

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der
Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt
(<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the
main library of the Vienna University of Technology
(<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Ausgewählte geometrische Problemstellungen

ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Paukowitsch

durch
AMINA ELSAYED

Wien, am 25. Januar 2011

In Dankbarkeit an meine geliebten Eltern.

Inhaltsverzeichnis

Inhalt	iii
1 Einführung	1
2 Klassische Probleme der Antike	3
2.1 Konstruktion mit Zirkel und Lineal	7
2.2 Problem 1: Die Dreiteilung eines Winkels	11
2.3 Problem 2: Die Verdoppelung des Würfels	15
2.4 Problem 3: Die Quadratur des Kreises	19
2.5 Problem 4: Die Konstruktion regelmäßiger Polygone	24
2.5.1 Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und des regelmäßigen Zehnecks	26
2.5.2 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks und des regelmäßigen Neunecks	29
2.5.3 Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks	30
2.5.4 Zusammenfassung	33
3 Zur ebenen Differentialgeometrie	35
3.1 Problem 5: Die Klothoide	36
3.1.1 Modellierung	36
3.1.2 Approximation der Klothoide durch ein 2^n -Sehnenpolygon	39
3.1.3 Anwendungsbereich	41
3.2 Problem 6: Die Wallace-Gerade	43
3.2.1 Die Hüllkurve	53
4 Zur räumlichen Differentialgeometrie	55
4.1 Problem 7: Das Möbiusband	56
4.1.1 Modellierung	57
4.1.2 Visualisierung der Orientierung	59

4.1.3 Anwendungsbereich	62
4.2 Problem 8: Die Kleinsche Flasche	63
Literaturverzeichnis	68

Kapitel 1

Einführung

Inspiziert durch den Artikel "Perlen der Geometrie" von Prof. Dr. Oswald Giering [GIERING 1998] werden in vorliegender Arbeit einige Besonderheiten aus der Geometrie diskutiert. Diese werden nach folgenden Kriterien ausgewählt:

- *Probleme*, die schon immer die Aufmerksamkeit sowohl der Mathematiker als auch der Mathematik-Laien auf sich ziehen.
- *Anwendungen*, die eine Verknüpfung von Mathematik und dem Alltag herstellen und damit auch für Laien von Interesse sind.
- *Begriffe*, die sowohl in der Geometrie von zentraler Bedeutung sind als sich auch in anderen Fachbereichen, beispielsweise in der Kunst, wieder finden.
- *Geometrische Lehrsätze*, welche sehr unterschiedliche Methoden zur Beweisführung nahe legen.

Die ausgewählten geometrischen "Perlen" werden unter Verwendung geeigneter 2D- bzw. 3D-Software visualisiert. Ihre mathematische Bedeutung wird diskutiert und, wo vorhanden, wird deren Relevanz für andere Disziplinen aufgezeigt.

Die Arbeit ist unterteilt in drei Hauptbereiche, wobei der erste Bereich sich mit den bekannten klassischen Problemen aus der Antike befasst (Kapitel 2). Darunter sind die Dreiteilung eines Winkels, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises unter Verwendung gewisser Konstruktionswerkzeuge zu verstehen. Diese mit der antiken mathematischen Schule "Euklid" verknüpften geometrischen Aufgaben besitzen auch heute noch große grundsätzliche Bedeutung in der Mathematik. Auch wird in Kapitel 2 auf die Konstruktion der regelmäßigen Polygone eingegangen, die eng mit den vorher

erwähnten Problemen verbunden ist.

In den beiden folgenden Bereichen (Kapitel 3 und Kapitel 4) wird auf das mathematische Teilgebiet der Differentialgeometrie näher eingegangen. In Kapitel 3, welches sich mit der ebenen Differentialgeometrie befasst, werden zwei ausgewählte Objekte, die Klothoide und die Wallace-Gerade, präsentiert. Diese Begriffsbildungen sind nicht nur in der Geometrie von großer Bedeutung, sondern kommen auch in anderen Bereichen zum Tragen. So ist zum Beispiel die Klothoide eine aus der Straßenplanung nicht wegzudenkende Kurve.

In Kapitel 4, welches sich mit der räumlichen Differentialgeometrie befasst, wird zunächst die Unterscheidung von orientierbaren und nicht-orientierbaren Flächen erläutert. Die danach angeführten Objekte sind das Möbiusband und die Kleinsche Flasche, die beiden wohl bekanntesten nicht-orientierbaren Flächen. Das Möbiusband ist vor allem durch die "Unmöglichkeitsobjekte" von M.C. Escher in weiten Kreisen bekannt geworden, und die Kleinsche Flasche inspiriert durch ihre Selbstdurchdringung Kunstschaffende unterschiedlicher Bereiche.

Für die Modellierung der vorgestellten Objekte werden die Softwaresysteme *Maple*® Version 13 und *EUKLID DynaGeo* Version 3.5 c verwendet. Die erste Version des Computeralgebrasystems *Maple* (mathematical manipulation language) wurde an der Universität von Waterloo in Canada vor mehr als 25 Jahren programmiert. Das als symbolischer Rechner konzipierte System *Maple* bedient sich sehr effizienter numerischer Algorithmen, die für nahezu alle Teilgebiete der Mathematik von sehr großer Bedeutung sind. Weiters ermöglicht es die Visualisierung und Animierung von mathematischen Strukturen. Das 2D-Paket *EUKLID DynaGeo* ist eine dynamische Software, die es ermöglicht, Angabepunkte in einer Konstruktion zu bewegen und dann das Ergebnis der Konstruktion nahezu in Echtzeit betrachten zu können. Wie der Untertitel "Geometrie (wie) mit Zirkel und Lineal" auf dem Startlogo verrät, werden in diesem Computerprogramm Konstruktionen mithilfe der Euklidischen Werkzeuge durchgeführt. Es stehen jedoch auch Kegelschnitte als "fertige" Konstruktionsbefehle zur Verfügung. Weiters können auch Animationen erstellt werden.

Alle Konstruktionen der diskutierten Problemstellungen können in digitaler Form auf der beiliegenden CD eingesehen werden.

Kapitel 2

Klassische Probleme der Antike

Zu Beginn dieser Arbeit wird auf die drei wohl bekanntesten Problemen der Antike näher eingegangen. Zu diesen zählen die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung eines Winkels. Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Verwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat. Bei dem Problem der Würfelverdoppelung ist ein Würfel mit doppeltem Volumen gesucht und bei der Dreiteilung eines Winkels soll versucht werden, einen gegebenen Winkel dreizuteilen.

Die eigentliche Schwierigkeit besteht allerdings darin, diese Konstruktionen "nur" mit den sogenannten Euklidischen Werkzeugen d.h. mit Zirkel und Lineal, durchzuführen. Bei diesen von dem großen Mathematiker Euklid¹ (360-280 v.Chr.) in seinem Werk, den "Elemente", zusammengestellten Werkzeugen handelt es sich um logische Konstruktionswerkzeuge. Zum einen können zwei beliebige Punkte durch eine Gerade verbunden werden, zum anderen kann um einen beliebigen Punkt ein Kreis durch einen weiteren beliebigen Punkt konstruiert werden. Man kann sich also ein unmarkiertes Lineal und einen Zirkel, der zusammenklappt, wenn er vom Papier abgehoben wird, vorstellen. Durch geeignete Iteration kann der logische Zirkel zu einem "Streckenabtrager" gemacht werden.

¹Euklid von Alexandria lebte von ca. 360 bis ca. 280 v. Chr. und war ein bedeutender griechischer Mathematiker. In seinem berühmtesten Werk "Elemente", ca. um 325 v. Chr. entstanden, trug er das Wissen der griechischen Mathematik seiner Zeit zusammen. Er zeigte darin die Konstruktion geometrischer Objekte, natürlicher Zahlen sowie bestimmter Größen und untersuchte deren Eigenschaften, die er in Definitionen, Postulate und Axiome festlegte. Viele Sätze der Elemente stammen nicht von Euklid selbst. Seine Hauptleistung besteht vielmehr in der Sammlung und einheitlichen Darstellung des mathematischen Wissens sowie der strengen Beweisführung, die zum Vorbild für die spätere Mathematik wurde.

Die logischen Grundlagen zu geometrischen Konstruktionen in der Antike werden in den Postulaten von Euklids "Elementen" zusammengefasst:

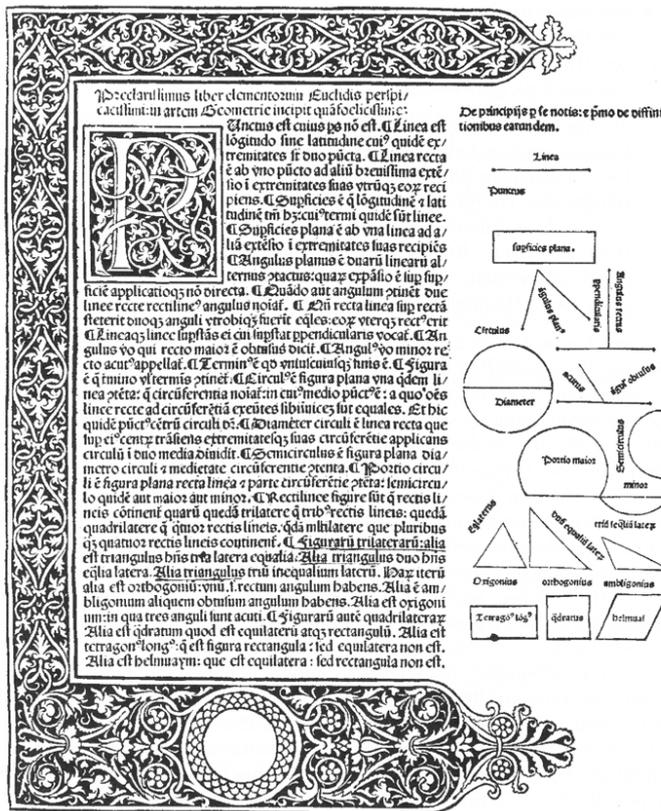
- P1: Es ist möglich eine Gerade von einem Punkt zu irgendeinem anderen Punkt zu ziehen.
- P2: Es ist möglich innerhalb dieser Geraden eine endliche Strecke beliebig oft aufzutragen.
- P3: Es ist möglich einen Kreis mit einem gegebenen Punkt als Mittelpunkt und mit einer von diesem Punkt ausgehenden Strecke als Radius zu ziehen.
- P4: Alle rechten Winkel sind einander gleich.
- P5: Wenn eine Gerade zwei Geraden so schneidet, dass die inneren Winkel auf einer Seite der Geraden weniger als zwei rechte Winkel sind, dann schneiden sich die zwei Geraden auf der Seite auf der sich die Innenwinkel befinden, welche zusammen weniger als zwei rechte Winkel sind. [KAISER und NÖBAUER 1998]

Diese fünf Postulate bilden neben den Definitionen sowie den Axiomen Euklids die Grundlage, auf die das Gedankengut der Geometrie aufbaut. Die Antwort auf die Frage, warum diese Konstruktionen unter solchen Einschränkungen durchgeführt werden sollten, bedarf eines kurzen Einblicks in die Entwicklung der Geometrie als Wissenschaft.

Was Pythagoras (570-510 v. Chr.) und Thales (624-546 v. Chr.) im 6. Jhd v. Chr. begannen, endete bzw. wurde 200 Jahre später in Euklid's Werk "Elemente" zusammengefasst. Zu Beginn stellte der Begriff Zahl den Urgrund aller Dinge dar. Diese Theorie setzte sich in der Proportionenlehre fest, die jedoch durch die Entdeckung der irrationalen Zahlen bald ins Wanken geriet, da diese aus der Proportionenlehre herausfallen. Der Zahlenbegriff allein konnte also nicht die Basis der exakten Mathematik bilden. Die dadurch ausgelöste Grundlagenkrise wurde von den Griechen insofern "gelöst", da sie einerseits erkannten, dass die arithmetischen Grundoperationen im geometrischen Rahmen leicht durchgeführt werden konnten, und andererseits weiterhin ihre Proportionenlehre verwendeten mit der Ergänzung, dass sie jede irrationale Größe als eine Zerlegung in unendlich viele kleine Stückchen sahen. Mit diesem Lösungsversuch zogen sich die Mathematiker allerdings heftige Kritik und Spott von den damaligen Philosophen zu. Diesen Schwachpunkt in der damaligen Mathematik schaffte Eudoxos von Knidos (ca. 390-338 v. Chr.) zu beheben, indem er die Proportionenlehre derart modifizierte, dass sie für die irrationalen Zahlen verwendet werden konnte und indem er durch das Exhaustionsprinzip das

Unendliche in den Griff bekam. Dieses Gedankengut wurde schließlich von Euklid zusammengefasst und in seinem Werk "Elemente" festgehalten.

Da mit Euklids "Elemente" eine grundlegende Basis der Wissenschaft Geometrie geboten wurde, galt es also absolut notwendig, die Konstruktionen der drei klassischen Probleme der Antike unter solchen Einschränkungen durchzuführen. In Abbildung 2.1 sind zwei Auszüge aus seinem Werk abgebildet. Abbildung 2.1 (a) zeigt eine Seite der Erstausgabe der lateinischen Bearbeitung. Diese Ausgabe wurde 1482 in Venedig von dem aus Augsburg stammenden Drucker und Verleger Erhard Ratdolt hergestellt und zählt zu einer der ersten gedruckten Bücher der Welt. Abbildung 2.1 (b) zeigt die von den Arabern kommentierte und weiterentwickelte Übersetzung des 9. Jahrhunderts [ENDRESS 2001].



(a) Titelblatt der ersten Druckausgabe der "Elemente", Venedig 1482. Sie unterscheidet sich von allen späteren Ausgaben dadurch, dass sie ohne Nennung von Herausgeber, Übersetzer oder Drucker nach nur einem Einleitungssatz sofort mit dem eigentlichen Text beginnt

(b) Handschrift einer arabischen Version der "Elemente" Euklids, von den Arabern kommentiert und weiterentwickelt, erste Übersetzung des 9. Jahrhunderts

Abbildung 2.1: Auszüge aus Euklids "Elemente" [SCRIBA und SCHREIBER 2005] [ENDRESS 2001]

Bei der Konstruktion mit Zirkel und Lineal entstehen neue Punkte ausschließlich aus Schnitten von Geraden und Kreisen (auch untereinander), wobei Geraden durch vorhandene Punkte definiert werden und Kreise um vorhandene Punkte geschlagen werden und Radien haben, die als Abstand vorhandener Punkte existieren. Diese Schnittpunkte führen auf lineare und quadratische Gleichungen, deren Lösungen "im schlimmsten Fall" daher Quadratwurzeln sind. Probleme treten dann auf, wenn es um Gleichungen dritten Grades geht, wie es bei zwei der drei klassischen Problemen der Antike der Fall ist, nämlich bei der Winkeldreiteilung und bei der Würfelverdoppelung oder wenn nichtalgebraische Gleichungen auftreten, wie bei der Quadratur des Kreises wegen der Transzendenz von π .

Die klassischen Probleme der Antike sind unter ausschließlicher Verwendung der Euklidischen Werkzeuge in endlich vielen Schritten nicht lösbar. Dies wurde erst 2000 Jahre später bewiesen. 1837 lieferte Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) durch die Vorarbeiten von Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) und Évariste Galois (1811-1832) den Beweis für die Unmöglichkeit der Konstruktion der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung unter den gegebenen Voraussetzungen. 1882 bewies Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) die Transzendenz von π , was ausschlaggebend für die Unmöglichkeit der Konstruktion der Quadratur des Kreises war, wie im folgenden Kapitel näher gebracht wird.

2.1 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Bevor auf die Problematik dieser Konstruktionen eingegangen werden kann, müssen einige Grundlagen bzw. Begriffsdefinitionen aus der Algebra herangezogen werden, auf die dann in weiterer Folge verwiesen werden können.

Ein Erweiterungskörper E eines Körpers K lässt sich als Vektorraum über K auffassen. Dabei bezeichnet der Grad des Erweiterungskörpers E die Dimension des Vektorraums, der über dem Körper K aufgespannt wird. Von einem endlichen Erweiterungskörper ist dann die Rede, wenn der Grad von E über K kleiner ∞ ist, kurz $[E : K] < \infty$. Man spricht dann auch von einer endlichen Körpererweiterung, wie zum Beispiel $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Eine Basis des Vektorraums " \mathbb{C} über \mathbb{R} " ist etwa das Paar $\{1, i\}$. Der Körper \mathbb{R} ist ein Erweiterungskörper von \mathbb{Q} , aber wie später eingesehen wird, ist $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ nicht endlich.

1. Lehrsatz (Gradsatz): Ist E ein endlicher Erweiterungskörper von K und F ein endlicher Erweiterungskörper von E , dann ist F ein endlicher Erweiterungskörper von K , und es gilt

$$[F : K] = [F : E] \cdot [E : K].$$

Ist $a \in E$, dem Erweiterungskörper von K , eine Nullstelle, $f(a) = 0$ eines Polynoms $f \neq 0$ aus $K[X]$, so heißt a *algebraisch* über K . Andernfalls heißt a *transzendent* über K . Wie später eingesehen werden kann, sind nicht alle Zahlen aus \mathbb{R} algebraisch über \mathbb{Q} , zum Beispiel sind π und $e \in \mathbb{R}$ transzendent über \mathbb{Q} . Es gilt dann weiter:

2. Lehrsatz: Ist a eine Nullstelle eines irreduziblen Polynoms in $K[X]$ vom Grad n , dann gilt

$$[K(a) : K] = n.$$

3. Lehrsatz: Ist $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}$ und $a = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ mit $(r, s) = 1$ eine Nullstelle von f , dann gilt $r|a_0$ und $s|a_n$.

Dieser Lehrsatz wird zur Bestimmung von rationalen Nullstellen eines Polynoms verwendet, wobei r, s teilerfremd sind.

Für die Ermittlung irreduzibler Polynome wird folgender Satz zu Hilfe genommen, der in späterer Folge verwendet wird:

4. Lehrsatz: Sei K ein Körper. Ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad 2 oder 3 ist genau dann irreduzibel in $K[X]$, wenn es keine Nullstelle in K besitzt.

Das Problem die Objekte lediglich mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, konnte erst mit den in späterer Folge gewonnenen Erkenntnissen aus der Algebra erklärt werden. Dazu soll zunächst auf die mit Euklidischen Werkzeugen konstruierbaren Zahlen eingegangen werden.

Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ ist genau dann konstruierbar, wenn eine Strecke der Länge $|r|$ konstruierbar ist, d.h. wenn sie in gegebener Zeichenebene als Koordinate eines mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punktes auftritt. Es gilt dann für zwei konstruierbare reelle Zahlen a und b , dass ihre Verknüpfungen mit den vier Grundrechnungsarten $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ und $\frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$, ebenfalls konstruierbar sind. Somit lässt sich die Menge K aller konstruierbaren reellen Zahlen als Unterkörper von \mathbb{R} auffassen. Dieser Unterkörper enthält jedenfalls den Körper \mathbb{Q} , da dieser der kleinste Unterkörper von \mathbb{R} ist. Somit sind also alle Punkte mit rationalen Koordinaten konstruierbar.

Neue Punkte entstehen ausschließlich durch Anwendung folgender Konstruktionen:

1. Schnitt zweier Geraden, die beide durch jeweils zwei bekannte Punkte mit rationalen Koordinaten bestimmt ist.
2. Schnitt einer Geraden, die durch zwei rationale Punkte gegeben ist, mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt rationale Koordinaten hat und dessen Radius ein rationales Quadrat besitzt.
3. Schnitt zweier Kreise, deren Mittelpunkte jeweils rationale Punkte sind und deren Radien rationale Quadrate besitzt.

Für die Punkte von Geraden und Kreisen, die durch die eben beschriebenen Konstruktionen entstehen, erhält man die folgenden Gleichungen mit a, b, c, d, e und $f \in \mathbb{Q}$:

$$ax + by + c = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Algebraisch betrachtet, bedeuten diese Konstruktionen das Lösen von Gleichungssystemen, die aus jeweils zwei der angegebenen Gleichungen bestehen. Der Schnitt zweier Geraden, wie in Punkt 1 beschrieben, führt auf ein Gleichungssystem von zwei linearen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, deren Lösung ebenfalls ein rationaler Punkt ist. Die aus Punkt 2 erhaltenen Punkte sind Lösungen einer linearen Gleichung und einer quadratischen Gleichung mit jeweils rationalen Koeffizienten, welche nicht notwendigerweise rational sein müssen. Daraus lassen sich neben rationalen Zahlen auch deren Quadratwurzeln konstruieren. Diese Lösungen liegen dann in einem Erweiterungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$

mit $a \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$, eine Basis des Vektorraums " $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ über \mathbb{Q} " ist etwa das Paar $\{1, \sqrt{a}\}$. Die in Punkt 3 beschriebene Konstruktion eines Schnittes zweier Kreise liefert folgendes Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind dieselben Lösungen, die man beim Schnitt eines Kreises mit einer Geraden erhält.

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

$$(d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + f_1 - f_2 = 0$$

Damit lässt sich die in Punkt 3 beschriebene Konstruktion auf die in Punkt 2 beschriebene zurückführen und die so entstehenden Punkte liegen in dem Erweiterungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$. Es kann leicht eingesehen werden, dass Quadratwurzeln aus positiven konstruierbaren Zahlen wieder konstruierbar sind, also gilt für ein konstruierbares $k > 0$, dass auch \sqrt{k} konstruierbar ist. Gemeinsam mit der oben erwähnten Verträglichkeit der konstruierbaren Zahlen mit den vier Grundrechnungsarten gilt nun folgender Satz:

"Der Körper K aller konstruierbaren reellen Zahlen besteht aus allen reellen Zahlen, welche man aus \mathbb{Q} durch endlich oftmaliges Bilden von Quadratwurzeln aus positiven Zahlen und durch endlich oftmaliges Ausführen von Körperoperationen erhält." [DORNINGER und MÜLLER 1984]

Handelt es sich um eine Zahl k , die nicht in \mathbb{Q} liegt, bedarf es einer geeigneten Körpererweiterung. Es ergibt sich also folgender Satz:

"Ist k konstruierbar und $k \notin \mathbb{Q}$, dann gibt es eine endliche Folge von positiven reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n = k$, sodass $k \in \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_n]$ gilt, wobei $\mathbb{Q}[a_1, \dots, a_n]$ für $i=2, \dots, n$ eine Erweiterung von $\mathbb{Q}[a_1, \dots, a_{i-1}]$ vom Grad 2 ist, und $[\mathbb{Q}[k] : \mathbb{Q}] = 2^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$." [DORNINGER und MÜLLER 1984]

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine Zahl k , die nicht in \mathbb{Q} liegt, nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn k in einer Körpererweiterung von \mathbb{Q} vom Grad 2^r mit $r \in \mathbb{N}$ enthalten ist.

