



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Yule-Walker Gleichungen
für
singuläre AR Systeme

Ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von
Em.O.Univ.Prof. Dr. Manfred Deistler

von

Elisabeth Felsenstein
Rabengasse 17/19
1030 Wien

Wien, September 2010

Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor Deistler für seine Unterstützung während der Diplomarbeit, für all die Zeit, die er sich genommen hat, um mir weiterzuhelfen, für all die anregenden Diskussionen und für seine Geduld. Außerdem möchte ich mich noch dafür bedanken, dass Herr Professor Deistler durch seine interessanten Vorlesungen mein Interesse für die Ökonometrie geweckt hat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Entstehung singulärer AR Systeme	2
1.1 Generalisierte lineare dynamische Faktormodelle	2
1.2 Modellieren der latenten Variablen	5
1.2.1 Die Transferfunktion w	5
1.2.2 ARMA Darstellung	7
1.2.3 State Space Realisation	7
1.2.4 Statische Faktoren	9
1.2.5 $n \geq r \geq q$	10
1.3 Modellieren des minimalen statischen Faktors	10
2 Lösungsmenge bei singulären AR Systemen	13
2.1 Lösungsmenge von Systemen linearer Differenzgleichungen . . .	13
2.2 Yule-Walker Gleichungen	14
2.3 Stationäre partikuläre Lösungen	18
2.4 Stationäre homogene Lösungen	24
2.4.1 Existenz stationärer homogener Lösungen	24
2.4.2 Struktur stationärer homogener Lösungen	28
2.4.3 Anfangsbedingungen	30
2.5 Lösungsmenge	32
2.6 Stabilität einer Lösung der Yule-Walker Gleichungen	33
2.6.1 Die Minimumnormlösung	33
2.6.2 Systemtheoretische Konzepte	34
2.6.3 Stabilität im Falle der eindeutigen Lösbarkeit der Yule-Walker Gleichungen	36
2.6.4 Stabilität der Minimumnormlösung	37
2.6.5 Existenz instabiler Lösungen	44
3 Schätzung	47
3.1 Schätzung bei Populationsdaten	48
3.2 Schätzung bei Stichprobendaten	50
3.2.1 Singuläre Komponente	50
3.2.2 Reguläre Komponente	50

3.2.3 Gesamtmodell	51
3.3 Ausblick	52
Literaturverzeichnis	53

Einleitung

In dieser Arbeit behandeln wir Yule-Walker Gleichungen bei singulären AR Systemen. Im Gegensatz zum in der Literatur üblichen Fall der regulären AR Systeme besteht der Fehlerprozess ν_t aus linear abhängigen Komponenten. Durch diese Abhängigkeit ist die Toeplitz-Kovarianzmatrix Γ_p möglicherweise singulär und die Yule-Walker Gleichungen sind nicht eindeutig lösbar.

Im ersten Kapitel betrachten wir generalisierte dynamische Faktormodelle und beschreiben Umstände, unter denen singuläre AR Systeme auftreten können.

Im zweiten Kapitel geht es um die Yule-Walker Gleichungen im singulären Fall. Für eine Lösung der Yule-Walker Gleichungen suchen wir einen stationären Prozess, der diese Differenzgleichung erfüllt. Ein derartiger Prozess besteht aus einer regulären und einer singulären Komponente. Wir können zeigen, dass die partikuläre Lösung der Differenzgleichung, die reguläre Komponente, ein Moving Average Prozess ist, der für alle Lösungen der Yule-Walker Gleichungen eindeutig ist, während die homogene Lösung, die singuläre Komponente, ein harmonischer Prozess ist.

Weiters beschreiben wir die Lösungsmenge aller stationären AR(p) Prozesse, die die vorgegebenen Kovarianzdaten erfüllen.

Darüber hinaus betrachten wir die Stabilität der Lösungen der Yule-Walker Gleichungen. Wir geben eine spezielle Lösung an, die Minimumnormlösung, die unter allen Lösungen der Yule-Walker Gleichungen diejenige mit den meisten stabilen Nullstellen ist.

Im dritten Kapitel wenden wir uns dem Schätzen zu. Zuerst geben wir eine Prozedur an, die im Falle, dass Populationskovarianzdaten vorliegen, ein AR System und einen Prozess liefert, sodass die vorgegebenen Kovarianzdaten realisiert werden.

Bei echten Stichprobendaten gelingt es uns auch, einen Prozess anzugeben, der die Kovarianzdaten realisiert, jedoch finden wir kein einheitliches AR System für reguläre und singuläre Komponente.

Kapitel 1

Entstehung singulärer AR Systeme

In diesem Teil der Diplomarbeit werden die Ergebnisse des Papers „Generalized linear dynamic factor models - an approach via singular autoregressions“, [1], präsentiert, die wir für die Einbettung des Problems benötigen. Die Annahmen, die wir in diesem Kapitel verwenden, wurden dem Paper „Singular autoregressions for generalized dynamic factor models“, [2], entnommen, die aber die Ergebnisse aus [1] nicht verändern. Im Rahmen der generalisierten linearen dynamischen Faktormodelle werden stochastische Prozesse analysiert, die in der Regel als AR Prozesse modelliert werden können. Es kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, dass diese AR Systeme regulär sind, sondern es muss auch der Fall betrachtet werden, in dem das weiße Rauschen im AR Modell eine singuläre Kovarianzmatrix besitzt.

1.1 Generalisierte lineare dynamische Faktormodelle

Die generalisierten linearen dynamischen Faktormodelle (GDFMs), die in dieser Arbeit betrachtet werden, wurden zuerst in [3] eingeführt als eine Verallgemeinerung und Kombination der linearen dynamischen Faktormodelle mit idiosynkratischem Rauschen (mit idiosynkratischen Störungen) und der generalisierten linearen statischen Faktormodellen. Die Definition der GDFMs in dieser Arbeit entstammt [2]. Die Besonderheit dieser Definition besteht darin, dass singuläre Komponenten in den latenten Variablen (siehe unten) zugelassen werden.

Eine große Stärke der Faktormodelle liegt in der Möglichkeit, die Informationen in der Querschnittsdimension N zu komprimieren.

Bei hochdimensionalen Zeitreihen ist es oft zweckmäßig, sowohl für die Stichprobengröße T als auch für die Querschnittsdimension N asymptotische Analysen durchzuführen. Dies bedeutet, wir betrachten dann das GDFM als einen doppelt indizierten stochastischen Prozess $(y_t^i | i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z})$.

Die grundlegende Idee der GDFMs besteht in der Zerlegung des N -dimensionalen Prozesses beobachteter Daten (y_t^N) in eine Summe

$$y_t^N = \hat{y}_t^N + u_t^N, \quad (1.1)$$

wobei (u_t^N) in weitem Sinne idiosynkratisches Rauschen (d.h. schwach abhängig in der Querschnittsdimension) ist und (\hat{y}_t^N) Prozess latenter Variablen genannt wird, der stark abhängig in der Querschnittsdimension ist.

Der Prozess der latenten Variablen wird von m ($< N$) gemeinsamen Faktoren getrieben, den m Komponenten von f_t ; die Matrix Λ ist die so genannte Faktorladungsmatrix.

$$\hat{y}_t^N = \underbrace{\Lambda}_{N \times m} \overbrace{f_t}^{m \times 1} \quad (1.2)$$

Die folgenden Annahmen vervollständigen die Definition der GDFMs:

Annahme 1.1 $\mathbb{E}\hat{y}_t^N = \mathbb{E}u_t^N = 0 \quad \forall t$

Annahme 1.2 $\mathbb{E}[\hat{y}_t^N u_s^{N'}] = 0 \quad \forall s, t$

Annahme 1.3 (\hat{y}_t^N) und (u_t^N) sind schwach stationäre Prozesse, wobei (u_t^N) ein regulärer Prozess mit absolut summierbaren Kovarianzen ist und (\hat{y}_t^N) sich mittels Woldzerlegung (siehe beispielsweise [4]) darstellen lässt als Summe eines regulären Prozesses (\hat{y}_t^{rN}) und eines singulären Prozesses (\hat{y}_t^{sN}) . Weiters wird angenommen, dass der reguläre Prozess (\hat{y}_t^{rN}) absolut summierbare Kovarianzen besitzt und der singuläre Prozess (\hat{y}_t^{sN}) folgende Gestalt hat:

$$\hat{y}_t^{sN} = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} C_j^N v_j \quad (1.3)$$

mit $C_j^N \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ und komplexwertigen eindimensionalen Zufallsvariablen v_j mit den Eigenschaften

- $|v_j| = 1, j = 1, \dots, h$
- $\mathbb{E}v_j = 0, j = 1, \dots, h$
- $\mathbb{E}v_j \bar{v}_l = 0, \forall j \neq l$ ($\bar{\cdot}$ bezeichnet die komplexe Konjugation.)
- $\lambda_{j+1} = -\lambda_{h-j}, v_{j+1} = \bar{v}_{h-j}$ und $C_{j+1}^N = \bar{C}_{h-j}^N, j = 0, 1, \dots, h/2 - 1$
(Da wir annehmen, dass $\mathbb{E}\hat{y}_t^N = 0$, schließen wir die Frequenz $\lambda = 0$ aus und daher ist h gerade.)

Weiters nehmen wir an, dass die Frequenzen in absteigender Reihenfolge angeordnet sind: $\lambda_j > \lambda_{j+1}$.

Da ein allgemeiner harmonischer Prozess nicht ergodisch ist (d.h. die Stichprobenmomente im Allgemeinen nicht gegen die Momente der Grundgesamtheit konvergieren) und wir üblicherweise nur eine einzelne Trajektorie betrachten, nehmen wir an, dass $\text{rk}F_j = 1$ und dass nur die Phasen von $v_j, j = 1, \dots, h$ zufällig sind, nicht die Amplituden.

Die bisherigen Annahmen garantieren, dass die spektralen Dichten der regulären Anteile existieren und geschrieben werden können als

$$f_y^N(\lambda) = f_{\hat{y}}^N(\lambda) + f_u^N(\lambda). \quad (1.4)$$

($f_{\hat{y}}^N$ bezeichnet die spektrale Dichte des regulären Anteils von \hat{y} .)

Der singuläre Anteil von (y_t^N) stimmt offensichtlich überein mit dem singulären Anteil von (\hat{y}_t^N) und hat folglich die spektrale Verteilungsfunktion

$$F_y^{sN}(\lambda) = \sum_{j:\lambda_j \leq \lambda} C_j^N \mathbb{E} v_j \bar{v}_j C_j^{N*} = \sum_{j:\lambda_j \leq \lambda} C_j^N C_j^{N*}. \quad (1.5)$$

* bezeichnet Transposition und Konjugation.

Die spektrale Verteilungsfunktion des Prozesses (y_t^N) lässt sich daher schreiben als

$$F_y^N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_y^N(\omega) d\omega + F_y^{sN}(\lambda). \quad (1.6)$$

Annahme 1.4 Die Doppelfolge $(y_{it} | i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z})$ entspricht einer geschachtelten Folge von Modellen in dem Sinne, dass \hat{y}_{it} and u_{it} nicht von N abhängen für $i \leq N$.

In anderen Worten betrachten wir eine Folge von Modellen, wobei die Modelle für N und M mit $N \leq M$ sich in den ersten N Zeilen nicht unterscheiden.

Annahme 1.5 $\exists N_0$, sodass $\forall N \geq N_0$ $f_{\hat{y}}^N$ eine rationale spektrale Dichte mit konstantem Rang $q < N$ auf $[-\pi, \pi]$ ist, wobei q unabhängig von N ist.

Diese Annahme impliziert, dass die Dynamik des Modells beschränkt ist. Wie wir in Kürze sehen werden, entspricht q der Dimension des minimalen dynamischen Faktors.

Annahme 1.6 Die Anzahl der Oszillationen h der singulären Komponente ist unabhängig von N für $N \geq$ ein gewisses N_0 .

Annahme 1.7 (Starke Abhängigkeit des regulären Anteil der \hat{y}_t^N) Die ersten q (d.h. die q größten) Eigenwerte von $f_{\hat{y}}^N$ divergieren nach ∞ für alle Frequenzen, wenn $N \rightarrow \infty$.

Annahme 1.8 (Starke Abhängigkeit des singulären Anteil von \hat{y}_t^N) Die Eigenwerte von $C_{j+1}^N C_{j+1}^{N*} + C_{h-j}^N C_{h-j}^{N*}$, die von Null verschieden sind, divergieren für $N \rightarrow \infty$.

Annahme 1.9 (Schwache Abhängigkeit des Rauschens) Der größte Eigenwert der spektralen Dichte von u_t^N ist gleichmäßig beschränkt in λ und N .

Die letzte Annahme bedeutet, dass das Rauschen u_t herausgefiltert werden kann, wenn die Querschnittsdimension $N \rightarrow \infty$. Die Annahme der starken Abhängigkeit garantiert wiederum, dass dieser Filterungsvorgang den Raum, der durch die latenten Variablen aufgespannt wird, nicht beeinflusst.

Annahme 1.10 Die Dimension n einer minimalen State Space Realisation eines stabilen Spektralfaktors von $f_{\hat{y}}^N$, der eine Miniphasenbedingung erfüllt, ist unabhängig von N ($N \geq$ ein gewisses N_0).

In dieser Arbeit wird der Fokus auf den nicht-beobachteten Prozess latenter Variablen gelegt.

1.2 Modellieren der latenten Variablen

In diesem zweiten Abschnitt wird nun gezeigt, wie der Prozess der latenten Variablen modelliert werden kann, zuerst als ARMA System mit q -dimensionalem weißem Rauschen, danach mittels State Space Realisation mit Zustandsdimension n . Anschließend wenden wir uns dem Konzept des statischen Faktors zu, dessen Dimension wir mit r bezeichnen.

Alle Sätze und Definitionen stammen aus [1] und [4].

1.2.1 Die Transferfunktion w

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist die Transferfunktion der von uns betrachteten Modelle nur durch den regulären Anteil des Prozesses festgelegt und wird nicht durch einen singulären Anteil beeinflusst. Daher ist es uns möglich, zur Bestimmung der Transferfunktion die spektrale Dichte des regulären Anteils der latenten Variablen heranzuziehen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit z sowohl eine komplexe Variable als auch den Backwardshiftoperator.

Satz 1.1 (Spektrale Faktorisierung) Alle $N \times N$ rationalen spektralen Dichten $f_{\hat{y}}$ mit konstantem Rang $q \forall \lambda \in [-\pi, \pi]$ können folgendermaßen faktorisiert werden

$$f_{\hat{y}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} w(e^{-i\lambda}) w(e^{-i\lambda})^*, \quad (1.7)$$

wobei $w(z), z \in \mathbb{C}$, eine $N \times q$ reelle rationale Matrix mit vollem Spaltenrang ist, die weder Pole noch Nullstellen in $|z| \leq 1$ hat und die eindeutig bestimmt ist bis auf Postmultiplikation mit einer konstanten orthogonalen Matrix.

Da $w(z)$ analytisch innerhalb des Einheitskreises ist, erhalten wir für die Spektralfaktoren

$$w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j z^j, \quad w_j \in \mathbb{R}^{N \times q}, \quad (1.8)$$

und das entsprechende kausale lineare System

$$\hat{y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \epsilon_{t-j} \quad (1.9)$$

mit dem q -dimensionalen weißen Rauschen (ϵ_t) mit Erwartungswert $\mathbb{E}\epsilon_t = 0$ und Autokovarianzmatrix $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_t'] = 2\pi I_q$. Der Prozess (ϵ_t) ist wie zuvor erwähnt ein *minimaler dynamischer Faktor*.

Als Konsequenz der Annahmen des GDFM betrachten wir hohe (engl.: tall) Transferfunktionen $w(z)$, was bedeutet, dass $q < N$.

Satz 1.2 (Smith-McMillan Form) *Jede rationale $N \times q$ Matrix w mit Rang s kann geschrieben werden als*

$$w = u d v, \quad (1.10)$$

wobei u und v unimodulare Matrizen sind (d.h. Polynommatrizen mit konstanter Determinante ungleich Null) und d diagonal von folgender Form ist:

$$d(z) = \begin{pmatrix} d_1(z) & & & 0 & \vdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & d_s(z) & \vdots & 0 \\ 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & & & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

mit $d_i = \frac{a_i}{b_i}$, wobei a_i und b_i relativ prime monische Polynome sind und a_i teilt a_{i+1} , und b_{i+1} teilt b_i , $i=1, \dots, s-1$.

d wird dann Smith-McMillan Form von w genannt. Es kann gezeigt werden, dass d eindeutig für gegebenes w ist.

Die Nullstellen der Matrix w entsprechen den Nullstellen der Zählerpolynome (ungleich Null) $a_i(z)$ von d und die Pole von w sind die Nullstellen der Nennerpolynome b_i von d .

Wir betrachten den Fall $q < N$ und $s = q$, folglich hat w keine eindeutige linksinverse Matrix. Eine bestimmte linksinverse Matrix kann folgendermaßen definiert werden:

$$w^- = v^{-1} (d' d)^{-1} d' u^{-1}. \quad (1.12)$$

Genau wie w hat w^- keine Pole und Nullstellen in $|z| \leq 1$.

Es ist einfach zu zeigen, dass der minimale statische Faktor ϵ_t eindeutig aus $\hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \dots$ bestimmt werden kann, ungeachtet der gewählten Linksinversen:

$$\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^- \hat{y}_{t-j}. \quad (1.13)$$

Demzufolge entspricht (1.9) der Wold Zerlegung des Prozesses der latenten Variablen.

1.2.2 ARMA Darstellung

Jede rationale kausale Transferfunktion w kann mittels eines ARMA Systems realisiert werden. Also betrachten wir ein solches geeignetes ARMA System

$$a(z)\hat{y}_t = b(z)\epsilon_t, \quad (1.14)$$

wobei $a(z)$ eine $N \times N$ und $b(z)$ eine $N \times q$ Polynommatrix ist.

Wir nehmen an, dass die Matrizen $a(z)$ und $b(z)$ links coprim sind, d.h. dass alle gemeinsamen Faktoren unimodular sind. Demzufolge erhält man alle beobachtungsäquivalenten links coprimen ARMA Systeme mittels Premultiplikation mit einer beliebigen unimodularen Matrix u als $ua(z)$ und $ub(z)$.

