



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

---

# Über die bedingte/gefilterte historische Simulation und nicht-Gauß'schen Modelle im quantitativen Risikomanagement

Ausgeführt am Institut für  
Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich HUBALEK

durch

Julia Puchner  
Wacholderweg 2  
4786 Brunnenthal

---

Datum

---

Unterschrift

## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich versichere, dass ich die eingereichte Diplomarbeit selbständig verfasst, keine als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe. Ich erkläre weiters, dass ich diese Diplomarbeit bisher weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als wissenschaftliche Arbeit vorgelegt habe.

Wien, Jänner 2010

Julia Puchner

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Personen bedanken, die mir bei der Erarbeitung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Mein herzlicher Dank gilt Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek, dem Betreuer meiner Arbeit. Bereits durch eine abwechslungsreiche Gestaltung der Lehrveranstaltungen hat er mein Interesse an der Risikoanalyse geweckt, weshalb ich dieses Gebiet der Mathematik für meine Diplomarbeit gewählt habe.

Vielen Dank für die hilfreichen Anregungen und die angenehme Leitung.

Ein großes Dankeschön gilt meinen Eltern, Thomas und Doris, und meinen Geschwistern, Sandra, Verena und Tobias, die, davon abgesehen, dass sie mir das Studium ermöglichten, auch immer großes Interesse an meiner Arbeit zeigten, mich soweit wie möglich unterstützten und immer mit gutem Rat beiseite standen.

An dieser Stelle möchte ich noch Mama und meinem Freund Markus danken, die sich als Korrekturleser meine Arbeit sehr gewissenhaft durchgelesen haben.

Ich möchte ein Dankeschön an meine Wegbegleiter durch das Studium richten. Vor allem gilt dieser Dank meinen beiden treuesten Begleitern, Markus und Max, die nicht nur durch gemeinsames Erarbeiten des Stoffs das Studium erleichtert haben, sondern oftmals für lustige Stunden zwischendurch sorgten. Da wir leider unterschiedliche Studienzeige gewählt haben, möchte ich mich an dieser Stelle bei Anita bedanken, die mit mir erfolgreich die Hürden des Finanz- und Versicherungszweig bewältigte. Einen großen Dank widme ich weiteren Mitstreitern meiner Studienzeit, speziell Berni, Günther, Luki und Ulli, die immer für amüsante – aber auch konstruktive – Stunden sorgten und somit der Spaß im Studium nie zu kurz blieb.

Das größte Dankeschön geht an meinen Freund, Markus, der nicht nur ein wichtiger Wegbegleiter des Studiums war und mich während des Studiums tatkräftig unterstützte, sondern auch in schwierigen Zeiten stets zur Seite stand, immer ein offenes Ohr hatte und für jeden Zeitpunkt motivierende Worte fand und moralische Unterstützung leistete.

*Vielen Dank,*

*Julia*

# Abstract

In recent years value-at-risk evolved to a widely spread concept for measuring risks. One possibility to calculate the value-at-risk is the usage of a *GARCH*- or *EWMA*-process in combination with a historical simulation and adjustment of historical data to reflect the difference between the historical volatility of the market variable and its current volatility. Another way to specify this measure is to apply the RiskMetrics variance model to the historical simulation, so that declining weights are applied to past returns. One can also assess the value-at-risk by choosing any probability distribution for the data and using a transformation to obtain a multivariate normal distribution. The necessary parameters are hereby provided by an updating scheme such as *GARCH* time series. Finally, by circumventing the assumption of normally distributed data and modeling the volatility of the exchange rates by a *GARCH*-process, the two most frequent points of criticism when calculating the value-at-risk are countered in advance. This diploma thesis illustrates these approaches with the help of daily exchange rates of twelve different currencies and a comparison is carried out.

keywords: *value-at-risk, historical simulation, GARCH, EWMA*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>8</b>
1.1	Motivation . . . . .	8
1.2	Hintergrund der Risikomessung . . . . .	8
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen des Risikomanagements</b>	<b>12</b>
2.1	Bewertung von Risiken . . . . .	12
2.1.1	Risikofaktoren und die Verlustfunktion . . . . .	12
2.1.2	Die bedingte und unbedingte Verlustfunktion . . . . .	14
2.1.3	Messung des Risikos . . . . .	14
2.2	Value-at-Risk . . . . .	16
2.2.1	Definition: Value-at-Risk . . . . .	16
2.2.2	Sonderfälle für die Berechnung: Value-at-Risk . . . . .	20
2.2.3	Kohärente Risikomaße . . . . .	20
2.2.4	Berechnung: Value-at-Risk . . . . .	24
2.3	Zeitreihenmodelle . . . . .	28
2.3.1	Der <i>GARCH</i> -Prozess . . . . .	30
2.3.2	Der <i>EWMA</i> -Prozess . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Berücksichtigung von Schwankung-Updates und exponentiell abfallenden Gewichten in verschiedenen Verfahren der historischen Simulations für den Value-at-Risk</b>	<b>34</b>
3.1	Einführung . . . . .	34
3.2	Das Verfahren der einfachen historischen Simulation: Der HS-Ansatz . . . . .	36
3.2.1	Aufbau und Berechnung der Methode . . . . .	36
3.3	Das Verfahren der historischen Simulation mit Updates der Schwankung: Der HW-Ansatz . . . . .	37
3.3.1	Aufbau und Berechnung der Methode . . . . .	38
3.3.2	Konklusion des Ansatzes . . . . .	39

3.4	Das Verfahren der historischen Simulation mit exponentiellen Gewichten: Der BRW-Ansatz . . . . .	40
3.4.1	Aufbau und Berechnung der Methode . . . . .	42
3.4.2	Konklusion des Ansatzes . . . . .	42
3.5	Veranschaulichung der Ansätze "BRW" und "HS" . . . . .	43
3.6	Vergleich der Ansätze . . . . .	45
3.6.1	Methoden für den Vergleich . . . . .	45
3.6.2	Ein Beispiel aus der Praxis . . . . .	48
3.7	Ein Ausblick zur Verwendung des Value-at-Risks: Das Risikokapital . . . . .	57
3.8	Konklusion des Kapitels . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Die Value-at-Risk Berechnung, falls die täglichen Änderungen in Marktvariablen nicht normalverteilt sind</b>	<b>60</b>
4.1	Einführung . . . . .	60
4.2	Ansätze für die Berechnung des Value-at-Risks . . . . .	62
4.3	Marktvariablen und der Verlauf der Normalverteilung . . . . .	64
4.3.1	Die Problematik der Annahme „Normalverteilung“ . . . . .	65
4.4	Die Modellierung von Returns ohne Normalverteilung und die Berechnung des Value-at-Risks . . . . .	68
4.4.1	Aufbau und Berechnung des Modells . . . . .	68
4.4.2	Ein spezielles Beispiel dieses Modells . . . . .	71
4.5	Ein Beispiel aus der Praxis . . . . .	73
4.5.1	Erster Fall: Konstante Varianz . . . . .	74
4.5.2	Zweiter Fall: Varianz nach dem <i>EWMA</i> -Modell . . . . .	77
4.5.3	Resultat der Implementierung . . . . .	81
4.6	Konklusion des Kapitels . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Ein Ausblick: Ein weiterer Modellvorschlag für die Value-at-Risk Berechnung</b>	<b>84</b>
5.1	Die Simulation eines Pfades . . . . .	86
5.2	Die Simulation mehrerer Pfade . . . . .	88
5.3	Bemerkungen zu dieser Methode . . . . .	89

---

<b>6</b>	<b>Konklusion</b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>Appendix A</b>	<b>93</b>
7.1	Historische Simulation . . . . .	93
7.1.1	ohne Mittelwert-Anpassung . . . . .	93
7.1.2	mit Mittelwert-Anpassung . . . . .	94
7.2	Hull & White - Methode . . . . .	95
7.2.1	ohne Mittelwert-Anpassung . . . . .	95
7.2.2	mit Mittelwert-Anpassung . . . . .	96
7.3	Boudoukh & Richardson & Whitelaw - Methode . . . . .	97
7.3.1	ohne Mittelwert-Anpassung . . . . .	97
7.3.2	mit Mittelwert-Anpassung . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Appendix B</b>	<b>100</b>
8.1	Abweichungsuntersuchung (im Vergleich zur Standardabweichung) . .	100
8.1.1	Annahme: konstante Varianz . . . . .	100
8.1.2	Annahme: Varianz nach dem <i>EWMA</i> -Modell . . . . .	100
8.2	Maximierungsproblem . . . . .	101
8.2.1	Annahme: konstante Varianz . . . . .	101
8.2.2	Annahme: Varianz nach dem <i>EWMA</i> -Modell . . . . .	103
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Value-at-Risk . . . . .	17
2	Bestimmung des $\alpha$ -Quantils einer stetigen und strikt wachsenden Verteilung . . . . .	18
3	Bestimmung des $\alpha$ -Quantils einer nicht stetigen Verteilungsfunktion beziehungsweise einer Treppenfunktion . . . . .	19
4	Bestimmung des $\alpha$ -Quantils einer nicht streng monotonen Verteilung .	19
5	Mögliche Kandidaten für kohärente Risikomaße . . . . .	23
6	Portfolio A . . . . .	23
7	Portfolio B . . . . .	24
8	Value-at-Risk im HW-Ansatz . . . . .	39
9	Wechselkurs des Schweizer Franken . . . . .	48
10	Return des Schweizer Franken über 2420 Tagen . . . . .	49
11	Erstes 500er-Fenster: Return des Schweizer Franken . . . . .	49
12	Erstes 500er-Fenster: angepasster Return des Schweizer Franken . . . .	50
13	5%-Value-at-Risk der historischen Simulation . . . . .	51
14	5%-Value-at-Risk der HW-Methode . . . . .	51
15	5%-Value-at-Risk der BRW-Methode . . . . .	52
16	Hull & White: Vergleich der Returns mit dem 5%-Value-at-Risk . . . .	53
17	Hull & White: Vergleich der Returns mit dem 1%-Value-at-Risk . . . .	54
18	Benötigtes Kapital unter den 3 Methoden für eine Investition von 1\$ in DEM . . . . .	58
19	Vergleich: Normalverteilung und Verteilung mit positivem Exzess . . . .	64
20	Vergleich: Histogramm der Returns und die geschätzte Verteilungsfunktion (für alle Währungen gemeinsam) . . . . .	76
21	Vergleich: Histogramm der Returns im Vergleich zu der geschätzten Verteilungsfunktion (für alle Währungen gemeinsam) . . . . .	80
22	Konstante Varianz . . . . .	82
23	<i>EWMA</i> -Varianz . . . . .	82

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

**Beispiel 1.1.** *Betrachte man drei verschiedene Situationen, die schlussendlich alle eine Gemeinsamkeit haben:*

1. *Ein Investor besitzt Aktien einer Firma.*
2. *Ein Versicherungsunternehmen verkauft eine Versicherungspolize.*
3. *Eine Privatperson entscheidet sich für die Umwandlung einer fixen Hypothek in eine variable Hypothek.*

*Diese drei Ausgangspunkte sind alle von einem wichtigen Aspekt betroffen. Der Investor ist heute im Besitz einer Aktie mit einem ungewissen zukünftigen Wert. Für das Versicherungsunternehmen wird die Polize möglicherweise oder auch nicht durch das zu deckende Event ausgelöst. Die Entscheidung für eine refinanzierte Vereinbarung der Hypothek verändert die zukünftigen Zahlungen entweder zum Guten oder zum Schlechten.*

*Die Zufälligkeit spielt eine ausschlaggebende Rolle in der Abschätzung der aktuellen Produkte, die durch den Investor, das Versicherungsunternehmen oder die Privatperson getragen werden.*

Dieses einleitende Beispiel soll einen Einblick gegeben haben, wie viele unvorhersehbare Entscheidungen im alltäglichen Leben vorkommen. Im Hinblick auf die finanzielle Lage bringt dies ein gewisses Risiko mit sich. Jeder ist daran interessiert, wie groß dieses Risiko maximal werden kann, das heißt man möchte eine Risikobewertung ermitteln.

## 1.2 Hintergrund der Risikomessung

Auf der ganzen Welt erleiden Finanzinstitute immer wieder spektakuläre Verluste.

- Können solche enormen Verluste vermieden werden, wenn entsprechende interne Kontrollsysteme und Risikomessungssysteme funktionieren würden?
- Welches Risikomaß bietet sich als sinnvolle Grundlage für eine Risikokontrolle an?
- Wie groß kann der Umfang des Risikos werden, der durch eine Investition verloren werden kann?

Das Risikomanagement gewinnt immer mehr an Bedeutung und spielt eine wichtige Rolle auf den Finanzmärkten. Die Größe "Value-at-Risk" probiert eine Antwort auf viele Fragen, die durch Aktivitäten auf dem Finanzmarkt entstehen, zu bieten. Der Begriff "Value-at-Risk" heißt wörtlich übersetzt der "gefährdete Wert". Was versteckt sich jedoch hinter dieser Kennzahl und inwiefern eignet sich diese Größe für die (korrekte) Bewertung eines Risikos?

Bei den meisten Finanzinstituten hat die Risikogröße "Value-at-Risk" seit Mitte der 1990er einen hohen Status erreicht. Die Geburtsstunde des Value-at-Risk liegt schon weiter zurück, jedoch für den Durchbruch dieses Maßes ist J.P. Morgan maßgeblich verantwortlich.

Als Dennis Weatherstone Vorsitzender der US-amerikanischen Investmentbank J.P. Morgan war, verlangte er täglich einen einseitigen Bericht über die Risiken des gesamten Marktexposures des Handelsbestandes sowie eine Schätzung über die maximale Höhe der Verluste an dem folgenden Tag. Eine Schwierigkeit war jedoch, dass die Marktrisiken vieler Finanzinstitute mit verschiedensten Methoden beurteilt wurden. Dennis Weatherstone wollte unbedingt ein einheitliches Maß für die Risikomessung aller Finanzinstitute haben. Dieser Zeitpunkt war die Geburtsstunde des Value-at-Risk.

Im Oktober 1994 veröffentlichte J.P. Morgan sein Produkt *RiskMetrics<sup>TM</sup>*, das für alle unentgeltlich zu Verfügung stand. Dieses Produkt basierte grundsätzlich auf einer Methode, die als "Value-at-Risk" bezeichnet wurde.

Im Zuge von immer öfters auftretenden enormen Verlusten verschiedenster Finanzinstitute wurde dem Value-at-Risk als Konzept zur Ermittlung einer Messzahl für das Marktrisiko immer mehr Bedeutung zugesprochen. Aber was versteht man unter dieser Messgröße eigentlich?

Der Value-at-Risk wird als der Verlust bezeichnet, der bei einem bestimmten Finanzprodukt (zum Beispiel einem Portfolio) – bezogen auf eine bestimmte Zeitdauer und einem bestimmten Konfidenzintervall – maximal eintreten kann.

Der große Wunsch von Regulatoren ist es, Vergleiche zwischen verschiedenen Finanzinstituten – nicht nur nationale, sondern auch länderübergreifende Vergleiche – stellen zu können. Dieser Wunsch sollte durch das neue Risikomaß Value-at-Risk möglich sein. Hendricks und Hirtle (1997) behaupten unter anderen:

"... the information generated by the models will allow supervisors and financial market participants to compare risk exposure over time and across institutions."

"... a capital charge based on internal models may provide supervisors and the financial markets with a consistent framework for making comparisons

across institutions.”

Trotz dieser wünschenswerter Aussagen sind diese nicht 100%-ig korrekt. Es gibt einige verschiedene Modellansätze für die Ermittlung des Value-at-Risk, die daher auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können.

Auftretende Verluste in der Finanzwelt ist kein Thema der Vergangenheit, sondern ein top-aktuelles Gebiet, das die Medien (leider) oftmals mit viel Input füttert. Aus diesem Grund bot es sich an, das Thema ”Über die bedingte/gefilterte historische Simulation und nicht-Gauß’schen Modelle im quantitativen Risikomanagement” für die Arbeit zu wählen. Der Inhalt und das Ziel dieser Diplomarbeit ist eine Sammlung möglicher verschiedener Ansätze und Methoden für die Berechnung von der Risikomesszahl Value-at-Risk zu erstellen.

Dabei wird speziell auf die *Historische Simulation*, auf den *Ansatz von Hull and White* und auf die *Methode von Boudoukh, Richardson and Whitelaw* eingegangen. Des Weiteren wird eine mögliche Transformation vorgestellt, die für die Bestimmung des Value-at-Risk dienen soll.

Die Vorgehensweise hierfür besteht jeweils aus der Darlegung der Grundlagen, aus der Erarbeitung der Funktionsweise der Methoden sowie aus der Implementierung dieser Ansätze (mitsamt der Angabe eines Beispielcodes) und aus für das Verständnis dienenden Beispielen.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit beinhaltet die folgenden Kapitel und ist wie folgt eingeteilt:

1. Zu Beginn ist im **Kapitel 1** eine kurze Einleitung dargestellt, in der die Motivation und ein kurzer geschichtlicher Hintergrund gegeben werden soll.
2. Das **Kapitel 2** ab Seite 12 dient zum mathematischen Verständnis der notwendigen Begriffe. Es werden die Grundlagen zu den einzelnen Begriffen, die für die verschiedenen Methoden aus den weiteren Kapiteln erforderlich sind, erläutert.
3. Im **Kapitel 3** ab Seite 34 werden drei Methoden und Modelle vorgestellt, die für die Berechnung des Value-at-Risks herangezogen werden. Diese werden anhand eines Beispiels aus der Praxis verglichen. Diese drei Methoden sind
  - die gewöhnliche historische Simulation
  - der Ansatz von Hull and White, der sich der Annahme einer variablen Varianz der Returns nach einem Zeitreihenprozess bedient, und

- der Ansatz von Boudoukh, Richardson and Whitelaw, der den erst kürzlich aufgetretenen Ereignissen mehr Bedeutung als weiter in der Vergangenheit liegenden Ereignissen schenkt.
4. In dem **Kapitel 4** ab Seite 60 wird die Rolle der Normalverteilung in Zusammenhang mit der Risikomessung diskutiert. Die Annahme einer Normalverteilung ist für das Risikomanagement ungeeignet. Dieses Kapitel stellt eine mögliche Transformation vor, wie diese Problematik umgangen werden kann.
  5. Im letzten theoretischen **Kapitel 5** ab Seite 84 wird noch kurz ein weiteres Modell angeschnitten, das sich – im Gegensatz zu den meisten anderen Ansätzen – mit zweierlei Problemen bei der Risikomessung beschäftigt. Diese Methode berücksichtigt einerseits die Annahme keiner Normalverteilung und andererseits die bedingte Heteroskedastizität.
  6. Das **Kapitel 6** ab Seite 90 fasst die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit nochmals kurz zusammen, bevor man dann in den letzten beiden Kapiteln **Appendix A** ab Seite 93 und **Appendix B** ab Seite 100 die Programmiercodes findet, die für die angeführten Berechnungen aus den Kapiteln 3 und 4 implementiert werden.

## 2 Theoretische Grundlagen des Risikomanagements

Dieses Kapitel beinhaltet vor allem mathematische Grundlagen, die für die Risikomessung notwendig sind. Das Buch [6] dient zur Unterlage dieses gesamten Kapitels 2.

### 2.1 Bewertung von Risiken

Angenommen es ist ein Portfolio bestehend aus  $d$  Investments mit den Gewichten  $\omega_1, \dots, \omega_d$  gegeben. Die Änderung im Wert des Portfolios über eine bestimmte festgelegte Zeitspanne, oft auch  $P$  &  $L$  genannt – stehend für "Profit" und "Loss", kann über die Formel

$$X = \sum_{i=1}^d \omega_i \cdot X_i$$

angegeben werden. Die  $\{X_i : 1 \leq i \leq d\}$  beschreiben die Änderungen der Investmentwerte, speziell steht  $X_i$  für das  $i$ -te Investment.

Die Messung des Risikos dieser Portfolios besteht hauptsächlich aus der Bestimmung der Verteilungsfunktion  $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$  für die Änderung des Portfoliowertes  $X$  beziehungsweise aus Funktionalen, die diese Verteilungsfunktion beschreiben – vor allem ihren Mittelwert, ihre Varianz und ihren 99% - Perzentil.

Im Hinblick für den Erhalt dieser Größen ist ein genau kalibriertes gemeinsames Modell für den zugrundeliegenden Vektor der Investments  $(X_1, \dots, X_d)$  notwendig. Vorerst genügt es jedoch zu verstehen, dass die Risikomessung im Grunde genommen ein statistisches Problem ist. Sie basiert einerseits auf historischen Beobachtungen und andererseits auf einem gegebenen Modell, wodurch eine statistische Schätzung für die Verteilung der Wertänderung zu einer Position berechnet wird.

#### 2.1.1 Risikofaktoren und die Verlustfunktion

Das Verfassen dieses theoretischen Teils beruht auf den Seiten 25–28 aus dem Buch [6].

Sei die Unbeständigkeit und Zufälligkeit wie in dem einleitenden Beispiel im Kapitel 1.1 auf Seite 8 der künftigen Zustände der Welt durch einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  gegeben und weiters sei ein Portfolio aus Aktien und Anleihen angenommen. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $V(t)$  beschrieben. Zu einer vorgegebenen Zeitspanne  $\Delta$  (zum Beispiel 1 oder 10 Tage) ist der *Verlust* des Portfolios der Periode  $[t, t + \Delta]$  durch

$$L_{[t, t+\Delta]} := -(V(t + \Delta) - V(t))$$

angegeben.

Meist wird ein fixierter Horizont  $\Delta$  festgelegt, daher ist es praktisch, die Zeit in Einheiten von  $\Delta$  zu messen. Aus diesem Grunde führt man eine Zeitreihen-Notation ein, wobei von einem unspezifischen Prozess  $Y_s$  auf die Zeitreihe  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  mit  $Y_t := Y(\Delta t)$  übergegangen wird und man daher den Verlust  $L_{t+1} := L_{[t\Delta, (t+1)\Delta]} = -(V_{t+1} - V_t)$  erhält.

Der Wert  $V(t)$  wird in der Praxis durch eine Funktion, abhängig von der Zeit und von einem  $d$ -dimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{Z}_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})'$ , von Risikofaktoren modelliert, das heißt für den Wert des Portfolios gilt

$$V_t = f(t, \mathbf{Z}_t),$$

wobei  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion darstellt. Diese Darstellung des Portfolios wird *Mapping* der Risiken genannt.

Es ist naheliegend, die Reihe der Änderungen der Risikofaktoren  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbf{X}_t := \mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_{t-1}$  zu definieren. Mittels dieser Schreibweise gelangt man zu einer Verlustfunktion der Gestalt  $L_{t+1} = -(f(t+1, \mathbf{Z}_t + \mathbf{X}_{t+1}) - f(t, \mathbf{Z}_t))$ .

Wenn  $\mathbf{Z}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  bekannt ist, so stellt die Verlustverteilung eine Funktion dar, die nur mehr von den Änderungen des Risikofaktors  $\mathbf{X}_{t+1}$  abhängt. Dazu wird eine weitere Notation eingeführt: Sei  $l_{[t]}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  der sogenannte *Verlustoperator*, der die Änderungen der Risikofaktoren zu Verlusten abbildet,

$$l_{[t]}(\mathbf{x}) := -(f(t+1, \mathbf{Z}_t + \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{Z}_t)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar  $L_{t+1} = l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1})$ .

Für spätere Berechnungsansätze, wie zum Beispiel der Kovarianz-Methode, die im Kapitel 2.2.4 auf Seite 24 beschrieben ist, ist eine Approximation 1. Ordnung hilfreich. Sei  $f$  differenzierbar, so ist diese Approximation 1. Ordnung  $L_{t+1}^\Delta$  der Verluste durch die Form

$$L_{t+1}^\Delta := - \left( f_t(t, \mathbf{Z}_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, \mathbf{Z}_t) \cdot X_{t+1,i} \right)$$

gegeben, wobei die tiefgestellte Notation bei der Funktion  $f$  die partiellen Ableitungen beschreiben. Der dazugehörige linearisierte Verlustoperator  $l_{[t]}^\Delta$  ist

$$l_{[t]}^\Delta(\mathbf{x}) := - \left( f_t(t, \mathbf{Z}_t) + \sum_{i=1}^d f_{z_i}(t, \mathbf{Z}_t) \cdot x_i \right).$$

Durch diesen Approximationsansatz besteht die Möglichkeit, die Verluste als lineare Funktion der Änderungen der Risikofaktoren darzustellen. Dieser Ansatz ist offensichtlich umso besser, je kleiner die Änderungen der Risikofaktoren sind – das heißt

zum Beispiel eine Risikomessung nur über einen kurzen Zeitraum – und je mehr der Portfoliowert linear in den Risikofaktoren ist.

### 2.1.2 Die bedingte und unbedingte Verlustfunktion

Als Unterlage für diesen kleinen Auszug über bedingte und unbedingte Verlustfunktionen dienen die Seiten 28–29 aus [6].

Es gibt zwei Konzepte, die bei der Verlustmessung im Risikomanagement betrachtet werden können. Dabei wird zwischen der bedingten und der unbedingten Verlustfunktion beziehungsweise der bedingten und der unbedingten Verteilung der Verlustfunktion unterschieden. Der Unterschied steht stark mit der Wahrscheinlichkeit der Zeitreihe der Reihe von den Risikofaktoren-Änderungen  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in Verbindung.

Sei einerseits angenommen, dass die Änderungen der Risikofaktoren eine stationäre Zeitreihe mit der stationären Verteilung  $F_{\mathbf{X}}$  auf  $\mathbb{R}^d$  beschreiben. Dies bedeutet, dass die Verteilung von  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in Bezug auf Zeitverschiebungen invariant ist. Sei andererseits ein Zeitpunkt  $t$  fixiert, so beschreibt die Sigma-Algebra  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\mathbf{X}_s : s \leq t\})$  die verfügbare Information über die Änderungen zur Zeit  $t$ . Die bedingte Verteilung von  $\mathbf{X}_{t+1}$  gegeben der Information  $\mathcal{F}_t$  wird mit  $F_{\mathbf{X}_{t+1}|\mathcal{F}_t}$  beschrieben. In den meisten stationären Zeitreihen-Modellen stimmt die bedingte und unbedingte Verteilungsfunktion nicht überein. Als Beispiel hierfür sei auf das *GARCH*-Modell verwiesen, bei dem die Varianz der bedingten Verteilung von  $\mathbf{X}_{t+1}$  eine Funktion, abhängig von den Änderungen der vergangenen Risikofaktoren, ist. Im Falle, dass die Reihe  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{N}}$  unabhängig und identisch verteilt ist, so gilt  $F_{\mathbf{X}_{t+1}|\mathcal{F}_t} = F_{\mathbf{X}}$ .

Die bedingte Verteilungsfunktion  $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}$  des Verlustes ist für ein  $l \in \mathbb{R}$  mit

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(l) = \mathbb{P}[l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1}) \leq l \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[L_{t+1} \leq l \mid \mathcal{F}_t]$$

definiert.

### 2.1.3 Messung des Risikos

Die Informationen dieses Unterkapitels stammen aus den Seiten 34–37 aus dem zugrundeliegenden Buch [6].

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die bestehenden Ansätze zur Risikomessung gegeben. Die Möglichkeiten für die Messung eines Risikos lassen sich in vier verschiedene Kategorien einteilen:

1. *Notional-Amount Approach*: Dieser Ansatz ist der älteste bestehende Ansatz. Hierbei ist das Risiko eines Portfolios als die Summe der nominellen Werte der

individuellen Wertpapiere des Portfolios definiert, wobei jeder nominelle Wert möglicherweise mit einem Faktor gewichtet ist.

2. *Factor-Sensitivity Measures*: Diese Methode liefert die Änderung im Portfoliowert, wenn eine kleine vorher festgelegte Änderung in einem der zugrundeliegenden Faktoren vollzogen wird. Das heißt, dieser Ansatz misst wie sensibel ein Portfoliowert auf eine kleine Änderung eines Risikofaktors reagiert. Dadurch wird Information über die Robustheit des Portfolios erhalten, jedoch kann die gesamte Risikosituation nicht eingeschätzt werden.
3. *Risk Measures based on Loss-Distributions*: Die modernsten Messungen des Risikos eines Portfolios sind statistische Größen, die die bedingte und unbedingte Verlustverteilung einer vorher bestimmten Zeitspanne beschreiben. Als Beispiele sind die Varianz, der Value-at-Risk und der Expected-Shortfall anzuführen. Aufgrund einer einzigen bestimmten Statistik auf das (in einem Portfolio enthaltenen) Risiko zu schließen kann durchaus problematisch sein, jedoch spricht einiges für die Verwendung der Verlustverteilung für die Risikobemessung:
  - Die Verluste stellen den zentralen Gesichtspunkt des Interesses im Risikomanagement dar, daher bietet es sich an, die Risikomessung aufgrund derer Verteilungen zu gestalten.
  - Das Konzept der Verlustverteilung beweist sich weiters als sinnvoll auf jeder Ebene von Aggregation von Portfolios bestehend aus einem einzigen Finanzinstrument bis zu einer Gesamtlage eines Finanzinstituts.
  - Die Verlustverteilungen können quer durch die Portfolios miteinander verglichen werden.

Zwei Nachteile bringt dieser Ansatz jedoch auch mit sich. Einerseits ist die Schätzung der Verlustverteilung von historischen Daten abhängig. Besteht eine Änderung der Richtlinien des Finanzmarkts, so können die historischen Daten nur mehr beschränkt für Vorhersagen des Risikos in der Zukunft verwendet werden. Andererseits ist es praktisch schwer handzuhaben, eine Schätzung der Verlustverteilung exakt zu bestimmen, vor allem für ein großes Portfolio. Viele scheinbar ausgefeilte Risikomanagement-Systeme basieren auf relativ einfachen statistischen Modellen für die Verlustverteilung, wie zum Beispiel auf einer nicht vertretbaren Annahme der Normalverteilung.

Informationen über die Erwartungen von den Marktteilnehmern, wie zum Beispiel implizite Volatilität, sollte im Besonderen in Verbindung mit statistischen Schätzungen für die Modellbildung der Verlustverteilung verwendet werden.

4. *Risk Measures based on Scenarios*: Bei diesem Ansatz wird eine Anzahl von möglichen zukünftigen Änderungen von Risikofaktoren (Szenarien) betrachtet,

wie zum Beispiel ein 10%-iger Anstieg des Wechselkurses oder ein 20%-iger Fall eines Anleihenindex. Das Risiko des Portfolios wird als der maximale Verlust des Portfolios in allen Szenarien bemessen. Dabei können extreme Szenarien durch kleine Gewichte beeinflusst werden, um deren Auswirkung auf das Resultat zu lindern.

## 2.2 Value-at-Risk

Dieses Kapitel und alle beinhalteten Unterkapitel haben [6] als wissenschaftliche Unterlage. Es sind speziell Ausschnitte der Seite 37–54 beinhaltet.

Der *Value-at-Risk* ist wahrscheinlich die am weitesten verbreitete Größe zur Risikomessung in Finanzinstituten.

Es wird ein Portfolio von risikoträchtigen Assets und ein fixer Zeithorizont  $\Delta$  betrachtet. Die Verteilungsfunktion der dazugehörigen Verlustfunktion wird mit  $F_L(l) = \mathbb{P}[L \leq l]$  beschrieben. Dabei wird jetzt nicht zwischen bedingten und unbedingten Verteilungen unterschieden, sondern es wird davon ausgegangen, dass diese Wahl am Anfang der Analyse gemacht wurde und  $F_L$  die Verteilung des Interesses vertritt. Man möchte eine Statistik basierend auf  $F_L$  definieren, die die Schwere des Risikos des Portfolios für eine bestimmte Zeitspanne  $\Delta$  misst. Ein offensichtlicher Kandidat ist der maximal mögliche Verlust, gegeben durch  $\inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) = 1\}$ . Jedoch ist in vielen Modellen der Träger von  $F_L$  oft unbeschränkt, sodass der maximale Verlust unendlich ist. Weiters werden bei der Verwendung des maximalen Verlustes mögliche Informationen über die Wahrscheinlichkeit beziehungsweise über die Verteilung von  $F_L$  vernachlässigt. Der Value-at-Risk ist eine unmittelbare Erweiterung des maximalen Verlustes, die diese Kritik in Betracht zieht. Die Idee hinter dem Value-at-Risk ersetzt den "maximalen Verlust" einfach durch "maximalen Verlust, der zu einer gegebenen großen Wahrscheinlichkeit, nicht überstiegen wird". Diese Wahrscheinlichkeit wird als das sogenannte *Konfidenzniveau* bezeichnet.