Im Falle der drei klassischen Probleme, kann nun in Hinblick auf den oben diskutierten algebraischen Hintergrund, die Unmöglichkeit ihrer Konstruktionen deutlich gemacht werden. Die Dreiteilung eines Winkels und die Würfelverdoppelung führen jeweils auf kubische Gleichungen, woraus aufgrund des 2. Lehrsatzes der Grad der Körpererweiterung 3 wäre, was nicht dem benötigten Grad, nämlich 2^r mit $r \in \mathbb{N}$, entspricht. Bei der Quadratur des Kreises basiert die Unmöglichkeit der Konstruktion auf der Erkenntnis der Transzendenz von π , die daher den algebraischen Anforderungen des Körpers der konstruierbaren Zahlen überhaupt nicht entspricht.

2.2 Problem 1: Die Dreiteilung eines Winkels

Dieses auf den ersten Blick hin sehr leicht erscheinende mathematische Problem, bei dem es darum geht einen gegebenen Winkel mit Euklidischen Werkzeugen zu dritteln, zog schon immer die Aufmerksamkeit vieler Mathematik-Laien auf sich, die sich der Komplexität und Schwierigkeit dieser Aufgabe oftmals nicht bewusst sind. Die Dimension der Komplexität dieser Aufgabe hat Évariste Galois in seinem Beweis der Unlösbarkeit gezeigt, für den Bereiche der Galoistheorie erforderlich sind.

Es ist leicht einzusehen, dass ein Winkel α genau dann konstruiert werden kann, wenn der Cosinus $\cos\alpha$ dieses Winkels konstruiert werden kann. Somit lässt sich dieses Problem so darstellen:

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Wird zum Beispiel für $\alpha = 20^\circ$ eingesetzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Es ist $\cos 20^\circ$ eine Nullstelle des Polynoms $8x^3 - 6x - 1$ in \mathbb{R} . Dieses Polynom ist jedoch nach dem 3. Lehrsatz irreduzibel. Also gilt für die Körpererweiterung nach dem 2. Lehrsatz $[\mathbb{Q}[20^\circ] : \mathbb{Q}] = 3$. Daraus folgt, dass $\alpha = 20^\circ$ nicht konstruierbar ist und damit auch $3\alpha = 60^\circ$ mit Euklidischen Werkzeugen nicht dreigeteilt werden kann.

Allgemein betrachtet, ist die Dreiteilung eines Winkel äquivalent mit der Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - 3x + c = 0$, für deren geometrische Konstruktion die ausschließliche Verwendung von Zirkel und Lineal im allgemeinen nicht ausreichen, wie in der Einleitung dieses Kapitels näher erklärt ist - natürlich lassen sich manche Winkel schon dreiteilen, etwa $\alpha = 90^\circ$.

Falls von Euklidischen Werkzeugen Abstand genommen wird, gibt es eine Reihe von Lösungen zur Winkeldreiteilung, die im Laufe der Geschichte gefunden wurden. Im folgenden wird eine von René Descartes (1596-1650) im Jahre 1637 in seinem Werk "La Geometrie" beschriebene Lösung zur Winkeldreiteilung angeführt. Dieser hat zusätzlich zu den Euklidischen Werkzeugen noch eine feste Parabel gewählt.

Abbildung 2.2 (a) zeigt eine fest vorgegebene Parabel mit Scheitelpunkt P und Parabelachse VPU. Zunächst wird der gestreckte Winkel $\angle VPW$ mithilfe Zirkel und Lineal halbiert, wodurch man das Lot WP auf die Achse erhält. Wird nun der erhaltene Winkel

$\angle VPW$ ebenfalls halbiert, so erhält man einen Winkel $\angle VPQ$ von 45° . Die Winkelhalbierende schneidet die Parabel in dem Punkt Q. Fällt man das Lot von Q auf die Achse, so entsteht der Punkt R. Die Strecke \overline{PR} wird nun nochmals von R aus auf der Achse abgetragen. Es wird nun aus dem entstandenen Punkt S das Lot auf die Achse gefällt, welche ebenfalls in Abbildung 2.2 (a) zu finden ist. In Abbildung 2.2 (b) ist der gegebene Winkel $\angle AOB$ dargestellt, der dreigeteilt werden soll. Die zuvor erhaltene Strecke \overline{PR} wird nun als Radius eines Kreises um O gewählt, der die Schenkel des Winkels in den Punkten C und D schneidet, siehe Abbildung 2.2 (b). Die Hälfte der Sehne CD wird auf dem Lot von S aus abgetragen. Nun wird ein Kreis mit Mittelpunkt T konstruiert, der durch den Punkt P geht. Es wird der Schnittpunkt des Kreises mit der Parabel, der P am nächsten ist, mit X bezeichnet und das Lot von X auf die Achse gefällt. In Abbildung 2.2 (c) ist eben beschriebenes visualisiert. Wird schließlich der Abstand XY in den Zirkel genommen und auf dem zuvor konstruierten Kreisbogen von C aus abgetragen, so erhält man einen Punkt E. Der Winkel $\angle COE$ ist dann genau ein Drittel des gegebenen Winkels $\angle AOB$. Abbildung 2.2 (d) zeigt den dreigeteilten Winkel.

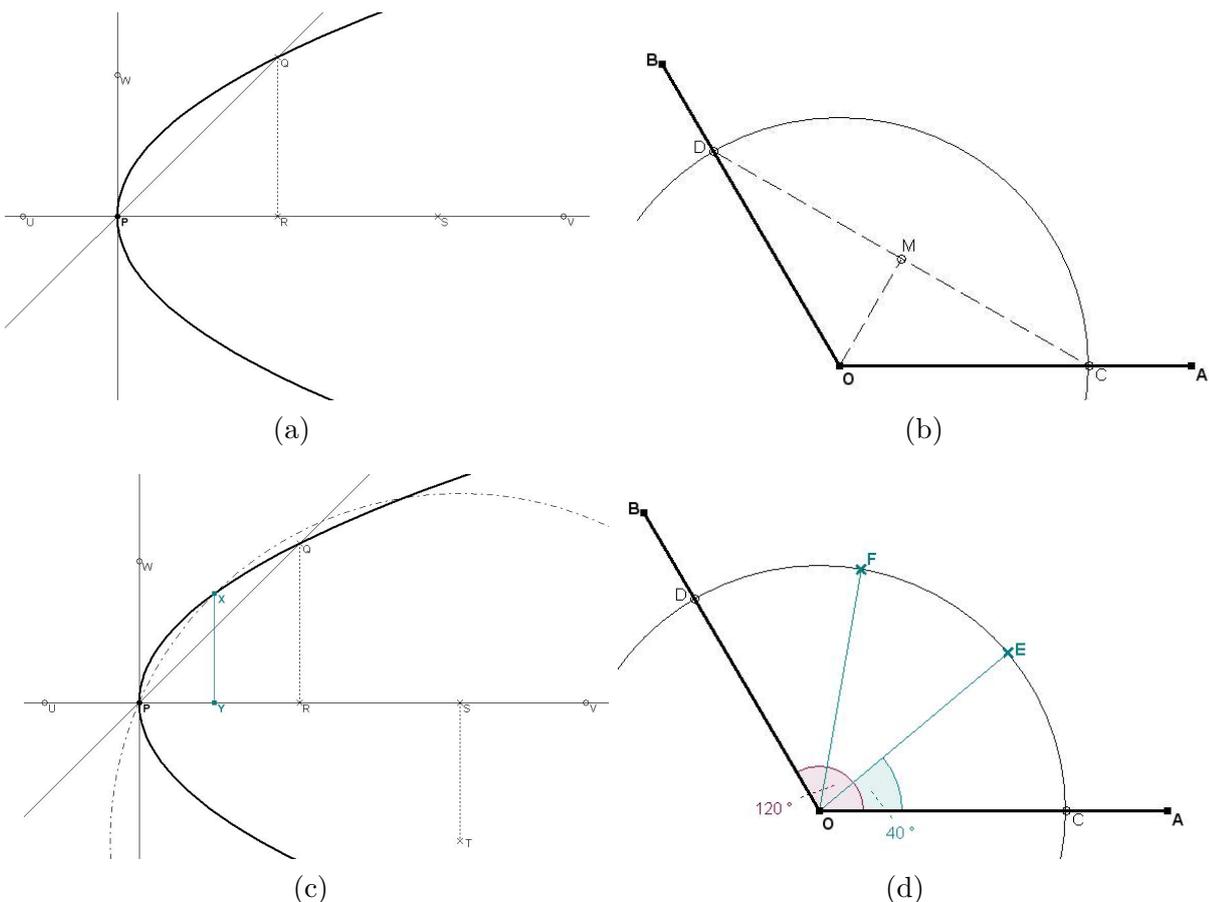
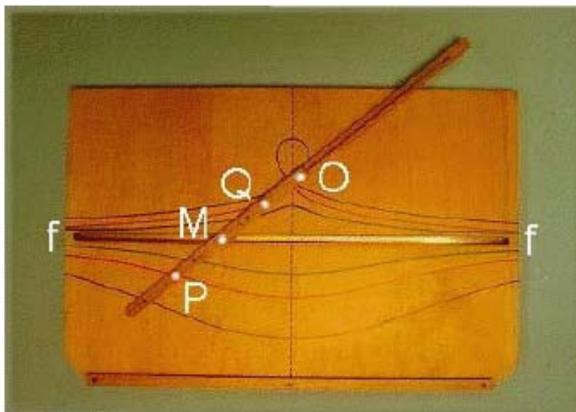


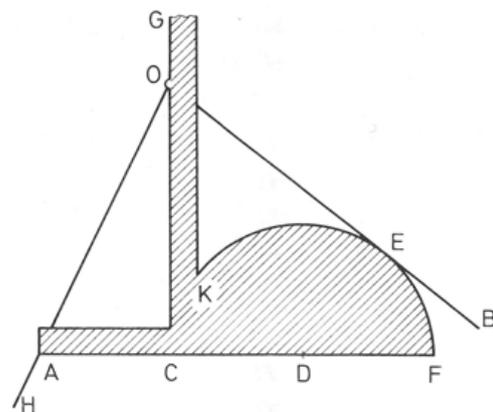
Abbildung 2.2: Winkeldreiteilung nach Descartes mithilfe der Parabel

Wie schon erwähnt, gab es in der Geschichte mehrere Lösungen zu diesem Problem. So wurden beispielsweise auch Kurven höherer Geometrie zur Lösung herangezogen. Am bekanntesten ist die Lösung mithilfe einer Pascal Schnecke, auf die in dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen wird. Es wurden sogar mechanische Instrumente, wie zum Beispiel der Konchoidenzirkel, der Schneckenzirkel oder der "Tomahawk" entwickelt, mit dessen Hilfe ein gegebener Winkel dreigeteilt werden kann. Der Tomahawk erhält seinen Namen aufgrund der optischen Ähnlichkeit zu einer Streitaxt aus indianischen Stämmen. Dieses mechanische Gerät zur Winkeldreiteilung wird so eingepasst, dass der Scheitel O auf dem Griff CG liegt, ein Schenkel durch A geht und der andere Schenkel den Halbkreis berührt. Es ist dabei zu beachten, dass die Radien \overline{DE} , \overline{DC} und \overline{AC} gleich groß sind und es gilt daher: $\overline{DE} = \overline{DC} = \overline{AC}$. Wegen der Kongruenz der Dreiecke ACO , OCD und ODE folgt dann:

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \angle COD = \angle DOE \\ \Rightarrow \angle AOB &= \angle AOC + \angle COD + \angle DOE \\ \Rightarrow \angle AOB &= 3 \times \angle AOC \vee \angle AOC = \frac{1}{3} \times \angle AOB\end{aligned}$$



(a) Konchoidenzirkel



(b) Tomahawk

Abbildung 2.3: mechanische Geräte zur Winkeldreiteilung

[KRONFELLNER 2002]

In Abbildung 2.3 (a) ist ein Konchoidenzirkel abgebildet und Abbildung 2.3 (b) zeigt eben erklärte Winkeldreiteilung mithilfe eines Tomahawk.

Weiters gibt es auch eine Reihe von Näherungslösungen zu diesem Problem, wie zum Beispiel von Albrecht Dürer (1471-1528) in seiner "Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt" aus dem Jahre 1525 oder von Eugen Kopf aus Ludwigshafen im Jahre 1919. Auf letztere soll nun näher eingegangen werden.

Gegeben ist der Winkel $\angle XOA$, der dreigeteilt werden soll. Den Punkt B erhält man indem ein Halbkreis mit Radius \overline{AO} auf die Verlängerung des Schenkels AO konstruiert wird. Das Lot von O auf die Strecke \overline{AB} schneidet den Halbkreis in dem Punkt M. Der Kreis k hat den Mittelpunkt B und geht durch den eben erhaltenen Punkt M. Ein weiterer Kreis mit Radius \overline{AB} wird von M aus abgetragen und dessen Schnittpunkt mit der Geraden AB wird mit D bezeichnet. Als nächstes erhält man den Punkt C durch die Verbindungsstrecke von \overline{XB} mit dem Kreis k. Schließlich verbindet man den Punkt C mit dem Punkt D und erhält den Winkel $\angle CDO$, der angenähert ein Drittel des gegebenen Winkels $\angle XOA$ ist. Der Fehler für diese Näherungskonstruktion liegt unter $8'12''$. In Abbildung 2.4 (a)-(f) sind die Konstruktionsschritte für diese Näherung dargestellt.

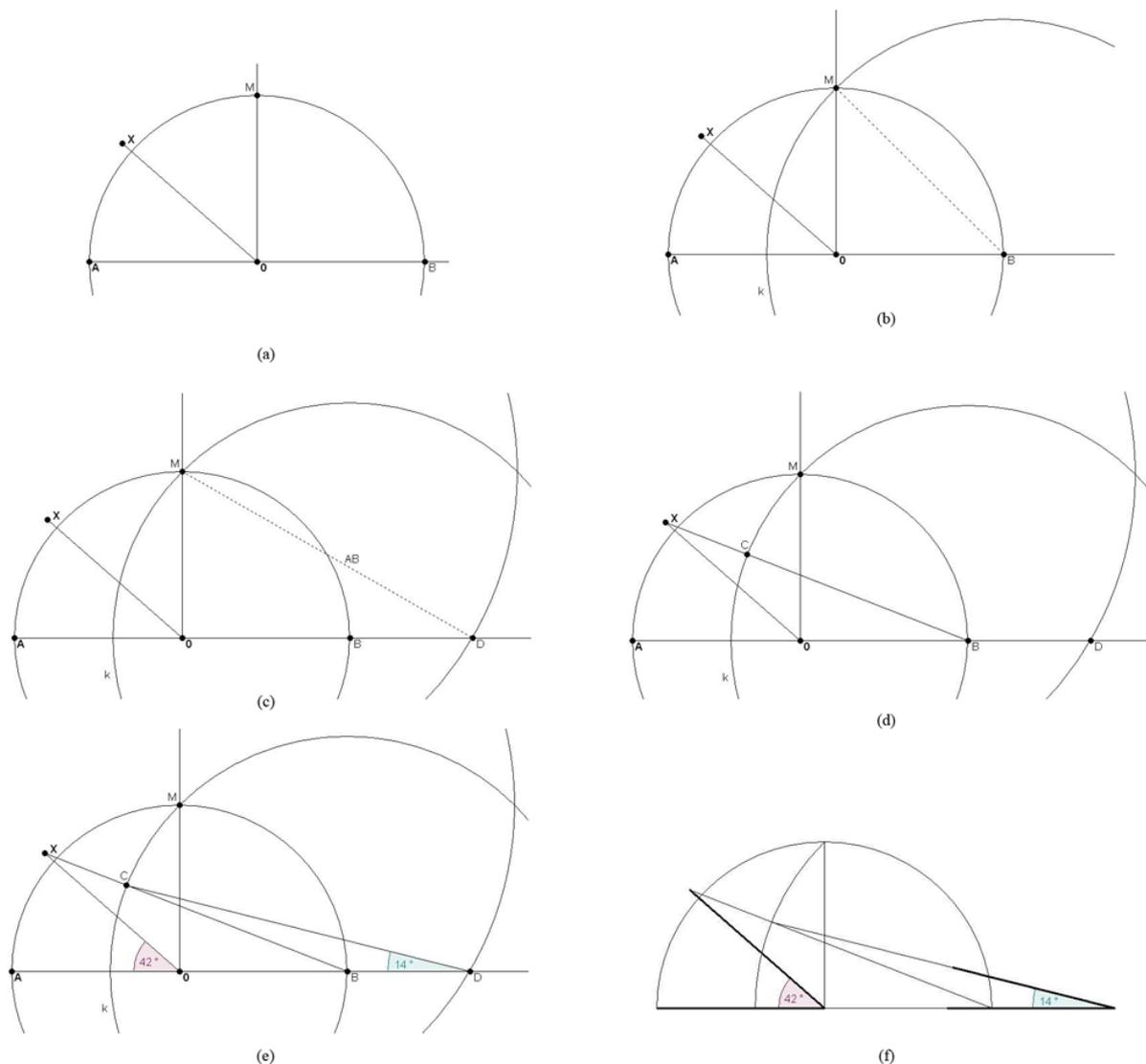


Abbildung 2.4: Winkeldreiteilung nach Eugen Kopf

2.3 Problem 2: Die Verdoppelung des Würfels

Das Problem der Würfelverdoppelung wird auch "Delisches Problem" genannt, da es auf eine Sage der Insel Delos zurückzuführen ist. Die Bewohner wurden von einer Seuche heimgesucht und so wurden sie von Apollo aufgefordert, einen würfelförmigen Altar eines Tempels dem Volumen nach zu verdoppeln.

Es ist also ein Würfel mit Kantenlänge a und dessen Inhalt a^3 gegeben. Nun soll ein weiterer Würfel konstruiert werden, dessen Volumen $2a^3$, also doppelt so groß ist. Somit ist jene Seite x eines Würfels gesucht dessen Volumen $\sqrt[3]{2a^3}$ ergibt. Abbildung 2.5 (a) zeigt den gegebenen Würfel mit Kantenlänge a und in Abbildung 2.5 (b) ist der gesuchte Würfel mit doppeltem Volumen dargestellt.

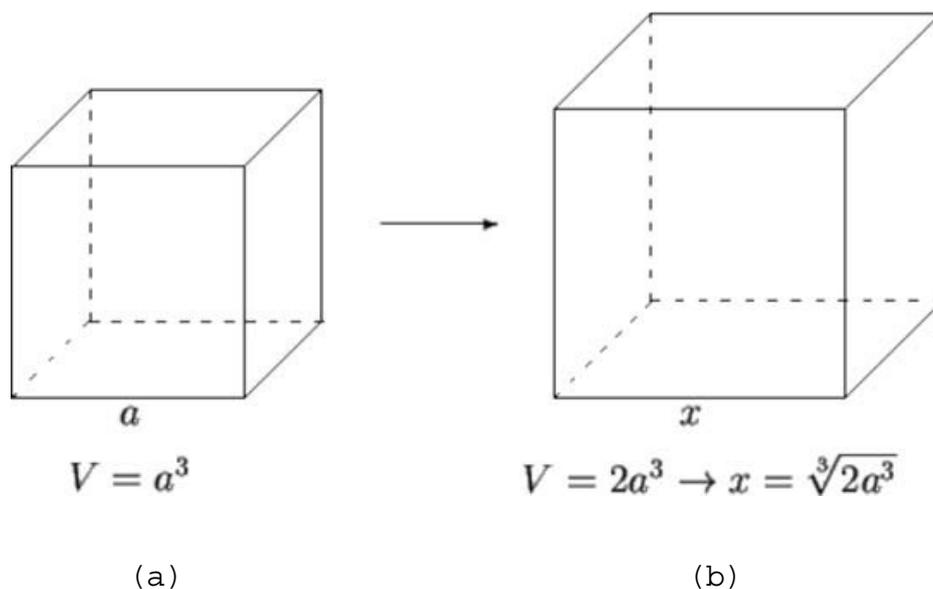


Abbildung 2.5: Würfelverdoppelung

[MARTI 2009]

Wählt man insbesondere die Einheitsstrecke für die gegebene Kantenlänge, so kann dies leicht eingesehen werden. Die gesuchte Kantenlänge x des Würfels, welche mit Zirkel und Lineal konstruiert werden muss, lautet dann $\sqrt[3]{2}$. Da $\sqrt[3]{2}$ eine Nullstelle des irreduziblen Polynoms $x^3 - 2$ über \mathbb{Q} ist, folgt nach dem 2. Lehrsatz $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$. Dies widerspricht dem oben erwähnten Satz über den Grad der Körpererweiterung konstruierbarer Zahlen und daher ist es nicht möglich, $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal allein zu konstruieren.

Um die Mitte des 5. Jhdts. vor Chr. wandelte Hippokrates von Chios dieses Problem in das folgende äquivalente Problem um: Zu zwei gegebenen Strecken a und b sind zwei mittlere Proportionale x und y so zu bestimmen, dass $a : x = x : y = y : b$ gilt. Aus dieser fortlaufenden Proportion lassen sich drei Gleichungen ableiten:

$$x^2 = ay, y^2 = bx, xy = ab \quad (2.1)$$

Daraus folgt weiter:

$$x^4 = a^2 y^2 = a^2 bx$$

und

$$x^3 = a^2 b.$$

Wählt man insbesondere zur Würfelverdoppelung für $b = 2a$, so erhält man für $x = \sqrt[3]{2a^3}$, welches die gesuchte Kantenlänge des Zielwürfels ist. Es gingen praktisch alle späteren Versuche zur Lösung dieses Problems von dieser Modifizierung von Hippokrates aus.

Eine der ersten Lösungen für dieses zur Würfelverdoppelung äquivalenten Problem wurde von Archytas (ca. 410-350 v. Chr.) mit geometrischen Methoden gefunden. Eine weitere Lösung der Griechen zu diesem Problem, die hier angeschnitten werden soll, stammt von Menaichmos (380-320 v. Chr.), dessen Versuch zur Lösung ihn zu der Entdeckung der Kegelschnitte führte. Er baute dabei auf die oben beschriebene Erkenntnis des Hippokrates auf.