Die Transferfunktion erhalten wir aus dieser Darstellung als $w(z) = a^{-1}(z)b(z)$. Wie bereits erwähnt, lassen wir in unserem Modell singuläre Komponenten zu. Wie wir später noch genauer zeigen werden, bedeutet dies, dass $\det a(z)$ Nullstellen auf dem Einheitskreis besitzt, die jedoch im Linkskern von $b(z)$ liegen. Da $w(z)$ vollen Spaltenrang und keine Pole und Nullstellen in $|z| \leq 1$ hat, erhalten wir die äquivalenten Bedingungen

$$\det a(z) \neq 0, \quad |z| < 1, \quad (1.15)$$

$$b(z) \text{ has full rank } q, \quad |z| \leq 1. \quad (1.16)$$

1.2.3 State Space Realisation

Die Transferfunktion w mit den bereits genannten Eigenschaften kann auch durch ein State Space (Zustandsraum) System realisiert werden:

$$x_{t+1} = Fx_t + G\epsilon_t \quad (1.17)$$

$$\hat{y}_t = Hx_t \quad (1.18)$$

wobei x_t der n -dimensionale Zustand ist und $F \in \mathbb{R}^{n \times n}, G \in \mathbb{R}^{n \times q}, H \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Wir nehmen an, das System sei minimal (F und daher auch der Zustand haben kleinstmögliche Dimension), stabil (der betragsgrößte Eigenwert von F hat Betrag ≤ 1) und erfüllt eine Miniphasenbedingung (die Matrix $\begin{pmatrix} I - Fz & -G \\ H & 0 \end{pmatrix}$ hat keine Nullstellen in $|z| \leq 1$).

State Space System \rightarrow Transferfunktion: Ausgehend vom State Space System erhalten wir die zugehörige Transferfunktion als

$$w(z) = H(I - Fz)^{-1}G = HG + \sum_{j=1}^{\infty} HF^j Gz^j. \quad (1.19)$$

Da die Matrix $w(z)$ mit Rang q fast überall keine Pole und Nullstellen in $|z| \leq 1$ hat, gilt, dass $w(0) = HG$ auch Rang q hat, woraus folgt, dass die $n \times q$ Matrix G auch Rang q haben muss.

Wenn das System (F, G, H) minimal ist, so sind die Pole von $w(z)$ und die Eigenwerte von F reziprok. Desweiteren hat w eine Nullstelle bei z_0 genau dann, wenn $\text{rk}M(z_0) \leq n + q$.

Transferfunktion \rightarrow State Space System: Ausgehend von den Spektralfaktoren der Transferfunktion wenden wir die „Akaike-Kalman Methode“ an, um ein minimales State Space System in Echelon Form zu erhalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{y}_t \\ \hat{y}_{t+1|t} \\ \hat{y}_{t+2|t} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\hat{Y}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & w_1 & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots \\ w_2 & w_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_{t-1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Mit \mathcal{H} bezeichnen wir die (Block-) Hankelmatrix der Transferfunktion mit Rang n (dieser Rang entspricht dem McMillan-Grad von $w(z)$) und $\hat{y}_{t+r|t}$ ist der beste lineare Kleinst-Quadrate-Prädiktor gegeben die unendliche Vergangenheit $\hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \dots$ (da die Zeitbereiche der latenten Variablen und des weißen Rauschens in der Wold Zerlegung (1.9) übereinstimmen).

Jede Basis des endlichdimensionalen Raumes, der von den eindimensionalen Komponenten von \hat{Y}_t im Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen aufgespannt wird, definiert einen minimalen Zustand, der bei uns Dimension n hat. Folglich definieren wir eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times \infty}$, die die ersten (n) Komponenten von \hat{Y}_t auswählt, die eine Basis bilden.

Die folgenden Gleichungen definieren ein minimales State Space System in Echelon Form:

$$x_t = S\hat{Y}_t \quad (1.21)$$

$$S \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots \\ w_2 & w_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = FS\mathcal{H} \quad (1.22)$$

$$G = S(w'_0, w'_1, \dots)' \quad (1.23)$$

$$(w_0, w_1, \dots) = HS\mathcal{H} \quad (1.24)$$

Jeden weitere minimale Zustand erhält man, indem man den Echelon-Zustand mit einer konstanten regulären Matrix vormultipliziert.

1.2.4 Statische Faktoren

Für den Prozess latenter Variablen (\hat{y}_t) mit Dimension N wird ein m -dimensionaler Prozess (z_t) *statischer Faktor* genannt, wenn $m \leq N$ und $\exists L$, eine konstante Matrix, so dass $\hat{y}_t = Lz_t, \forall t$.

Wir interessieren uns für das Konzept des minimalen statischen Faktors, eines statischen Faktors mit kleinstmöglicher Dimension. Dabei hilft uns folgendes Lemma:

Lemma 1.1 *Sei (\hat{y}_t) ein stationärer Prozess. Dann ist die Dimension eines minimalen statischen Faktors gleich dem Rang r der Kovarianzmatrix $\mathbb{E}[\hat{y}_t \hat{y}_t']$.*

Offensichtlich ist der Zustand x_t ein statischer Faktor des Prozesses latenter Variablen (\hat{y}_t) aber nicht notwendigerweise ein minimaler.

Konstruktion eines minimalen statischen Faktors:

- Zuerst betrachten wir eine Faktorisierung $\mathbb{E}[\hat{y}_t \hat{y}_t'] = MM'$, sodass M die kleinstmögliche Spaltenzahl ($= r$) hat. M ist eindeutig bis auf orthogonale Postmultiplikation. Dann ist es leicht zu überprüfen, dass

$$z_t = (M'M)^{-1} M' \hat{y}_t \quad (1.25)$$

Dimension r hat und dass

$$\hat{y}_t = M z_t. \quad (1.26)$$

- Ausgehend von x_t und H können wir auf folgende Art einen minimalen statischen Faktor finden. Sei T eine reguläre Matrix, so dass $HT = [H_1 0]$ mit einer Matrix H_1 mit vollen Spaltenrang. In unserem minimalen State Space System hat x_t eine reguläre Kovarianzmatrix. Zusammen mit der Tatsache, dass $\mathbb{E}[\hat{y}_t \hat{y}_t']$ Rang r hat, sehen wir anhand der Gleichung (1.18), dass $\text{rk} H = \text{rk} H_1 = r$ und dass H_1 r Spalten hat. Es ist nun trivial, dass $\bar{z}_t = [I_r 0] T^{-1} x_t$ Dimension r hat und $\hat{y}_t = H_1 \bar{z}_t$. Folglich ist \bar{z}_t ein minimaler statischer Faktor.
- Ausgehend von der Echelon Form müssen wir nur die ersten r linear unabhängigen Komponenten von \hat{Y}_t auswählen.

Lineare Transformation zwischen \hat{y}_t und z_t :

$$z_t = (M'M)^{-1}M'\hat{y}_t = (M'M)^{-1}M'w(z)\epsilon_t = k(z)\epsilon_t \quad (1.27)$$

$$\hat{y}_t = Mz_t = Mk(z)\epsilon_t = w(z)\epsilon_t \quad (1.28)$$

Da \hat{y}_t und z_t die gleiche Dynamik besitzen und z_t eine kleinere Dimension besitzt, ist es meist zweckmäßiger z_t zu modellieren, weswegen wir uns im Folgenden auf die Modellierung eines minimalen Faktors konzentrieren.

1.2.5 $n \geq r \geq q$

Die Dimension des minimalen Zustandes n ist größer oder gleich der Dimension des minimalen statischen Faktors r , die wiederum größer oder gleich der Dimension des minimalen dynamischen Faktors q ist. Diese Gleichung ist leicht zu überprüfen. Es gilt $n \geq r$, weil der minimale Zustand x_t ein statischer Faktor ist, wenn auch nicht unbedingt minimal. Ein minimaler statischer Faktor unterliegt der Restriktion, dass die Matrix L konstant sein muss, während $w(z)$ eine rationale Funktion von z mit vollem Spaltenrang ist, daher gilt $r \geq q$.

Diese Ungleichung wird noch an späterer Stelle von Bedeutung sein, wenn es darum geht, den Prozess (z_t) als AR System zu modellieren.

1.3 Modellieren des minimalen statischen Faktors

Um den minimalen statischen Faktor z_t zu modellieren, wenden wir uns zunächst dem Konzept der nullfreien Transferfunktion zu.

Definition 1.1 Eine $N \times q$ Transferfunktion $w(z)$ wird nullfrei genannt, wenn die Zählerpolynome der Diagonalmatrix der Smith-McMillan Form gleich 1 sind.

Satz 1.3 Sei w eine $N \times q$ rationale Transferfunktion mit minimaler State Space Realisation (F, G, H) mit Zustandsdimension n . Gilt $N > q$, dann ist die Transferfunktion w für generische Werte von (F, G, H) nullfrei.

Für unseren Fall gilt also, dass die hohe Transferfunktion $w(z)$ nullfrei ist. Die Transferfunktion $k(z)$ des minimalen statischen Faktors, den wir ja nun modellieren wollen, ist genau dann nullfrei, wenn $w(z)$ nullfrei ist, was aus (1.27) ersichtlich ist.

Satz 1.4 (\hat{y}_t) erfülle die Annahmen 4, 5 und 10 und z_t sei ein zugehöriger minimaler statischer Faktor mit Dimension r ; dann sind die folgenden Aussagen für (z_t) äquivalent:

- (i) Die Spektralfaktoren k der spektralen Dichte f_z des regulären Anteils von (z_t) mit den Eigenschaften aus dem Satz über die spektrale Faktorisierung sind nullfrei.

(ii) Es gibt eine polynomielle Linksinverse k^- , definiert entsprechend (1.12), und daher wird der Input ϵ_t aus (1.27) durch eine endliche Anzahl an Outputs $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-L}$ für ein gewisses L bestimmt.

(iii) (z_t) ist eine stationäre Lösung eines AR Modells

$$z_t = e_1 z_{t-1} + \dots + e_p z_{t-p} + \nu_t; \quad e_i \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (1.29)$$

wobei

$$\det \underbrace{(I - e_1 z - \dots - e_p z^p)}_{e(z)} \neq 0, \quad |z| < 1 \quad (1.30)$$

und ν_t ist weißes Rauschen mit $\mathbb{E}\nu_t = 0$ und $\text{rk}\Sigma_\nu = q$, $\Sigma_\nu = \mathbb{E}[\nu_t \nu_t^*]$.

Beweis: (i) \Leftrightarrow (ii) Im Fall der nullfreien Transferfunktion $k(z)$ sind alle Zählerpolynome der Diagonalmatrix der Smith-McMillan Form gleich 1 und die Inverse k^- , die entsprechend (1.12) definiert wurde, ist eine Polynommatrix. Somit lässt sich der Input bzw. der minimale dynamische Faktor ϵ_t mit einer endlichen Anzahl an Outputs bestimmen, hier der minimale statische Faktor, $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-L}$ für ein $L \in \mathbb{N}$.

Die Rückrichtung ist nun leicht ersichtlich.

(i) \Rightarrow (iii) Zunächst gehen wir von einem ARMA System für z_t aus:

$$\tilde{e}(z)z_t = f(z)\epsilon_t, \quad (1.31)$$

sodass $k(z) = \tilde{e}(z)^{-1}f(z)$ eine nullfreie hohe Transferfunktion ist und $\det \tilde{e}(z) \neq 0, |z| < 1$ gilt. Daher ist auch $f(z)$ eine nullfreie hohe Polynommatrix und somit sind alle Diagonalelemente der Diagonalmatrix der Smith-McMillan Form gleich 1. Die Matrix f kann also mit einer geeigneten Matrix g zu einer unimodularen Matrix $u = (f, g)$ erweitert werden, indem die Smith-McMillan Form von $f = \tilde{u}\tilde{d}\tilde{v}$ in folgender Weise ergänzt wird:

$$(f, g) = \tilde{u} \left(\tilde{d}, \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{v} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Für unser ARMA System ergibt sich daraus

$$\tilde{e}(z)z_t = u(z) \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Da es sich bei $u(z)$ um eine unimodulare Matrix handelt, können wir die Inverse bilden:

$$u(z)^{-1}\tilde{e}(z)z_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Um nun ein AR System der gewünschten Form zu erhalten, müssen wir die letzte Gleichung von links mit $\tilde{e}^{-1}(0)u(0)$. Die Bedingung $\det e(z) \neq 0, |z| < 1$ folgt ganz einfach aus $\det \tilde{e}(z) \neq 0, |z| < 1$ und der Tatsache, dass $u(z)$ unimodular ist.

(iii) \Rightarrow (ii) Wir definieren eine Matrix P mit vollem Spaltenrang, die $\Sigma_\nu = PP'$, $P \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\text{rk}P = q$ erfüllt. Die gewünschte polynomielle Matrix k^{-1} erhalten wir, indem wir (1.29) mit $(P'P)^{-1}$ prämultiplizieren. \square

Betrachten wir nun unsere nullfreie Transferfunktion k . Aufgrund des vorigen Satzes wissen wir, dass der Prozess (z_t) als Lösung eines stabilen AR Modells geschrieben werden kann. Also können wir uns im generischen Fall auf das Finden geeigneter AR Modelle beschränken, jedoch ist die Varianzmatrix des weißen Rauschens für den Fall, dass $r > q$, singulär und daher die Komponenten von ν_t linear abhängig.

An dieser Stelle sehen wir nun, wie das in dieser Arbeit betrachtete Problem der singulären AR Modelle eingebettet ist.

Der folgende Satz beschäftigt sich mit der Darstellung singulärer AR Systeme.

Satz 1.5 *Jedes singuläre AR System mit $\text{rk}\Sigma_\nu = q$ kann wie folgt dargestellt werden:*

$$e(z)z_t = f\epsilon_t, \quad f \in \mathbb{R}^{r \times q} \quad (1.35)$$

mit weißem Rauschen (ϵ_t) mit $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_t'] = I_q$, $e(0) = I$ und $e(z)$ und f sind relativ links prim.

Beweis: Es muss lediglich noch gezeigt werden, dass $e(z)$ und f relativ links prim sind. Angenommen, $e(z)$ und f wären nicht relativ links prim, dann gibt es immer ein beobachtungsäquivalentes System $(\bar{e}(z), \bar{f}(z))$, das relativ links prim ist, bei dem aber $\bar{f}(z)$ möglicherweise nicht konstant ist. Aus Satz 1.4 wissen wir, dass $\bar{f}(z)$ nullfrei sein muss und daher wie im Beweis zum letzten Satz zu einer unimodularen Matrix $u(z)$ erweitert werden kann. Das System $(u(z)^{-1}\bar{e}(z), u(z)^{-1}\bar{f}(z))$ hat dann die geforderten Eigenschaften. \square

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Suche nach AR Systemen, deren Kovarianzen mit gegebenen Daten übereinstimmen.

Kapitel 2

Lösungsmenge bei singulären AR Systemen

Dieses Kapitel behandelt die Ergebnisse des Papers „Modeling of multichannel time series and extrapolation of matrix-valued autocorrelation sequences“, [5].

Wir nehmen an, die zweiten Momente eines AR Prozesses zu kennen, und suchen die Lösungsmenge aller (schwach) stationären Prozesse, deren zweite Momente mit den gegebenen übereinstimmen. Dabei legen wir unser besonderes Augenmerk auf die Lösungsmenge singulärer AR Systeme.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir stationäre Prozesse z_t mit $\mathbb{E}z_t = 0$.

2.1 Lösungsmenge von Systemen linearer Differenzgleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir AR Systeme der Form

$$z_t = e_1 z_{t-1} + \cdots + e_p z_{t-p} + \nu_t; \quad e_i \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (2.1)$$

mit einem Prozess (z_t) mit $\mathbb{E}z_t = 0$ und weißem Rauschen (ν_t) mit $\mathbb{E}\nu_t = 0$ und $\text{rk}\Sigma = q$, $\Sigma = \mathbb{E}[\nu_t \nu_t']$, wobei wir ν_t auch darstellen können als $\nu_t = f\epsilon_t$, $f \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\mathbb{E}\epsilon_t = 0$, $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_t'] = I_q$ und das AR System anschreiben als

$$e(z)z_t = f\epsilon_t. \quad (2.2)$$

Besonderes Interesse gilt dem Fall singulärer AR Systeme, d.h. $q < r$.

Es handelt sich also um ein System linearer Differenzgleichungen, dessen Lösungsmenge sich bekanntlich aus der Summe einer partikulären Lösung, d.h. eines Prozesses, der die Gleichung (2.1) erfüllt, und der Menge aller homogenen Lösungen, d.h. die Menge aller Prozesse, die

$$e(z)z_t = z_t - e_1 z_{t-1} - \cdots - e_p z_{t-p} = 0 \quad (2.3)$$

erfüllen, zusammensetzt.

Darüber hinaus suchen wir Lösungen, die nicht nur die Differenzgleichung erfüllen, sondern auch reell und stationär sind. In diesem Kapitel wird sich zeigen, dass wir eine stationäre partikuläre Lösung wählen können, die ein regulärer Prozess z_t^r ist, und eine stationäre homogene Lösung ein singulärer Prozess z_t^s sein muss. Weiters können wir Anfangsbedingungen angeben, unter welchen z_t^r und z_t^s orthogonal sind. In diesem Fall ist auch die Summe dieser beiden Prozesse stationär, da klarerweise $\begin{pmatrix} z_t^r \\ z_t^s \end{pmatrix}$ stationär ist.

2.2 Yule-Walker Gleichungen

Wir nehmen an, die zweiten Momente $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ eines AR Prozesses zu kennen und wollen geeignete Koeffizienten e_i bestimmen.

Betrachten wir nochmals das AR Modell:

$$z_t = e_1 z_{t-1} + \dots + e_p z_{t-p} + \nu_t; \quad e_i \in \mathbb{R}^{r \times r} \tag{2.4}$$

Dabei ist ν_t der Einschrittprognosefehler von z_t aus der endlichen Vergangenheit z_{t-1}, \dots, z_{t-p} . Das heißt, ν_t entspricht jenem Anteil von z_t , der nicht durch die (endliche) Vergangenheit des Prozesses erklärt werden kann. Im Folgenden betrachten wir ν_t stets als Einschrittprognosefehler.