### 2.2.1 Definition: Value-at-Risk

**Definition 2.1** (Value-at-Risk). *Sei ein Wert für  $\alpha \in (0, 1)$  gegeben. Der Value-at-Risk (VaR) für ein Portfolio zu einem Konfidenzniveau  $\alpha$  ist definiert als die kleinste Zahl  $l$ , sodass die Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten des Verlustes  $L$  der Höhe  $l$  nicht größer als  $(1 - \alpha)$  ist. Formal bedeutet dies*

$$\text{VaR}_\alpha := \inf \{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L > l] \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

Der Value-at-Risk ist folglich ein Quantil der Verlustverteilung.

Typische Werte für das Level  $\alpha$  sind  $\alpha = 0.95$  oder  $\alpha = 0.99$ .

Im Marktrisikomanagement ist die Zeitspanne üblicherweise ein oder 10 Tage, im Kreditrisikomanagement normalerweise ein Jahr.

Es sei bemerkt, dass die Definition des Value-at-Risks zu einem Konfidenzlevel  $\alpha$  keine Information über die Schwere des Verlustes, der mit einer Wahrscheinlichkeit unter  $1 - \alpha$  auftritt, beschreibt.

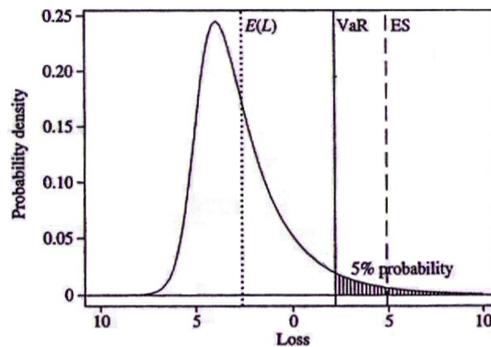


Abbildung 1: Value-at-Risk

Die Abbildung 1 zeigt eine Verteilungsdichte einer Verlustverteilung mit einer vertikalen Linie bei dem Wert des Value-at-Risk mit  $\alpha = 0.95$ . Man beachte, dass der erwartete Verlust  $\mathbb{E}[L]$  negativ ist (eingezeichnet mit einer gepunkteten Linie), das heißt es wird ein Profit erwartet. Die strichlierte Linie zeigt den Expected-Shortfall, ebenfalls mit 95% als alternatives Maß für die Risikobewertung.

Da die verschiedenen Quantile eine wichtige Rolle im Risikomanagement spielen, werden im Folgenden die präzisen Definitionen hierfür angegeben.

**Definition 2.2** (Inverse Funktion). *Sei eine steigende Funktion  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so ist die dazugehörige inverse Funktion von  $T$  definiert als*

$$T^{\leftarrow}(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\},$$

wobei die Konvention  $\inf \emptyset = \infty$  verwendet wird.

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und  $X$  eine Zufallsvariable beziehungsweise  $F$  eine Verteilungsfunktion. Dann beschreibt die Zahl  $q \in \mathbb{R}$  das  $\alpha$ -Quantil der Zufallsvariable  $X$  beziehungsweise der Verteilungsfunktion  $F$ , wenn die äquivalenten Bedingungen gelten:

1.  $\mathbb{P}[X < q] \leq \alpha \leq \mathbb{P}[X \leq q]$
2.  $\mathbb{P}[X \leq q] \geq \alpha$  und  $\mathbb{P}[X \geq q] \geq 1 - \alpha$

$$3. F_X(q_\alpha^-) \leq \alpha \leq F_X(q_\alpha^+)$$

Die Zahl  $q$  ist ein  $\alpha$ -Quantil, wenn die Verteilungsfunktion  $F$  den Wert  $\alpha$  gerade erreicht oder gerade überspringt. Die Menge aller  $\alpha$ -Quantile einer Zufallsvariable  $X$  ist ein abgeschlossenes Intervall mit der unteren Grenze

$$q_\alpha^-(x) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\}$$

und der oberen Grenze

$$q_\alpha^+(x) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq x] > \alpha\}$$

Ist  $q$  ein  $\alpha$ -Quantil, so gilt  $q \in [q_\alpha^-(x), q_\alpha^+(x)]$ .

**Definition 2.3** (Quantile). Sei eine Verteilungsfunktion  $F$  gegeben, so wird die inverse Funktion  $F^\leftarrow$  als das Quantil beziehungsweise die Quantilsfunktion von  $F$  bezeichnet. Zu einem vorgegebenen Niveau  $\alpha \in (0, 1)$  ist das  $\alpha$ -Quantil von  $F$  durch

$$q_\alpha(F) := F^\leftarrow(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$$

gegeben. Im Falle einer stetigen und strikt monoton wachsenden Verteilungsfunktion  $F$  ist das  $\alpha$ -Quantil  $q_\alpha(F) = F^{-1}(\alpha)$ , wobei  $F^{-1}$  die gewöhnliche Inverse zu  $F$  ist.

Die Bestimmung des  $\alpha$ -Quantils ist in den nachstehenden Graphiken Abbildung 2, Abbildung 3 und Abbildung 4 graphisch dargestellt.

Der einfachste Fall für die Ermittlung des Quantils ist eine streng monoton steigende und stetige Verteilungsfunktion wie in Abbildung 2 gezeigt wird.

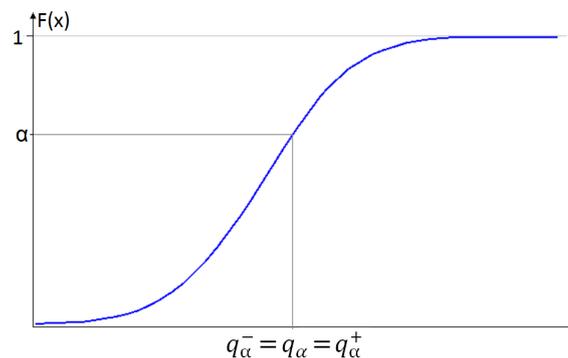


Abbildung 2: Bestimmung des  $\alpha$ -Quantils einer stetigen und strikt wachsenden Verteilung

Hierbei stimmen der untere und der obere Wert des Intervalls für das Quantil überein, das heißt  $q_\alpha^- = q_\alpha^+$  und somit ist das  $\alpha$ -Quantil  $q_\alpha$  eindeutig bestimmt.

Bei den beiden Beispielen in Abbildung 3 handelt es sich um eine Treppenfunktion beziehungsweise um eine nicht stetige Verteilungsfunktion.

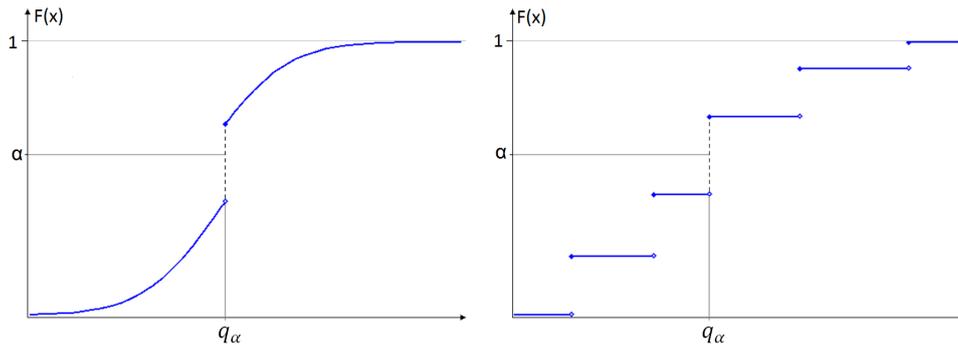


Abbildung 3: Bestimmung des  $\alpha$ -Quantils einer nicht stetigen Verteilungsfunktion beziehungsweise einer Treppenfunktion

An den Sprungstellen nimmt das  $\alpha$ -Quantil den Wert an, für den gilt, dass  $\mathbb{P}[X \leq q] \geq \alpha \geq \mathbb{P}[X < q]$ , das heißt auch hier ist das  $\alpha$ -Quantil eindeutig bestimmt.

In der letzten Abbildung 4 ist eine Verteilungsfunktion dargestellt, die nicht streng monoton steigend ist. Die Funktion ist stückweise konstant.

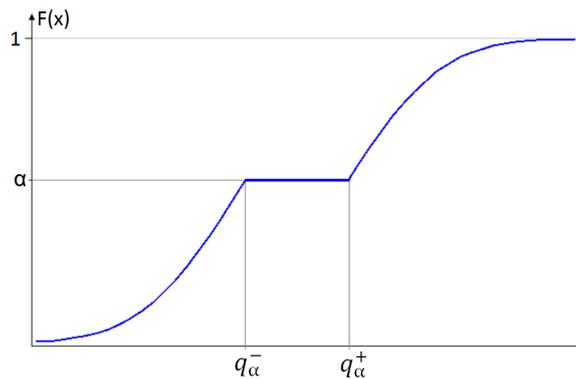


Abbildung 4: Bestimmung des  $\alpha$ -Quantils einer nicht streng monotonen Verteilung

Hier tritt der Fall auf, dass das  $\alpha$ -Quantil nicht eindeutig angegeben werden kann, es lässt sich lediglich ein Intervall für das Quantil angeben.

Aus der Definition der inversen Funktion und der Rechtsstetigkeit einer Funktion folgt folgendes Lemma als weitere Definition für ein  $\alpha$ -Quantil:

**Lemma 2.4.** *Eine Zahl  $y \in \mathbb{R}$  stellt das  $\alpha$ -Quantil einer Verteilungsfunktion  $F$  dar, dann und nur dann, wenn die beiden nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:*

1.  $F(y) \geq \alpha$
2.  $F(x) < \alpha$  für alle  $x < y$ .

### 2.2.2 Sonderfälle für die Berechnung: Value-at-Risk

**Beispiel 2.5** ( $VaR_\alpha$  für eine Normal- und eine Student- $t$ -Verteilung). *Sei die Verlustverteilung  $F_L$  eine Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ , und sei ein Wert für  $\alpha \in (0, 1)$  fixiert. Dann ist der Value-at-Risk zum Level  $\alpha$  für diese Verlustverteilung wie folgt gegeben*

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha).$$

Dabei beschreibt  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

und  $\Phi^{-1}(\alpha)$  das  $\alpha$ -Quantil von  $\Phi$ .

Einen ähnlich einfachen Ausdruck erhält man für die Student- $t$ -Verteilung. Angenommen der Verlust  $L$  ist so gegeben, dass  $(L - \mu)/\sigma$  einer Standard- $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden folgt, dies bedeutet  $L \sim t(\nu, \mu, \sigma^2)$ . Dann ist der Mittelwert von  $L$  mit  $\mathbb{E}[L] = \mu$  und die Varianz  $\mathbb{V}[L] = \frac{\nu \cdot \sigma^2}{\nu - 2}$  mit  $\nu > 2$ . Daraus folgt, dass der Value-at-Risk dieser Zufallsvariable mit

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \cdot t_\nu^{-1}(\alpha)$$

gegeben ist, wobei  $t_\nu$  die Verteilungsfunktion der Standard- $t$ -Verteilung  $t(0, 1)$  und  $t_\nu^{-1}$  die dazugehörige Inverse angibt.

### 2.2.3 Kohärente Risikomaße

In diesem Abschnitt werden die Ideen, die ein "gutes" Risikomaß haben sollten, vorgestellt. Es werden zuerst Axiome eingeführt, die ein sogenanntes *kohärentes* Risikomaß

erfüllen sollten. In weiterer Aussicht, wird die Stellung von möglichen kohärenten Risikomaßen, unter anderem auch dem Value-at-Risk, in Verbindung mit der kohärenten Eigenschaft diskutiert.

Für die Einführung der Axiome sei eine formale Definition von Risikomessung notwendig. Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und ein Zeithorizont  $\Delta$  gegeben. Mit  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  wird die Menge aller fast sicher endlichen Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  beschrieben. Die Menge aller finanziellen Risiken werden durch  $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  bezeichnet. Als mögliche Interpretation sind diese zum Beispiel die Verluste eines Portfolios während einer gewissen Zeitspanne  $\Delta$ .

Betrachte man  $\Omega$  als die endliche Menge (Interpretation: Menge aller möglichen Zustände),  $\mathcal{F}$  beschreibt die Menge aller reellwertigen Funktionen (Interpretation: Menge der Risiken) und  $L$  die riskanten Positionen (Interpretation: zum Beispiel Payoffs).

Eine Menge, die die Axiome (K1) und (K2) mit

$$\mathbf{(K1)} \quad L_1 \in \mathcal{M} \text{ und } L_2 \in \mathcal{M}, \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot L_1 + (1 - \lambda) \cdot L_2 \in \mathcal{M}$$

$$\mathbf{(K2)} \quad L \in \mathcal{M} \text{ und } \lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot L \in \mathcal{M}$$

erfüllt, wird ein *konvexer Kegel* genannt. Die beiden Axiome werden als die *Konvexität* (Axiom (K1)) und als die *positive Homogenität* (Axiom (K2)) bezeichnet. Risikomaße sind auf einem solchen konvexen Kegel definierte reellwertige Funktionen  $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , die bestimmte Eigenschaften erfüllen.

Bezeichne man mit  $\rho(L)$  den Geldbetrag, der einer Position mit dem Verlust  $L$  zugeführt werden muss, um akzeptabel zu werden. Nun werden die Axiome für ein Risikomaß  $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem konvexen Kegel für die Kohärenz vorgestellt:

**Axiom 1** (Translationsinvarianz). Für alle  $L \in \mathcal{M}$  und für jedes  $l \in \mathbb{R}$  gilt:  $\rho(L+l) = \rho(L) + l$ .

**Axiom 2** (Subadditivität). Für alle  $L_1 \in \mathcal{M}$  und  $L_2 \in \mathcal{M}$  gilt:  $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ .

**Axiom 3** (Positive Homogenität). Für alle  $L \in \mathcal{M}$  und für jedes  $\lambda > 0$  gilt:  $\rho(\lambda \cdot L) = \lambda \cdot \rho(L)$ .

**Axiom 4** (Monotonie). Für alle  $L_1 \in \mathcal{M}$  und  $L_2 \in \mathcal{M}$ , für die  $L_1 \leq L_2$  fast sicher gilt, gilt:  $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ .

**Definition 2.6** (Kohärentes Risikomaß). *Ein Risikomaß  $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  wird kohärentes Risikomaß genannt, wenn es die Axiome 1 bis 4 erfüllt.*

Das Axiom 3 der positiven Homogenität wird oftmals kritisiert und wirft die Frage auf, ob für große Werte von  $\lambda$  vielleicht  $\rho(\lambda \cdot L) > \lambda \cdot \rho(L)$  gelten sollte, um eine Konzentration eines Risikos und die dadurch entstehenden Probleme der Liquidität zu bestrafen. Dieser Ansatz führte zu der Diskussion über eine größere Klasse der Risikomaße, der sogenannten konvexen Risikomaße. In dieser Gruppe werden die Bedingungen der Sub-Additivität und der positiven Homogenität gelockert:

**Axiom 5** (Konvexität). Für  $L_1 \in \mathcal{M}$  und  $L_2 \in \mathcal{M}$  sowie  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:  $\rho(\lambda \cdot L_1 + (1 - \lambda) \cdot L_2) \leq \lambda \cdot \rho(L_1) + (1 - \lambda) \cdot \rho(L_2)$ .

Das Ziel der Abschwächung dieser beiden Axiome ist der Erhalt eines geringeren Risikos, falls eine Diversifikation von Risiken und Verlusten besteht.

Eine Menge, die die folgenden Axiome erfüllt, wird die Menge der *akzeptablen* Risiken  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$  genannt:

$$(A1) \quad L(\omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad L \in \mathcal{A}$$

$$(A2) \quad L(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad L \notin \mathcal{A}$$

$$(A2') \quad L(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \text{und} \quad L \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad L = 0$$

Das Axiom (A1) steht für keinen Verlust, das Axiom (A2) für nur Verlust und das Axiom (A2') für keinen Gewinn.

Es lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen einer Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$  und einem kohärenten Risikomaß anführen. Zu einer Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$  wird das Risikomaß  $\rho_{\mathcal{A}}$

$$\rho_{\mathcal{A}}(L) := \inf \{t \in \mathbb{R} : t - L \in \mathcal{A}\}$$

assoziiert. Umgekehrt wird zu einem gegebenen Risikomaß  $\rho$  die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho}$  mit

$$\mathcal{A}_{\rho} := \{L \in \mathcal{M} : \rho(-L) \leq 0\}$$

definiert.

In der nachstehenden Graphik Abbildung 5 sind mögliche statistische Größen, die als kohärente Risikomaße in Frage kommen könnten, eingezeichnet.

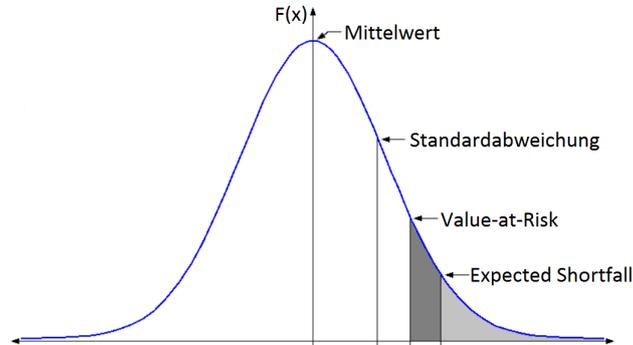


Abbildung 5: Mögliche Kandidaten für kohärente Risikomaße

Für die Feststellung, ob es sich hierbei um kohärente Risikomaße handelt, müssen lediglich die vier dafür zu erfüllenden Axiome nachgerechnet werden. Dabei findet man zum Beispiel bei der Standardabweichung einen Widerspruch in der Monotonie.

Der Value-at-Risk ist ein Risikomaß, das als ein Quantil aus der Verlustverteilung berechnet wird, und somit translationsinvariant, positiv homogen und monoton auf  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ist, jedoch nicht die Sub-Additivität erfüllt. Somit ist der Value-at-Risk kein kohärentes Risikomaß.

Ein zweiter negativer Aspekt dieses Risikomaßes ist die Tatsache, dass der Value-at-Risk keine Unterscheidung nach der Verteilung der Risiken macht. Als anschauliches Beispiel vergleiche man die zwei nachstehenden Graphiken Abbildung 6 und Abbildung 7.

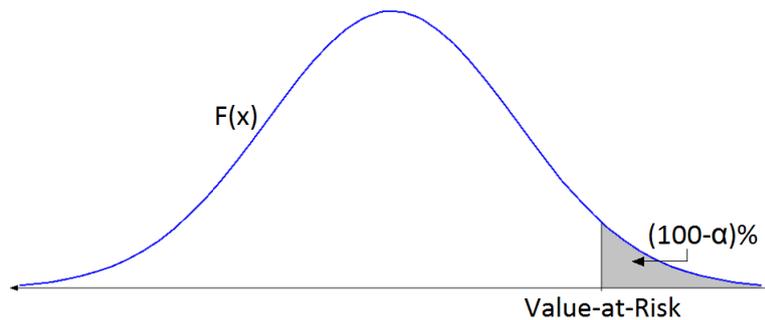


Abbildung 6: Portfolio A

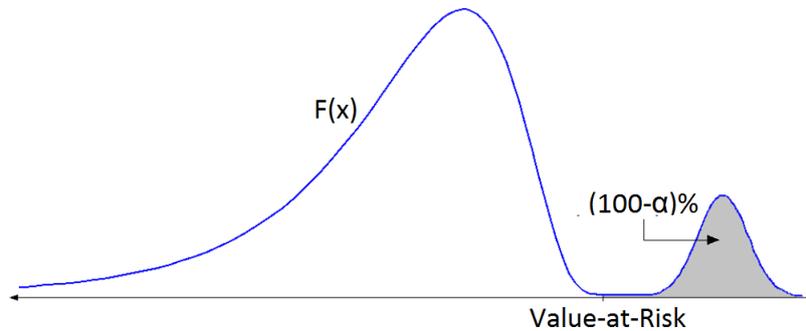


Abbildung 7: Portfolio B

Bei einem gleichen Value-at-Risk zum Level  $\alpha$  ist das Portfolio B in Graphik Abbildung 7 viel riskanter als das erste Portfolio A. Die möglichen Verluste können in dem zweiten Portfolio höher ausfallen. Eine solche Situation nennt man eine Verteilung mit einem "Heavy-Tail".

#### 2.2.4 Berechnung: Value-at-Risk

In diesem Abschnitt werden Standardmethoden für die Bewertung von Marktrisiken über einen kurzen Zeitraum, wie zum Beispiel einen Tag, besprochen. Das Hauptaugenmerk liegt bei der Problematik der Risikomaß-Schätzung für die Verlustverteilung von einem Verlust  $L_{t+1} = l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1})$ . Der Vektor  $\mathbf{X}_{t+1}$  beinhaltet die Änderungen der Risikofaktoren vom Zeitpunkt  $t$  zum Zeitpunkt  $t+1$  und  $l_{[t]}$  ist der Verlustoperator basierend auf dem Portfolio zum Zeitpunkt  $t$ . Es wird in diesem Kapitel speziell auf das Risikomaß Value-at-Risk eingegangen. Diese Ansätze sind jedoch auch für andere Risikomaße anzuwenden, wie zum Beispiel auf den Expected Shortfall. Bei den Berechnungsmöglichkeiten ist vor allem die Unterscheidung zwischen der unbedingten und der auf die Information  $\mathcal{F}_t$  bedingten Verlustverteilung von  $L_{t+1}$  relevant.

- **Varianz-Kovarianz-Methode:**

Für die Änderungen der Risikofaktoren  $\mathbf{X}_{t+1}$  wird eine multivariate Normalverteilung (egal ob bedingt oder unbedingt) herangezogen,  $\mathbf{X}_{t+1} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Dabei sei  $\boldsymbol{\mu}$  der Vektor gefüllt mit den Erwartungswerten und  $\boldsymbol{\Sigma}$  die Kovarianzmatrix der Verteilung. Es wird die Annahme gestellt, dass die aktuellen Verluste durch die linearisierten Verluste der Risikofaktoren (berechnet durch die Approximation von Seite 13) angenähert sind. Die Approximation führt zu der vereinfachten Verteilungsfunktion von  $L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(\mathbf{X}_{t+1})$ , die auf Seite 13

als  $l_{[t]}^\Delta$  definiert ist. Der lineare Verlustoperator ist eine Funktion der Gestalt  $l_{[t]}^\Delta = -(c_t + \mathbf{b}'_t \mathbf{x})$ , wobei  $c_t$  eine Konstante und  $\mathbf{b}_t$  einen konstanten Vektor darstellen. Diese Werte sind zum Zeitpunkt  $t$  bekannt.

Aus den Rechenregeln des Erwartungswertes und der Varianz einer Linearkombination eines Zufallsvektors gelangt man zu

$$L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(\mathbf{X}_{t+1}) \sim \mathcal{N}(-c_t - \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}, \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_t).$$

Sei eine Normalverteilung als Ausgangslage für die Berechnung des Value-at-Risks (oder eines anderen Risikomaßes) gegeben, so ist dieser leicht nach der Formel  $Var_\alpha = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$  von Seite 20 zu berechnen. Für die praktische Anwendung dieser Methode sind Schätzungen des Erwartungswertes  $\boldsymbol{\mu}$  und der Varianz  $\boldsymbol{\Sigma}$  aufgrund von historischen Daten über die Änderungen der Risikofaktoren  $\mathbf{X}_{t-n+1}, \dots, \mathbf{X}_t$  notwendig. Dazu bieten sich zum Beispiel die Stichprobenwerte, das heißt der Vektor der Stichprobenmittelwerte

$$\bar{\mathbf{X}} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$$

und die Matrix der Stichprobenvarianzen

$$\mathbf{S} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'$$

an, was den Fall der unbedingten Verlustverteilung liefert. Korrekt formuliert, wird die stillschweigende Annahme, dass die Änderungen der Risikofaktoren einem stationären Prozess folgen, gemacht.

Möchte man eine bedingte Verteilung erhalten, so betrachte man die Beobachtungen als eine Realisation einer multivariaten Zeitreihe und stellt die Annahme, dass  $\mathbf{X}_{t+1} | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}_{t+1}, \boldsymbol{\Sigma}_{t+1})$  ist, wobei  $\boldsymbol{\mu}_{t+1}$  und  $\boldsymbol{\Sigma}_{t+1}$  den bedingten Mittelwertvektor beziehungsweise die bedingte Kovarianzmatrix gegen die Information zum Zeitpunkt  $t$  darstellen, das heißt

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_{t+1} | \mathcal{F}_t] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{t+1} = \mathbb{V}[\mathbf{X}_{t+1} | \mathcal{F}_t].$$

Schätzungen aus diesen Momenten erhält man durch eine Substitution in der Formel  $L_{t+1}^\Delta = l_{[t]}^\Delta(\mathbf{X}_{t+1}) \sim \mathcal{N}(-c_t - \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}, \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_t)$  durch Prognosen. Dazu sind Zeitreihenmodelle, wie das multivariate *GARCH*-Modell oder das *EWMA*-Modell zu verwenden. Auf diese beide Modelle wird in dem Kapitel 2.3.1 und in dem Kapitel 2.3.2 näher eingegangen.

Die Kovarianz-Methode bietet einen einfachen analytischen Lösungsansatz für das Problem der Risikomessung, jedoch beruht dieser Komfort auf Kosten zweier vereinfachten Annahmen. Einerseits stellt die Linearisierung nicht immer eine gute Approximation der Beziehung zwischen der wahren Verlustverteilung

und den Änderungen der Risikofaktoren dar und andererseits ist die Annahme der Normalverteilung nicht unbedingt realistisch für die Verteilung der Risikofaktoränderungen, speziell für kurze Zeithorizonte. Die Normalverteilung vernachlässigt vor allem auch die "Heavy Tails", wobei die Berechnung des Value-at-Risks speziell auf dem Schwanz einer Verteilung basiert.

- **Historische Simulation:** Die Methode der historischen Simulation verzichtet auf die Schätzung der Verlustverteilung von  $L = l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1})$  unter Annahmen über explizite Parametermodelle für  $\mathbf{X}_{t+1}$ . Diese Methode benutzt die empirische Verteilung der historischen Daten  $\mathbf{X}_{t-n+1}, \dots, \mathbf{X}_t$  für die Schätzung der Verteilung des Verlustoperators. Dazu wende man den Verlustoperator auf jede historische Beobachtung der Änderungen der Risikofaktoren an, um historisch simulierte Verluste zu erhalten:

$$\left\{ \tilde{L}_s = l_{[t]}(\mathbf{X}_s) : s = t - n + 1, \dots, t \right\}.$$

Die Werte  $\tilde{L}_s$  zeigen, wie sich das derzeitige Portfolio verhalten beziehungsweise welche Verluste sich heutzutage ergeben würden, wenn sich die Änderungen der Risikofaktoren am Tag  $s$  wiederholen würden. Aus diesen historisch simulierten Verlust-Daten werden Schlussfolgerungen über die Verlustverteilung und die Risikomessung getätigt. Dieser Ansatz ist eine unbedingte Methode: Wird die Annahme gemacht, dass es sich bei den Änderungen der Risikofaktoren um einen stationären Prozess mit der Verteilungsfunktion  $F_{\mathbf{X}}$  handelt, so ist die empirische Verteilungsfunktion ein konsistenter Schätzer für die Verteilungsfunktion  $F_{\mathbf{X}}$ .

Angenommen, die empirische Verteilungsfunktion von den Daten  $\tilde{L}_{t-n+1}, \dots, \tilde{L}_t$  ist ein konsistenter Schätzer der Verteilungsfunktion von  $l_{[t]}(\mathbf{X})$  unter  $F_{\mathbf{X}}$ . Unter Verwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen für Zeitreihen kann gezeigt werden, dass für  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F_n(l) &:= \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=t-n+1}^t \mathbb{I}_{\{\tilde{L}_s \leq l\}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=t-n+1}^t \mathbb{I}_{\{l_{[t]}(\mathbf{X}_s) \leq l\}} \\ &\rightarrow \mathbb{P}[l_{[t]}(\mathbf{X}) \leq l] = F_L(l) \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{X}$  einen Vektor mit Änderungen der Risikofaktoren mit der Verteilung  $F_{\mathbf{X}}$  darstellt und  $L := l_{[t]}(\mathbf{X})$  definiert.

In der Praxis gibt es mehrere Wege, wie die historisch simulierten Verluste verwendet werden können. Üblicherweise wird der Value-at-Risk durch die Methode der empirischen Quantil-Schätzung ermittelt, wobei die theoretischen Quantile der Verlustverteilung durch die empirischen Quantile angenähert werden.

Dazu ordne man die historisch simulierten Werte  $\{\tilde{L}_s = l_{[t]}(\mathbf{X}_s) : s = t -$

$n + 1, \dots, t\}$  aufsteigend zu  $\tilde{L}_{n,n} \leq \dots \leq \tilde{L}_{1,n}$ . Ein möglicher Schätzer für den Value-at-Risk zum Level  $\alpha$ , das heißt  $VarR_\alpha$ , ist dann  $\tilde{L}_{\lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor, n}$ , wobei  $\lfloor n \cdot (1-\alpha) \rfloor$  das Abrunden von  $n \cdot (1-\alpha)$  auf die nächstkleinere ganze Zahl bedeutet.

Diese Methode ist einfach zu implementieren und es sind weder multivariaten Schätzungen über die Verteilungsfunktion von  $\mathbf{X}$  noch Annahmen über die Abhängigkeitsstruktur für die Risikobewertung notwendig. Jedoch hängt dieser Ansatz stark von den zugänglichen Daten ab: Es ist schwierig, eine ausreichende Anzahl an relevanten und synchronen Daten für alle Risikofaktoren zu erhalten. Treten zum Beispiel Lücken in der Historie der Risikofaktoren auf, oder werden neue Risikofaktoren eingeführt, so entstehen möglicherweise Probleme, diese Daten zu vervollständigen. Dadurch ist man dazu geneigt, die Anzahl  $n$  an Daten zu reduzieren, was jedoch wiederum zu einer Ungenauigkeit der Risikomaße führen kann. Wünschenswert ist eine große Anzahl  $n$  an Daten und auch genügend Extrem-Szenarios innerhalb der Daten, um eine angemessene Schätzung des Schwanzes der Verlustverteilung bieten zu können. Die Tatsache, dass diese Methode ausschließlich eine unbedingte Methode ist, kann ebenfalls als Schwachpunkt kritisiert werden. Mögliche Erweiterungen der historischen Simulation sind einerseits die Verwendung der Extremwerttheorie, um Schätzungen über den Schwanz der Verlustverteilung zu bekommen und andererseits eine Entwicklung für einen bedingten Ansatz mittels Zeitreihen und weiterführenden Prognosen.

- **Monte Carlo:** Der Name "Monte Carlo" ist eine allgemeine Bezeichnung für Methoden, die Simulationen eines (expliziten, parametrischen) Modells für die Risikofaktorenänderungen verwenden. Dieser Ansatz kann sowohl bedingt als auch unbedingt gestaltet werden. Dies hängt davon ab, ob das adoptierte Modell ein dynamisches Zeitreihenmodell oder ein statisches Verteilungsmodell ist.

Die Vorgangsweise der Monte Carlo Methode ist folgende:

1. **Schritt:** Es muss eine Wahl für ein Modell getroffen werden. Weiters muss dieses Modell kalibriert werden, das heißt, es müssen "realistische" Parameter zu den historischen Beobachtungen der Risikofaktorenänderungen  $\mathbf{X}_{t-n+1}, \dots, \mathbf{X}_t$  gefunden werden. Das Modell sollte einfach zu simulieren sein, denn im 2. Schritt müssen daraus  $m$  unabhängige Realisationen der Änderungen der Risikofaktoren für die nächste Zeitperiode generiert werden. Diese Realisationen werden mit  $\tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(m)}$  bezeichnet.
2. **Schritt:** Als erstes werden mit diesem Modell  $m$  unabhängige Realisierungen von Risikofaktorenänderungen  $\tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(m)}$  erzeugt. Ähnlich der Methode der historischen Simulation, wird der Verlustoperator auf diesem simulierten Vektor angewendet um die simulierten Realisationen  $\{\tilde{L}_{t+1}^{(i)} =$

$l_{[t]}(\widetilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(i)} : i = 1, \dots, m)$  zu erhalten. Diese simulierten Verlustdaten werden für die Risikobewertung verwendet.

Wie bei der historischen Simulation werden die Risikomaße über den einfachen Weg der empirischen Quantile berechnet. Weiters bestehen wieder die beiden Möglichkeiten eine univariate Verteilung zu fitten oder ein Extremwertmodell für die Modellierung des Schwanzes der simulierten Verluste heranzuziehen.

Die Monte Carlo Methode stellt die Wahl der Anzahl  $m$  der Realisierungen frei. Typischerweise ist die Anzahl  $m$  viel größer als die Anzahl  $n$  der Beobachtungen, um eine erhöhte Genauigkeit des empirischen Value-at-Risks im Vergleich zu dem Fall der historischen Simulation zu erhalten.

