor[10/c]], {u, 0, 25}]
Ruin4 = Table[N[1 - phi4[u, 10]], {u, 0, 25}]
Ruin5 = Table[N[1 - phi5[u, 10]], {u, 0, 25}]
```

11.6.2 Der Code zur Tabelle 9.1

Die Werte für die diskretisierte Exponentialverteilung zur Tabelle 9.1 wurden mit Hilfe der 1. Ruinformel von Picard und Lefèverte errechnet. Dazu musst der schon in Abschnitt 11.6.1 geschriebene Code etwas umgeschrieben und an den Diskretisierungsfaktor angepasst werden.

```
(*Die Berechnung der Werte für die Tabelle mit der diskretisierten
Exponentialverteilung*)

(*Definition 0^0:=1 ist zur Berechnung der h_j in gewissen Fällen
notwendig*)
Unprotect[Power];
Power[0, 0] = 1;
Protect[Power];

(*Intensität Lambda mit Discretisierungsfaktor D*)
l[d_] := 1*(1 - Exp[-d])/d;

(*Es folgt die Vorgabe der Verteilung der Einzelschäden, also q_i*)
(*Es wird gleich die Diskretisierte und von Nullschäden befreite
Exponentialverteilung vorgegeben*)
q[j_, d_] := q[j, d] = If[j == 0, 0, (Exp[d] - 1)*(Exp[-d*j])]

(*nun wird die Faltungspotenz für die q[j,d] definiert*)
```

```
q[k_, n_, d_] :=
 q[k, n, d] =
  If[k == 0, KroneckerDelta[n, 0],
   Sum[q[k - 1, i, d]*q[n - i, d], {i, 0, n}]]

(*h_j*)
h[j_, t_, c_, d_] :=
  Sum[Exp[-l[d]*t/c] ((l[d]*t/c)^i)/i! * q[i, j, d], {i, 0, j}];

(*Die 1. Ruinformel nach Picard-Lefèvre*)
phi1[u_, x_, c_, d_] :=
  If[x == 0, 0,
   Sum[(h[j, c*x, c, d] +
      h[j, j - Floor[u], c, d] *
       Sum[(u + c*x - n)/(u + c*x - j)*
         h[n - j, Floor[u] + c*x - j, c, d], {n, Floor[u + 1],
         Floor[c*x + u]}]), {j, 0, Floor[u]}]];

(*Die Ausgabe der Werte und Speicherung dieser in den Wert
"exponential"*)
exponential =
 Table[Table[
   N[1 - phi1[10/d, 10, (1 + c*0.01)/d, d]], {c, {5, 10, 15, 20, 25,
     30, 100}}], {d, {1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.05}}]
```

Abbildungsverzeichnis

3.1 Ruin vor dem Zeipunkt x, konkret $x \leq \nu_n$ 13
3.2 Ruin nach Zeitpunkt x, konkret $x > \nu_n$ 14

9.1 Beispiel für die Diskretisierung einer Exponentialverteilung mit $\mu = 1$ und Diskretisierungsfaktor $\delta = 0,5$ 46

10.1 Die Komplexität der 1. Ruinformel mit $u < n$, konkret $u = 10$, $x = 10$, $c = 2$ 57
10.2 Die Komplexität der 1. Ruinformel mit $u > n$, konkret $u = 20$, $x = 10$, $c = 1$ 58
10.3 Die $A_j(\frac{n}{c})$ zur Berechnung von $\varphi\big(u, \frac{n}{c}\big)$ nach der 3. Ruinformel am Beispiel $u = 10$, $n = 10$ und $c = 1$ 61
10.4 Die benötigten h_j zur Berechnung von $H_n(n)$ mit $n = 20$ 63

Tabellenverzeichnis

1.1 Beispiel für die Rekursion der Faltungspotenz 4

2.1 Veranschaulichung der Hilfsfunktion h_n 8

8.1 Vertgleich der Appell- und Sealformeln mit $W_i \sim Dirac(1)$, $\lambda = 1$, $c = 1,25$ und $t = 10$ 44

9.1 Ergebnisse von $\varphi(10, 10)$ zur diskretisierten Exponentialverteilung mit Erwartungswert $\mu = 1$ 51

Literaturverzeichnis

[1] P. Appell. Sur une classe de polynômes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 9:119–144, 1880.

[2] F. E. De Vylder. Numerical finite-time ruin probabilities by the Picard-Lefèvre formula. *Scand. Actuar. J.*, (2):97–105, 1999.

[3] H. U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*, volume 8 of *S.S. Heubner Foundation Monograph Series*. University of Pennsylvania Wharton School S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelphia, Pa., 1979. With a foreword by James C. Hickman.

[4] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*, volume 2. B. G. Teubner Verlag, Abraham-Lincoln-Straße 46, 65189 Wiesbaden, 13 edition, 2004.

[5] Yu. A. Kazmin. Appell polynomials. *Encyclopedia of Math*, 1:209–210, 1988.

[6] H. H. Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bull.*, 12(1):22–26, 1981.

[7] P. Picard and C. Lefèvre. The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scand. Actuar. J.*, (1):58–69, 1997.

[8] P. Picard and C. Lefèvre. The moments of ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution. *Insurance Math. Econom.*, 23(2):157–172, 1998.

[9] D. Rullière and S. Loisel. Another look at the Picard-Lefèvre formula for finite-time ruin probabilities. *Insurance Math. Econom.*, 35(2):187–203, 2004.

[10] H. L. Seal. *Stochastic Theory of a Risk Business*. Wiley, 1969.

[11] B. Sundt and W. S. Jewell. Further results on recursive evaluation of compound distributions. *Astin Bull.*, 12(1):27–39, 1981.

[12] L. Takács. A generalization of the Ballot problem and its application in the theory of queues. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 57:327–337, 1962.

[13] L. Takács. The time dependence of a single-server queue with Poisson input and general service times. *Ann. Math. Statist.*, 33:1340–1348, 1962.