Sei $\gamma_j = \mathbb{E}[z_{t+j} z_t']$, dann definieren wir folgende symmetrische Block-Toeplitz-Matrix

$$\Gamma_{p+1} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \dots & \gamma_p \\ \gamma_1' & \gamma_0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \gamma_1 \\ \gamma_p' & \dots & \dots & \gamma_1' & \gamma_0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Da diese Matrix auch als Kovarianzmatrix von $(z_t', \dots, z_{t-p}')'$ gesehen werden kann, wissen wir, dass Γ_{p+1} positiv semidefinit ist. Darüber hinaus gilt $\gamma_j = -\gamma_j'$. Im Fall $q < r$ sehen wir, dass Γ_{p+1} singular ist, da die (eindimensionalen) Komponenten von $(z_t', \dots, z_{t-p}')'$ linear abhängig sind. Die (eindimensionalen) Komponenten von $(z_t', \dots, z_{t-p-1}')'$ sind möglicherweise linear abhängig und Γ_p ist möglicherweise singular.

Als Maß für die Größe des Fehlers betrachten wir nun die Länge von ν_t , $\mathbb{E}\|\nu_t\|^2$

$$\mathbb{E}\|\nu_t\|^2 = \text{tr}\mathbb{E}[\nu_t \nu_t'] = \text{tr}\{(e_0, -e_1, \dots, -e_p)\Gamma_{p+1}(e_0, -e_1, \dots, -e_p)'\} \tag{2.6}$$

wobei $e_0 = I$ und tr die Spur der Matrix bezeichnet.

Um den Fehler zu minimieren, brauchen wir folgendes Lemma, das auf der Lagrange-Multiplikatorenregel beruht.

Lemma 2.1 *Sei Γ eine positiv semidefinite $nr \times nr$ Matrix und ϕ eine $nr \times r$ Matrix. Dann hat das Minimierungsproblem $\min \text{tr} X' \Gamma X$ unter $\Phi' X = I$ eine Lösung \hat{X} und sie erfüllt*

$$\hat{X}' \Gamma = \Sigma \Phi' \tag{2.7}$$

wobei Σ eine symmetrische $r \times r$ Matrix ist, die eindeutig durch Γ bestimmt wird und folgende Gleichung erfüllt

$$\Sigma = \hat{X}' \Gamma \hat{X} \tag{2.8}$$

Darüber hinaus gilt für die Lösung \hat{X}

$$X' \Gamma X \geq \hat{X}' \Gamma \hat{X} \tag{2.9}$$

für alle X , die $\Phi' X = I$ erfüllen.

Beweis: Zu Beginn definieren wir die Lagrange-Funktion

$$L(X, \Sigma) = \text{tr}\{X' \Gamma X + 2\Sigma(I - \Phi' X)\}. \tag{2.10}$$

Ein Kandidat \hat{X} für eine optimale Lösung unseres Minimierungsproblems muss außer der Nebenbedingung folgende Gleichungen erfüllen:

$$L'_X = 2\hat{X}' \Gamma - 2\Sigma \Phi' = 0 \iff \hat{X}' \Gamma = \Sigma \Phi', \tag{2.11}$$

da nach den Regeln der Matrix-Algebra für symmetrisches Γ gilt, dass

$$\frac{\partial \text{tr}(X' \Gamma X)}{\partial X} = 2\Gamma X \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial (\Sigma \Phi' X)}{\partial X} = \Phi \Sigma'. \tag{2.13}$$

Daraus folgt für jedes beliebige X , das $\Phi' X = I$ erfüllt,

$$\hat{X}' \Gamma (X - \hat{X}) = \Sigma \underbrace{\Phi' X}_I - \Sigma \underbrace{\Phi' \hat{X}}_I = 0. \tag{2.14}$$

Daher erhalten wir die gesuchte Ungleichung:

$$X' \Gamma X = [\hat{X} + (X - \hat{X})]' \Gamma [\hat{X} + (X - \hat{X})] \tag{2.15}$$

$$= \hat{X}' \Gamma \hat{X} + \underbrace{\hat{X}' \Gamma (X - \hat{X})}_0 + \underbrace{(X - \hat{X})' \Gamma \hat{X}}_0 + (X - \hat{X})' \Gamma (X - \hat{X}) \tag{2.16}$$

$$\geq \hat{X}' \Gamma \hat{X}. \tag{2.17}$$

Die Symmetrie der Matrix Σ erhalten wir, indem wir die rechte Seite der Gleichung (2.11) mit \hat{X} multiplizieren. Die Eindeutigkeit erhalten wir aus der letzten

Ungleichung, indem wir zwei verschiedene optimale Lösungen \hat{X}^1 und \hat{X}^2 betrachten.

$$\left. \begin{array}{l} (\hat{X}^1)' \Gamma \hat{X}^1 \geq (\hat{X}^2)' \Gamma \hat{X}^2 \\ (\hat{X}^2)' \Gamma \hat{X}^2 \geq (\hat{X}^1)' \Gamma \hat{X}^1 \end{array} \right\} \implies (\hat{X}^1)' \Gamma \hat{X}^1 = (\hat{X}^2)' \Gamma \hat{X}^2 \quad (2.18)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass eine Lösung \hat{X} existiert. Dazu müssen wir zeigen, dass es ein \hat{X} gibt, das $\hat{X}' \Gamma = \Sigma \Phi'$ und $\Phi' \hat{X} = I$ erfüllt.

Da wir wegen $\Phi' \hat{X} = I$ immer eine orthogonale Transformation U finden können, sodass $\Phi' U = (I, 0, \dots, 0)$ und sich daraus qualitativ kein Unterschied für die Gleichungen $\Phi' U U' \hat{X} = I$ und $\hat{X}' U U' \Gamma U = \Sigma \Phi' U$ ergibt und $U' \Gamma U$ genauso positiv semidefinit ist wie Γ , können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\Phi' = (I, 0, \dots, 0)$.

Wir betrachten folgende Partitionierung von Γ und \hat{X} :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} F & D' \\ D & \Gamma^* \end{pmatrix}, \quad \hat{X}' = (I \quad A) \quad (2.19)$$

wobei Γ^* eine $(n-1)r \times (n-1)r$ und A eine $r \times (n-1)r$ ist und F und D entsprechende Dimensionen besitzen. $\Phi' \hat{X} = I$ ist trivialerweise erfüllt. $\hat{X}' \Gamma = \Sigma \Phi'$ vereinfacht sich zu

$$A \Gamma^* = -D', \quad \Sigma = F + AD. \quad (2.20)$$

Wegen der positiven Definitheit von Γ gilt $\text{Im} D \subseteq \text{Im} \Gamma^*$, weshalb die erste Gleichung lösbar ist. Aufgrund dessen gilt auch $\Sigma = F + AD = F + A \Gamma^* Y = F - D' Y$ unabhängig von A beziehungsweise \hat{X} . Damit ist die Lösbarkeit des Minimierungsproblems gezeigt. \square

Dieses Lemma führt auf direktem Wege zu den Yule-Walker Gleichungen.

Satz 2.1 (Yule-Walker Gleichungen) *Seien die Kovarianzmatrizen $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ gegeben und sei Γ_{p+1} wie zuvor definiert (und daher positiv semidefinit). Dann ist das Minimierungsproblem (2.6) in Bezug auf (e_1, \dots, e_p) unter $e_0 = I$ lösbar und erfüllt das folgende Gleichungssystem*

$$(e_0, -e_1, \dots, -e_p) \Gamma_{p+1} = \Sigma_p (I, 0, \dots, 0) \quad (2.21)$$

wobei $e_0 = I$ und Σ_p ist eine symmetrische $r \times r$ Matrix, die eindeutig durch $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ bestimmt wird.

Die erste Spalte beziehungsweise der erste Block der Matrixgleichung ergibt die Kovarianz des Fehlers ν_t , $\Sigma = f f'$. Der Index p deutet an, dass die Matrix von den ersten p Elementen der Kovarianzfolge von (z_t) bestimmt wird. Aufgrund der Definitheit von Γ_{p+1} und (2.8) ist Σ auch positiv semidefinit.

Die Gleichung der weiteren Spalten werden häufig als Normalgleichungen bezeichnet.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Lösung der Yule-Walker Gleichungen nicht eindeutig ist, wenn Γ_p singulär ist, sondern ein affiner nichttrivialer Raum. Im regulären Fall sind die Yule-Walker Gleichungen eindeutig.

Neben dem streng analytischen Zugang wollen wir auch noch eine intuitivere Herleitung der Yule-Walker Gleichungen anführen, die direkt aus der AR Darstellung folgt. Dabei gehen wir davon aus, dass $\mathbb{E}z_{t-j}\epsilon'_t = 0 \forall j > 0, \forall t$, d.h. ν_t entspricht dem Einschrittprognosefehler.

$$z_t = e_1 z_{t-1} + \dots + e_p z_{t-p} + f \epsilon_t / \cdot z'_{t-s}, s = 1, \dots, p, / \mathbb{E}() \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = e_1 \gamma_0 + \dots + e_p \gamma_{p-1} \quad (2.23)$$

$$\vdots \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \gamma_p = e_1 \gamma_{p-1} + \dots + e_p \gamma_0 \quad (2.25)$$

$$z_t = e_1 z_{t-1} + \dots + e_p z_{t-p} + f \epsilon_t / \cdot z' / \mathbb{E}() \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = e_1 \gamma_1 + \dots + e_p \gamma_p + f f' \quad (2.27)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Darstellung der Yule-Walker Gleichungen in der für die Ökonometrie typischen Schreibweise, die jedoch mittels einfacher Umformungen aus (2.21) herleitbar ist:

$$(e_1, \dots, e_p) \Gamma_p = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \quad (2.28)$$

$$\Sigma_p = \gamma_0 - (e_1, \dots, e_p) (\gamma_1, \dots, \gamma_p)' \quad (2.29)$$

Wie bereits erwähnt, besteht ein Prozess unserer Lösungsmenge aus einer regulären und einer singulären Komponente. Im Folgenden betrachten wir, was dies im Kontext der Yule-Walker Gleichungen bedeutet. Wir zerlegen den Prozess z_t gemäß der Wold Darstellung (siehe z.B. [4]) eindeutig in einen regulären z_t^r und einen singulären Anteil z_t^s , was sich dadurch rechtfertigen lässt, dass wir stets z_t^s orthogonal zu z_t^r wählen können, wie wir im Abschnitt über die homogene Lösung zeigen werden. Ähnlich wie zuvor gehen wir davon aus, dass $\mathbb{E}z_{t-j}^r \epsilon'_t = 0 \forall j > 0$ und $\mathbb{E}z_{t-j}^s \epsilon'_t = 0 \forall j \geq 0$, fordern aber zusätzlich $\mathbb{E}z_{t-j}^r (z_t^s)' = 0 \forall j = -p, \dots, p, \forall t$. (Wie wir sehen werden, wird diese Bedingung aufgrund der Anfangsbedingungen des singulären Prozesses stets eingehalten.)

$$(z_t^r + z_t^s) = e_1 (z_{t-1}^r + z_{t-1}^s) + \dots + e_p (z_{t-p}^r + z_{t-p}^s) + f \epsilon_t \quad (2.30)$$

Mit γ_j^r bezeichnen wir die Kovarianzdaten der regulären Komponente und mit γ_j^s die Kovarianzdaten der singulären Komponente. Aufgrund der Orthogonalität gilt $\Gamma_{p+1} = \Gamma_{p+1}^r + \Gamma_{p+1}^s$. Ähnlich wie zuvor wird die letzte Gleichung einerseits mit regulärer andererseits mit singulärer Komponente multipliziert und die Erwartung wird gebildet. Wir sehen, dass sich für die reguläre und die singuläre Komponente folgende getrennte Gleichungen ergeben:

$$(e_1, \dots, e_p) \Gamma_p^r = (\gamma_1^r, \dots, \gamma_p^r) \quad (2.31)$$

$$\Sigma_p = \gamma_0^r - (e_1, \dots, e_p) (\gamma_1^r, \dots, \gamma_p^r)' \quad (2.32)$$

und

$$(e_1, \dots, e_p)\Gamma_p^s = (\gamma_1^s, \dots, \gamma_p^s) \quad (2.33)$$

$$0 = \gamma_0^s - (e_1, \dots, e_p)(\gamma_1^s, \dots, \gamma_p^s)', \quad (2.34)$$

die als Summe wieder die Gesamtgleichungen (2.28) und (2.29) ergeben.

Für ein State Space System

$$x_{t+1} = Ex_t + F\epsilon_{t+1} \quad (2.35)$$

$$z_t = Cx_t \quad (2.36)$$

mit

$$x_t = \begin{pmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ \vdots \\ z_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} & e_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (I, 0, \dots, 0). \quad (2.38)$$

können wir eine alternative Darstellung der Yule-Walker Gleichungen angeben:

Lemma 2.2 (Äquivalente Darstellung der Yule-Walker Gleichungen)

$$\Gamma_p = E\Gamma_p E' + FF' \quad (2.39)$$

$$\gamma_p - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j} = 0 \quad (2.40)$$

2.3 Stationäre partikuläre Lösungen

Aus einer beliebigen Lösung der Yule-Walker Gleichungen (e_1, \dots, e_p) und $\Sigma_p = ff'$, f hat vollen Spaltenrang, lässt sich eine Transferfunktion $k(z)$

$$k(z) = \underbrace{(I - e_1 z - \cdots - e_p z^p)^{-1}}_{e(z)^{-1}} f \quad (2.41)$$

definieren, deren Impulsantwort-Sequenz $\{k_j\}$ (vgl. Spektralfaktoren) gegeben ist durch

$$k_j = \begin{cases} 0 & j < 0 \\ f & j = 0 \\ \sum_{i=1}^p e_i k_{j-i} & j > 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Sei (ϵ_t) der Input in das System, dann erfüllt der Output $z_t^r = k(z)\epsilon_t$ folgende Differenzengleichung

$$z_t^r - e_1 z_{t-1}^r - \cdots - e_p z_{t-p}^r = f \epsilon_t, \quad (2.43)$$

die auch als State Space Realisation geschrieben werden kann.

$$x_{t+1}^r = E x_t^r + F \epsilon_{t+1} \quad (2.44)$$

$$z_t^r = C x_t^r \quad (2.45)$$

mit

$$x_t^r = \begin{pmatrix} z_t^r \\ z_{t-1}^r \\ \vdots \\ z_{t-p+1}^r \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} & e_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (I, 0, \dots, 0). \quad (2.47)$$

wobei nicht angenommen wird, dass die State Space Realisation stets minimal ist. Die Matrix E bezeichnen wir als Companion-Matrix. Daraus ergibt sich für die Impulsantwort-Sequenz

$$k_j = C E^j F, \quad j \geq 0. \quad (2.48)$$

Es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen es sich hierbei tatsächlich um ein AR System mit stationären Lösungen handelt. Zuerst nehmen wir an, dass es sich beim Inputprozess (ϵ_t) um weißes Rauschen mit $\mathbb{E}\epsilon_t = 0$ und $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_t'] = I_q$ handelt. Darüber hinaus benötigen wir die Stabilität von $k(z)$, wobei wir sagen, $k(z)$ sei stabil, wenn jeder beschränkte Input von $k(z)$ auch einen beschränkten Output ergibt. Dies ist der Fall, wenn $k(z) = e^{-1}(z)f$ eine Potenzreihenentwicklung auf einem Gebiet besitzt, das den Einheitskreis umfasst. Dazu betrachten wir folgendes Lemma, das eine Lyapunov-Gleichung im Zusammenhang mit der Transferfunktion behandelt.

Lemma 2.3 Sei E eine $pr \times pr$ und F eine $pr \times q$ Matrix und sei $k(z) = (I - Ez)^{-1}F$.

(i) $k(z)$ ist stabil genau dann, wenn es eine Matrix Γ gibt, die eine Lyapunov Gleichung erfüllt:

$$\Gamma = E\Gamma E' + FF' \quad (2.49)$$

(ii) Sind alle Eigenwerte von E enthalten im offenen Einheitskreis ($\Leftrightarrow \det e(z) \neq 0, |z| \leq 1$, d.h. $e(z)$ ist stabil), dann existiert höchstens eine Lösung von (2.49).

(iii) Angenommen $k(z)$ sei stabil und wir definieren

$$\Gamma^r = \sum_{j=0}^{\infty} E^j F (E^j F)'. \quad (2.50)$$

Dann ist Γ^r eine positiv semidefinite Lösung von (2.49). Jede andere positiv semidefinite Lösung Γ von (2.49) erfüllt $\Gamma \geq \Gamma^r$, also ist Γ^r die minimale Lösung von (2.49).

Beweis:

(i) \Rightarrow Ist $k(z)$ stabil, existiert der folgende Grenzwert $\mathbb{E}[x_t^r(x_t^r)'] = \Gamma_p^r$ und lässt sich einfach in die geforderte Lyapunov Gleichung umformen:

$$\Gamma_p^r = \sum_{j=0}^{\infty} E^j F (E^j F)' = FF' + E \left(\sum_{j=0}^{\infty} E^j F (E^j F)' \right) E' = E\Gamma_p^r E' + FF'. \quad (2.51)$$

\Leftarrow Es existiert eine Matrix Γ , die die Lyapunov Gleichung erfüllt. Sei λ ein Eigenwert von E und v^* ein zugehöriger Linkseigenvektor, dann gilt $v^*E = \lambda v^*$, $v^* \neq 0$. Mittels der Lyapunov Gleichung folgt nun

$$v^*\Gamma v = v^*E\Gamma E'v + v^*FF'v = |\lambda|^2 v^*\Gamma v + v^*FF'v \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow (1 - |\lambda|^2)v^*\Gamma v = \|v^*F\|^2 \geq 0. \quad (2.53)$$

Ist $|\lambda| \geq 1$, d.h. λ ein „instabiler“ Eigenwert von E , folgt aus der letzten Gleichung $v^*F = 0$ und weiters $v^*(E - \lambda I, F) = 0$, was bedeutet, dass $\text{rk}(E - \lambda I, F) < nr$. Das bedeutet, dass es sich hierbei um einen nicht-erreichbaren Eigenwert von E , handelt. Sollte also ein Input eine zu diesem Eigenwert gehörige Komponente enthalten, tritt diese Komponente nicht im Output auf (liegt schon im Kern von F), daher ist $k(z) = (I - Ez)^{-1}F$ stabil.