Diese Methode stößt wieder auf das Problem der richtigen Wahl des multivariaten Modells für  $\mathbf{X}_{t+1}$ . Im Zusammenhang mit dem Marktrisiko sind dynamische Modelle sowie Modelle, die einer *GARCH*-Struktur mit einer "heavy-tailed" multivariaten bedingten Verteilung, wie zum Beispiel der Student- $t$ -Verteilung, folgen, sehr populär.

Für große Portfolios kann der Rechenaufwand bei der Monte Carlo Methode beträchtlich sein, da jede Simulation eine Neubewertung des Portfolios verlangt. Dies ist vor allem problematisch, wenn das Portfolio viele Derivate, die in keiner geschlossenen Form berechnet werden können, enthält.

### 2.3 Zeitreihenmodelle

Dieses Kapitel beinhaltet eine kurze Zusammenfassung der klassischen univariaten Zeitreihenmodelle, die im Hinblick auf die Modellierung von Änderungsmodellen der Risikofaktoren relevant sind. Als Unterlage für das Verfassen des Kapitels dienen vereinzelte Seiten ab Seite 125 aus [6]. An den Stellen, wo in diesem Kapitel 2.3 oder in beinhalteten Unterkapitel auf weiterführende Literatur verwiesen wird, so bezieht sich der Verweis auf [6].

Ein Zeitreihenmodell für einen Risikofaktor ist ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Angenommen die Momente einer Zeitreihe existieren, so sind die *Erwartungswert-Funktion*  $\mu(t)$  und die *Autokovarianz-Funktion*  $\gamma(t, s)$  des Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  als

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbb{E}[X_t] & t \in \mathbb{Z} \\ \gamma(t, s) &= \mathbb{E}[(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))] & t, s \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

definiert. Daraus leicht ersichtlich gilt für die Autokovarianz-Funktion  $\gamma(s, t) = \gamma(t, s)$  und  $\gamma(t, t) = \mathbb{V}[X_t]$ .

**Definition 2.7** (Strikt stationäre Prozesse). *Die Zeitreihe  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ist strikt stationär, wenn*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$$

für alle  $t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 2.8** (Schwach stationäre Prozesse). *Die Zeitreihe  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ist schwach stationär (auch Kovarianz-stationär genannt), wenn die ersten beiden Momente existieren und folgende Eigenschaften erfüllen:*

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu & t \in \mathbb{Z} \\ \gamma(t, s) &= \gamma(t+k, s+k) & t, s, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Definitionen lässt sich folgern, dass strikt stationäre Zeitreihen auch schwach stationär sind, jedoch nur dann, wenn die Varianz endlich ist. Im Falle einer unendlichen Varianz gilt diese Folgerung nicht, dazu seien zum Beispiel der *ARCH*-Prozess und der *GARCH*-Prozess anzuführen.

Die Definition von schwach stationären Prozessen impliziert, dass für alle  $t, s$  die Gleichung  $\gamma(t-s, 0) = \gamma(t, s) = \gamma(s, t) = \gamma(s-t, 0)$  gilt, das heißt die Kovarianz zwischen  $X_t$  und  $X_s$  hängt nur von dem zeitlichen Abstand  $|s-t|$  ab. Dieser Abstand wird auch *Lag* genannt. Für schwach stationäre Prozesse lässt sich somit die Autokovarianz-Funktion als eine Funktion, die nur von einer Variable  $h$  abhängt, schreiben:

$$\gamma(h) := \gamma(h, 0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Die Standardabweichung eines solchen Prozesses ist somit vom Zeitpunkt unabhängig. Für einen zeitlichen Abstand der Länge 0 ist die Autokovarianz gleich der Varianz.

**Definition 2.9** (Autokorrelation-Funktion). *Die Autokorrelation-Funktion<sup>1</sup> (ACF)  $\rho(h)$  eines schwach stationären Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ist durch*

$$\rho(h) := \rho(X_h, X_0) = \gamma(h)/\gamma(0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

Die wichtigsten Bausteine für brauchbare Zeitreihenmodelle sind stationäre Prozesse ohne Autokorrelation. Solche Prozesse werden "White Noise"-Prozesse genannt:

<sup>1</sup> Die Autokorrelation-Funktion  $\rho$  ist eine normierte Form der Autovarianz, definiert durch

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(s, t)}{\sigma_s \cdot \sigma_t} \quad \text{mit } -1 \leq \rho(s, t) \leq 1.$$

Die im Nenner stehenden  $\sigma_k$  notieren die Standardabweichungen zum Zeitpunkt  $k$ .

**Definition 2.10** (White Noise). *Ein Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ist ein "White Noise"-Prozess, wenn er schwach stationär ist und die Autokorrelationsfunktion der Gestalt*

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } h = 0, \\ 0, & \text{wenn } h \neq 0 \end{cases}$$

besitzt.

"White Noise"-Prozesse, die den Mittelwert gleich Null und die Varianz  $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_t]$  haben, werden mit  $\mathcal{WN}(0, \sigma^2)$  notiert.

**Definition 2.11** (Strict White Noise). *Ein Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  wird als strikter "White Noise"-Prozess bezeichnet, wenn es sich um eine Reihe von unabhängig und identisch verteilten (iid) Zufallsvariablen mit endlicher Varianz handelt.*

Strikte "White Noise"-Prozesse, die den Mittelwert gleich Null und die Varianz  $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_t]$  haben, werden mit  $\mathcal{SWN}(0, \sigma^2)$  notiert.

Es gibt eine Menge an Zeitreihen, die durch die verschiedenen Familien von Prozessen entstehen. Es werden nun kurz diese Familien (mit bekannten Sonderformen) vollständigshalber erwähnt, bevor auf zwei Prozesse genauer eingegangen wird:

- *ARMA* (Auto-Regressive Moving Average)-Prozess:  
Bekannte Sonderformen sind der *AR* (Auto-Regressive)-Prozess und der *MA* (Moving Average)-Prozess.
- *ARCH* (Auto-Regressive Conditionally Heteroscedastic)-Prozess
- *GARCH* (Generalized *ARCH*)-Prozess:  
Bekannte Varianten sind der *IGARCH* (Integrated *GARCH*)-Prozess und der *EWMA* (Exponentially Weighted Moving Average)-Prozess.

### 2.3.1 Der *GARCH*-Prozess

Eines der wichtigsten Modelle für Zeitreihen täglicher Risikofaktor>Returns, das sogenannte *GARCH*-Modell, wird in diesem Kapitel besprochen. Auf das *ARCH*-Modell (einem sehr nahe verwandten Modell) wird bis auf die Definition nicht näher eingegangen, sondern es wird gleich auf das *GARCH*-Modell übergegangen, bevor dann über die praktischen Anwendungen diskutiert wird.

**Definition 2.12** (*ARCH*-Prozess). *Sei  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ein  $\mathcal{SWN}(0, 1)$ -Prozess. Der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  heißt *ARCH*( $p$ )-Prozess, falls er strikt stationär ist und für alle  $t \in \mathbb{Z}$  und*

für einen strikt positiv-wertigen Prozess  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  die Gleichungen

$$(1) \quad X_t = \sigma_t \cdot Z_t$$

$$(2) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot X_{t-i}^2$$

erfüllt sind, wobei  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, p$ .

Der *GARCH*-Prozess ist ein "generalized" *ARCH*-Prozess in dem Sinne, dass die quadratische Schwankung  $\sigma_t^2$  auch von den vorhergehenden quadratischen Schwankungen abhängen darf, genauso wie von den früheren quadratischen Werten des Prozesses.

**Definition 2.13** (*GARCH*-Prozess). Sei  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ein *SWN*(0, 1)-Prozess. Der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  heißt *GARCH*( $p, q$ )-Prozess, falls er strikt stationär ist und für alle  $t \in \mathbb{Z}$  und für einen strikt positiv-wertigen Prozess  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  die Gleichungen

$$(1) \quad X_t = \sigma_t \cdot Z_t$$

$$(2) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$$

erfüllt sind, wobei  $\alpha_0 > 0$  und  $\alpha_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, p$  und  $\beta_j \geq 0$  für  $j = 1, \dots, q$ .

In der Praxis werden gerne *GARCH*-Prozesse niedrigerer Ordnung verwendet, und oftmals konzentriert sich dies auf den *GARCH*(1, 1)-Prozess. In diesem Modell tendieren Perioden von hoher Schwankung andauernd zu sein, da  $|X_t|$  genau dann eine große Änderung hat, wenn entweder  $|X_{t-1}|$  oder  $\sigma_{t-1}$  groß sind.

**Lemma 2.14.** Aus der Definition 2.13 für *GARCH*( $p, q$ )-Prozesse erhält man den *GARCH*(1, 1)-Prozess der Form

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 \cdot Z_{t-1}^2 + \beta_1) \cdot \sigma_{t-1}^2.$$

Diese Gleichung ist eine sogenannte *Stochastic Recurrence Equation* (*SRE*) der Form  $Y_t = A_t \cdot Y_{t-1} + B_t$ , wobei  $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  und  $(B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  Reihen von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen sind.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung für eine solche *Stochastic Recurrence Equation* sind

$$\mathbb{E}[\max\{0, \ln(|B_t|)\}] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\ln(|A_t|)] < 0.$$

Die einzige Lösung ist dann durch

$$Y_t = B_T + \sum_{i=1}^{\infty} B_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}$$

gegeben. Bei dieser Lösung handelt es sich um einen strikt stationären Prozess. Die Bedingung  $\mathbb{E}[\ln(|A_t|)] < 0$  stellt die Schlüsselbedingung für die strikte Stationarität des

*GARCH*-Prozesses (und auch *ARCH*-Prozesses) dar. Genauere Informationen über diese Schlussfolgerung und den Zusammenhang von SRE und *GARCH*-Prozessen beziehungsweise *ARCH*-Prozessen sind nicht Inhalt dieser Arbeit, dazu sei auf andere Literatur verwiesen.

Wendet man diese Bedingungen und Lösungen auf das *GARCH*(1,1)-Modell an, so folgt die Bedingung  $\mathbb{E}[\ln(|\alpha_1 Z_t^2 + \beta_1|)] < 0$  für die strikte Stationarität des Prozesses und die Lösung  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\alpha_1 Z_{t-j}^2 + \beta_1)$ .

Wenn der Prozess  $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$  strikt stationär ist, so ist  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  mit  $X_t = \sigma_t \cdot Z_t$  und  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  als *SWN*-Prozess, wie in Definition 2.13 verlangt, ebenfalls ein strikt stationärer Prozess. Die Lösung des *GARCH*(1,1)-Prozesses ist dann durch die Gleichung

$$X_t = Z_t \cdot \sqrt{\alpha_0 \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\alpha_1 Z_{t-j}^2 + \beta_1) \right)}$$

gegeben.

**Proposition 2.15.** *Der *GARCH*(1,1)-Prozess ist ein schwach stationärer *WN*-Prozess dann und nur dann wenn  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  gilt. Die Varianz dieses schwach stationären Prozesses ist dann durch  $\alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1)$  gegeben.*

Für den Beweis dieser Proposition wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

### 2.3.2 Der *EWMA*-Prozess

Ein alternativer Zeitreihen-Ansatz, der oft in Zusammenhang mit Risikobewertung, speziell für die Prognose von Schwankungen, verwendet wird, ist das *EWMA* (Exponentially Weighted Moving Average)-Modell.

Es wird nicht notwendigerweise angenommen, dass die Daten von einem stationären Modell kommen, vielmehr wird davon ausgegangen, dass es keine deterministische saisonbedingte, das heißt zeitlich abhängige, Komponente in dem Modell gibt. Diese Methode formt die Basis der gängigsten Methoden von Schwankungsprognosen.

Angenommen die vorhandenen Daten repräsentieren Realisationen der Zufallsvariablen  $Y_{t-n+1}, \dots, Y_t$ . Als eine Vorhersage für  $Y_{t+1}$  wird die Prognose der Form

$$P_t Y_{t+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha \cdot (1 - \alpha)^i \cdot Y_{t-i}$$

mit  $0 < \alpha < 1$  herangezogen.  $P_t Y_{t+1}$  bezeichnet die Vorhersage für  $Y_{t+1}$ , beziehungsweise allgemein bezeichnet  $P_t Y_{t+h}$  die Prognose für  $Y_{t+h}$ .

Die Daten werden bei dieser Prognose gewichtet: Die Gewichte fallen für naheliegende Daten bis zu weit entfernt zurück liegenden Daten ab, und ergeben in Summe 1. Aus der soeben angeführten Gleichung für die Prognose von  $Y_{t+1}$  folgt

$$\begin{aligned} P_t Y_{t+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha \cdot (1-\alpha)^i \cdot Y_{t-i} \\ &= \alpha \cdot Y_t + (1-\alpha) \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \alpha \cdot (1-\alpha)^j \cdot Y_{t-1-j} \\ &= \alpha \cdot Y_t + (1-\alpha) \cdot P_{t-1} Y_t, \end{aligned}$$

sodass die Vorhersage zum Zeitpunkt  $t$  aus der Vorhersage zum Zeitpunkt  $t-1$  durch eine einfache Rekursion berechnet wird. Die Wahl von  $\alpha$  ist subjektiv, je größer der Wert ist, umso mehr Bedeutung wird den erst kürzlich gemachten Beobachtungen geschenkt.

Auf die Anwendung dieser Rekursion wird man in der Praxis des Öfteren treffen. Dazu betrachte man die Returns  $X_{t-n+1}, \dots, X_t$ , die einem Modell mit Schwankung unterliegen, jedoch möchte man kein exaktes parametrisches Modell für diese Daten angeben. Die Prognose der künftigen Schwankung, das heißt die Vorhersage von  $\sigma_{t+h}$  für  $h \geq 1$ , ist eng mit dem Problem der Prophezeiung von  $X_{t+h}^2$  verwandt. Dazu sei vorausgesetzt, dass Informationen über den Prozess bis zum Zeitpunkt  $t$  bekannt sind. Dieses Wissen wird durch  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$  beschrieben.

Wird die Rekursion auf die quadrierten Beobachtungen angewendet, so erhält man für einen beliebigen Wert von  $\alpha$

$$P_t X_{t+1}^2 = \alpha \cdot X_t^2 + (1-\alpha) \cdot P_{t-1} X_t^2.$$

Sofern die Erwartungen von  $X_{t+1}^2$  mit jenen von  $\sigma_{t+1}^2$  zusammenfallen, kann man diese Gleichung als ein *Exponential Smoothing Schema* für die unbeobachtete quadratische Schwankung betrachten. Es lässt sich ein rekursives Schema für die Einschnitt-Schwankungsprognose durch

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha \cdot X_t^2 + (1-\alpha) \cdot \hat{\sigma}_t^2$$

definieren. Dies ist die wesentliche Idee des *EWMA*-Ansatzes für die Prognose der Schwankung.

### 3 Berücksichtigung von Schwankung-Updates und exponentiell abfallenden Gewichten in verschiedenen Verfahren der historischen Simulations für den Value-at-Risk

Die Ideen dieses Kapitels sind in [4] zu finden. Ein kleiner Auszug ist aus [3], jedoch wird an der entsprechenden Stelle nochmals auf diese Literatur verwiesen.

In diesem Kapitel wird eine Vorgehensweise vorgeschlagen, die das *GARCH*- oder *EWMA*-Modell in Verbindung mit historischer Simulation für die Berechnung des Value-at-Risks verwendet. Dabei werden angepasste historische Daten für jede Marktvariable herangezogen, um den Unterschied zwischen der historischen Schwankung der Marktvariable und ihrer derzeitigen aktuellen Schwankung zu spiegeln. Dieser Ansatz wird anhand täglicher Daten von zwölf Währungskursen und fünf Anleihenindizes über neun Jahre hinweg mit dem Ansatz der historischen Simulation und einem weiteren Ansatz, der sogenannten BRW-Methode, in dem späteren Abschnitt 3.6.2 ab Seite 48 dieses Kapitels 3 verglichen. Es zeigt sich eine wesentliche Verbesserung gegenüber der herkömmlichen historischen Simulation.

#### 3.1 Einführung

In den letzten Jahren hat der Value-at-Risk als Risikomaß immer mehr an Bedeutung gewonnen. Er wird in vielen Finanzinstituten, von Fondmanagern, sowie in nicht-finanziellen Einrichtungen für die Kontrolle über das Marktrisiko eines Portfolios verschiedenster Finanzinstrumente verwendet. Der Value-at-Risk wird von der Zentralbankaufsicht für die durchgehende Erfassung der potentiellen Verluste, die durch die Marktrisiken entstehen und daher von der Zentralbank getragen werden müssen, angewendet. Während die Verwendung des Value-at-Risks für die Berechnung von benötigtem Kapital Akzeptanz und Zustimmung gefunden hat, gibt es nur wenig Konsens über die bevorzugte Methode für die Berechnung des Value-at-Risks.

Die Schwierigkeit bei dem Erhalt einer verlässlichen Schätzung für den Value-at-Risk liegt in der Tatsache, dass jede vorhandene Methode Vereinfachungen sowie auch einige Kompromisse enthält. Die Bestimmung, welche Methode die beste ist, hat sich zu einer empirischen Frage entwickelt und ist vor allem eine Frage der Implementierung. Höchstwahrscheinlich hängt dies von der Anzahl und den Arten der zugrundeliegenden Assets ab und vor allem auch von dem exakten Objekt der Berechnung.

Der Value-at-Risk eines Portfolios lässt sich folgendermaßen kurz erklären: Dieses Risikomaß ist eine Funktion, die von zwei Parametern abhängt. Einerseits ist der

Value-at-Risk durch eine Zeit(-spanne) und andererseits durch ein Konfidenzintervall bestimmt. Der Value-at-Risk ergibt den Verlust des Portfolios, der am Ende der Zeitperiode mit der Wahrscheinlichkeit in der Höhe des Konfidenzlevels nicht überschritten wird. Die Berechnung des Value-at-Risks basiert auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Änderungen im Portfoliowert während der Zeitspanne. Im Finanzgeschäft wird die Zeitspanne meist als  $N = 10$  Tage und das Konfidenzlevel mit  $\alpha = 99\%$  festgesetzt. Die Bankenaufsicht bestimmt prinzipiell das benötigte Kapital für ein Marktrisiko als den dreifachen Value-at-Risk mit diesen Parametern.

Der Value-at-Risk von  $N$  Tagen wird beinahe immer als der  $\sqrt{N}$ -fache Value-at-Risk von einem Tag angenommen. Das heißt, die Schlüsselaufgabe für Risikomanager ist die Entwicklung eines präzisen und robusten Verfahrens für die Berechnung des Value-at-Risks für einen Tag.

Eine gewöhnliche Methode, der sogenannte "Model Building"-Ansatz, für die Ermittlung des Value-at-Risks beinhaltet die Annahme, dass die täglichen prozentuellen Änderungen in den Marktvariablen bedingt multivariat normalverteilt sind, wobei eine durchschnittliche prozentuelle Änderung von 0% in jeder einzelnen Marktvariable angenommen wird. Ist die tägliche Änderung des Portfoliowertes linear von den täglichen Änderungen der Marktvariablen abhängig, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Änderung des Gesamtportfolios ebenfalls normalverteilt. Die Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung und daher auch die Perzentile der Verteilung entsprechend dem Value-at-Risk können zum Beispiel mittels der Varianz-Kovarianz-Matrix, die auf Seite 24 beschrieben wird, berechnet werden. In Fällen, bei denen die Annahme der Linearität als ungeeignet erscheint, wird die Änderung des Portfoliowertes oft durch eine quadratische Funktion der prozentuellen Änderungen in den Marktvariablen approximiert. Dies erlaubt die analytische Berechnung der ersten Momente der Verteilung der Portfolioänderung, sodass die benötigten weiteren Perzentile der Verteilung geschätzt werden können.

Ein alternativer Ansatz im Umgang mit Nichtlinearität ist die Monte Carlo Methode, die auf Seite 27 beschrieben wird. Bei jedem Simulationspfad werden die täglichen Änderungen der Marktvariablen von einer Stichprobe einer multivariaten Verteilung erzeugt und das Portfolio neu bewertet.

Viele Marktvariablen folgen jedoch einer Verteilung, die einen dickeren Schwanz als die Normalverteilung besitzt. Diese Überlegung führt zu der Methode der historischen Simulation und man wendet sich dem "Model Building"-Ansatz mit der Annahme der (multivariaten) Normalverteilung ab. Bei der historischen Simulation wird von Daten über die täglichen Veränderungen der Marktvariablen aus der Vergangenheit ausgegangen. Bei der ersten Simulation nimmt man an, dass die prozentuelle Änderung der

Marktvariablen gleich jener am ersten Tag der Daten ist. Bei der zweiten Simulation wird davon ausgegangen, dass diese gleich jener am zweiten Tag der Daten ist, etc. Die Veränderung des Portfolios wird für jeden Simulationspfad neu berechnet und die Perzentile der Verteilung dieser Veränderung werden geschätzt.

Hull und White zeigen, wie die Annahme der multivariaten Normalverteilung in dem "Modell Building"-Ansatz abgeschwächt werden kann. Ihre Methode erlaubt die Annahme jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung für die unbedingten täglichen Änderungen einer Marktvariable. Mittels Transformation wird von der angenommenen Verteilung auf die Standardnormalverteilung übergegangen. Diese Transformation wird derart definiert, sodass das  $X$ -Perzentil der angenommenen Verteilung zu dem  $X$ -Perzentil der Standardnormalverteilung transformiert wird. Die transformierten Marktvariablen werden dann als multivariat normalverteilt vorausgesetzt.

Die Wahl der Verteilung kann auf verschiedene Wege geschehen. Eine Möglichkeit ist eine angepasste Standardverteilung zu wählen und dann durch die Maximum-Likelihood-Methode die besten Parameter für die Verteilung zu finden. Eine weitere Möglichkeit bietet die Verwendung der historischen Verteilung.

Die Methode von Hull und White bietet sozusagen eine Überbrückung zwischen dem "Model Building"-Ansatz und der Methode der historischen Simulation. Hull und White zeigen, wie der "Model Building"-Ansatz modifiziert werden kann, indem er einige interessante Aspekte der historischen Simulation mit einbezieht. In weiterer Folge wird ein Ansatz vorgestellt, der vor allem Updates der Schwankungen bei der historischen Simulation zulässt.

## 3.2 Das Verfahren der einfachen historischen Simulation: Der HS-Ansatz

Die historische Simulation stellt den Ausgangspunkt von Hull und White dar. Im Vergleich zu der Methode von Hull und White, auf die ab Seite 37 näher eingegangen wird und dessen Implementierung im Kapitel 3.3.1 erklärt wird, wird bei der simplen historischen Simulation keine Anpassung der Schwankung vorgenommen. Für die Berechnung des Value-at-Risk mittels der Methode der historischen Simulation ist lediglich die Kenntnis über die Returns notwendig.

### 3.2.1 Aufbau und Berechnung der Methode

Die Implementierung dieser Methode geschieht wie in den folgenden Schritten erklärt. Dazu betrachte man eine einzelne Marktvariable. Die Methode geht für jede Marktvariable identisch vor. Mit  $R(\cdot)$  wird der Return bezeichnet.

1. Man definiere die historische prozentuelle Änderung einer Variable am Tag  $t$  der Periode als  $R_t$ . Man erhält also eine Reihe von Änderungen, die jeden einzelnen Tag beinhalten:

$$\{R_t : t = 1, \dots, N - 1\}$$

2. Weiters wird ein Zeitfenster definiert. Dieses Zeitfenster kann zum Beispiel eine Anzahl an Tagen angeben. Durch das Zeitfenster werden jene Returns festgelegt, die für die Schätzungen herangezogen werden sollen. Es werden zum Beispiel die am kürzesten zurückliegenden  $K$  Tage für die Schätzungen verwendet.
3. Für die Berechnung des Value-at-Risks zum Tag  $t$  werden die  $K$  zuvor liegenden Werte  $\{R_s : s = t - K, \dots, t - 1\}$  aufsteigend sortiert, das heißt

$$\{R_{t-K}, \dots, R_{t-1}\} \xrightarrow{\text{sortieren}} \{R_{t[1]}, \dots, R_{t[K]}\},$$

wobei  $R_{t[1]}$  den kleinsten und  $R_{t[K]}$  den größten Wert bezeichnet. Dazwischen liegen die Werte aufsteigend nach der Größe angeordnet.

4. Der Value-at-Risk zum Level  $\alpha$  und für den Tag  $t$  ist dann durch

$$VaR_\alpha(t) = R_{t[(1-\alpha) \cdot K]}$$

gegeben.

### 3.3 Das Verfahren der historischen Simulation mit Updates der Schwankung: Der HW-Ansatz

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Marktvariable – skaliert durch eine Schätzung der Schwankung – wird oft als approximativ stationär angenommen. Dies führt dazu, dass die historische Simulation durch die Einbeziehung der Schwankungserfahrung einer Periode aus der Vergangenheit verbessert werden kann.

**Beispiel 3.1.** *Sei die aktuelle Schwankung der Marktvariable etwa 1,5% pro Tag. Falls die Schwankung zwei Monate zuvor nur 1% pro Tag betrug, so unterschätzen die beobachteten Daten vor zwei Monaten die heutige Schwankung. Andererseits, falls die Daten vor zwei Monaten eine Schwankung von 2% aufgelistet hätten, tritt genau das Gegenteil auf.*

Man betrachte ein Portfolio bestehend aus einer Anzahl an Marktvariablen und man nehme an, dass die beobachteten Daten jeder Marktvariable während des Beobachtungszeitraumes, der mit dem Tag  $N - 1$  endet, einem *GARCH*- oder *EWMA*-Modell zugrundeliegen. Das Ziel ist die Schätzung des Value-at-Risks für dieses Portfolio am Ende des Tages  $N - 1$ .

### 3.3.1 Aufbau und Berechnung der Methode

Die Implementierung dieser Methode geschieht wie in den folgenden Schritten erklärt. Es wird die Notation immer nur für eine Marktvariable angegeben, um unnötige Indizes zu ersparen, das heißt anstatt  $R_{tj}$  für einen Tag  $t$  und einer Variable  $j$  wird nur  $R_t$  für den Return geschrieben. Die Vorgangsweise ist für jede Variable identisch.

1. Man definiere die historische prozentuelle Änderung einer Variable am Tag  $t$  der Periode als  $R_t$ . Man erhält also eine Reihe von Änderungen, die jeden einzelnen Tag beinhalten:

$$\{R_t : t = 1, \dots, N - 1\}$$

2. Weiters wird ein Zeitfenster, bevorzugt durch Angabe der Anzahl an Tagen, festgelegt, aus welchen die Schätzungen erfolgen sollen. Es werden zum Beispiel die am kürzesten zurückliegenden  $K$  Tage für die Schätzungen verwendet.
3. Am Ende des Tages  $t - 1$  wird eine historische *GARCH/EWMA*-Schätzung für die tägliche Varianz der prozentuellen Änderung einer Variable für den Tag  $t$  ermittelt. Diese wird mit  $\sigma_t^2$  notiert.

Die letzte verfügbare *GARCH/EWMA*-Schätzung der täglichen Varianz ist somit  $\sigma_N^2$ . Diese wird am Ende des Tages  $N - 1$  geschätzt und beschreibt die Varianz der prozentuellen Änderung für den Tag  $N$ .

Die tägliche Varianz kann zum Beispiel durch das *EWMA*-Modell

$$\sigma_t^2 = \alpha \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \cdot R_{t-1}^2$$

berechnet werden. Diese wird einmalig aus den Daten aller Tage, also aus den Werten  $\{R_t : t = 1, \dots, N - 1\}$  ermittelt. Als Vorschlag für  $\alpha$  wird häufig der Wert 0,94 verwendet.

4. Weiters werden die Returns  $\{R_s : s = t, \dots, t + K - 1\}$  mit  $t = 1, \dots, N - K$  für jedes Zeitfenster der Länge  $K$  durch  $R_s^*$  ersetzt, wobei diese als

$$R_s^* = \sigma_{t+K} \cdot \frac{R_s}{\sigma_s}$$

definiert sind. Das erste Fenster der Länge  $K$  mit den Returns  $\{R_s : 1 \leq s \leq K\}$  wird also durch  $\{R_s^* : 1 \leq s \leq K\}$  ersetzt, wobei diese durch

$$R_s^* = \sigma_{K+1} \cdot \frac{R_s}{\sigma_s}, \quad \text{für } s = 1, \dots, K.$$

berechnet werden.

Für das zweite Fenster der Länge  $K$  werden die Returns  $\{R_s : 2 \leq s \leq K + 1\}$

durch  $\{R_s^* : 2 \leq s \leq K + 1\}$  mit

$$R_s^* = \sigma_{K+2} \cdot \frac{R_s}{\sigma_s}, \quad \text{für } s = 2, \dots, K + 1.$$

ersetzt. Für die weiteren Zeitfenster wird analog vorgegangen.

5. Für die Berechnung des Value-at-Risks zum Tag  $t$  werden die  $K$  zuvor liegenden Werte  $\{R_s^* : s = t - K, \dots, t - 1\}$  mit  $t = K + 1, \dots, N$  aufsteigend sortiert, das heißt

$$\{R_{t-K}^*, \dots, R_{t-1}^*\} \xrightarrow{\text{sortieren}} \{R_{t[1]}^*, \dots, R_{t[K]}^*\},$$

wobei  $R_{t[1]}^*$  den kleinsten und  $R_{t[K]}^*$  den größten Wert bezeichnet. Dazwischen liegen die Werte aufsteigend nach der Größe angeordnet.

6. Der Value-at-Risk zum Level  $\alpha$  und für den Tag  $t$  ist dann durch

$$VaR_\alpha(t) = R_{t[(1-\alpha) \cdot K]}^*$$

gegeben. Eine Verteilungsfunktion der  $\{R_{t[i]}^*\}_{1 \leq i \leq K}$  hat die Gestalt der folgenden Graphik.

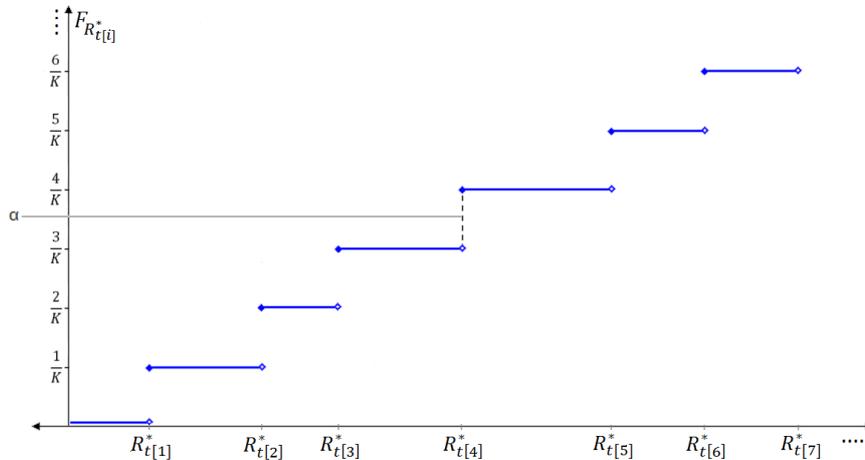


Abbildung 8: Value-at-Risk im HW-Ansatz

### 3.3.2 Konklusion des Ansatzes

Dieser Ansatz wird als "Hull White (HW)" Methode bezeichnet. Er ist eine Erweiterung der traditionellen historischen Simulation (HS). Anstelle der aktuellen historischen prozentuellen Änderungen der Marktvariablen werden angepasste historische

Änderungen, die das Verhältnis zwischen der derzeitigen täglichen Änderung und jener am Tag der Beobachtung zeigen sollen, für die Berechnung des Value-at-Risks verwendet. Diese Auswirkung wird anhand des folgenden Beispiels kurz erläutert.

**Beispiel 3.2.** *Vor 20 Tagen war die beobachtete prozentuelle Änderung in einer Marktvariable 1,6% und die tägliche Schwankung wurde auf 1% geschätzt.*

*Wird die tägliche Schwankung aktuell nun auf 1,5% geschätzt, so ist die erzeugte prozentuelle Änderung, die aus den Beobachtungen vor 20 Tagen berechnet wird,*  
 $2,4\% = 1,5\% \cdot \frac{1,6\%}{1\%}.$

Durch die Anpassung der Returns mit der Proportion der Änderungen zwischen dem Beobachtungstag und des aktuellen Tages erhält man standardisierte Returns, die eine Verbesserung gegenüber der herkömmlichen historischen Simulation bieten soll. Vergleichbare Werte mit der historischen Simulation beziehungsweise mit einem weiteren Ansatz, der sogenannten BRW-Methode, werden im Unterkapitel 3.6.2 ab Seite 48 geliefert. Hier werden die drei verschiedenen Modelle anhand von Daten durchgerechnet und die Ergebnisse tabelliert.

### 3.4 Das Verfahren der historischen Simulation mit exponentiellen Gewichten: Der BRW-Ansatz

Die Ideen dieses Unterkapitels 3.4 findet man einerseits in [4], jedoch stammen einzelne Auszüge auch aus [3].