Betrachtet man die in 2.1 genannten Gleichungen, so stellt man fest, dass die Zahlen x und y die Koordinaten des Schnittpunktes P der Parabel $x^2 = ay$ mit der Hyperbel $xy = ab$ sind, siehe Abbildung 2.6. Umgekehrt folgt die Proportion aus den Gleichungen der beiden Kurven, siehe Formel 2.2.

$$a : x = x : y = y : b \Leftrightarrow x^2 = ay \wedge xy = ab \quad (2.2)$$

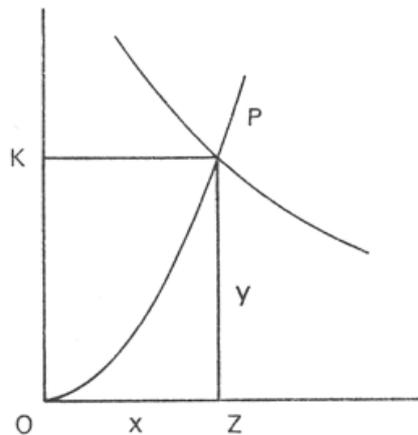


Abbildung 2.6: Schnittpunkt P der Parabel mit der Hyperbel

[KAISER und NÖBAUER 1998]

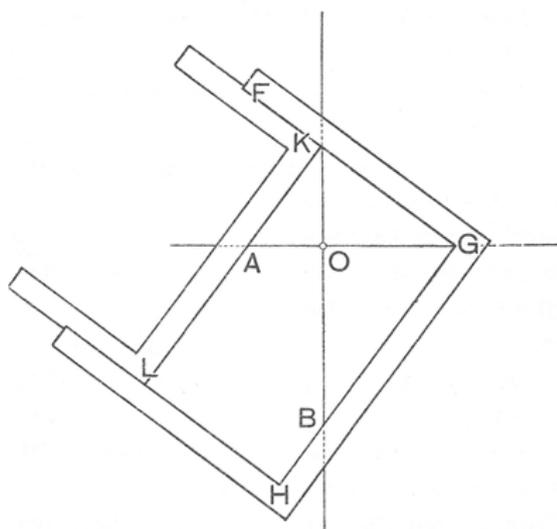
Eine weitere Lösung stammt von Eutokios, der mithilfe eines Winkelhakens die Ermittlung von $\sqrt[3]{2a^3}$ beschrieb. In Abbildung 2.7 (a) ist so ein Winkelhaken abgebildet. Dabei gilt folgendes:

$$\overline{AO} : \overline{OK} = \overline{OK} : \overline{OG} = \overline{OG} : \overline{OB}$$

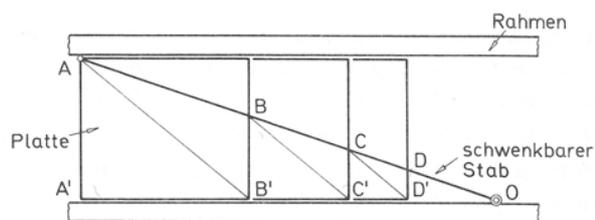
Sind also $a = \overline{AO}$ und $b = \overline{OB}$ gegeben, so sind $x = \overline{OK}$ und $y = \overline{OG}$ die gesuchten

mittleren Proportionalen.

Eine weitere instrumentelle Lösung, auf die aber nicht eingegangen werden soll, ist die von Eratosthenes von Kyrene (ca. 273-194 v. Chr.). Er verwendete dabei drei rechteckige gleich große Platten, die in einem Rahmen, an dem ein schwenkbarer Stab befestigt war, hin und her geschoben werden konnten. In Abbildung 2.7 (b) ist so ein Modell dargestellt.



(a) Winkelhaken von Eutokios



(b) Eratosthenes-Platten

Abbildung 2.7: mechanische Hilfsmittel zur Würfelverdoppelung [KAISER und NÖBAUER 1998]

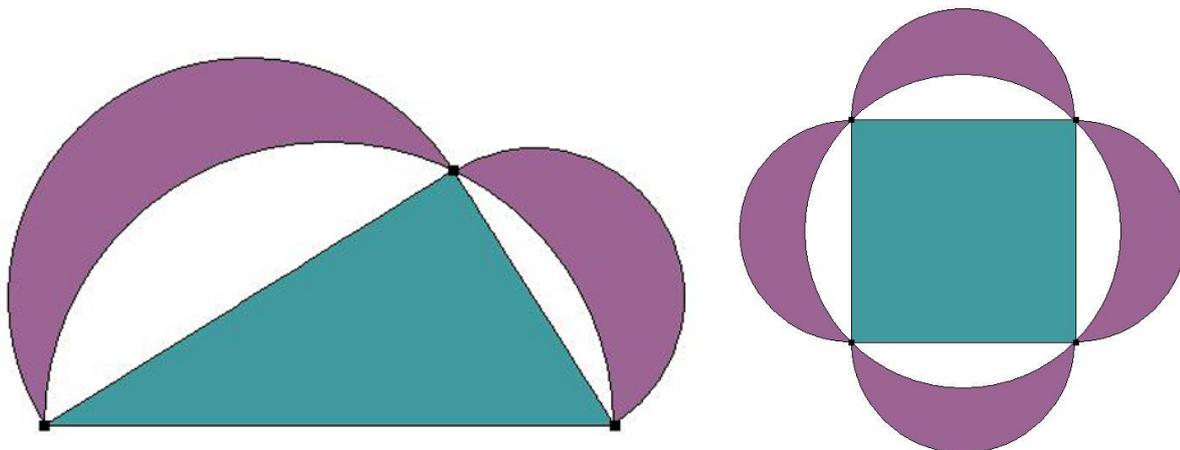
Es wurden auch eine Reihe von Lösungen mithilfe von Kurven der höheren Geometrie gefunden, wie zum Beispiel mithilfe der Cissoide von Diokles oder der Konchoide des Nikomedes, auf die in dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen wird.

2.4 Problem 3: Die Quadratur des Kreises

Bei der Quadratur des Kreises handelt es sich um die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis mit den Euklidischen Werkzeugen ein flächengleiches Quadrat konstruktiv zu ermitteln. Euklid hat in seinem Werk "Elemente" gezeigt, wie man eine beliebige geradlinige Abbildung in ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt und dieses in ein Quadrat verwandelt. Dies versuchte man auch für einen Kreis, was gleichbedeutend mit der Konstruktion einer Strecke, die gleich lang wie der Kreisumfang ist oder nach heutigem Verständnis den Wert von π geometrisch zu bestimmen.

Schon Archimedes von Syrakus (ca. 287-212 v. Chr.) erkannte, dass bei allen Kreisen das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser und das Verhältnis des Flächeninhalts zum Quadrat des Radius dieselbe Konstante sein muss. Daher wird sie auch Archimedes-Konstante genannt. Lange Zeit wurde sie auch "Ludolphsche" Zahl genannt nach dem Mathematiker Ludolph van Ceulen (1540-1610), der den Großteil seines Lebens mit der Berechnung von π verbrachte und ihren Wert auf 35 Stellen nach dem Komma genau angab, die er sogar auf seinem Grabstein eingravieren ließ. Seit Leonhard Euler (1707-1783) im Jahre 1737 wird diese Konstante mit π , dem Anfangsbuchstaben von Peripherie ($\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\acute{\epsilon}\iota\alpha$ = Randbereich), bezeichnet. Diese Bezeichnung für diese Konstante wurde zum ersten Mal von William Oughtred (1575-1660) in seinem Werk "Theorematum in libris Archimedis de Sphaera et Cylindro Declaratio" verwendet.

Die erste Lösung zu diesem Problem findet man bei den Ägyptern im Jahre 1700 v. Chr. im Papyrus Rhind. Sie gaben für die Seite des gesuchten Quadrates $\frac{8}{9}$ des Durchmessers des Kreises an, was einem Wert von 3,1605 für π entspricht. Der erste Grieche, der sich mit diesem Problem beschäftigte, war Hippokrates von Chios um ca. 440 v. Chr., der schon, wie zuvor erwähnt, einen wesentlichen Beitrag zum Delischen Problem - siehe Problem 2 - leistete. Er versuchte, durch Kreisbögen begrenzte Flächenstücke zu quadrieren, welches ihm sogar in 3 Fällen gelang. Man spricht von den sogenannten "Möndchen des Hippokrates", die er konstruktiv in ein flächengleiches Dreieck bzw. Quadrat verwandelte, siehe Abbildung 2.8 (a) und (b). Dies war die erste exakte Quadratur einer Fläche, die nicht von Geraden begrenzt wird. Diese Ergebnisse trugen jedoch keinen Beitrag zum eigentlichen Problem bei. Später versuchte Antiphon aus Athen die Kreisfläche durch einbeschriebene regelmäßige $3 \cdot 2^n$ -Ecke oder $4 \cdot 2^n$ -Ecke auszuschöpfen. Bryson von Herakleia (450-390 v. Chr.) schloß sich dieser Idee an und versuchte es mittels ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Polygonen. Durch die Verwendung des Zwischenwertsatzes und der damit verbundenen Ungenauigkeit wurde sein Verfahren jedoch kritisiert.



(a) Quadratur der Mönchchen in ein flächengleiches Dreieck

(b) Quadratur der Mönchchen in ein flächengleiches Quadrat

Abbildung 2.8: Mönchchen des Hippokrates

Lösungen zu diesem Problem wurden mithilfe einiger spezieller Kurven erzielt, wie zum Beispiel der Quadratrix von Hippias oder der Archimedes Spirale. Um die Mitte des 4. Jhdts fand Deinostratos, Bruder des bereits erwähnten Menaichmos, beide Schüler des Eudoxos, die Lösung zur Kreisquadratur durch die Quadratrix. Darunter versteht man ein Quadrat $OABC$, welchem ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt O und Radius $r = \overline{OA}$ eingeschrieben wird. Der Radiusvektor OX dreht sich gleichförmig von \overline{OC} nach \overline{OA} , und die Gerade MN bewegt sich in demselben Zeitraum gleichförmig von \overline{CB} nach \overline{OA} . Die Quadratrix ist dann die Menge aller Schnittpunkte von \overline{OX} mit MN . [KRONFELLNER 2002]

In Abbildung 2.9 (a) ist die Quadratrix dargestellt. Deinostratos hat gezeigt, dass folgende Proportion gilt: $b : CO = CO : OQ$. Damit kann man eine Strecke konstruieren, die genauso lang ist wie der Viertelkreis. Dadurch kann jenes Quadrat ermittelt werden, dessen Flächeninhalt genauso groß ist, wie der des Kreises.

Archimedes hat sich ausführlich mit der Quadratur des Kreises beschäftigt. Ihm ist der erste wissenschaftlich ernstzunehmende Versuch zur genauen Bestimmung von π zuzuschreiben, der bis heute als "klassische Berechnung von π " bekannt ist. Er bewies, dass sich der Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser genauso verhält wie die Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius. Er lieferte auch die beiden Schranken $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ für π , die oft als Näherungswerte verwendet werden. Wie bereits erwähnt, kann mithilfe einer Archimedes Spirale eine Lösung zum Problem der Quadratur des Kreises gefunden werden. Dabei entsteht eine archimedische Spirale, wenn eine Halbgerade mit Anfangspunkt

O gleichförmig um O gedreht wird und sich gleichzeitig ein Punkt P auf der Geraden gleichförmig von O aus wegbewegt. Diese Kurve hat in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = a \cdot \Theta, \tag{2.3}$$

wobei a ein passender Proportionalitätsfaktor ist. [KRONFELLNER 2002]

Die Lösung zu diesem Problem kann nun leicht eingesehen werden:

Man wählt einen Punkt Q auf der Spirale, der dem Polarwinkel $\Theta = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Somit gilt laut Gleichung 2.3 für die Strecke $\overline{OQ} = a \cdot \frac{\pi}{2}$. Nun wählt man auf der waagrecht Geraden durch O einen Punkt R sodass gilt: $OR = 2a$. Betrachten wir das so entstandene Rechteck ORSQ, so erhält man für dessen Flächeninhalt: $A = 2a \cdot a \frac{\pi}{2}$, welcher der Fläche eines Kreises entspricht. In Abbildung 2.9 (b) ist die Archimedes Spirale mit dem Rechteck ORSQ dargestellt.

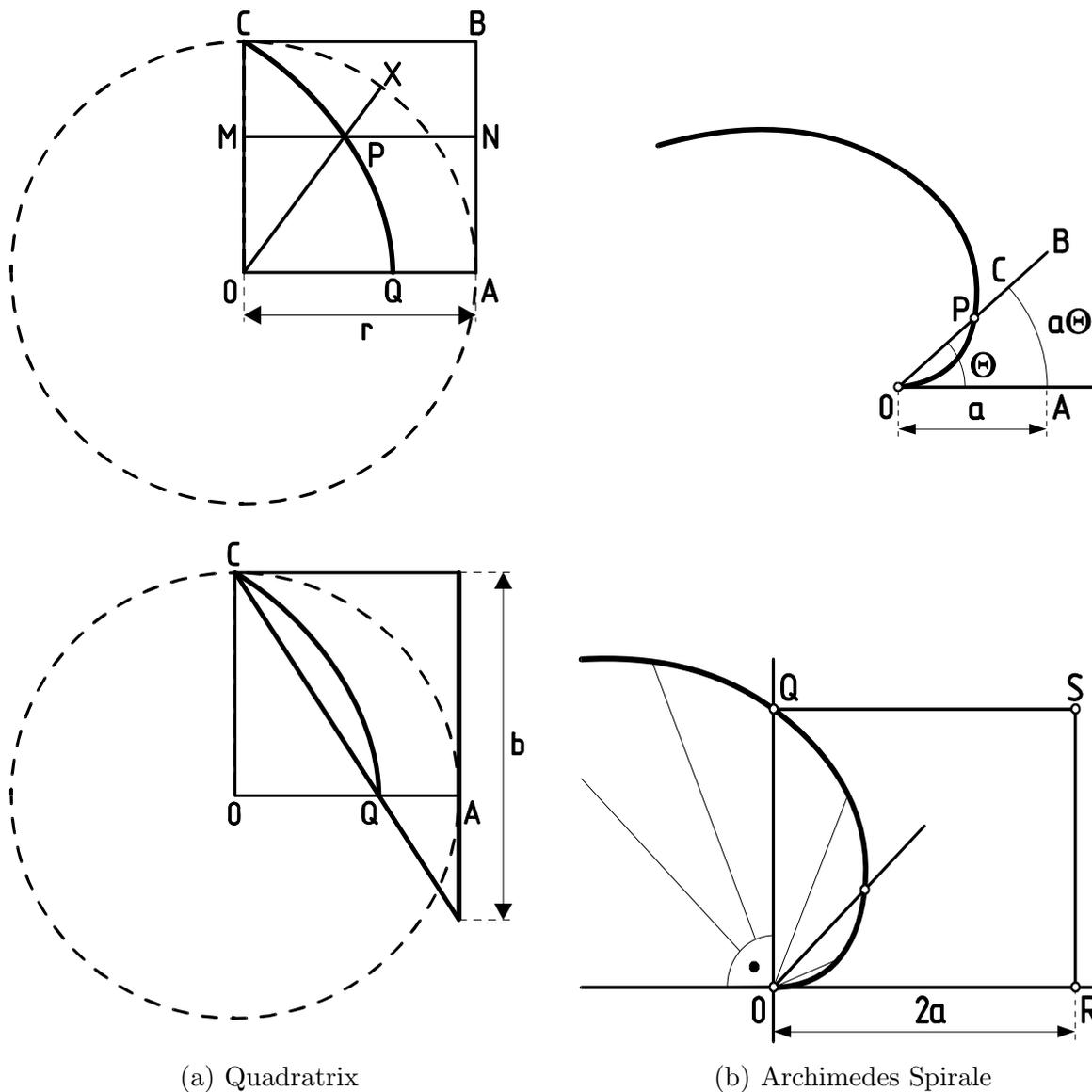


Abbildung 2.9: Quadratur des Kreises mithilfe Kurven höherer Geometrie [KRONFELLNER 2002]

In der Einleitung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist, denn dafür müsste π eine algebraische Zahl sein. Aber weder Johann Heinrich Lambert (1728-1777), der im Jahre 1766 in seiner Arbeit "Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen" den ersten Beweis zur Irrationalität von π lieferte, noch Adrien-Marie Legendre (1752-1833), der im Jahre 1806 in seinem Werk "Éléments de Géométrie" zeigte, dass auch π^2 irrational ist, glaubten daran.

Wie Legendre am Schluß seiner Abhandlung von π^2 behauptet:

”Es ist wahrscheinlich, dass die Zahl π nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, das heißt, dass sie nicht Wurzel sein kann einer algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind. Aber es scheint sehr schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen.” [RUDIO 1892]

Legendre behauptete also um 1806, dass π transzendent ist, obwohl zu jener Zeit transzendente Zahlen nicht einmal bekannt waren. Schließlich bewies der deutsche Mathematiker Carl Louis Ferdinand von Lindemann im Jahre 1882 in seinem kurzen Werk ”Über die Zahl π ”, dass π transzendent ist und dass somit die Quadratur des Kreises mit den Euklidischen Werkzeugen nicht zu lösen sei. Mit dem Beweis der Transzendenz von π wurde sogar gezeigt, dass es kein Polynom endlichen Grades mit rationalen Koeffizienten gibt, das in π eine Nullstelle hat. So liest man in der Einleitung seiner Arbeit:

”Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreise darthun, wen man nachweist, dass die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann. Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.” [LINDEMANN 1882]

2.5 Problem 4: Die Konstruktion regelmäßiger Polygone

Die Konstruktion regelmäßiger ebener Polygone ist ebenfalls ein Problem, das in der Geschichte die Aufmerksamkeit vieler Mathematiker auf sich zog. Dabei heißt ein ebenes Polygon regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind. Die Ecken eines regelmäßigen Polygons liegen unter gleichem Zentriwinkel auf einem Kreis. Man spricht auch von regulären ebenen Polygonen oder kurz von regelmäßigen (regulären) Polygonen. Dadurch ist dieses Problem äquivalent zur Teilung eines Kreises in gleiche Teile. Es sind ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck, Zehneck und Zwölfeck mit den Euklidischen Werkzeugen sehr einfach zu konstruieren. Jedoch wurde über Jahrhunderte lang versucht, ein regelmäßiges Siebeneck oder Neuneck zu konstruieren, welche, wie später gezeigt wird, mit Zirkel und Lineal allein nicht konstruiert werden können.

Im Folgenden wird immer von dem Einheitskreis ausgegangen. Dabei bezeichnet s_n die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, welche durch $s_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$ ausgedrückt werden kann. Aus der n -Eckseite kann man die $2n$ -Eckseite berechnen mit:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Ist die Seite s_n eines n -Eckes konstruierbar, so kann auch das $2n$ -Eck mit der Seite s_{2n} konstruiert werden, indem die Winkel halbiert werden. Somit sind ein 12-Eck, ein 24-Eck, usw. ebenfalls konstruierbar.

Algebraisch betrachtet, lässt sich die Konstruktion des regelmäßigen n -Ecks auf die Kreisgleichung $z^n - 1 = 0$ mit $z \in \mathbb{C}$ zurückführen. Die Lösungen dieser Gleichung teilen einen Kreis in n gleiche Teile. Daher wird diese Gleichung auch Kreisteilungsgleichung genannt. Somit lässt sich sagen:

”Die Teilung eines Kreises in n gleiche Teile ist dann und nur dann möglich, wenn sich die Wurzeln der Gleichung $z^n - 1 = 0$ durch eine Kette von Quadratwurzeln darstellen lassen.” [ADLER 1906]

Es ist also die Teilung eines Kreises in n Teile abhängig von der Auflösung dieser Gleichung:

$$x^n - 1 = 0. \tag{2.4}$$

Zunächst werden die Lösungen dieser Gleichung diskutiert. Es folgt unmittelbar

$$x = \sqrt[n]{1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wobei r und φ zu bestimmen sind. Da r positiv sein muss und 1 die einzige positive Zahl ist deren n -te Potenz wieder 1 ergibt, wird, wie oben erwähnt, vom Einheitskreis ausgegangen. Somit bleibt nur φ zu bestimmen, wodurch gesagt werden kann, dass ein n -Eck genau dann konstruiert werden kann, wenn der Zentriwinkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruierbar ist. Es ergeben sich also für den Winkel φ folgende Gleichungen:

$$\cos(n\varphi) = 1 \text{ und } \sin(n\varphi) = 0.$$

Daraus folgt $n\varphi = 0, 2\pi, \dots, k\pi$ also ist $\varphi = 0, s\frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2k\pi}{n}$. Daher gilt für alle Lösungen der Gleichung aus 2.4 folgende Form:

$$x^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (2.5)$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Werte $k = 0$ und $k = n$ dieselbe Lösung haben, nämlich 1. Setzt man für $k = n + m$ mit $m < n$, so erhält man dieselbe Lösung wie für $k = m$. Dadurch lässt sich sagen, dass die Gleichung aus 2.4 für die Werte $k = 0, \dots, n - 1$ genau n verschiedene Lösungen besitzt, welche der Form aus Formel 2.5 genügen. Diese n Lösungen werden auch n -ten Einheitswurzeln genannt und lassen sich in \mathbb{C} , im Körper der komplexen Zahlen, auch so darstellen:

$$x^k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$$

Dabei erhalten die Zahlen die einfache Form: $x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, 1$. Da $x^n = 1$ ist, gilt folgendes:

$$x^{n-k} = x^{-k} = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (2.6)$$

Die n -ten Einheitswurzeln sind alle voneinander verschieden, da jede Wurzel einen Eckpunkt des regelmäßigen n -Ecks beschreibt, wobei die Zahl 1 ebenfalls ein Eckpunkt ist. Also lässt sich die Konstruktion des regelmäßigen n -Ecks auf die Bestimmung der n -ten Einheitswurzel zurückführen. Es ist somit eine Zahl gesucht, die die Gleichung $x^n - 1 = 0$ löst, bzw. nach der Abspaltung des trivialen Faktors $x - 1$ aus $x^n - 1 = (x - 1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, die die Gleichung

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0 \quad (2.7)$$

löst. Allgemein gilt der Satz über die Konstruierbarkeit von regelmäßigen n -Ecken, entnommen aus dem Lehrbuch "Theorie der geometrischen Konstruktionen" von August Adler (1863-1923) im Jahre 1906:

"Die Konstruktion eines regelmäßigen n -Eckes ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal durchführbar, wenn die Wurzeln dieser Gleichung [aus 2.7] durch eine Kette von Quadratwurzeln bestimmbar sind."