(ii) Wir nehmen an, es gibt zwei verschiedene Lösungen der Lyapunov Gleichung, dann gilt für die Differenz der Lösungen $\Gamma^D = E\Gamma^D E'$. Da für alle Eigenwerte λ von E gilt $|\lambda| < 1$, hat diese Gleichung nur die triviale Lösung 0.

(iii) Dass Γ^r eine positiv semidefinite Lösung der Lyapunov Gleichung ist, folgt auf dem Beweis von (i).

Die zweite Behauptung lässt sich folgendermaßen zeigen: Wir definieren zunächst

$$\Delta(m) = \sum_{j=m+1}^{\infty} E^j F (E^j F)'$$
 (2.54)

und erhalten

$$\Gamma^r = \sum_{j=0}^{\infty} E^j F (E^j F)' = \sum_{j=0}^m E^j F (E^j F)' + \Delta(m).$$
 (2.55)

Es ist leicht einzusehen, dass die Folge $\{\Delta(m)\}$ monoton fallend ist und daher $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta(m) = 0$. Für eine positiv semidefinite Lösung Γ der Lyapunov Gleichung gilt

$$\Gamma = E\Gamma E' + FF'$$
 (2.56)

$$E\Gamma E' = E^2\Gamma(E^2)' + EF(EF)'$$
 (2.57)

$$\vdots$$
 (2.58)

$$E^m\Gamma(E^m)' = E^{m+1}\Gamma(E^{m+1})' + E^m F (E^m F)'. \quad (2.59)$$

Durch wiederholtes Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$\Gamma = E^{m+1}\Gamma(E^{m+1})' + \sum_{j=0}^m E^j F (E^j F)'. \quad (2.60)$$

Daraus ergibt sich

$$\Gamma - \Gamma^r = \underbrace{E^{m+1}\Gamma(E^{m+1})'}_{\geq 0} - \Delta(m) \quad (2.61)$$

$$\Rightarrow \Gamma - \Gamma^r \geq -\Delta(m). \quad (2.62)$$

Da $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta(m) = 0$ erhalten wir $\Gamma \geq \Gamma^r$.

□

Mittels dem ersten Punkt des letzten Lemmas lässt sich folgender Satz beweisen.

Satz 2.2 Die Transferfunktion $k(z)$, die mittels einer Lösung der Yule-Walker Gleichungen über (2.41) definiert wurde, ist stabil.

Beweis: Laut der äquivalenten Darstellung der Yule-Walker Gleichungen ist für E und F mit Γ_p eine Lyapunov Gleichung erfüllt und die Transferfunktion ist $k(z) = C(I - Ez)^{-1}F = e(z)^{-1}f$ somit laut Lemma 2.3 stabil. □

Dieser Satz erlaubt uns nun, den Prozess (z_t^r) in folgender Weise anzuschreiben:

$$z_t^r = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \epsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} C E^j F \epsilon_{t-j}. \quad (2.63)$$

Weiters wissen wir nun, dass dieser Prozess stationär ist. Außerdem handelt es sich um einen regulären Prozess, denn der lineare Prädiktor $\hat{z}_{t,h}^r = \sum_{j=h}^{\infty} k_j \epsilon_{t+h-j}$ konvergiert im quadratischen Mittel für $h \rightarrow \infty$ gegen 0.

Im Fall der Stabilität der Transferfunktion $k(z)$ erhalten wir die Kovarianzmatrix von x_t^r und somit die Block-Toeplitz-Kovarianzmatrix von z_t^r als

$$\mathbb{E}[x_t^r (x_t^r)'] = \Gamma_p^r = \sum_{j=0}^{\infty} E^j F (E^j F)', \quad (2.64)$$

die laut dem dritten Punkt des letzten Lemmas die Lyapunov-Gleichung erfüllt.

Satz 2.3 *Wenn alle Eigenwerte von E innerhalb des (offenen) Einheitskreises liegen (z.B. wenn $\Sigma_p > 0$), dann*

$$\gamma_j^r = \gamma_j, \quad j = 0, \dots, p \quad (2.65)$$

wobei (γ_j^r) die Kovarianzfolge von (z_t^r) bezeichnet.

Beweis: Da wir aus Lemma 2.3 (ii) wissen, dass die Lösung der Lyapunov Gleichung in unserem Fall eindeutig ist, und da sowohl Γ_p als auch Γ_p^r die Lyapunov Gleichung erfüllen, (siehe Lemma 2.3 (iii) und (2.39)), gilt $\Gamma_p^r = \Gamma_p$, also $\gamma_j^r = \gamma_j, \forall j = 0, \dots, p-1$.

Für die betrachtete Lösung (e_1, \dots, e_p) sind die Yule-Walker Gleichungen mit Γ_p^r erfüllt, daher folgt über die äquivalente Darstellung der Yule-Walker Gleichungen

$$\gamma_p^r - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}^r = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_p - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j} = 0 \quad (2.66)$$

Mit $\gamma_j^r = \gamma_j, \forall j = 0, \dots, p-1$ und $e_0 = I$ folgt schließlich auch $\gamma_p^r = \gamma_p$. \square

Satz 2.4 *Die Transferfunktion $k(z) = e^{-1}(z)f$, die mittels einer Lösung (e_1, \dots, e_p) der Yule-Walker Gleichungen über (2.41) definiert wurde, ist für alle Lösungen gleich. Die Transferfunktion $k(z)$ ist also eindeutig durch $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ bestimmt.*

Beweis: Der Beweis folgt einem Workingpaper A. Fillers „Comments on Inouye 1983 paper“, das auf einer Idee B. Andersons beruht.

Wir betrachten zwei verschiedene Lösungen

$$(e_1^1, \dots, e_p^1) \quad \text{und} \quad (e_1^2, \dots, e_p^2) \quad (2.67)$$

der Yule-Walker Gleichungen und die zugehörigen partikulären Lösungen

$$z_t^{r,1} = e^1(z)^{-1} f \epsilon_t \text{ und } z_t^{r,2} = e^2(z)^{-1} f \epsilon_t. \quad (2.68)$$

Weiters betrachten wir die Lyapunov Gleichungen

$$\Gamma_p = E_1 \Gamma_p E_1' + FF' \text{ und } \Gamma_p = E_2 \Gamma_p E_2' + FF', \quad (2.69)$$

die jeweils eine eindeutig bestimmte minimale Lösung besitzen,

$$\Gamma_p^{r,1} = \sum_{j=0}^{\infty} E_1^j F (E_1^j F)' \text{ und } \Gamma_p^{r,2} = \sum_{j=0}^{\infty} E_2^j F (E_2^j F)'. \quad (2.70)$$

Aus den Yule-Walker Gleichungen folgt

$$(E_1 - E_2) \Gamma_p = 0 \text{ und daher } (E_1 - E_2) \Gamma_p (E_1 - E_2)' = 0. \quad (2.71)$$

Da $\Gamma_p^{r,1}$ und $\Gamma_p^{r,2}$ minimale Lösungen der jeweiligen Lyapunov Gleichung sind, gilt $\Gamma_p \geq \Gamma_p^{r,1}$ und $\Gamma_p \geq \Gamma_p^{r,2}$ und folglich

$$(E_1 - E_2) \Gamma_p^{r,1} (E_1 - E_2)' = 0 \text{ und } (E_1 - E_2) \Gamma_p^{r,2} (E_1 - E_2)' = 0 \quad (2.72)$$

$$\iff (E_1 - E_2) (\Gamma_p^{r,1})^{1/2} \text{ und } (E_1 - E_2) (\Gamma_p^{r,2})^{1/2} \quad (2.73)$$

$$\iff E_1 (\Gamma_p^{r,1})^{1/2} = E_2 (\Gamma_p^{r,1})^{1/2} \text{ und } E_1 (\Gamma_p^{r,2})^{1/2} = E_2 (\Gamma_p^{r,2})^{1/2}. \quad (2.74)$$

Eingesetzt in die Lyapunov Gleichungen

$$\Gamma_p^{r,1} = E_1 \Gamma_p^{r,1} E_1' + FF' \text{ und } \Gamma_p^{r,2} = E_2 \Gamma_p^{r,2} E_2' + FF', \quad (2.75)$$

erhalten wir

$$\Gamma_p^{r,1} = E_2 \Gamma_p^{r,1} E_2' + FF' \text{ und } \Gamma_p^{r,2} = E_1 \Gamma_p^{r,2} E_1' + FF'. \quad (2.76)$$

Da $\Gamma_p^{r,1}$ und $\Gamma_p^{r,2}$ minimale Lösungen der jeweiligen Lyapunov Gleichungen (2.75) sind und zusätzlich die jeweils andere auch erfüllen, gilt $\Gamma_p^{r,1} \geq \Gamma_p^{r,2}$ und $\Gamma_p^{r,2} \geq \Gamma_p^{r,1} \implies \Gamma_p^{r,1} = \Gamma_p^{r,2}$.

Wären die Transferfunktionen unterschiedlich, d.h. $e^1(z)^{-1} f \neq e^2(z)^{-1} f$, würde dies auf den Widerspruch führen, dass

$$\Gamma_p^{r,1} = \sum_{j=0}^{\infty} E_1^j F (E_1^j F)' \neq \sum_{j=0}^{\infty} E_2^j F (E_2^j F)' = \Gamma_p^{r,2}. \quad (2.77)$$

□

Dieser Satz liefert uns eine wichtige Erkenntnis:

Korollar 2.1 1. *Unabhängig von der gewählten Lösung der Yule-Walker Gleichungen erhalten wir stets dieselbe partikuläre Lösung $z_t^r = k(z) \epsilon_t = e^{-1}(z) f \epsilon_t$.*

2. Für den Fall, dass $\Sigma_p > 0$, d.h. bei regulären AR Systemen, oder wenn wir eine beliebige stabile Lösung (e_1, \dots, e_p) der Yule-Walker Gleichungen ($\Leftrightarrow \det e(z) \neq 0, |z| \leq 1$) finden können, stimmen die ersten Elemente der Kovarianzfolge von z_t^r mit den gegebenen Daten $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ überein.
3. Um eine Lösung für ein singuläres AR System zu finden, deren Kovarianzfolge $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ erfüllt, müssen wir geeignete homogene Lösungen betrachten.

Für das Spektrum des Prozesses (z_t^r) bedeutet der letzte Satz, der besagt, dass jede Lösung $e(z)$ der Yule-Walker Gleichungen und jede Matrix f mit vollem Spaltenrang q , sodass $ff' = \Sigma$ gilt, dieselbe Transferfunktion liefert, dass durch

$$f_{z^r}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} e(e^{-i\lambda})^{-1} f f' e(e^{-i\lambda})^{-1*} \quad (2.78)$$

dieselbe rationale spektrale Dichte definiert wird (siehe [2]).

2.4 Stationäre homogene Lösungen

Wir gehen davon aus, die Yule-Walker Gleichungen gelöst und die partikuläre Lösung wie im letzten Abschnitt bestimmt zu haben. Für den Fall, dass die Kovarianzfunktion der partikulären Lösung die vorgegebenen Kovarianzdaten nicht reproduziert, wollen wir für jede Lösung e_1, \dots, e_p der Yule-Walker Gleichungen zumindest eine homogene Lösung finden, d.h. einen stationären Prozess, der $e(z)z_t^s = 0$ erfüllt. Ein solcher Prozess ist singulär, weil z_t^s exakt aus der Vergangenheit $z_{t-1}^s, \dots, z_{t-p}^s$ prognostiziert werden kann. Die im vorigen Abschnitt beschriebene partikuläre Lösung z_t^r ist regulär. Durch eine geeignete Wahl von Anfangsbedingungen sind z_t^r und z_t^s orthogonal. Daher wollen wir die vorgegebene positiv semidefinite Block-Toeplitz-Matrix der Kovarianzen in einen singulären und einen regulären Teil zerlegen. Den regulären Teil erhalten wir durch die partikuläre Lösung, weswegen sich der singuläre Teil folgendermaßen ergibt:

$$\Gamma_{p+1}^s = \Gamma_{p+1} - \Gamma_{p+1}^r \quad (2.79)$$

Wir sind also auf der Suche nach einer singulären stationären homogenen Lösung, deren Kovarianzen Γ_{p+1}^s erfüllen.

2.4.1 Existenz stationärer homogener Lösungen

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Frage, ob wir in unserem Fall stationäre homogene Lösungen finden können, deren Kovarianzfunktion Γ_{p+1}^s liefert, und betrachten dazu wieder das zuvor beschriebene State Space System.

Die folgenden Sätze aus [5] zeigen, dass wir mit geeigneten Anfangsbedingungen eine stationäre homogene Lösung finden können.

Satz 2.5 Sei K eine positiv semidefinite Matrix, die

$$K = EKE' \tag{2.80}$$

erfüllt. Dann erfüllt der Prozess (x_t)

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ex_t & t \geq 0 \\ x_{t-1} = KE'K^+x_t & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.81}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbb{E}x_0 = 0$ und $\mathbb{E}[x_0x_0'] = K$

$$x_{t+1} = Ex_t \text{ fast überall } \forall t \tag{2.82}$$

und ist (schwach) stationär.

Beweis: Aufgrund der Symmetrie von K und K^+ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|x_0 - KK^+x_0\|^2 &= \mathbb{E}(x_0 - KK^+x_0)(x_0 - KK^+x_0)' \\ &= K - KK^+K - KK^+K + -KK^+KK^+K = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $x_0 = KK^+x_0$ fast überall und $x_0 \in \text{im}K$, d.h. x_0 ist Element des Bildes von K .

Sei $L = KE'K^+$, dann können wir zeigen, dass

$$ELK = K, \quad LEK = K, \quad LKL' = K, \quad EK = KL' \tag{2.83}$$

Die erste Gleichung erhalten wir aus

$$ELK = E(KE'K^+)K = (EKE')K^+K = KK^+K = K$$

Für die zweite Gleichung von (2.83) definieren wir eine Zerlegung $K = PP'$ mit einer Matrix P mit vollem Spaltenrang.

$$P'EP(P'EP)' = P' \underbrace{EPP'E'}_{EKE'} P = P' \underbrace{PP'}_K P = P'P(P'P)'$$

Da P vollen Spaltenrang hat, ist $P'P$ invertierbar. Daher gilt für $U = (P'P)^{-1}P'EP$ laut der letzten Gleichung $UU' = I$. Also ist U orthogonal und es gilt auch $U'U = I$.

$$P \overbrace{P'E'P(P'P)^{-2}P'EP}^{U'U} P' = PP'$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $K^+ = P(P'P)^{-2}P'$, weil $K^+ = K^+KK^+$ und $K = KK^+K$. Daher gilt für die letzte Gleichung

$$\underbrace{KE'K^+}_{L} EK = K.$$

Die dritte Gleichung von (2.83) gilt, weil

$$LKL' = L(EKE')L' = (LEK)E'L' = (LEK)' = K.$$

Die vierte Gleichung von (2.83) erhalten wir folgendermaßen:

$$EK = E(LKL') = (ELK)L' = KL'$$

Aus der Tatsache, dass $x_0 \in \text{im}K$, und der vierten Gleichung von (2.83) erhalten wir, dass $x_t \in \text{im}K \forall t$ fast überall. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} Ex_{-1} &= \overbrace{EKE'}^K K^+ x_0 = x_0 \\ Ex_{-2} &= ELx_1 = EL \overbrace{Ky_{-1}}^{x_{-1}} \\ &= LE \underbrace{Ky_{-1}}_{x_{-1}} = Lx_0 = x_{-1} \end{aligned}$$

und daher induktiv $x_{t+1} = Ex_t \forall t$ fast überall.

Die Stationarität des Prozesses folgt aus den Anfangsbedingungen.

- $\mathbb{E}x_t = E^t \mathbb{E}x_0 = 0$
- Da die Varianz des Prozesses der Spur der Kovarianzmatrix $\mathbb{E}[x_t x_t']$ mit Lag 0 entspricht, erhalten wir

$$\mathbb{E}[x_t' x_t] = \text{tr} \mathbb{E}[x_t x_t'] = \text{tr} E^t \mathbb{E}[E^t x_0 x_0' E^{tt}] = \text{tr} E^t K E^{tt} = \text{tr} K < \infty \quad (2.84)$$

- Die Kovarianzmatrix $\mathbb{E}[x_{t+s} x_t']$ ist unabhängig von t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_{t+s} x_t'] &= E^s \mathbb{E}[x_t x_t'] \stackrel{t \geq 0}{=} E^s \mathbb{E}[E^t x_0 x_0' E^{tt}] = E^s E^t K E^{tt} = E^s K \\ &\stackrel{t \leq 0}{=} E^s \mathbb{E}[L^t x_0 x_0' L^{tt}] = E^s L^t K L^{tt} \underbrace{\stackrel{KL'=EK}{=} E^s K}_{LEK=K} \end{aligned}$$

□

Da sowohl Γ_p als auch Γ_p^r die Lyapunov Gleichung (2.49) erfüllen, gilt für die Differenz $\Gamma_p^s = E\Gamma_p^s E'$. Die positive Semidefinitheit der Matrix Γ_p^s ist daraus ersichtlich, dass sowohl Γ_p als auch Γ_p^r positiv semidefinite Lösungen von (2.49) sind und Γ_p^r die minimale Lösung ist.