Eine Methode, die von Risikomanagern gerne angewendet wird, weil diese stochastische Schwankungen zulässt, ist der sogenannte Ansatz von J. Boudoukh, M. Richardson und R. Whitelaw (BRW). Der Herausforderung nach einem einfach implementierbaren Ansatz, der eine effektive Gegenleistung bietet, soll die BRW-Methode nachkommen.

Der BRW-Ansatz kombiniert zwei Methoden populärer Ansätze, indem sie die Vorteile dieser beiden Ansätze mit einbezieht und trotzdem leicht zu implementieren bleibt:

1. "Exponential-Smoothing" (EXP)-Methode: Bei dieser Methode werden den historischen Returns für die Berechnung der bedingten Schwankung exponentiell abnehmende Gewichte zugeordnet. Durch die Verwendung dieser abfallenden Gewichte gelingt es, das periodische Verhalten von der Schwankung der Returns zu erfassen. Jedoch ist für die Bestimmung des Value-at-Risks eines Portfolios durch die bedingte Schwankung eine Annahme der bedingten Normalverteilung notwendig. Eine solche Annahme geht leider nicht stark mit Daten aus den Finanzgeschäften konform. Diese zeigen typischerweise Eigenschaften, wie einen

dicken Schwanz und eine Schiefe, auf, die in Zusammenhang mit dem EXP-Ansatz schwer mit einzubeziehen sind.

2. "Historische Simulation" (HS)-Methode: Die HS-Methode setzt eine Annahme über die Verteilung voraus, bevor aus der Schwankung die Perzentile schlussgefolgert werden. Die Schätzung der Perzentile erfolgt direkt durch Verwendung der empirischen Perzentile der historischen Return-Verteilung. Daraus wird der Value-at-Risk erhalten. Diese Methode bringt jedoch zwei Probleme mit sich. Der erste Schwachpunkt liegt in der Tatsache, dass extreme Perzentile der Verteilung (zum Beispiel der 1%- oder 5%-VaR) mit wenig Daten bekanntlich schwer zu schätzen sind. Der zweite Kritikpunkt ist die Annahme der HS-Methode, dass die Returns alle unabhängig und identisch verteilt sind, und folglich keine zeitlich variablen Schwankungen zulässt. Eine mögliche Lösung für das erste Problem ist die Erweiterung der beobachteten Daten. Während die EXP-Methode effektiv weniger Daten als aus einem Jahr zur Berechnung heranzieht, sieht man bei der HS-Methode oftmals einen Datensatz der bis zu fünf Jahren aufzeigt. Für das zweite Problem sieht die Lösung genau Gegenteil aus. Um wie bei dem EXP-Ansatz die kürzlich beobachteten Daten zu stärken, ist ein Lösungsweg die Verwendung von weniger weit zurückliegenden historischen Daten.

Der BRW-Ansatz kombiniert diese beiden Methoden, indem er die Perzentile direkt aus den Returns schätzt und abfallende Gewichte den Daten zuordnet.

Als erster Schritt werden die historischen Daten des beobachteten Zeitraums sortiert (ähnlich wie im HS-Ansatz). Während in der HS-Methode für den Aufbau der bedingten empirischen Verteilung jeder Beobachtung das gleiche Gewicht zugeordnet wird, so werden bei dieser Methode den historischen Returns exponentiell fallende Gewichte zugeschrieben.

**Beispiel 3.3.** *Soll bei der HS-Methode der Value-at-Risk zum Level  $\alpha = 99\%$  bestimmt werden und liegen 250 tägliche Daten vor, so ist dies die drittkleinste  $((1 - \alpha) \cdot 250 = 2,5)$  Beobachtung der Daten – unabhängig davon, zu welchem Zeitpunkt dieser Return stattgefunden hat. Bei dem BRW-Ansatz kann die Bestimmung des exakt gleichen Value-at-Risks mehr oder weniger Beobachtungen benötigen. Die Anzahl der Beobachtungen hängt davon ab, ob die extremen Returns erst kürzlich oder schon lange in der Vergangenheit geschehen sind.*

Die Zuordnung der Gewichte ist ähnlich dem Schema, das bei dem EXP-Ansatz verwendet wird.

Kurz zusammengefasst, dieser Ansatz schätzt den Value-at-Risk eines Portfolios durch Anwendung exponentiell fallender Gewichte auf die vergangenen Daten bevor dann das passende Perzentil dieser gewichteten empirischen Verteilung gesucht wird.

### 3.4.1 Aufbau und Berechnung der Methode

Wie bei der HW-Methode wird, um die Notation zu vereinfachen, von einer einzigen Marktvariable ausgegangen. Die BRW-Methode wird in 3 Schritten implementiert:

1. Die erzielten Returns von Tag  $t - 1$  zu Tag  $t$  werden durch  $R_t$  bezeichnet. Das heißt es ist eine Reihe von Änderungen

$$\{R_t : t = 1, \dots, N - 1\},$$

die jeden einzelnen Tag beinhalten, gegeben.

Sei ein Zeitfenster von  $K$  Tagen festgelegt, die für die Bestimmung des Value-at-Risks herangezogen werden sollen. Jedem dieser in den letzten  $K$  Tagen beobachteten Return  $R_t, R_{t+1}, \dots, R_{t+K-1}$  mit  $t = 1, \dots, N - K$  wird das entsprechende Gewicht

$$\left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^K}\right), \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^K}\right) \cdot \lambda, \dots, \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^K}\right) \cdot \lambda^{K-1}$$

zugewiesen. Das kleinste Gewicht wird dem am weitesten entfernten Return zugeschrieben, das größte Gewicht erhält der am kürzesten zurückliegende Return aus dem aktuell beobachteten Zeitfenster. Die Konstante  $(1 - \lambda)/(1 - \lambda^K)$  sichert, dass die aufsummierten Gewichte 1 ergeben.

2. Die Returns  $\{R_t, R_{t+1}, \dots, R_{t+K-1}\}$  werden in aufsteigender Reihenfolge geordnet:

$$\{R_t, \dots, R_{t+K-1}\} \xrightarrow{\text{sortieren}} \{R_{t[1]}, \dots, R_{t[K]}\},$$

wobei  $R_{t[1]}$  den kleinsten Return und  $R_{t[K]}$  den größten Return beschreibt. Die dazugehörigen Gewichte werden mit diesen Returns ebenfalls sortiert, sodass am Ende die Gewichte bei den dazugehörigen Returns stehen.

3. Um den  $X\% = (1 - \alpha)\%$  Value-at-Risk eines Portfolios zu erhalten, startet man von dem kleinsten Return und summiert die dazugehörigen Gewichte solange auf, bis man  $X\%$  erreicht hat. Der dazugehörige Wert des Returns beschreibt den Value-at-Risk am Tag  $t + K$  zum Level  $\alpha\%$ . Um den Value-at-Risk über die gesamte Laufzeit von  $N$  Tagen zu erhalten, so werden diese 3 Schritte für  $t = 1, \dots, N - K$  vollzogen. Es besteht die Möglichkeit einer linearen Interpolation zwischen zwei angrenzenden Punkten, um den exakten Wert für den  $X\%$  Value-at-Risk der Verteilung zu erhalten.

### 3.4.2 Konklusion des Ansatzes

Bezeichne man das Geschehen "eine Beobachtung liegt in den letzten 5% des Schwanzes einer historischen Verteilung" als das "5%-Tail-Event" und analog dazu das "1%-

Tail-Event", wenn die Beobachtung innerhalb des letzten 1% des Schwanzes liegt. Boudoukh, Richardson und Whitelaw zeigten, dass unter Verwendung des HS-Ansatzes solche "5%-Tail-Events" approximativ zu 5% der Zeit auftreten, und analog "1%-Tail-Events" approximativ zu 1% der Zeit passieren. Allerdings tritt ein sogenanntes "Bunching" auf. "Bunching" bedeutet, solche Events tendieren dazu eher in kurzen zeitlichen Abständen hintereinander als zufällig über den ganzen Zeitraum der Beobachtungen zu geschehen.

Ein Vorteil der BRW-Methode liegt darin, dass sie dieses "Bunching" deutlich reduziert.

Es gibt jedoch auch Kritikpunkte der BRW-Methode. Der Ansatz ist ein indirekter und einigermaßen ineffizienter Weg für die Zulassung von stochastischer Schwankung. In der BRW-Methode (und in anderen Schemen, die mit solchen Gewichten arbeiten) krümmt eine kurz andauernde Sequenz von abnormal großen positiven (oder negativen) Verlusten die erwartete Verteilung deutlich nach rechts (oder nach links). Wird in diesem Ansatz zum Beispiel der Wert  $\lambda = 0,98$  bestimmt, so wird der letzten und aktuellsten Beobachtung eine Wahrscheinlichkeit von über 2% bei  $K = 100$  Beobachtungen geschenkt, sodass ein einziger großer Return an dieser Stelle genug Auswirkung hat, um eine solche Schiefe zu erzeugen.

Der BRW-Ansatz und ähnliche Methoden kürzen die effektive Stichproben-Periode, um das Verhalten der stochastischen Volatilität zu erfassen. Der Erhalt anderer Momente der Verteilung leidet jedoch vielmehr unter dieser kürzeren Beobachtungsdauer.

### 3.5 Veranschaulichung der Ansätze "BRW" und "HS"

Betrachte man das folgende Beispiel, bei dem das Ziel die Berechnung des Value-at-Risks zu einem bestimmten Level ist. Es wird ein und dieselbe Reihe an Returns  $R(t)$  an zwei verschiedenen Zeitpunkten – erstens zu einem gegebenen Zeitpunkt, zweitens ein Monat später – betrachtet. Dabei wird angenommen, dass keine extremen Beobachtungen während dieses Monats gemacht werden. Die folgende Tabelle beinhaltet die Returns und die dazugehörigen Anfangszeitpunkte, sowie die (einzelnen und kumulierten) Gewichte für den BRW-Ansatz mit  $\lambda = 0,98$  und  $K = 100$  und jene für den HS-Ansatz.

Anfangszeitpunkt			BRW-Ansatz		HS-Ansatz	
Ordnung	Returns $R_t$	Zeitpunkt	Gewichte	kumul. Gewichte	Gewichte	kumul. Gewichte
1	-3,30%	3	0,0221	0,0221	0,01	0,01
2	-2,90%	2	0,0226	0,0447	0,01	0,02
3	-2,70%	65	0,0063	0,0511	0,01	0,03
4	-2,50%	45	0,0095	0,0605	0,01	0,04
5	-2,40%	5	0,0213	0,0818	0,01	0,05
6	-2,30%	30	0,0128	0,0947	0,01	0,06

Werden keine extremen Returns innerhalb des nächsten Monats angenommen, so sind die geordneten Returns 25 Tage später dieselben. Der Unterschied liegt lediglich nur darin, dass die Beobachtungen weiter in die Ferne gerückt sind. Nimmt man wieder ein Beobachtungsfenster von  $K = 100$  Tagen und einen Wert  $\lambda = 0,98$  an, so gestaltet sich die obige Tabelle zu folgender Tabelle.

25 Tage später			BRW-Ansatz		HS-Ansatz	
Ordnung	Returns $R_t$	Zeitpunkt	Gewichte	kumul. Gewichte	Gewichte	kumul. Gewichte
1	-3,30%	28	0,0134	0,0134	0,01	0,01
2	-2,90%	27	0,0136	0,0270	0,01	0,02
3	-2,70%	90	0,0038	0,0308	0,01	0,03
4	-2,50%	70	0,0057	0,0365	0,01	0,04
5	-2,40%	30	0,0128	0,0494	0,01	0,05
6	-2,30%	55	0,0077	0,0571	0,01	0,06

Die einzigen Änderungen liegen in den Spalten der Gewichte und somit in den kumulierten Gewichten im BRW-Ansatz. Diese sind von den jeweiligen Tagen abhängig. Definiere die Funktion  $g(i) := (1 - \lambda)/(1 - \lambda^K) \cdot \lambda^i$  für  $0 \leq i \leq K - 1$  genau diese Gewichte für  $\lambda = 0,98$  und  $K = 100$ , so ist das Gewicht für den Tag 28 das achtundzwanzigste größte Gewicht und somit durch  $g(27)$  (da bei 0 gestartet wird) gegeben. Die Gewichte für den HS-Ansatz sind für jeden Return gleich groß und somit mit  $1/K$  bestimmt, in diesem Beispiel also  $1/100$ .

Sei ein Level  $\alpha = 95\%$  für den Value-at-Risk gegeben, heißt das, man möchte das  $X\% = (1 - \alpha)\% = 5\%$ -Perzentil berechnen. Der BRW-Ansatz schätzt den Value-at-Risk bei den Anfangszeitpunkten auf 2,63% und einen Monat später auf 2,34%. Die Werte werden durch lineare Interpolation auf den exakten Value-at-Risk berechnet, das heißt, liegt der Prozentsatz zwischen den kumulierten Gewichten von  $R_{t-1}$  und

$R_t$ , so berechnet sich der interpolierte Wert durch

$$R_t - (R_t - R_{t-1}) \cdot \frac{X\% - g_{R_{t-1}}}{g_{R_t} - g_{R_{t-1}}},$$

wobei  $g_{R_t}$  das kumulierte Gewicht zu dem Return  $R_t$  bezeichnet.

Der HS-Ansatz liefert hingegen bei beiden Tabellen denselben Wert 2,35% für den Value-at-Risk zum Level  $\alpha\% = 95\%$ , das heißt, für das  $X\% = 5\%$ -Perzentil. Bei dieser Berechnung wird angenommen, dass 1/2 von dem gegebenen Returngewicht rechts und 1/2 links von der aktuellen Observation liegt.

Als Beispiel, bei der HS-Methode bildet der Return von  $-2,40\%$  genau 1% der Verteilung ab. Weiters wird angenommen, dass sich dieses Gewicht gleichmäßig über das Intervall von der Hälfte der Strecke zum nächstniedrigeren und bis zur Hälfte der Strecke zum nächstgrößeren Beobachtungspunkt, das heißt über das Intervall  $[-R_t - 0,5 \cdot |R_t - R_{t-1}|, -R_t + 0,5 \cdot |R_{t+1} - R_t|]$  aufteilt. Dadurch repräsentiert die Beobachtung  $-2,40\%$  das 4,5-te Perzentil. Diese Verteilung der Gewichte liefert den Wert 2,35% für den Value-at-Risk zum Level  $\alpha\% = 95\%$ , also den  $X\% = 5\%$ -VaR im HS-Ansatz.

## 3.6 Vergleich der Ansätze

### 3.6.1 Methoden für den Vergleich

Bevor anhand ausgewählter Daten eine Durchrechnung der Ansätze erfolgt, werden in diesem Kapitel relevante Größen für den Vergleich der Methoden vorgestellt.

Für jede der vorgestellten Methoden bietet die Berechnung eine Schätzung des Value-at-Risks zum Level  $\alpha\%$  für die Stichprobenperiode. Die Wahrscheinlichkeit für den Erhalt einer Beobachtung  $R(\cdot)$  unter dem berechneten Value-at-Risk sollte daher  $\alpha\%$  sein:

$$\mathbb{P}[R(t+1) < VaR(t)] = \alpha\%$$

Es gibt einige Merkmale, die für den Value-at-Risk wünschenswert sind.

Ein Diskussionspunkt bei der historischen Simulation ist die Frage, ob die historischen Daten angepasst werden sollten, sodass die durchschnittliche prozentuelle Änderung gleich 0 ist.

**Beispiel 3.4.** *Betrachte man zum Beispiel einen Stockindex, der während 500 Tagen und endend mit Tag  $t$  eine durchschnittliche Änderung von  $0,09\%$  pro Tag aufweist. Wenn keine Anpassung vorgenommen wird, bedeutet dies implizit, dass diese  $0,09\%$  der erwarteten Änderung am Tag  $t+1$  entspricht.*

Eine Anpassung der durchschnittlichen Änderung beinhaltet in den drei Ansätzen Folgendes:

1. Bei der HS-Methode wird bei einer Anpassung die durchschnittliche tägliche prozentuelle Änderung bei jeder Beobachtung aus dem Zeitfenster  $K$  subtrahiert bevor dann der  $X\%$  Schwanz der Verteilung geschätzt wird.
2. Bei der BRW-Methode betrifft eine Anpassung die Berechnung einer gewichteten durchschnittlichen prozentuellen Änderung und die anschließende Subtraktion dieser von jeder einzelnen Beobachtung.
3. Im Falle der HW-Methode wird der Durchschnitt über alle normalisierten Beobachtungen  $h_t/\sigma_t$  ermittelt. Diese Erwartung wird weiters von jeder normalisierten Beobachtung subtrahiert, ehe sie mit dem Schätzer für die derzeitige Schwankung  $\sigma_N$  multipliziert wird.

Zu jedem Tag wird eine Indikatorfunktion  $\mathbb{I}(t)$  mit

$$\mathbb{I}(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } VaR(t) \leq R(t+1) \\ 0, & \text{wenn } VaR(t) > R(t+1) \end{cases}.$$

definiert.

Die Stichproben, die die empirische Verteilung erzeugen, überlappen sich, jedoch ist  $\mathbb{I}(\cdot)$  unter der Annahme der Nullhypothese, dass die Verteilung des Schwanzes unverfälscht/unverzerrt ist, unabhängig und identisch verteilt. Die Standardabweichung des Prozentsatzes an Tagen, an denen Tail-Events eintreten ist daher

$$\sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}},$$

wobei  $p$  die Wahrscheinlichkeit für ein Tail-Event und  $n$  die Stichprobengröße beschreiben.

Boudoukh, Richardson und White schlagen eine Messgröße, die sogenannte "MAPE" (Mean Absolute Percentage Error), für die Untersuchung und Messung von "Bunching" vor. Die Berechnung geschieht folgendermaßen: Für jede Periode von 100 aufeinanderfolgenden Tagen (für die Schätzungen gemacht werden) wird die absolute Differenz zwischen der aktuellen Anzahl und der erwarteten Anzahl von Tail-Events berechnet. Die erwartete Anzahl ist zum Beispiel bei einem "5%-Tail-Event" genau 5%. Das Maß wird gleich dem Durchschnitt dieser absoluten Differenz gesetzt.

MAPE ist eine kombinierte Messgröße im Hinblick auf Verzerrung und auf "Bunching". Die Verzerrung hat folgenden Einfluss auf diese Bemessung: Ist das Prozedere

für die Bewertung der Tail-Events verfälscht/verzerrt, sodass wir in jeder 100-Tage-Periode zwei "1%-Tail-Event" verzeichnen, so gilt  $MAPE=1$ .

Um den Einfluss von Bunching auf diese Messgröße zu erkennen, betrachte man das nächste Beispiel.

**Beispiel 3.5.** *Angenommen man hat 599 Beobachtungen, die von 1 bis 599 durchnummeriert sind. Dafür kann man 500 überlappende 100-Tage-Stichproben kalkulieren. Sei jede hundertste Beobachtung, also die Beobachtungen Nummer 100, 200, 300, 400 und 500, ein solches "1%-Tail-Event". Dadurch beinhaltet jede 100-Tage-Probe genau ein "1%-Tail-Event" und die Messgröße MAPE ist somit gleich 0, da die erwartete Anzahl von "1%-Tail-Event" ebenfalls 1 beträgt.*

*Sei nun angenommen, dass die "1%-Tail-Events" gebündelt auftreten, sodass diese jetzt zum Beispiel bei den Beobachtungen Nummer 100 und 101, Nummer 300 und 301, sowie Nummer 500 passieren. Daraus folgt, dass*

- *198 Proben kein einziges Tail-Event enthalten und daher die absolute Differenz gleich 1 ist,*
- *104 Proben genau ein Tail-Event aufweisen und die absolute Differenz gleich 0 ist, und*
- *198 Proben genau zwei Tail-Events beinhalten und daher die absolute Differenz gleich 1 beträgt.*

*Gesamt wird die Messgröße MAPE wieder als durchschnittlicher absoluter Fehler aller Proben berechnet. Dies ergibt daher die Kennzahl  $MAPE=396/500$  beziehungsweise  $MAPE=0,792$ .*

Eine Alternative zu MAPE für die Bewertung von Bunching stellt die Berechnung der "Ljung-Box"-Statistik<sup>2</sup> dar. Dabei werden die ersten 15 Autokorrelationen der Indikatorfunktion  $\mathbb{I}(\cdot)$  herangezogen. Die Ljung-Box Statistik ist durch

$$m \cdot \sum_{k=1}^{15} \omega_k \cdot \eta_k^2$$

gegeben, wobei  $m$  die Anzahl der Beobachtungen angibt. Die Gewichte  $\omega_k$  berechnen sich durch  $\omega_k = (m-2)/(m-k)$  und  $\eta_k$  gibt die Autokorrelation mit einem zeitlichen Lag von  $k$  Tagen an.

<sup>2</sup> Benannt nach Greta M. Ljung und George E. P. Box.

### 3.6.2 Ein Beispiel aus der Praxis

Anhand ausgewählter Daten werden

- der Ansatz der "historischen Simulation",
- der Ansatz von Hull und White, und
- der Ansatz von Boudoukh, Richardson und Whitelaw

miteinander verglichen.

Dazu werden historische Aufzeichnungen von 12 verschiedenen Währungskursen zwischen dem 4. Jänner 1988 und dem 15. August 1997 verwendet.

Bei den Währungen handelt es sich um den Australischen Dollar (AUD), den Belgischen Franken (BEF), den Schweizer Franken (CHF), die Deutsche Mark (DEM), die Dänische Krone (DKK), die Spanische Peseta (ESP), den Französischen Franken (FRF), das Britische Pfund (GBP), die Italienische Lire (ITL), den Japanischen Yen (JPY), den Niederländischen Gulden (NLG) und die Schwedische Krone (SEK).

Als Input für die Berechnung des Value-at-Risks und der folgenden Tail-Events wird der Wechselkurs jeder einzelnen Währung eingelesen. Ein Verlauf eines solchen Wechselkurses kann zum Beispiel so, wie die folgende Graphik Abbildung 9 zeigt, aussehen. Die Abbildung stellt den Wechselkurs des Schweizer Franken, beginnend am 11. Juli 1988 bis einschließlich 10. Februar 1998, dar.

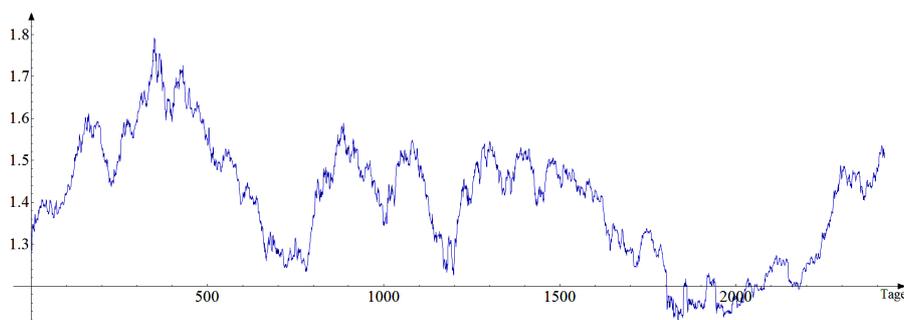


Abbildung 9: Wechselkurs des Schweizer Franken

Aus dieser gegebenen Datenreihe  $\{K(t)\}_{1 \leq t \leq N}$  werden dann die benötigten Returns  $R(t) = \frac{K(t+1) - K(t)}{K(t)}$  für  $1 \leq t \leq N - 1$  berechnet, die somit die prozentuelle Änderung von Tag  $t$  zu Tag  $t+1$  beschreiben. Die folgende Graphik bildet die Returns  $R(\cdot)$  des Schweizer Franken während der gleichen Periode wie oben ab.

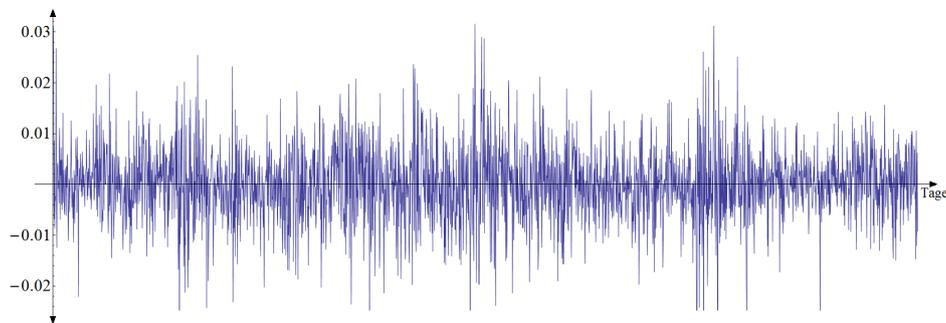


Abbildung 10: Return des Schweizer Franken über 2420 Tagen

Aus diesen Returns, beziehungsweise im HW-Ansatz und BRW-Ansatz aus leicht modifizierten Returns, wird der Value-at-Risk zu einem gewünschten Level bestimmt.

Die Implementierung der verschiedenen Methoden wird so, wie auf der Seite 36 für den herkömmlichen Ansatz der historischen Simulation, auf der Seite 38 für den Ansatz von Hull & White und auf der Seite 42 für die Methode von Boudoukh, Richardson & Whitelaw beschrieben, durchgeführt.

Für alle drei Methoden wird an jedem Tag eine Verteilung der täglichen prozentuellen Änderung aus den letzten  $K = 500$  Tagen der Datenreihen geschätzt. Dabei werden die 1% und die 5%-Perzentile jeder Marktvariable notiert. Dies bedeutet für die

- Historische Simulation, dass die Verteilung durch Zuweisung von gleich großen Gewichten auf jeweils 500 hintereinanderstehenden Beobachtungen geschätzt wird. Die anschließende Graphik betrachtet den Return  $R(t)$  mit  $1 \leq t \leq K$  des Schweizer Franken im ersten Fenster der Länge  $K = 500$ .

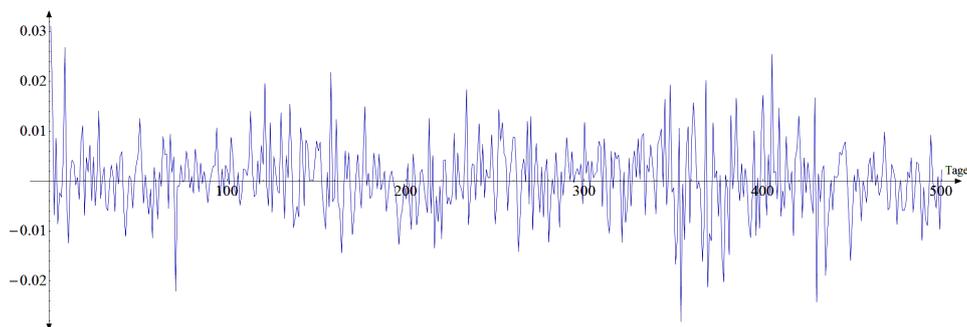


Abbildung 11: Erstes 500er-Fenster: Return des Schweizer Franken

- Methode von Hull und White, dass die Verteilung ebenfalls durch Zuweisung von gleich großen Gewichten auf jeweils 500 aufeinanderfolgende Beobachtungen geschätzt wird, nachdem diese aufgrund von Schwankungsänderungen angepasst werden.

Die Berechnung der täglichen Varianz  $\sigma_t^2$  in der HW-Methode erfolgt aufgrund der auf Seite 38 angeführten Formel für das *EWMA*-Modell  $\sigma_t^2 = \alpha \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) \cdot R_{t-1}^2$  mit  $\alpha = 0,94$ .

Die durch die Schwankung angepassten Returns  $R_t^*$  sehen ähnlich der nicht angepassten Returns  $R_t$  aus und werden in der nachstehenden Graphik veranschaulicht. Die Graphik zeigt die Returns im ersten Fenster der Tage  $t = 1$  bis  $t = 500$ .

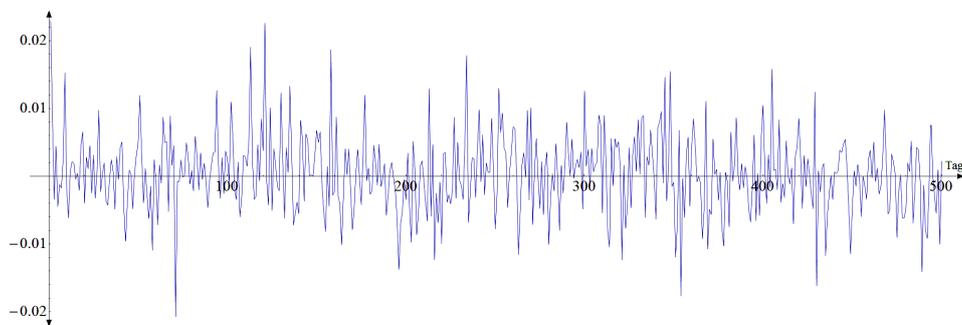


Abbildung 12: Erstes 500er-Fenster: angepasster Return des Schweizer Franken

- Methode von Boudoukh, Richardson & Whitelaw, dass die Verteilung durch Hinzufügen von exponentiell abfallenden Gewichten zu jeweils 500 aufeinanderfolgenden Returns – das kleinste Gewicht zu dem am weitesten entfernten Return – geschätzt wird.

Für die Berechnung der Gewichte  $g(i) = (1 - \lambda)/(1 - \lambda^K) \cdot \lambda^i$  für  $0 \leq i \leq K - 1$  wird ein  $\lambda = 0,98$  gewählt.

Der Value-at-Risk wird somit an  $N - K$  verschiedenen Tagen ermittelt, das heißt, man erhält eine Reihe an Werten.

Der erste Wert der Value-at-Risk Reihe wird aus den ersten  $K = 500$  Tagen am Ende des Tages  $K$  beziehungsweise am Beginn des Tages  $K + 1$  berechnet.

Das Zeitfenster von  $K$  Tagen wird dynamisch immer um einen Tag nach hinten verschoben, das heißt der zweite Wert der Value-at-Risk Reihe wird aus den Returns  $R(t)$  für  $t = 2, \dots, 501$  oder aus den angepassten Returns  $R_t^*$  und somit am Ende des Tages  $K + 1$  beziehungsweise am Beginn des Tages  $K + 2$  ermittelt. Der dritte Wert

der Value-at-Risk Reihe wird analog aus den Returns  $\{R(t) : t = 3, \dots, 502\}$  beziehungsweise aus den angepassten Returns  $R_t^*$  berechnet. Dieser Wert wird am Ende des Tages  $K + 2$  beziehungsweise am Beginn des Tages  $K + 3$  bestimmt. Der letzte Wert für einen Value-at-Risk ergibt sich aus den letzten  $K = 500$  Returns.

Die nächsten drei Graphiken zeigen den Verlauf des Value-at-Risk zu einem Konfidenzlevel von  $\alpha = 0.95\%$ .

Die erste Graphik zeigt den 5%-Value-at-Risk, der mittels der gewöhnlichen historischen Simulation berechnet wird.

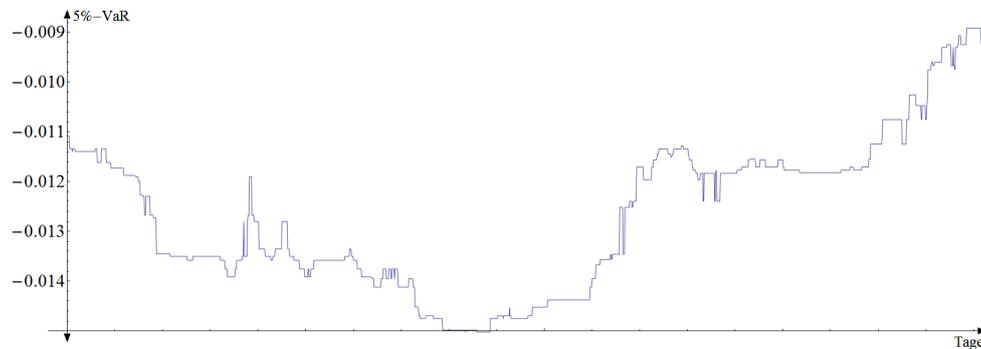


Abbildung 13: 5%-Value-at-Risk der historischen Simulation

Diese zweite Graphik stellt den gleichen Value-at-Risk dar, jedoch diesmal mit der Methode von Hull und White ermittelt.

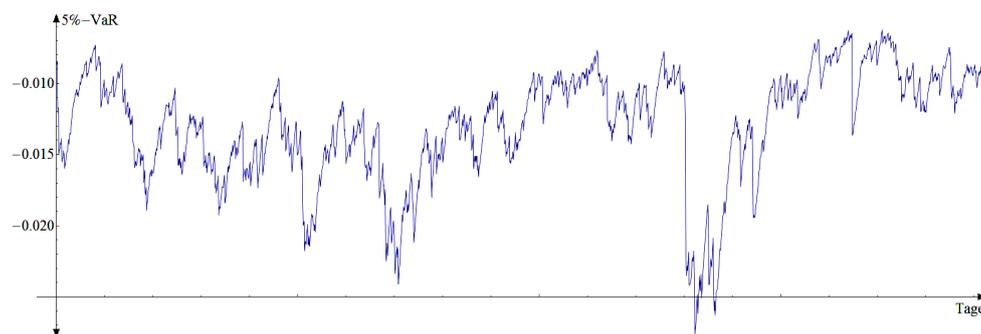


Abbildung 14: 5%-Value-at-Risk der HW-Methode

In der letzten Graphik wird ebenfalls der 5%-Value-at-Risk abgebildet, diesmal nach der Methode von Boudoukh, Richardson und Whitelaw berechnet.