2.5.1 Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und des regelmäßigen Zehnecks

Zur Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks muss die Kreisteilungsgleichung aus 2.4 für $n = 5$ gelöst werden. Es werden die fünften Einheitswurzeln aus der Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

gesucht. Da $x^5 = 1$ ist, erhält man aus der Gleichung 2.6: $x^4 = x^{-1}$, $x^3 = x^{-2}$. Die zu lösende Gleichung lautet nun:

$$x + x^{-1} + x^2 + x^{-2} + 1 = 0.$$

Durch Substitution von

$$y = x + x^{-1} \text{ wird aus } x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$$

und man erhält für y die Gleichung

$$y^2 + y - 1 = 0, \tag{2.8}$$

welche durch Quadratwurzeln lösbar ist. Die Lösungen dieser Gleichung lauten:

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Zur geometrischen Bedeutung des Auffindens des Winkels $\frac{2\pi}{5}$, benötigt man die positive Lösung der Gleichung aus 2.8. Betrachtet man die beiden Gleichungen aus 2.5 und aus 2.6 für vorliegendes Polygon, so erhält man:

$$x = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

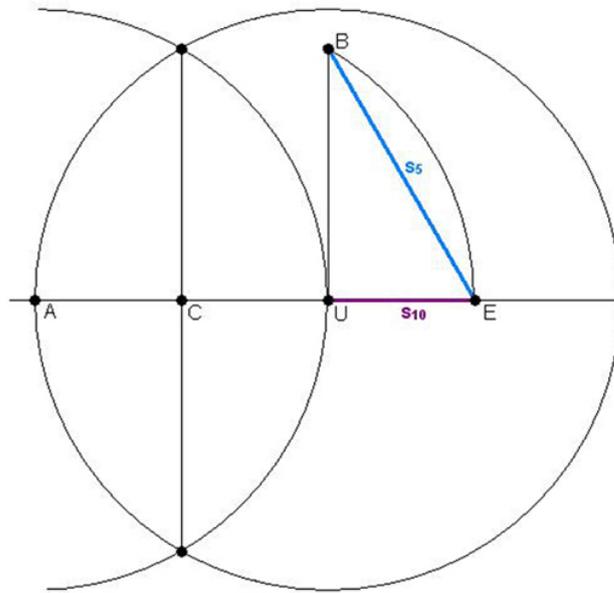
$$x^{-1} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Nun werden die beiden Ausdrücke in die oben erhaltene Gleichung eingesetzt und man erhält folgendes Ergebnis:

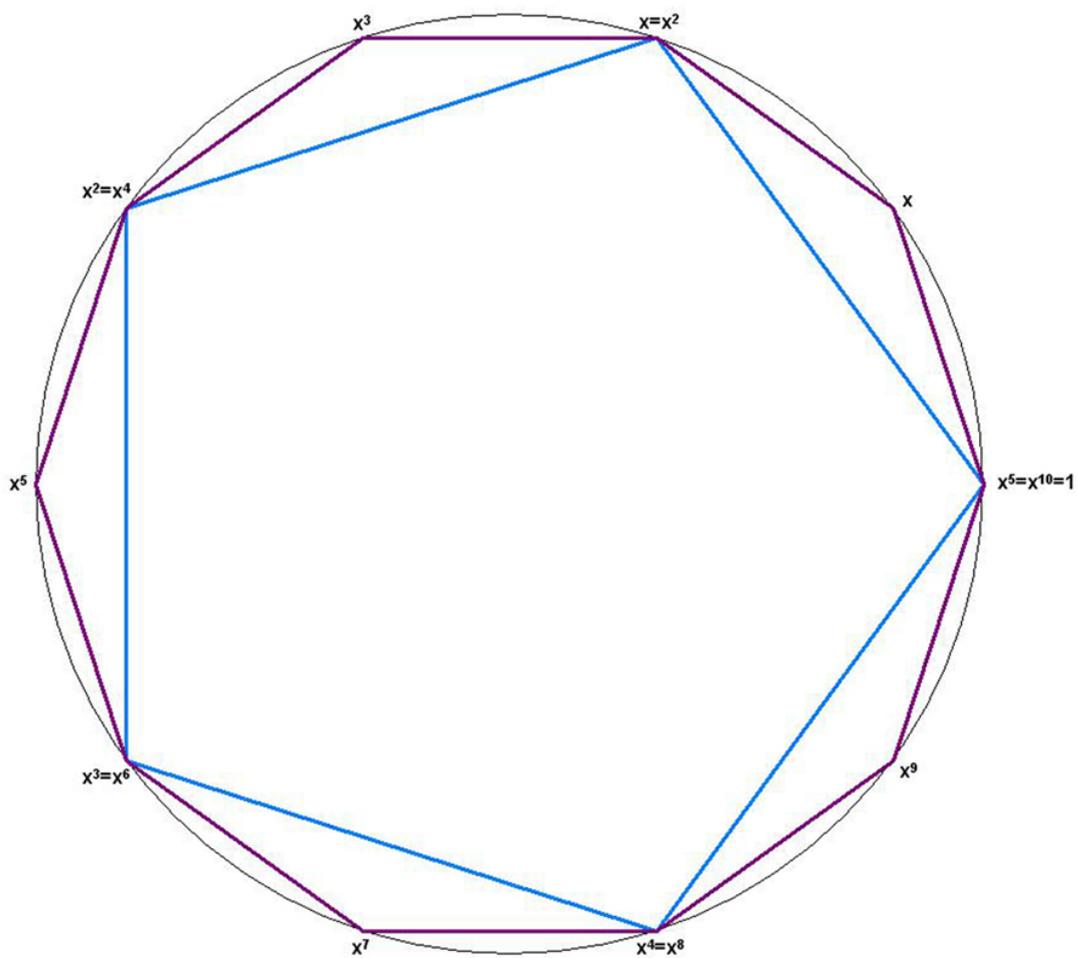
$$y = x + x^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\frac{\pi}{10} = s_{10}$$

Das heißt die positive Lösung der Gleichung aus 2.8 ist also die Seite eines regelmäßigen Zehnecks, aus welchem sich jedoch leicht ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren lässt. Man kann sich die Seite s_5 des Fünfecks auch aus der zu Beginn erwähnten Formel für $2n$ -Eckseiten aus n -Eckseiten berechnen. Dadurch kann folgende bekannte Beziehung leicht nachgeprüft werden: $s_5^2 = 1 + s_{10}^2$.

Zur Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks und damit auch des regelmäßigen Fünfecks ist die Gleichung $y^2 + y - 1 = 0$ geometrisch zu lösen. In Abbildung 2.10 wurden die beiden Polygone mithilfe der dynamischen Software *EUKLID DynaGeo* konstruiert, das wie der Name schon verrät, sich ausschließlich der Euklidischen Werkzeuge bedient. Es wird die positive Lösung $y_1 = s_{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ konstruiert. Dabei wird ein Kreis mit Radius $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ mit Mittelpunkt U konstruiert und ein weiterer Kreis mit gleichem Radius um den dabei erhaltenen Schnittpunkt A geschlagen. Es wird das Lot des Schnittpunktes der beiden Kreise auf die Strecke \overline{AU} gefällt und man erhält den Punkt C . In diesem Punkt wird ebenfalls ein Kreis mit gleichem Radius konstruiert, wodurch die Schnittpunkte B und E erhalten werden. Die so konstruierte Strecke \overline{UE} entspricht der Zehneckseite und die Strecke \overline{BE} entspricht der Fünfeckseite. In Abbildung 2.10 wurden diese beiden Polygone auf eben beschriebene Weise konstruiert.



(a)



(b)

Abbildung 2.10: Das regelmäßige 5-Eck und 10-Eck

2.5.2 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks und des regelmäßigen Neunecks

Die Gleichung, die gelöst werden muss um einen gegebenen Kreis in sieben gleiche Teile zu teilen, entspricht folgender:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + 1 = 0$$

Da $x^7 = 1$ ist, erhält man wiederum aus Formel 2.6: $x^6 = x^{-1}$, $x^5 = x^{-2}$, $x^4 = x^{-3}$. Die zu lösende Gleichung lautet nun:

$$x + x^{-1} + x^2 + x^{-2} + x^3 + x^{-3} + 1 = 0.$$

Durch Substitution von

$$y = x + x^{-1} \text{ wird aus } x^2 + x^{-2} = y^2 - 2 \text{ und aus } x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y$$

und man erhält zur Bestimmung von y die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist jedoch durch eine Kette von Quadratwurzeln nicht lösbar. Daher lässt sich ein regelmäßiges Siebeneck mit der Beschränkung der Euklidischen Werkzeuge nicht konstruieren.

Zur Konstruktion des regelmäßigen Neunecks kann Folgendes überlegt werden: Teilt man einen Kreis in drei gleiche Teile und dann jedes Drittel wiederum in drei gleiche Teile, so erhält man ein regelmäßiges Neuneck. Es gilt daher für die neunten Einheitswurzeln die Gleichung:

$$(x^3)^2 + x^3 + 1 = 0$$

oder

$$x^6 + x^3 + 1 = 0.$$

Da $x^9 = 1$ ist, erhält man wiederum aus der Formel 2.6: $x^6 = x^{-3}$ und es gilt die Gleichung:

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

zu lösen. Diese kubische Gleichung ist wiederum durch Quadratwurzeln nicht lösbar. Somit lässt sich sagen, dass auch das regelmäßige Neuneck mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist.

2.5.3 Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks

Carl Friedrich Gauß zeigte im Jahre 1796 die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks, indem er den Zentriwinkel $\frac{2\pi}{17}$ als Ausdruck von Körperverknüpfungen, rationalen Konstanten und Quadratwurzeln angab, welche folgender Formel entspricht:

$$\cos \frac{360^\circ}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})} \right).$$

Dadurch ist die Konstruierbarkeit des Polygons gegeben.

In Abbildung 2.11 sind die wesentlichen Schritte, die zur Konstruktion eines regelmäßigen Siebzehnecks benötigt werden, dargestellt. Es wurde ebenfalls mithilfe der dynamischen Software *EUKLID DynaGeo* visualisiert.

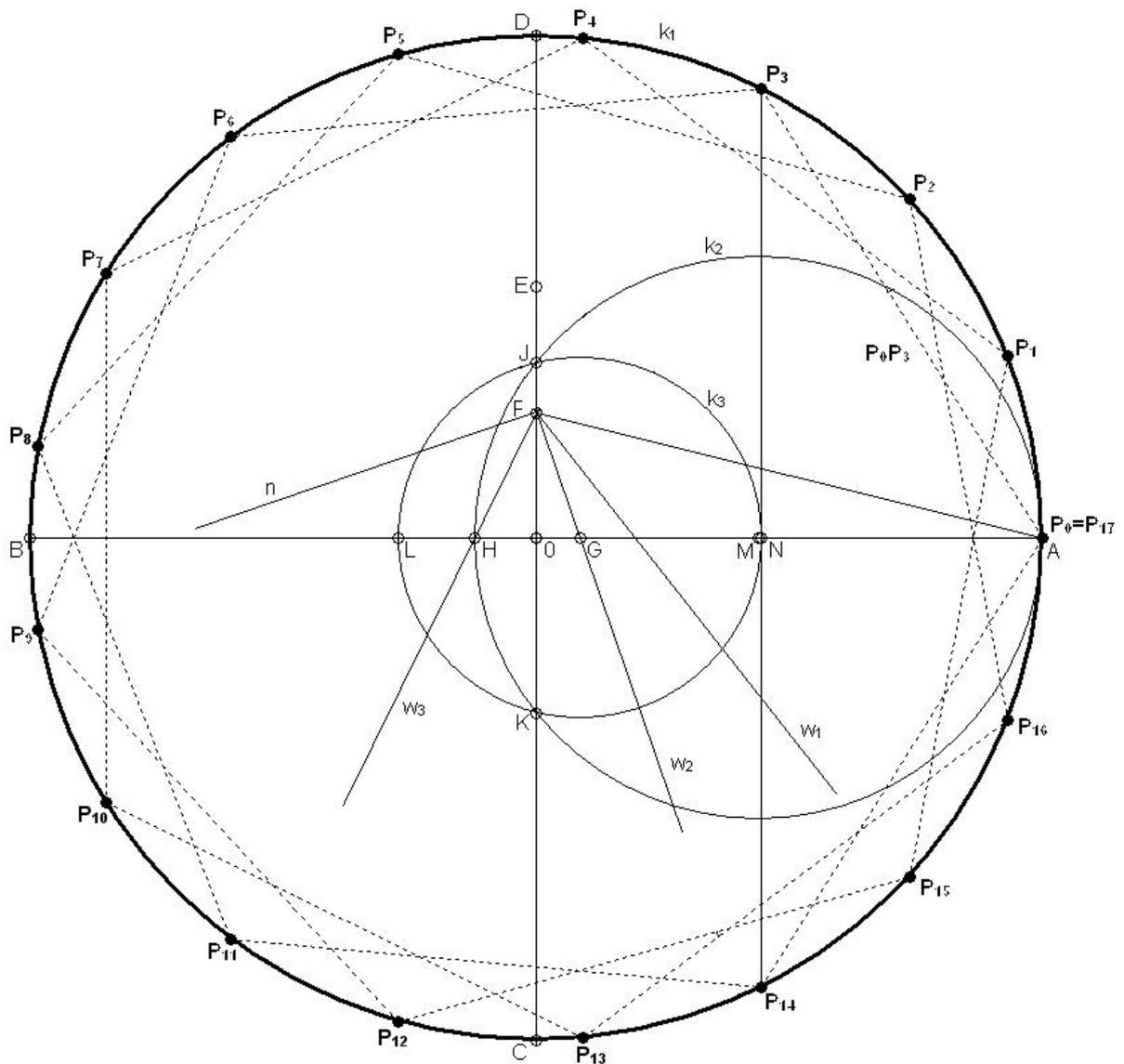


Abbildung 2.11: Konstruktionsschritte des regelmäßigen 17-Ecks

Dabei wird zunächst ein Kreis k_1 mit beliebigem Radius um O konstruiert und sein Durchmesser \overline{AB} eingezeichnet. Es wird das Lot im Punkt O auf die Strecke \overline{AB} konstruiert und man erhält die Schnittpunkte C und D auf k_1 . Dann wird der Mittelpunkt E der erhaltenen Strecke \overline{DO} und der Mittelpunkt F der Strecke \overline{EO} konstruiert und man erhält die Strecke \overline{FA} . Nun werden die Winkelhalbierenden w_1 des Winkels $\angle OFA$ und w_2 des Winkels zwischen w_1 und dem Lot des Punktes O konstruiert. Nun wird die Normale n in den Punkt F auf w_2 gelegt. Die Winkelhalbierende w_3 des Winkels zwischen der Normalen n und w_2 schneidet die Strecke \overline{AB} in dem Punkt H . Ein weiterer Kreis k_2 , dessen Durchmesser die Strecke \overline{HA} ist, wird konstruiert. Dieser Kreis k_2 schneidet die Strecke \overline{CD} in den Punkten J und K . Diese Punkte liegen auf dem Kreis k_3 mit Mittelpunkt G . Man

erhält die Punkte L und N durch den Schnitt des Kreises k_3 mit der Strecke \overline{AB} . Schließlich wird die Tangente an den Kreis k_3 durch den Punkt N gelegt. Die Schnittpunkte der Tangente mit dem Kreis k_1 sind die Punkte P_3 und P_{14} des regelmäßigen Siebzehnecks. Nun wird der Punkt A mit P_0 bezeichnet und der Abstand $\overline{P_0P_3}$ von den auf dem Kreis k_1 erhaltenen Schnittpunkten aus abgetragen. Nach dreimaligem Durchlaufen des Kreises k_1 erhält man alle Eckpunkte des regelmäßigen Siebzehnecks, welches in Abbildung 2.12 dargestellt ist.

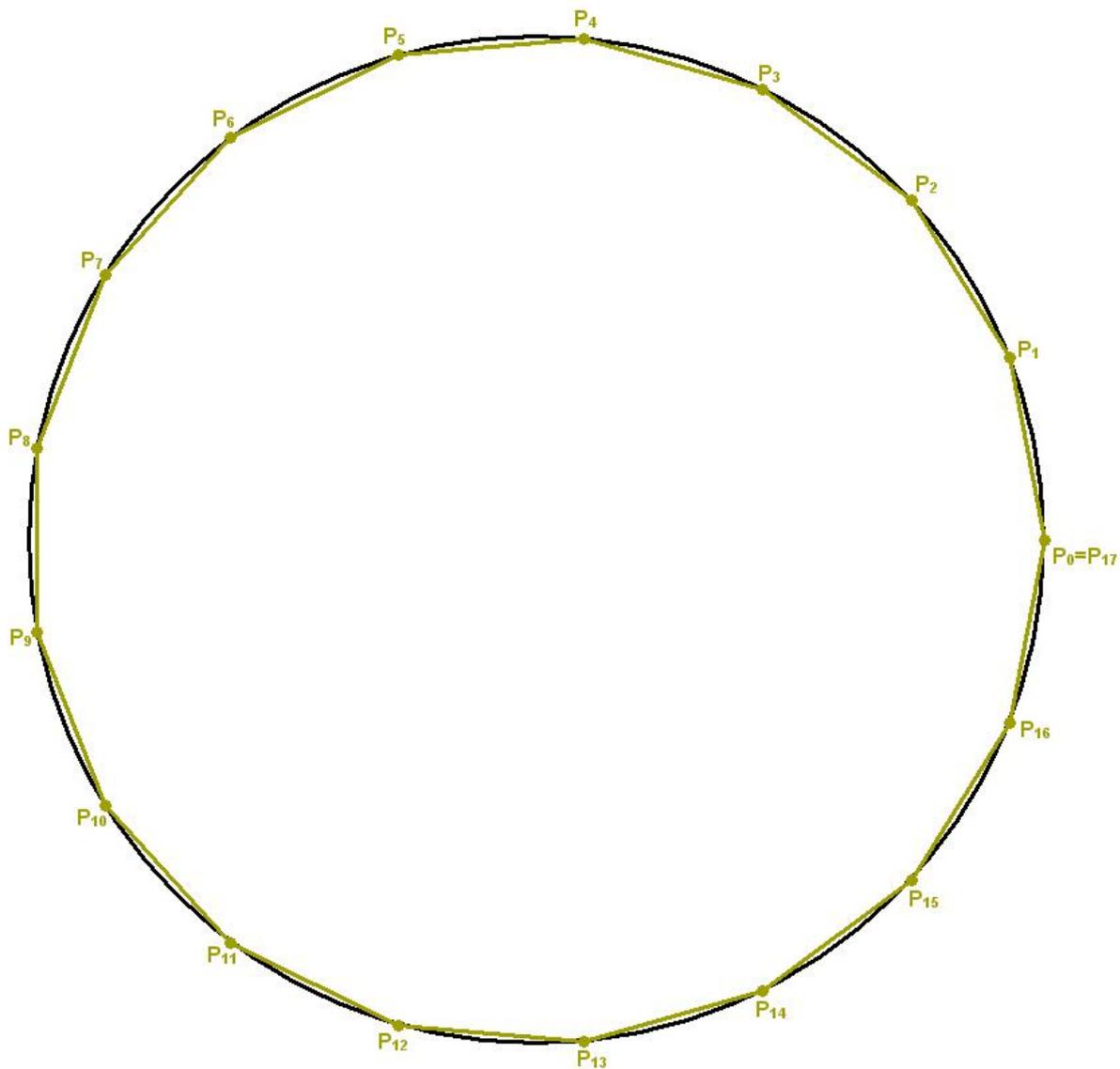


Abbildung 2.12: Das regelmäßige 17-Eck

2.5.4 Zusammenfassung

Abschließend soll nun folgende Frage kurz beantwortet werden:

Welche regulären Polygone lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Aus der Algebra entnimmt man, dass Gleichungen dritten Grades mit rationalen Koeffizienten ohne rationale Wurzeln irreduzibel sind und es gilt der Satz:

”Eine irreduzible Gleichung dritten Grades (mit rationalen Koeffizienten) hat keine durch einen Quadratwurzelausdruck darstellbare Nullstelle.”

Da die Kreisteilungsgleichung, siehe Formel 2.4, irreduzibel ist, sind auch die kubischen Gleichungen zur Berechnung des Siebenecks und des Neunecks, nach dem eben erwähnten Satz, irreduzibel. Dass diese beiden n-Ecke jedoch mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar sind, bedarf es eines wichtigen Satzes:

”Falls eine in einem Körper K irreduzible Gleichung durch einen über K aufgebauten Quadratwurzelausdruck gelöst werden kann, muß ihr Grad eine Potenz von 2 sein.” [BIEBERBACH 1952]

Die n -te Einheitswurzel $\exp \frac{2i\pi}{n}$, von der die Konstruktion des regulären n -Ecks abhängt, ist eine irreduzible Gleichung im Körper der rationalen Zahlen \mathbb{Q} vom Grad $\varphi(n)$. Dabei ist φ die Eulersche φ -Funktion und $n = 2^k p_1 \dots p_m$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $p_1 \dots p_m$ verschiedene Fermat'sche Primzahlen². Daher muss laut dem oben erwähnten Satz von Bieberbach der Grad $\varphi(n)$ der irreduziblen Gleichung eine Potenz von 2 sein.

Die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal wurde bereits 1796 von Carl Friedrich Gauß entdeckt und im ”Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung” publiziert, siehe Abbildung 2.13 [GIERING 1998]. Eine Entdeckung, durch die er schon in jungen Jahren berühmt geworden ist. Dadurch gelang es ihm 1801 eine hinreichende Bedingung für die Konstruktion regelmäßiger Polygone anzugeben: ”Ein reguläres n -Eck kann dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn in der Primfaktorzerlegung von n jeder ungerade Primfaktor F_k nur in erster Potenz vorkommt und dargestellt werden kann als : $F_k = 2^{2^k} + 1$ für $n = 2^1 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_m$.”

Dass diese Bedingung auch notwendig ist, wurde von Pierre-Laurent Wantzel im Jahre 1837 gezeigt.

²Eine Fermat-Zahl, benannt nach dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat (1607-1665), ist eine Zahl der Form: $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$. 1637 vermutete er, dass alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind, was für die ersten fünf Fermat-Zahlen, also für $n = 0, \dots, 4$ auch zutrifft. 1732 zeigte Leonhard Euler (1707-1783), dass F_5 durch 641 teilbar und somit keine Primzahl ist. Bis heute ist es nicht sicher, ob es außer den ersten fünf Fermat-Zahlen $F_0 - F_4$ noch weitere Primzahlen gibt.

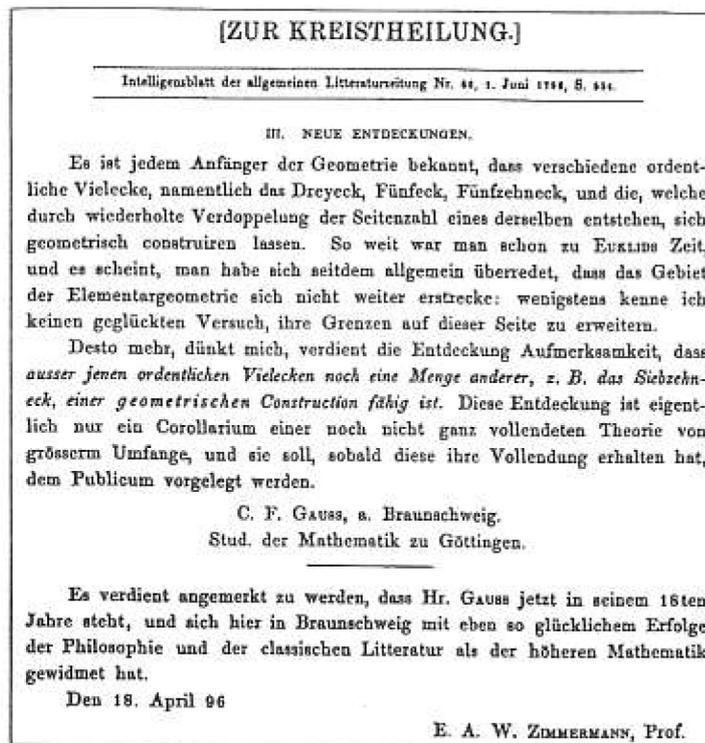


Abbildung 2.13: Publikation der Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks von Gauß im Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung

[GIERING 1998]

Kapitel 3

Zur ebenen Differentialgeometrie

In diesem Kapitel werden zwei Probleme aus der ebenen Differentialgeometrie angeführt. Zunächst jedoch erscheint es mir notwendig, den Begriff der Differentialgeometrie näher zu erläutern. Dafür möchte ich einige Begriffsbildungen, die unter "Differentialgeometrie" fallen, anführen.