Mittels des letzten Satzes erhalten wir eine geeignete stationäre homogene Lösung, wenn wir einen Zufallsvektor x_0 mit $\mathbb{E}x_0$ und $K = \mathbb{E}[x_0 x_0'] = \Gamma_p^s$ wählen. Die ersten r Komponenten $z_t^s = Cx_t$ liefern uns den gesuchten Prozess mit den passenden Kovarianzen. Der folgende Satz liefert den Beweis zu dieser Vorgangsweise:

Satz 2.6 Seien die Kovarianzdaten $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ gegeben und sei Γ_{p+1} die zugehörige positiv semidefinite Block-Toeplitz-Matrix, dann ist der mittels $\Gamma_p^s = \Gamma_p - \Gamma_p^r$ und des Satzes 2.5 definierte Prozess z_t^s der gesuchte singuläre Prozess, sodass

$$\tilde{z}_t = z_t^r + z_t^s \quad (2.85)$$

die vorgegebenen Kovarianzdaten realisiert, wobei z_t^r die zuvor beschriebene eindeutige partikuläre Lösung ist.

Beweis: Wie schon erwähnt, können wir mit entsprechenden Anfangsbedingungen für den singulären Prozess garantieren, dass z_t^r und z_t^s orthogonal sind und zusätzlich $\mathbb{E}z_{t-j}^r(z_t^s)' = 0 \quad \forall j = -p, \dots, p \quad \forall t$ gilt. Daher folgt unmittelbar für die State Space Darstellung

$$\mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t'] = \mathbb{E}[x_t^r (x_t^r)'] + \mathbb{E}[x_t^s (x_t^s)'] \quad (2.86)$$

$$= \Gamma_p^r + \Gamma_p^s = \Gamma_p \quad (2.87)$$

Folglich stimmen die ersten p Kovarianzmatrizen von \tilde{z}_t mit den vorgegebenen Daten überein:

$$\gamma_j = \tilde{\gamma}_j \quad j = 0, \dots, p-1. \quad (2.88)$$

Aus $z_t - e_1 z_{t-1} - \dots - e_p z_{t-p} = 0$ folgt sofort

$$\gamma_p^s - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}^s = 0. \quad (2.89)$$

Aufgrund der äquivalenten Darstellung der Yule-Walker Gleichungen, wissen wir, dass

$$\gamma_p - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_p^r - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}^r = 0. \quad (2.90)$$

In wenigen Umformungen erhalten wir nun den Abschluss des Beweises:

$$\gamma_p^s - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}^s + \gamma_p^r - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}^r = \gamma_p - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j} = 0 \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}_p - \sum_{j=1}^p e_j \tilde{\gamma}_{p-j} = \gamma_p - \sum_{j=1}^p e_j \gamma_{p-j}. \quad (2.92)$$

Aus (2.88) folgt $\gamma_p = \tilde{\gamma}_p$. □

Diese Vorgangsweise ermöglicht es uns zu sagen, dass der gesuchte singuläre stationäre Prozess, der die homogene Gleichung erfüllt, existiert, verrät uns aber nicht allzu viel über das genaue Aussehen dieses Prozesses.

2.4.2 Struktur stationärer homogener Lösungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Struktur der stationären Prozesse (z_t^s) , die $e(z)z_t^s = 0$ erfüllen und deren Kovarianzfolge in ihren ersten Elementen mit $\gamma_0^s, \dots, \gamma_p^s$ übereinstimmt.

Wir benötigen folgende Definition aus [6]:

Definition 2.1 (Harmonischer Prozess) *Der Prozess (x_t)*

$$x_t = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} v_j \tag{2.93}$$

mit $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^r$ und $\lambda_j \in [-\pi, \pi]$ ist stationär, wenn

$$\mathbb{E}v_j = \begin{cases} 0 & \lambda_j \neq 0 \\ \mathbb{E}x_t & \lambda_j = 0 \end{cases}, \quad \mathbb{E}[v_j^* v_l] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[v_j v_l^*] = 0, \quad j \neq l \tag{2.94}$$

und x_t ist reell, wenn $-\lambda_{1+j} = \lambda_{h-j}$ und $v_{1+j} = \bar{v}_{h-j}$.

Derartige Prozesse werden zyklische oder harmonische Prozesse genannt.

Sei z_j eine Nullstelle von $\det e(z)$, daher ist $e(z_j)$ singulär und es gibt ein Element v_j aus dem Rechtskern von $e(z_j)$. Dann ist $x_t = z_j^{-t} v_j$ eine homogene Lösung, denn $e(z)x_t = z_j^{-t} v_j - e_1 z_j^{-t+1} v_j - \dots - e_p z_j^{-t+p} v_j = z_j^{-t} e(z_j) v_j = 0$. Dies führt zu folgendem Satz:

Satz 2.7 *Als mögliche stationäre reelle homogene Lösungen kommen nur harmonische Prozesse in Frage. Die Frequenzen λ_j werden durch $\det e(z) = 0, |z| = 1$ bestimmt. Die zufälligen Gewichte v_j sind Elemente des Rechtskerns von $e(e^{i\lambda_j})$.*

Beweis: Aus der Theorie der linearen Differenzgleichungen ist hinlänglich bekannt, dass alle homogenen Lösungen folgende Form haben:

$$x_t = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=0}^{n_j-1} c_k t^k \right) z_j^{-t} v_j, \tag{2.95}$$

wobei m die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $\det e(z)$ und n_j die Vielfachheit der Nullstelle z_j bezeichnen. v_j ist ein Element aus dem Rechtskern von $e(z_j)$ und c_j sind beliebige reelle Koeffizienten.

Daraus ist ersichtlich, dass es nur dann stationäre homogene Lösungen geben kann, wenn es Nullstellen z_j mit $|z_j| = 1$ gibt. Darüber hinaus müssen wir $c_k = 0, k > 0$ wählen.

Als Kandidaten reeller stationärer homogener Lösungen kommen also nur harmonische Prozesse in Frage. □

Um geeignete harmonische Prozesse für unsere Differenzgleichung zu finden, betrachten wir zunächst folgende Faktorisierung

$$\det e(z) = p_1(z)p_2(z), \quad (2.96)$$

wobei $p_1(z)$ alle Linearfaktoren mit den Nullstellen $|z_j| \neq 1$ und $p_2(z)$ alle Linearfaktoren mit Nullstellen am Einheitskreis $|z_j| = 1$ enthält.

Wir setzen einen beliebigen harmonischen Prozess in unsere homogene Gleichung ein.

$$e(z) \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} v_j = \sum_{j=1}^h e(z) e^{i\lambda_j t} v_j \quad (2.97)$$

$$= \sum_{j=1}^h (I e^{i\lambda_j t} - e_1 e^{i\lambda_j(t-1)} - \dots - e_p e^{i\lambda_j(t-p)}) v_j \quad (2.98)$$

$$= \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} (I - e_1 e^{-i\lambda_j} - \dots - e_p e^{-i\lambda_j p}) v_j \quad (2.99)$$

$$= \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} e(e^{-i\lambda_j}) v_j \quad (2.100)$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $e^{i\lambda_j t}$, $\lambda_j \in [-\pi, \pi]$, in t erhalten wir, dass der harmonische Prozess nur dann eine Lösung der homogenen Gleichung sein kann, wenn $e(e^{-i\lambda_j}) v_j = 0$, $\forall j$. Daher muss $e(e^{-i\lambda_j})$ singular sein. Die $e^{-i\lambda_j}$, für die dies zutrifft, entsprechen den Nullstellen von $p_2(z)$, weswegen h mit dem Grad von $p_2(z)$ übereinstimmt. Da für jede Nullstelle $e^{-i\lambda}$ auch die konjugiert Komplexe $e^{i\lambda}$ Nullstelle des reellen Polynoms $p_2(z)$ ist, wird $-\lambda_{1+j} = \lambda_{h-j}$ erfüllt.

Die zufälligen Gewichte v_j sind Elemente des Rechtskerns von $e(e^{-i\lambda_j})$, deren Kovarianzen $F_j := \mathbb{E}[v_j v_j^*]$ sich eindeutig durch die eindeutige Beziehung der Kovarianzfunktion des harmonischen Prozesses $\gamma_k^s = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j k} F_j$ und seiner spektralen Verteilungsfunktion $F(\lambda) = \sum_{j: \lambda_j \leq \lambda} F_j$ ergeben:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^s \\ \gamma_1^s \\ \vdots \\ \gamma_{h-1}^s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{r \times r} & \dots & I_{r \times r} \\ e^{i\lambda_1} I_{r \times r} & \dots & e^{i\lambda_h} I_{r \times r} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\lambda_1(h-1)} I_{r \times r} & \dots & e^{i\lambda_h(h-1)} I_{r \times r} \end{pmatrix}}_{V'} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_h \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

V' ist regulär als Transponierte einer verallgemeinerten Vandermonde-Matrix. Für vorgegebene Kovarianzen $\gamma_0^s, \dots, \gamma_{(h-1)}^s$ können also F_1, \dots, F_h eindeutig bestimmt werden.

Der Rang der Kovarianzmatrix F_j entspricht der Anzahl an linear unabhängigen Komponenten von v_j .

Falls $\text{rk} F_j = 1$, kann man F_j faktorisieren als $F_j = C_j C_j^*$, $C_j \in \mathbb{C}^{r \times 1}$, wobei C_j ein Element der Rechtskerns von $e(e^{i\lambda_j})$ ist, und erhält die zufälligen Gewichte als

$C_j v_j$, wobei v_j ein eindimensionaler Prozess mit $\mathbb{E}v_j = 0$ und $\mathbb{E}v_j \bar{v}_j = 1$.
 Allgemeiner, falls $\text{rk}F_j = k$, lassen sich die zufälligen Gewichte als Summe $v_j = C_{j1}v_{j1} + \dots + C_{jk}v_{jk}$ darstellen, wobei $C_{ji} \in \mathbb{C}^{r \times 1}$, $i = 1, \dots, k$ linear unabhängige Vektoren aus dem Kern von $e^{i\lambda_j}$ und v_{ji} eindimensionale Prozesse mit $\mathbb{E}v_{ji} = 0$, $\mathbb{E}v_{ji}\bar{v}_{ji} = 1$ und $\mathbb{E}v_{ji}\bar{v}_{jl} = 0$, $i \neq l$ sind, und F_j lässt sich schreiben als Summe $F_j = C_{j1}C_{j1}^* + \dots + C_{jk}C_{jk}^*$.
 Weiters muss darauf geachtet werden, dass die Bedingungen für einen harmonischen Prozess eingehalten werden, $v_{1+j} = \bar{v}_{h-j}$ und $\mathbb{E}[v_j v_l^*] = 0$, $j \neq l$.

Angenommen $\text{rk}F_j = 1 \forall j$, dann bedeutet dies, dass der gesuchte Prozess mit den gesuchten Kovarianzdaten folgende Gestalt hat:

$$z_t^s = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} C_j v_j, \quad (2.102)$$

$$C_j \in \mathbb{C}^{r \times 1}, \quad (2.103)$$

$$\mathbb{E}v_j = 0, \quad \mathbb{E}v_j \bar{v}_j = 1, \quad \mathbb{E}v_j \bar{v}_k = 0. \quad (2.104)$$

Die spektrale Verteilungsfunktion des Prozesses ist

$$F^s(\lambda) = \sum_{j:\lambda_j \leq \lambda} C_j C_j^*. \quad (2.105)$$

2.4.3 Anfangsbedingungen

Bis zu dieser Stelle haben wir es vermieden, die genauen Anfangsbedingungen anzugeben, denen ein singulärer Prozess genügen muss, damit er orthogonal auf die eindeutige reguläre Lösung z_t^r und den Fehler ϵ_t ist. An dieser Stelle wissen wir nun genug über die genaue Form der singulären Lösung, um geeignete Bedingungen anzugeben.

Satz 2.8 *Unter den Anfangsbedingung $\mathbb{E}v_j \epsilon_t' = 0$, $j = 1, \dots, h \forall t \in \mathbb{Z}$ sind z_t^r und z_t^s orthogonal.*

Beweis: Die eindeutige reguläre partikuläre Lösung ist von der Form $z_t^r = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \epsilon_{t-j}$. Ein geeigneter singulärer Prozess hat die Form $z_t^s = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} v_j$. Damit diese Prozesse orthogonal sind, muss gelten:

$$\mathbb{E}z_t^s (z_t^r)' = \mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{\infty} k_l \epsilon_{t-l}\right) \left(\sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} v_j\right)' = \sum_{l=0}^{\infty} k_l \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} \mathbb{E}\epsilon_{t-l} v_j' = 0 \quad (2.106)$$

z_t^r und z_t^s sind also orthogonal, wenn die zufälligen Gewichte v_j , $j = 1, \dots, h$ orthogonal auf jedes Element des weißen Rauschens sind. \square

Darüber hinaus ist z_t^s wie gefordert stets orthogonal auf den Fehler und auch orthogonal auf $z_{t-l}^r, l > 0$.

Aus der Orthogonalität von z_t^r und z_t^s folgt, dass $z_t = z_t^r + z_t^s$ stationär ist.

Behauptung 2.1 *Angenommen, die Anfangsbedingung $\mathbb{E}v_j\epsilon_t' = 0, j = 1, \dots, h \forall t$ ist verletzt, dann ist $z_t = z_t^r + z_t^s$ nicht mehr stationär.*

Beweis: Um unsere Behauptung zu zeigen, betrachten wir betrachten wir die Kovarianzfunktion:

$$\mathbb{E}(z_t^r + z_t^s)(z_{t+s}^r + z_{t+s}^s)' = \mathbb{E}z_t^r(z_{t+s}^r)' + \mathbb{E}z_t^s(z_{t+s}^s)' + \mathbb{E}z_t^r(z_{t+s}^s)' + \mathbb{E}z_t^s(z_{t+s}^r)' \quad (2.107)$$

Wir betrachten den dritten Term der rechten Seite genauer:

$$\mathbb{E}z_t^r(z_{t+s}^s)' = \mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{\infty} k_l \epsilon_{t-l}\right) \left(\sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j(t+s)} v_j\right)' = \sum_{l=0}^{\infty} k_l \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j(t+s)} \mathbb{E}\epsilon_{t-l} v_j' \quad (2.108)$$

Um das Problem zu vereinfachen, nehmen wir an, dass es nur ein m und ein u gibt, sodass $\mathbb{E}\epsilon_u v_m' \neq 0$. Dann folgt aus der letzten Gleichung mittels $t - l = u$

$$= e^{i\lambda_m(t+s)} k_{t-u} \mathbb{E}\epsilon_u v_m'. \quad (2.109)$$

Somit ist die Kovarianzfunktion nicht mehr unabhängig von t und z_t nicht mehr stationär. \square

Wir haben also gezeigt, dass die Anfangsbedingungen $\mathbb{E}v_j\epsilon_t = 0, j = 1, \dots, h \forall t \in \mathbb{Z}$ in unserem Fall sowohl hinreichend als auch notwendig sind, damit z_t^r und z_t^s orthogonal sind und $z_t = z_t^r + z_t^s$ stationär ist.

Darüber hinaus garantieren die Anfangsbedingungen, dass die Darstellung des Prozesses $z_t = z_t^r + z_t^s$ der Wold Zerlegung entspricht:

Satz 2.9 *Unter den Anfangsbedingungen $\mathbb{E}v_j\epsilon_t = 0, j = 1, \dots, h \forall t \in \mathbb{Z}$ entspricht $z_t = z_t^r + z_t^s$ der Wold Zerlegung.*

Beweis: Der Zeitbereich $\mathbb{H}_x(t)$ eines Prozesses x_t bezeichnet den von $\{x_t^{(i)} | t \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r\}$ erzeugten Hilbertraum.

Die Wold Zerlegung besagt, dass ein Prozess z_t als eindeutige orthogonale Summe $z_t = z_t^r + z_t^s$ geschrieben werden kann, wobei z_t^r und z_t^s (komponentenweise) Elemente des Zeitbereichs von $(z_t), \mathbb{H}_z(t)$ sind.

In [6] wird gezeigt, dass der Zeitbereich $\mathbb{H}_s(t)$ eines harmonischen Prozesses gleich dem Hilbertraum $\mathbb{H}_v(t)$ ist, der von den zufälligen Gewichten erzeugt wird, $\{v_j^{(i)} | j = 1, \dots, h, i = 1, \dots, r\}$. Desweiteren wird gezeigt, dass der Zeitbereich $\mathbb{H}_r(t)$ des

regulären Prozesses $z_t^r = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \epsilon_{t-j}$ mit dem Zeitbereich von (ϵ_t) , $\mathbb{H}_\epsilon(t)$, übereinstimmt.

Aufgrund der Anfangsbedingung sind $\mathbb{H}_v(t)$ und $\mathbb{H}_\epsilon(t)$ orthogonal.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{H}_s(t) \subseteq \mathbb{H}_z(t)$ und $\mathbb{H}_r(t) \subseteq \mathbb{H}_z(t)$.

Aus der AR Darstellung $\underbrace{z_t - e_1 z_{t-1} - \dots - e_p z_{t-p}}_{\mathbb{H}_z(t)} = \epsilon_t$ folgt, dass $\mathbb{H}_r(t) = \mathbb{H}_\epsilon(t) \subseteq$

$\mathbb{H}_z(t)$.

Aus $\underbrace{z_t - z_t^r}_{\mathbb{H}_z(t)} = z_t^s$ folgt somit, dass $\mathbb{H}_s(t) \subseteq \mathbb{H}_z(t)$.

□

2.5 Lösungsmenge

An dieser Stelle fassen wir nochmals zusammen, wie die Lösungsmenge aller reellen und stationären AR(p) Prozesse z_t aussieht, die die vorgegebenen Kovarianzdaten $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ realisieren.

Aus Satz 2.4 folgt, dass die mittels Transferfunktion bestimmte partikuläre Lösung, die, wie beschrieben regulär ist, für alle Lösungen $e(z)$ der Yule-Walker Gleichungen stets eindeutig gegeben ist als unendlicher Moving Average Prozess

$$z_t^r = e^{-1}(z) f \epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \epsilon_{t-j}, \tag{2.110}$$

der eine rationale spektrale Dichte

$$f_{z^r}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} e(e^{-i\lambda})^{-1} f f' e(e^{-i\lambda})^{-1*} \tag{2.111}$$

besitzt.

Dadurch ist auch der reguläre Anteil der Kovarianzdaten eindeutig gegeben als Block-Toeplitz-Kovarianzmatrix Γ_{p+1}^r des regulären Prozesses z_t^r .