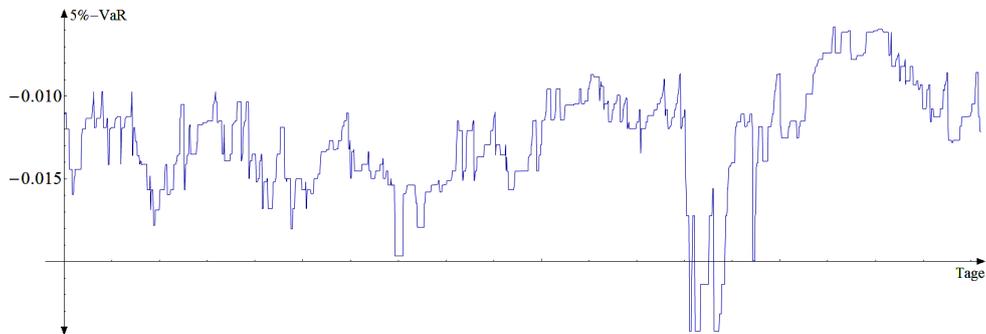


Abbildung 15: 5%-Value-at-Risk der BRW-Methode

Um die drei Ansätze gut miteinander vergleichen zu können, wird für jeden Ansatz und für jede Währung der Prozentsatz für auftretende Tail-Events ermittelt. Die folgenden Tabellen listen diese Werte auf. In der ersten Tabelle wird jeweils der 5%-Value-at-Risk berechnet und dieser für die Ermittlung der Anzahl der Tail-Events herangezogen, in der zweiten Tabelle wird analog vorgegangen, jedoch mit dem 1%-Perzentil.

Die Tabellen werden ohne Anwendung der auf Seite 46 beschriebenen Möglichkeiten für eine Anpassung der durchschnittlichen Änderung erstellt.

5%-Tail	historische Simulation	BRW-Methode	HW-Methode
AUD	4,1667%	5,0000%	4,8958%
BEF	5,0000%	5,2083%	5,0000%
CHF	4,9479%	5,4167%	5,3125%
DEM	4,7917%	5,2083%	4,9479%
DKK	5,0000%	5,4164%	5,2083%
ESP	4,5833%	5,5208%	5,1563%
FRF	5,1042%	5,3125%	5,1042%
GBP	4,6875%	4,8958%	4,6875%
ITL	4,6354%	5,1042%	5,1563%
JPY	4,9479%	5,5208%	4,8958%
NLG	5,0521%	5,1042%	5,1563%
SEK	5,0000%	5,6250%	5,1042%
Average	4,8264%	5,2778%	5,0521%

Die nächste Graphik zeigt einen Vergleich der Returns mit dem 5%-Value-at-Risk. In der Abbildung 16 sind der Return des Schweizer Franken sowie der negative und positive 5%-Value-at-Risk abgebildet. Dieser Value-at-Risk wird nun mit der Methode von Hull und White erstellt.

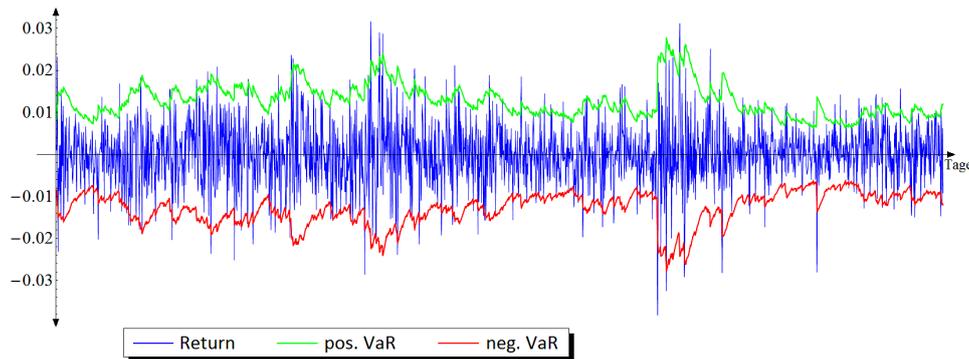


Abbildung 16: Hull & White: Vergleich der Returns mit dem 5%-Value-at-Risk

Die nächste Tabelle und die Graphik Abbildung 17 zeigen die Resultate für den 1%-Value-at-Risk.

1%-Tail	historische Simulation	BRW-Methode	HW-Methode
AUD	0,9375%	1,4583%	0,8333%
BEF	0,9375%	1,4063%	0,9896%
CHF	0,9896%	1,3021%	0,9896%
DEM	0,9375%	1,3021%	0,8854%
DKK	0,9375%	1,4583%	0,8333%
ESP	0,8854%	1,1458%	0,9375%
FRF	0,9896%	1,7188%	0,7292%
GBP	1,0938%	1,3021%	1,0938%
ITL	0,7813%	1,3021%	0,9375%
JPY	0,9896%	1,2500%	1,2500%
NLG	1,0417%	1,4063%	1,0417%
SEK	0,8854%	1,3542%	0,9375%
Average	0,8763%	1,3672%	0,9549%

Die Graphik vergleicht den Return und den dazugehörigen 1%-Value-at-Risk, der mittels der Hull & White Methode berechnet wird.

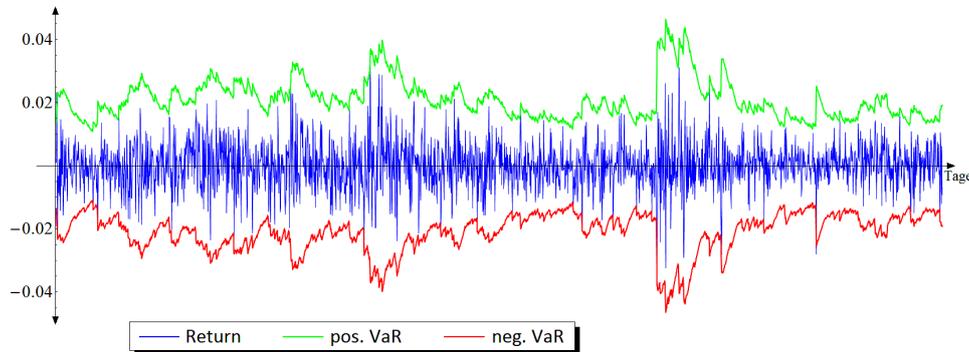


Abbildung 17: Hull & White: Vergleich der Returns mit dem 1%-Value-at-Risk

Die Bestimmung der Tail-Events wird für jedes Fenster mit  $K = 500$  Returns gesondert durchgeführt. Wird die Bereitstellung der Returns wie oben beschrieben vollzogen und das 5%- beziehungsweise das 1%-Perzentil als Value-at-Risk zu jedem Fenster berechnet, das heißt, man erhält einen Vektor von Value-at-Risk Werten, die für die dynamischen Zeitfenster ermittelt werden, so wird für jeden einzelnen Value-at-Risk Wert und für jede Methode die Entscheidungsfrage "Tritt ein Tail-Event bei der darauffolgenden Beobachtung auf?" gestellt.

Die Indikatorfunktion

$$\mathbb{I}(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } VaR(t) \leq R(t+1) \\ 0, & \text{wenn } VaR(t) > R(t+1) \end{cases}.$$

zählt das Eintreten eines Tail-Events für  $t = K + 1, \dots, N - 1$ . Daraus lässt sich dann der in der Tabelle angeführte Prozentsatz ausrechnen.

Eine Modifikation dieser drei Ansätze ist die Anpassung der historischen Daten, sodass die durchschnittliche prozentuelle Änderung gleich 0 ist. Ein Beispiel diesbezüglich wird kurz auf Seite 45 angeführt. Im Anschluss an dieses Beispiel wird erklärt, wie eine solche Modifikation bei den einzelnen Methoden aussehen würde.

Die Ergebnisse dieser Varianten sind für die vorhandenen 12 Währungen in den folgenden Tabellen auf Seite 56 aufgelistet. Die erste Tabelle zeigt wieder den 5%-Value-at-Risk und die zweite Tabelle den Value-at-Risk zum Konfidenzlevel  $\alpha = 0,99$ , das heißt, den 1% Schwanz.

Im Falle der gewöhnlichen historischen Simulation wird der Durchschnitt der prozentuellen Änderungen über  $K$  Tage

$$\bar{R}_t = \frac{\sum_{i=1}^K R_{i+t}}{K}$$

für  $0 \leq t \leq N - 1 - K$  berechnet. Dieser Mittelwert wird dann für das entsprechende Fenster von den betrachteten  $K$  prozentuellen Änderungen subtrahiert, bevor dann der Value-at-Risk zu dem gewünschten Niveau bestimmt wird. Das heißt, für das erste Zeitfenster mit  $\{R(t) : 1 \leq t \leq K\}$  wird der  $\bar{R}_1$ , beim zweiten Zeitfenster mit  $\{R(t) : 2 \leq t \leq K + 1\}$  wird der  $\bar{R}_2$  subtrahiert, und so weiter. Diese Anpassung wird für jedes einzelne Zeitfenster der Länge  $K$  gemacht, ehe die Value-at-Risk Ermittlung (mit den angepassten Returns) und die Tail-Event Berechnung (mit den ursprünglichen Returns) vollzogen werden.

Bei der Methode von Hull & White werden die Mittelwerte der normalisierten Beobachtungen  $R_t/\sigma_t$

$$\bar{R}_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^K \frac{R_{i+t}}{\sigma_{i+t}}}{K}$$

für  $0 \leq t \leq N - 1 - K$ , das heißt, jeweils für ein Fenster der Länge  $K$ , berechnet. Weiters wird wie bei der historischen Simulation vorgegangen, indem diese Mittelwerte  $\bar{R}_t$  von den entsprechenden normalisierten Returns  $R_s/\sigma_s$  mit  $t \leq s \leq K - 1 + t$  abgezogen werden, bevor dann dieser Ausdruck mit der Schwankung  $\sigma_{K+t}$  multipliziert wird. Das heißt, man berechne

$$R_s^* = \left( \frac{R_s}{\sigma_s} - \bar{R}_t \right) \cdot \sigma_{K+t}$$

für  $t \leq s \leq K - 1 + t$  und  $1 \leq t \leq N - K$  und erhält somit für jedes der  $N - K + 1$  Zeitfenster  $K$  angepasste Returns mit denen weiters der Value-at-Risk berechnet wird. Anschließend wird wieder mit den ursprünglichen Returns  $R_t$  die Tail-Event Untersuchung gemacht.

Diese Variante beinhaltet bei dem Ansatz von Boudoukh, Richardson & Whitelaw die Berechnung eines gewichteten Mittelwerts

$$\bar{R}_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^K g_i \cdot R_{i+t}}{\sum_{k=1}^K g_k} = \sum_{i=1}^K g_i \cdot R_{i+t}$$

für  $0 \leq t \leq N - 1 - K$ , wobei die Summe aller Gewichte gleich 1 ergibt. Analog zu der historischen Simulation wird der jeweilige gewichtete Mittelwert  $\bar{R}_t$  vom entsprechenden Zeitfenster mit den Returns  $\{R_s : t \leq s \leq K - 1 + t\}$  mit  $1 \leq t \leq N - K$  von diesen Returns subtrahiert und damit die Value-at-Risk Bestimmung durchgerechnet. Danach wird wieder mit den ursprünglichen Returns die Tail-Event Berechnung gemacht.

Die nachstehenden Tabellen beinhalten die Ergebnisse der Berechnung mit Anpassung der einzelnen Methoden.

5%-Tail	historische Simulation	BRW-Methode	HW-Methode
AUD	3,9583%	4,7917%	4,8958%
BEF	5,0521%	5,3646%	4,8958%
CHF	4,8438%	5,3125%	5,2604%
DEM	4,8958%	5%	5,0521%
DKK	5%	5,1042%	5,3125%
ESP	4,7917%	5%	4,9479%
FRF	5,0521%	5,1563%	5,1563%
GBP	4,6354%	4,7917%	4,6875%
ITL	4,4271%	5,0521%	5,0521%
JPY	5%	5,7292%	5,1563%
NLG	5,1562%	5,2604%	5,1563%
SEK	4,9479%	5,625%	5,1563%
Average	4,8138%	5,1823%	5,0608%

1%-Tail	historische Simulation	BRW-Methode	HW-Methode
AUD	0,8854%	1,4583%	0,8333%
BEF	0,8854%	1,4583%	0,9375%
CHF	0,9375%	1,4063%	1,0417%
DEM	0,9896%	1,25%	0,9375%
DKK	1,0417%	1,6146%	0,8333%
ESP	0,8854%	1,0417%	0,8333%
FRF	0,9375%	1,8229%	0,7292%
GBP	1,0938%	1,1979%	1,0938%
ITL	0,7292%	1,4063%	0,8854%
JPY	1,0417%	1,4063%	1,25%
NLG	1,0417%	1,1979%	0,9896%
SEK	0,8854%	1,1979%	0,9375%
Average	0,9462%	1,3715%	0,9418%

In Summe zeigen diese Tabellen, dass die Methode von Boudoukh, Richardson & Whitelaw eine höher als 1% Chance aufweist, dass die Beobachtung innerhalb des BRW's 1% Schwanzes liegt.

Für die Implementierung wird das Programm MATHEMATICA herangezogen. Der Programm-Code befindet sich im Kapitel 7 ab Seite 93.

### 3.7 Ein Ausblick zur Verwendung des Value-at-Risks: Das Risikokapital

In diesem Unterkapitel soll ein Einblick für die weiterführende Verwendung des Value-at-Risk gegeben werden. Dieser kurze Ausschnitt orientiert sich an [4].

Man definiere  $P$  als das 1%-Perzentil der täglichen Änderungen einer Marktvariable. Das (regulatorische) Risikokapital für eine Investition der Höhe 1\$ in eine Long-Position einer Marktvariable ist der dreifache 10-Tage 99%-Value-at-Risk, beziehungsweise  $-3 \cdot \sqrt{10} \cdot P$ .

Die drei Methoden liefern hierfür ganz unterschiedliche Ergebnisse.  $P_i$ , für  $1 \leq i \leq 3$ , entspricht den berechneten 1%-Value-at-Risk dieser drei Ansätze.

Betrachtet man die Methode der gewöhnlichen Simulation, so sieht man, dass das benötigte Kapital unter dieser Methode oftmals infolge der gewählten Fensterlänge über eine lange Periode unverändert bleibt. Das Risk Capital wird stark von Beobachtungen mit großer Änderung, die in einem Fenster oder gerade aus einem Fenster hinausfallen, beeinflusst.

Der Ansatz von Boudoukh, Richardson & Whitelaw neigt dazu, dass das Kapital oftmals auf ein neues Level ansteigt, auf dieser Höhe für eine Zeitspanne verbleibt, bevor es dann abrupt und stark fällt. Um diese Auswirkung zu verstehen, betrachte man das folgende Beispiel.

**Beispiel 3.6.** *Betrachte man einen Tag  $d$ , an dem ein rasanter Abfall, stärker als je einer in den 500 Tagen davor, im Portfoliowert verzeichnet wird. Angenommen es passiert keine "schlechte" Beobachtung in Folge. Wähle man  $\lambda = 0,98$  für die Berechnung der Gewichte, so steigt das Kapital für exakt 35 nachfolgende Tage.*

*Der Grund dafür ist folgender. Am Tag  $d+1$  wird der Beobachtung vom Tag  $d$  ein Gewicht von etwa 0,02 zugeordnet, sodass das 1%-Perzentil der Verteilung der täglichen Änderungen gleich der Beobachtung von Tag  $d$  ist. Für die Tage 1 bis 35 wird dieser Beobachtung von Tag  $d$  immer ein Gewicht größer 0,01 zugewiesen, sodass das 1%-Perzentil immer auf die Beobachtung von Tag  $d$  fällt. Am Tag 36 ist das zugeordnete Gewicht gerade schon unter 1%, sodass die nächst schlechteste Beobachtung das 1%-Perzentil beeinflusst.*

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des benötigten Kapitals bei den drei verschiedenen Methoden. Man kann deutlich erkennen, dass der Ansatz der historischen Simulation größtenteils eine konstante Funktion ist. Weiters zeigt die Graphik die rapiden Anstiege und Abfälle der Methode von Boudoukh, Richardson & Whitelaw.

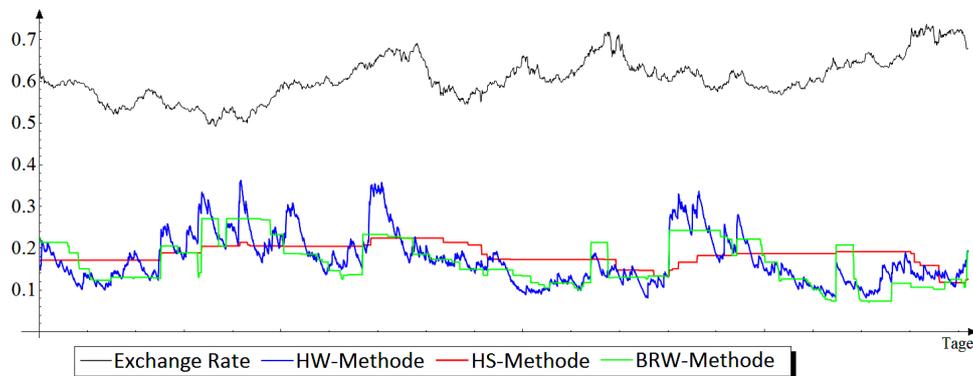


Abbildung 18: Benötigtes Kapital unter den 3 Methoden für eine Investition von 1\$ in DEM

Für eine Investition in eine Long-Position in dieser Währung (Deutsche Mark) zeigt sich, dass das benötigte Kapital unter der BRW-Methode im Schnitt um 10,22% niedriger als unter der HS-Methode ist und das benötigte Kapital unter der HW-Methode im Schnitt um 6,69% niedriger als unter der HS-Methode ist.

Das Ziel der Arbeit ist nicht unbedingt die Minimierung des benötigten Kapitals, sondern vielmehr die Wahl der Methode, die zu einer gegebenen durchschnittlichen Investition an Kapital den Schutz gegen Verluste maximiert. Definiere man dazu

- $A$ : durchschnittliches benötigtes Kapital unter der gewöhnlichen historischen Simulation
- $C_{ave}$ : durchschnittliches benötigtes Kapital unter einer alternativen Methode (zum Beispiel BRW-Methode oder HW-Methode)
- $C_t$ : benötigtes Kapital am Tag  $t$  unter der alternativen Methode
- $L_{tn}$ : entstehende Verluste an den  $n$  folgenden Tagen nach Tag  $t$

Die Quote  $L_{tn}/C_t$  beschreibt den Anteil des benötigten Kapitals unter dem alternativen Schema, um die möglichen Verluste während der nächsten  $n$  Tage nach Tag  $t$  zu decken. Die Extremwerte dieses Ausdrucks messen die Möglichkeiten an finanziellen Schwierigkeiten, die auftreten können, wenn der alternative Ansatz verwendet wird. Allerdings wird nicht die durchschnittliche Höhe an verwendetem Kapital unter dieser Methode berücksichtigt.

Sei

$$\frac{L_{tn}}{C_t} \cdot \frac{C_{ave}}{A}$$

eine weitere Messgröße, die bei der Wahl zwischen den Ansätzen dienen soll. Dies

stellt den Anteil des Kapitals dar, das am Tag  $t$  für die Deckung der Verluste an den anschließenden  $n$  Tagen unter einem bestimmten Ansatz benötigt wird, falls dieses Kapital an jedem Tag mit einer Konstanten multipliziert wird, sodass es im Schnitt gleich dem Kapital unter der gewöhnlichen historischen Simulation ist. Dieser Ausdruck wird als "Capital Utilization Ratio" bezeichnet. Die Extremwerte davon bieten eine Messung für die Kapitalausstattung.

Berechnungen zufolge lässt sich schließen, dass für Währungen der Ansatz von Boudoukh, Richardson & Whitelaw sowie der Ansatz von Hull & White eine bessere Capital Utilization bieten als die Methode der herkömmlichen historischen Simulation.

### 3.8 Konklusion des Kapitels

In dem Kapitel 3 ab Seite 34 wird beschrieben, wie ein Modell für Updating der Schwankung (zum Beispiel das *GARCH*- oder *EWMA*-Modell) in Verbindung mit der historischen Simulation für die Berechnung des Value-at-Risks herangezogen werden kann. Risikomanager wagen oft den Versuch der Erlaubnis für stochastische Schwankungen, indem Stichproben aus erst kürzlich passiertten Beobachtungen anstatt aus älteren Beobachtungen generiert werden. Ein solcher Ansatz ist die besprochene BRW-Methode, die die Anwendung von exponentiell abfallenden Gewichten auf die Beobachtungen involviert. Der HW-Ansatz, den Hull und White verfolgen, ist direkter. Er beinhaltet angepasste Observationen, um die Differenz zwischen der Schwankung zum Zeitpunkt der Beobachtung und der derzeitigen Schwankung zu reflektieren.

Es wird der HW-Ansatz von Hull und White mit der BRW-Methode verglichen. Dazu werden tägliche Daten über 9 Jahre hinweg von 12 verschiedenen Währungskursen verwendet. Dabei gelangt man zu dem Entschluss, dass die HW-Methode bessere Schätzungen der 1%-Perzentile der täglichen Daten liefert. Sie ist ebenfalls gleich gut, wenn nicht besser, bei der Elimination von Bunching der Tail-Events.

Hull und White zeigen eine neue Variante für die Beurteilung der Effektivität einer Methode für die Berechnung des Value-at-Risks. Dabei wird der Anteil des Kapitals, der voraussichtlich in extremen Situationen notwendig sein wird, getestet. Dabei kommen Hull und White zu dem Ergebnis, dass ihre Methode sowie der BRW-Ansatz im Hinblick auf Währungskurse bessere Resultate als die historische Simulation liefert und ihr Ansatz auch die BRW-Methode zu übertreffen scheint.

## 4 Die Value-at-Risk Berechnung, falls die täglichen Änderungen in Marktvariablen nicht normalverteilt sind

Die Ideen dieses Kapitel beziehen sich auf die Arbeit [5] von Hull & White.

Es wurde im vorigen Kapitel 3 ab Seite 34 unter anderem der Ansatz von Hull und White besprochen, der die Annahme der Normalverteilung in ihrer Methode abschwächt und eine Annahme einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung zulässt. In diesem Kapitel 4 wird nun ein neues Modell für die Berechnung des Value-at-Risks diskutiert, wobei der Analytiker die freie Wahl einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der täglichen Änderungen der Marktvariablen besitzt. Parameter der Verteilung hängen von Schemen für die Aktualisierung dieser, wie zum Beispiel von dem *GARCH*-Modell, ab.

Nach einer Durchführung einer Transformation der angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung wird davon ausgegangen, dass die transformierten Variablen multivariat normalverteilt sind.

Das Modell zielt auf einen direkten Weg für die Berechnung des Value-at-Risks ab. Dieser Ansatz kann von RiskMetrics<sup>3</sup> oder ähnlichen Datenbanken Gebrauch machen.

Dieser Ansatz wird anhand täglicher Daten über neun Jahre mit 12 verschiedenen Wechselkursen getestet. Wird die erste Hälfte der Daten für die Schätzung der Modellparameter verwendet, so bietet diese Methode eine gute Vorhersage für die Verteilung der täglichen Änderungen für die zweite Hälfte der Daten.

### 4.1 Einführung

Es gibt mehrere Gründe, wieso der Value-at-Risk ein solch populäres Risikomaß geworden ist. Einer der Ursachen liegt jedoch bei J.P. Morgan, die sich 1994 entschieden hat, ihre RiskMetrics Datenbank für jeden Marktteilnehmer zugänglich zu machen.

Es sei das Statement des Value-at-Risks nochmals wiederholt: "Man ist sich zu  $X\%$  sicher, dass man nicht mehr als  $L$  Dollar Verlust in den nächsten  $N$  Tagen erleiden wird." Der Wert des Value-at-Risks entspricht dann der Größe  $L$  dieser Aussage, und ist somit eine Funktion abhängig von zwei Parametern, dem Zeithorizont  $N$  und dem

<sup>3</sup> RiskMetrics wurde von J.P.Morgan entwickelt und 1994 veröffentlicht. Er stellte erstmals eine standardisierte und relativ einfache fassbare Methodik zur Schätzung von Marktrisiken bereit. Das Modell basiert auf der Standardnormalverteilung, das heißt, es wird angenommen, dass die zugrunde liegenden Instrumente normalverteilt sind.

Konfidenzlevel  $X\%$ . Für diese Größen werden in der Diskussion nach dem benötigten Kapital einer Bank die Werte  $N = 10$  und  $X\% = 99\%$  gewählt. Das notwendige Kapital basiert daher auf den Verlusten während einer 10-Tages Periode, von denen angenommen wird, dass sie in  $1\%$  der Zeit auftreten.

1994 entwickelte J.P. Morgan die sogenannte Methode mittels "RiskMetrics". Es stellt eine standardisierte Methode zur Schätzung von Marktrisiken bereit. Prinzipiell kann der Value-at-Risk auf verschiedene Arten berechnet werden. Eine Methode ist unter anderem die von J.P. Morgan entwickelte "RiskMetrics", die auf dem Konzept der Standardnormalverteilung basiert.

Jenes Modell, das am häufigsten für die Bestimmung des Value-at-Risks verwendet wird, stellt die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der täglichen Änderungen in jeder Marktvariable einer Normalverteilung folgt. Jedoch scheint dieser Ausgangspunkt nicht wirklich perfekt zu sein. Die täglichen Änderungen einiger Marktvariablen, vor allem bei Wechselkursen, weisen eine beachtliche Menge an positiver Kurtosis beziehungsweise positiver Exzess-Kurtosis<sup>4</sup> auf. Das heißt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die tägliche Änderung einer solchen Variable besitzt einen dicken Schwanz, sodass extreme Returns viel eher und häufiger – als sie bei einer Normalverteilung prophezeit werden würden – auftreten können.

Laut Duffie und Pan (1997) kann aufgrund von Sprüngen sowie einer stochastischen Schwankung möglicherweise eine Kurtosis beziehungsweise eine Exzess-Kurtosis verursacht werden. Sie weisen darauf hin, dass unter einem mit Sprüngen versehenen Modell die Kurtosis eine mit dem Zeithorizont fallende Funktion darstellt, während ein Modell mit stochastischer Schwankung eine steigende Funktion für die Kurtosis in Abhängigkeit des Zeithorizonts liefert.

Im Folgenden wird aufgrund der genannten Probleme gezeigt, wie die Annahme der Normalverteilung gelockert werden kann. Es wird ein Modell entwickelt, indem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die täglichen Änderungen in jeder Marktvariable frei gewählt werden kann. Die Parameter dieser Verteilung sind durch Updating Modelle, wie zum Beispiel der *GARCH*-Prozess, bedingt. Weiters werden die täglichen Änderungen jeder Marktvariable in ein neues Modell, das dann normalverteilt ist,

<sup>4</sup> Je nach Definition der Kurtosis beziehungsweise der Exzess-Kurtosis versteht man oftmals unter Kurtosis (Exzess-Kurtosis) schon den Exzess. Für die folgenden Seiten dieser Arbeit sei die Kurtosis für eine stochastische Größe  $X$  durch

$$\gamma_1[X] = \frac{\mu_4[X]}{(\mu_2[X])^2} = \frac{\mu_4[X]}{\sigma^4[X]}$$

definiert. Dabei beschreibt  $\mu_k[\cdot]$  das  $k$ -te zentrale Moment definiert durch  $\mu_k[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^k]$ . Die Größe  $\mu$  ist der Erwartungswert und  $\sigma^2$  die Varianz. Der Exzess beziehungsweise die Exzess-Kurtosis einer stochastischen Größe  $X$  ist weiters durch  $\gamma_2[X] = \gamma_1[X] - 3$  definiert.

transformiert. Daraus leitet sich die Annahme ab, dass die neuen Variablen gemeinsam multivariat normalverteilt sind.

Das Unterkapitel 4.2 behandelt die gewöhnlichen Annahmen und die Hauptansätze für die Berechnung des Value-at-Risks. Das Unterkapitel 4.3 zeigt Daten über die Kurtosis beziehungsweise die Exzess-Kurtosis von Wechselkursen. Im Unterkapitel 4.4 wird das Modell auf Wechselkurse angewendet und das Unterkapitel 3.6.2 beinhaltet die Durchrechnungen des Modells anhand von Daten.

## 4.2 Ansätze für die Berechnung des Value-at-Risks

Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten, wie der Value-at-Risk eines Portfolios bestimmt werden kann. Ein beliebiger Weg, der unter anderem Datenbanken wie RiskMetrics mit einbezieht, ist die Annahme eines Modells, bei dem die Wertänderungen der Marktvariablen (wie zum Beispiel eines Aktienkurses, einer Null-Coupon-Anleihe, eines Wechselkurses oder eines Rohstoffpreises) einer multivariaten Normalverteilung folgen. Die durchschnittliche Änderung in dem Wert jeder einzelnen Marktvariable wird als 0 vorausgesetzt.

Sofern die Wertpapiere des Portfolios linear von  $n$  Marktvariablen abhängen, ist der Value-at-Risk in diesem Modell analytisch berechenbar. Die Änderung des Portfoliowertes an einem Tag wird mit  $\Delta P$  bezeichnet und ist durch die Form

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \Delta x_i$$

gegeben. Die Variablen  $\Delta x_i$  beschreiben die proportionale Änderung in dem Wert der  $i$ -ten Marktvariable innerhalb eines Tages und die Variablen  $\beta_i$  sind für  $1 \leq i \leq n$  konstante Größen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfoliowertes am Ende eines Tages folgt einer Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu = 0$  und der Standardabweichung  $\sigma_P$  mit

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \cdot \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j.$$

Die Variablen  $\sigma_k$  stehen für die täglichen Schwankungen der  $k$ -ten Marktvariable und  $\rho_{ij}$  beschreibt die Korrelation zwischen  $\Delta x_i$  und  $\Delta x_j$ . Durch diesen Ansatz lässt sich der Value-at-Risk zu einem beliebigen Konfidenzlevel  $\alpha$  und zu einem beliebigen Zeithorizont  $N$  einfach aus  $\sigma_P$  ermitteln.

**Beispiel 4.1.** *Unter den Annahmen, die bisher getroffen wurden, das heißt, der linearen Abhängigkeit im Portfolio und der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und der Standardabweichung laut der obigen Formel für  $\sigma_P$ , gilt für den Value-at-Risk: Der*

Value-at-Risk zu einem gegebenen Konfidenzlevel  $\alpha = 99\%$  und einem Zeithorizont von  $N$  Tagen ist durch

$$2,33 \cdot \sigma_P \cdot \sqrt{N}$$

gegeben.

Wird nun davon ausgegangen, dass das Portfolio auch Instrumente enthält, die nicht linear von den Marktvariablen abhängen, so findet man keinen derartig exakten Ansatz für die Berechnung des Value-at-Risks. Ein Vorschlag ist die Verwendung der Monte Carlo Methode. Jedoch führt dies zu einem großen zeitlichen Aufwand, da das komplette Portfolio nach jeder Simulation neu bewertet werden muss. Eine Alternative bietet die Approximation der Beziehung zwischen  $\Delta P$  und den  $\Delta x_i$ 's durch Anwendung der ersten beiden Glieder der Taylorreihe, sodass

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j. \quad (1)$$

Dieser Ausdruck kann für die analytische Berechnung der Momente von  $\Delta P$  verwendet werden. Als Alternative kann auch die Monte Carlo Simulation angewendet werden, wobei  $\Delta P$  direkt aus dieser Gleichung berechnet wird. Der Vorteil liegt in einem geringeren Zeitaufwand, da eine Neubewertung des Portfolios nach jedem Simulationspfad vermieden wird. Diese Vorgangsweise wird häufig als der "Partial Simulation"-Ansatz bezeichnet.

Es gibt noch weitere Methoden für eine schnellere Monte Carlo Berechnung, jedoch sind diese nicht Inhalt dieser Arbeit und somit wird auf weitere Literatur verwiesen.