Zuerst eine Definition des Kurvenbegriffs:

"Eine parametrisierte differenzierbare Kurve ist eine differenzierbare Abbildung $k: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines offenen Intervalls $I = (a, b)$ der reellen Geraden \mathbb{R} in den \mathbb{R}^3 ." [DO CARMO 1993]

Dabei bedeutet differenzierbar, dass k eine Abbildung ist, die jedes $t \in I$ - t ist der Parameter der Kurve - auf einen Punkt $k(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ abbildet, sodass die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ differenzierbar sind.

Einige weitere Begriffe, die in den Bereich der Differentialgeometrie fallen, sind zum Beispiel: Bogenlänge, Krümmung, Begleitbasis, Evolute, Evolvente. Einige davon werden im folgenden Kapitel genauer betrachtet.

Die Differentialgeometrie stellt die Anwendung der Analysis und der linearen Algebra zur Diskussion von Kurven und Flächen dar. In diesem Teilgebiet der Mathematik wird zwischen der lokalen und der globalen Differentialgeometrie unterschieden. Aufgabe ersterer ist es, lokale Eigenschaften von Kurven und Flächen mittels der Differentialrechnung zu ermitteln. Letztere beschäftigt sich zusätzlich mit dem Verhalten der gesamten Kurve oder Fläche.

3.1 Problem 5: Die Klothoide

Als erstes Problem wird die Klothoide erwähnt. Es handelt sich dabei um eine sehr wichtige ebene Kurve, die vor allem im Straßen- und Schienenbau eine nicht wegzudenkende Rolle spielt. Die Besonderheit dieser ebenen Kurve liegt darin, dass ihre Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Dadurch ermöglicht sie einen "fließenden" Übergang von einem Kreis in einen anderen bzw. von einem Kreis in eine Gerade, was eine ruckfreie Fahrdynamik entstehen lässt.

3.1.1 Modellierung

In Abbildung 3.1 wurde die Klothoide unter Verwendung des Computeralgebrasystems *Maple* modelliert.

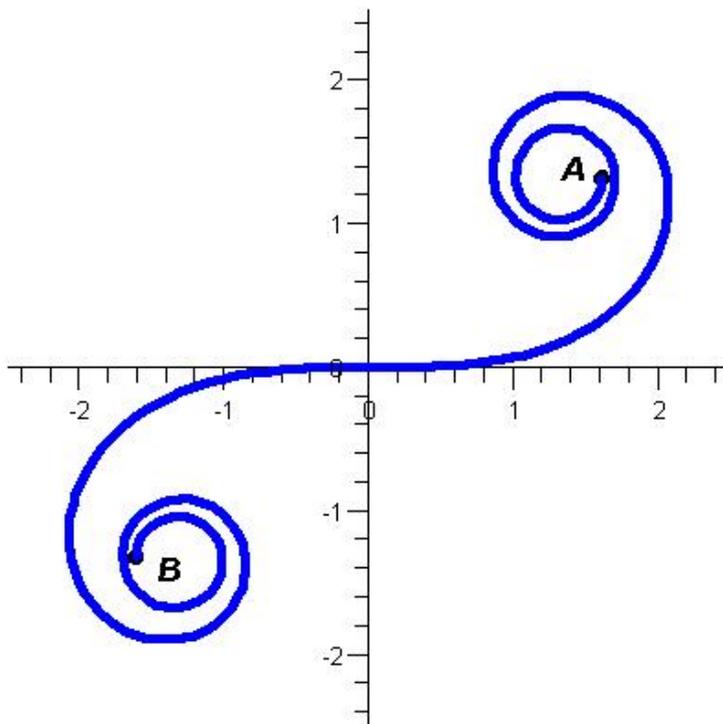


Abbildung 3.1: Klothoide

Die Bogenlänge $L(t_1, t_2)$ einer ebenen stetig differenzierbaren Kurve $\mathbf{k}(t)$ zwischen den Punkten $k(t_1)$ und $k(t_2)$ berechnet sich zu

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \|\dot{\mathbf{k}}(t)\| dt. \quad (3.1)$$

Zunächst wird mit Hilfe dieser Formel aus Formel 3.1 die Bogenlänge der Klothoide berechnet. Für insbesondere $\|\dot{\mathbf{k}}(t)\| = 1$ erhält man $L(t_1, t_2) = |t_2 - t_1|$, worin die Bezeichnung

Bogenlängenparametrisierung begründet ist.

Die Krümmung $\kappa(t)$ einer ebenen Kurve k zur Parameterdarstellung $\mathbf{k}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, in Vektorform berechnet sich zu

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\mathbf{k}}(t), \ddot{\mathbf{k}}(t))}{\|\dot{\mathbf{k}}(t)\|^3}. \quad (3.2)$$

Falls t die Kurvenlänge ist, so versteht man im Allgemeinen unter der Krümmung $\kappa(t)$ die momentane Richtungsänderung der Kurve beim Parameterwert t . Das Integral $\int_{t_1}^{t_0} \kappa(t) dt$ gibt die gesamte Richtungsänderung beim Durchlauf des Intervalls $[t_0, t_1]$ an. Der Kehrwert von $|\kappa(t)|$ an der laufenden Stelle t ist der Krümmungsradius. Im Falle einer Bogenlängenparametrisierung $\dot{\kappa}(t) = 1$ von k ergibt sich dann $\kappa(t) = \det(\dot{\mathbf{k}}(t), \ddot{\mathbf{k}}(t))$.

Die Parameterdarstellung der Klothoide k lautet

$$\mathbf{k}(t) = (kx(t), ky(t)) = (\text{par}\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi * u^2}{2} du, \text{par}\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi * u^2}{2} du). \quad (3.3)$$

Die auftretenden Integrale

$$\int_0^t \cos \frac{\pi * u^2}{2} du, \int_0^t \sin \frac{\pi * u^2}{2} du \quad (3.4)$$

werden nach Augustin Jean Fresnel (1788-1827), einem französischen Physiker und Ingenieur, benannt und die Konstante $\text{par} \in \mathbb{R}^+$ gibt den Streckfaktor der Einheitsklothoide ($\text{par}=1$) zur betreffenden Klothoide k aus dem Koordinatenursprung an. Diese Fresnel'schen Integrale stehen übrigens in *Maple* bereits vordefiniert zur Verfügung.

Für die Krümmung der Klothoide erhält man aus Formel 3.2 mit Bogenlängenparametrisierung daher

$$\kappa(t) = \frac{1}{\text{par}} * t. \quad (3.5)$$

Bezeichnet man nun mit R den Klothoidenradius und mit L die Bogenlänge einer Kurve, dann gilt für die Klothoide folgendes einfache Bildungsgesetz:

$$R * L = A^2, \quad (3.6)$$

der Krümmungsradius für eine beliebige Stelle mal der Bogenlänge bis zu dieser Stelle ist daher konstant. Dabei wird die Konstante quadratisch gehalten, da auch die linke Seite

der Gleichung quadratische Form hat. Die Krümmung der Klothoide wächst proportional mit der Bogenlänge. Im Koordinatenursprung besitzt sie einen Wendepunkt, welcher gleichzeitig das Symmetriezentrum kennzeichnet. Für $L \rightarrow \infty$ nähert sich die Klothoide asymptotisch den Punkten $(-\frac{A}{2}\sqrt{\pi}, -\frac{A}{2}\sqrt{\pi}), (\frac{A}{2}\sqrt{\pi}, \frac{A}{2}\sqrt{\pi})$ an; man nennt diese aufgrund des Kurvenverlaufs aus Abbildung 3.1 *Wickelpunkte*.

Durch Umformung der Klothoidengleichung aus Formel 3.6, welche aufgrund ihrer Bauart auch natürliche Gleichung genannt wird, erhält man

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A^2} * L. \quad (3.7)$$

Daher ergibt sich für das Krümmungsbild $\frac{1}{R} = \kappa = \kappa(l)$ des Klothoidenübergangs von einer Geraden ($\kappa = 0$) zu einem Kreis ($\kappa = \text{konstant}, > 0$) der Klothoide aus Abbildung 3.1 eine Gerade mit der Steigung $\frac{1}{A^2}$.

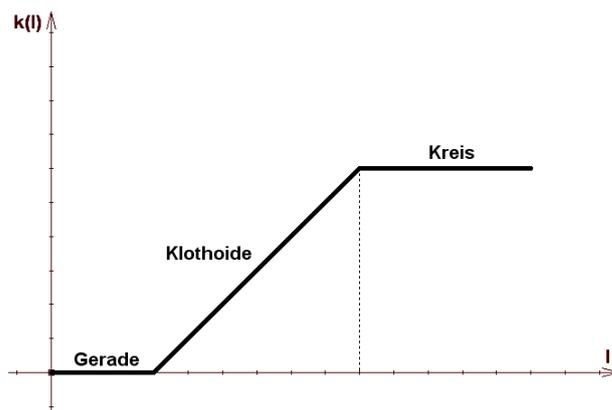


Abbildung 3.2: Krümmungsbild der Klothoide

Durch erneutes Umformen der Gleichung aus Formel 3.6 erhält man

$$R(l) = \frac{A^2}{l},$$

wodurch die Mannheim-Kurve¹ bestimmt ist. Für das Mannheim-Diagramm $R = R(l)$ betrachten wir nun als y-Achse den Krümmungsradius R und als x-Achse die Bogenlänge L als Parameter. Dabei entsteht eine gleichseitige Hyperbel mit den Koordinaten-Achsen als Asymptoten, die die Mannheim-Kurve darstellt.

¹Die Mannheim-Kurve, auch Mannheimsche Kurve genannt, ist, wie A. Mannheim bemerkt hat, die Menge der Krümmungszentren für den jeweiligen Berührungspunkt, wenn eine Kurve auf einer Geraden rollt. Die Bezeichnung "Mannheimsche Kurve" wurde von E. Wölffing eingeführt.

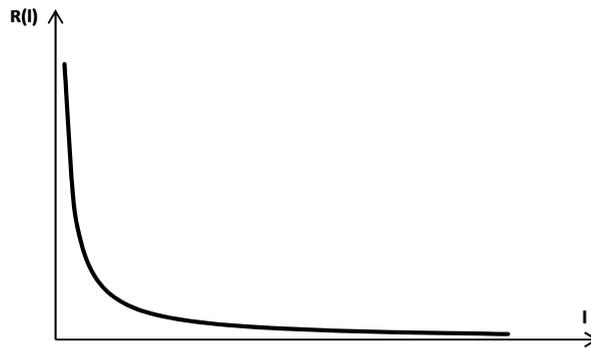


Abbildung 3.3: Mannheim-Kurve der Klothoide

3.1.2 Approximation der Klothoide durch ein 2^n -Sehnenpolygon

Im Folgenden wird die Klothoide durch ein 2^6 -Sehnenpolygon approximiert, wobei eine maximale Differenz zwischen der Länge der Kurve und der des Polygons vorgeschrieben wird.

Die Bogenlänge zwischen den Kurvenpunkten $A = k(t_1)$ und $B = k(t_2)$ kann auf folgende Weise approximiert werden:

”Sei $k(t): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Kurve und $[a, b] \subset I$ ein abgeschlossenes Intervall. Für jede Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \quad (3.8)$$

von $[a, b]$ betrachten wir die Summe

$$\sum_{i=1}^n |k(t_i) - k(t_{i-1})| = l_P(k), \quad (3.9)$$

wobei P für die gegebene Zerlegung und $l_P(k)$ für die Länge eines einbeschriebenen Polygons steht. [...] Dabei gilt $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass für $|P| < \delta^2$

$$\left| \int_b^a |\dot{k}(t)| dt - l_P(k) \right| < \epsilon.”$$

[DO CARMO 1993]

²Die Norm $|P|$ einer Zerlegung P ist definiert als $|P| = \max(t_i - t_{i-1}), i = 1, \dots, n$.

Nun wird dieser Lehrsatz mithilfe des Computeralgebrasystems *Maple* visualisiert: Das folgende Beispiel zeigt die Approximation der Bogenlänge einer Klothoide durch die Länge eines Sehnenpolygons. Dafür wird ein $\epsilon_0 > 0$ vorgegeben und zu diesem das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gesucht, dass die Länge $L(n_0)$ des 2^{n_0} -Sehnenpolygons und die Bogenlänge L zwischen den Kurvenpunkten A und B durch $|L - L(n_0)| < \epsilon$ gekoppelt ist. Die notwendige Berechnung von n_0 wird in *Maple* anhand einer Programm-Schleife realisiert, für $\epsilon = 0,4$ und die Parameterwerte $t_A = 3, t_B = -3$ ergibt sich $n_0 = 64$ für das kleinste $n \in \mathbb{N}$ dieser Art.

Abbildung 3.4 zeigt diese Approximation. Dabei ist die Klothoide mit Anfangspunkt A und Endpunkt B in blau und das ausgewertete 2^{64} -Sehnenpolygon in rot dargestellt. Die gelben Kreisscheibchen zeigen das ausgerechnete n_0 für die Länge des Sehnenpolygons. Aus der Abbildung geht die "gute" Approximation klar hervor.

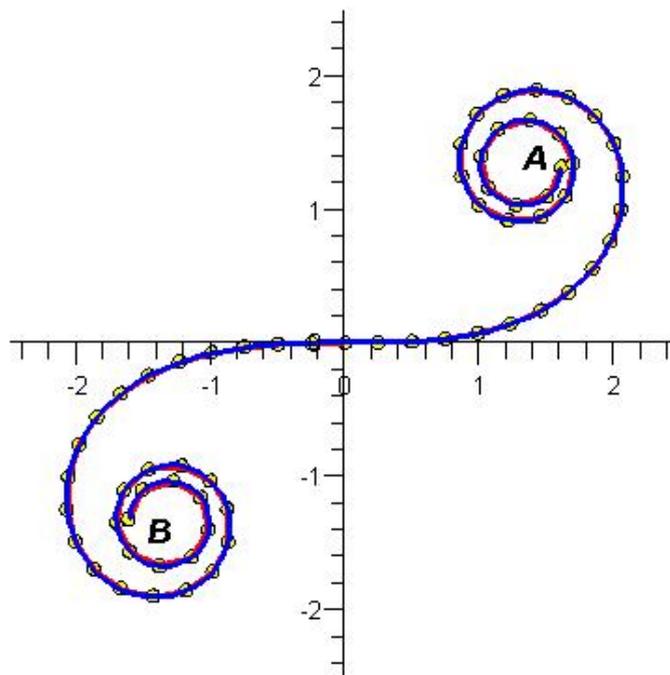


Abbildung 3.4: Klothoide mit einbeschriebenen Sehnenpolygon

3.1.3 Anwendungsbereich

Die Klothoide ist eine spezielle ebene Kurve, welche auch den Namen Spinnkurve, aus dem greekischen Wort $\kappa\lambda\acute{\omega}\theta\omega$ (spinnen) oder CORNU-Spirale, nach Marie Alfred Cornu (1841-1902), trägt. Klothoiden werden hauptsächlich zur Trassierung im Straßen- und Eisenbahnbau verwendet. Sie ist eine Kurve, bei der die Bogenlänge proportional zur Krümmung ist. Dadurch liefert sie einen mit hoher Geschwindigkeit befahrbaren Übergangsbogen von einem Kreis (oder einer Geraden = ausgearteter Krümmungskreis im Ursprung) auf einen anderen und ermöglicht somit eine ruckfreie Fahrdynamik.

Das Bildungsgesetz der Klothoide lässt sich leicht durch die einfache Gleichung: $R * L = A^2$ darstellen. Der Krümmungsradius R (für eine beliebige Stelle) mal der Bogenlänge L vom Anfangspunkt bis zu dieser Stelle ist gleich einem konstanten Wert A^2 , wobei A den Parameter der Klothoide darstellt. Es gibt nur eine Form der Klothoide. Alle Klothoiden sind einander geometrisch ähnlich. Die Längenmaße verändern sich im gleichen Verhältnis wie der Parameter A und die Winkelmaße bleiben unverändert. Die unterschiedlichen Größen der Kurven kennzeichnen sich in der Wahl des Parameters A, d.h. ein großer Parameter ergibt eine große Kurve und umgekehrt. Klothoiden mit großem Parameter haben eine langsame Krümmungszunahme und sind somit für eine schnelle Fahrt besser geeignet.

Als Pionier ihrer Untersuchung galt der französische Physiker Marie Alfred Cornu im Jahr 1874. Er untersuchte die Klothoide jedoch im Zusammenhang mit Beugungerscheinungen des Lichts. Somit fand die Klothoide zu Beginn Anwendung im Bereich der Optik. Die dabei verwendeten Fresnel'schen Integrale $C(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi * u^2}{2} du$ und $S(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi * u^2}{2} du$, welche die Intensität der Lichtverteilung hinter einer beleuchteten Kante beschreiben, treten in der Parameterdarstellung der Klothoide auf.

Im Jahre 1937 setzte L. Oerley die Klothoide erstmals im Bereich der Straßenplanung ein. Infolge wurde sie 1954 mit einem umfassenden Tafelwerk [KASPER et al. 1968] für Trassierungs- und Absteckungsarbeiten in der Baupraxis allgemein zugänglich gemacht.

Im Jahre 1942 erschien in Berlin die erste Auflage des Buches "Die Klotoide als Trassierungselement"³. Es handelt sich dabei um das Standardwerk zur Klothoide. Dieses Buch besteht zum Großteil aus Tabellen von Klothoiden. Mit deren Hilfe war es einem

³In diesem Tafelwerk wird die Kurve durchgehend ohne h geschrieben. Ich verwende die Schreibweise laut Duden mit h.

Ingenieur möglich, die Zeit für eine Trasseneinrechnung von mehreren Wochen auf wenige Stunden zu reduzieren.

In dieser ersten Auflage war bereits die erste Klothoidentafel von Schürba enthalten. 1944 folgten die Tafel der Einheitsklothoiden, die Berechnungen für jedes Tausendstel der Bogenlänge vorgab. Diese Tafel bildet auch in der aktuellen Auflage des Buches, ergänzt und abgeändert den Hauptteil. Da diese Tafeln zwar als Grundlage der Einführung der Klothoide in der Praxis dienten, jedoch für rasches Arbeiten nicht ausreichten, mussten einige ergänzende Normtafeln berechnet werden. Folglich entstanden A-, R- und L-Tafeln für runde Klothoidenparametern. Zuletzt wurden auch S-Kurventafeln entwickelt und in das Tafelwerk aufgenommen.

3.2 Problem 6: Die Wallace-Gerade

Im Folgenden wird über die Wallace-Gerade berichtet, die 1797 von William Wallace (1768-1843) entdeckt wurde. Häufig wird diese Gerade auch Simson-Gerade genannt, was auf den Mathematiker Robert Simson (1687-1768) zurückzuführen ist, in dessen schriftlichen Aufzeichnungen jedoch nichts zu finden ist. Daher wird in dieser Arbeit ausschließlich die Bezeichnung "Wallace-Gerade" verwendet.

Zunächst eine Definition des Teilverhältnisses:

Gegeben sind drei kollineare Punkte A, B, C mit $B \neq C$. $TV(A, B, C)$ heißt Teilverhältnis der Punkte A, B, C , wobei der Betrag von $TV(A, B, C)$ festgelegt wird durch:

$$|TV(A, B, C)| = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Das Vorzeichen von $TV(A, B, C)$ wird auf folgende Weise definiert:

$$TV(A, B, C) > 0 \Leftrightarrow C \text{ außerhalb der Strecke } \overline{AB},$$

also

$$TV(A, B, C) < 0 \Leftrightarrow C \text{ innerhalb der Strecke } \overline{AB}$$

Es gelten die folgenden Lehrsätze:

1. Lehrsatz (Satz von Menelaus): Sind die Punkte X, Y und Z auf den eventuell verlängerten Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}$ und \overline{CA} des Dreiecks ABC kollinear, wobei die Gerade XYZ durch keine Ecke des Dreiecks ABC geht (siehe Abbildung 3.5), dann gilt:

$$TV(A, B, X) \cdot TV(B, C, Y) \cdot TV(C, A, Z) = 1 \quad (3.10)$$

oder anders ausgedrückt:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{CY}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{AZ}} = 1$$

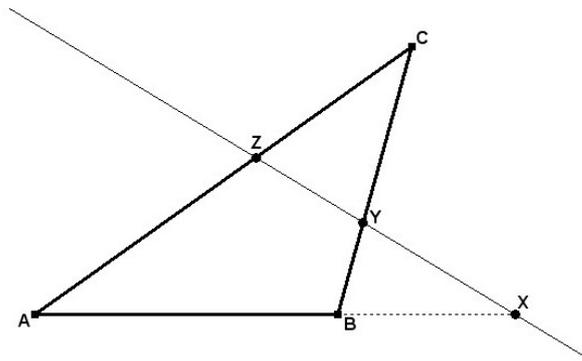
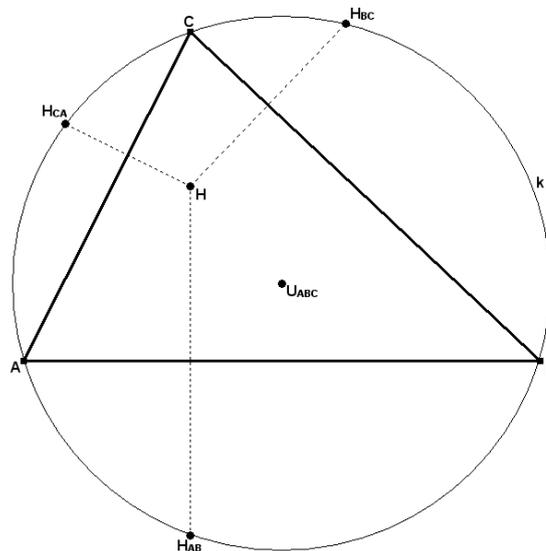


Abbildung 3.5: Satz von Menelaos

Die Umkehrung dieses Satzes, welche in diesem Kapitel herangezogen wird, lautet folgendermaßen:

Gilt für die Punkte X , Y und Z auf den Seiten \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} des Dreiecks ABC folgendes Produkt der Teilverhältnisse $TV(A, B, X) \cdot TV(B, C, Y) \cdot TV(C, A, Z) = 1$, dann sind diese Punkte kollinear.