Mittels der Anfangsbedingungen $\mathbb{E}v_j \epsilon_t = 0, j = 1, \dots, h \forall t$ des harmonischen Prozesses kann die Orthogonalität von z_t^r und z_t^s gewährleistet werden und die Block-Toeplitz-Kovarianzmatrix, wie bereits erwähnt, in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegt werden.

$$\Gamma_{p+1} = \Gamma_{p+1}^r + \Gamma_{p+1}^s \tag{2.112}$$

Folglich ist auch der singuläre Anteil der Kovarianzdaten Γ_{p+1}^s , den der singuläre Prozess z_t^s erfüllen muss, eindeutig gegeben.

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, ist so ein singulärer Prozess für eine Lösung $e(z)$ der Yule-Walker Gleichungen gegeben als harmonischer Prozess, dessen Winkelfrequenzen λ_j und damit auch die Zahl h an λ_j durch die Nullstellen von $e(z)$ am Einheitskreis bestimmt sind und dessen zufällige Gewichte v_j im

Rechtskern von $e(e^{i\lambda_j})$ liegen. Die zweiten Momente der Gewichte sind eindeutig durch den singulären Anteil der Kovarianzdaten Γ_{p+1}^s festgelegt. Wir erhalten also einen harmonischen Prozess

$$z_t^s = \sum_{j=0}^h e^{i\lambda_j t} v_j, \tag{2.113}$$

dessen eindeutig bestimmte Verteilungsfunktion eine Sprungfunktion ist und daher keine spektrale Dichte besitzt.

Der Prozess z_t besitzt folglich keine spektrale Dichte, wenn die singuläre Komponente nicht trivial gleich 0 ist.

Die Lösungsmenge aller reellen stationären AR(p) Prozesse z_t , deren Kovarianzfunktion die vorgegebenen Kovarianzdaten realisieren, setzt sich zusammen aus dem eindeutig bestimmten regulären Prozess z_t^r und einer Menge an singulären Prozessen z_t^s , die für jede Lösung der Yule-Walker Gleichungen harmonische Prozesse enthält.

2.6 Stabilität einer Lösung der Yule-Walker Gleichungen

Wie wir bereits in einem vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die (eindeutige) Transferfunktion $e^{-1}(z)f$ stets stabil, d.h. $e^{-1}(z)f$ besitzt eine Potenzreihe auf einem Gebiet, das den Einheitskreis umfasst (d.h. $e^{-1}(z)f$ hat keine Pole innerhalb des und auf dem Einheitskreis). Jedoch ist dies nicht gleichbedeutend damit, dass $e(z)$ keine Pole innerhalb des und auf dem Einheitskreis besitzt, d.h. $\det e(z)^{-1} \neq 0, |z| \leq 1$, weil $(e(z), f)$ nicht notwendigerweise links coprim sein muss.

Wir nennen ein AR System stabil, wenn $\det e(z)^{-1} \neq 0, |z| \leq 1$. In diesem Abschnitt untersuchen wir, ob und welche Lösungen der Yule-Walker Gleichung unter welchen Bedingungen ein stabiles AR System liefern.

Wir wenden uns einer speziellen Lösung der Yule-Walker Gleichungen zu, der Minimumnormlösung, die eingehend in [7] und [8] untersucht wurde. In diesem Teil der Arbeit werden einige Ergebnisse dieser Papers zusammengefasst.

2.6.1 Die Minimumnormlösung

Die Minimumnormlösung ist definiert als

$$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \Gamma_p^\#. \tag{2.114}$$

Die Matrix $\Gamma_p^\#$ bezeichnet die Moore-Penrose Pseudoinverse der Matrix Γ_p , die bei Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems diejenige Lösung mit der kleinsten

Norm liefert, wobei wir die Norm zeilenweise betrachten. Da $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ eine Lösung von (2.28) ist, erfüllt $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ auch (2.29).

Betrachten wir die Spektralzerlegung der symmetrischen Matrix Γ_p :

$$\Gamma_p = O_p' \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p, \quad O_p' O_p = I. \quad (2.115)$$

Die Matrix Λ_1 ist diagonal und regulär. Die Dimension dieser Matrix entspricht dem Rang von Γ_p .

Dann lässt sich die Pseudoinverse schreiben als

$$\Gamma_p^\# = O_p' \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p. \quad (2.116)$$

2.6.2 Systemtheoretische Konzepte

Für die Beweise der Sätze und Lemmata dieses Abschnittes benötigen wir zuerst einige systemtheoretische Konzepte und ein systemtheoretisches Lemma:

Wir betrachten ein lineares System der Form

$$x_{t+1} = E x_t + F \epsilon_{t+1}. \quad (2.117)$$

mit

$$x_t = \begin{pmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ \vdots \\ z_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} & e_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.118)$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f f' = \Sigma_\nu \quad (2.119)$$

und definieren die folgenden Begriffe:

- **Erreichbarkeit** : Wir nennen das Paar E, F erreichbar, wenn die Matrix $[\lambda I - E, F]$ vollen Zeilenrang $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ hat, was äquivalent dazu ist, dass $(F \ E F \cdots E^{p-1} F)$ vollen Zeilenrang hat.
- **Erreichbarer Eigenwert** : Ein Eigenwert λ_0 von E wird erreichbarer Eigenwert genannt, wenn $[\lambda_0 I - E, F]$ vollen Zeilenrang hat, im Gegensatz zu einem nicht-erreichbaren Eigenwert.

- **Stabilisierbarkeit** : Als stabilisierbar wird das Paar E, F bezeichnet, wenn alle nicht-erreichbaren Eigenwerte innerhalb des offenen Einheitskreises liegen.

Lemma 2.4 Sei z_t eine stationäre Lösung des AR Systems $e(z)z_t = f_{\epsilon_t}$ und x_t, E und F definiert wie in (2.118) und (2.119), dann gilt:

- (i) Ist das Paar E, F erreichbar, dann ist $\Gamma_p > 0$.
- (ii) Wenn alle Eigenwerte von E innerhalb des offenen Einheitskreises liegen, $|\lambda_i(E)| < 1 \forall i$, und $\Gamma_p > 0$ ist, dann ist das Paar E, F erreichbar.
- (iii) Ist $\Gamma_p > 0$ und ist das System nicht erreichbar, dann hat E einen oder mehrere Eigenwerte auf dem Einheitskreis, die den nicht-erreichbaren Eigenwerten entsprechen.

Beweis: (i) Da z_t stationär ist, ist auch x_t stationär. Genauso wie z_t lässt sich auch x_t nach dem Satz von Wold in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegen:

$$x_t = x_t^r + x_t^s = \begin{pmatrix} z_t^r \\ z_{t-1}^r \\ \vdots \\ z_{t-p+1}^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_t^s \\ z_{t-1}^s \\ \vdots \\ z_{t-p+1}^s \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

Der reguläre Anteil x_t^r lässt sich auch als $(I - Ez)^{-1}F\epsilon_t$ schreiben, wobei die Transferfunktion nur Nullstellen außerhalb des Einheitskreises haben kann. Die eingeschwungene Lösung ist von der Form $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} E^j F \epsilon_{t-j-1}$. Es ist also offensichtlich, dass x_t^r dargestellt werden kann als

$$x_t^r = (F \ EF \ E^2F \ \dots) \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_{t-1} \\ \epsilon_{t-2} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{2.121}$$

und die zugehörige Kovarianzmatrix als

$$\Gamma_p^r = (F \ EF \ E^2F \ \dots)(F \ EF \ E^2F \ \dots)^T. \tag{2.122}$$

Aufgrund der Erreichbarkeit von $[E, F]$ wissen wir, dass Γ_p^r vollen Rang hat und somit positiv definit ist. Da Γ_p^s als Kovarianzmatrix positiv semidefinit ist, wissen wir schließlich, dass $\Gamma_p = \Gamma_p^r + \Gamma_p^s$ positiv definit ist.

(ii) Gilt für alle Eigenwerte von E , dass $\lambda_i(E) < 1$, dann ist die singuläre Komponente von x_t bzw. z_t gleich Null und $\Gamma_p = \Gamma_p^r$. Aus dem Beweis von (i) betrachten wir die Darstellung $\Gamma_p^r = (F \ EF \ E^2F \ \dots)(F \ EF \ E^2F \ \dots)^T$ und wissen wegen der positiven Definitheit, dass $(F \ EF \ E^2F \ \dots)$ vollen Zeilenrang besitzt und $[E, F]$ somit erreichbar ist.

(iii) Ist das System nicht erreichbar, dann ist Γ_p^r singulär und somit gilt $\Gamma_p - \Gamma_p^r \neq 0$. Es existiert also eine singuläre Komponente und daher gibt es Eigenwerte von E , die auf dem Einheitskreis liegen. □

2.6.3 Stabilität im Falle der eindeutigen Lösbarkeit der Yule-Walker Gleichungen

Wie wir bereits besprochen haben, ist ein AR System genau dann singulär, wenn Σ_ν , die Kovarianz des Fehlers, singulär ist. In diesem Fall ist Γ_{p+1} singulär, Γ_p kann jedoch sowohl singulär als auch regulär sein. Aus diesem Grund beschäftigen wir uns zunächst mit der Stabilität der (eindeutigen) Lösung der Yule-Walker Gleichungen, wenn Γ_p regulär ist.

Satz 2.10 *Sei Γ_p regulär und sei (e_1, \dots, e_p) die eindeutige Lösung der Yule-Walker Gleichungen und E die zugehörige Companion-Matrix und F wie zu Anfang des Abschnittes definiert, dann ist das mittels dieser Lösung definierte AR System $e(z)z_t = f_{\epsilon_t}$ stabil genau dann, wenn $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) = \text{rk}(\Gamma_p)$. Für den Fall, dass $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) \neq \text{rk}(\Gamma_p)$ gilt, liegen alle Nullstellen von $\det(e(z))$ außerhalb oder auf dem Einheitskreis, wobei die Anzahl der Nullstellen auf dem Einheitskreis $\text{rk}(\Gamma_p) - \text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F)$ entspricht.*

Beweis:

- \Rightarrow Ist das AR System stabil, d.h. $\det e(z) \neq 0, |z| \leq 1$, so ist der singuläre Anteil der Lösung $z_t^s = 0$ und es gilt $\Gamma_p = \Gamma_p^r$. Wie im Beweis zu Lemma 2.4 können wir die Kovarianzmatrix auf folgende Weise darstellen:

$$\Gamma_p = \Gamma_p^r = (F \ EF \ E^2F \ \dots)(F \ EF \ E^2F \ \dots)^T. \tag{2.123}$$

Da wir ein AR(p) System betrachten, wird das System und somit die Kovarianzmatrix durch $(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F)$ charakterisiert und es gilt daher $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) = \text{rk}(\Gamma_p)$.

- \Leftarrow Gehen wir andererseits von $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) = \text{rk}(\Gamma_p)$ aus, dann ist $[E, F]$ klarerweise erreichbar und $(\lambda I - E, F)$ somit links coprim. Daher ist wegen der Stabilität der Transferfunktion $e^{-1}(z)f$ auch $e(z)$ stabil, d.h. $\det e(z) \neq 0, |z| \leq 1$ und wir haben ein stabiles AR System.
- Betrachten wir nun den Fall $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) \neq \text{rk}(\Gamma_p)$: Es gilt $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{p-1}F) < \text{rk}(\Gamma_p)$ und somit ist $[E, F]$ nicht erreichbar. In diesem Fall existiert eine reguläre Matrix T , sodass

$$TET^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} \\ 0 & \bar{E}_{22} \end{pmatrix}, TF = \begin{pmatrix} f_T \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.124}$$

und \bar{E}_{11}, f_T ein erreichbares Paar bildet.

Jeder Eigenwert von \bar{E}_{11} entspricht einem erreichbaren Eigenwert von $[E, F]$ und jeder Eigenwert von \bar{E}_{22} einem nicht-erreichbaren. Die Zeilenzahl der

Matrix \bar{E}_{11} entspricht $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{r_{p-1}}F)$.

Sei λ ein Eigenwert von \bar{E}_{11} und somit ein erreichbarer Eigenwert von $[E, F]$. Für einen zugehörigen Eigenvektor gilt $x^*E = \lambda x^*$, $x^*F \neq 0$. Unter Verwendung der Lyapunov Gleichung $\Gamma_p = \bar{E}\Gamma_p\bar{E}' + FF'$ ergibt sich:

$$x^*\Gamma_p x = x^*\bar{E}\Gamma_p\bar{E}'x + x^*FF'x \tag{2.125}$$

$$x^*\Gamma_p x = \lambda x^*\Gamma_p \lambda x + x^*FF'x \tag{2.126}$$

$$(1 - |\lambda|^2)x^*\Gamma_p x = \|x^*F\|^2 > 0 \tag{2.127}$$

Aus der Regularität und somit positiven Definitheit von Γ_p folgt $x^*\Gamma_p x > 0$, woraus folgt, dass $|\lambda| < 1$. Daher liegen alle Eigenwerte von \bar{E}_{11} und damit alle erreichbaren Eigenwerte von $[E, F]$ innerhalb des offenen Einheitskreises.

Sei nun λ ein Eigenwert von von \bar{E}_{22} und somit ein nicht-erreichbarer Eigenwert von $[E, F]$. Für einen zugehörigen Eigenvektor gilt $x^*E = \lambda x^*$, $x^*F = 0$. Unter Verwendung der Lyapunov Gleichung ergibt sich $(1 - |\lambda|^2)x^*\Gamma_p x = \|x^*F\|^2 = 0$. Da Γ_p positiv definit ist, muss $|\lambda| = 1$ gelten. Daher liegen alle Eigenwerte von \bar{E}_{22} und damit alle nicht-erreichbaren Eigenwerte von $[E, F]$ auf dem Einheitskreis.

Die Eigenwerte der Companion-Matrix E entsprechen den Inversen der Nullstellen von $\det e(z)$. Daher liegen alle Nullstellen von $\det e(z)$ außerhalb oder auf dem Einheitskreis.

- Die Dimensionen von E und Γ_p stimmen überein. Da die Zeilenzahl (=Spaltenzahl) von \bar{E}_{11} mit $\text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{r_{p-1}}F)$ übereinstimmt, folgt, dass die Zeilenzahl (=Spaltenzahl) von \bar{E}_{22} gleich $\text{rk}(\Gamma_p) - \text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{r_{p-1}}F)$ sein muss. Somit ist bewiesen, dass genau $\text{rk}(\Gamma_p) - \text{rk}(F \ EF \ \dots \ E^{r_{p-1}}F)$ Nullstellen von $\det e(z)$ auf dem Einheitskreis liegen müssen.

□

2.6.4 Stabilität der Minimumnormlösung

Im Fall, dass Γ_p singulär ist, haben die Yule-Walker Gleichungen unendlich viele Lösungen, nämlich einen nichttrivialen affinen Raum. Nun stellt sich die Frage, ob und welche Lösungen der Yule-Walker Gleichungen stabil sind.

Der folgende Satz aus [1] zeigt, dass wir lediglich die Minimumnormlösung betrachten müssen, wenn wir wissen wollen, ob wir ein stabiles AR System finden können, das die gegebenen Kovarianzdaten realisiert. Ein Prozess, der ein solches System erfüllt und die gewünschten Kovarianzdaten liefert, wäre wie schon besprochen regulär.

Satz 2.11 *Sei Γ_p singulär vom Rang s . Angenommen es existiere eine stabile Lösung der Yule-Walker Gleichungen (e_1, \dots, e_p) , dann ist auch $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ stabil*

und s Eigenwerte der zugehörigen Companion-Matrix \hat{E} sind ident mit Eigenwerten von E , der Companion-Matrix der stabilen Lösung (e_1, \dots, e_p) .

Bevor wir uns dem Beweis dieses Satzes zuwenden, führen wir noch zwei Lemmata an, die wir benötigen.

Lemma 2.5 Sei A eine quadratische reelle Matrix und sei $\lambda(A)$ ein beliebiger Eigenwert von A , dann gilt

$$|\lambda(A)| \leq \max_{\|x\|=1} |x^* Ax|. \tag{2.128}$$

Beweis: Sei y ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda(A)$ mit Länge 1, dann gilt $Ay = \lambda(A)y$ und somit

$$|\lambda(A)| = |y^* \lambda(A)y| = |y^* Ay| \leq \max_{\|x\|=1} |x^* Ax| \tag{2.129}$$

□

Lemma 2.6 Sei A eine Matrix der Form

$$A = (0_{a \times b} I_a) T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_c & 0 \end{pmatrix} T' \begin{pmatrix} 0_{b \times a} \\ I_a \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

mit einer orthogonalen Matrix T , dann liegen alle Eigenwerte von A innerhalb des offenen Einheitskreises.

Beweis: Sei x ein a -dimensionaler Vektor der Länge 1, dann hat $y = \underbrace{T' \begin{pmatrix} 0_{b \times a} \\ I_a \end{pmatrix}}_U x$

auch die Länge 1 und es gilt

$$\max_{\|x\|=1} |x^* Ax| = \max_{\|y\|=1, y=Ux} |y^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_c & 0 \end{pmatrix} y| \leq \max_{\|y\|=1} |y^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_c & 0 \end{pmatrix} y| \tag{2.131}$$

Sei nun y ein beliebiger Vektor der Länge 1, dann folgt mittels Cauchy-Schwarzscher Ungleichung

$$|y^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_c & 0 \end{pmatrix} y| = |(y_1^* \dots y_{a+b}^*) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_c \end{pmatrix}| \leq \underbrace{\|y\|}_{=1} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_c \end{pmatrix} \right\|. \tag{2.132}$$

Angenommen $\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_c \end{pmatrix} \right\| = 1$ dann ist $y_{c+1} = \dots = y_{a+b} = 0$. Da die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung nur dann mit Gleichheit erfüllt ist, wenn die beiden

Vektoren linear abhängig sind, gilt dies nur für $y = 0$. Somit ist die letzte Ungleichung strikt kleiner 1 und wir erhalten

$$\max_{\|x\|=1} |x^* Ax| \leq \max_{\|y\|=1} |y^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_c & 0 \end{pmatrix} y| < 1 \quad (2.133)$$

Mit Hilfe des letzten Lemmas folgt, dass alle Eigenwerte von A innerhalb des offenen Einheitskreises liegen. \square

An dieser Stelle treten wir den Beweis von Satz 2.11 an:

Beweis: Zu Beginn führen wir einen Basiswechsel durch. Dazu verwenden wir die Orthonormalbasis O_p der Spektralzerlegung von Γ_p und definieren

$$(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p) = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) O_p' \quad (2.134)$$

$$(d_1, \dots, d_p) = (e_1, \dots, e_p) O_p'. \quad (2.135)$$

Daraus folgt mittels Spektraldarstellung

$$(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p) O_p \Gamma_p O_p' = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) \Gamma_p O_p' \quad (2.136)$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_p) O_p' \quad (2.137)$$

$$= (e_1, \dots, e_p) \Gamma_p O_p' = (d_1, \dots, d_p) O_p \Gamma_p O_p' \quad (2.138)$$

und daher

$$(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p) \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (d_1, \dots, d_p) \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.139)$$

Da Λ_1 regulär ist, sind die ersten s Spalten der Blockmatrizen $(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p)$ und (d_1, \dots, d_p) ident. Betrachten wir die letzten $rp - s$ Spalten:

$$(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p) = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \Gamma_p^\# O_p' \quad (2.140)$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_p) O_p' \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die letzten $rp - s$ Spalten 0 sind.