Manche Analytiker bevorzugen die Verwendung von historischen Daten gegenüber einem Modell, das das statistische Verhalten von Marktvariablen definiert. Dafür wird eine Datenbank bestehend aus täglichen Bewegungen aller Marktvariablen über eine Zeitperiode benötigt. Bei der ersten Simulation geht man davon aus, dass die prozentuellen Änderungen in jeder Marktvariable jenen am ersten Tag der Datenbank entsprechen. Für die zweite Simulation wird analog angenommen, dass die prozentuellen Änderungen gleich jenen am zweiten Tag der Datenbank sind, und so weiter. Die Änderung im Portfolio wird für jeden Simulationspfad berechnet. Der Value-at-Risk ist dann durch das entsprechende Quantil der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Änderungen des Portfolios gegeben. Die Änderung des Portfoliowertes kann entweder durch Neubewertung des Portfolios oder durch die Gleichung (1) erhalten werden.

Dieser historische Ansatz hat den Vorteil, dass die historische multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung der Marktvariablen exakt wiedergespiegelt wird. Der Nachteil ist jedoch, dass die Anzahl der Simulationen durch die Anzahl der Tage der zu

Verfügung stehenden Daten beschränkt ist. Analysen über die Sensitivität sind daher schwer durchzuführen. Weiters können Marktvariablen, von denen keine historischen Daten zugrunde liegen, nicht einfach in die Berechnung aufgenommen werden. Im weiteren Abschnitt dieses Kapitels wird der "Model-Building" Ansatz erweitert, sodass das historische Verhalten der Marktvariablen genauer repräsentiert wird.

### 4.3 Marktvariablen und der Verlauf der Normalverteilung

Obwohl die Berechnung des Value-at-Risks durch RiskMetrics die multivariate Normalverteilung annimmt, weisen Änderungen in den Marktvariablen, vor allem bei Währungs- und Wechselkursen, eine positive Kurtosis beziehungsweise einen positiven Exzess auf. Dies bedeutet, dass unter der Annahme normalverteilter Variablen extreme Ereignisse und somit auch die Höhe des Marktrisikos unterschätzt werden.

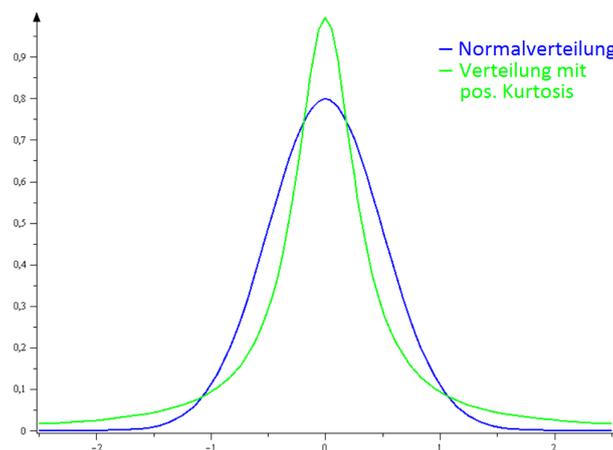


Abbildung 19: Vergleich: Normalverteilung und Verteilung mit positivem Exzess

Die Abbildung 19 zeigt die Normalverteilung mit einer Kurtosis  $\gamma_1 = 3$  und somit einem Exzess  $\gamma_2 = \gamma_1 - 3 = 0$  im Vergleich mit einer Verteilung, die eine positive Kurtosis sowie einen positiven Exzess besitzt. Die zweite Verteilung hat einen spitzeren Gipfel und dickere Enden, das heißt, sie besitzt sogenannte "heavy Tails". Der Übergang von einer Normalverteilung zu einer Verteilung mit positiver Kurtosis beziehungsweise mit positivem Exzess besteht darin, dass die Wahrscheinlichkeiten für sehr große und sehr kleine Bewegungen im Wert der Variable steigen und im Gegensatz dazu die Wahrscheinlichkeit für moderate Änderungen sinkt.

### 4.3.1 Die Problematik der Annahme „Normalverteilung“

Um das Problem der Annahme einer Normalverteilung beziehungsweise einer anderen Verteilung als die Normalverteilung von Marktvariablen zu demonstrieren, wird eine Berechnung mit Wechselkursen durchgeführt. Es wird anhand von 12 Wechselkursen zwischen dem 4. Jänner 1988 und dem 15. August 1997 die Kurtosis beziehungsweise der Exzess untersucht. Es werden also 2421 Daten pro Währung herangezogen. Die Währungen sind der Australische Dollar (AUD), der Belgische Franken (BEF), der Schweizer Franken (CHF), die Deutsche Mark (DEM), die Dänische Krone (DKK), die Spanische Peseta (ESP), der Französische Franken (FRF), das Britische Pfund (GBP), die Italienische Lire (ITL), der Japanische YAN (JPY), die Niederländische Gulden (NLG) und die Schwedische Krone (SEK).

Mit  $e_i$  werden die proportionalen Änderungen einer Währungsrate von Tag  $i$  zu Tag  $i + 1$  bezeichnet. Mittels diesen Daten wird untersucht, wie häufig diese proportionale Änderung die Standardabweichung, die zweifache, die dreifache, die vierfache, die fünffache und letztendlich die sechsfache Standardabweichung übersteigt. Diese Untersuchung wird für jede Währung gesondert behandelt. Die folgende Tabelle zeigt diese Resultate.

	AUD	BEF	CHF	DEM	DKK	ESP
> 1stdev	23,14%	25,74%	27,07%	26,49%	25,25%	24,01%
> 2stdev	5,00%	5,17%	5,25%	5,33%	5,29%	5,37%
> 3stdev	1,07%	1,61%	1,12%	1,36%	1,40%	1,61%
> 4stdev	0,45%	0,29%	0,21%	0,21%	0,25%	0,33%
> 5stdev	0,25%	0,00%	0,04%	0,00%	0,04%	0,17%
> 6stdev	0,21%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,12%
(Exzess)-Kurtosis	7,81	1,93	1,55	1,82	2,06	4,52

	FRF	GBP	ITL	JPY	NLG	SEK
> 1stdev	25,62%	24,83%	24,63%	23,59%	26,32%	23,18%
> 2stdev	5,45%	5,33%	4,88%	5,70%	5,41%	5,45%
> 3stdev	1,61%	1,53%	1,28%	1,61%	1,36%	1,24%
> 4stdev	0,21%	0,41%	0,21%	0,49%	0,21%	0,37%
> 5stdev	0,00%	0,00%	0,12%	0,12%	0,00%	0,17%
> 6stdev	0,00%	0,00%	0,12%	0,00%	0,00%	0,12%
(Exzess)-Kurtosis	1,79	2,41	9,73	3,17	1,77	7,86

Tabelle 1: Exchange Rate Moves mit konstanter Varianz

Die beiden Tabellen zeigen gut, dass jede Währung eine signifikant überschüssige Kurtosis aufweisen. Die Hypothese, dass die proportionalen Änderungen  $e_i$  einer Normalverteilung folgen, kann mit einer sehr hohen Sicherheit abgelehnt werden. Dazu betrachte man die nachfolgende Tabelle.

	Average	Normal
> 1stdev	24,98%	31,73%
> 2stdev	5,30%	4,55%
> 3stdev	1,40%	0,27%
> 4stdev	0,30%	0,01%
> 5stdev	0,08%	0,00%
> 6stdev	0,05%	0,00%
Exzess-Kurtosis	3,87	0,00

Die Tabelle zeigt in der Spalte "Average" den Schnitt über alle Währungen. In der Spalte "Normal" befinden sich die entsprechenden Werte für die Standardnormalverteilung mit Mittelwert  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ . Diese Werte werden aus der Tabelle der Standardnormalverteilung  $\Phi_{\{0,1\}}(z)$  abgelesen.

Im Schnitt übersteigen 24,98% der  $e_i$  die Standardabweichung. Dieser Wert ist beträchtlich niedriger als 31,37%, der durch die Normalverteilung prophezeit wird. Es wird somit gezeigt, dass Wechselkurse eine spitzere Verteilungskurve als jene von der Normalverteilung haben. Betrachtet man den Prozentsatz mit dem die  $e_i$  die dreifache Standardabweichung übersteigen, so stellt man den durchschnittlichen Wert von 1,40% jenem der Normalverteilung mit 0,25% gegenüber. Daraus schließt man, dass Wechselkurse im Normalfall dickere Schwänze (Heavy Tails) als die Normalverteilung besitzen.

RiskMetrics verwendet für die Berechnung der täglichen Varianz das *EWMA*-Modell

$$\sigma_i^2 = \alpha \cdot \sigma_{i-1}^2 + (1 - \alpha) \cdot e_{i-1}^2, \quad (2)$$

wobei  $\sigma_i^2$  die berechnete Varianz von Tag  $i$  ist und  $\alpha = 0,94$  gesetzt wird. Mit dieser Annahme wird die Tabelle 1 von Seite 65 erneut berechnet und erstellt.

Die Resultate sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

	AUD	BEF	CHF	DEM	DKK	ESP
> 1stdev	27,36%	28,43%	28,88%	28,97%	28,60%	28,26%
> 2stdev	6,16%	6,24%	6,32%	6,45%	6,36%	6,45%
> 3stdev	1,45%	1,36%	1,07%	1,40%	1,49%	1,49%
> 4stdev	0,58%	0,25%	0,21%	0,16%	0,17%	0,37%
> 5stdev	0,29%	0,04%	0,08%	0,04%	0,04%	0,12%
> 6stdev	0,08%	0,04%	0,04%	0,04%	0,04%	0,08%
(Exzess)-Kurtosis	3,61	1,73	1,91	1,90	1,90	2,59

	FRF	GBP	ITL	JPY	NLG	SEK
> 1stdev	28,97%	27,52%	29,00%	26,45%	29,25%	28,68%
> 2stdev	6,28%	6,40%	6,28%	6,78%	6,45%	6,20%
> 3stdev	1,32%	1,57%	1,32%	1,57%	1,45%	1,45%
> 4stdev	0,12%	0,33%	0,16%	0,70%	0,16%	0,21%
> 5stdev	0,04%	0,08%	0,12%	0,25%	0,04%	0,08%
> 6stdev	0,04%	0,04%	0,00%	0,08%	0,04%	0,08%
(Exzess)-Kurtosis	2,14	2,21	1,88	3,48	1,83	4,28

Die soeben angeführten Tabellen zeigt die Häufigkeit mit der die standardisierten proportionalen Änderungen  $e_i/\sigma_i$  die Standardabweichung  $\sigma_i$ , die zweifache, die dreifache, die vierfache, die fünffache und die sechsfache Standardabweichung überschreiten, wenn die Varianz nach dem *EWMA*-Modell laut Formel (2) berechnet wird. Dieses Modell führt zu einer deutlichen Reduzierung der Exzess-Kurtosis, jedoch bestehen die Unstimmigkeiten zwischen der beobachteten Häufigkeit und jener, im Falle der Annahme der Standardnormalverteilung, weiterhin beachtlich.

	Average	Normal
> 1stdev	28,36%	31,73%
> 2stdev	6,36%	4,55%
> 3stdev	1,41%	0,27%
> 4stdev	0,28%	0,01%
> 5stdev	0,10%	0,00%
> 6stdev	0,05%	0,00%
Exzess-Kurtosis	2,48	0,00

Die letzte Tabelle beinhaltet diese Rechnung wieder für alle Währungen gemeinsam und stellt diese der Normalverteilung gegenüber.

Die Hypothese, dass die proportionalen Änderungen  $e_i$  normalverteilt sind, kann ebenfalls noch immer mit einer großen Sicherheit verworfen werden.

#### 4.4 Die Modellierung von Returns ohne Normalverteilung und die Berechnung des Value-at-Risks

Der traditionelle Ansatz für die Modellierung von nicht normalverteilten Returns einer Zeitreihe stellt die Annahme, dass – obwohl die unbedingten Returns nicht normalverteilt sind – die entsprechenden bedingten Returns einer Normalverteilung folgen. Es gibt unter anderem die folgenden drei bekannten Modelle für diesen Typ:

- ”*GARCH*-Modell”: Im Ansatz des *GARCH*-Modells beziehungsweise bei der Modellierung ähnlicher Modelle mit stochastischer Varianz sind die Returns bedingt auf die derzeitige aktuelle Varianz normalverteilt.
- ”Mixed Jumped-Diffusion Model”: In einem ”Mixed Jumped-Diffusion Model” sind die Returns bedingt auf die Annahme, dass es keine Sprünge gibt, normalverteilt.
- ”Markov Switching Model”: Bei einem ”Markov Switching Model” sind die Returns normalverteilt, wenn auf den derzeitigen Zustand bedingt wird.

Der Vorteil dieser drei Modelle besteht darin, dass alle drei Ansätze die multivariate Normalverteilung und somit die oftmals einfachen Eigenschaften dieser Verteilung mit sich bringen.

In weiterer Folge wird eine vierte Alternative für den Umgang mit nicht normalverteilten Modellen vorgestellt. Eine funktionale Transformation der beobachteten Returns soll normalverteilt sein. Ähnlich wie in den anderen drei Modellen wird hier die Normalität der Daten durch eine entsprechende Bedingung erhalten. Dieser Ansatz wird zum Beispiel bei Anleihen beziehungsweise Vermögenspreisen gerne herangezogen. Dazu sei das folgende Beispiel kurz angeführt.

**Beispiel 4.2.** *Üblicherweise werden die Änderungen in Preisen von Anleihen durch eine Form der Lognormalverteilung beschrieben. Durch eine Transformation mit Hilfe des Logarithmus wird davon ausgegangen, dass die Änderungen in dem Logarithmus der Anleihenpreise normalverteilt sind.*

##### 4.4.1 Aufbau und Berechnung des Modells

Diese Variante bietet eine Möglichkeit wie durch Annahme keiner Normalverteilung der Value-at-Risk ermittelt werden kann. Die Methode wird in den folgenden Schritten implementiert:

1. Angenommen es sind gesamt  $m$  Marktvariablen gegeben.

2. Die proportionale Änderung in der Variable  $j$  am Tag  $i$  sei durch  $R_{ij}$  für  $1 \leq j \leq m$  definiert. Mittels  $G_{ij}$  wird die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $R_{ij}$  beschrieben. Diese Funktion  $G_{ij}$  hängt im Allgemeinen von einer Anzahl an Parametern ab, welche teilweise unabhängig von  $i$  und teilweise abhängig von Updating Schemen, wie das *GARCH*-Modell, sind.
3. Es wird jeder Return  $R_{ij}$  durch Anwendung der Transformation

$$f_{ij} = \mathcal{N}^{-1} [G_{ij}(R_{ij})]$$

in eine neue Variable  $f_{ij}$  transformiert, wobei  $\mathcal{N}$  die Verteilungsfunktion der Normalverteilung darstellt. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Änderung in der Variable  $j$  am Tag  $i$  kleiner als  $R_{ij}$  ist.

4. Mit  $z$  wird genau diese Wahrscheinlichkeit definiert, sodass  $R_{ij}$  als  $z$ -Quantil der Verteilungsfunktion für die täglichen Änderungen angenommen wird. Die Variable  $f_{ij}$  ist das gleiche Quantil der Standardnormalverteilung. Das heißt, durch die Transformation von  $R_{ij}$  zu  $f_{ij}$  werden die Beobachtungen von der angenommenen Verteilung der täglichen Änderungen in eine Standardnormalverteilung durch eine "Quantil-zu-Quantil"-Grundlage abgebildet. Ein bestimmtes Quantil der Verteilung  $G$  wird auf das entsprechende Quantil der Normalverteilung abgebildet.
5. Zunächst muss die funktionale Form der Verteilung  $G$  gewählt werden, um im nächsten Schritt aus den historischen Daten die Parameter der Verteilung  $G$  zu schätzen.

Diese Transformation kann in Verbindung mit verschiedenen Ansätzen – wie zum Beispiel einer Methode, die auf historischen Daten basiert, oder einem Modellansatz, bei dem eine Annahme über eine Verteilung erfolgt – für die Berechnung des Value-at-Risks verwendet werden:

- Bei einem Modellansatz wird eine bestimmte Form für die Verteilung der Returns, wie zum Beispiel eine Student- $t$ -Verteilung oder eine Mischung aus Normalverteilungen, für die Berechnung des Value-at-Risks angenommen. Weiters werden die Parameter der Verteilung für jede Marktvariable geschätzt. In diesem Fall wird die Funktion  $G$  aus der angenommenen Verteilung berechnet.
- Wird ein Ansatz mit historischen Daten gewählt, so basiert die Verteilung der zukünftigen Änderungen auf der Verteilung der vergangenen Änderungen. Die Funktion  $G$  ist hierbei das kumulierte Histogramm der historischen Änderungen.

Nach Ermittlung der funktionalen Form ist es möglich, anhand der Beziehung

$$R_{ij} = G_{ij}^{-1} [\mathcal{N}(f_{ij})]$$

die Variablen  $f_{ij}$  auf die ursprünglichen Daten abzubilden.

Es wird angenommen, dass somit die  $f_{ij}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) einer multivariaten Normalverteilung folgen. Für die Berechnung des Value-at-Risks kann dann entweder die Monte Carlo Simulation oder eine Taylorreihenentwicklung herangezogen werden:

- Fällt der Entschluss auf die Verwendung der Monte Carlo Simulation, so werden vorerst eine große Anzahl von standardnormalverteilten Variablen  $f_{ij}$  erzeugt. Diese multivariaten normalverteilten Variablen  $f_{ij}$  werden in aktuelle Resultate  $R_{ij}$  abgebildet, indem

$$R_{ij} = G_{ij}^{-1} [\mathcal{N}(f_{ij})]$$

angewendet wird. Bei jedem Simulationspfad wird ein  $f_{ij}$  erzeugt und mittels dieser Formel ein dazugehöriges  $R_{ij}$  gefunden. Nach jedem einzelnen Simulationspfad werden diese  $R_{ij}$  dann zur Berechnung der Änderung im Portfoliowert, entweder durch Verwendung der Formel (1) von Seite 63 oder durch eine komplette Portfolio-Neubewertung, herangezogen. Aus der resultierenden Verlust-Verteilung wird der entsprechende Value-at-Risk ermittelt.

- Soll die Taylorreihenentwicklung verwendet werden, so wird eine quadratische Beziehung zwischen der Änderung im Portfoliowert und den proportionalen Änderungen  $R_{ij}$  vorausgesetzt. Die Berechnung kann über die Cornish-Fisher Entwicklung erfolgen. Dabei müssen die ersten paar Momente der Änderung des Portfoliowertes ermittelt werden. Dazu werden Terme der Form  $\mathbb{E}(R_{ij})$ ,  $\mathbb{E}(R_{ij} \cdot R_{ik})$ ,  $\mathbb{E}(R_{ij} \cdot R_{ik}^2)$ ,  $\mathbb{E}(R_{ij}^2 \cdot R_{ik}^2)$ , und so weiter, verlangt. Diese können vor der Berechnung des Value-at-Risks mittels einer Durchführung einer einfachen Monte Carlo Simulation der  $R_{ij}$ 's berechnet, tabuliert und abgespeichert werden. Wird die Monte Carlo Simulation täglich durchgeführt, so ist die Taylorreihenentwicklung im Vergleich zu einer Monte Carlo Simulation in Verbindung mit einer quadratischen Approximation von minderer Qualität. Unterliegt jedoch immer nur ein Parameter täglich in  $G_{ij}$  einem Update, und ist dieser ein Varianzparameter, der die  $R_{ij}$  "skaliert", so muss die Monte Carlo Simulation nur ein einziges Mal vollzogen werden.

Die Verwendung dieser Variante in Verbindung mit der Cornish-Fisher Entwicklung stellt keinen weiteren Inhaltspunkt dieser Arbeit dar. Es wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

#### 4.4.2 Ein spezielles Beispiel dieses Modells

In diesem Unterkapitel 4.4.2 wird ein Beispiel illustriert, wie die Funktion  $G$  gewählt werden kann. Die Modellparameter werden aus den historischen Daten des Wechselkurses geschätzt. Die Qualität der Approximation wird durch einen Vergleich mit einem Modell für eine gegebene Stichprobe an Daten getestet. Um die Funktion  $G$  darzustellen, wird eine Mischung von Normalverteilungen verwendet.

Es werden zwei Typen an Modellen diskutiert. Im ersten Modell ist die Verteilung der täglichen Änderungen stationär und im zweiten Modell ist die Varianz der Verteilung der täglichen Änderungen variabel, jedoch sind die Parameter, die die Kurtosis der Verteilung beschreiben, konstant.

Die Parameterschätzung wird durch Anpassung der Quantile der Verteilung vollzogen.

Die funktionale Form der Funktion  $G$  und das Prozedere der Schätzung sind nur eine mögliche Illustration des allgemeinen Ansatzes. Es gibt noch andere Annahmen und Verfahren zur Schätzung, die sehr wohl verfolgt werden können. Jedoch gelangt man zu dem ermutigenden Entschluss, dass die mit diesem Wege erhaltenen Ergebnisse für das zweite Modell ziemlich gut sind.

Für die Durchführung der Monte Carlo Simulation muss eine funktionale Form für die Verteilungsfunktion der Risikofaktoren angenommen werden. In diesem Beispiel werden die Verteilungen der Wechselkursänderungen durch die Mischung von zwei Normalverteilungen geschätzt.

Definiere  $\sigma_i^2$  die Varianz der proportionalen täglichen Änderung  $e_i$  einer unbestimmten Variable am Tag  $i$ . Es wird angenommen, dass die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die täglichen Änderungen mit

$$g_i(e_i) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}u\sigma_i} \cdot \exp\left(-\frac{e_i^2}{2u^2\sigma_i^2}\right) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}v\sigma_i} \cdot \exp\left(-\frac{e_i^2}{2v^2\sigma_i^2}\right) \quad (3)$$

gegeben ist und somit

$$G_i(e_i) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{e_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{e_i}{v\sigma_i}\right)$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist somit ein gewichteter Durchschnitt zweier Normalverteilungen mit Mittelwert 0. Die erste Verteilung hat das Gewicht  $p$  und die Standardabweichung  $u\sigma_i$ , die zweite Verteilung besitzt das Gewicht  $1-p$  und die Standardabweichung  $v\sigma_i$ . Die Gleichung (3) definiert eine Familie von Verteilungen mit Termen aus vier Parametern:  $p$ ,  $u$ ,  $v$  und  $\sigma_i$ .

Die Varianz der Verteilung aus (3) ist durch

$$pu^2\sigma_i^2 + (1-p)v^2\sigma_i^2$$

gegeben. Da dieser Ausdruck gleich der Varianz  $\sigma_i$  der empirischen Verteilung sein muss, so müssen die dem Modell zugrundeliegenden Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  die Gleichung

$$pu^2 + (1-p)v^2 = 1 \quad (4)$$

erfüllen.

Um das Modell an die Daten anzupassen, werden zwei Fälle behandelt:

- Die Varianz der täglichen Änderungen in einer Marktvariable wird als konstant angenommen und ist gleich  $\sigma^2$ , sodass also  $\sigma_i = \sigma$  gilt.
- Die Varianz wird durch ein *EWMA*-Modell nach der Formel

$$\sigma_i^2 = \lambda \cdot \sigma_{i-1}^2 + (1-\lambda) \cdot e_{i-1}^2$$

mit  $\lambda = 0.94$  angenommen. Es können jedoch auch andere *GARCH*-Modelle für die Aktualisierung von  $\sigma_i$  betrachtet werden.

Um das Modell zu testen, werden Werte für die Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  gewählt, die mit der Gleichung (4) konsistent sind und die für die erste Hälfte der Daten die beste Anpassung für die Verteilung von  $e_i$  bieten. Ein möglicher Ansatz scheint die Maximierung der Log-Likelihood Funktion

$$\sum_i \log \left[ \frac{p}{u\sigma_i} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2u^2\sigma_i^2}\right) + \frac{1-p}{v\sigma_i} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2v^2\sigma_i^2}\right) \right]$$

zu sein.

Das Lösen dieser Aufgabe kann jedoch zu Instabilität, zu lokalen Lösungen und zu Problemen von Nicht-Konvergenz führen.

**Beispiel 4.3.** Betrachte man ein  $e_i$  als 0, und tendiere  $u$  ebenfalls gegen 0 zu streben. Somit sind die beiden Exponentialausdrücke gleich 1, während  $p/(u\sigma_i)$  gegen unendlich wandert, sodass die Log-Likelihood Funktion gesamt ebenfalls gegen unendlich tendiert.

Um diese Probleme zu bewältigen, werden die Parameterschätzungen aufgrund der Quantile der Verteilung gemacht. Die Daten beziehungsweise Beobachtungen über die Änderungen der Wechselkurse werden in vier Kategorien unterteilt:

- Jene Änderungen, die weniger als die Standardabweichung sind: ( $|e_i| \leq \sigma_i$ ),
- jene Änderungen, die zwischen der Standardabweichung und der zweifachen Standardabweichung liegen: ( $\sigma_i < |e_i| \leq 2\sigma_i$ ),

- jene Änderungen, die zwischen der zweifachen und der dreifachen Standardabweichung liegen:  $(2\sigma_i < |e_i| \leq 3\sigma_i)$ ,
- und jene Änderungen, die strikt größer als die dreifache Standardabweichung sind:  $(3\sigma_i < |e_i|)$

Anschließend wird die Anzahl der Dateneinträge, die in jeder Kategorie beobachtet wird, mit der Anzahl der Dateneinträge, die mit speziellen Werten für  $p$ ,  $u$  und  $v$  in jeder Kategorie prognostiziert wird, verglichen. Die Werte dieser Parameter werden durch die Maximierung der Log-Likelihood Funktion

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \log(\beta_k)$$

gewählt.  $\alpha_k$  beschreibt den aktuellen Anteil an Beobachtungen in der  $k$ -ten Kategorie und  $\beta_k$  sind die prophezeiten Anteile in der  $k$ -ten Klasse. Gesucht wird dabei jene Konstellation der Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$ , die die beste Approximation an die empirische Verteilung der Risikofaktoren erzielt.

Die am besten angepassten Werte für die Parameter werden dann auf die zweite Hälfte der Daten angewendet und mittels  $\chi^2$ -Statistik die Güte der Anpassung bestimmt. Der Grund für die Berechnung der  $\chi^2$ -Statistik liegt darin, dass die Daten wie beschrieben in vier Kategorien unterteilt werden. Die  $\chi^2$ -Statistik ergibt sich dann aus

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(A_i - E_i)^2}{E_i},$$

wobei  $A_i$  die aktuelle Anzahl an Beobachtungen aus der zweiten Hälfte der Daten in der  $i$ -ten Kategorie und  $E_i$  die erwartete Anzahl an Beobachtungen, die aufgrund der geschätzten Verteilung aus der ersten Hälfte der Daten prognostiziert wird, sind.

## 4.5 Ein Beispiel aus der Praxis

Anhand ausgewählter Daten wird die Bestimmung der Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  mit der im Unterkapitel 4.4.2 angeführten möglichen Verteilungsfunktion

$$G_i(e_i) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{e_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{e_i}{v\sigma_i}\right)$$

für verschiedene Währungen vollzogen.

Dazu werden historische Aufzeichnungen von 12 verschiedenen Währungskursen zwischen dem 4. Jänner 1988 und dem 15. August 1997 verwendet. Es sind also  $T + 1 = 2421$  Wechselkurse, und somit  $T = 2420$  Returns beziehungsweise proportionale

Änderungsdaten pro Währung verfügbar.

Bei den Währungen handelt es sich um den Australischen Dollar (AUD), den Belgischen Franken (BEF), den Schweizer Franken (CHF), die Deutsche Mark (DEM), die Dänische Krone (DKK), die Spanische Peseta (ESP), den Französischen Franken (FRF), das Britische Pfund (GBP), die Italienische Lire (ITL), den Japanischen Yen (JPY), den Niederländischen Gulden (NLG) und die Schwedische Krone (SEK).

Die Parameterbestimmung wird für die beiden Fälle

- der konstanten Varianz  $\sigma$  und
- der durch das *EWMA*-Modell modellierten Varianz  $\sigma_i^2 = \lambda \cdot \sigma_{i-1}^2 + (1-\lambda) \cdot R_{i-1}^2$

für jeden Wechselkurs getrennt sowie für alle gemeinsam implementiert.

Um das Modell zu testen, wird für die Bestimmung der Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  nur die erste Hälfte der zur Verfügung stehenden Daten verwendet und dann anschließend die erhaltenen Parameter auf die zweite Hälfte angewendet, um mittels  $\chi^2$ -Test die Güte der Anpassung zu untersuchen.

#### 4.5.1 Erster Fall: Konstante Varianz

In diesem Kapitel wird von einer konstanten Varianz über die gesamte Laufzeit der Daten ausgegangen. Es sind für jede Währung  $T = 2420$  Returns  $R_t$  bekannt. Die in der Formel für die Funktion  $G$  benötigte Varianz  $\sigma$  wird durch die empirische Varianz

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2, \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

der ersten Hälfte der Returns, das heißt für  $k = T/2$ , bestimmt. Die Verteilungsfunktion  $G_i$  vereinfacht sich somit zu

$$G(x) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{x}{u\sigma}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{x}{v\sigma}\right).$$

Als ersten Schritt müssen die  $\alpha_k$ 's ermittelt werden. Da auch hierbei von einer konstanten Standardabweichung ausgegangen wird, ist jedes Mal dasselbe  $\sigma$  zu verwenden. Die  $\alpha_k$ 's geben die Proportion der Returns, die in das  $k$ -te Intervall fallen, an. Da die erste Hälfte aus  $M = 1210$  Returns besteht, sind diese durch

- $\alpha_1 := \frac{\#\{ |R_i| \leq \sigma \}}{M}$
- $\alpha_2 := \frac{\#\{ \sigma < |R_i| \leq 2 \cdot \sigma \}}{M}$

- $\alpha_3 := \frac{\#\{2 \cdot \sigma < |R_i| \leq 3 \cdot \sigma\}}{M}$
- $\alpha_4 := \frac{\#\{3 \cdot \sigma < |R_i|\}}{M}$

bestimmt. Mit dem Symbol  $\#$  ist die Anzahl der Beobachtungen gemeint.

Für die Bestimmung der Parameter vergleicht man die beobachtete Proportion  $\alpha_k$  für das  $k$ -te Intervall mit der, für festgesetzte Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  durch die Verteilungsfunktion bestimmten erwarteten, Proportion  $\beta_k$  des  $k$ -ten Intervalls. Die gesuchten Parameter sind jene Wert für  $p$ ,  $u$  und  $v$ , die die Funktion

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \log(\beta_k)$$

maximieren. Die  $\beta_k$  werden durch die Verteilungsfunktion  $G$  ausgedrückt:

- $\beta_1 := G(\sigma) - G(-\sigma)$
- $\beta_i := G(i\sigma) - G(-i\sigma) - \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k$  für  $i = 2, 3$
- $\beta_4 := 1 - [G(3\sigma) - G(-3\sigma)] = 1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i$

Die folgende Tabelle zeigt die Werte für die Parameter für jede Währung sowie für die Währungen gemeinsam, die durch diese Prozedur erhalten werden. Die Berechnung ist wiederum in dem Programm MATHEMATICA implementiert worden. Der Code hierfür befindet sich im Kapitel 8 ab Seite 100.

	AUD	BEF	CHF	DEM	DKK	ESP	FRF
$p$	0,816	0,788	0,640	0,815	0,843	0,761	0,777
$1 - p$	0,184	0,212	0,360	0,185	0,157	0,239	0,223
$u$	0,697	0,727	0,763	0,769	0,752	0,674	0,720
$v$	1,811	1,660	1,320	1,675	1,826	1,656	1,638
$\chi^2$	23,95	22,31	28,92	31,84	24,28	33,88	34,12

	GBP	ITL	JPY	NLG	SEK		All
$p$	0,784	0,790	0,586	0,843	0,744		0,792
$1 - p$	0,216	0,210	0,414	0,157	0,256		0,208
$u$	0,737	0,692	0,546	0,775	0,605		0,718
$v$	1,631	1,720	1,412	1,772	1,685		1,686
$\chi^2$	62,42	36,71	10,61	25,62	31,67		228,62

Tabelle 2: Best-fit Werte von  $p$ ,  $u$  und  $v$  aus der ersten Datenhälfte mit Annahme einer konstanten Varianz

Die folgende Graphik zeigt die geschätzte Verteilungsfunktion mit den Parametern  $p = 0,792$ ,  $u = 0,718$  und  $v = 1,686$  für eine gemeinsame Schätzung aller Währungen im Vergleich zu dem Histogramm der (standardisierten) Returns  $R_t/\sigma$ .