2. Lehrsatz: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC an den Dreiecksseiten \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} , so liegen die Spiegelbilder H_{AB} , H_{BC} und H_{CA} von H auf dem Umkreis k dieses Dreiecks (siehe Abbildung 3.6).

Abbildung 3.6: Spiegelbilder von H auf Umkreis

Für den Beweis wird der Peripheriewinkelsatz herangezogen:

Den Winkel aus einem Punkt eines Kreises k über einer Sehne von k bezeichnet man als Peripheriewinkel. Dabei sind Peripheriewinkel über derselben Sehne kongruent zueinander. Zwei Peripheriewinkel sind supplementär, wenn sie auf verschiedenen Kreisbögen b_1 und b_2 liegen, die sich zum Kreis k ergänzen.

Um zu zeigen, dass das Spiegelbild H_{AB} von H auf dem Umkreis k liegt, genügt es zu beweisen, dass die Winkel ω und γ in Abbildung 3.7 supplementär sind, also $\omega = 180 - \gamma$.

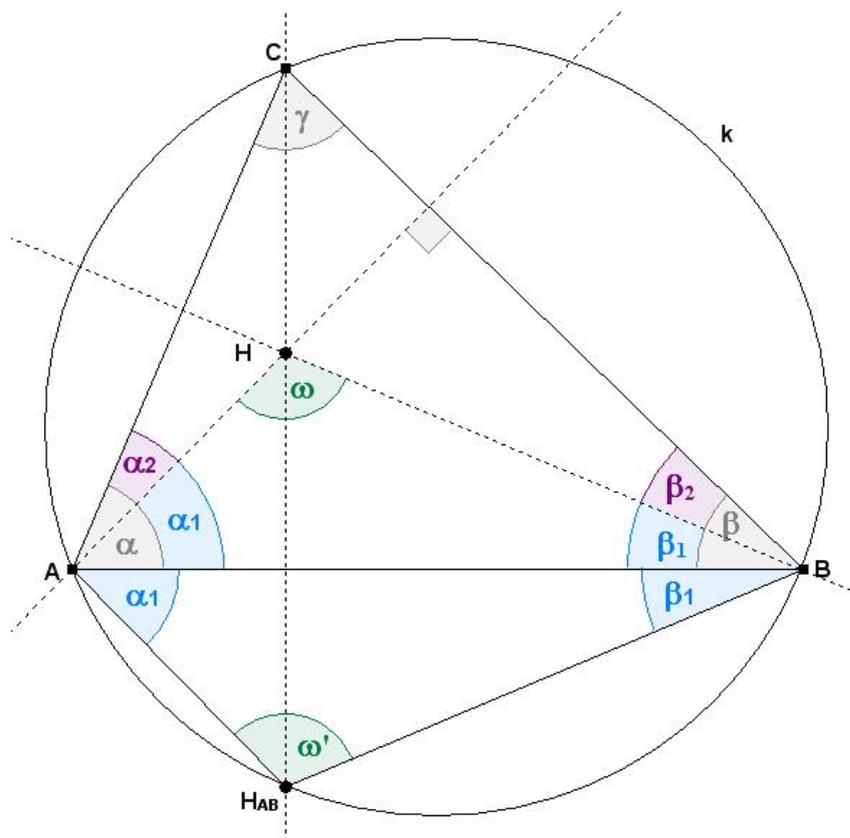


Abbildung 3.7: Peripheriewinkelsatz

Es gilt:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \omega = 180^\circ. \quad (3.11)$$

Da $\alpha_1 + \beta = 90$ und $\beta_1 + \alpha = 90$ ist, folgt weiter:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Weiters sind $\alpha + \beta = 180 - \gamma$, daraus folgt $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma$. Durch Einsetzen in Formel 3.11 erhält man für $\omega = 180 - \gamma$, womit obige Behauptung bewiesen ist. Analog dazu liegen die Spiegelbilder H_{BC} und H_{CA} auf dem Umkreis k .

Bei genauer Betrachtung dieses Satzes, lässt sich auch Folgendes schließen:

Spiegelt man den Umkreis eines Dreiecks ABC an dessen Seiten, so liegt der Höhenschnittpunkt H dieses Dreiecks auf diesen Spiegelbildern.

3. Lehrsatz: Konstruiert man aus einem Punkt W die Lotfußpunkte F_a, F_b, F_c auf die Trägergeraden der Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}$ und \overline{CA} eines Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C , so sind diese drei Fußpunkte genau dann kollinear, falls W auf dem Umkreis des Dreiecks liegt. Diese Gerade $g(W)$ wird Wallace-Gerade des Dreiecks ABC bezüglich W genannt.

4. Lehrsatz: Rollt ein Kreis ohne zu gleiten auf der Innenseite eines anderthalbmal so großen Leitkreises, so beschreiben die Endpunkte eines Durchmessers von ihm dieselbe Steiner-Kurve. Sie hat den Leitkreis zum Spitzenkreis und wird außerdem von dem Durchmesser eingehüllt.[...]Die Wallace-Hülle eines Dreiecks ist die dreispitzige Hypozykloide, welche die Grundpunkte des Dreiecks zu Scheitelpunkten hat und seine Seiten und Höhen berührt. [ELEMENTE DER MATHEMATIK 1950]

In Bezug auf den 3. Lehrsatz werden nun zwei Beweise für die darin enthaltene Behauptung angeführt:

1. Beweis:

Es wird ein Punkt W auf dem Umkreis U des Dreiecks ABC angenommen und die Spiegelbilder W_A, W_B und W_C von W in bezug auf die Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}$ und \overline{CA} gelegt; diese Punkte liegen auf den entsprechenden Spiegelbildern des Umkreises, welche den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC als gemeinsamen Schnittpunkt haben (siehe 2. Lehrsatz). Es ist zu beweisen, dass die Lotfußpunkte F_a, F_b, F_c auf einer Geraden liegen.

Folgende Winkel werden betrachtet:

$$\angle W_A H B + \angle A H W_B = \angle B C W + \angle W C A = \angle B C A = \pi - \angle B H A.$$

Daraus folgt: der Winkel $\angle W_A H W_B$ ist ein gestreckter Winkel und die drei Spiegelbilder W_A, W_B, W_C von W und der Höhenschnittpunkt H liegen auf einer Geraden.

Es folgt weiter: Die Halbierungspunkte der Strecken dieser vier Punkte mit dem Punkt W des Umkreises liegen ebenfalls auf einer Geraden, wobei obige Behauptung bewiesen ist. Diese Gerade wird Wallace-Gerade genannt. Dieser Beweis ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

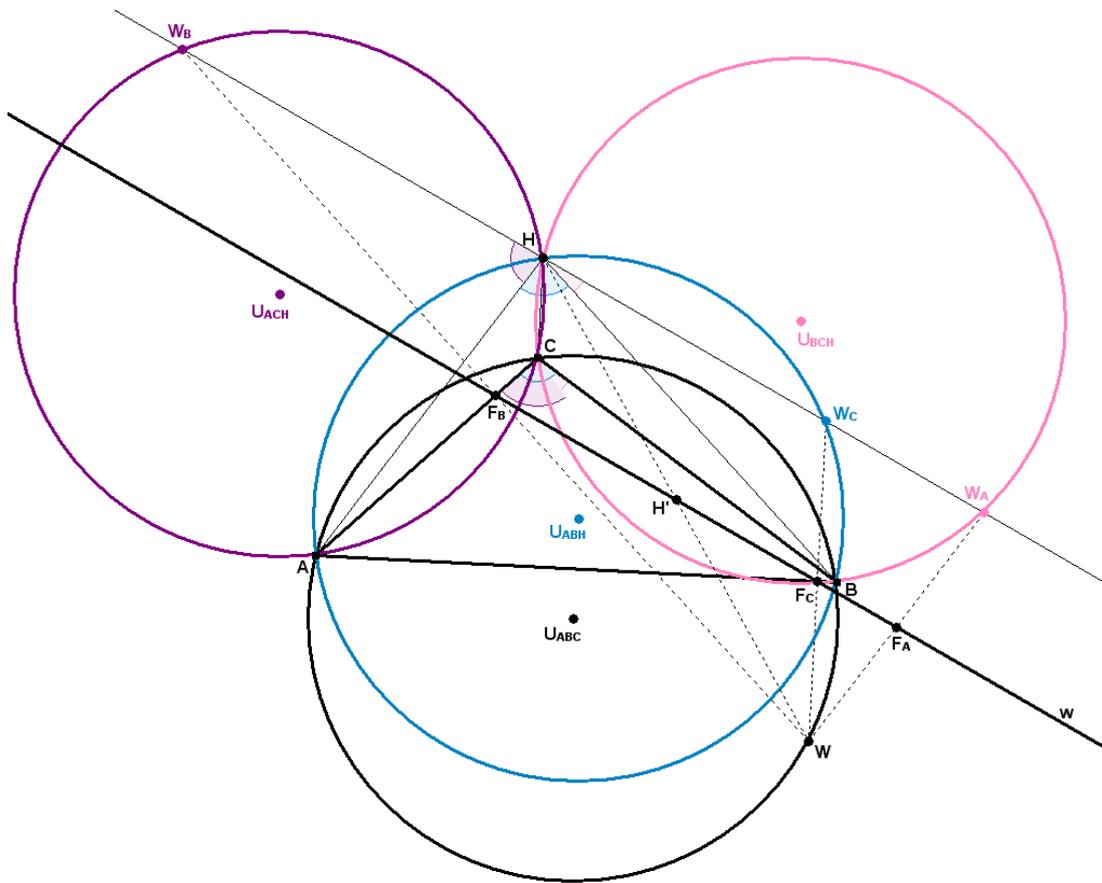


Abbildung 3.8: Beweis der Wallace-Gerade

Es gilt also: Fällt man von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks die Lote auf dessen Seiten, dann liegen die drei Fußpunkte auf einer Geraden. [ELEMENTE DER MATHEMATIK 1950]

2. Beweis:

Es sei S der Symmetriepunkt von W bezüglich des Umkreismittelpunktes U_{ABC} . Aufgrund einer Kreiseigenschaft gilt nun folgendes:

$$WF_A \perp BC \Rightarrow \frac{\overline{F_AB}}{\overline{F_AC}} = \frac{\overline{WB}}{\overline{WC}} \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$$

$$WF_B \perp CA \Rightarrow \frac{\overline{F_BC}}{\overline{F_BA}} = \frac{\overline{WC}}{\overline{WA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$$

$$WF_C \perp AB \Rightarrow \frac{\overline{F_CA}}{\overline{F_CB}} = \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}} \cdot \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$$

Multipliziert man nun diese drei Gleichungen miteinander, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\frac{\overline{F_A B}}{\overline{F_A C}} \cdot \frac{\overline{F_B C}}{\overline{F_B A}} \cdot \frac{\overline{F_C A}}{\overline{F_C B}} = 1$$

oder als Teilverhältnis angeschrieben:

$$TV(B, C, F_A) \cdot TV(C, A, F_B) \cdot TV(A, B, F_C) = 1.$$

Laut der Formel 3.10 aus dem 1. Lehrsatz sind die Punkte F_A , F_B und F_C kollinear, womit wiederum obige Behauptung bewiesen ist.

Bevor auf den 4. Lehrsatz eingegangen wird, werden drei wesentliche Eigenschaften der Wallace-Gerade näher erläutert.

1. Drei besondere Geraden zur Wallace-Gerade:

Betrachtet man den Punkt P auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC mit der zugehörigen Wallace-Gerade w . Der Punkt P_1 ist der Schnittpunkt des Lotes von P auf \overline{AB} mit dem Umkreis. Dann ist die Gerade P_1C eine zur Wallace-Geraden w parallele Gerade. Analog erhält man die Geraden P_2A und P_3B , die ebenfalls parallel zu w sind.

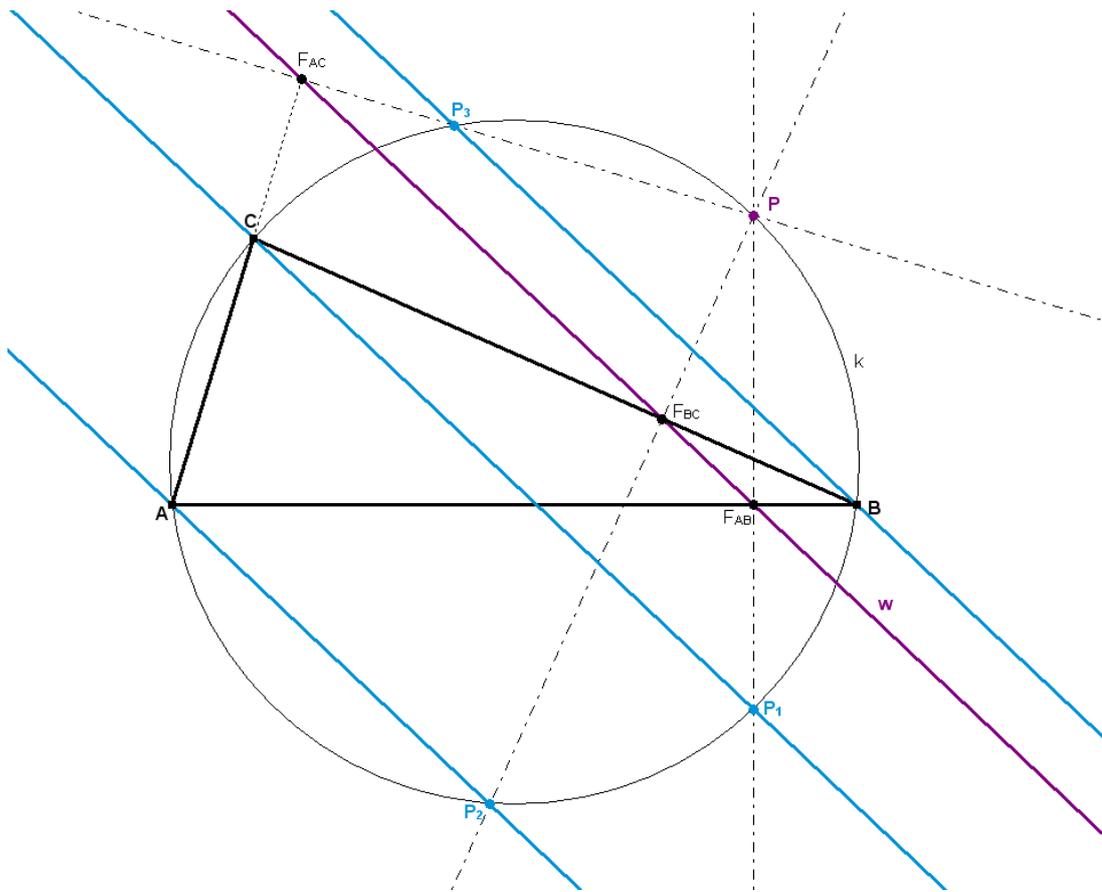


Abbildung 3.9: Parallele zur Wallace-Geraden

Obige Behauptung kann leicht eingesehen werden:

Betrachtet man das Sehnenviereck PCP_1B . Nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Kreisbogen PC gilt: $\angle PP_1C = \angle PBC = \angle PAC$. Da die Punkte C und F_{BC} kollinear sind, gilt weiter: $\angle PAC = \angle PBC = \angle PBF_{BC}$. Betrachtet man nun das zweite Sehnenviereck $PF_{BC}F_{AB}B$. Dabei gilt wiederum nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Kreisbogen PF_{BC} folgendes: $\angle PBF_{BC} = \angle PF_{AB}F_{BC}$. Daraus folgt schließlich:

$$\Rightarrow \angle PP_1C = \angle PBC = \angle PBF_{BC} = \angle PF_{AB}F_{BC}.$$

Also sind die beiden Winkel $\angle PP_1C$ und $\angle PF_{AB}F_{BC}$ Stufenwinkel und die Geraden P_1C und $F_{AB}F_{BC}$ parallel.

Abbildung 3.10 zeigt die Stufenwinkel und die beiden Sehnenvierecke mit zugehörigen Umkreisen. Dies gilt analog für die beiden Parallelen P_2A und P_3B .

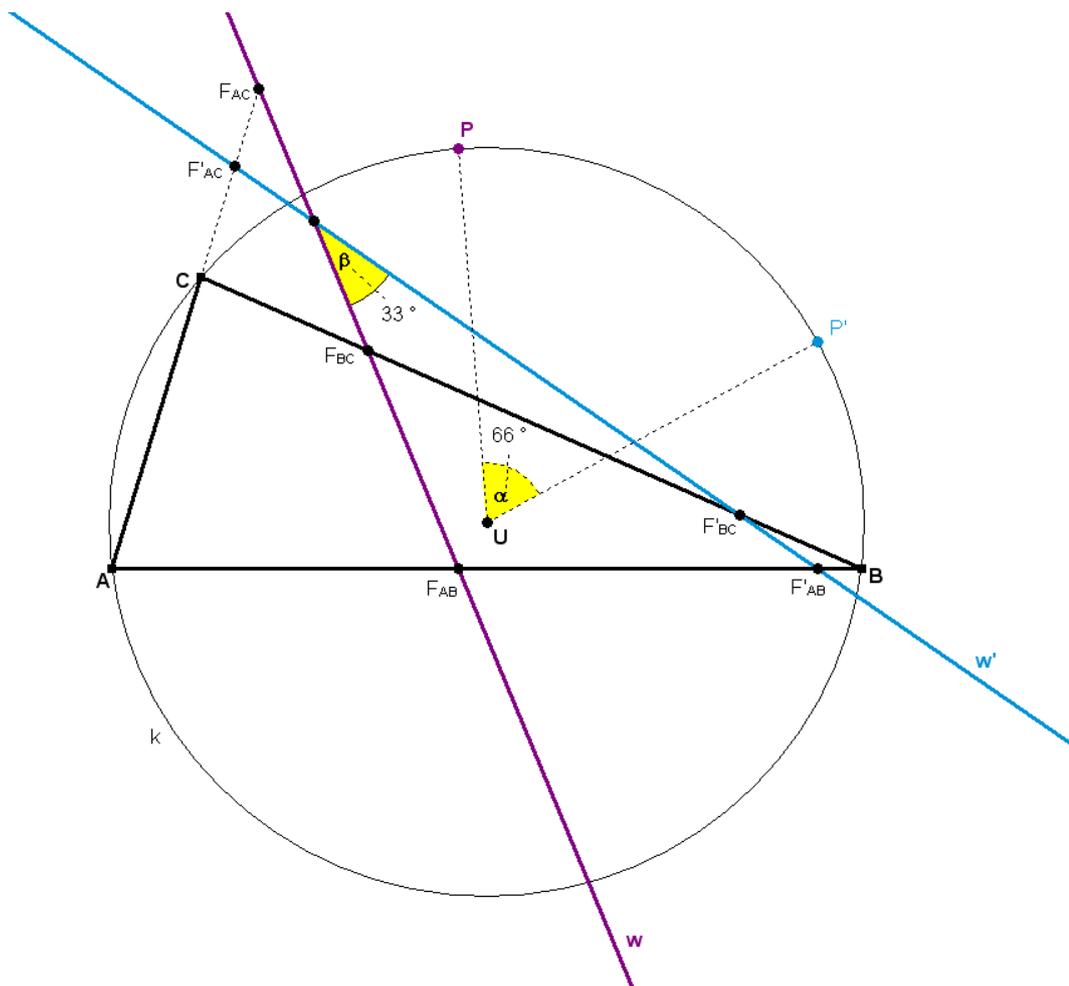


Abbildung 3.11: Schnittwinkel der Wallace-Geraden

Durch die in Punkt 1 beschriebene Eigenschaft der Wallace-Gerade lässt sich folgendes behaupten:

Der Schnittwinkel β der beiden Wallace-Geraden w und w' ist genauso groß wie der Winkel zwischen den parallelen Geraden zu w und w' durch einen Eckpunkt des Dreiecks, d.h. der Schnittpunkt der beiden Wallace-Geraden kann sozusagen in einen Eckpunkt des Dreiecks ABC "verlegt" werden. Dabei gilt laut Peripheriewinkelsatz, dass der Zentriwinkel über einer Sehne genau das Doppelte des Peripheriewinkels über der gleichen Sehne ist. Also ist der Winkel $\alpha = \angle PUP'$ doppelt so groß, wie der Schnittwinkel β und damit ist obige Behauptung bewiesen.

3. Wallace-Gerade als Streckenhalbierende:

Zunächst einige Dreieckseigenschaften: In einem Dreieck ABC sei H der Höhenschnittpunkt, ha, hb, hc die Höhenfußpunkte, A_1, B_1, C_1 die Mitten der oberen Höhenabschnitte und S_{AB}, S_{BC}, S_{AC} die Seitenmitten des Dreiecks. Die Strecken $\overline{A_1S_{BC}},$

$\overline{B_1S_{AC}}$ und $\overline{C_1S_{AB}}$ sind alle Durchmesser des Feuerbachkreises k_F .

Weiters gilt: Der Schnittpunkt der Strecken \overline{UH} und $\overline{AS_{BC}}$ ergibt den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC . Die Punkte $H, F, S,$ und U liegen auf der Euler-Geraden und haben in dieser Reihenfolge das Abstandverhältnis $3:1:2$. Verbindet man nun den Höhenschnittpunkt H mit dem Punkt P am Umkreis, so halbiert die zum Punkt P gehörige Wallace-Gerade w diese Strecke. Der erhaltene Schnittpunkt D liegt auf dem Feuerbach-Kreis⁴ des Dreiecks.