Als nächsten Schritt betrachten wir die transformierten Companion-Matrizen und führen eine geeignete Partition ein:

$$O_p \hat{E} O_p' = \hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

$$O_p E O_p' = D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

wobei \hat{D}_{11} und D_{11} $s \times s$ dimensional sind. Sowohl E als auch \hat{E} erfüllen die Lyapunov Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D' = O_p F F' O_p' \quad (2.144)$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \hat{D} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}' = O_p F F' O_p'. \quad (2.145)$$

Wenn man die rechte Seite beider Gleichungen betrachtet, sieht man, dass für beide Gleichungen gilt, dass der Term, der dem 22-Block entspricht, nichtnegativ definit sein muss. Die linke Seite ist jedoch gegeben durch $-D_{21}\Lambda_1 D_{21}$ bzw. $-\hat{D}_{21}\Lambda_1\hat{D}_{21}$. Daraus folgern wir $D_{21} = 0$ und $\hat{D}_{21} = 0$. Die Matrizen D und \hat{D} sind also verallgemeinerte obere Dreiecksmatrizen. Um etwas über ihre Eigenwerte zu erfahren, müssen wir nur die Diagonalblöcke betrachten.

$$D - \hat{D} = O_p(E - \hat{E})O'_p = O_p \begin{pmatrix} e_1 - \hat{e}_1 & e_2 - \hat{e}_2 & \dots & e_{p-1} - \hat{e}_{p-1} & e_p - \hat{e}_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} O'_p \quad (2.146)$$

$$= O_p \begin{pmatrix} d_1 - \hat{d}_1 & d_2 - \hat{d}_2 & \dots & d_{p-1} - \hat{d}_{p-1} & d_p - \hat{d}_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.147)$$

Wie bereits gezeigt, sind die ersten s Spalten der Blockmatrizen $(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p)$ und (d_1, \dots, d_p) ident. Daher sind die ersten s Spalten der letzten Matrix der oberen Gleichung gleich 0 und somit die ersten s Spalten von D und \hat{D} ident, d.h. $D_{11} = \hat{D}_{11}$. Aufgrund der Annahme, dass (e_1, \dots, e_p) eine stabile Lösung ist und E daher nur Eigenwerte $|\lambda_i(E)| < 1$ hat, sind alle Eigenwerte von D_{11} und daher auch von \hat{D}_{11} innerhalb des offenen Einheitskreises.

Es bleibt noch zu zeigen, dass alle Eigenwerte von \hat{D}_{22} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen.

Dazu zerlegen wir \hat{D} in geeigneter Weise:

$$\hat{D} = O_p \hat{E} O'_p = O_p \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \dots & \hat{e}_{p-1} & \hat{e}_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} O'_p \quad (2.148)$$

$$= O_p \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & \hat{d}_2 & \dots & \hat{d}_{p-1} & \hat{d}_p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + O_p \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} O'_p \quad (2.149)$$

Da wir wissen, dass die letzten $rp - s$ Spalten von $(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_p)$ gleich 0 sind, reicht es aus, nur die letzten $rp - s$ Spalten und Zeilen der letzten Matrix der oberen Gleichung zu betrachten. Es gilt also

$$\hat{D}_{22} = (0_{(rp-s) \times s} I_{rp-s}) O_p \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} O'_p \begin{pmatrix} 0_{s \times (rp-s)} \\ I_{rp-s} \end{pmatrix} \quad (2.150)$$

Mittels des letzten Lemmas folgt $|\lambda_i(\hat{D}_{22})| < 1$. Folglich liegen alle Eigenwerte von \hat{D} und somit auch von \hat{E} innerhalb des offenen Einheitskreises und daher ist die Minimumnormlösung stabil. \square

Aus diesem Satz folgt, dass es keine stabile Lösung der Yule-Walker Gleichungen geben kann, wenn nicht alle Eigenwerte der Companion-Matrix \hat{E} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen.

Wenden wir uns nun einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Stabilität der Minimumnormlösung zu:

Satz 2.12 *Sei Γ_p singulär und sei $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ die Minimumnormlösung der Yule-Walker Gleichungen und \hat{E} die zugehörige Companion-Matrix und F wie zu Anfang des Abschnittes definiert, dann ist das mittels dieser Lösung definierte AR System $\hat{e}(z)z_t = f\epsilon_t$ stabil genau dann, wenn $\text{rk}(F \hat{E}F \dots \hat{E}^{rp-1}F) = \text{rk}(\Gamma_p)$.*

Beweis: \Rightarrow Dieser Teil des Beweises verläuft ganz analog wie im Fall, dass Γ_p regulär ist, Satz 2.10.

\Leftarrow Wie im Beweis zu Satz 2.11 führen wir mittels der Orthogonalmatrix O_p einen Basiswechsel durch:

$$O'_p \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p = \Gamma_p, \quad \hat{D} = O_p \hat{E} O'_p = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ 0 & \hat{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.151)$$

wobei wir schon wissen, dass alle Eigenwerte von \hat{D}_{22} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen.

Für die Lyapunov Gleichung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \hat{D} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D} = O_p F F' O'_p = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.152)$$

Sei $\hat{F} = O_p F$, dann lässt sich leicht zeigen, dass $\hat{F}' = [\hat{F}'_1 0]$, $\Sigma_1 = \hat{F}'_1 \hat{F}'_1$.

$$\text{rk}(F, \hat{E}F, \dots, \hat{E}^{rp-1}F) = \text{rk}(O_p [F, \hat{E}F, \dots, \hat{E}^{rp-1}F]) \quad (2.153)$$

$$= \text{rk}(O_p F, O_p \hat{E} O'_p O_p F, \dots, O_p \hat{E}^{rp-1} O'_p O_p F) \quad (2.154)$$

$$= \text{rk}(\hat{F}'_1, \hat{D}_{11} \hat{F}'_1, \dots, \hat{D}_{11}^{rp-1} \hat{F}'_1) \quad (2.155)$$

Da $\text{rk}(F, \hat{E}F, \dots, \hat{E}^{r-1}F) = \text{rk}(\Gamma_p)$ und $\text{rk}(\Gamma_p) = \text{rk}(\Lambda_1)$ gilt, erhalten wir

$$\text{rk}(\hat{F}_1, \hat{D}_{11}\hat{F}_1, \dots, \hat{D}_{11}^{r-1}\hat{F}_1) = \text{rk}(\Lambda_1). \quad (2.156)$$

Daraus folgt, dass $[\hat{D}_{11}, \hat{F}_1]$ erreichbar ist. Aus der Lyapunov Gleichung $\Lambda_1 - \hat{D}_{11}\Lambda\hat{D}'_{11} = \hat{F}_1\hat{F}'_1$ folgt wie im Beweis zum letzten Satz, dass alle Eigenwerte von \hat{D}_{11} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen.

Wir haben also gezeigt, dass alle Eigenwerte von \hat{E} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen und somit alle Nullstellen von $\det e(z)$ außerhalb oder auf dem Einheitskreis liegen. Daher ist unser AR System stabil. \square

Angenommen die Minimumnormlösung liefert kein stabiles AR System, dann lassen sich über die Nullstellen von $\det e(z)$ einige Aussagen treffen:

Satz 2.13 *Sei Γ_p singulär und sei $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ die Minimumnormlösung der Yule-Walker Gleichungen und \hat{E} die zugehörige Companion-Matrix und F wie zu Anfang des Abschnittes definiert. Ist das mittels dieser Lösung definierte AR System $\hat{e}(z)z_t = f_{\epsilon_t}$ nicht stabil, dann hat $\det \hat{e}(z)$ folgende Eigenschaften:*

- (i) *Alle Nullstellen von $\det \hat{e}(z)$ liegen außerhalb oder auf dem Einheitskreis.*
- (ii) *Die Anzahl der Nullstellen auf dem Einheitskreis entspricht der Zahl $\text{rk}(\Gamma_p) - \text{rk}(F \ E F \ \dots \ E^{r-1}F)$.*
- (iii) *$\det \hat{e}(z)$ hat die geringste Anzahl an Nullstellen auf dem Einheitskreis unter allen Lösungen der Yule-Walker Gleichungen.*
- (iv) *$\det \hat{e}(z)$ hat die meisten Nullstellen außerhalb des Einheitskreises unter allen Lösungen der Yule-Walker Gleichungen.*

Beweis:

- (i) Wie im letzten Beweis betrachten wir den folgenden Basiswechsel

$$O'_p \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p = \Gamma_p, \quad \hat{D} = O_p \hat{E} O'_p = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ 0 & \hat{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.157)$$

wobei alle Eigenwerte von \hat{D}_{22} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen, und die Lyapunov Gleichung

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \hat{D} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D} = O_p F F' O'_p = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.158)$$

wobei $\text{rk}(\Lambda_1) = \text{rk}(\Gamma_p)$.

Da Γ_p singulär ist, existiert \hat{D}_{22} immer und hat zumindest einen Eigenwert. Also hat $\det \hat{e}(z)$ stets Nullstellen außerhalb des Einheitskreises. Wäre das

Paar \hat{D}_{11}, \hat{F}_1 erreichbar, würden alle Eigenwerte von \hat{D}_{11} innerhalb des offenen Einheitskreises liegen. Dies würde bedeuten, dass alle Eigenwerte von \hat{E} innerhalb des offenen Einheitskreises wären. Also wäre die Minimumnormlösung stabil, was wir jedoch ausgeschlossen haben. Folglich existiert eine reguläre Matrix \bar{T} , sodass

$$\bar{T}\hat{D}\bar{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11,1} & \hat{D}_{11,2} \\ 0 & \hat{D}_{11,2} \end{pmatrix}, \bar{T}\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} f_{1,T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.159)$$

wobei $\hat{D}_{11,1}, f_{1,T}$ erreichbar ist.

Wir wissen, dass die erreichbaren Eigenwerte von $[\hat{E}, F]$ mit jenen von $[\hat{D}_{11}, \hat{F}_1]$ übereinstimmen. Es folgt, dass alle Eigenwerte von $\hat{D}_{11,1}$ innerhalb des offenen Einheitskreises liegen müssen, weil die Eigenwerte von $\hat{D}_{11,1}$ genau den erreichbaren Eigenwerten von \hat{D}_{11}, \hat{F}_1 entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Eigenwerte von $\hat{D}_{11,3}$ auf dem Einheitskreis liegen. Dazu betrachten wir folgende Partitionierungen:

$$\bar{T}\Lambda_1\bar{T}' = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda'_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \bar{T}\hat{F}_1\hat{F}_1'\bar{T}' = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.160)$$

Aus dem 11-Block-Term der Lyapunov Gleichung $\Lambda_1 - \hat{D}_{11}\Lambda_1\hat{D}'_{11} = \hat{F}_1\hat{F}'_1$ erhalten wir nun

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda'_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{D}_{11,1} & \hat{D}_{11,2} \\ 0 & \hat{D}_{11,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda'_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{D}_{11,1} & \hat{D}_{11,2} \\ 0 & \hat{D}_{11,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.161)$$

Betrachten wir den 22-Block-Term erhalten wir $\Lambda_{22} - \hat{D}_{11,3}\Lambda_{22}\hat{D}'_{11,3} = 0$. Sei v^* ein Linkseigenvektor von $\hat{D}_{11,3}$ zum Eigenwert λ , dann folgt aus der letzten Gleichung $(1 - |\lambda|^2)v^*\Lambda_{22}v = 0$ und damit wegen der positiven Definitheit von Λ_{22} $|\lambda| = 1$.

Wir haben also gesehen, dass die Eigenwerte von \hat{D}_{22} und $\hat{D}_{11,1}$ innerhalb des offenen Einheitskreises und alle Eigenwerte von $\hat{D}_{11,3}$ auf dem Einheitskreis liegen. Diese Eigenwerte entsprechen genau den Eigenwerten von \hat{E} und somit den Inversen der Nullstellen von $\det \hat{e}(z)$, die also auf dem Einheitskreis und außerhalb liegen.

- (ii) Wir haben gezeigt, dass die Anzahl der Eigenwerte auf dem Einheitskreis der Spalten- bzw. Zeilenzahl von $\hat{D}_{11,3}$ entsprechen muss. Diese Zahl entspricht $\text{rk}(\Lambda_1) - \text{rk}(f_{1,T}, \hat{D}_{11,1}f_{1,T}, \dots, \hat{D}_{11,1}^{rp-1}f_{1,T})$, also dem Rang von $\Lambda_1 (= \text{rk}(\Gamma_p))$ weniger der Anzahl aller erreichbaren Eigenwerte von $[\hat{D}_{11,1}, f_{1,T}]$, folglich von $[\hat{D}_{11}, \hat{F}_1]$ und somit von $[\hat{E}, \hat{F}]$. Die Anzahl der Nullstellen von $\det \hat{e}(z)$ am Einheitskreis ist daher gleich $\text{rk}(\Gamma_p) - \text{rk}(F, \hat{E}F, \dots, \hat{E}^{rp-1}F)$.
- (iii) und (iv) folgen sofort. □

2.6.5 Existenz instabiler Lösungen

Da wir einige Bedingungen kennengelernt haben, unter welchen die Minimumnormlösung stabil ist, wenden wir uns zum Abschluss noch den anderen Lösungen zu, die, wie der folgende Satz zeigt, alle mittels Minimumnormlösung dargestellt werden können.

Satz 2.14 *Sei Γ_p singulär vom Rang s und $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ die Minimumnormlösung der Yule-Walker Gleichungen mit zugehöriger Companion-Matrix \hat{E} . Dann lässt sich jede beliebige weitere Lösung der Yule-Walker Gleichungen darstellen als*

$$(e_1, \dots, e_p) = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) + (0 \ \Phi)O_p, \quad (2.162)$$

wobei Φ eine $r \times (pr - s)$ Matrix ist, und jede Matrix Φ definiert auf diese Weise eine weitere Lösung.

Beweis: Um den ersten Teil der Behauptung zu beweisen, betrachten wir die Differenz einer beliebigen Lösung und der Minimumnormlösung:

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p) = (e_1, \dots, e_p) - (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) \quad (2.163)$$

Es ist offensichtlich, dass $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)\Gamma_p = 0$. Somit gilt

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)\Gamma_p O_p' = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)O_p' O_p \Gamma_p O_p' \quad (2.164)$$

$$= (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)O_p' \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.165)$$

Aufgrund der Regularität von Λ_1 folgt, dass $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)O_p'$ von der Gestalt $(0 \ \Phi)$ sein muss.

Für den zweiten Teil der Behauptung betrachten wir eine beliebige Matrix Φ und zeigen, dass (e_1, \dots, e_p) , definiert mittels Φ , eine Lösung der Yule-Walker Gleichungen ist.

$$(e_1, \dots, e_p)\Gamma_p = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)\Gamma_p - (0 \ \Phi)O_p \Gamma_p \quad (2.166)$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_p) - (0 \ \Phi)O_p \Gamma_p O_p' O_p \quad (2.167)$$

$$= (\gamma_1, \dots, \gamma_p) - (0 \ \Phi) \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \quad (2.168)$$

□

Anhand dieser Darstellung hängt die Stabilität einer Lösung offensichtlich von der Wahl von Φ ab. Wie wir in einem der vorigen Abschnitte gesehen haben, ist die Minimumnormlösung stabil, falls überhaupt eine stabile Lösung existiert. Der nächste Satz zeigt, dass bei nicht eindeutiger Lösbarkeit der Yule-Walker Gleichungen immer eine instabile Lösung gefunden werden kann.

Satz 2.15 Sei Γ_p singular und $p > 1$, dann existiert immer eine Lösung der Yule-Walker Gleichungen, sodass ein mittels dieser Lösung definiertes AR System instabil ist.

Beweis: Sei die Minimumnormlösung stabil. Wir betrachten dieselbe Orthogonaltransformation wie im Beweis zu Satz 2.11:

$$O'_p \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O_p = \Gamma_p, \quad O'_p O_p = I, \tag{2.169}$$

$$\hat{D} = O_p \hat{E} O'_p = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ 0 & \hat{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad D = O_p E O'_p = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.170}$$

Wir wissen bereits, dass $D_{11} = \hat{D}_{11}$. Aus (2.162) folgt für die Companion-Matrizen

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ 0 & \hat{D}_{22} \end{pmatrix} + O_p \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \cdots & \tilde{e}_p \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} O'_p, \tag{2.171}$$

wobei wir aus dem Beweis des letzten Satzes wissen, dass die letzte Matrix die Form

$$O_p \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & O_{11}\Phi \\ 0 & O_{21}\Phi \end{pmatrix} \tag{2.172}$$

annehmen muss. Es gilt also

$$D = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} + O_{11}\Phi \\ 0 & \hat{D}_{22} + O_{21}\Phi \end{pmatrix}. \tag{2.173}$$

Um eine Aussage über die Stabilität von D zu treffen, müssen wir nun nur mehr $\hat{D}_{22} + O_{21}\Phi$ betrachten.