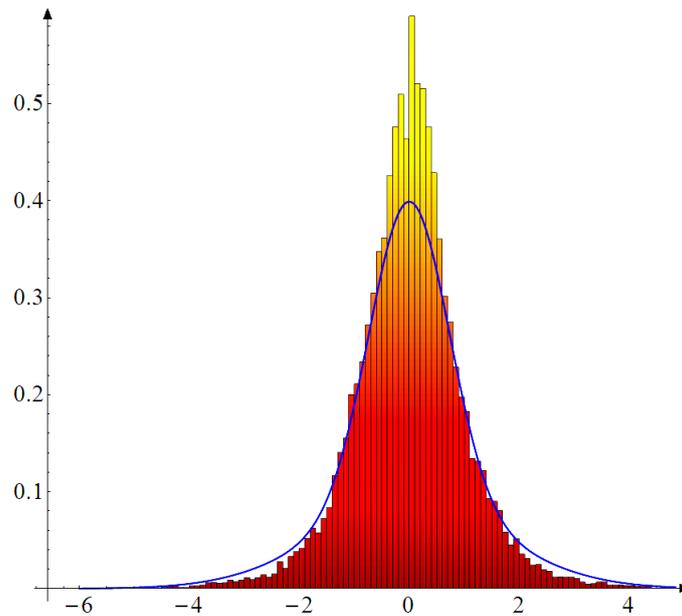


Abbildung 20: Vergleich: Histogramm der Returns und die geschätzte Verteilungsfunktion (für alle Währungen gemeinsam)

Diese besten Anpassungsschätzungen für die Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  werden auf die zweite Hälfte der Daten angewendet. Mit diesen Returns wird ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt, der eine Aussage über die Güte und Qualität der Parameterfindung geben soll. Die  $\chi^2$ -Testgröße ist in den oben angeführten Tabellen in der letzten Zeile einge-

tragen.

Die  $\chi^2$ -Statistik ist durch den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(A_i - E_i)^2}{E_i}$$

gegeben. Dazu werden die Returns wieder in dieselben vier Kategorien wie oben, das heißt, in  $(|R_i| \leq \sigma)$ ,  $(\sigma < |R_i| \leq 2\sigma)$ ,  $(2\sigma < |R_i| \leq 3\sigma)$  und  $(3\sigma < |R_i|)$ , eingeteilt. Hierfür werden nun nur mehr die Returns  $R_i$  für  $i = (M + 1), \dots, T$ , das heißt, die zweite Hälfte der zu Verfügung stehenden Daten, genommen. Die  $A_i$ 's beschreiben die aktuelle Anzahl der Beobachtungen aus der zweiten Hälfte in der  $i$ -ten Kategorie. Die  $E_i$ 's stehen für die erwartete Anzahl an Beobachtungen basierend auf der aus der ersten Hälfte der Returns geschätzten Verteilung

$$G(x) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{x}{u\sigma}\right) + (1 - p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{x}{v\sigma}\right),$$

wobei für jede Währung die entsprechenden Werte für die Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  eingesetzt werden und die folgenden vier  $E_i$ 's

- $E_1 = [G(\sigma) - G(-\sigma)] \cdot M$
- $E_i = [G(i\sigma) - G(-i\sigma) - \sum_{k=1}^{i-1} E_k] \cdot M \quad \text{für } i = 2, 3$
- $E_4 = [1 - (G(3\sigma) - G(-3\sigma))] \cdot M = [1 - \sum_{i=1}^3 E_i] \cdot M$

berechnet werden.

Die  $A_i$ 's sind ebenfalls die absolute Anzahl an Beobachtungen.

Die Prüfgröße der  $\chi^2$ -Statistik ist bei jeder Währung sehr hoch. Weitere Erklärungen zu den Ergebnissen sind im Unterkapitel 4.5.3 aufgelistet, wo auf diesen ersten Fall und auf den folgenden zweiten Fall eingegangen wird.

#### 4.5.2 Zweiter Fall: Varianz nach dem EWMA-Modell

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Maximierung einer Funktion, um die Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  zu finden, jedoch wird im Gegensatz zu dem Unterkapitel 4.5.1 ab Seite 74 von *keiner* konstanten Varianz ausgegangen. Es wird angenommen, dass die Varianz der Daten nach dem EWMA-Modell

$$\sigma_i^2 = \lambda \cdot \sigma_{i-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot R_{i-1}^2$$

mit  $\lambda = 0,94$  verläuft. Es sind für jede Währung  $T = 2420$  Returns  $R_t$  bekannt. Die Verteilungsfunktion  $G_i$  ist weiterhin durch

$$G_i(R_i) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{R_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{R_i}{v\sigma_i}\right).$$

gegeben.

Wie im ersten Fall der konstanten Varianz werden am Anfang die  $\alpha_k$  bestimmt. Hier fließt unter anderem schon die variable Varianz nach dem *EWMA*-Modell ein. Es wird jeder Return  $R_i$  mit der dazugehörigen Standardabweichung  $\sigma_i$  verglichen. Die  $\alpha_k$ 's geben die Proportion der Returns, die in das  $k$ -te Intervall fallen, an. Da die erste Hälfte aus  $M = 1210$  Returns besteht und die  $\alpha_k$ 's nur anhand der ersten Datenhälfte ermittelt werden, sind diese durch

- $\alpha_1 := \frac{\#\{|R_i| \leq \sigma_i\}}{M}$
- $\alpha_2 := \frac{\#\{\sigma_i < |R_i| \leq 2 \cdot \sigma_i\}}{M}$
- $\alpha_3 := \frac{\#\{2 \cdot \sigma_i < |R_i| \leq 3 \cdot \sigma_i\}}{M}$
- $\alpha_4 := \frac{\#\{3 \cdot \sigma_i < |R_i|\}}{M}$

bestimmt. Mit dem Symbol  $\#$  ist die Anzahl der Beobachtungen in dem jeweiligen Intervall gemeint.

Der nächste Schritt ist für diese Methode identisch zu jenem mit konstanter Varianz. Es wird für die Bestimmung der Parameter die beobachtete Proportion  $\alpha_k$  für das  $k$ -te Intervall mit der, für festgesetzte Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  durch die Verteilungsfunktion bestimmten, erwarteten Proportion  $\beta_k$  des  $k$ -ten Intervalls verglichen. Die gesuchten Parameter sind jene Werte, die die Funktion

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \log(\beta_k)$$

maximieren. Ebenfalls werden die  $\beta_k$ 's wieder durch die Verteilungsfunktion  $G_i$  bestimmt. Trotz der Annahme, dass die Varianz nicht konstant ist, gelangt man zu der analogen Gestalt für diese Variablen. Es gilt

- $\beta_1 := G_i(\sigma_i) - G_i(-\sigma_i)$
- $\beta_k := G_i(k\sigma_i) - G_i(-k\sigma_i) - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \quad \text{für } k = 2, 3$

$$\bullet \beta_4 := 1 - [G_i(3\sigma) - G_i(-3\sigma)] = 1 - \sum_{i=1}^3 \beta_i$$

und man erkennt, dass die Funktion  $G_i$  unabhängig von den  $\sigma_i$ 's sind, da diese durch Kürzen wegfallen. Als Beispiel betrachte man die Darstellung für  $\beta_2$ , die durch

$$\begin{aligned} \beta_2 &= G_i(2\sigma_i) - G_i(-2\sigma_i) - \sum_{j=1}^{2-1} \beta_j \\ &= p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{2\sigma_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{2\sigma_i}{v\sigma_i}\right) - [p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{-2\sigma_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{-2\sigma_i}{v\sigma_i}\right)] - \beta_1 \end{aligned}$$

gegeben ist und nicht von der variablen Varianz abhängt. Analoge Vorgehensweise gilt auch für die Berechnungen der anderen  $\beta_k$ 's.

Die folgende Tabelle zeigt die Parameter für jede Währung sowie gesamt für alle Währungen, die durch diese Prozedur erhalten werden. Die Berechnung wird wiederum in dem Programm MATHEMATICA implementiert. Der Code hierfür befindet sich im Anschluss an jenen für den Fall der konstanten Varianz im Kapitel 8 ab Seite 100.

	AUD	BEF	CHF	DEM	DKK	ESP	FRF
$p$	0,775	0,694	0,643	0,786	0,678	0,682	0,650
$1-p$	0,225	0,306	0,357	0,214	0,322	0,318	0,350
$u$	0,753	0,734	0,754	0,794	0,702	0,696	0,707
$v$	1,580	1,430	1,333	1,536	1,438	1,451	1,388
$\chi^2$	5,57	1,80	3,93	9,79	4,88	4,50	4,75

	GBP	ITL	JPY	NLG	SEK		All
$p$	0,459	0,660	0,627	0,792	0,704		0,683
$1-p$	0,541	0,340	0,373	0,208	0,296		0,317
$u$	0,545	0,711	0,613	0,788	0,711		0,716
$v$	1,264	1,400	1,432	1,562	1,475		1,431
$\chi^2$	16,34	3,65	5,23	9,11	8,94		33,65

Tabelle 3: Best-fit Werte von  $p$ ,  $u$  und  $v$  aus der ersten Datenhälfte mit Verwendung des EWMA-Modells

Wie schon bei der Variante mit konstanter Varianz lässt sich eine anschauliche Graphik für die Anpassung der Daten durch die geschätzte Verteilungsfunktion abbilden. Die folgende Graphik zeigt diese geschätzte Verteilungsfunktion mit den Parametern  $p = 0,792$ ,  $u = 0,718$  und  $v = 1,686$  für eine Schätzung aller Währungen gemeinsam im Vergleich zu dem Histogramm der (standardisierten) Returns  $R_t/\sigma_t$  mit der

Annahme, dass die Varianz nach einem *EWMA*-Prozess modelliert ist und somit für jeden Return  $R_t$  eine dazugehörige eigene Standardabweichung existiert.

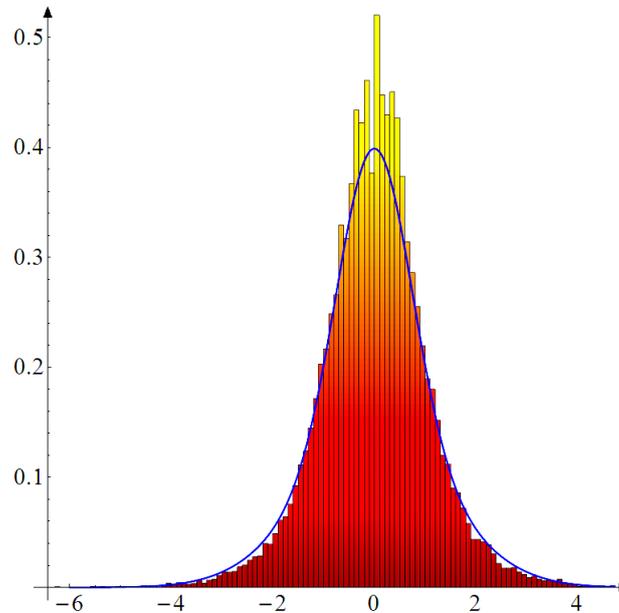


Abbildung 21: Vergleich: Histogramm der Returns im Vergleich zu der geschätzten Verteilungsfunktion (für alle Währungen gemeinsam)

Analog zu der Variante mit konstanter Varianz wird mit den Returns aus der zweiten Hälfte der Daten ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt, der eine Aussage über die Güte und Qualität der Parameterfindung geben soll. Die soeben geschätzten Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  werden für jede Währung einzeln in die Funktion  $G_i$  eingesetzt und die Werte für prophezeite Anzahl an Beobachtungen in einer vorgegebenen Kategorie bestimmt. Die  $\chi^2$ -Testgröße ist in der oben angeführten Tabellen in der letzten Zeile eingetragen.

Die  $\chi^2$ -Statistik ist, gleich wie im Falle einer konstanten Varianz, mit

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(A_i - E_i)^2}{E_i},$$

gegeben. Dazu werden die Returns wieder in dieselben vier Kategorien wie oben, das heißt in  $(|R_i| \leq \sigma_i)$ ,  $(\sigma_i < |R_i| \leq 2\sigma_i)$ ,  $(2\sigma_i < |R_i| \leq 3\sigma_i)$  und  $(3\sigma_i < |R_i|)$ , eingeteilt. Es wird wieder ein bestimmter Return  $R_t$  mit der dazugehörigen Standardabweichung  $\sigma_t$  verglichen, da die Standardabweichungen aus dem *EWMA*-Modell verwendet werden und somit variabel sind. Dazu werden ebenfalls nur die Returns  $R_i$  der zweiten Datenhälfte, also für  $i = (M + 1), \dots, T$ , genommen. Mit den  $A_i$ 's

wird die Anzahl der Beobachtungen aus der zweiten Hälfte in der  $i$ -ten Kategorie beschrieben. Die  $E_i$ 's sind die erwartete Anzahl an Beobachtungen basierend auf der aus der ersten Hälfte der Returns geschätzten Verteilung

$$G_i(R_i) = p \cdot \mathcal{N}\left(\frac{R_i}{u\sigma_i}\right) + (1-p) \cdot \mathcal{N}\left(\frac{R_i}{v\sigma_i}\right),$$

wobei für jede Währung die entsprechenden Werte für die Parameter  $p$ ,  $u$  und  $v$  aus der Tabelle eingesetzt werden. Die vier  $E_i$ 's können durch die folgenden Formeln

- $E_1 = [G_i(\sigma_i) - G_i(-\sigma_i)] \cdot M$
- $E_k = [G_i(k\sigma_i) - G_i(-k\sigma_i) - \sum_{j=1}^{k-1} E_j] \cdot M \quad \text{für } k = 2, 3$
- $E_4 = [1 - (G_i(3\sigma_i) - G_i(-3\sigma_i))] \cdot M = [1 - \sum_{i=j}^3 E_j] \cdot M$

ermittelt werden. Auch hier fallen die  $\sigma_i$  bei der Berechnung innerhalb der Funktion  $G_i$  weg.

Da die  $A_i$ 's die absolute Anzahl an Beobachtungen sind, werden die  $E_i$ 's mit der Anzahl an Returns aus der zweiten Hälfte multipliziert, um ebenfalls auf eine absolute Anzahl zu kommen.

Die Prüfgröße der  $\chi^2$ -Statistik ist bei jeder Währung (im Vergleich zu der Variante mit der konstanten Varianz) niedrig.

### 4.5.3 Resultat der Implementierung

Die  $\chi^2$ -Prüfgröße unterscheidet sich stark zwischen den beiden Methoden. Die schlechten Ergebnisse im ersten Fall, bei dem eine konstante Varianz angenommen wird, sind ein Resultat der Tatsache, dass bedeutende Änderungen in den Schwankungen zwischen der ersten Hälfte und der zweiten Hälfte der Währungsdaten auftreten. Es sei bemerkt, würde man eine  $\chi^2$ -Statistik basierend auf einer Schwankung, die aus der zweiten Hälfte der Returns (anstatt aus der ersten Hälfte) geschätzt wird, ermitteln, so würde das Modell gut funktionieren.

Die beiden folgenden Graphiken bilden die Verteilungsfunktion mit den geschätzten Parametern  $p$ ,  $u$  und  $v$  ab, wobei die linke Graphik von einem Modell mit konstanter Varianz und die rechte Graphik von einem Modell mit einer Varianz nach dem *EWMA*-Prozess ausgeht. Die Graphik zeigt eine Schätzung für eine einzelne Währung am Beispiel der Deutschen Mark.

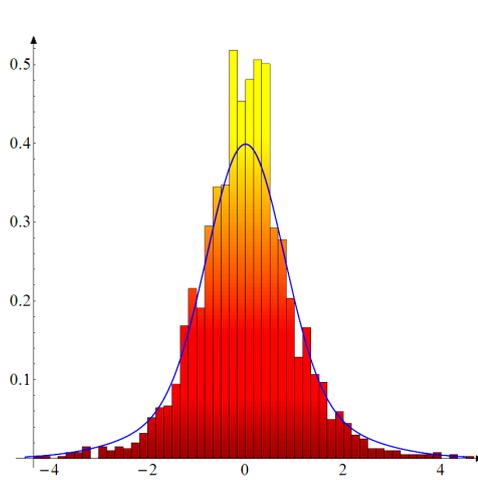
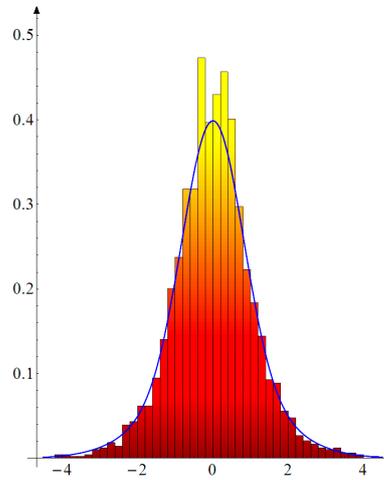


Abbildung 22: Konstante Varianz

Abbildung 23: *EWMA*-Varianz

Testet man dieses Modell auf Gültigkeit und auf die geschätzten Parameter für eine einzelne Währung, so kann das Modell mit 95%-iger Sicherheit abgelehnt werden, wenn die  $\chi^2$ -Prüfgröße aus den Tabellen größer als 7,8 ist und mit 97,5%-iger Sicherheit, wenn die Größe den Wert 9,35 übersteigt. Versucht man jedoch die Verteilung aller Währungen gemeinsam anzupassen, so kann das Modell mit einer Sicherheit von 95% verworfen werden, wenn die  $\chi^2$ -Statistik einen Wert höher als 51 beträgt.

Die Tabelle 3 auf Seite 79 geht von der Annahme aus, dass die Varianz nach dem *EWMA*-Modell verläuft und somit nicht konstant ist. Die angeführten  $\chi^2$ -Prüfgrößen zeigen, dass eine Ablehnung zu 95% nur bei vier Währungen vorliegt. Bei der gemeinsamen Schätzung aller Währungen errechnet sich ein  $\chi^2$ -Wert von 33,65, wodurch die Hypothese, dass die Returns einer gemischten Normalverteilung mit den angegebenen Werte für  $p$ ,  $u$  und  $v$  folgen, mit 95%-iger Sicherheit nicht verworfen wird.

Die Summe der Prüfgrößen der  $\chi^2$ -Statistik für die individuellen Währungsmodelle beträgt 78,94. Dies impliziert, dass man mit 95%-iger Sicherheit die Hypothese, dass das *EWMA*-Modell mit unterschiedlichen Werte für  $p$ ,  $u$  und  $v$  für jede Währung korrekt ist, ablehnen wird.

Daraus lässt sich schließen, dass diese Analyse eine Anpassung mittels *EWMA*-Modell für gemeinsame Werte  $p$ ,  $u$  und  $v$  der Währungen für sicherer hält, als für jede Währung gesondert betrachtet. Die Anpassung der Parameter aus den Returns der ersten Datenhälfte ist möglicherweise schlechter, wenn man davon ausgeht, dass die Parameter für jede Währung dieselben sind. Jedoch stimmt die Anpassung an die zweite Datenhälfte in dieser Annahme viel besser überein. Der Grund darin liegt, dass die Parameter für eine einzelne Währung im Vergleich zu gemeinsamen Parametern nicht unbedingt besonders stabil sein müssen.

## 4.6 Konklusion des Kapitels

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie die übliche Annahme der multivariaten Normalverteilung in der Berechnung des Value-at-Risks durch eine Transformation in eine multivariate Normalverteilung ersetzt werden kann.

Als Beispiel wurde eine gemischte Normalverteilung angenommen, die für Daten von 12 Währungen untersucht wurde.

Dieses neue Modell besitzt den Vorteil, dass dritte, vierte oder noch höhere Momente der Returns in der Berechnung des Value-at-Risks eingebracht werden.

Steht "RiskMetrics" oder eine ähnliche Datenbank zu Verfügung, so bietet der besprochene Ansatz eine relativ einfache Verwendung dieser Datenbanken für die Berechnung des Value-at-Risks.

Quantile aus einer bekannten Verteilung, wie zum Beispiel in diesem Fall einer gemischten Normalverteilung, lassen sich sehr oft als geschlossene Formen ausdrücken beziehungsweise in einer Durchrechnung mit einer Normalverteilung aus Tabellen ablesen. Durch die angesetzte "Quantil-zu-Quantil"-Transformation stimmen die Quantile der Datenbank mit jenen der geschätzten Verteilung überein und sind somit leicht bestimmbar.

## 5 Ein Ausblick: Ein weiterer Modellvorschlag für die Value-at-Risk Berechnung

Als Abschluss wird noch eine weitere Methode im Hinblick auf den Value-at-Risk vorgestellt. Dieser Ansatz wurde in [1] und [2] veröffentlicht.

Im August 1998 haben Giovanni Barone-Adesi, Frederick Bourgoïn und Kostas Giannopoulos einen Kurzaufsatz *"Don't look back"* in der Zeitschrift *Risk* veröffentlicht, der sich ebenfalls mit einem Ansatz für die Ermittlung des Value-at-Risk in Verbindung mit der historischen Simulation beschäftigt.

Ihr Ansatz und ihre Überlegungen werden in dieser Arbeit noch kurz erläutert und bringen möglicherweise Motivation für weitere Literatursuche nach verschiedenen Methoden in Bezug auf den Value-at-Risk im Risikomanagement und Finanzbereich.

Der Value-at-Risk wird als Kontroll- und Aufsichtswerkzeug immer populärer. Bevor sich jedoch die Akzeptanz und Verwendung dieses Instruments für den Risikobereich stärker verbreitet, muss vorerst die Verlässlichkeit dieses Mittels im Finanzbereich geprüft werden.

Die meisten Value-at-Risk Modelle beschäftigen sich entweder mit der Annahme, dass die Returns keiner Normalverteilung folgen, oder, dass eine bedingte Heteroskedastizität existiert, jedoch selten mit beiden gleichzeitig. Unter einer Heteroskedastizität – auch Varianzheterogenität genannt – versteht man eine unterschiedliche Streuung innerhalb einer Datenmessung. Giovanni Barone-Adesi, Frederick Bourgoïn und Kostas Giannopoulos haben einen modifizierten Ansatz der historischen Simulation entwickelt, der beide Aspekte zulässt.

Die historische Simulation bedient sich einer speziellen Verteilung – meist einer uniformen Verteilung oder der Normalverteilung – um Returns aus der Vergangenheit zu wählen. Diese Returns werden auf die derzeitigen Assetpreise angewendet, um schlussendlich zukünftige Returns zu simulieren. Sobald genügend Simulationspfade gefunden worden sind, kann eine Value-at-Risk Berechnung des Portfolios vollzogen werden, ohne dass eine willkürliche Annahme über die Verteilung der Returns getroffen worden ist. Diese Möglichkeit ist vor allem bei Portfolios mit außergewöhnlich großen Returns hilfreich.

Es wird ein Modell verfolgt, bei dem die Änderungen der Assetpreise von den derzeitigen Schwankungen der Assets abhängen. Die Schwankung wird so simuliert, dass sie von den kürzlich auftretenden Returns des Portfolios abhängt. Diese Simulation basiert auf der Kombination eines (parametrischen) *GARCH* Modells und (nicht-parametrischen) historischen Returns. Diese historischen Returns werden an die aktuellen Marktbedingungen angepasst, indem sie durch das Verhältnis von der derzei-

tigen und der bedingten vergangenen Schwankung skaliert werden. Diese skalierten Returns bilden den Ausgangspunkt für die Simulation.

Es ist bekannt, dass große Returns häufig hintereinander auftreten. Die daraus resultierende Schwankung der täglichen Volatilität macht manche Konfidenzlevel der Value-at-Risk Berechnung unverlässlich. Value-at-Risk Messungen, die die Clustering von großen Returns ignorieren, sind zum Beispiel die Berechnung mittels der Varianz-Kovarianz-Methode oder der Monte Carlo Methode. Die Verwendung der Varianz-Kovarianz-Methode oder die willkürliche Annahme einer Verteilung in der Monte Carlo Methode zerstören üblicherweise nützliche Informationen über die Verteilung der Returns eines Portfolios.

Clustering in Zusammenhang mit der Value-at-Risk Berechnung bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eines gewissen Verlusts für jeden Tag unterschiedlich ist. An Tagen mit hoher Schwankung werden vielmehr größere Verluste anstatt "gewöhnliche" Verluste erwartet.

Um die historische Simulation einheitlich mit der Clustering der außergewöhnlich großen Returns zu gestalten, wird die Schwankung des Portfolios mittels eines asymmetrischen *GARCH*-Prozesses modelliert. Dieses Modell lässt positive sowie auch negative Returns zu und hat somit unterschiedlichen Einfluss auf die Schwankung. Mit einer Division der Returns aus der Vergangenheit durch die (für den gleichen Tag) aus dem *GARCH*-Modell erhaltenen Schwankungen erhält man ein standardisiertes Portfolio. Diese standardisierten Returns sind dann unabhängig und identisch verteilt. Sie eignen sich für die historische Simulation.

Um diese an die aktuellen Marktbedingungen anzupassen, werden sie mit der Vorhersage aus dem *GARCH*-Modell für die morgige Schwankung multipliziert.

Auf diese Art und Weise wird ein simulierter Portfolio-Return für den morgigen Tag erhalten. Dieser simulierte Return wird wiederum für das Update der *GARCH*-Vorhersage für den folgenden Tag verwendet, welcher dann mit einer neuen standardisierten Schwankung multipliziert wird, um den simulierten Return für den zweiten Tag zu bekommen. Dieses rekursive Prozedere wird solange wiederholt, bis der Value-at-Risk Horizont (zum Beispiel von 10 Tagen) erreicht ist. Die Prozedur wird mehrmals wiederholt, um eine Vielzahl an Stichprobenpfade für die Returns zu erschaffen. Des Weiteren kann aus der empirischen Verteilung ein Konfidenzband gebildet werden, wobei der unterste 1%-Bereich den "Worst Case" über die nächsten 10 Tage identifiziert.

## 5.1 Die Simulation eines Pfades

Bei dieser Simulation wird von keiner theoretischen Verteilung der Daten ausgegangen, sondern nur die empirische (historische) Verteilung der Returns herangezogen. Diese "rohen" Returns können jedoch für keine Simulation verwendet werden, sofern sie nicht unabhängig und identisch verteilt sind. Eine Möglichkeit, um solche unabhängige und identisch verteilten Returns zu erhalten, ist der Einsatz eines *GARCH*-Modells.

G. Barone-Adesi, F. Bourgoïn und K. Giannopoulos modellieren die Portfolio>Returns  $\{R_t\}_{t \geq 1}$  durch einen *GARCH*-Prozess mit Asymmetrien und mit einer täglichen Schwankung  $\{h_t\}_{t \geq 1}$ , der durch

$$\begin{aligned} (1) \quad R_t &= \mu + \varepsilon_t \\ (2) \quad h_t &= \omega + \alpha \cdot (\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta \cdot h_{t-1} \end{aligned}$$

gegeben ist.

Die Varianz kleiner Inkremente kann als

$$h_t^2 = c_t^2 \Delta t = O(\Delta t)$$

geschrieben werden.

Der tägliche Return aus der Gleichung (1) ist die Summe des erwarteten Wertes  $\mu$ , plus eines zufälligen Residuums  $\varepsilon_t$ . Aufgrund des kleinen und statistisch unbedeutenden Wertes von  $\mu^2$  wird dieser Term in der Berechnung der täglichen Schwankung vernachlässigt.

Die Gleichung (2) definiert die Schwankung von  $\varepsilon_t$  als einen asymmetrischen *GARCH*-Prozess.  $h_t$  ist die Summe einer Konstante  $\omega$ , plus zweier Terme, die den Anteil des letzten "Surprise"  $\varepsilon_{t-1}$  und die Schwankung der letzten Periode  $h_{t-1}$  widerspiegeln. Die Variable  $\gamma$  berücksichtigt die Reaktion, die aufgrund des Updates der Schwankung auftritt und stellt eine statistisch signifikante Größe dar.

Das heißt, die Schwankung des Portfolios ist derart modelliert, dass sie von den erst kürzlich beobachteten Returns abhängt. Die Kombination einer asymmetrischen *GARCH*-Schwankung und historischen Returns aus dem Portfolio bietet eine schnelle und exakte Messung der Schwankung aus der Vergangenheit, aus der Gegenwart und der zukünftigen Schwankung des aktuellen Portfolios.

Diese Methode führt zu wenig "unerwünschten Überraschungen", da die Modellierung durch einen solchen *GARCH*-Prozess einen dicken Schwanz, (engl. "Heavy Tails"), für die unbedingte Verteilung der Daten zulässt. Die Effekte dieses Ansatzes werden erkennbar, wenn man die gewöhnlichen Returns mit den durch die tägliche Schwan-

kungen skalierten Returns

$$z_t = \frac{R_t}{\sqrt{h_t}} \quad (5)$$

vergleicht. Durch diese Skalierung erhält man einerseits eine robuste Verteilung und andererseits unabhängig und identisch verteilte Returns, die sich für eine Simulation anbieten.

Die für gewöhnlich auftretende Clusterung von Returns wird damit stark reduziert, sodass die Verteilung der Returns nun gleichmäßiger und die historische Simulation angemessener erscheint. Die Tatsache, dass es trotzdem noch eine große Anzahl an Returns gibt, die weiterhin die dreifache Standardabweichung übertreffen, weist darauf hin, dass durch die Skalierung nicht zu normalverteilten Returns übergegangen wird.

Für die Simulation von Returns eines Portfolios für die nächsten 10 Tage werden zufällig 10 Returns, beziehungsweise ein "Streifen" von 10 Returns, mittels einer "Bootstrap"-Methode von Efron & Tibshirani<sup>5</sup> gewählt. Weiters wird iterativ die tägliche Schwankung durch das vorgestellte asymmetrische *GARCH*-Modell konstruiert. Diese Schwankungen werden dann zur Skalierung der gewählten Returns verwendet. Die resultierenden Returns spiegeln dadurch die derzeitigen Marktbedingungen anstatt der historischen Bedingungen wider. In anderen Worten bedeutet dies:

1. Es werden zukünftige standardisierte Residuum-Returns  $\varepsilon_i^*$  durch einen zufälligen Vektor  $\Theta$

$$\Theta = \{R_1, R_2, \dots, R_T\}$$

von Ergebnissen einer stationären Verteilung simuliert, wobei  $i$  die Anzahl der Tage ist, das heißt,  $i = 1, \dots, 10$ . Diese möglichen Ergebnisse der stationären Verteilung entsprechen den historischen Residuen, die durch die dazugehörigen täglichen Schwankungen standardisiert sind. Für jedes  $\varepsilon_i^*$  wird zufällig ein Wert aus dem Vektor  $\Theta$  ausgewählt.

2. Um die (simulierten) Werte für die Vorhersagen für die Perioden  $t+i$  zu erhalten, werden die Returns von den Daten  $\Theta$  gewählt und mit der entsprechenden Schwankung skaliert. Das heißt, die aktuellen simulierten Returns sind durch

$$r_{t+i}^* = \varepsilon_{t+i}^* \cdot \sqrt{h_{t+i}^*}$$

gegeben. Dabei ist  $h_{t+i}^*$  die (simulierte) Schwankungsschätzung, die durch

$$h_{t+i}^* = \omega + \alpha \cdot (\varepsilon_{t+i-1}^* + \gamma)^2 + \beta \cdot h_{t+i-1}^*$$

<sup>5</sup> Bradley Efron und Robert J. Tibshirani: An Introduction to the Bootstrap, 1994

erhalten wird. Für  $\varepsilon_{t+i}^*$  gilt die Gleichung

$$\varepsilon_{t+i}^* = z_t \cdot \sqrt{h_{t+i-1}^*}.$$

$z_t$  ist ein standardisierte Rediduum und wird wie in Gleichung (5) ermittelt, jedoch nun erneut skaliert, um das derzeitige Marktrisiko zu berücksichtigen.

Um die Verteilung von den entwickelten Assetpreisen am Ende des Weges (zum Beispiel für  $i = 10$ ) für ein Asset zu erhalten, muss das beschriebene Prozedere sehr oft wiederholt werden. Dabei ist von Wiederholungen in der Höhe von  $N = 10000$  die Rede.

## 5.2 Die Simulation mehrerer Pfade

Für die Risikoschätzung eines Portfolios, bestehend aus mehreren Assets, benötigt man die multivariate Verteilung der Assetreturns. Methoden, die dabei die Korrelationsmatrix der Assetreturns heranziehen, bringen immer wieder verschiedene Probleme mit sich. Die Verwendung von bedingten multivariaten ökonomischen Modellen, die berücksichtigen, dass sich Korrelationen im Laufe der Zeit verändern können, ist auf eine kleine Anzahl beschränkt. Die Dateninputs in der Korrelationsmatrix wachsen quadratisch mit der Anzahl an Assets in dem Portfolio, das bedeutet, für große Portfolios wird die Anzahl an paarweisen Korrelationen schon unkontrollierbar.

Die Schätzung des Value-at-Risk aufgrund einer Korrelationsmatrix verlangt das Wissen jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung von jedem Asset. Empirische Verteilungen gehen notwendigerweise nicht immer mit einer bekannten Verteilung konform. Value-at-Risk Berechnungen, die auf einer Annahme einer willkürlichen Verteilung basieren, sind oftmals unverlässlich.