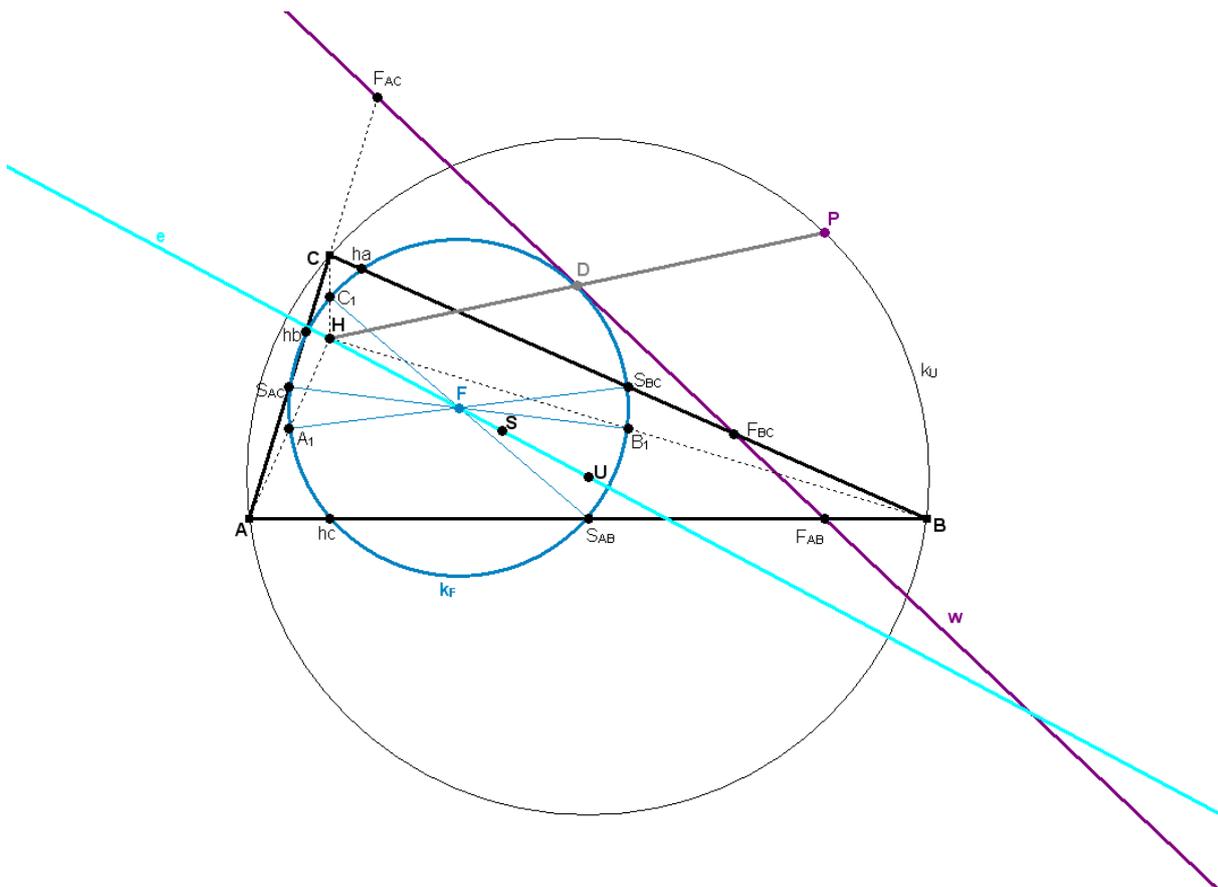


Abbildung 3.12: Halbierungspunkt D auf Feuerbach-Kreis

⁴Satz von Feuerbach: In einem Dreieck liegen die drei Seitenmitten des Dreiecks, die drei Mitten der den Ecken näheren Höhenabschnitte und die drei Fußpunkte der Höhen auf einem Kreis. Dieser Kreis wird Feuerbach-Kreis, nach dem bekannten Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), benannt. Wegen dieser neun markanten Punkte spricht man auch, vor allem in der englisch-sprachigen Literatur, vom Neun-Punkte-Kreis.

3.2.1 Die Hüllkurve

Der 4. Lehrsatz, der zu Beginn dieses Kapitels angeführt wurde, führt nun zum Thema der Hüllkurve. Unter einer Hüllkurve versteht man jene Kurve, die beim Durchlaufen der Ausgangskurve durch die Normalen entsteht. Die Behauptung des Lehrsatzes lautet in anderen Worten: Wandert der Punkt P auf dem Umkreis k , so entsteht eine Geradenschar von Wallace-Geraden, welche - nach dem Mathematiker Jakob Steiner (1796-1863) - auch Steiner-Hypozykloide genannt wird.

In Abbildung 3.13 wurde die Steiner-Hypozykloide unter Verwendung der dynamischen Software *EUKLID DynaGeo* konstruiert. Dabei kann diese Festlegung der Hüllkurve einer einparametrischen Geradenmenge differenzengeometrisch approximiert werden:

Statt $g(t_0) \cap \dot{g}(t_0)$ schneiden wir $g(t_0)$ mit einer "Nachbargeraden" $g(t_1)$, wobei $|t_0 - t_1|$ zunächst variabel und dann "klein" gewählt wird. Es wird ein Dreieck mit zugehörigem Umkreis gezeichnet. Liegen die Fußpunkte eines Punktes P , der auf dem Umkreis liegt, auf die Seiten eines Dreiecks ABC auf einer gemeinsamen Geraden, so wird diese Gerade als Wallace Gerade genannt. Lässt man nun den Punkt P auf dem Kreis wandern, so entsteht eine Geradenschar von Wallace-Geraden als Hüllkurve, welche den Namen Steiner-Hypozykloide trägt.

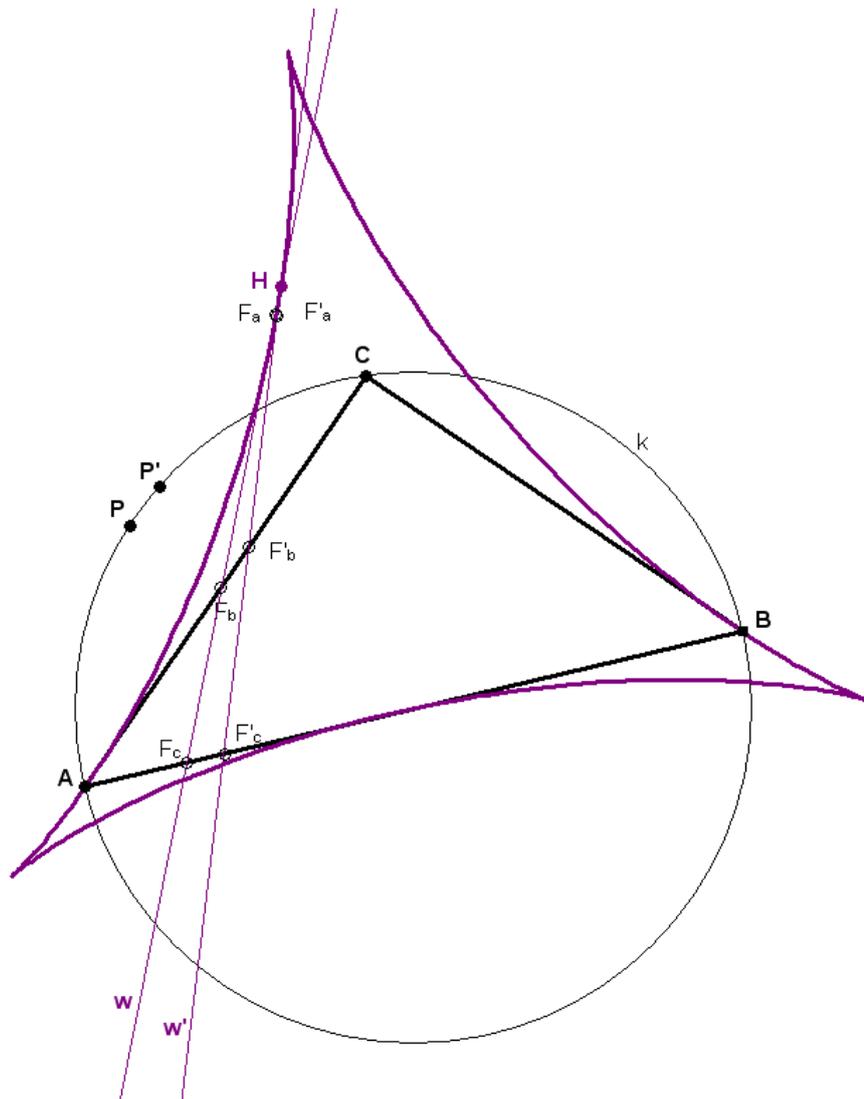


Abbildung 3.13: Steiner-Hypozykloide

Kapitel 4

Zur räumlichen Differentialgeometrie

Während im letzten Kapitel ausschließlich Kurven, also Beispiele aus ebenen Differentialgeometrie, behandelt wurden, beschäftigt sich dieses Kapitel mit einem Phänomen der Differentialgeometrie von Flächen. Dabei wird zwischen orientierbare und nicht-orientierbare Flächen unterschieden.

Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn es ein auf der ganzen Fläche definiertes differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt. Ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset S$ bezeichnet eine differenzierbare Abbildung $N: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem $q \in U$ einen Einheitsnormalenvektor $N(q) \in \mathbb{R}^3$ an S in q zuordnet. Die Wahl eines solchen Vektorfeldes N , bestimmt dann die Orientierung auf S .

Dazu sei die folgende Beschreibung von Manfredo P. do Carmo aus seinem Buch "Differentialgeometrie von Kurven und Flächen" angeführt: *"Weil jeder Punkt p einer regulären Fläche S eine Tangentialebene $T_p(S)$ besitzt, induziert intuitiv die Wahl einer Orientierung von $T_p(S)$ eine Orientierung in einer Umgebung von p , sodass man davon sprechen kann, hinreichend kleine geschlossene Kurven um Punkte in dieser Umgebung in positiven Sinn zu durchlaufen (siehe Abbildung 4.1). Ist es möglich, die Wahl für jedes $p \in S$ so zu treffen, dass die Orientierungen im Durchschnitt von je zwei Umgebungen übereinstimmen, so heißt S orientierbar. Ist das nicht möglich, so heißt S nicht orientierbar."*

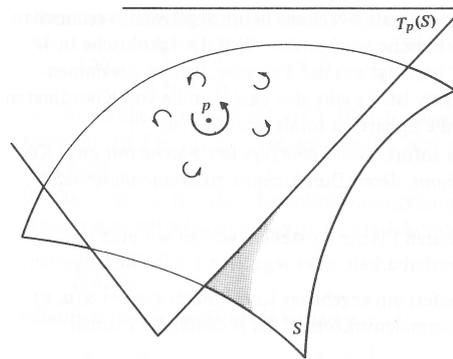


Abbildung 4.1: Tangentialebene

Die wohl bekanntesten nicht-orientierbaren Flächen sind das Möbiusband und die Kleinsche Flasche. Beides Flächen, auf die im Folgenden näher eingegangen werden soll.

4.1 Problem 7: Das Möbiusband

Das Möbiusband, auch Möbiusschleife oder Möbiussches Band genannt, ist die einfachste geometrische Figur mit nur eine Fläche und nur eine Seite. Die Bedeutung dieses Bandes ist nicht nur für die Mathematik gegeben sondern auch für viele andere Gebiete wie Physik, Chemie oder Kunst. Es wurde im Jahre 1858 von dem Leipziger Mathematiker August Ferdinand Möbius (1790-1868) beschrieben. Unabhängig von Möbius wurde es, nach angegebenen Datierungen sogar einige Monate vor Möbius, auch von Johann Benedikt Listing (1808-1882) in Göttingen entdeckt. Er fand diese Fläche bereits im Juli 1858 und publizierte seine Entdeckung im Jahr 1861. Möbius aber notierte die erste Beschreibung im September 1858 in seinem Tagebuch und veröffentlichte sie dann schließlich im Jahre 1865. Das Möbiusband ist eine nicht-orientierbare Fläche und gilt als Standardbeispiel für eine "einseitige Fläche" in der algebraischen Topologie¹.

In der Topologie werden einige elementare Flächen, wie z.B.: Zylinder, Torus und Möbiusband durch Identifizierung mit den Seiten eines Rechtecks beschrieben. Somit entsteht beispielsweise beim Zusammenkleben zweier gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks ein Zylinder. Anhand der unten abgebildeten Rechtecke soll nun veranschaulicht werden,

¹Die Topologie [*griech* : *topos* = *Ort, Platz*] beschäftigt sich mit den Eigenschaften von geometrischen Körpern, die durch Verformungen, wie Dehnen, Strecken oder Zerren, nicht verändert werden. Sie ist die "Geometrische Lage" und ein Teilgebiet der Mathematik. Johann Benedikt Listing schrieb im Jahre 1847 ein Lehrbuch zur Topologie mit dem Titel "Vorstudien zur Topologie". Dadurch fand diese Bezeichnung allgemeine Gültigkeit.

wie die Seiten eines Rechtecks zusammengeklebt werden müssen, um die entsprechenden Flächen zu erhalten. Dabei werden jeweils jene Seiten zusammengeklebt, deren Pfeile in die gleiche Richtung zeigen. Wenn man nun vom Rechteck des Zylinders ausgeht und auch die beiden anderen Seiten miteinander verklebt, so erhält man einen Torus. Für das Möbiusband werden zwei gegenüberliegende Seiten mit wechselseitig ausgerichteten Pfeilen gekennzeichnet. Bei der Kleinschen Flasche hingegen, werden zwei gegenüberliegende Seiten mit in die gleiche Richtung zeigenden Pfeilen und die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten mit entgegengesetzten Pfeilen gekennzeichnet. Wenn nun die Pfeile auf den Seiten so angeordnet sind, dass sie im bzw. gegen den Uhrzeigersinn zeigen, erhält man die reelle projektive Ebene.

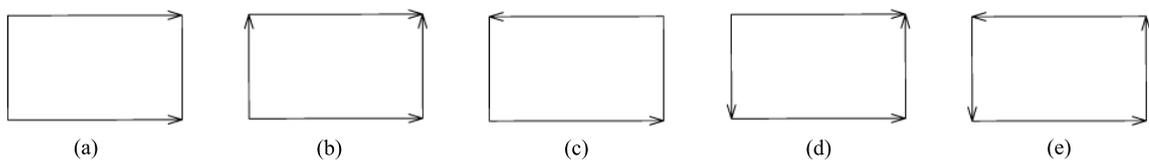


Abbildung 4.2: Topologische Beschreibung des Zylinders (a), des Torus (b), des Möbiusbands (c), der Kleinschen Flasche (d) und der reellen projektiven Ebene (e)

Abbildung 4.2 zeigt nun die topologische Identifizierung der fünf oben beschriebenen Flächen. Dabei zählen das Möbiusband, die Kleinsche Flasche und die reelle projektive Ebene zu den nicht-orientierbaren Flächen.

4.1.1 Modellierung

Es gibt unterschiedliche Realisierungen des Möbiusbands. Am einfachsten erhält man es, indem man einen rechteckigen Papierstreifen nimmt, diesen dann eine halbe Drehung um seine Achse dreht und anschließend die Enden zusammenklebt. Um bei dieser Konstruktion eine anschaulich optimale Struktur zu erhalten, wählt man einen langen, sehr schmalen Papierstreifen. In Abbildung 4.3 wurde dafür ein 65 cm langer und 5 cm breiter Streifen verwendet.

Interessant ist dabei zu beobachten, dass man bei einer 360° -Drehung des Papierstreifens um dessen Achse eine orientierbare Fläche erhält. Wenn man dies nun fortsetzt, erkennt man, dass es bei jeder geraden Anzahl von halben Drehungen zu einer orientierbaren Fläche und bei jeder ungeraden Anzahl von halben Drehungen zu einer nicht-orientierbaren Fläche kommt.



Abbildung 4.3: Möbiusband

Mithilfe der Regelflächenparametrisierung, die Josef Krames im Jahre 1918 veröffentlichte und in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu finden sind [KRAMES 1918], erfolgt eine weitere Möglichkeit das Möbiusband darzustellen.

Im Folgenden wird nun das Möbiusband mithilfe des Computeralgebrasystems *Maple* visualisiert. Die Parameterdarstellung der Regelflächenparametrisierung des Möbiusbands lautet:

$$R(u, v) = l(u) + v * r(u).$$

Die Regelfläche $R(u, v)$ setzt sich zusammen aus einem Kreis - Leitkurve $l(u)$ - und dem Richtungsfeld $r(u)$, wobei

$$l(u) = (r * \cos(u), r * \sin(u), 0)$$

und

$$r(u) = (\cos(u/2) * \cos(u), \cos(u/2) * \sin(u), \sin(u/2))$$

definiert wird. Da der Parameter u die Leitkurve einmal durchlaufen muss, um die Fläche zu erzeugen, liegt er im Intervall $[0, 2\pi]$. Der Parameter v legt die Randpunkte der Regelfläche fest, d.h. er spannt die Fläche des Bandes auf und ist daher beliebig zu wählen. In Abbildung 4.4 liegt v im Intervall $[-3, 3]$, also wird eine Fläche von 6 Einheiten aufgespannt. Die Variable r stellt den Radius des Mittenkreises dar und ist ebenfalls beliebig zu wählen.

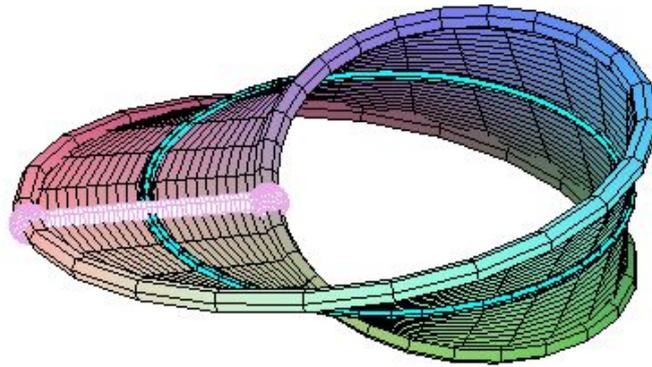


Abbildung 4.4: Möbiusband mit Randkurve rk, Mittenkurve mk und Stab S

Ebenfalls in Abbildung 4.4 dargestellt sind die Randkurve rk, die Mittenkurve mk und ein Stab S. Dabei wird für die Randkurve rk und die Mittenkurve mk der Parameter v des Möbiusbands an den entsprechenden Stellen ausgewertet. Für rk wird als Parameter ein Randwert, $v = 3$, der Kurve eingesetzt und für mk wird die Mitte des Intervalls von v gewählt, $v = 0$. Für den Stab S wird das Möbiusband an der Stelle $u = 0$ ausgewertet. Die Enden dieses Stabes bilden zwei Punkte auf der Randkurve, die durch zwei Kugeln dargestellt werden. In *Maple* kann mithilfe einer Programmschleife eine Animation zur Erzeugung der Fläche erstellt werden. Dabei stellt dieser Stab S die Erzeugende der Fläche dar.

4.1.2 Visualisierung der Orientierung

Diese des Öfteren erwähnte Nicht-Orientierbarkeit des Möbiusbands, hat zur Folge, dass man sich auf dem Band nicht konsistent auf einer Seite bewegen kann. Man gelangt ohne die Fläche zu verlassen stetig auf die andere Seite.

Zur Veranschaulichung dieses stetigen "Seitenwechsels" wird zuerst das Möbiusband aus Abbildung 4.3 betrachtet. Dabei wurden der Einfachheit halber Tiffany-Steine auf das Band geklebt, die die Orientierung darstellen sollen. Die Steine verlaufen in regelmäßigen Abständen, mittig angeordnet entlang des Bandes. Die Nicht-Orientierbarkeit des Bandes zeigt sich dadurch, dass bei einmaligem Durchlaufen der Fläche der Endstein nicht auf den Anfangsstein trifft, sondern auf der "anderen" Seite liegt.

In Abbildung 4.5 (a) ist das Möbiusband mit den Tiffany-Steinen, die zur Orientierung dienen sollen, abgebildet. Abbildung 4.5 (b) zeigt, dass der Anfangsstein und der Endstein nach einmaligem Durchlaufen nicht auf der selben Seite liegen.

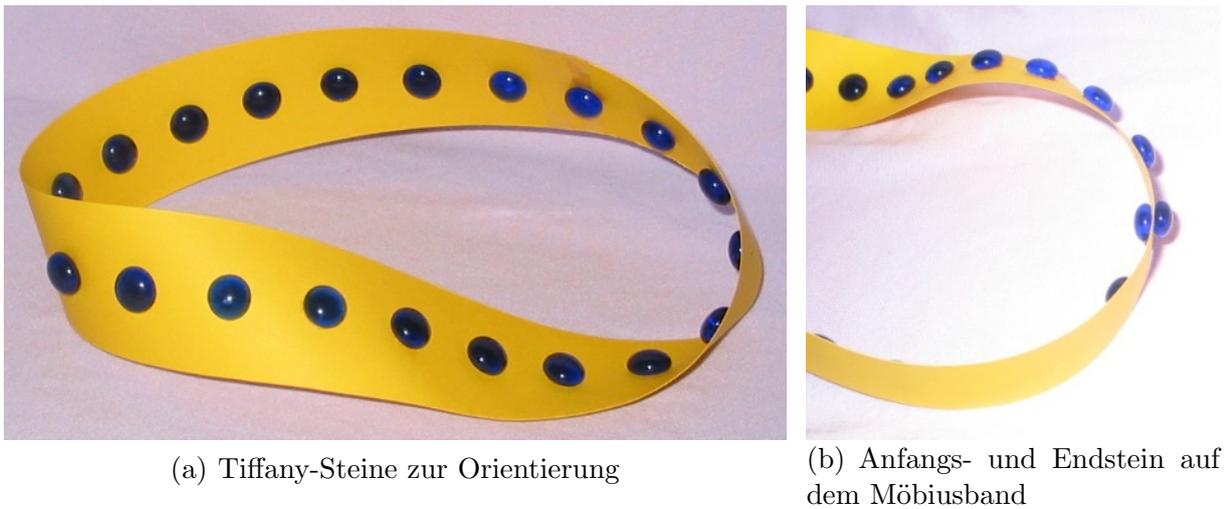


Abbildung 4.5: Möbiusband mit Tiffany-Steinen

Leichter lässt sich diese Nicht-Orientierbarkeit jedoch mit einem Computeralgebrasystem realisieren. Abbildung 4.6 zeigt eine derartige Realisierung mithilfe des Computeralgebrasystems *Maple*, wobei die Orientierung des Möbiusbands durch eine Darboux-Basis dargestellt ist. Die Darboux-Basis besteht aus dem Tangentenvektor in einem Punkt auf der Mittenkurve mk , in rot dargestellt, dem Normalvektor zum Tangentenvektor in diesem Punkt, in blau dargestellt, und dem auf diese beiden Vektoren normal stehende Vektor, in grün dargestellt. Der Punkt indem die Darboux-Basis erstellt wurde, ist durch eine weiße Kugel gekennzeichnet.

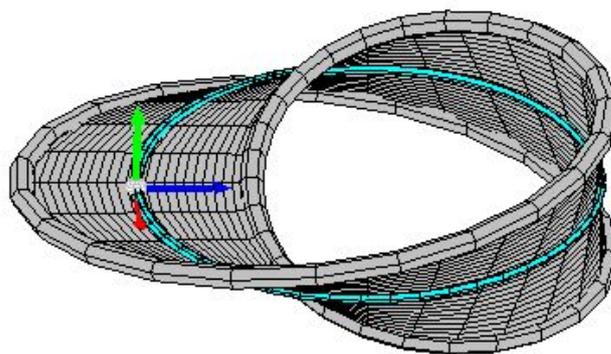


Abbildung 4.6: Möbiusband mit Darboux-Basis

Durchläuft diese Basis die Mittenkurve mk des Bandes, so wird die Orientierung in jedem Punkt sichtbar. Eine derartige Animation zur Orientierung der Fläche kann in *Maple* mithilfe einer Programmschleife erstellt werden. Abbildung 4.7 zeigt vier verschie-

dene Positionen der Darboux-Basis auf dem Band. Dabei zeigt Abbildung 4.7 (a) die Darboux-Basis im Anfangspunkt auf der Mittenkurve mk . In Abbildung 4.7 (b) und (c) ist die Basis jeweils auf der Mittenkurve mk weiter gewandert. Abbildung 4.7 (d) zeigt die Basis im Endpunkt.