Dazu zeigen wir zuerst, dass $O_{21} \neq 0$: Angenommen $O_{21} = 0$, dann muss wegen $O'_p O_p = I$ auch $O_{12} = 0$ gelten. Daraus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} O'_{11} & 0 \\ 0 & O'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & 0 \\ 0 & O_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O'_{11}\Lambda_1 O_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.174}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma'_1 & \gamma_0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \gamma_1 \\ \gamma'_{p-1} & \cdots & \cdots & \gamma'_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}. \tag{2.175}$$

Ist nun $pr - \text{rk}(\Gamma_p) \geq r$, so hat der rechte untere Nullmatrix-Block mindestens Dimension $r \times r$, was aus der vorletzten Matrix ersichtlich ist, woraus mittels der letzten Matrix folgt, dass $\gamma_0 = 0$ gelten muss, was der Definition eines AR-Systems widerspricht.

Ist nun $pr - \text{rk}(\Gamma_p) < r$ und $p > 1$, so gilt, dass der rechte untere Nullmatrix-Block Dimension kleiner r haben muss und γ_0 somit die Form $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ annehmen muss und daher nicht positiv definit ist. Die Matrix γ_0 ist jedoch nicht nur der rechte untere $r \times r$ -Block von Γ_p , sondern auch der linke obere und daher auch der linke obere Block von $O'_{11}\Lambda_1 O_{11}$. Diese Matrix ist allerdings positiv definit und wir erhalten einen Widerspruch.

Es gilt also $O_{21} \neq 0$. Dies bedeutet, dass das Paar \hat{D}_{22}, O_{21} zumindest einen erreichbaren Eigenwert besitzt. Es gibt somit immer eine Matrix Φ , sodass $\hat{D}_{22} + O_{21}\Phi$ zumindest einen Eigenwert außerhalb des Einheitskreises besitzt. Die mittels eines derartigen Φ und der Minimumnormlösung Lösung ist daher instabil. \square

Wir haben gesehen, dass sowohl im Fall einer regulären als auch im Fall einer singulären Kovarianzmatrix Γ_p die Minimumnormlösung, die ja im Fall $\Gamma_p > 0$ der eindeutigen Lösung entspricht, $\det \hat{e}(z) \neq 0, |z| < 1$ erfüllen muss. Weiters haben wir gesehen, wie die Anzahl der Nullstellen auf dem Einheitskreis bestimmt werden kann.

Aufgrund der vorteilhaften Eigenschaften der Minimumnormlösung betrachten wir im Folgenden nur mehr diese Lösung der Yule-Walker Gleichungen.

Kapitel 3

Schätzung

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wenden wir uns dem Schätzen zu. Wie wir sehen werden, stellt uns gerade das Zulassen einer singulären Komponente vor Herausforderungen, wenn wir auf der Suche nach einem konsistent geschätzten AR Modell sind. Leider können wir in dieser Arbeit kein einheitliches konsistent geschätztes Modell für reguläre und singuläre Komponente angeben, wenn wir echte Stichprobendaten betrachten. Die Entwicklung einer Schätzmethode, die uns ein solches Modell liefert, ist aber sicher noch ein erstrebenswertes Ziel anderer Arbeiten.

In diesem Kapitel gehen wir davon aus, dass die zuvor beschriebenen ganzzahligen Parameter p und q bekannt sind.

Wie schon in den Annahmen zu den generalisierten dynamischen Faktormodellen im ersten Kapitel gehen wir davon aus, dass die betrachteten Daten einige Bedingungen erfüllen. In diesem Kapitel wollen wir die latenten Variablen \hat{y}_t beziehungsweise einen minimalen statischen Faktor der latenten Variablen z_t modellieren. Wir wiederholen an dieser Stelle einige Annahmen:

- $\mathbb{E}\hat{y}_t^N = 0 \quad \forall t \Rightarrow \mathbb{E}z_t = 0 \quad \forall t$
- Die reguläre Komponente von \hat{y}_t^N besitzt absolut summierbare Kovarianzen.
- Die singuläre Komponente von \hat{y}_t^N ist von der Form

$$\hat{y}_t^{sN} = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} C_j^N v_j \quad (3.1)$$

mit $C_j^N \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ und komplexwertigen eindimensionalen Zufallsvariablen v_j mit den Eigenschaften

- $|v_j| = 1, j = 1, \dots, h$
- $\mathbb{E}v_j = 0, j = 1, \dots, h$

- $\mathbb{E}v_j\bar{v}_l = 0, \forall j \neq l$
- $\lambda_{j+1} = -\lambda_{h-j}, v_{j+1} = \bar{v}_{h-j}$ und $C_{j+1}^N = \bar{C}_{h-j}^N, j = 0, 1, \dots, h/2 - 1$
(Wir schließen die Frequenz $\lambda = 0$ aus und daher ist h gerade.)

Die Frequenzen sind in absteigender Reihenfolge angeordnet sind: $\lambda_j > \lambda_{j+1}$.

Da wir davon ausgehen, Stichproben aus nur einer Trajektorie von \hat{y}_t^{sN} zu betrachten, müssen wir, um eine konsistente Schätzung zu gewährleisten, davon ausgehen, dass alle Komponenten der Gewichtsfunktion linear abhängig sind und nur die Phasen von v_j zufällig sind, während die Amplituden konstant sind.

In [1] wurde für den Fall, dass wir jegliche singuläre Komponenten ausschließen, gezeigt, dass wir uns bei der Suche eines geeigneten Modells für die gegebenen Daten auf stabile AR Systeme beschränken können. In diesem Fall kann unter gewissen Voraussetzungen gewährleistet werden, dass eine statische Hauptkomponentenanalyse (PCA) eine konsistente Schätzung des minimalen Faktors z_t aus den gegebenen Daten liefert. In dieser Arbeit legen wir jedoch ein besonderes Augenmerk auf die singuläre Komponente und auf singuläre AR Modelle. Leider können wir in diesem Fall keine Aussage über die Konsistenz von z_t treffen. Im folgenden werden wir dennoch von einem konsistent geschätzten minimalen Faktor z_t ausgehen.

Der minimale Faktor z_t besteht einerseits aus einem singulären Anteil, der mittels eines harmonischen Prozesses beschrieben werden kann, und einem regulären Anteil, der auf einen AR Prozess zurückzuführen ist.

3.1 Schätzung bei Populationsdaten

Zunächst wenden wir uns dem idealisierten Fall zu, dass wir Populationskovarianzdaten $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ des minimalen statischen Faktors z_t besitzen. Wir geben ein Schätzverfahren an, das mit den Ergebnissen des letzten Kapitels eng verknüpft ist.

1. Schritt: Bestimmung der Minimumnormlösung

Zur Toeplitz-Matrix Γ_p bestimmen wir die Moore-Penrose Pseudoinverse $\Gamma_p^\#$. Die Minimumnormlösung erhalten wir wie im letzten Kapitel mittels der ersten Yule-Walker Gleichung 2.28 als

$$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)\Gamma_p^\#,$$

$$\hat{e}(z) = I - \hat{e}_1 z - \dots - \hat{e}_p z^p.$$

2. Schritt: Bestimmung der partikulären Lösung /des regulären Anteils

Um die Transferfunktion bestimmen zu können, benötigen wir noch die zweite Gleichung der Yule-Walker Gleichungen 2.29:

$$\Sigma_p = \gamma_0 - (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)(\gamma_1, \dots, \gamma_p)'$$

f erhalten wir aus folgender Faktorisierung: $\Sigma_p = f f'$, wobei f vollen Spaltenrang hat.

Die eindeutige Transferfunktion ergibt sich als

$$\hat{e}(z)^{-1} f.$$

Für ein weißes Rauschen (ϵ_t) mit $\mathbb{E}\epsilon_t = 0$ und $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_t'] = I_{r \times r}$ erhalten wir die eindeutige partikuläre Lösung, die dem regulären Anteil einer Lösung z_t entspricht, als

$$z_t^r = \hat{e}(z)^{-1} f \epsilon_t.$$

3. Schritt: Zerlegung der Kovarianzdaten

Mittels z_t^r können wir den regulären Anteil der Kovarianzdaten bestimmen, $\gamma_j^r = \mathbb{E} z_t^r (z_{t+j}^r)'$, und somit die Kovarianzdaten in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegen:

$$\gamma_j^s = \gamma_j - \gamma_j^r, \quad j = 0, \dots, p.$$

4. Schritt: Bestimmung der homogenen Lösung /des singulären Anteils

Den aufwendigsten Schritt stellt die Modellierung eines geeigneten singulären Prozesses dar, der einerseits die homogene Gleichung erfüllt und die vorgegebenen Kovarianzdaten $\gamma_0^s, \dots, \gamma_p^s$ realisiert und andererseits auch gewisse Anfangsbedingungen erfüllt, die gewährleisten sollen, dass regulärer und singulärer Prozess für alle Zeit orthogonal sind.

Wie im vorigen Kapitel beschrieben, sind wir auf der Suche nach einem harmonischen Prozess der Form $z_t^s = \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} C_j v_j$.

Als erstes bestimmen wir die Nullstellen von $\det \hat{e}(z)$ am Einheitskreis, $e^{i\lambda_j}$, $j = 1 \dots, h$ und die Anzahl h der Nullstellen.

Die Kovarianzen F_j der zufälligen Gewichte $C_j v_j$ $j = 1, \dots, h$ erhalten wir mittels

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & \dots & I_{r \times r} \\ e^{i\lambda_1} I_{r \times r} & \dots & e^{i\lambda_h} I_{r \times r} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\lambda_1(h-1)} I_{r \times r} & \dots & e^{i\lambda_h(h-1)} I_{r \times r} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_0^s \\ \gamma_1^s \\ \vdots \\ \gamma_{h-1}^s \end{pmatrix}.$$

Da wir annehmen, dass $\text{rk} F_j = 1$, existiert folgende Faktorisierung: $F_j = C_j C_j^*$, $C_j \in \mathbb{C}^{r \times 1}$, wobei wir C_j aus dem Rechtskern von $e(e^{i\lambda_j})$ wählen müssen.

Die Zufallsvariablen v_j , $j = 1, \dots, h$ müssen folgendermaßen gewählt werden:

$$\mathbb{E} v_j = 0, \quad |v_j| = 1, \quad \mathbb{E} v_j \epsilon_t' = 0 \quad \forall t.$$

Auf diese Weise haben wir nun den singulären Prozess bestimmt.

5. Schritt: Das Gesamtmodell

An dieser Stelle können wir nun einen stationären Prozess angeben, der die vorgegebenen Kovarianzdaten realisieren kann:

$$\begin{aligned} z_t &= z_t^r + z_t^s \\ &= \hat{e}(z)^{-1} f \epsilon_t + \sum_{j=1}^h e^{i\lambda_j t} C_j v_j \end{aligned}$$

Zudem ist der Prozess Lösung des AR Modells

$$\hat{e}(z)z_t = f \epsilon_t \quad (3.2)$$

3.2 Schätzung bei Stichprobendaten

In diesem Abschnitt gehen wir von Stichprobendaten des minimalen statischen Faktors \hat{z}_t und in der Folge von geschätzten Kovarianzdaten $\hat{\gamma}_j$ aus. Da wir in unseren Modellen auch singuläre Komponenten zulassen, werden auch die geschätzten Kovarianzdaten singuläre Anteile enthalten. Um eine konsistente Schätzung gewährleisten zu können, müssen wir zuerst singuläre und reguläre Komponente trennen.

3.2.1 Singuläre Komponente

Die singuläre Komponente erhalten wir mittels harmonischer Regression.

$$\hat{z}_t = \underbrace{\sum_{j=1}^{h/2} a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)}_{\hat{z}_t^s} + \underbrace{u_t}_{z_t^r} \quad (3.3)$$

Es gibt zahlreiche Schätzverfahren in der Literatur, die eine konsistente Schätzung liefern, wie zum Beispiel eine Methode nach Truong-Van, die auch in [10] beschrieben wird. Diese Methode erlaubt eine konsistente Schätzung, sofern der Fehlerterm u_t als ARMA Prozess modelliert werden kann, was bei uns erfüllt wird. Wir erhalten also einen konsistent geschätzten harmonischen Prozess \hat{z}_t^s in reeller Schreibweise.

Da \hat{z}_t^s singulär ist, kann der Prozess aus endlicher Vergangenheit erklärt werden, erfüllt also ein AR Modell.

3.2.2 Reguläre Komponente

Als Residuen der harmonischen Regression erhalten wir jenen Anteil \hat{z}_t^r der Stichprobe, den wir mittels eines regulären Prozesses in einem AR System erklären wollen.

Wir verwenden den gewöhnlichen asymptotisch unverzerrten Kovarianzschätzer $\hat{\gamma}_j^r = T^{-1} \sum_{j=1}^{T-j} \hat{z}_{t+j}^r (\hat{z}_t^r)'$, $j \geq 0$. Dieser Schätzer ist für den Fall, dass $\gamma_j^r \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, ein konsistenter Schätzer der zugrundeliegenden Populationskovarianzen (siehe [6]). Da wir an dieser Stelle einen regulären Prozess betrachten, ist diese Bedingung erfüllt.

Es ist hinlänglich bekannt, dass in der Menge der quadratischen Matrizen die Menge der regulären Matrizen dicht ist. Daher ist es verständlich, dass selbst wenn die wahre Kovarianzmatrix Γ_p^r singulär ist, die aus den Stichproben geschätzte Kovarianzmatrix $\hat{\Gamma}_p^r$ mit großer Wahrscheinlichkeit regulär ist. Um dieses Problem zu umgehen, gehen wir davon aus, den Rang der Wahren Matrix Γ_p^r , c , kennen. Betrachten wir die Spektralzerlegung $\hat{\Gamma}_p^r = O_p \Lambda_p O_p'$, wobei die Eigenwerte in Λ_p absteigend nach der Größe geordnet sind, so erhalten wir in numerisch stabiler Weise durch Nullsetzen aller Eigenwerte außer den ersten c eine Matrix $\hat{\Gamma}_p^c = O_p^c \Lambda_p^c O_p^c'$ (siehe [1]). Im Folgenden werden wir diese Kovarianzmatrix für unsere Stichprobenschätzer verwenden.

Wir erhalten für den regulären Prozess wie in [1] folgenden Satz:

Satz 3.1 *Ist $\text{rk}\Gamma_p^r < pr$, dann definiert der Schätzer der Minimumnormlösung der Yule-Walker Gleichungen aus (2.114)*

$$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) = (\hat{\gamma}_1^r, \dots, \hat{\gamma}_p^r) O_p^c \Lambda_p^{c\#} (O_p^c)', \quad (3.4)$$

wobei $\hat{\Gamma}_p^{c\#} = O_p^c \Lambda_p^{c\#} (O_p^c)'$, eine stetige Funktion in $\gamma_0^r, \dots, \gamma_p^r$.
Ist $\text{rk}\Gamma_p^r = pr$, dann ist

$$(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p) = (\hat{\gamma}_1^r, \dots, \hat{\gamma}_p^r) \hat{\Gamma}_p^{r-1}, \quad (3.5)$$

eine stetige Funktion in $\gamma_0^r, \dots, \gamma_p^r$. Darüber hinaus ist der Schätzer der Minimumnormlösung konsistent.

Beweis: Da die Eigenwerte sowie zugehörige Eigenvektoren stetige Funktionen der Matrixeinträge sind, ist (3.4) eine stetige Funktion in $\gamma_0^r, \dots, \gamma_p^r$.

Aus der Konsistenz der Schätzer $\hat{\gamma}_j^r$ und der Stetigkeit von (3.4) bzw (3.5) folgt somit, dass $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ ein konsistenter Schätzer der Minimumnormlösung der Yule-Walker Gleichungen ist. \square

3.2.3 Gesamtmodell

Leider sind wir an dieser Stelle nicht imstande, ein einheitliches AR Modell für regulären und singulären Prozess anzugeben, weil wir nicht garantieren können, dass \hat{z}_t^s Lösung der homogenen Gleichung $\hat{e}(z)\hat{z}_t^s = 0$ ist.

3.3 Ausblick

Die in diesem Kapitel vorgestellten Schätzmethoden sind natürlich nicht ideal und sicher noch verbesserungswürdig. Ziel einer weiteren Arbeit wäre sicherlich die Entwicklung eines konsistenten Schätzverfahrens, das für geschätzte Kovarianzdaten ein einheitliches AR System für singulären und regulären Anteil liefert..

Literaturverzeichnis

- [1] M. Deistler, B.D.O. Anderson, A. Filler, Ch. Zinner, and W. Chen. Generalized linear dynamic factor models - an approach via singular autoregressions. *European Journal of Control*, (16(3)):211–224, 2010.
- [2] M. Deistler, A. Filler, B.D.O. Anderson, W. Chen, and E. Felsenstein. Singular autoregressions for generalized dynamic factor models. Accepted for Presentation at the 49th IEEE Conference on Decision and Control.
- [3] M. Forni, M. Hallin, M. Lippi, and L. Reichlin. The generalized dynamic factor model: identification and estimation. *The Review of Economic Studies*, (65):453–473, 2000.
- [4] E. J. Hannan and M. Deistler. *The Statistical Theory of Linear Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [5] Y. Inouye. Modeling of multichannel time series and extrapolation of matrix-valued autocorrelation sequences. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP.-31(1), February 1983.
- [6] M. Deistler and W. Scherrer. The Prague Lectures, Econometrics II, 1994. Manuskript.
- [7] W. Chen, B.D.O. Anderson, M. Deistler, and A. Filler. Stable AR model realizations of singular covariances. Working Paper.
- [8] W. Chen, B.D.O. Anderson, M. Deistler, and A. Filler. Solutions of Yule-Walker Equations for Singular AR Processes. Submitted to the Journal of Time Series Analysis, 2010.
- [9] M. Deistler. z -Transform and Identification of Linear Econometric Models with Autocorrelated Errors. *Metrika*, 22:13–25, 1975.
- [10] M.J. Artis, J.G. Clavel, M. Hoffmann, and D.M. Nachane. Harmonic Regression Models: A Comparative Review with Applications. *Working Paper Series ISSN 1424-0459*, 2007. Working Paper No. 333.