Der hier besprochene Ansatz geht von keiner Korrelationsmatrix aus. Für ein Portfolio aus mehreren Assets wird die Methode aus Unterkapitel 5.1 erweitert. Es wird ein zufälliger Zeitpunkt aus der Datenmenge gewählt, der eine dazugehörige Menge an unabhängig und identisch verteilten Returns für jedes Asset besitzt. Dieser "Streifen" an unabhängigen und identischen Returns aus der Vergangenheit ist eine Stichprobe, die den Ausgangspunkt für die Modellierung der Bewegungen in den Assets beziehungsweise in den Assetpreisen darstellt.

Das heißt, für jedes Asset und für die gewählten Tage  $i = 1, \dots, 10$  gibt es die erzeugten standardisierten Residuen  $\varepsilon_{j,i}^*$  ( $j$  steht für die verschiedenen Assets) und den zufälligen Vektor  $\Theta_j$

- Asset 1: standardisiertes Residuum  $\varepsilon_{1,i}^*$  und  $\Theta_1 = \{R_1, R_2, \dots, R_T\}_1$

- Asset 2: standardisiertes Residuum  $\varepsilon_{2,i}^*$  und  $\Theta_2 = \{R_1, R_2, \dots, R_T\}_2$
- Asset 3: standardisiertes Residuum  $\varepsilon_{3,i}^*$  und  $\Theta_3 = \{R_1, R_2, \dots, R_T\}_3$
- ...

Ausgehend von diesen Vektoren werden die Assetbewegungen für jedes Asset analog zu der Methode aus Unterkapitel 5.1 ermittelt.

### 5.3 Bemerkungen zu dieser Methode

Es ist wenig überraschend, dass die auf diese Weise simulierten Returns beinahe normalverteilt sind. Die Verteilungskurve der Returns hat in der Darstellung lediglich eine steilere Spitze um den Wert Null und bietet mehr Masse in den Enden, das heißt, sie weist ein wenig dickere Enden vor. Die generelle Form dieser Verteilungsfunktion unterstützt die Gültigkeit beziehungsweise die Bedeutung an der üblichen Messung des Value-at-Risks.

Eine genauere Analyse des simulierten Returns zeigt jedoch, dass ein Portfolio trotzdem symbolische von einer Normalverteilung abweicht. Der Grund dafür liegt in den Änderungen in der Schwankung des Portfolios und somit in dem Value-at-Risk Wert des Portfolios. Der Value-at-Risk hängt von den zufälligen Returns, die bei den Simulationen gewählt werden, ab. Eine Abbildung, in der man den Value-at-Risk in Prozent des Portfolios darstellt, besitzt eine Form, die eine deutliche Schiefe nach rechts aufweist und somit darauf hinweist, dass große Returns zeitlich gehäuft auftreten. Diese Clusterung bietet die Grundlage für eine realistische "Worst-Case"-Szenario Analyse, die der historischen Erfahrung ähnelt.

Um zu sehen, wie ein solches "Worst-Case"-Szenario definiert ist und wie es verteilt sein kann, betrachte man weiterführende Literatur.

Die in diesem Kapitel besprochene Simulationsmethode berücksichtigt schnelle Bewertungen des Value-at-Risks und "Worst-Case"-Szenarien für große Portfolios. Es lässt die derzeitigen Marktbedingungen *nicht* außer Acht und hängt weder von dem Wissen einer Korrelationsmatrix, noch von dem Wissen einer bedingten Verteilung ab. Die Methode ist direkt auf die Returns, die als bedingter heteroskedastischer Prozess modelliert werden können, anzuwenden.

## 6 Konklusion

In diesem Kapitel wird eine kurze Zusammenfassung über die in der Diplomarbeit bearbeiteten Themen gegeben und einige persönliche Eindrücke, die ich während des Schreibens gewonnen habe, geschildert.

Die grundsätzliche Reihenfolge bei der Darstellung der Methoden war anhand des Kapitels 2 dem Leser/der Leserin eine ausführliche, jedoch nicht allzu schwierige, Einführung in jene mathematischen Bereiche zu vermitteln, die für die verschiedenen Ansätze relevant sind.

Ich habe mich stets bemüht, relativ wenig an speziellem Wissen über Finanzmathematik und Risikoanalyse, die statistischen und stochastischen Gebiete der Mathematik, sowie über die numerische Anwendung vorauszusetzen.

Dennoch habe ich versucht, die Formulierungen der Aussagen auf den Punkt zu bringen und präzise zu gestalten, um auf erfahrene (Finanz-)Theoretiker und Risikomanager nicht zu langweilen.

Nachdem das notwendige Vorwissen erarbeitet wurde, richtete ich den Fokus auf die genaue Funktionsweise der Methoden. Da für jeden Ansatz verschiedenste Ausgangspunkte und Ziele verfolgt wurden, sind diese der speziellste Teil und ein Schlüsselpunkt zum Verständnis der einzelnen Methoden. Durch die Angabe des Programmiercodes der Algorithmen sollte die genaue Abfolge der Arbeitsschritte übersichtlich zusammengefasst werden. Um diese genaue Reihenfolge auf eine weniger abstrakte Weise zu verdeutlichen, wurden die verschiedenen Modelle anhand von Beispielen vorgeführt und dokumentiert.

Nach einer kurzen Einleitung im Kapitel 1, die einerseits als Motivation dieser Arbeit gedacht ist und andererseits einen Ausgangspunkt für die Existenz der Modelle näher liefert, wurde im Kapitel 2 die Hintergrundtheorie diskutiert. Diese behandelt alle wesentliche Begriffe, angefangen von der Definition von Verlusten beziehungsweise von Verlustfunktionen, der Darstellung der Risikomessung, die Definition und weiterführende Ausblicke (wie zum Beispiel die Berechnung) des Begriffs "Value-at-Risk", bis hin zu Zeitreihenmodellen und numerischen Berechnungsmethoden.

Im Kapitel 3 widmete ich mich drei verschiedener Modellen für die Ermittlung des Value-at-Risk anhand historischer Daten. Diese Ansätze verarbeiten ein und dieselbe Datenbank mit unterschiedlichen Annahmen und stellen somit jeweils andere Aspekte in den Vordergrund.

Die historische Simulation verwendet Daten ohne jegliche Bearbeitung und bedient sich nur historischer Aufzeichnungen, um eine Risikoanalyse zu erstellen.

Der Ansatz von Hull & White vertritt den Standpunkt einer variablen Varianz über die gesamte Laufzeit, die am besten durch einen Zeitreihenprozess modelliert wird. Dadurch werden die historischen Daten standardisiert und aktuelle Marktbedingungen stärker berücksichtigt. Aufgrund dieser Daten wird dann die Risikomessung angesetzt.

Die dritte Methode, der Ansatz von Boudoukh, Richardson & Whitelaw, gewichtet die Daten nach zeitlichem Auftreten. Es werden die letzten Geschehnisse bevorzugt und verstärkt, ehe dann die weiteren Berechnungen erfolgen.

Als Ausgangslage für den Vergleich der Methoden wurden die "Tail-Events" der einzelnen Ansätze untersucht. Diese sind für jeden Ansatz leicht bestimmbar und können somit für den Vergleich herangezogen werden.

Es wurde ebenfalls eine Modifikation dieser Ansätze vorgestellt, indem man eine weitere Anpassung der Daten mithilfe der durchschnittlichen täglichen Änderung der Daten durchführte.

Der Ansatz von Hull & White, sowie die Methode von Boudoukh, Richardson & Whitelaw verfolgten das Ziel einer Verbesserung gegenüber der historischen Simulation.

Die genaue Analyse der Normalverteilung in Zusammenhang mit der Risikomessung von Portfolios, speziell von Wechselkursen, war Inhalt von Kapitel 4. Es wurde ein Modell eingeführt, bei dem der Analytiker die freie Wahl der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt und mittels Transformation auf eine Normalverteilung übergangen wird. Ein Hauptaugenmerk war die Parameteranpassung der angenommenen Verteilung an den ersten Teil der Daten und eine weitere Analyse der Güte und Qualität dieser Anpassung anhand der zweiten Hälfte der Daten.

Das Kapitel 5 stellt den Abschluss der möglichen Ansätze dar. Barone-Adesi, Bourgoin und Giannopoulos entwickelten einen modifizierten Ansatz der historischen Simulation, der einerseits die schlechte Annahme einer Normalverteilung verwirft, andererseits jedoch eine variable Varianz voraussetzt und somit zwei wichtige Aspekte in ein und derselben Modellierung eines Portfolios berücksichtigt.

Mein Interesse bei dem Verfassen der Diplomarbeit galt einerseits den verschiedenen Ausgangspunkten und Voraussetzungen, die von den einzelnen Methoden, die jedoch alle das gleiche Ziel – eine vertrauenswürdige Risikomessung und -analyse – verfolgten, verlangt wurden. Eine mathematische Verbindung einfacher und aufbauender Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie über stochastische Prozesse und Zeitreihenprozesse sowie numerischer Approximationen, wie Monte Carlo und Taylorapproximation, bis hin zu Risikomaßen, wurde für diesen wichtigen Bereich der Finanzmärkte gewonnen.

Andererseits wiederum war es sehr lehrreich, sich mit den Arbeiten von führenden Wissenschaftlern auf diesem sehr wichtigen Gebiet der Risikoanalyse und Risikomesung auseinanderzusetzen. Es ist erstaunlich, wie lange diese Kennzahl, der Value-at-Risk, schon als eines der wichtigsten Instrumente der Risikobestimmung besteht und heutzutage noch immer als ein Standardrisikomaß im Finanzsektor großes Ansehen genießt.

Mittlerweile breitet sich das Konzept des Value-at-Risks auch in Industrie- und Handelsunternehmen für die Quantifizierung bestimmter Risiken aus, und scheint somit ein noch weiter blühendes Risikomaß zu sein.

Abschließend sei noch bemerkt, dass das Implementieren und die numerische Untersuchung und Umsetzung der verschiedenen Ansätze in einer für mich fast neuen Programmiersprache sehr spannend war. Dadurch habe ich aufschlussreiche und faszinierende Resultate erhalten und konnte die Theorie noch besser verstehen und schätzen.

## 7 Appendix A

Der Vollständigkeit halber wird hier im Anhang noch der MATHEMATICA Code der Durchrechnungen aus dem Unterkapitel 3.6.2 ab Seite 48 angeführt. Numerische Resultate finden sich in Kapitel 3.6.2.

### 7.1 Historische Simulation

#### 7.1.1 ohne Mittelwert-Anpassung

##### Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\Historische Simulation\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]]];
l = Length[kurs]
K = 500;
```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

##### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
ListLinePlot[R, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

##### 5%-Value-at-Risk

```
varfuenf = Table[Quantile[Table[R[[j]], {j, i, i + (K - 1)}], 1/20], {i, 1, l - K}];
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

##### 1%-Value-at-Risk

```
vareins = Table[Quantile[Table[R[[j]], {j, i, i + (K - 1)}], 1/100], {i, 1, l - K}];
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

##### Indikatorfunktion für Tail-Events

*Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```
fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, l - K - 1}];
fuenf/(l - K - 1) * 100.
```

*Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)*

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
eins/(1 - K - 1) * 100.
```

### 7.1.2 mit Mittelwert-Anpassung

#### Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\Historische Simulation\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]];
l = Length[kurs]
K = 500;
```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

#### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, 1 - 1}];
ListLinePlot[R, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

```
mean = Table[Mean[Table[R[[j]], {j, i, i + (K - 1)}]], {i, 1, 1 - K}];
```

#### 5%-Value-at-Risk

```
varfuenf =
  = Table[Quantile[Table[R[[j]] - mean[[i]], {j, i, i + (K - 1)}], 1/20], {i, 1, 1 - K}];
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

#### 1%-Value-at-Risk

```
vareins =
  = Table[Quantile[Table[R[[j]] - mean[[i]], {j, i, i + (K - 1)}], 1/100], {i, 1, 1 - K}];
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

#### Indikatorfunktion für Tail-Events

##### *Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```
fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
fuenf/(1 - K - 1) * 100.
```

##### *Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)*

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
```

eins/(1 - K - 1) \* 100.

## 7.2 Hull & White - Methode

### 7.2.1 ohne Mittelwert-Anpassung

#### Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\Hull und White\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]]];
l = Length[kurs]
K = 500;
```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio -> 1/4, ImageSize -> 1000]
```

#### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
ListLinePlot[R, AspectRatio -> 1/4, ImageSize -> 1000]
```

```
Rplot = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, K}];
ListLinePlot[Rplot, AspectRatio -> 1/4, ImageSize -> 1000]
```

#### Rekursion

```
start = Variance[R];
alpha = 0.94;
schwankung = Table[0, {1}];
schwankung[[1]] = start;
```

```
Do [schwankung[[i]] =
    = schwankung[[i - 1]] * alpha + (1 - alpha) * R[[i - 1]]^2, {i, 2, l}]
```

```
hwR = Table [Table [R[[i]]/Sqrt[schwankung[[i]]]*
    *Sqrt[schwankung[[K + k]]], {i, k, k + (K - 1)}], {k, 1, l - K}];
```

```
ListLinePlot[hwR[[1]], AspectRatio -> 1/4, ImageSize -> 1000]
```

#### 5%-Value-at-Risk und 1 %-Value-at-Risk

```
varfuenf = Table[Quantile[hwR[[i]], 1/20], {i, 1, l - K}];
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio -> 1/4, ImageSize -> 1000]
```

```
vareins = Table[Quantile[hwR[[i]], 1/100], {i, 1, 1 - K}];
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Indikatorfunktion für Tail-Events

*Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```
fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
fuenf/(1 - K - 1) * 100.
```

*Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)*

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
eins/(1 - K - 1) * 100.
```

## 7.2.2 mit Mittelwert-Anpassung

### Data Import

```
data = Import ["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\Hull und White -
  Subtraktion\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]];
l = Length[kurs];
K = 500;
```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, 1 - 1}];
ListLinePlot[R, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Rekursion

```
start = Variance[R];
alpha = 0.94;
schwankung = Table[0, {1}];
schwankung[[1]] = start;

Do [schwankung[[i]] =
  = schwankung[[i - 1]] * alpha + (1 - alpha) * R[[i - 1]]^2, {i, 2, 1}]

normal = Table[R[[i]]/Sqrt[schwankung[[i]]], {i, 1, 1 - K}];
```

```
mean = Table[Mean[Table[normal[[j]], {j, i, i + K - 1}], {i, 1, 1 - K}];
```

```
hwR = Table[Table[(R[[i]]/Sqrt[schwankung[[i]]] - mean[[k]])*  
*Sqrt[schwankung[[K + k]]], {i, k, k + K - 1}], {k, 1, 1 - K}];
```

```
ListLinePlot[hwR[[1]], AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### 5%-Value-at-Risk und 1%-Value-at-Risk

```
varfuenf = Table[Quantile[hwR[[i]], 1/20], {i, 1, 1 - K}];
```

```
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

```
vareins = Table[Quantile[hwR[[i]], 1/100], {i, 1, 1 - K}];
```

```
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Indikatorfunktion für Tail-Events

#### *Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```
fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]  
fuenf/(1 - K - 1) * 100.
```

#### *Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)*

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]  
eins/(1 - K - 1) * 100.
```

## 7.3 Boudoukh & Richardson & Whitelaw - Methode

### 7.3.1 ohne Mittelwert-Anpassung

#### Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\BRW\\chf.xls"];
```

```
kurs = Transpose[data[[1]][[2]]];
```

```
l = Length[kurs]
```

```
K = 500;
```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

#### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, 1 - 1}];
```

```
ListLinePlot[R, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Return Anpassung durch Gewichtung

```
lambda = 0.98;
gewichte = Table[(1 - lambda)/(1 - lambda^K) * lambda^(K - i), {i, 1, K}];
```

### 5%-Value-at-Risk

```
Matrix = Table[SortBy[Transpose[{Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1], gewichte}],
  First], {i, 1, 1 - K}];
akk = Table[Table[Sum[Transpose[Matrix[[k]]][[2]][[i]], {i, 1, j}], {j, 1, K}],
  {k, 1, 1 - K}];
stelle5 = Table[Length[Select[akk[[k]], # ≤ 0.05&]], {k, 1, 1 - K}];
Mat5 = Table[Sort[Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1]], {i, 1, 1 - K}];
varfuenf = Table[Mat5[[i]][[stelle5[[i]]]], {i, 1, 1 - K}];
```

```
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### 1%-Value-at-Risk

```
stelle1 = Table[Length[Select[akk[[k]], # ≤ 0.01&]], {k, 1, 1 - K}];
Mat1 = Table[Sort[Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1]], {i, 1, 1 - K}];
vareins = Table[If[stelle1[[i]]==0, Mat1[[i]][[1]],
  Mat1[[i]][[stelle1[[i]]]], {i, 1, 1 - K}];
```

```
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Indikatorfunktion für Tail-Events

*Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```
fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
fuenf/(1 - K - 1) * 100.
```

*Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)*

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
eins/(1 - K - 1) * 100.
```

## 7.3.2 mit Mittelwert-Anpassung

### Data Import

```

data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\BRW- Subtraktion\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]];
l = Length[kurs]
K = 500;

```

```
ListLinePlot[kurs, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Änderungsrate

```

R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
ListLinePlot[R, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]

```

### Return Anpassung durch Gewichtung

```

lambda = 0.98;
gewichte = Table[(1 - lambda)/(1 - lambda^K) * lambda^(K - i), {i, 1, K}];
mean = Table[Plus@@Table[gewichte[[k]] * R[[i + k]], {k, 1, K}], {i, 0, l - K - 1}];

```

### 5%-Value-at-Risk

```

Matrix = Table[SortBy[Transpose[{Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1]
  - mean[[i], gewichte} , First], {i, 1, l - K}];
akk = Table[Table[Sum[Transpose[Matrix[[k]][[2]][[i]], {i, 1, j}], {j, 1, K}],
  {k, 1, l - K}];
stelle5 = Table[Length[Select[akk[[k]], # ≤ 0.05&]], {k, 1, l - K}];
Mat5 = Table[Sort[Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1]] - mean[[i]], {i, 1, l - K}];
varfuenf = Table[Mat5[[i]][[stelle5[[i]]], {i, 1, l - K}];

```

```
ListLinePlot[varfuenf, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### 1%-Value-at-Risk

```

stelle1 = Table[Length[Select[akk[[k]], # ≤ 0.01&]], {k, 1, l - K}];
Mat1 = Table[Sort[Drop[Take[R, K - 1 + i], i - 1]] - mean[[i]], {i, 1, l - K}];
vareins = Table[If[stelle1[[i]]==0, Mat1[[i]][[1]], Mat1[[i]][[stelle1[[i]]]], {i, 1, l - K}];

```

```
ListLinePlot[vareins, AspectRatio → 1/4, ImageSize → 1000]
```

### Indikatorfunktion für Tail-Events

#### *Tail-Events für 5%-VaR (in Prozent)*

```

fuenf = Plus@@Table[If[varfuenf[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, l - K - 1}
fuenf/(l - K - 1) * 100.

```

**Tail-Events für 1%-VaR (in Prozent)**

```
eins = Plus@@Table[If[vareins[[i]] > R[[K + i]], 1, 0], {i, 1, 1 - K - 1}]
eins/(1 - K - 1) * 100.
```

## 8 Appendix B

### 8.1 Abweichungsuntersuchung (im Vergleich zur Standardabweichung)

#### 8.1.1 Annahme: konstante Varianz

Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\ Exchange Rate Moves \\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]]];
l = Length[kurs];
```

Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
```

Berechnug Standardabweichung

```
s = Sqrt[Variance[R]]
```

Vergleich mit 1\*s, 2\*s, ..., 6\*s

```
anzahl = Table[Length[Select[Abs[R], # > i * s&]], {i, 1, 6}];
prozent = anzahl * 100./l
Kurtosis[R] - 3
```

#### 8.1.2 Annahme: Varianz nach dem EWMA-Modell

Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\Exchange R. M. EWMA\\chf.xls"];
```

```
kurs = Transpose[data[[1]][[2]];
l = Length[kurs];
```

### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
```

### Berechnung Standardabweichung durch Rekursion

```
start = Variance[R];
alpha = 0.94;
schwankung = Table[0, {l}];
schwankung[[1]] = start;
Do [schwankung[[i]] = schwankung[[i - 1]] * alpha + (1 - alpha)
    *R[[i - 1]]^2, {i, 2, l}];
s = Sqrt[schwankung];
ret = Table[R[[i]]/Sqrt[schwankung[[i]]], {i, 1, l - 1}];
```

### Vergleich mit 1\*s, 2\*s, ..., 6\*s: e[i] > s[i]

```
anzahl = Table[Plus@@Table[If[Abs[R[[i]]] > j * s[[i]], 1, 0], {i, 1, l - 1}], {j, 1, 6}];
prozent = anzahl * 100./ (l - 1)
Kurtosis[ret] - 3
```

## 8.2 Maximierungsproblem

### 8.2.1 Annahme: konstante Varianz

#### Data Import

```
data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\ Maximierung\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]][[2]];
l = Length[kurs];
```

#### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
m = (l - 1)/2;
R1 = Take[R, m];
```

#### Rekursion für EWMA

std = StandardDeviation[R1];

### Maximierung

#### *ALPHA*

```
alpha1 = Length[Select[R1, Abs[#]<=std&]]
alpha2 = Length[Select[Select[Abs[R1], #<=2 * std&], # > std&]]
alpha3 = Length[Select[Select[Abs[R1], #<=3 * std&], # > 2 * std&]]
alpha4 = Length[Select[R1, Abs[#] > 3 * std&]]
alpha = Join[{alpha1}, {alpha2}, {alpha3}, {alpha4}]/(m * 1.)
```

#### *BETA*

```
G[k_, p_, u_, v_] := p * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(u * std)]
+ (1 - p) * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(v * std)]

beta1[p_, u_, v_] := G[1, p, u, v] - G[-1, p, u, v]
beta2[p_, u_, v_] := G[2, p, u, v] - G[-2, p, u, v] - beta1[p, u, v]
beta3[p_, u_, v_] := G[3, p, u, v] - G[-3, p, u, v] - beta2[p, u, v] - beta1[p, u, v]
beta4[p_, u_, v_] := 1 - beta1[p, u, v] - beta2[p, u, v] - beta3[p, u, v]
beta[p_, u_, v_] := Join[{beta1[p, u, v]}, {beta2[p, u, v]}, {beta3[p, u, v]}, {beta4[p, u, v]}];
```

### Funktion für Maximierung

```
L[p_, u_, v_] = Sum[alpha[[i]] * Log[beta[p, u, v][[i]]], {i, 1, 4}];

sol = FindMaximum[{L[p, u, v], 0 < p < 1 && p * u^2 + (1 - p) * v^2 == 1 &&
  {0 < v && 0 < u && beta4[p, u, v] > 0.001}, {p, 0.85}, {u, 0.78}, {v, 1.77}}]
p * u^2 + (1 - p) * v^2 /. sol[[2]]
```

```
Plot[L[pp, u, v] /. sol[[2]], {pp, 0.1, 0.9}]
Plot[L[p, uu, v] /. sol[[2]], {uu, 0.1, 1.5}]
Plot[L[p, u, vv] /. sol[[2]], {vv, 1.1, 2.5}]
```

```
Join[sol[[2]], {1 - p /. sol[[2]]}]
```

### 2. HÄLFTE DER DATEN

R2 = Drop[R, m];

#### *GAMMA*

```
gamma1 = Length[Select[R2, Abs[#]<=std&]]
```

```

gamma2 = Length[Select[Select[Abs[R2], #<=2 * std&], # > std&]]
gamma3 = Length[Select[Select[Abs[R2], #<=3 * std&], # > 2 * std&]]
gamma4 = Length[Select[R2, Abs[#] > 3 * std&]]
gamma = Join[{gamma1}, {gamma2}, {gamma3}, {gamma4}]

```

### *DELTA*

```

G[k_, p_, u_, v_] := p * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(u * std)]
  + (1 - p) * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(v * std)]/.sol[[2]];

delta1[p_, u_, v_] = G[1, p, u, v] - G[-1, p, u, v]/.sol[[2]];
delta2[p_, u_, v_] = G[2, p, u, v] - G[-2, p, u, v] - delta1[p, u, v]/.sol[[2]];
delta3[p_, u_, v_] = G[3, p, u, v] - G[-3, p, u, v] - delta2[p, u, v]
  - delta1[p, u, v]/.sol[[2]];
delta4[p_, u_, v_] = 1 - delta1[p, u, v] - delta2[p, u, v] - delta3[p, u, v]/.sol[[2]];
delta = Join[{delta1[p, u, v] * m}, {delta2[p, u, v] * m}, {delta3[p, u, v] * m},
  {delta4[p, u, v] * m}]/.sol[[2]]

```

### CHI<sup>2</sup> - Statistik

```

T = Sum[(gamma[[i]] - delta[[i]])^2/delta[[i]], {i, 1, 4}]

```

### Histogramm und Verteilungsfunktion

```

stdall = StandardDeviation[R];

p1 = Plot[p * PDF[NormalDistribution[0, 1], x/u] + (1 - p)
  * PDF[NormalDistribution[0, 1], x/v]/.sol[[2]], {x, -4.5, 4.5},
  AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 700, PlotStyle -> {Directive[Blue, Thick]};

p2 = Histogram [R/stdall, Automatic, "ProbabilityDensity", AspectRatio -> 1.0,
  ImageSize -> 500, ChartElementFunction -> ChartElementDataFunction [
  "SegmentScaleRectangle", "Segments" -> 100, "ColorScheme" -> "SolarColors"];

Show[p2, p1]

```

## 8.2.2 Annahme: Varianz nach dem EWMA-Modell

### Data Import

```

data = Import["C:\\Desktop\\Diplomarbeit\\ Maximierung\\chf.xls"];
kurs = Transpose[data[[1]]][[2]];

```

```
l = Length[kurs];
```

### Änderungsrate

```
R = Table[(kurs[[i + 1]] - kurs[[i]])/kurs[[i]], {i, 1, l - 1}];
```

```
m = (l - 1)/2;
```

```
R1 = Take[R, m];
```

### Rekursion für EWMA

```
start = Variance[R1];
```

```
lambda = 0.94;
```

```
schwankung = Table[0, {m + 1}];
```

```
schwankung[[1]] = start;
```

```
Do [schwankung[[i]] = schwankung[[i - 1]] * lambda + (1 - lambda)
    * R1[[i - 1]]^2, {i, 2, m + 1}]
```

```
s = Sqrt[schwankung];
```

```
std = StandardDeviation[R1];
```

```
ret = Table[R1[[i]]/Sqrt[schwankung[[i]]], {i, 1, m}];
```

### Maximierung

#### *ALPHA*

```
alpha1 = Plus@@Table[If[Abs[R1[[i]]] <= s[[i]], 1, 0], {i, 1, m}]
```

```
alpha2 = Plus@@Table[If[Abs[R1[[i]]] <= 2 * s[[i]], 1, 0], {i, 1, m}] - alpha1
```

```
alpha3 = Plus@@Table[If[Abs[R1[[i]]] <= 3 * s[[i]], 1, 0], {i, 1, m}] - alpha1 - alpha2
```

```
alpha4 = Plus@@Table[If[Abs[R1[[i]]] > 3 * s[[i]], 1, 0], {i, 1, m}]
```

```
alpha = Join[{alpha1}, {alpha2}, {alpha3}, {alpha4}]/(m * 1.)
```

#### *BETA*

```
G[k_, p_, u_, v_] := p * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(u * std)]
```

```
+ (1 - p) * CDF[NormalDistribution[0, 1], k * std/(v * std)]
```

```
beta1[p_, u_, v_] := G[1, p, u, v] - G[-1, p, u, v]
```

```
beta2[p_, u_, v_] := G[2, p, u, v] - G[-2, p, u, v] - beta1[p, u, v]
```

```
beta3[p_, u_, v_] := G[3, p, u, v] - G[-3, p, u, v] - beta2[p, u, v] - beta1[p, u, v]
```

```
beta4[p_, u_, v_] := 1 - beta1[p, u, v] - beta2[p, u, v] - beta3[p, u, v]
```

```
beta[p_, u_, v_] := Join[{beta1[p, u, v]}, {beta2[p, u, v]}, {beta3[p, u, v]}, {beta4[p, u, v]}];
```

### Funktion für Maximierung

```

L[p-, u-, v-] = Sum[alpha[[i]] * Log[beta[p, u, v][[i]]], {i, 1, 4}];

sol = FindMaximum [{L[p, u, v], 0 < p < 1 && p * u^2 + (1 - p) * v^2 == 1 &&
  {0 < v && 0 < u && beta4[p, u, v] > 0.001}, {p, 0.85}, {u, 0.78}, {v, 1.77}}]
p * u^2 + (1 - p) * v^2 /. sol[[2]]

Plot[L[pp, u, v] /. sol[[2]], {pp, 0.1, 0.9}]
Plot[L[p, uu, v] /. sol[[2]], {uu, 0.1, 1.5}]
Plot[L[p, u, vv] /. sol[[2]], {vv, 1.1, 2.5}]

Join[sol[[2]], {1 - p /. sol[[2]]}]

```

## 2. HÄLFTE DER DATEN

```
R2 = Drop[R, m];
```

### Rekursion für EWMA

```

startall = Variance[R];
schwankungall = Table[0, {1}];
schwankungall[[1]] = startall;

Do [schwankungall[[i]] = schwankungall[[i - 1]] * lambda + (1 - lambda)
  * R[[i - 1]]^2, {i, 2, 1}]
sall = Sqrt[schwankungall];
retall = Table[R[[i]] / Sqrt[schwankungall[[i]]], {i, 1, 1 - 1}];

```

### GAMMA

```

gamma1 = Plus@@Table[If[Abs[R[[i]]] <= sall[[i]], 1, 0], {i, m + 1, 1 - 1}]
gamma2 = Plus@@Table[If[Abs[R[[i]]] <= 2 * sall[[i]], 1, 0], {i, m + 1, 1 - 1}] - gamma1
gamma3 = Plus@@Table[If[Abs[R[[i]]] <= 3 * sall[[i]], 1, 0], {i, m + 1, 1 - 1}] - gamma1
  - gamma2
gamma4 = Plus@@Table[If[Abs[R[[i]]] > 3 * sall[[i]], 1, 0], {i, m + 1, 1 - 1}]
gamma = Join[{gamma1}, {gamma2}, {gamma3}, {gamma4}]

```

### DELTA

```

G[k-, p-, u-, v-] := p * CDF[NormalDistribution[0, 1], k/u]
  + (1 - p) * CDF[NormalDistribution[0, 1], k/v] /. sol[[2]];

delta1[p-, u-, v-] = G[1, p, u, v] - G[-1, p, u, v] /. sol[[2]];
delta2[p-, u-, v-] = G[2, p, u, v] - G[-2, p, u, v] - delta1[p, u, v] /. sol[[2]];
delta3[p-, u-, v-] = G[3, p, u, v] - G[-3, p, u, v] - delta2[p, u, v] - delta1[p, u, v] /. sol[[2]];

```

```

delta4[p_,u_,v_]=1-delta1[p,u,v]-delta2[p,u,v]-delta3[p,u,v]/.sol[[2]];
delta=Join[{delta1[p,u,v]*m},{delta2[p,u,v]*m},{delta3[p,u,v]*m},
{delta4[p,u,v]*m}]/.sol[[2]]

```

### CHI<sup>2</sup> - Statistik

```
T = Sum[(gamma[[i]] - delta[[i]])^2/delta[[i]], {i, 1, 4}]
```

### Histogramm und Verteilungsfunktion

```

p1 = Plot[p * PDF[NormalDistribution[0, 1], x/u] + (1 - p)
*PDF[NormalDistribution[0, 1], x/v]/.sol[[2]], {x, -4.5, 4.5},
AspectRatio -> 1/3, ImageSize -> 700, PlotStyle -> {Directive[Blue, Thick]};

p2 = Histogram [retall, Automatic, "ProbabilityDensity", AspectRatio -> 1.0,
ImageSize -> 500, ChartElementFunction -> ChartElementDataFunction [
"SegmentScaleRectangle", "Segments" -> 100, "ColorScheme" -> "SolarColors"];

Show[p2, p1]

```

## Literatur

- [1] G. BARONE-ADESI, F. BOURGOIN, and K. GIANNAPOULOUS. Don't look back. *Risk*, (pp 100–104), August 1998.
- [2] G. BARONE-ADESI, K. GIANNAPOULOUS, and L. VOSPER. VaR without correlations for nonlinear portfolios. *Journal of Futures Markets*, Vol. 19, (Issue 5, pp 583–602), August 1999.
- [3] J. BOUDOUGH, M. RICHARDSON, and R. F. WHITE. The best of both worlds: A hybrid approach to calculation value at risk. *Risk*, (pp 64–67), May 1998.
- [4] J. HULL and A. WHITE. Incorporation volatility updating into the historical simulation method for value at risk. *Journal of Risk*, Vol.6 (No.1, pp 5–19), Fall 1998.
- [5] J. HULL and A. WHITE. Value at risk when daily changes in market variables are not normally distributed. *Journal of Derivatives*, Vol.5 (No.3, pp 9–19), Spring 1998.
- [6] A. J. McNEIL, R. FREY, and P. EMBRECHTS. *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton University Press, 2005.