Die Abbildungen 4.7 (a) - (d) zeigen die Basis nach einmaligem Durchlaufen des Bandes. Man beachte an diesen vier Abbildungen den grünen Pfeil, der die Orientierung darstellt. Nach einmaligem Durchlaufen "wechselt" dieser die Seite, d.h. die Orientierung zeigt nun in die entgegengesetzte Richtung als die in der Ausgangslage. Daher bezeichnet man das Möbiusband als eine nicht-orientierbare Fläche.

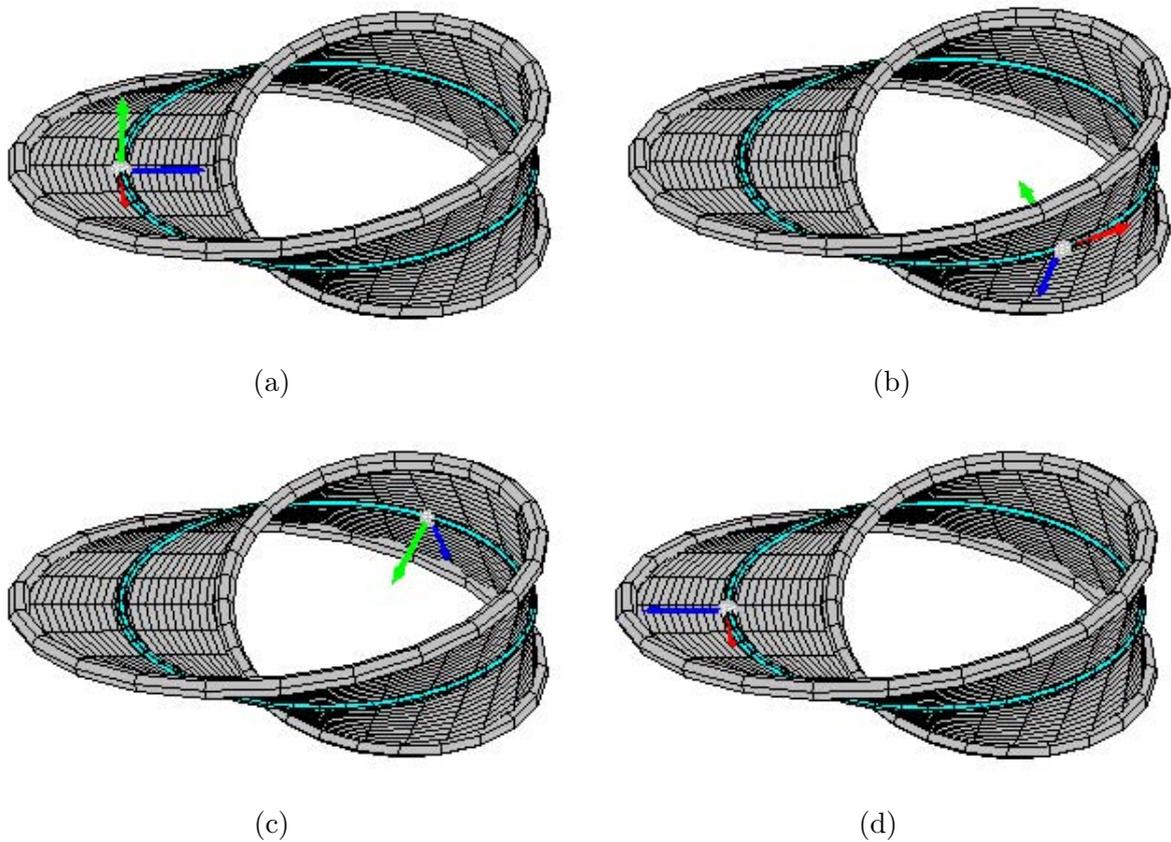


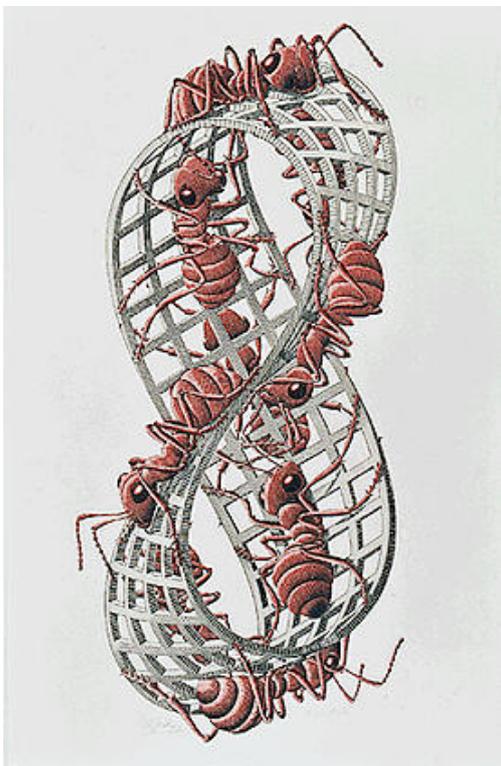
Abbildung 4.7: Animation der Darboux-Basis

4.1.3 Anwendungsbereich

Das Möbiusband hat ein breites Spektrum an Anwendungsmöglichkeiten. Zum Beispiel sorgt es bei Riemengetrieben für eine gleichmäßige Abnutzung, oder bei Audiokassetten für eine erhöhte Lebensdauer. Abgesehen davon werden die Eigenschaften des Möbiusbandes, nämlich das Unendlichkeits- oder Wiederholungsprinzip in Naturwissenschaften, wie Chemie und Physik sowie auch in der Literatur genutzt.

Vor allem aber inspirierte es viele Künstler, in deren Kunstwerken man des Öfteren auf das Möbiusband trifft. Spätestens mit den Unmöglichkeitsobjekten von dem niederländischen Künstler und Grafiker Maurits Cornelis Escher (1898-1972), siehe Abbildung 4.8 (a), ist diese nicht-orientierbare Fläche allgemein bekannt geworden. Aber auch der Schweizer Architekt und Künstler Max Bill (1908-1994) ließ sich bei seiner Skulptur "Koloß von Frankfurt", die vor der Deutsche Bank in Frankfurt errichtet wurde, vom Möbiusband beeinflussen.

Das wohl größte Möbiusband der Welt steht im Wissenschafts- und Technikpark in Daejeon in Südkorea, siehe Abbildung 4.8 (b), welches anlässlich der EXPO im Jahre 1993 errichtet wurde.



(a) Möbiusband von M.C.Escher



(b) Möbiusband in Deajeon

Abbildung 4.8: Anwendungen des Möbiusbandes

4.2 Problem 8: Die Kleinsche Flasche

Die Kleinsche Flasche, auch Kleinscher Schlauch genannt, ist ein weiteres geometrisches Problem, das wie schon erwähnt zu den nicht-orientierbaren Flächen zählt, d.h. sie besitzt nur eine einzige Seite, die gleichzeitig innen und außen ist. Sie wurde benannt, nach dem deutschen Mathematiker Felix Klein² (1849-1925), der sie 1882 entdeckte. Der Unterschied zum Möbiusband besteht darin, dass die Kleinsche Flasche nur mit Selbstdurchdringung in den dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 eingebettet werden kann.

Zunächst wird eine theoretische Konstruktion der Kleinschen Flasche betrachtet. Dafür wird die topologische Beschreibung der Fläche aus Abbildung 4.2 (d) herangezogen. Das rechteckige Papier wird entlang der Pfeile, die in dieselbe Richtung zeigen, zu einem Zylinder zusammengerollt. Dann wird das untere Ende leicht erweiternd nach oben zum Anfang gezogen, wobei es den Zylinder seitlich durchdringt und mit der Innenseite über den Anfang des Zylinders gestülpt wird. In Abbildung 4.9 ist diese Konstruktion dargestellt. In der Praxis ist sie jedoch nicht durchführbar, da die für die Fläche entstehende Selbstdurchdringung mit Papier nicht realisiert werden kann.

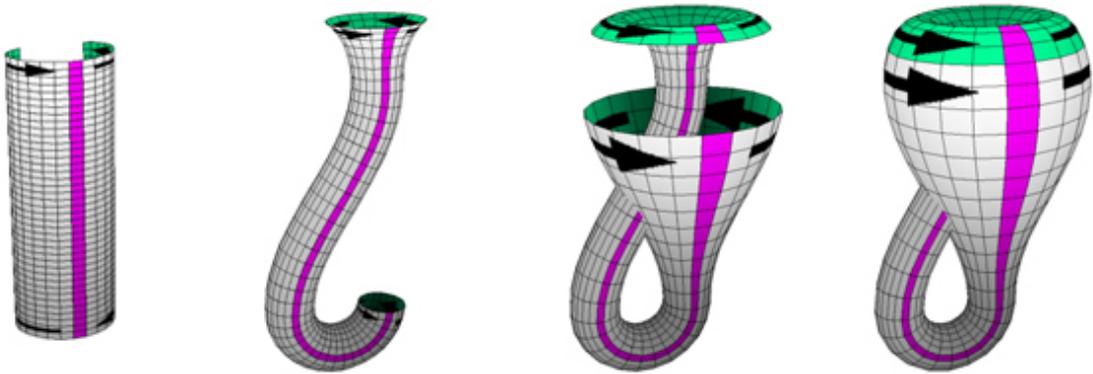


Abbildung 4.9: Theoretische Konstruktion der Kleinschen Flasche

²Ursprünglich hieß diese Fläche "Kleinsche Flaeche"; durch eine Verwechslung von "Flaeche" und "Flasche" wurde sie ins Englische mit "Klein Bottle", also "Kleinsche Flasche" übersetzt. Dieser Übersetzungsfehler setzte sich durch die anschauliche Bezeichnung auch im Deutschen durch.

Im Folgenden wird nun die Kleinsche Flasche mithilfe des Computeralgebrasystems *Maple* visualisiert.

Für die Parameterdarstellung der Kleinschen Flasche werden Gleichungen benötigt, in denen für zwei Bereiche des Parameters u verschiedene Gleichungen auftreten. Für den Bereich der Parameter u, v mit $0 \leq u < \pi$ und $0 \leq v < 2\pi$ lauten die Gleichungen:

$$x = a \cdot \cos(u) \cdot (1 + \sin(u)) + r \cdot \cos(u) \cdot \cos(v)$$

$$y = b \cdot \sin(u) + r \cdot \sin(u) \cdot \cos(v)$$

$$z = r \cdot \sin(v)$$

Für den Bereich der Parameter u, v mit $\pi \leq u < 2\pi$ und $0 \leq v < 2\pi$ lauten die Gleichungen:

$$x = a \cdot \cos(u) \cdot (1 + \sin(u)) + r \cdot \cos(v + \pi)$$

$$y = b \cdot \sin(u)$$

$$z = r \cdot \sin(v)$$

In Abbildung 4.10 (a) ist die Kleinsche Flasche dargestellt und Abbildung 4.10 (b) zeigt die Kleinsche Flasche als Gittermodell, an der die Durchdringung der Kurve gut erkennbar ist. Läuft man auf einer der Linien die Fläche entlang, so gelangt man ohne Übergang von außen nach innen und umgekehrt. Dies ist auf die Nicht-Orientierbarkeit dieser besonderen Fläche zurückzuführen.

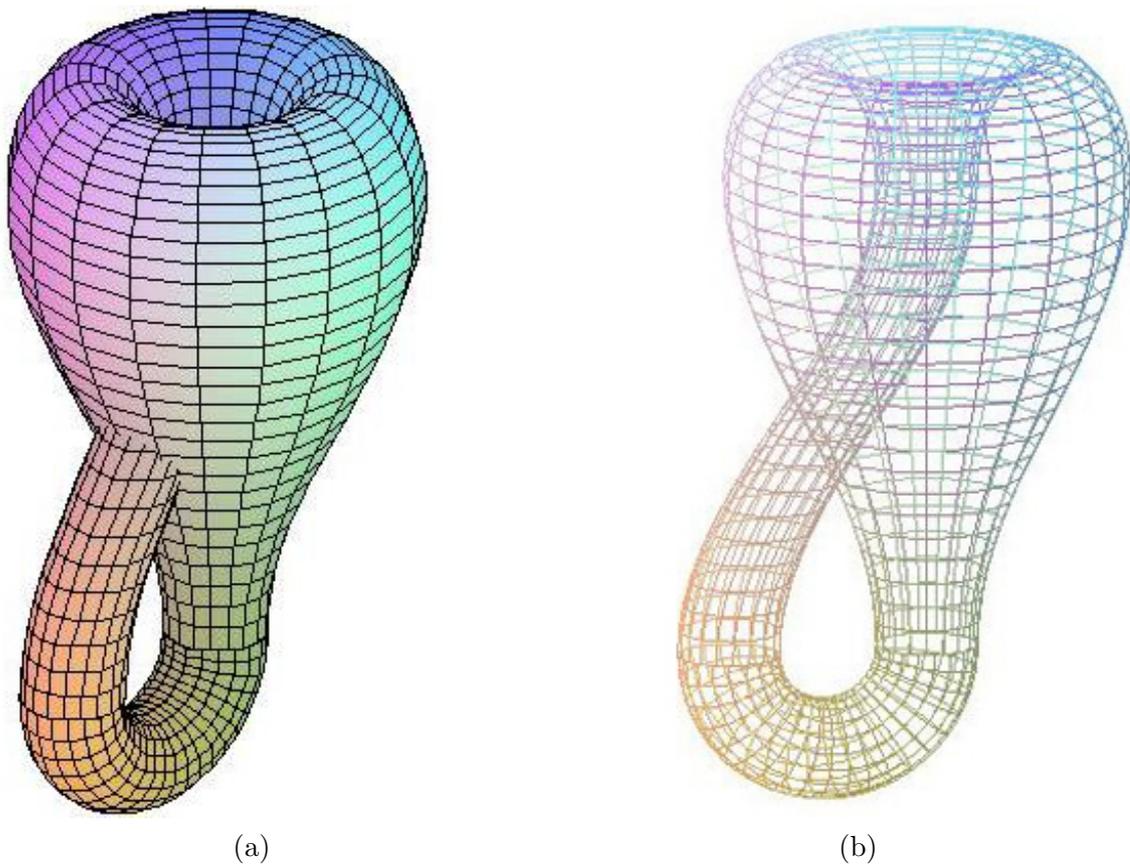


Abbildung 4.10: Kleinsche Flasche

Diese recht komplizierte Möglichkeit zur Darstellung kann umgangen werden, indem man die Kleinsche Flasche in einzelne Flächen zerlegt und diese dann vereinigt. Sie lässt sich unterteilen in einen Torus als Anfangsteil, einen Mittelteil, einen halben Torus als Endteil der Flasche und einen Halsteil. In Abbildung 4.11 wurden diese vier Flächen einzeln dargestellt. Der Halsteil der Kleinschen Flasche ist jener Teil, der die Flasche im Mittelteil durchdringt und an den Anfangsteil von unten anschließt. Dadurch kann man auf dieser zusammengesetzten Fläche von der einen auf die andere Seite gelangen.

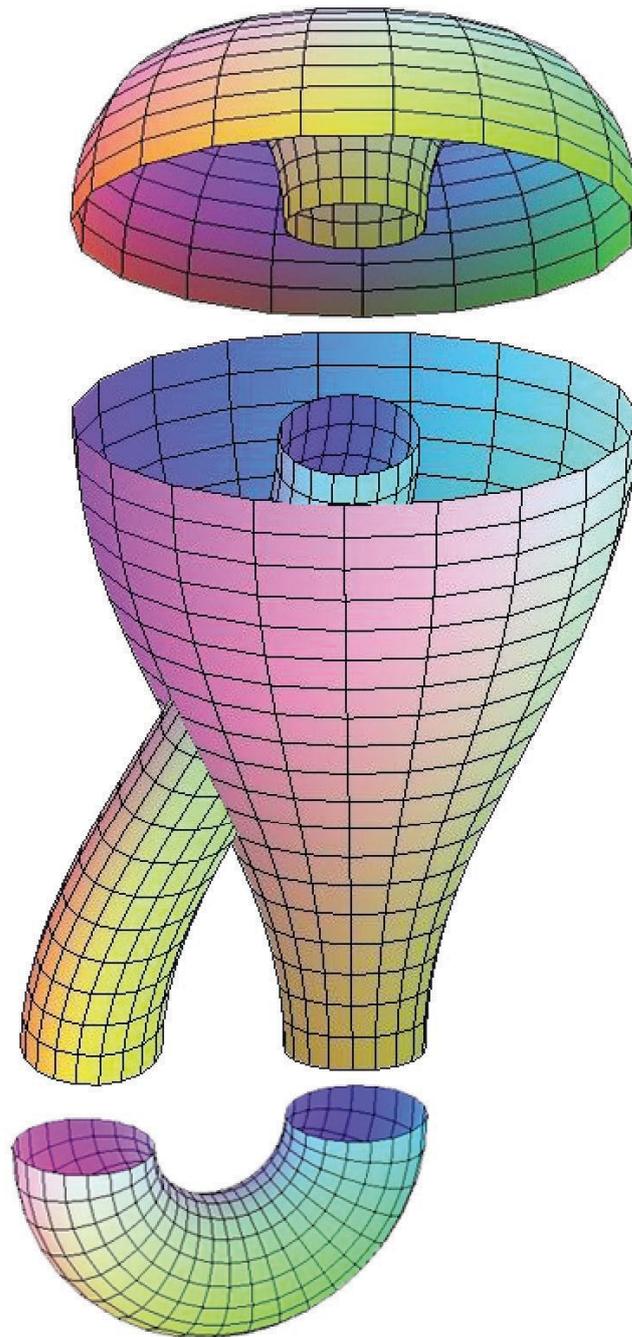


Abbildung 4.11: Kleinsche Flasche aus zusammengesetzten Flächen

Die Kleinsche Flasche kann der Länge nach in zwei Möbiusbänder geteilt werden. Eine halbierte Flasche ist also ein in den \mathbb{R}^3 eingelagertes Möbiusband. In Abbildung 4.12 ist das Möbiusband gut erkennbar. Die roten Pfeile visualisieren die wechselnde Orientierung der Normalenvektoren längs der gelb/grün markierten Flächenkurve der aufgeschnittenen Kleinschen Flasche.

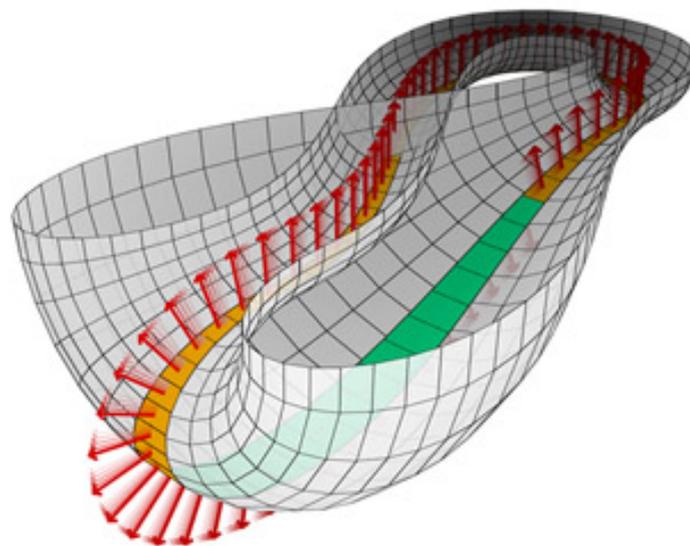


Abbildung 4.12: Halbierte Kleinsche Flasche mit eingelagertem Möbiusband

Literaturverzeichnis

- [ADLER 1906] ADLER, A. (1906). *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Leipzig, G.J. Göschensche Verlagshandlung, 1906. Sammlung Schubert LII.
- [ARENS et al. 2009] ARENS, T., F. H. C. KARPFINGER, U. KOCKELKORN, K. LICHTENEGGER und H. STACHEL (2009). *Mathematik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- [BIEBERBACH 1952] BIEBERBACH, L. (1952). *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Verlag Birkhäuser AG., Basel.
- [DO CARMO 1993] CARMO, M. P. DO (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Verlag Vieweg & Sohn.
- [DORNINGER und MÜLLER 1984] DORNINGER, D. und W. MÜLLER (1984). *Allgemeine Algebra und Anwendungen*. verlag B. G. Teubner Stuttgart, Zenchnersche Buchdruckerei GmbH, Speyer.
- [ELEMENTE DER MATHEMATIK 1950] ELEMENTE DER MATHEMATIK (1950). *Elemente der Mathematik*. Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts, Band V, Nr. 4, Seiten 73-96, Verein Schweizerischer Mathematiklehrer.
- [ENDRESS 2001] ENDRESS, G. (2001). *Der Islam and die europäische Kultur*. In: RUBIN: Wissenschaftsmagazin / Ruhr-Universität Bochum; Jahrgang 11, 1/01. Sommersemester 2001. ISSN 0942-6639. S. 42-47.
- [GIERING 1998] GIERING, O. (1998). *Perlen der Geometrie*. DMV-Mitteilungen 1/98, TU - Zentrum Mathematik.
- [KAISER und NÖBAUER 1998] KAISER, H. und W. NÖBAUER (1998). *Geschichte der Mathematik*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

- [KASPER et al. 1968] KASPER, H., W. SCHÜRBA und H. LORENZ (1968). *Die Klottoide als Trassierungselement*. Fünfte, stark erweiterte Auflage, Dümmlers Verlag, Bonn.
- [KRAMES 1918] KRAMES, J. (1918). *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften*. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien 127, S.563-584.
- [KRONFELLNER 2002] KRONFELLNER, M. (2002). *Geschichte der Mathematik im Unterricht: Möglichkeiten und Grenzen*. Beiträge zum Mathematikunterricht 2002, S. 23-30 (ISBN 3-88120-334-6).
- [LINDEMANN 1882] LINDEMANN, F. (1882). *Über die Zahl Pi*. Mathematische Annalen 20, 213 - 225.
- [MARTI 2009] MARTI, N. (2009). *Würfelverdoppelung - Seminararbeit der Blockwoche Geschichte der Mathematik*. Seminararbeit unter Leitung von Dr. Hans Walser, Universität Basel - Mathematisches Institut.
- [RUDIO 1892] RUDIO, F. (1892). *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung*. Teubner Verlag, Leipzig. Nachdruck Dr. Martin Sändig OHG 1971.
- [SCRIBA und SCHREIBER 2005] SCRIBA, C. J. und P. SCHREIBER (2005). *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer.