



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

UNTERSUCHUNG DES WOBBLE-MODES BEI FAHRRÄDERN – THEORIE UND FAHRVERSUCH

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs
unter der Anleitung von

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl

E 325 / A1

Institut für Mechanik und Mechatronik
Abteilung für Fahrzeugdynamik und Biomechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Christoph Leopold Ott

Matrikelnummer: 0525445

Johannesgasse 8

3041 Asperhofen

Wien, im Mai 2011

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Stabilität von Fahrrädern in der Geradeausfahrt mit besonderer Bezugnahme auf den Wobble-Mode, welcher eine Oszillation des Lenkers um die Lenkachse beschreibt und auch als Lenkungsflattern bekannt ist. Besagte Schwingung wird als unangenehm oder störend empfunden und kann bei zu spätem Fahrereingriff auch gefährlich werden. Für ein Damentrekking-Fahrrad, welches ab einer bestimmten Geschwindigkeit einen ausgeprägten instabilen Wobble-Mode aufweist, wird der Einfluss von Parametern auf das Stabilitätsverhalten sowohl anhand von numerischen Analysen als auch von Testfahrten untersucht. Das für die numerischen Analysen erforderliche Modell des Trekking-Fahrrades berücksichtigt sowohl die Rahmenflexibilität als auch einen Querschlupf der Reifen und den verzögerten Aufbau der Reifenkräfte. Die zugehörigen nichtlinearen Bewegungsgleichungen wurden hergeleitet und in der um die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Form angeführt. Für einen Vergleich der Berechnungen mit Testfahrten wurde das Trekking-Fahrrad mit einer Messausrüstung, welche den Lenkwinkel, die Geschwindigkeit sowie die Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten aufzeichnet, ausgestattet. Aus den damit erhaltenen Messwerten konnten die Eigenwerte der Wobble-Schwingungen ausgelesen und mit jenen der Berechnung, zur Validierung dieser, verglichen werden. Aus der numerischen Analyse konnten darüber hinaus Parameter mit einem wesentlichen Einfluss auf den Wobble-Mode identifiziert werden.

Abstract

This thesis deals with the stability of bicycles in the upright motion with main focus on the wobble mode. Wobble, which is related to the more general class of wheel-shimmy, is a self-excited oscillation of a bicycle's steering wheel about the steering axis and is perceived unpleasant or unnerving, or may also be hazardous if not controlled by the rider in time. The influences on the wobble mode of a specific trekking bike for women, which shows a pronounced unstable wobble mode at certain speeds, is investigated both on the basis of a mathematical model and on test runs. For numerical analysis a mathematical model of the trekking bicycle is required which takes the frame flexibility, the side slip of the tires and also the dynamic properties of tyre force generation into account. The linearized equations of motion with respect to the upright rectilinear motion are derived from the nonlinear equations and are given in the thesis. To compare numerical findings with observations from test runs the trekking bicycle has been equipped with measurement devices, which records the steering angle, speed and 3-axis accelerations and angular velocities. To validate the mathematical model, the eigenvalues of the measured wobble motion are compared with those of the numeric analysis. From the numerical analysis parameters with a significant influence on the wobble mode could be identified.

Danksagung

Diese Diplomarbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik, Arbeitsgruppe Fahrzeugdynamik und Biomechanik, der TU Wien mit Unterstützung der KTM-Fahrrad GmbH.

Ich möchte insbesondere Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl für die hervorragende Betreuung meiner Arbeit danken. Er stand für Fragen stets zur Verfügung und hat mit zahlreichen Anregungen und Hinweisen zum Gelingen dieser Arbeit maßgeblich beigetragen. Darüber hinaus hat er mir die Möglichkeit gegeben meine Arbeit bei einem internationalen Symposium in Delft zu präsentieren, wofür ich ihm ebenfalls recht herzlich danken möchte.

Zudem danke ich Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann für die geduldige Betreuung und den tapferen Einsatz als Testfahrer bei knapp 200 Messfahrten.

Aber auch der Unterstützung der KTM-Fahrrad GmbH ist es zu verdanken, dass praktische Messungen an einem Fahrrad durchgeführt werden konnten, um die theoretischen Ergebnisse zu verifizieren. Ganz besonders möchte ich mich in diesem Zusammenhang bei Herrn Thomas Preßl bedanken.

Für die Kollegialität und Hilfsbereitschaft möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik und Mechatronik bedanken.

Zudem möchte ich meinem Kollegen Bernhard Angrosch, der in seiner Diplomarbeit ebenfalls Untersuchungen am Fahrrad durchführte, für seine ausgezeichnete Arbeit an die ich anschließen konnte und dem Aufbau der Messeinrichtung an das Testfahrrad danken.

Mein größter Dank gehört meinen Eltern und meiner Familie, die mich jederzeit unterstützt haben und es mir erst ermöglicht haben, mein Studium zu betreiben. Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freunden und Kollegen für deren Unterstützung. Zuletzt möchte ich meiner Freundin Angela für ihre Unterstützung und Geduld danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau der Arbeit	2
2	Stabilitätsverhalten von Fahrrädern	4
3	Literaturstudie	7
3.1	Fahrradstabilität	7
3.2	Wobble	9
4	Modellbeschreibung	12
4.1	Fahrradmodell	12
4.2	Reifenmodell	15
4.2.1	Schräglaufl- und Sturzwinkel	15
4.2.2	Reifenkräfte und -Momente	18
4.3	Linearisierte Bewegungsgleichungen	21
4.4	Einfachere Modelle	24
4.4.1	Nichtholonome Reifenbindungen	24
4.4.2	Benchmark Modell inkl. Fahrer	27
4.4.3	Benchmark Modell	29
4.5	Parameterwerte	29

5	Messeinrichtung und Messsignalauswertung	33
5.1	Verwendete Messausrüstung	33
5.1.1	Kalibrieren des Lenkwinkelsensors	36
5.1.2	Kalibrieren des Geschwindigkeitssensors	36
5.2	Testfahrten	37
5.3	Messsignalauswertung	37
5.3.1	Logische - Signalfilterung	38
5.3.2	Tiefpass - Signalfilterung	39
5.3.3	Transformation in Bezugssystem A	40
5.3.4	Auswertung - Kurvenanpassung	44
5.4	Vergleich GPS - Wheel Speed Geschwindigkeit	47
5.5	Ergebnisse	47
6	Stabilitätsuntersuchung	51
6.1	Grundlagen	51
6.1.1	Mathematische Aufbereitung	51
6.1.2	Stabilitätsverhalten	52
6.1.3	Stabilität im Sinne Ljapunows	52
6.1.4	Eigenwertanalyse	53
6.1.5	Hurwitz-Kriterium	55
6.2	Stabilität des Fahrrades	56
6.3	Modellvergleich	61
6.4	Einfluss der Reifen	63
6.4.1	Einlaufänge	64
6.4.2	Schräglaufl- und Sturzsteifigkeit	64
6.4.3	Rückstellmomentensteifigkeit	66
6.4.4	Kippmomentensteifigkeit	66
6.4.5	Messung	67
6.4.6	Zusammenfassung	71
6.5	Einfluss des gyroskopischen Effekts	73

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	VII
6.6 Einfluss des Fahrers auf den Wobble-Mode	74
6.6.1 Fahrergewicht	75
6.6.2 Sitz- und Sattelposition	76
6.6.3 Rumpfmuskelanspannung	79
6.7 Einfluss einer zusätzlichen Masse	80
6.8 Einfluss der Fahrradgeometrie	83
6.8.1 Rahmengenometrie	83
6.8.2 Radstand	85
6.8.3 Nachlaufversatz der Gabel	85
6.9 Rahmenflexibilität	89
6.10 Zusammenfassung	91
7 Conclusio und Ausblick	93
7.1 Conclusio	93
7.2 Ausblick	94
Abbildungsverzeichnis	96
Tabellenverzeichnis	99
Literaturverzeichnis	100

Kapitel 1

Einleitung

Beim Lesen des Titels stellt sich die Frage: Wie kommt man beim Thema der Diplomarbeit auf das Fahrrad, ein Fahrzeug, das es in seiner heutigen Form seit rund 120 Jahren gibt [32] und was ist eigentlich *Wobble*?

Wobble kann kurz als selbsterregte Schwingung des Lenkers um die Lenkachse, also als eine Eigenbewegung des Fahrrades beschrieben werden. Eine genauere Beschreibung findet sich in Kapitel 2.

Die Stabilität von Zweirädern, welche im Stillstand zweifelsfrei instabil sind, da sie ohne einer Stütze oder einer stabilisierenden Tätigkeit des Fahrers umfallen würden, aber trotzdem (freihändig) fahrbar sind, faszinierte, wohl auch deswegen, schon sehr früh die Wissenschaft. Ein erster Versuch einer Stabilitätsbeschreibung wurde bereits 1869/70 von Rankine für das *Velocipedes* [1] gemacht. Die Auto- oder Selbststabilität des Fahrrades wurde erstmals vor über 110 Jahren unabhängig voneinander von Carvallo [3] und Whipple [4] nachgewiesen. Seither wurden und werden unzählige Artikel zum Thema der Zweiradstabilität veröffentlicht. Man sollte also meinen, dass das Fahrrad, welches auf den ersten Blick als eine recht einfache Konstruktion wirkt, bereits gänzlich untersucht ist und daher sowohl akademisch als auch praktisch kein besonders ausbaubares Thema ist.

Aus den Veröffentlichungen der letzten Jahre zum Thema der Fahrradstabilität wird jedoch offensichtlich, dass der Grund für die Selbststabilität noch bis jetzt Fragen aufwirft. So wurde über lange Zeit hinweg der stabilisierende Effekt von den gyroskopischen Kräften überbewertet und erst in den letzten Jahren neben dem Nachlauf des Vorderrads auch für die Massenverteilung ein stabilisierender Effekt nachgewiesen.

1.1 Motivation

Neben den bisher beschriebenen allgemeineren Stabilitätsbetrachtungen von Zweirädern, gibt es noch eine weitere fallweise instabile Schwingungsform – den Wobble. Dieser wurde für Motorräder, aufgrund dessen Gefährlichkeit bei hohen Geschwindigkeiten,

bereits ausführlich behandelt und kann durch die Verwendung von Lenkungsdämpfern bei diesen recht einfach stabilisiert werden. Auch bei Rennrädern treten diese nicht ungefährlichen Schwingungen bei hohen Geschwindigkeiten fallweise auf, können jedoch durch den erfahrenen und aufmerksamen Radfahrer unterdrückt werden.

Tritt eine solche Schwingung jedoch im mittleren Geschwindigkeitsbereich bei einem nicht so ambitionierten Fahrer auf, so wird dies vom Fahrer zumindest als unangenehm empfunden und es kann auch zu einem Vertrauensverlust des Fahrers in sein Fahrrad führen. Fahrräder, die solch ein Fahrverhalten aufweisen, werden auch fallweise in Geschäften beanstandet bzw. retourniert. Diese Fahrräder stellen daher für die Erzeugungsfirmen ein deutliches Problem dar. Auch ist es nicht von der Hand zu weisen, dass Unfälle, die durch ein zu spätes Eingreifen des Fahrers bei einer aufklingenden Wobble-Schwingung verursacht wurden, auch unter Umständen als Fahrfehler falsch zugeordnet werden.

Dieses in der Motorraddynamik altbekannte Thema wurde in der Fahrradliteratur bisher noch kaum behandelt. Die Ergebnisse für das Motorrad sind jedoch aufgrund der unterschiedlichen Massenverhältnisse, Geometrie- und Reifenparameter sowie des deutlich kleineren Geschwindigkeitsbereichs nicht direkt auf das Fahrrad übertragbar. Es soll daher für ein Damen-Trekking-Fahrrad, welches unter bestimmten Bedingungen bereits im unteren Geschwindigkeitsbereich einen ausgeprägten instabilen Wobble-Mode aufweist, Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt und diese durch Testfahrten überprüft werden. Dazu wurde das Trekking-Fahrrad mit einer Messausrüstung ausgestattet.

1.2 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn werden die charakteristischen Eigenmoden des Fahrrades, welche im Zuge der Diplomarbeit öfters erwähnt werden und einer davon bereits im Titel dieser angeführt wird, beschrieben. Daran anschließend wird ein kurzer Überblick, welcher keinen Anspruch auf Vollständigkeit stellt, über die wichtigsten Veröffentlichungen zum Thema der Fahrrad- bzw. Zweiradstabilität gegeben. Es findet dabei eine gesonderte Betrachtung des Wobble-Modes statt.

Für die numerische Berechnung ist ein mathematisches Modell erforderlich, welches beschrieben wird und für das die aus den nichtlinearen Gleichungen erhaltenen für die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen angegeben werden. Zusätzlich finden sich in diesem Kapitel die Beschreibung eines Reifenmodells sowie die linearen Bewegungsgleichungen von einfacheren Modellen.

In dem darauffolgenden Kapitel findet sich alles zu den im Zuge der Diplomarbeit durchgeführten Messungen. So werden darin das Testfahrrad, die Messausrüstung, die Testfahrten und die Auswertung der Messdaten beschrieben.

Nach grundlegenden Erläuterungen zur Stabilität und deren Zusammenhang und Berechnung mit den Eigenwerten wird der Einfluss der Parameter auf das Stabilitätsverhalten betrachtet. Diesen Ergebnissen werden, soweit es mit einem vertretbarem

Aufwand möglich war, Messergebnisse gegenübergestellt. Die erhaltenen Ergebnisse werden am Ende des Kapitels nochmals kurz zusammengefasst.

Alle Abbildungen ohne Quellenangabe wurden selbst, und aufgrund einer Veröffentlichung mit englischem Text, erstellt.

Kapitel 2

Stabilitätsverhalten von Fahrrädern

Allgemein kann die Bewegung eines dynamischen Systems ohne äußerer Krafteinwirkung, also ein homogenes System, durch eine Überlagerung seiner Eigenmoden in Abhängigkeit vom Anfangszustand beschrieben werden. Dies wird auch als die homogene Lösung eines Differentialgleichungssystems bezeichnet. Die charakteristischen Eigenmoden von Fahrrädern in der aufrechten Geradeausfahrt werden in der Literatur mit *Capsize*, *Weave* und *Wobble* bezeichnet und sollen im Folgenden kurz beschrieben werden. Im Zuge der Stabilitätsuntersuchung in Kapitel 6 wird eine mathematische Beschreibung dieser Eigenschwingungsformen sowie deren Eigenvektoren in Tabelle 6.1 angegeben.

Das Stabilitätsverhalten von Zweirädern ist stark geschwindigkeitsabhängig. Es ist daher in der Literatur üblich, die Eigenwerte über der Geschwindigkeit aufzutragen. Exemplarisch sind in Abbildung 2.1 die Eigenwerte vom untersuchten Trekking-Fahrrad dargestellt. Die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte werden dabei in zwei getrennten Diagrammen eingezeichnet.

Capsize (Kentern)

Capsize ist durch die nicht-oszillatorische Rollbewegung des Fahrrades charakterisiert. Da ein instabiler Capsize-Mode vom Fahrer leicht stabilisiert werden kann, ist diese Eigenbewegung allgemein als unkritisch anzusehen. In [20] wird darüber hinaus so argumentiert, dass durch die zu diesem Mode gehörende Zeitkonstante (= reziproker Wert des Eigenwertes) bestimmt wird, wie einfach sich das Zweirad in eine Kurve neigt. Dieser Mode ist für Fahrräder bei niedrigen Geschwindigkeiten stabil und kann im höheren Geschwindigkeitsbereich leicht instabil werden.

Weave (Pendeln)

Der Weave-Mode beschreibt eine schwingende Bewegung des gesamten Fahrrades, wobei es sich dabei anschaulich um ein Schwänzeln des Hinterrads überlagert von ei-

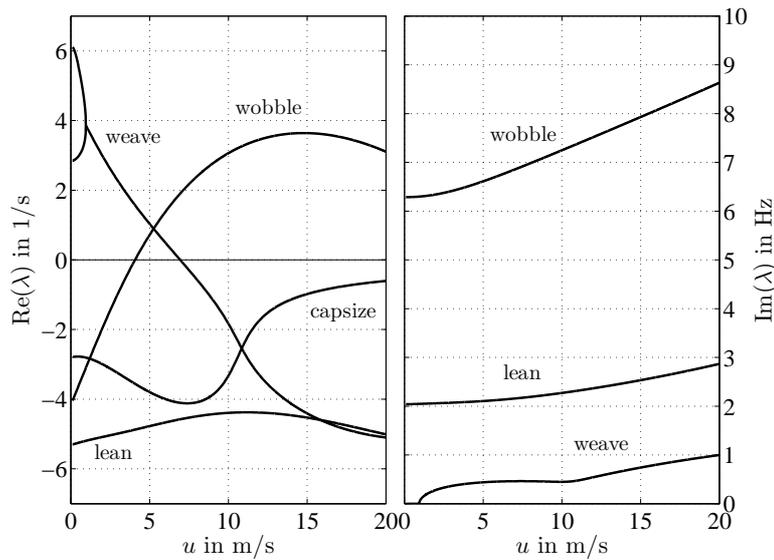


Abbildung 2.1: Stabilitätsdiagramm für das Trekking-Fahrrad

ner Rollbewegung handelt. Dies wird im Deutschen auch als Pendeln bezeichnet. Die zwei größten Absolutwerte des Eigenvektors haben der Gier- und der Rollgeschwindigkeitsfreiheitsgrad, wobei die Gierbewegung dominiert (vergleiche Tabelle 6.1). Bei sehr geringen Geschwindigkeiten zwischen 0,5–1m/s teilt sich der Weave-Mode in zwei nicht-schwingende Äste auf (vergleiche Abbildung 2.1), die das Umfallen des Fahrrads gleich einem inversen Pendel beschreiben [31]. Eine Stabilisierung dieser Eigenbewegung tritt für Fahrräder üblicherweise zwischen 4–7m/s auf. Bei hohen Geschwindigkeiten kann der Weave-Mode für bestimmte Zweiradparameter wieder instabil werden, was besonders für Motorräder ein Problem darstellt. Im Gegensatz zum instabilen Weave bei niedrigen Geschwindigkeiten, welcher den Fahrkomfort beeinflusst, kann dessen Instabilität bei höheren Geschwindigkeiten zu gefährlichen Situationen führen. Die Frequenz des Weave-Modes startet beim Zusammentreffen der beiden reellen Eigenwerte bei 0Hz und steigt mit steigender Geschwindigkeit an. Für typische Fahrradgeschwindigkeiten liegt sie im Bereich von 0,3–0,5Hz.

Wobble (Flattern)

Unter Wobble oder auch (Lenkungs-) Flattern versteht man eine unangenehme bis gefährliche selbsterregte Schwingung vornehmlich des Vorderradsystems um die Lenkachse. Diese Schwingung kann der allgemeineren Klasse des *wheel-shimmy*, welche eine selbsterregte Bewegung eines Rades um dessen Lenkachse beschreibt, zugeordnet werden. Zu dieser übergeordneten Klasse zählen beispielsweise auch das Flattern von PKW-Vorderrädern, Bugrädern von Flugzeugen oder auch von Rädern an Einkaufswagen. Das, vor allem bei Motorrädern, Gefährliche an dieser Schwingungsform ist, dass eine aufklingende Schwingung aufgrund der hohen Frequenzen vom Fahrer nur sehr ineffektiv unterdrückt werden kann (siehe [22]). Es sollte daher bereits bei

der Konstruktion darauf geachtet werden, dass der Wobble-Mode stabil ist bzw. dessen Stabilität durch einen Lenkungsdämpfer sichergestellt wird. Bei Fahrrädern ist die Frequenz vom Wobble stark geschwindigkeitsabhängig und steigt von ca. 6Hz auf 9Hz und mehr an.

Die Anzahl der mit einem mathematischen Modell darstellbaren Moden ist von dessen Anzahl an Freiheitsgraden abhängig. Mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Fahrradmodell treten daher deutlich mehr Moden auf, die im allgemeinen jedoch sehr rasch abklingen und daher für die Stabilitätsbetrachtungen nicht von Interesse sind und weder benannt noch in das Diagramm eingetragen werden. Eine Ausnahme bildet hier der *Lean-Mode* (Bezeichnung aus [19]). Diese, für den betrachteten Geschwindigkeitsbereich des Fahrrades stets stabile Schwingungsform, entsteht durch die Berücksichtigung einer Rollbewegung des Fahreroberkörpers gegenüber dem Rahmen. Da im Zuge der Diplomarbeit auch der Einfluss des Fahrers auf das Stabilitätsverhalten behandelt wird, sind die Eigenwerte dieses Modes in den Stabilitätsdiagrammen eingetragen.

Kapitel 3

Literaturstudie

Es soll zunächst ein kurzer Überblick über einige der bisher veröffentlichten Arbeiten zum Thema der Fahrradstabilität in Querrichtung, der sogenannten „out of plane motion“ gegeben werden, um anschließend auf die Publikationen, in denen der Wobble-Mode diskutiert wird, genauer einzugehen. In Fällen, in denen sowohl Motorräder als auch Fahrräder behandelt werden, wird zusammenfassend von Zweirädern gesprochen.

3.1 Fahrradstabilität

Einer der ersten Versuche, das dynamische Verhalten eines Vorläufers des heutigen Fahrrades, dem *Velocipedes*, zu analysieren, erschien 1869 von W. J. M. Rankine in fünf kurzen Artikeln [1]. Darin wird möglicherweise erstmals das „Gegensteuern“ – kurzes Lenken nach links um ein Rollen nach rechts zu erzeugen, welches für eine Rechtskurve erforderlich ist – beschrieben. Die Steuerung des Fahrrades wird dabei nur in Verbindung mit einer Regeltätigkeit des Fahrers behandelt, die Möglichkeit einer Selbststabilisierung von Fahrrädern scheint nicht bekannt gewesen zu sein [33].

Im Jahr 1899 wurde, offenbar unabhängig voneinander, von Carvallo [3] und Whipple [4] im Zuge verschiedener Preisausschreiben Arbeiten zum Thema der Fahrradstabilität publiziert. Die Arbeit von Carvallo, welche bereits 1897 zum Preisausschreiben eingereicht wurde, dürfte die erste bekannte Analyse des selbststabilisierenden Verhaltens von Fahrrädern sein. Gegenüber dem Fahrradmodell von Whipple vereinfachte Carvallo sein verwendetes Modell, indem er die Masse und das Massenträgheitsmoment von Lenker und Gabel gegenüber jenem des Vorderrades vernachlässigte. Whipple veröffentlichte auch erstmals die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Fahrrads. Sein verwendetes Modell, welches auch als *Whipple-* oder *Basic Bicycle Model* bezeichnet wird, und gleich dem *Benchmark-Fahrradmodell* ist, besteht aus vier Körpern – dem Rahmen, bestehend aus Fahrradrahmen und dem starr mit diesem verbundenen Fahrer, sowie der vorderen Baugruppe, die sich aus dem Lenker und der Gabel zusammensetzt, und den beiden Rädern (vergleiche Abbildung 3.1). Die beiden Rahmenelemente sind in der

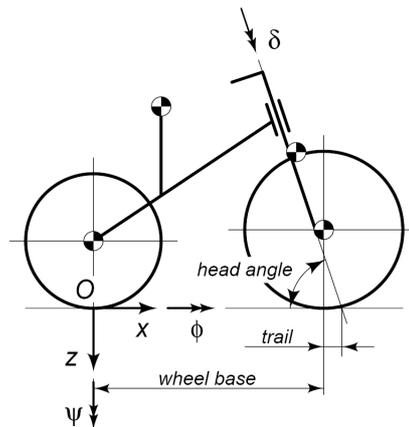


Abbildung 3.1: Whipple- oder Basic Bicycle Model, [27]

geneigten Lenkachse drehbar miteinander verbunden. Die Reifen-Fahrbahn-Kontakte wurden mit nichtholonomen Bedingungen (reines Rollen ohne Querschlupf) modelliert. Nach der Herleitung und Linearisierung der Bewegungsgleichungen um die aufrechte Geradeausfahrt wies Whipple mithilfe des Routh-Hurwitz Kriteriums ein selbststabiles Verhalten des betrachteten Fahrrades nach.

Klein und Sommerfeld untersuchten 1910 [5] den Einfluss der Kreiselkräfte auf die Stabilität des Fahrrades. Nach der Untersuchung der Stabilität mit den Parameterwerten von Whipple schreiben sie folgendes: „Die von Whipple gefundene Stabilität des Fahrrads für die Geschwindigkeit von 16–20km/h ist daher nur durch die Kreiselwirkungen der rotierenden Räder ermöglicht“[5]. Sie beschreiben die stabilisierende Wirkung der Kreiselkräfte und der Radaufstandskraft (positiver Nachlauf) des Vorderrads, erkennen dabei aber auch, dass die eigentliche stabilisierende Kraft die Zentrifugalkraft ist. Aus ihrer Analyse folgern sie, dass eine alleinige Stabilisierung über die Radaufstandskraft ohne Kreiselkräfte nicht möglich ist. Über das Zusammenspiel der Kräfte zur Stabilisierung des Fahrrades sichtlich beeindruckt schreiben sie weiters: „... , so ist es doch kaum von der Hand zu weisen, daß die Kreiselwirkungen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts bei der Fahrt beitragen, wir möchten sagen, in besonders intelligenter Weise beitragen; sind sie es doch, die vermöge der Phase ihrer Wirkung zuerst ein Überfallen des Rades spüren und die dann die viel stärkeren, aber etwas langsamen Centrifugalwirkungen in den Dienst der Stabilität spannen.“[5].

Es folgten ab den 50er Jahren eine Reihe von weiteren Artikeln zum Thema der Zweiraddynamik, unter anderem von Åström [25], Hand [14], Jones [7], Limebeer [22, 30], Meijaard [23, 27, 31, 32, 33], Papadopolous [13, 23, 27, 33], Roland [10], Schwab [23, 27, 31, 32, 33], Sharp [8, 11, 12, 17, 22, 30, 34, 35], Weir [9], u.a.

Aufbauend auf das Whipple-Fahrradmodell wurde von Schwab, Meijaard und Papadopolous 2004 [23] bzw. 2005 [27] ein *Benchmark-Fahrradmodell* veröffentlicht. Dieses Modell wurde durch Testfahrten von Kooijman validiert [29] (Zusammenfassung in [31]).

In dem Artikel von Schwab u.a. [27] wird neben dem Modell des Benchmark-Bicycles auch noch angeführt, dass neben den durch den gyroskopischen Effekt des Vorderra-

des und dem von der Aufstandskraft des Vorderrades in Verbindung mit dem Nachlauf erzeugten Moment um die Lenkachse, was unter anderem von Klein und Sommerfeld [5] sowie Jones [7] festgestellt wurde, auch noch die Massenverteilung, und dabei im speziellen die Position des Schwerpunkts der vorderen Baugruppe, eine stabilisierende Wirkung auf das Fahrrad besitzt. Dazu ist auch eine mögliche Konfiguration eines ab einer bestimmten Geschwindigkeit stabilen Fahrrads mit Rädern ohne Masse und Massenträgheitsmoment (und damit keinen gyroskopischen Kräften) und ohne Nachlauf angeführt.

3.2 Wobble

Im Gegensatz zur allgemeineren Untersuchung der Fahrradstabilität gibt es zum Thema der Wobble-Schwingungen bei Fahrrädern deutlich weniger Veröffentlichungen. Bei der Mehrzahl der hier genannten Veröffentlichungen handelt es sich daher um Untersuchungen dieser Schwingungen beim Motorrad.

Eine der ersten Untersuchungen der Motorradstabilität, bei der auch der Wobble-Mode berücksichtigt wurde, ist von Sharp [8]. Er zeigt dabei den Einfluss der Reifen-Fahrbahn Kontaktmodellierung auf das Stabilitätsverhalten auf, indem er den Reifen-Fahrbahn-Kontakt zunächst als nichtholonome Bindung modelliert und anschließend ein Reifenmodell ohne und mit zeitlicher Verzögerung des Kraftaufbaus (Relaxationslänge) verwendet. Aus den berechneten Eigenwerten folgert er, dass durch die Einlauflänge der Reifenkräfte die Dämpfung des Weave-Modes bei höheren Geschwindigkeiten größer, und jene des Wobble-Modes für den gesamten Geschwindigkeitsbereich gänzlich verändert wird. Weiteres erkennt er, dass ohne Reifenmodell der Wobble-Mode komplett fehlt. Eine Rahmenflexibilität wird vom verwendeten Modell jedoch nicht berücksichtigt. Unter anderem untersucht er in diesem Artikel auch den Einfluss von Motorrad- und Reifenparameterwerten auf die Eigenbewegungen.

Der Einfluss einer Rahmensteifigkeit auf das Stabilitätsverhalten schwerer Motorräder wurde von Sharp und Alstead 1980 in [11] durch den Vergleich von drei Modellen untersucht. Im darin beschriebenen Modell *A* ist, zur Abbildung der Flexibilität der Gabel in lateraler Richtung, das Vorderrad auf dessen Drehachse lateral verschiebbar gelagert. Modell *B* berücksichtigt eine torsionale Verdrehung der Gabel um eine zur Lenkachse parallelen, durch den Schwerpunkt der vorderen Baugruppe verlaufenden Achse. Das dritte Modell (*C*) fasst die Rahmensteifigkeit zusammen, indem es eine Verdrehung des masselosen Steuerkopfes (und damit der Lenkbaugruppe) gegen den Rahmen um eine lotrecht auf die Lenkachse stehende in der Symmetrieebene liegende Achse zulässt. Bei allen drei Modellen wurde zu den neuen Freiheitsgraden eine parallele (Dreh-) Feder-, (Dreh-) Dämpferanordnung eingeführt. Während die Einführung der Drehelastizität der Gabel (Modell *B*) kaum einen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten hat, verschlechtert eine geringere Gabelquersteifigkeit (Modell *A*) die Dämpfung des Wobble-Modes im mittleren Geschwindigkeitsbereich von 10–15m/s. In diesem Geschwindigkeitsbereich ist die Raddrehfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz. Über

die Ergebnisse für Modell C ist zu lesen, dass durch eine Versteifung des Motorradrahmens Wobble-Schwingungen im mittleren Geschwindigkeitsbereich verhindert werden können, während bei höheren Geschwindigkeiten ein elastischerer Rahmen im Hinblick auf die Dämpfung des Wobbles günstiger ist.

Veröffentlichungen der letzten zehn Jahre, in denen der Wobble oder die allgemeinere Klasse des *Wheel-Shimmy's* behandelt wird, sind etwa [35] (Fahrrad), [17] [19] [22] (Motorrad), [30] (Motorrad und Fahrrad) oder auch [16] (Beschreibung von Shimmy an Bugrädern von Flugzeugen).

In [17] wird neben der Stabilität der Geradeausfahrt, bei der die in der Motorradsymmetrieebene (*in-plane*) liegenden Moden (z. B. durch Federung) unabhängig von jenem aus dieser Ebene herausgehenden (*out-of-plane*) sind, auch die Stabilität bei größeren Rollwinkeln untersucht. Bei letzterer Untersuchung geht jedoch die Unabhängigkeit der in der Ebene liegenden Moden mit jenen aus der Ebene herausgehenden mit steigendem Rollwinkel zunehmend verloren.

Eine ausführliche Beschreibung der Herleitung der Bewegungsgleichungen inkl. Angabe von geometrischen Zusammenhängen für ein Motorradmodell inklusive Fahrerrollfreiheitsgrad und flexibler Gabel sowie eine detaillierte Herleitung und Beschreibung des verwendeten Reifenmodells ist in [19] angegeben. Darüber hinaus wird auch eine für Motorradreifen passende Formulierung der *magic formula* angeführt. Der Einfluss von Parameterwerten auf das Stabilitätsverhalten des betrachteten Motorrades wird anhand von Parametervariationen diskutiert. Ebenso wird darin die Sprungantwort eines durch eine Rückkopplungsregelung stabilisierten Motorrades betrachtet und die stationäre Kurvenfahrt analysiert. In einem eigenen Kapitel wird das Wheel-Shimmy Phänomen, mit Bezugnahme auf [16] und andere, behandelt.

Der sogenannte *tank slapper* sowie die Möglichkeiten des Fahrers diese starke Oszillation des Lenkers um die Lenkachse, die sich schnell bis zu einer Schwingung bis zum Lenkeranschlag entwickelt, zu Beginn der Schwingungen zu unterdrücken, wird in [22] beschrieben. Aus dem Artikel geht hervor, dass der Fahrer durch Muskelanspannung einen aufklingenden Wobble-Mode nur sehr unzureichend unterdrücken kann und daher die Notwendigkeit besteht, durch konstruktive Maßnahmen diese Schwingungsform zu verhindern. Es wird darin auch erwähnt, dass diese extreme Form des Wobbles gelegentlich auch bei Fahrrädern bei, für ihre Verhältnisse, hohen Geschwindigkeiten auftritt. Eine getrennte Behandlung der Stabilität von Fahrrädern und Motorrädern wurde in [30] durchgeführt. Der Einfluss einer Rahmenflexibilität des Fahrrades sowie eines verzögerten Kraftaufbaus am Reifen wird anhand eines erweiterten Whipple-Fahrradmodells, welches hier als *basic bicycle model* bezeichnet wird, betrachtet. Aus den Berechnungsergebnissen des erweiterten Modells wird gefolgert, dass für die exakte Abbildung von Weave und Wobble eines gemessenen Motorradverhaltens ein Zweiradmodell mit Berücksichtigung der Rahmenflexibilität und des Reifenkrafteinlaufs erforderlich ist.

Die Publikation [35] von R. S. Sharp stellt eine wichtige Arbeit auf dem Gebiet der Fahrradstabilität dar. Neben dem Einfluss einer Beschleunigung in Längsrichtung wurden durch eine sukzessive Erweiterung des Benchmark-Fahrradmodells um den Rei-

fenquerschnittsradius (*Overtuning-Couple* vergleiche Kapitel 4.2), Reifenkräfte ohne und mit Relaxationslänge, Rahmen- sowie Fahrerflexibilität, deren Auswirkung auf die Autostabilität des Benchmark-Fahrrads untersucht.

Einen ausführlichen Rückblick über die Geschichte der Fahrrad- und Motorradentwicklung ist in [30] angeführt. Ein fundierter Überblick über die bisherigen Entwicklungen zur Beschreibung des Stabilitätsverhaltens von Zweirädern ist in [12], [30] und [33] zu finden. In [33] wurde darüber hinaus noch die Richtigkeit der Veröffentlichungen überprüft.

Publikationen, die über die reine Autostabilitätsbetrachtung hinausgehen und auch den Einfluss des Fahrers berücksichtigen, sind etwa [25, 30, 34, 35].

Auch an der TU-Wien gibt es bereits zwei Diplomarbeiten [15, 37], die sich mit dem Wobble-Phänomen von Fahrrädern beschäftigen.

Kapitel 4

Modellbeschreibung

In diesem Kapitel werden das verwendete Fahrradmodell beschrieben sowie die zu diesem gehörenden linearisierten Bewegungsgleichungen angegeben. Darüber hinaus werden am Schluss des Kapitels die Parameterwerte vom Trekking-Fahrrad angeführt. Da diese Diplomarbeit nur das Stabilitätsverhalten der aufrechten Geradeausfahrt behandelt, wird hier, um Missverständnisse zu vermeiden, festgelegt, dass die im folgenden durchgeführten Linearisierungen der betrachteten Bewegungsgleichungen und andere angegebene geometrische Zusammenhänge immer für die aufrechte Geradeausfahrt durch- bzw. angeführt werden.

4.1 Fahrradmodell

Ein einfaches Modell zur Beschreibung des grundsätzlichen Stabilitätsverhaltens stellt das sogenannte Whipple- oder Benchmark-Fahrradmodell dar. Bei diesem wird der Reifen-Fahrbahnkontakt als sogenannte knife-egde Bedingung (nichtholonom) modelliert, es ist also kein Querschlupf bzw. Schräglauf der Reifen möglich. Dieses Modell besitzt damit zwei Freiheitsgrade, den Roll- und den Lenkwinkel. Mit den linearisierten Bewegungsgleichungen dieses Modells lassen sich der Weave-, Capsize- und Castor-Mode beschreiben. Der bisher noch nicht erwähnte Castor-Mode ist über den gesamten Geschwindigkeitsbereich stabil (Näheres dazu siehe beispielsweise [33]).

Für die Stabilitätsberechnungen in dieser Arbeit soll jedoch auch der Wobble-Mode mit ausreichender Genauigkeit berücksichtigt werden. Es wird daher ein – gegenüber dem Whipple-Fahrradmodell – um die im Drehgelenk mit dem Freiheitsgrad β zusammengefassten Flexibilitäten von Rahmen, Gabel, Felge und Reifen, einem Reifenmodell mit Querschlupf und einem zusätzlichen Rollfreiheitsgrad φ_r für den Fahreroberkörper erweitertes Modell verwendet. Die Reifen werden damit als kräfteerzeugendes Element inklusive Einlauflänge modelliert. Für die Räder wird vorausgesetzt, dass sie eine konstante Winkelgeschwindigkeit, welche proportional der Längsgeschwindigkeit u des Fahrrades und dem entsprechenden Abrollradius r_1 bzw. r_2 ist, besitzen. Dadurch

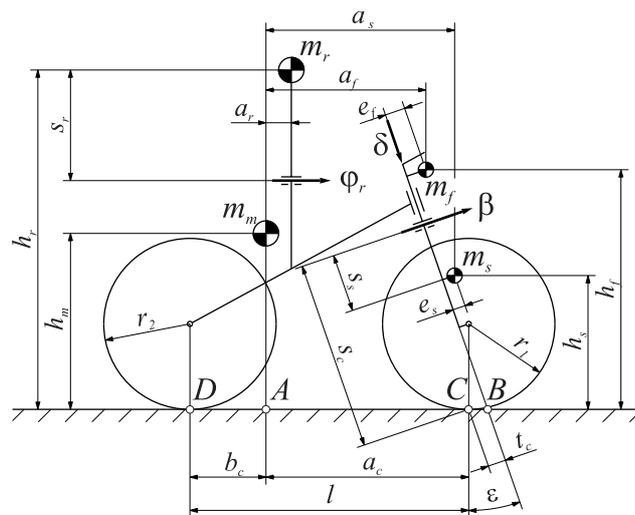


Abbildung 4.1: Fahrradmodell mit geometrischen Abmessungen in aufrechter Position

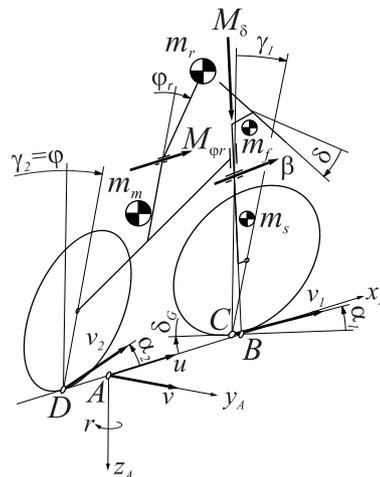


Abbildung 4.2: Fahrradmodell in Kurvenfahrt

können ihre Massen zum Rahmen bzw. zur Gabel hinzugezählt werden. Die Kreiselkräfte werden extra berücksichtigt.

Das Modell besteht mit diesen Erweiterungen, wie in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt, aus dem Rahmen inklusive den Beinen des Fahrers und dem Hinterrad (m - mainframe), dem Lenker (f - front assembly), der Gabel inklusive Vorderrad (s - subframe) und dem Fahreroberkörper (r - rider). Die Bezeichnungen und Abmaße sind an jene von [19] angelehnt.

Die Beschreibung der geometrischen Zusammenhänge sowie der Freiheitsgrade soll anhand der Abbildung 4.2, welche das Fahrradmodell in Kurvenfahrt zeigt, erfolgen. Der Referenzpunkt A , der sich auf dem Projektionspunkt des Rahmenschwerpunktes m auf die Schnittlinie BD , der Fahrrad-Symmetrieebene mit der Fahrbahn, des aufrechten Fahrrades befindet, bewegt sich mit der (konstanten) Geschwindigkeit u in Längs- und mit der Geschwindigkeit v in Querrichtung des Fahrrades über die Fahrbahn. Das Ko-

ordinatensystem dieses Punktes (Koordinatenursprung fällt mit Punkt A zusammen) ist so ausgerichtet, dass die $x_A y_A$ -Ebene in der Fahrbahnebene liegt und die x_A -Achse entsprechend der Schnittlinie BD ausgerichtet ist und in Fahrtrichtung zeigt. Daraus folgt, dass die z_A -Achse nach unten und die y_A -Achse vom Fahrer aus gesehen nach rechts zeigt. Die Schnittlinie BD rotiert gegen ein inertialfestes Bezugssystem mit der Gierrate r .

Der Fahrradrahmen m kann sich gegenüber dem System A um die x_A -Achse mit dem Rollwinkel φ neigen. Der Rollwinkel wird als Winkel zwischen einer Normalen auf die Fahrbahn und der Rahmensymmetrieebene definiert.

Der Fahrer r besitzt gegenüber dem Rahmen einen Neigefreiheitsgrad des Oberkörpers φ_r und kann ein (inneres) Lenk- M_δ und Rollmoment M_{φ_r} auf den Lenker bzw. auf den Rahmen ausüben. Zusätzlich ist in den Verbindungen zwischen Fahrer und Rahmen bzw. Fahrer und Lenker jeweils ein Drehfeder- Drehdämpferelement angeordnet worden.

Der Lenker kann sich gegenüber dem Rahmen mit dem Lenkwinkel δ um die Lenkachse, welche um den Lenkachsenwinkel ε gegenüber einer Vertikalen nach hinten geneigt ist (vergleiche Abbildung 4.1), drehen. Der Lenkachsenwinkel ε ist dabei der Komplementärwinkel zum Lenkkopfwinkel. Durch die geneigte Lenkachse ergibt sich, unter Berücksichtigung des Nachlaufversatzes der Gabel, für die aufrechte Geradeausfahrt ein Nachlauf t_c . Diese Nachlaufänge ist dabei als der Abstand zwischen der Lenkachse und dem Kontaktpunkt C des Vorderreifens mit der Fahrbahn definiert und wird normal zur Lenkachse, wie in Abbildung 4.1 eingezeichnet, gemessen.

Die Beschreibung der Quersteifigkeit der Gabel und Felge sowie die Berücksichtigung der Rahmen- und Steuerrohrflexibilität wird zusammengefasst und durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad und einem parallel dazu angeordneten Drehfeder- Drehdämpferelement modelliert. Dazu wird ein Rotationsfreiheitsgrad, mit der Drehachse normal auf die Lenkachse und in der Symmetrieebene liegend, zwischen Lenker f und Gabel s angeordnet, sodass ein Teil des Lenksystems mit dem Drehwinkel β gegenüber dem Lenker rotieren kann.

Im Zuge der Modellerstellung wurden folgende Vereinfachungen, welche im Zusammenhang mit der Analyse des Stabilitätsverhaltens bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt als zulässig erscheinen, getroffen:

- Alle Körper werden als ideal starr angesehen.
- Alle Körperteile des Fahrers unterhalb der Hüfte sind fest mit dem Rahmen verbunden.
- Alle Gelenke sind reibungsfrei und ohne Lagerspiel.
- Verbindungen einzelner Körper, die als Drehfeder-, Drehdämpfermodell vereinfacht werden, verfügen über lineare Kraftverläufe.
- Reifenkräfte sind als linear gemäß der Beschreibung in Kapitel 4.2 angenommen.

- Vernachlässigung von Fahrwiderständen wie Luft- und Rollwiderstand.
- Unbeschleunigtes, schlupffreies Rollen in Fahrzeuginnenrichtung wird vorausgesetzt.
- Die Veränderung der Schwerpunktshöhen durch Rollen in Bezug auf die Schnittlinie BD , aufgrund des Reifenquerschnittsradius, wird vernachlässigt.
- Eine Nickbewegung des Fahrrades beim Lenken und Rollen wird zufolge der nachfolgenden Linearisierung der Bewegungsgleichungen vernachlässigt.

4.2 Reifenmodell

Die Reifen werden erst seit Mitte der 1930er Jahre als kraft- und momenterzeugendes Element, anstatt einer davor üblichen Zwangsbedingung zwischen Reifen und Fahrbahn, bei vierrädrigen Fahrzeugen betrachtet [35]. Reifenmodelle für Zweiräder wurden erst mit entsprechender Verzögerung entwickelt.

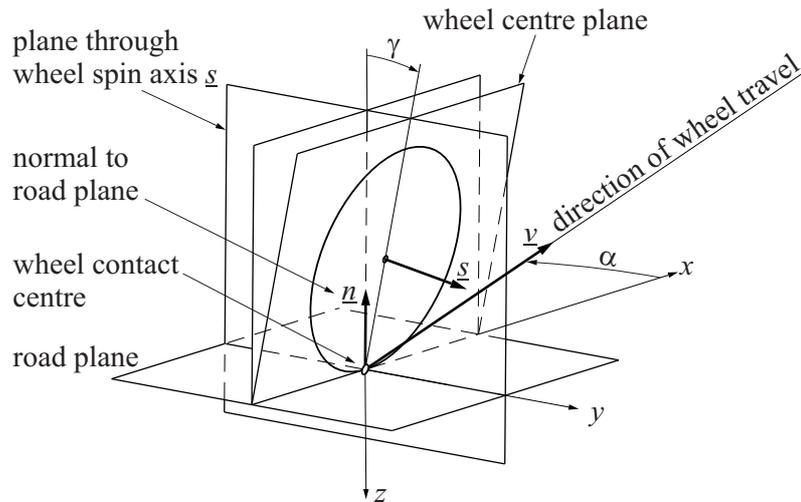
Aufgrund der beim Fahrradreifen wesentlich geringeren Aufstands- und Seitenkräfte im Vergleich zum Motorradreifen sind für Motorradreifen ausgelegte Reifenprüfstände für Fahrradreifen ungeeignet. Auf dem Symposium für Zweiraddynamik 2010 in Delft wurde ein eigens für Fahrradreifen ausgelegter einfacher Reifenprüfstand präsentiert [39]. Die in der Veröffentlichung enthaltenen Daten konnten in dieser Diplomarbeit jedoch nicht mehr berücksichtigt werden.

Die kaum verfügbaren Reifendaten sind offensichtlich auch der Grund dafür, dass nur sehr wenige Publikationen ein Fahrrad-Reifenmodell beinhalten. Zu diesen wenigen zählen etwa [15, 30, 35, 37, 49]. Viele davon verweisen wieder auf eine Publikation von Roland aus dem Jahr 1973 [10].

Zur Modellierung der Reifenkräfte wird in dieser Arbeit eine vereinfachte Version des in [19] angeführten linearen Motorradreifenmodells verwendet. Die erforderlichen Reifenparameter sind aus [35] bzw. [37] entnommen und wurden für die Messungen entsprechend angepasst. In Tabelle 4.3 findet sich eine Auflistung der Werte.

4.2.1 Schräglauf- und Sturzwinkel

Für die in Kapitel 4.2.2 angeschriebenen Gleichungen der Reifenkräfte und -momente sind die zugehörigen Schräglaufwinkeln α_i und Sturzwinkeln γ_i erforderlich. Es werden daher zuerst diese beiden Winkel für ein Rad anhand von Abbildung 4.3 definiert und anschließend die Zusammenhänge mit den Freiheitsgraden des Fahrradmodells angeführt.

Abbildung 4.3: Definition von Schräglaufwinkel α und Sturzwinkel γ an einem Rad

Definition Schräglaufwinkel

Zur Definition des Schräglaufwinkels soll zunächst der Kontaktpunkt des Reifens mit der Fahrbahn definiert werden. Dieser Punkt ist, entsprechend Abbildung 4.3, als der Schnittpunkt der Fahrbahnebene (*road plane*), der Reifensymmetrieebene (*wheel centre plane*) und einer Ebene durch die Raddrehachse (*plane through wheel spin axis*) definiert.

Damit ist der Tangens des Schräglaufwinkels nach [19] als das negative Verhältnis von Quer- zu Längsgeschwindigkeit des Kontaktpunktes definiert. Die Längsrichtung soll dabei die Schnittlinie der Reifenlängssymmetrieebene mit der Fahrbahnebene in Rollrichtung definiert werden ($i = 1$ für das Vorderrad, 2 für das Hinterrad).

$$\tan \alpha_i = -\frac{v_{i,y}}{v_{i,x}}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.1)$$

Veranschaulicht ist der Schräglaufwinkel, also der Winkel zwischen dem in der Fahrbahnebene liegenden Geschwindigkeitsvektor \underline{v} , mit dem sich der Kontaktpunkt über die Fahrbahn bewegt, und der Schnittlinie der Reifenlängssymmetrieebene mit der Fahrbahnebene.

Definition Sturzwinkel

Der Radsturzwinkel γ ist definiert als der Winkel zwischen der Radsymmetrieebene und einer normal auf die Fahrbahn stehenden Ebene. Mit dem normal auf die Fahrbahnebene stehenden Einheitsvektor \underline{n} und dem in der Raddrehachse liegenden Einheitsvektor \underline{s} (vergleiche Abbildung 4.3) berechnet sich der Sturzwinkel zu [19]:

$$\sin \gamma = -\underline{n} \cdot \underline{s} \quad (4.2)$$

Zusammenhang der Winkel mit den Modell-Freiheitsgraden

Zur Berechnung der Schräglauf- und Sturzwinkel an den beiden Rädern des Fahrrades über die Freiheitsgrade des Fahrradmodells wird gleich wie in [19] vorgegangen. Die Schräglaufwinkel werden entsprechend obiger Definition berechnet, wobei für den Vorderreifen der Winkel $\alpha_1 - \delta_G$, also mit Berücksichtigung des Bodenlenkwinkels δ_G , berechnet wird. Dadurch kann die Längsgeschwindigkeit der beiden Reifen mit der Geschwindigkeit u im Bezugspunkt A gleichgesetzt werden. Die geringen Abweichungen für den Vorderreifen aufgrund des seitlichen Versatzes des Aufstandspunktes aus der Achse, zufolge von Lenk- und Rollwinkel sowie Rahmenflexibilität werden vernachlässigt. Die Quergeschwindigkeiten in den Reifen-Fahrbahnkontaktpunkten können entsprechend Abbildung 4.4, unter Vernachlässigung der Nickbewegung und der Abstandsänderung zwischen den Punkten AC bzw. AD , mit den Modellfreiheitsgraden und deren Ableitungen entsprechend (4.3 – 4.4) angegeben werden.

$$v_{1|A,y} = v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta} \quad (4.3)$$

$$v_{2|A,y} = v - b_c r \quad (4.4)$$

Damit folgt für die Schräglaufwinkel:

$$\alpha_1 - \delta_G = \arctan \left(-\frac{v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}}{u} \right) \simeq -\frac{1}{u} (v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}) \quad (4.5)$$

$$\alpha_2 = \arctan \left(-\frac{v - b_c r}{u} \right) \simeq -\frac{v - b_c r}{u} \quad (4.6)$$

Der Bodenlenkungswinkel δ_G und der Sturzwinkel des Vorderreifens γ_1 werden im Folgenden mit Hilfe einer Transformation eines Einheitsvektors $\underline{e}_{s|s}$, der normal auf die Symmetrieebene steht und in die positive y -Richtung zeigt, vom Koordinatensystem der Gabel s in das Bezugssystem A ermittelt (siehe auch [19, 37]). Der Einheitsvektor im System A setzt sich nach den Transformationen mit den jeweiligen Drehmatrizen

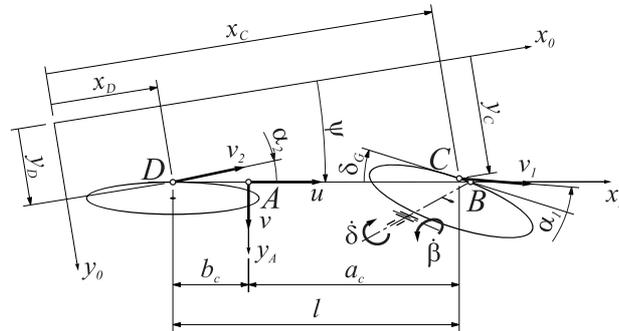


Abbildung 4.4: Draufsicht auf das Fahrradmodell in der Kurvenfahrt mit Gierwinkel ψ und den Schräglaufwinkeln α_i

vom System s (subframe) in f (front assembly), in m (mainframe) in A (Bezugssystem)

$$\begin{aligned}
\underline{e}_{s|s} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\underline{e}_{s|f} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \underline{e}_{s|s}, \\
\underline{e}_{s|m} &= \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{e}_{s|f}, \\
\underline{e}_{s|A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \underline{e}_{s|m},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

folgendermaßen zusammen:

$$\underline{e}_{s|A} = \begin{pmatrix} -\cos \varepsilon \sin \delta \cos \beta + \sin \varepsilon \sin \beta \\ -\cos \beta \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \beta \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \cos \varepsilon \sin \beta \\ \cos \beta \cos \varphi \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \beta \sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \cos \varepsilon \sin \beta \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Die beiden Winkel können aus den Komponenten des Einheitsvektors folgendermaßen berechnet werden (Linearisierung um die aufrechte Geradeausfahrt):

$$\delta_G = -\arctan \left(\frac{e_{s|A,x}}{e_{s|A,y}} \right) \simeq \cos \varepsilon \delta - \sin \varepsilon \beta \tag{4.9}$$

$$\gamma_1 = \arcsin (e_{s|A,z}) \simeq \varphi + \sin \varepsilon \delta + \cos \varepsilon \beta \tag{4.10}$$

Damit können die für die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Schräglauf- und Sturzwinkel der Reifen folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\alpha_1 = \cos \varepsilon \delta - \sin \varepsilon \beta - \frac{1}{u} (v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}) \tag{4.11}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{u} (v - b_c r) \tag{4.12}$$

$$\gamma_1 = \varphi + \sin \varepsilon \delta + \cos \varepsilon \beta \tag{4.13}$$

$$\gamma_2 = \varphi \tag{4.14}$$

4.2.2 Reifenkräfte und -Momente

Bei dem verwendeten Reifenmodell wird, da durch das Modell nur die unbeschleunigte Fahrt ohne Berücksichtigung von Fahrwiderständen beschrieben werden soll, keine Längskraft berücksichtigt. In Abbildung 4.5 sind die im fiktiven Kontaktpunkt angreifenden Kräfte und Momente eingezeichnet. Der fiktive Kontaktpunkt ist gegenüber dem

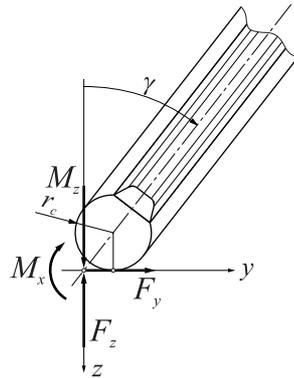


Abbildung 4.5: Kräfte und Momente am Fahrradreifen

realen Reifen-Fahrbahnkontaktpunkt, der mit dem Sturzwinkel in Richtung Kurvenmittelpunkt wandert, in den Schnittpunkt der Radsymmetrieebene mit der Fahrbahn verschoben.

Im Folgenden sollen kurz die im Kontaktpunkt wirkenden Kräfte und Momente beschrieben werden. Für nähere Informationen bzw. ausführlichere Erklärungen inklusive Skizzen wird auf einschlägige Literatur wie beispielsweise [19, 20] verwiesen.

Aufstandskraft F_z

Die Aufstandskräfte F_{zi} der beiden Räder können, da von einer unbeschleunigten Fahrt ohne Berücksichtigung von Fahrwiderständen ausgegangen wird und daher keine Veränderungen der Radlasten auftreten, aus dem statischen Gleichgewicht des aufrechten Fahrrades berechnet werden.

Seitenkraft F_y

Sowohl ein Schräglauf- als auch ein Sturzwinkel eines Reifens tragen zur Seitenkraftgenerierung F_{yi} bei.

Die vom Schräglaufwinkel erzeugte Komponente folgt aus einer vom Schräglaufwinkel im Reifenlatsch hervorgerufenen in Querrichtung wirkenden Schubspannung.

Die vom Radsturz erzeugte Seitenkraftkomponente ist eine Folge der Reifendehformation. Durch diese durchläuft ein am Reifenumfang im Bereich des Latsch liegender Punkt keine elliptische Bewegungsbahn, sondern verlässt diese im Bereich des Latsch aufgrund des Kontakts zur Fahrbahn in eine geradlinige Bewegungsbahn. Diese Veränderung der Bewegungsbahn ruft eine in die Richtung des Sturzwinkels zeigende Seitenkraft hervor [20].

Für kleine Schräglauf- und Sturzwinkel kann mithilfe der Schräglauf- $c_{F\alpha i}$ und Sturzsteifigkeiten $c_{F\gamma i}$ ein linearer Zusammenhang der Seitenkraft F_{yi} mit diesen beiden Winkeln definiert werden:

$$F_{yi} = c_{F\alpha i} \alpha'_i + c_{F\gamma i} \gamma'_i \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.15)$$

Die Winkeln α'_i und γ'_i stehen für deren transiente Winkeln, welche im Zuge der Berücksichtigung der Einlauflänge im folgenden eingeführt werden.

Rückstellmoment M_z

Das Rückstellmoment um die z -Achse zufolge eines Schräglaufwinkels wird durch die Querschubspannungsverteilung im Latsch, welche nicht symmetrisch bezüglich des Kontaktpunktes (in Längsrichtung) ist, hervorgerufen. Die daraus resultierende Seitenkraft greift folglich nicht im modellierten Kontaktpunkt an, sondern ist gegenüber diesem um den Abstand $t_{\alpha 0i}$, dem pneumatischen Nachlauf, versetzt.

Ebenso wird durch den Sturzwinkel ein Moment um die z -Achse infolge der über die Latschbreite asymmetrischen Längsschubspannungsverteilung hervorgerufen [19].

Darüber hinaus wird auch von einer Längskraft in Verbindung mit einem Sturzwinkel des Reifens durch den Abstand des realen zum modellierten Kontaktpunkt ein Moment um die z -Achse hervorgerufen. Da in dieser Arbeit nur die unbeschleunigte Fahrt ohne Fahrwiderstände betrachtet wird, ist eine Berücksichtigung des letzten Momentes nicht erforderlich.

Für kleine Schräglauf- und Sturzwinkel kann das linearisierte Rückstellmoment mit den Rückstellmomentensteifigkeiten $c_{M\alpha i}$ und $c_{M\gamma i}$ über folgenden Zusammenhang definiert werden:

$$M_{zi} = -c_{M\alpha i}\alpha'_i + c_{M\gamma i}\gamma'_i \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.16)$$

Durch Einführen des bereits erwähnten pneumatischen Nachlaufs der Seitenkraft infolge des Schräglaufwinkels $t_{\alpha 0i}$ bzw. infolge des Sturzwinkels $t_{\gamma 0i}$ kann folgender Zusammenhang zwischen den Steifigkeiten hergestellt werden:

$$\begin{aligned} c_{M\alpha i} &= t_{\alpha 0i}c_{F\alpha i} \\ c_{M\gamma i} &= t_{\gamma 0i}c_{F\gamma i} \end{aligned} \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.17)$$

Kippmoment - Overtuning Couple M_x

Das in Abbildung 4.5 eingezeichnete Kippmoment, im Englischen als *Overtuning Couple* bezeichnet, ist eine Folge der Verschiebung des Bezugspunktes vom realen Kontaktpunkt in den in der Radsymmetrieebene liegenden fiktiven Kontaktpunkt. Durch die Verwendung des fiktiven Kontaktpunktes als Bezugspunkt für das Reifenmodell muss das um diesen Punkt angreifende Moment $F_z r_c \tan \gamma$ ausgeglichen werden. Linearisiert ergibt sich mit der Kippmomentensteifigkeit $c_{Mx\gamma i} = F_z r_c$ folgender Zusammenhang:

$$M_{xi} = -c_{Mx\gamma i}\gamma_i \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.18)$$

Einlauflänge

Mit dem Reifenmodell soll auch das Einlaufverhalten der Seitenkraft F_y und des Rückstellmomentes M_z bei Änderungen des Schräglauf- und Sturzwinkels berücksichtigt

werden. Für das Kippmoment M_x wird angenommen, dass es ohne Verzögerung auf eine Sturzwinkeländerung reagiert. Zur Beschreibung des instationären Einlaufverhaltens wird angenommen, dass die Reifenkräfte und -momente ein Übertragungsverhalten erster Ordnung aufweisen, wobei die Einlaufänge (Relaxationslänge) σ als Parameter der Übertragungsfunktion dient. Die Kräfte und Momente bauen sich also über einen gewissen zurückgelegten Weg auf.

Es werden dafür die transienten Schräglauf- α'_i und Sturzwinkeln γ'_i über die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \alpha_i}{u} \dot{\alpha}'_i + \alpha'_i &= \alpha_i \\ \frac{\sigma \gamma_i}{u} \dot{\gamma}'_i + \gamma'_i &= \gamma_i \end{aligned} \quad , \quad i \in \{1, 2\} \quad (4.19)$$

berechnet.

4.3 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen wurden durch Anwendung eines Mehrkörperformalismus für die Kinematik und des d-Alembert's Prinzips, unter Vernachlässigung von Fahrkräften in Längsrichtung wie z.B. Luft- und Rollwiderstand und der Beschleunigung in Längsrichtung, hergeleitet und anschließend für die aufrechte Geradeausfahrt linearisiert. Genauer über die Vorgangsweise kann aus [37, 46] entnommen werden.

In Abbildung 4.1 sind die Schwerpunktslagen über der Fahrbahn mit h_i bezeichnet, im Gegensatz dazu wird in den folgenden Gleichungen (konsistent mit dem Koordinatensystem in Punkt A siehe Abbildung 4.2) der Abstand $z_i = -h_i$ verwendet.

Der Trägheitstensor von jedem der vier Massepunkte wird für diese Arbeit entsprechend der folgenden Konvention im jeweiligen Koordinatensystem festgelegt mit:

$$\mathbf{I}_{i|i} = \begin{pmatrix} I_{i\,xx|i} & 0 & -I_{i\,xz|i} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{i\,xz|i} & 0 & I_{i\,zz|i} \end{pmatrix} \quad , \quad i \in \{m, r, f, s\} \quad (4.20)$$

Aufgrund der Symmetrie des Fahrrades werden die Massenträgheitsmomente um die y -Achse für die linearisierte Bewegungsgleichung (kein Nicken aufgrund der Linearisierung) nicht benötigt.

Zur Vereinfachung der linearisierten Bewegungsgleichungen werden zusammenfassende Ausdrücke gebildet. Die Größen für das Gesamtsystem (T - total system) berechnen sich zu ($a_m = 0\text{m}$):

$$m_T = m_m + m_f + m_s + m_r \quad (4.21)$$

$$a_T = (m_f a_f + m_s a_s + m_r a_r) / m_T \quad (4.22)$$

$$z_T = (m_m z_m + m_f z_f + m_s z_s + m_r z_r) / m_T \quad (4.23)$$

Die Massenträgheits- bzw. Deviationsmomente des Gesamtsystems bezogen auf das Koordinatensystem im Bezugspunkt A setzen sich folgendermaßen zusammen:

$$I_{Txx|A} = I_{mxx|m} + m_m z_m^2 + (I_{fxx|f} + I_{sxx|s}) \cos^2 \varepsilon + (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \sin^2 \varepsilon - 2(I_{fzx|f} + I_{sxz|s}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f z_f^2 + m_s z_s^2 + I_{rxx|r} + m_r z_r^2 \quad (4.24)$$

$$I_{Tzz|A} = I_{mzz|m} + (I_{fxx|f} + I_{sxx|s}) \sin^2 \varepsilon + (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \cos^2 \varepsilon + 2(I_{fzx|f} + I_{sxz|s}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f a_f^2 + m_s a_s^2 + I_{rzz|r} + m_r a_r^2 \quad (4.25)$$

$$I_{Tzx|A} = -I_{mzx|m} - (I_{fxx|f} + I_{sxx|s} - I_{fzz|f} - I_{szz|s}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (I_{fzx|f} + I_{sxz|s})(1 - 2 \cos^2 \varepsilon) - m_f a_f z_f - m_s a_s z_s - I_{rxz|r} - m_r a_r z_r \quad (4.26)$$

Ebenso werden die Massen von Lenker f und der Baugruppe von Gabel und Vorderrad s zu einem Gesamtsystem H , der vorderen Baugruppe, zusammengefasst. Die Größe e_H gibt dabei den Abstand des Schwerpunkts von der Lenkachse (positiv in Fahrtrichtung) an:

$$m_H = m_f + m_s \quad (4.27)$$

$$e_H = (m_f e_f + m_s e_s) / m_H \quad (4.28)$$

Für die vordere Baugruppe H werden folgende drei spezielle Massenträgheits- bzw. Deviationsmomente benötigt: Das Massenträgheitsmoment um die Lenkachse δ sowie zwei Deviationsmomente relativ zu zwei gekreuzten nicht normal aufeinander stehenden Achsen (Lenkachse δ mit x_A - bzw. z_A -Achse) um den Schnittpunkt dieser Achsen. Die beiden letzten Massenträgheitsmomente geben dabei das Moment um eine der beiden Achsen an, welches durch eine Winkelbeschleunigung um die andere Achse hervorgerufen wird. Beispielsweise ist die δx_A Komponente um den Schnittpunkt der Lenkachse mit der Fahrbahn (Punkt B) angesetzt (siehe auch [33]).

$$I_{H\delta\delta} = I_{fzz|f} + I_{szz|s} + m_f e_f^2 + m_s e_s^2 \quad (4.29)$$

$$I_{H\delta x_A} = (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \sin \varepsilon - (I_{fzx|f} + I_{sxz|s}) \cos \varepsilon - m_f e_f z_f - m_s e_s z_s \quad (4.30)$$

$$I_{H\delta z_A} = (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \cos \varepsilon + (I_{fzx|f} + I_{sxz|s}) \sin \varepsilon + m_f a_f e_f + m_s a_s e_s \quad (4.31)$$

Das Massenträgheits- bzw. Deviationsmoment der Gabel s wird auf die β -Achse bzw. βx_A , βz_A und $\beta \delta$ -Achsen bezogen. Die Vorgangsweise ist dabei gleich wie für die vordere Baugruppe:

$$I_{s\beta\beta} = I_{sxx|s} + m_s s_s^2 \quad (4.32)$$

$$I_{s\beta x_A} = I_{sxx|s} \cos \varepsilon - I_{sxz|s} \sin \varepsilon + m_s s_s z_s \quad (4.33)$$

$$I_{s\beta z_A} = -I_{sxx|s} \sin \varepsilon - I_{sxz|s} \cos \varepsilon - m_s a_s s_s \quad (4.34)$$

$$I_{s\beta\delta} = -I_{sxz|s} - m_s e_s s_s \quad (4.35)$$

Für den Fahreroberkörper r wird das Massenträgheits- bzw. Deviationsmoment um die φ_r -Achse sowie die $\varphi_r x_A$ und $\varphi_r z_A$ -Achsen benötigt:

$$I_{r\varphi_r\varphi_r} = I_{rxx|r} + m_r s_r^2 \quad (4.36)$$

$$I_{r\varphi_r x_A} = I_{rxx|r} - m_r s_r z_r \quad (4.37)$$

$$I_{r\varphi_r z_A} = -I_{rxz|r} + m_r a_r s_r \quad (4.38)$$

Die gyroskopischen Koeffizienten der Räder setzen sich aus dem Quotienten der Massenträgheitsmomente der Räder um die y -Achse (Drehachse) und dem Abrolldurchmesser r_i des jeweiligen Reifens zusammen.

$$G_1 = I_{1yy|1}/r_1 \quad G_2 = I_{2yy|2}/r_2 \quad G_T = G_1 + G_2 \quad (4.39)$$

Des weiteren treten die folgenden statischen Momente um die Lenkachse bzw. um die β -Achse öfters auf:

$$S_\delta = m_T \frac{b_c + a_T}{l} t_c + m_H e_H \quad (4.40)$$

$$S_\beta = m_T \frac{b_c + a_T}{l} s_c - m_s s_s \quad (4.41)$$

Dabei stellt der Term $m_T(b_c + a_T)/l$ die im Kontaktpunkt des Vorderrades wirkende Masse des Fahrrades inkl. Fahrer dar.

Mit den zusammengefassten Größen können die für die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen folgendermaßen angeschrieben werden:

v :

$$m_T(\dot{v} + ur) + m_T a_T \dot{r} - m_T z_T \ddot{\varphi} + m_r s_r \ddot{\varphi}_r + m_H e_H \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} = F_{y1} + F_{y2} \quad (4.42)$$

r :

$$m_T a_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|A} \dot{r} + I_{Txz|A} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{r\varphi_r z_A} \ddot{\varphi}_r + I_{H\delta z_A} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{s\beta z_A} \ddot{\beta} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\beta} = a_c F_{y1} - b_c F_{y2} + M_{z1} + M_{z2} \quad (4.43)$$

φ :

$$-m_T z_T(\dot{v} + ur) + G_T ur + I_{Txx|A} \dot{r} + I_{Txx|A} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{r\varphi_r x_A} \ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \varphi_r + I_{H\delta x_A} \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta + I_{s\beta x_A} \ddot{\beta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\beta} - S_\beta g \beta = M_{x1} + M_{x2} \quad (4.44)$$

φ_r :

$$m_r s_r(\dot{v} + ur) + I_{r\varphi_r z_A} \dot{r} + I_{r\varphi_r x_A} \ddot{\varphi} - m_r s_r g \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \varphi_r - k_\delta \sin \varepsilon \dot{\delta} - c_\delta \sin \varepsilon \delta = M_{\varphi_r} - M_\delta \sin \varepsilon \quad (4.45)$$

δ :

$$m_H e_H(\dot{v} + ur) + G_1 \sin \varepsilon ur + I_{H\delta z_A} \dot{r} + I_{H\delta x_A} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + I_{H\delta \delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta + I_{s\beta \delta} \ddot{\beta} - G_1 u \dot{\beta} - S_\beta \sin \varepsilon g \beta = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon + M_\delta \quad (4.46)$$

β :

$$-m_s s_s(\dot{v} + ur) + G_1 \cos \varepsilon ur + I_{s\beta z_A} \dot{r} + I_{s\beta x_A} \ddot{\varphi} + G_1 \sin \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\beta g \varphi + I_{s\beta \delta} \ddot{\delta} + G_1 u \dot{\delta} - S_\beta \sin \varepsilon g \delta + I_{s\beta \beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta - S_\beta \cos \varepsilon g) \beta = -s_c F_{y1} + M_{x1} \cos \varepsilon - M_{z1} \sin \varepsilon \quad (4.47)$$

Das System kann nun mit den sechs Bewegungsgleichungen (4.42 – 4.47) unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.15 – 4.18) für die Reifenkräfte und -momente sowie den für das Reifenmodell benötigten vier Gleichungen für die transienten Schräglauf- und Sturzwinkeln (4.19) mit (4.11 – 4.14) als Eingangsgrößen mathematisch beschrieben werden.

4.4 Einfachere Modelle

4.4.1 Nichtholonome Reifenbindungen

Zum Vergleich der linearisierten Bewegungsgleichungen des Benchmark Modells, soll zunächst das verwendete Reifenmodell für die Reifen-Fahrbahn Kontaktpunkte durch in Querrichtung nichttrutschende Kontakte ersetzt werden – also durch nichtholonome Bindungen. Zur Vereinfachung der nachfolgenden kinematischen Zusammenhänge wird dafür zunächst die Kinematik nicht bezüglich dem bisher verwendeten Punkt A , sondern bezüglich dem Punkt D , dem Hinterradkontaktpunkt, angeschrieben. Damit gibt die Quergeschwindigkeit v nicht mehr die Quergeschwindigkeit des Punktes A sondern jene des Punktes D an. Durch diese Bezugspunktänderung werden in den zusammengefassten Größen die Abstände a_i durch die Abstände $x_i (= b_c + a_i)$ ersetzt (siehe auch nachfolgende Gleichungen).

Für die linearisierten Bewegungsgleichungen mit der Quergeschwindigkeit v des Punktes D müssen einige zusammenfassende Ausdrücke abgeändert werden. Dies sind für das Gesamtsystem T

$$x_T = (m_m x_m + m_f x_f + m_s x_s + m_r x_r) / m_T = b_c + a_T \quad (4.48)$$

$$I_{Txx|D} = I_{Txx|A} \quad (4.49)$$

$$I_{Tzz|D} = I_{mzz|m} + m_m x_m^2 + (I_{fxx|f} + I_{sxx|s}) \sin^2 \varepsilon + (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \cos^2 \varepsilon + 2(I_{fzx|f} + I_{sxx|s}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f x_f^2 + m_s x_s^2 + I_{rzz|r} + m_r x_r^2 \quad (4.50)$$

$$I_{Txz|D} = -I_{mzx|m} - m_m x_m z_m - (I_{fxx|f} + I_{sxx|s} - I_{fzz|f} - I_{szz|s}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (I_{fzx|f} + I_{sxx|s})(1 - 2 \cos^2 \varepsilon) - m_f x_f z_f - m_s x_s z_s - I_{rxx|r} - m_r x_r z_r, \quad (4.51)$$

die vordere Baugruppe H

$$I_{H\delta x_D} = I_{H\delta x_A} \quad (4.52)$$

$$I_{H\delta z_D} = (I_{fzz|f} + I_{szz|s}) \cos \varepsilon + (I_{fzx|f} + I_{sxx|s}) \sin \varepsilon + m_f x_f e_f + m_s x_s e_s, \quad (4.53)$$

die Gabel s

$$I_{s\beta x_D} = I_{s\beta x_A} \quad (4.54)$$

$$I_{s\beta z_D} = -I_{sxx|s} \sin \varepsilon - I_{sxx|s} \cos \varepsilon - m_s s_s x_s \quad (4.55)$$

und den Fahrer r

$$I_{r\varphi_r x_D} = I_{r\varphi_r x_A} \quad (4.56)$$

$$I_{r\varphi_r z_D} = -I_{rxz|r} + m_r s_r x_r. \quad (4.57)$$

Damit können die für die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen mit der Quergeschwindigkeit v des hinteren Aufstandpunktes D folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} v : \\ m_T(\dot{v} + ur) + m_T x_T \dot{r} - m_T z_T \ddot{\varphi} + m_r s_r \ddot{\varphi}_r + m_H e_H \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} = \\ F_{y1} + F_{y2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} r : \\ m_T x_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|D} \dot{r} + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\varphi}_r + I_{H\delta z_D} \ddot{\delta} - \\ G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{s\beta z_D} \ddot{\beta} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\beta} = lF_{y1} + M_{z1} + M_{z2} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \varphi : \\ -m_T z_T(\dot{v} + ur) + G_T ur + I_{Txx|D} \dot{r} + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{r\varphi_r x_D} \ddot{\varphi}_r - \\ m_r s_r g \varphi_r + I_{H\delta x_D} \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta + I_{s\beta x_D} \ddot{\beta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\beta} - S_\beta g \beta = \\ M_{x1} + M_{x2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \varphi_r : \\ m_r s_r(\dot{v} + ur) + I_{r\varphi_r z_D} \dot{r} + I_{r\varphi_r x_D} \ddot{\varphi} - m_r s_r g \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \dot{\varphi}_r + \\ (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \varphi_r - k_\delta \sin \varepsilon \dot{\delta} - c_\delta \sin \varepsilon \delta = M_{\varphi_r} - M_\delta \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \delta : \\ m_H e_H(\dot{v} + ur) + G_1 \sin \varepsilon ur + I_{H\delta z_D} \dot{r} + I_{H\delta x_D} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + \\ I_{H\delta \delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta + I_{s\beta \delta} \ddot{\beta} - G_1 u \dot{\beta} - S_\beta \sin \varepsilon g \beta = \\ -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon + M_\delta \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \beta : \\ -m_s s_s(\dot{v} + ur) + G_1 \cos \varepsilon ur + I_{s\beta z_D} \dot{r} + I_{s\beta x_D} \ddot{\varphi} + G_1 \sin \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\beta g \varphi + \\ I_{s\beta \delta} \ddot{\delta} + G_1 u \dot{\delta} - S_\beta \sin \varepsilon g \delta + I_{s\beta \beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta - S_\beta \cos \varepsilon g) \beta = \\ -s_c F_{y1} + M_{x1} \cos \varepsilon - M_{z1} \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die Bewegungsgleichungen (4.58 – 4.63) stimmen für beliebige Reifenquerkräfte F_{yi} in den Kontaktpunkten und damit auch für jene Kräfte, die genau so groß sind, dass kein Querschlupf in den Kontaktpunkten auftritt (d.h. $\alpha_i \equiv 0$). Setzt man solche Kräfte voraus, so bedeutet dies, dass die Quergeschwindigkeit v des Bezugspunktes D null ist, und damit ist auch $\dot{v} = 0$.

Für den Hinterradkontaktpunkt D kann damit die Geschwindigkeit in Querrichtung gegenüber dem Bezugssystem 0 (Inertialsystem) für einen kleinen Gierwinkel ψ durch

die Gleichung $v_{2|0,y} = u\psi$ angeschrieben werden (siehe Abbildung 4.4). Für das Vorderrad wird eine gleichwertige Bedingung von der Form $v_{1|0,y} = u\psi_1$ benötigt. Die Quergeschwindigkeit des Kontaktpunktes gegen das Inertialsystem 0 kann entsprechend Gleichung (4.3) unter Berücksichtigung des Bezugspunkts D und der nichtholonomen Bindungen für kleine Winkel mit der linearisierten Beziehung $v_{1|0,y} = u\psi + lr - t_c\dot{\delta} - s_c\dot{\beta}$ angegeben werden (vergleiche Abbildung 4.4). Der Winkel vom Vorderrad zum Inertialsystem 0 kann, mit Bezug auf den Bodenlenkungswinkel (4.9) und dem Gierwinkel ψ , durch die linearisierte Gleichung $\psi_1 = \psi + \cos \varepsilon \delta - \sin \varepsilon \beta$ identifiziert werden. Mit diesen Beziehungen erhält man Ausdrücke für r und \dot{r} in Abhängigkeit von $\delta, \dot{\delta}, \beta$ und $\dot{\beta}$. Die Bedingung für das Vorderrad kann somit folgendermaßen angeschrieben werden:

$$u\psi + lr - t_c\dot{\delta} - s_c\dot{\beta} = u\psi + u \cos \varepsilon \delta - u \sin \varepsilon \beta \quad (4.64)$$

Daraus erhält man nach Umformungen für r :

$$r = \frac{t_c}{l}\dot{\delta} + u\frac{\cos \varepsilon}{l}\delta + \frac{s_c}{l}\dot{\beta} - u\frac{\sin \varepsilon}{l}\beta \quad (4.65)$$

Differenziert man diesen Ausdruck einmal nach der Zeit, so erhält man für \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{t_c}{l}\ddot{\delta} + u\frac{\cos \varepsilon}{l}\dot{\delta} + \frac{s_c}{l}\ddot{\beta} - u\frac{\sin \varepsilon}{l}\dot{\beta} \quad (4.66)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für \dot{v} , r und \dot{r} in die Gleichungen (4.58 – 4.63) erhält man sechs Gleichungen mit den vier Unbekannten $\varphi, \varphi_r, \delta$ sowie β . Berücksichtigt man jedoch, dass die Seitenkräfte der Reifen nicht mehr beliebig, sondern gerade so groß sind, dass der Schräglaufwinkel des jeweiligen Reifens immer gleich null ist, so erkennt man, dass die Reifenquerkräfte jetzt die beiden fehlenden Unbekannten darstellen (Zwangskräfte).

Um vier Bewegungsgleichungen für die verbleibenden vier Freiheitsgrade ohne den beiden unbekanntem Zwangskräften zu erhalten, werden diese sechs Gleichungen entsprechend umgeformt. Die nach Einsetzen der obigen Ausdrücke erhaltenen Gleichungen aus (4.60) und (4.61) können bereits so übernommen werden, da sie die Seitenkräfte F_{yi} der Reifen nicht beinhalten. In den Gleichungen vom Lenkwinkel δ (4.62) und vom Ersatzverdrehwinkel der Rahmen-, Lenkkopf- und Gabelflexibilität β (4.63) kann durch Addition mit der mit t_c/l bzw. s_c/l multiplizierten Gleichung der Gierrate r (4.59) die unbekannte Seitenkraft des Vorderreifens eliminiert werden. Man erhält damit, unter Vernachlässigung der im Reifen-Fahrbahn Kontakt wirkenden Momente, die folgenden vier Bewegungsgleichungen:

φ :

$$\begin{aligned} & I_{Txx|D}\ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{r\varphi_r x_D}\ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \varphi_r + \\ & [I_{H\delta x_D} + \mu I_{T_x z|D}] \ddot{\delta} + [G_1 \cos \varepsilon + \mu(-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{T_x z|D}] u \dot{\delta} + \\ & [-S_\delta g + \zeta(-m_T z_T + G_T)u^2] \delta + \\ & [I_{s\beta x_D} + \eta I_{T_x z|D}] \ddot{\beta} + [-G_1 \sin \varepsilon + \eta(-m_T z_T + G_T) + \kappa I_{T_x z|D}] u \dot{\beta} + \\ & [-S_\beta g + \kappa(-m_T z_T + G_T)u^2] \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

φ_r :

$$\begin{aligned} & I_{r\varphi_r x_D} \ddot{\varphi} - m_r s_r g \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \varphi_r + \\ & \mu I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\delta} + [-k_{\delta} \sin \varepsilon + (\mu m_r s_r + \zeta I_{r\varphi_r z_D}) u] \dot{\delta} + [-c_{\delta} \sin \varepsilon + \zeta m_r s_r u^2] \delta + \\ & \eta I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\beta} + (\eta m_r s_r + \kappa I_{r\varphi_r z_D}) u \dot{\beta} + \kappa m_r s_r u^2 \beta = M_{\varphi_r} - M_{\delta} \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.68)$$

δ :

$$\begin{aligned} & [I_{H\delta x_D} + \mu I_{T_{xz}|D}] \ddot{\varphi} - [G_1 \cos \varepsilon + \mu G_T] u \dot{\varphi} - S_{\delta} g \varphi + \mu I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\varphi}_r + \\ & [I_{H\delta\delta} + \mu(2I_{H\delta z_D} + \mu I_{T_{zz}|D})] \ddot{\delta} + [k_{\delta} + [\zeta I_{H\delta z_D} + \mu(S_{\delta} + \zeta I_{T_{zz}|D})] u] \dot{\delta} + \\ & [c_{\delta} - S_{\delta} \sin \varepsilon g + \zeta(S_{\delta} + G_1 \sin \varepsilon) u^2] \delta + \\ & [I_{s\beta\delta} + \eta I_{H\delta z_D} + \mu(I_{s\beta z_D} + \eta I_{T_{zz}|D})] \ddot{\beta} + \\ & [-G_1 + \eta(S_{\delta} + G_1 \sin \varepsilon) + \kappa I_{H\delta z_D} + \mu(-G_1 \cos \varepsilon + \kappa I_{T_{zz}|D})] u \dot{\beta} + \\ & [-S_{\beta} \sin \varepsilon g + \kappa(S_{\delta} + G_1 \sin \varepsilon) u^2] \beta = M_{\delta} \end{aligned} \quad (4.69)$$

β :

$$\begin{aligned} & [I_{s\beta x_D} + \eta I_{T_{xz}|D}] \ddot{\varphi} + [G_1 \sin \varepsilon - \eta G_T] u \dot{\varphi} - S_{\beta} g \varphi + \eta I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\varphi}_r + \\ & [I_{s\beta\delta} + \mu I_{s\beta z_D} + \eta(I_{H\delta z_D} + \mu I_{T_{zz}|D})] \ddot{\delta} + \\ & [G_1 + \mu(S_{\beta} + G_1 \cos \varepsilon) + \zeta I_{s\beta z_D} + \eta(-G_1 \sin \varepsilon + \zeta I_{T_{zz}|D})] u \dot{\delta} + \\ & [-S_{\beta} \sin \varepsilon g + \zeta(S_{\beta} + G_1 \cos \varepsilon) u^2] \delta + [I_{s\beta\beta} + \eta(2I_{s\beta z_D} + \eta I_{T_{zz}|D})] \ddot{\beta} + \\ & [k_{\beta} + [\kappa I_{s\beta z_D} + \eta(S_{\beta} + \kappa I_{T_{zz}|D})] u] \dot{\beta} + \\ & [c_{\beta} - S_{\beta} \cos \varepsilon g + \kappa(S_{\beta} + G_1 \cos \varepsilon) u^2] \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

mit den neuen Größen:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{t_c}{l} & \zeta &= \frac{\cos \varepsilon}{l} \\ \eta &= \frac{s_c}{l} & \kappa &= \frac{\sin \varepsilon}{l} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Die aus (4.58) und (4.59) nach Einsetzen der Beziehungen für die nichtholonomen Bedingungen entstehenden Gleichungen können zur Bestimmung der unbekanntenen Reifenzwangskräfte F_{y_i} herangezogen werden.

4.4.2 Benchmark Modell inkl. Fahrer

Beim Whipple- oder Benchmark-Modell sind weder ein Rollfreiheitsgrad des Fahrers noch die Rahmenflexibilität berücksichtigt. Das Modell für die hier angeführten Gleichungen stellt also eine Erweiterung dieses Grundmodells um den Rollfreiheitsgrad φ_r des Fahrers dar. Es eignet sich beispielsweise aufgrund der Fahrermodellierung mit dem inneren Lenk- und Rollmoment als Eingangsgrößen recht gut für eine Fahrerreglerauslegung, da die hochfrequente Wobble-Schwingung, welche vom Fahrer nicht ausgeglet werden kann, von diesem Modell nicht abgebildet wird.

Die Bewegungsgleichungen der einfacheren Modelle (Benchmark Modell und Benchmark Modell mit Fahrer) erhält man aus den obigen Bewegungsgleichungen durch Weglassen der Terme, die beim jeweiligen Freiheitsgrad stehen, der bei diesem Modell nicht mehr vorkommt bzw. bei einer Matrixschreibweise durch Streichen der jeweiligen Zeile und Spalte aus den Matrizen.

Die Bewegungsgleichungen des Modells mit Berücksichtigung eines Querschlupfs der Reifen und der Quergeschwindigkeit v des Punktes A lauten:

$$v : \quad m_T(\dot{v} + ur) + m_T a_T \dot{r} - m_T z_T \ddot{\varphi} + m_r s_r \ddot{\varphi}_r + m_H e_H \ddot{\delta} = F_{y1} + F_{y2} \quad (4.72)$$

$$r : \quad m_T a_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|A} \dot{r} + I_{Txx|A} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{r\varphi_r z_A} \ddot{\varphi}_r + I_{H\delta z_A} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} = a_c F_{y1} - b_c F_{y2} + M_{z1} + M_{z2} \quad (4.73)$$

$$\varphi : \quad -m_T z_T(\dot{v} + ur) + G_T ur + I_{Txx|A} \dot{r} + I_{Txx|A} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{r\varphi_r x_A} \ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \varphi_r + I_{H\delta x_A} \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta = M_{x1} + M_{x2} \quad (4.74)$$

$$\varphi_r : \quad m_r s_r(\dot{v} + ur) + I_{r\varphi_r z_A} \dot{r} + I_{r\varphi_r x_A} \ddot{\varphi} - m_r s_r g \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \varphi_r - k_\delta \sin \varepsilon \dot{\delta} - c_\delta \sin \varepsilon \delta = M_{\varphi_r} - M_\delta \sin \varepsilon \quad (4.75)$$

$$\delta : \quad m_H e_H(\dot{v} + ur) + G_1 \sin \varepsilon ur + I_{H\delta z_A} \dot{r} + I_{H\delta x_A} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \varphi + I_{H\delta \delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon + M_\delta \quad (4.76)$$

Führt man nichtholonome Bindungen in den Reifen-Fahrbahn Kontaktpunkten ein, so erhält man die folgenden drei linearisierten Bewegungsgleichungen:

$$\varphi : \quad I_{Txx|D} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{r\varphi_r x_D} \ddot{\varphi}_r - m_r s_r g \varphi_r + [I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D}] \ddot{\delta} + [G_1 \cos \varepsilon + \mu(-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txx|D}] u \dot{\delta} + [-S_\delta g + \zeta(-m_T z_T + G_T) u^2] \delta = 0 \quad (4.77)$$

$$\varphi_r : \quad I_{r\varphi_r x_D} \ddot{\varphi} - m_r s_r g \varphi + I_{r\varphi_r \varphi_r} \ddot{\varphi}_r + k_{\varphi_r} \dot{\varphi}_r + (c_{\varphi_r} - m_r s_r g) \varphi_r + \mu I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\delta} + [-k_\delta \sin \varepsilon + (\mu m_r s_r + \zeta I_{r\varphi_r z_D}) u] \dot{\delta} + [-c_\delta \sin \varepsilon + \zeta m_r s_r u^2] \delta = M_{\varphi_r} - M_\delta \sin \varepsilon \quad (4.78)$$

$$\delta : \quad [I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D}] \ddot{\varphi} - [G_1 \cos \varepsilon + \mu G_T] u \dot{\delta} - S_\delta g \varphi + \mu I_{r\varphi_r z_D} \ddot{\varphi}_r + [I_{H\delta \delta} + \mu(2I_{H\delta z_D} + \mu I_{Tzz|D})] \ddot{\delta} + [k_\delta + [\zeta I_{H\delta z_D} + \mu(S_\delta + \zeta I_{Tzz|D})] u] \dot{\delta} + [c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g + \zeta(S_\delta + G_1 \sin \varepsilon) u^2] \delta = M_\delta \quad (4.79)$$

4.4.3 Benchmark Modell

Um einen Vergleich der im Zuge der Diplomarbeit hergeleiteten Bewegungsgleichungen mit jenen in der Literatur angegebenen machen zu können, werden hier auch die Gleichungen für das einfache Whipple- oder Benchmark-Modell, sowohl mit Berücksichtigung des Querschlupfs an den Reifen als auch mit der Modellierung von nichtholonomen Bindungen in den Reifen-Fahrbahn Kontaktpunkten, angegeben.

Modell mit Berücksichtigung des Querschlupfs der Reifen und der Quergeschwindigkeit v des Punktes A :

$$v : \quad m_T(\dot{v} + ur) + m_T a_T \dot{r} - m_T z_T \ddot{\varphi} + m_H e_H \ddot{\delta} = F_{y1} + F_{y2} \quad (4.80)$$

$$r : \quad m_T a_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|A} \dot{r} + I_{Txx|A} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{H\delta z_A} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} = \quad (4.81) \\ a_c F_{y1} - b_c F_{y2} + M_{z1} + M_{z2}$$

$$\varphi : \quad -m_T z_T(\dot{v} + ur) + G_T ur + I_{Txx|A} \dot{r} + I_{Txx|A} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + I_{H\delta x_A} \ddot{\delta} + \quad (4.82) \\ G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta = M_{x1} + M_{x2}$$

$$\delta : \quad m_H e_H(\dot{v} + ur) + G_1 \sin \varepsilon ur + I_{H\delta z_A} \dot{r} + I_{H\delta x_A} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + \quad (4.83) \\ I_{H\delta\delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon + M_\delta$$

Bewegungsgleichungen für nichtholonome Bindungen in den Reifen-Fahrbahn Kontaktpunkten:

$$\varphi : \quad I_{Txx|D} \ddot{\varphi} + m_T z_T g \varphi + [I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D}] \ddot{\delta} + \quad (4.84) \\ [G_1 \cos \varepsilon + \mu(-m_T z_T + G_T) + \zeta I_{Txx|D}] u \dot{\delta} + \\ [-S_\delta g + \zeta(-m_T z_T + G_T) u^2] \delta = 0$$

$$\delta : \quad [I_{H\delta x_D} + \mu I_{Txx|D}] \ddot{\varphi} - [G_1 \cos \varepsilon + \mu G_T] u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + \quad (4.85) \\ [I_{H\delta\delta} + \mu(2I_{H\delta z_D} + \mu I_{Tzz|D})] \ddot{\delta} + [k_\delta + [\zeta I_{H\delta z_D} + \mu(S_\delta + \zeta I_{Tzz|D})] u] \dot{\delta} + \\ [c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g + \zeta(S_\delta + G_1 \sin \varepsilon) u^2] \delta = M_\delta$$

4.5 Parameterwerte

Das Testfahrrad wurde bereits bei der Diplomarbeit von Herrn Angrosch verwendet, daher konnten auch dessen Werte für die Fahrradparameter und den Fahrer aus [37]

übernommen werden. Die Daten des Fahrers wurden darin von einem anthropometrischen Modell aus [6, 36] für das 50. Perzentil übernommen. Wenn Abweichungen beim Überprüfen der Parameter festgestellt wurden, so sind die entsprechenden Werte korrigiert worden. In der Tabelle 4.1 sind die verwendeten Parameterwerte angeführt.

Um die Abstände zwischen Lenkachse und Lenkerschwerpunkt e_f bzw. Gabelschwerpunkt e_s sowie den Abstand zwischen β -Achse und Gabelschwerpunkt s_s aus den in der Tabelle 4.1 angegebenen Werten berechnen zu können, kann man zunächst die Zusammenhänge für die Berechnung der Schwerpunktskoordinaten, ausgehend vom Bezugspunkt A , in Abhängigkeit von den Abständen e_i und s_i (Abstand der Schwerpunkte zur β -Achse mit positiver Zählrichtung – gleich wie die z -Achsenrichtung – nach unten) anschreiben (vergleiche Abbildung 4.1).

$$\begin{aligned} a_i &= a_c + t_c \cos \varepsilon - (s_c - s_i) \sin \varepsilon + e_i \cos \varepsilon \\ z_i &= -t_c \sin \varepsilon - (s_c - s_i) \cos \varepsilon - e_i \sin \varepsilon \end{aligned} \quad , \quad i \in \{f, s\} \quad (4.86)$$

Aus diesen Gleichungen kann man durch Umformen die unbekanntenen Abstände

$$\begin{aligned} e_i &= (a_i - a_c) \cos \varepsilon - t_c - z_i \sin \varepsilon \\ s_i &= s_c + (a_i - a_c) \sin \varepsilon + z_i \cos \varepsilon \end{aligned} \quad , \quad i \in \{f, s\} \quad (4.87)$$

berechnen.

Die Werte der Rahmensteifigkeit und Dämpfung wurden zunächst ebenfalls übernommen, mussten jedoch abgeändert werden, um die bei Messungen ermittelten Wobble-Frequenzen sowie das Auf- bzw. Abklingverhalten der Wobble-Schwingung mit der Berechnung abbilden zu können. Die Ersatzfedersteifigkeit und -dämpfung zwischen Fahreroberkörper und Beinen wurden wie in [37] aus der Literatur [24] übernommen. Da in der späteren Analyse nur das freihändige Fahren betrachtet wird, wurde die Steifigkeit bzw. Dämpfung zwischen Fahrer und Lenker zu $k_\delta = 0\text{Nm/rad}$ bzw. $c_\delta = 0\text{Nms/rad}$ gewählt (siehe Tabelle 4.2)

Die Werte der Reifenparameter orientieren sich an Werten bzw. den angegebenen Bereichen in [35] und wurden, entsprechend Tabelle 4.3, in Abhängigkeit von der Aufstandskraft F_{zi} , unter Berücksichtigung der Messergebnisse gewählt.

Bezeichnung	Symbol	Wert	
Radstand	l	1,095	m
Nachlauf	t_c	0,0692	m
Gelenkabstand	s_c	0,8582	m
Lenkachsenwinkel	ε	19	°
<i>Rahmen inklusive Beine des Fahrers und Hinterrad m</i>			
Schwerpunktslage	$(b_c \ z_m)$	(0,3321 -0,6905)	m
Masse	m_m	43,1059	kg
Trägheitstensor	$\begin{pmatrix} I_{mxx m} & 0 & -I_{mzx m} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{mzx m} & 0 & I_{mzz m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,6257 & 0 & -0,7700 \\ 0 & * & 0 \\ -0,7700 & 0 & 2,4248 \end{pmatrix}$	kgm ²
<i>Lenker f</i>			
Schwerpunktslage	$(a_f \ z_f)$	(0,5564 -1,0292)	m
Masse	m_f	1,6288	kg
Trägheitstensor	$\begin{pmatrix} I_{fxx f} & 0 & -I_{fzx f} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{fzx f} & 0 & I_{fzz f} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0568 & 0 & 0,0010 \\ 0 & * & 0 \\ 0,0010 & 0 & 0,0566 \end{pmatrix}$	kgm ²
<i>Gabel und Vorderreifen s</i>			
Schwerpunktslage	$(a_s \ z_s)$	(0,6881 -0,4848)	m
Masse	m_s	4,3500	kg
Trägheitstensor	$\begin{pmatrix} I_{sxx s} & 0 & -I_{sxz s} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{sxz s} & 0 & I_{szz s} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2075 & 0 & -0,0129 \\ 0 & * & 0 \\ -0,0129 & 0 & 0,0697 \end{pmatrix}$	kgm ²
<i>Fahreroberkörper</i>			
Schwerpunktslage	$(a_r \ z_r)$	(-0,0322 -1,3550)	m
Masse	m_r	55,3700	kg
Trägheitstensor	$\begin{pmatrix} I_{rxx r} & 0 & -I_{rxz r} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{rxz r} & 0 & I_{rzz r} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3,0704 & 0 & 0,3310 \\ 0 & * & 0 \\ 0,3310 & 0 & 2,0480 \end{pmatrix}$	kgm ²
<i>Daten der Laufräder</i>			
Abrollradius Vorderrad	r_1	0,3355	m
MTRM ¹ Vorderrad	$I_{1yy 1}$	0,1266	kgm ²
Abrollradius Hinterrad	r_2	0,3355	m
MTRM ¹ Hinterrad	$I_{2yy 2}$	0,1296	kgm ²

¹ MTRM ... Massenträgheitsmoment

Tabelle 4.1: Parameterwerte von Fahrrad und Fahrer

Bezeichnung	Symbol	Wert	
Rahmensteifigkeit	c_β	4469	Nm/rad
Rahmendämpfung	k_β	23	Nms/rad
Steifigkeit Fahreroberkörper - Füße	c_{φ_r}	760	Nm/rad
Dämpfung Fahreroberkörper - Füße	k_{φ_r}	34	Nms/rad
Steifigkeit Fahreroberkörper - Lenker	c_{φ_r}	0	Nm/rad
Dämpfung Fahreroberkörper - Lenker	k_{φ_r}	0	Nms/rad

Tabelle 4.2: Parameterwerte für die Feder- und Dämpferelemente

Bezeichnung	Symbol	Wert	
Schräglaufwinkelsteifigkeit - VR ²	$c_{F\alpha 1}$	0,35	$180/\pi F_{z1}$ N/rad
Sturzwinkelsteifigkeit - VR	$c_{F\gamma 1}$		F_{z1} N/rad
Rückstellmoment durch Schräglauf - VR	$c_{M\alpha 1}$	0,014	$c_{F\alpha 1}$ Nm/rad
Rückstellmoment durch Sturz - VR	$c_{M\gamma 1}$	0,014	$c_{F\gamma 1}$ Nm/rad
Kippmomentensteifigkeit durch Sturz - VR	$c_{Mx 1}$	0,01	F_{z1} Nm/rad
Relaxationslänge - VR	σ_1	0,03	m
Schräglaufwinkelsteifigkeit - HR ³	$c_{F\alpha 2}$	0,35	$180/\pi F_{z2}$ N/rad
Sturzwinkelsteifigkeit - HR	$c_{F\gamma 2}$		F_{z2} N/rad
Rückstellmoment durch Schräglauf - HR	$c_{M\alpha 2}$	0,02	$c_{F\alpha 2}$ Nm/rad
Rückstellmoment durch Sturz - HR	$c_{M\gamma 2}$	0,02	$c_{F\gamma 2}$ Nm/rad
Kippmomentensteifigkeit durch Sturz - HR	$c_{Mx 2}$	0,01	F_{z2} Nm/rad
Relaxationslänge - HR	σ_2	0,03	m

² VR ... Vorderreifen³ HR ... Hinterreifen

Tabelle 4.3: Parameterwerte der Reifen

Kapitel 5

Messeinrichtung und Messsignalauswertung

Zum Vergleich von numerischen Ergebnissen mit Beobachtungen von Testfahrten wurde das Testfahrrad mit Messgeräten ausgerüstet. Das verwendete Testfahrrad ist ein Damen-Trekkingrad des Typs Trentino Light mit einer Rahmengröße von 51cm, das dankenswerterweise von der Firma *KTM-Fahrrad GmbH* zur Verfügung gestellt wurde. Um die Berechnungsergebnisse durch Testfahrten überprüfen zu können, wurden die in Kapitel 4.5 angegebenen Parameterwerte für dieses Fahrrad inklusive Messausrüstung ermittelt.

In diesem Kapitel wird auf die Messausrüstung sowie auf die Testfahrten und die Messsignalauswertung näher eingegangen.

5.1 Verwendete Messausrüstung

Die Abbildung 5.1 zeigt das Testfahrrad inklusive der angebrachten Messausrüstung. Eine Auflistung der Messausrüstung, welche zum überwiegenden Teil von der Firma *Race Technology* [41] bezogen wurde, ist in Tabelle 5.1 angegeben.

Für die Aufzeichnung der Messsignale wird ein Datenlogger mit der Bezeichnung DL2, der die Sensorsignale mit einer Abtastrate von bis zu 100Hz ermittelt und auf eine *compact flash card* abspeichert, verwendet. Dieser ist auf dem Gepäckträger in einer Aluminiumverkleidung befestigt und stellt über den integrierten Akku auch die benötigte Spannungsversorgung für die Sensoren bereit.

Der ebenfalls in der Alu-Box untergebrachte IMU06 Trägheitssensor misst Beschleunigungen bis zu $10g$ und Winkelgeschwindigkeiten bis zu $300^\circ/s$ in je 3 Achsen. Zur Geschwindigkeits- und Positionsbestimmung ist darüber hinaus auf der Aluminiumverkleidung noch eine 20Hz GPS-Antenne angebracht.

Aufgrund der Positionierung der beiden Sensoren auf dem Gepäckträger beziehen sich die gemessenen Daten auf das im Rahmen m fixierte Koordinatensystem. Es ist daher



Abbildung 5.1: Testrad mit Messausrüstung

Hersteller	Herstellerbezeichnung	Messgröße
Race Technology	DL2 Data Logger	Datenspeicherung; GPS-Position und -Geschwindigkeit
Race Technology	IMU06	Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten in 3-Achsen
Race Technology	Wheel Speed Sensor	Geschwindigkeit
Race Technology	Throttle Position Sensor	Lenkwinkel
ContourHD	ContourHD 1080p	Videoaufzeichnung

Tabelle 5.1: Verwendete Messausrüstung

eine Transformation der von den beiden Sensoren gemessenen Werte in den fiktiven Bezugspunkt A erforderlich (siehe Kapitel 5.3). Die Transformation der an der GPS-Antenne gemessenen Geschwindigkeit erweist sich im Hinblick auf eine ausreichende Genauigkeit aufgrund der Roll- und Gierbewegung als äußerst schwierig. Erschwerend kommt noch hinzu, dass das GPS-Signal aufgrund der neben der Teststrecke stehenden hohen Häuser an Qualität verliert und die Messung daher mit einem zusätzlichen Fehler behaftet ist. Als Konsequenz wurde ein zusätzlicher Raddrehzahlsensor, der auf dem Hall-Effekt beruht, beim Hinterrad angebracht (siehe Abbildung 5.2). Die für den Sensor benötigte Metallscheibe besitzt 50 „Zähne“, wodurch im niedrigen Geschwindigkeitsbereich eine ausreichende Genauigkeit und Aktualisierungsrate erzielt werden konnte. Exakte Genauigkeitswerte können aufgrund der internen Frequenzberechnung aus dem Sensorsignal des Wheelspeed-Sensors im Datenlogger DL2, die nicht weiter dokumentiert ist, nicht angegeben werden.

Zur Bestimmung des Lenkwinkels wird ein analoger *Throttle Position Sensor* für Motorräder, der auf dem Prinzip des Drehpotentiometers basiert, verwendet. Der Sensor ist, wie aus Abbildung 5.3 entnommen werden kann, auf einer Platte, welche über ein *RAM MOUNT Zwischenstück* der Firma *Touratech* auf dem Rahmen befestigt ist, angebracht. Das Zwischenstück, welches über zwei fixierbare Kugelgelenke verfügt,



Abbildung 5.2: Drehzahlsensor bei Hinterrad

ermöglicht eine einfache Positionierung des Sensors in der Lenkachse. Zur Übertragung der Lenkerposition an den Sensor, welcher hierfür über eine Ausnehmung mit einem D-Profil verfügt, wird eine modifizierte Schraube, welche eigentlich zur Verspannung der Ahead-Kralle mit dem Vorbau dient (zum Vorspannen der Steuerkopflager), verwendet.

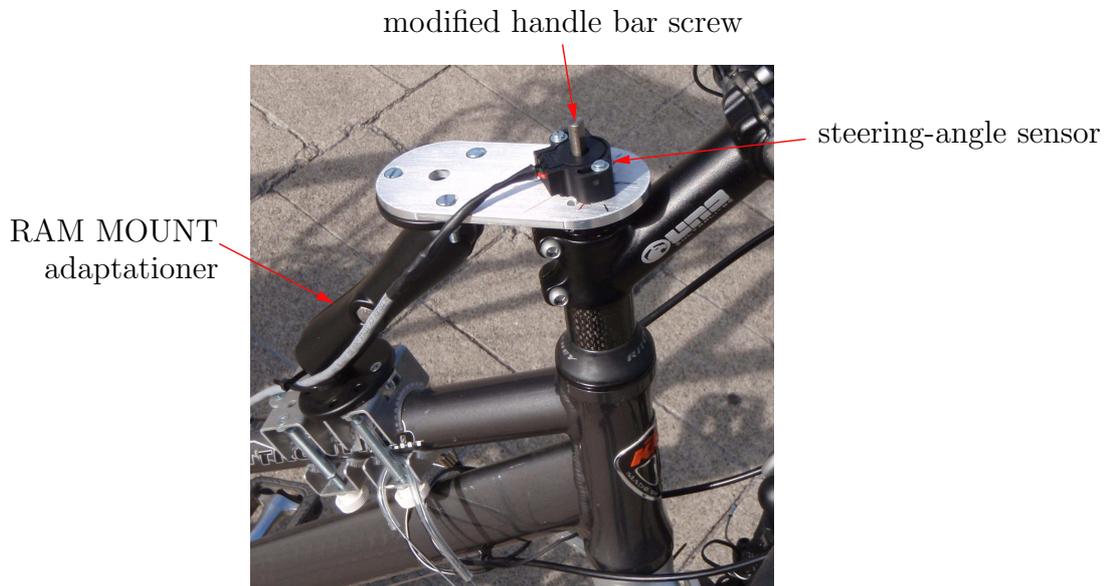


Abbildung 5.3: Lenkwinkelsensor

Zur zusätzlichen Dokumentation der Messfahrten wurden diese mit einer Videokamera der Firma ContourHD, welche auch als Helmkamera verwendet werden kann, aufgezeichnet.

5.1.1 Kalibrieren des Lenkwinkelsensors

Das vom analogen Lenkwinkelsensor gemessene Spannungssignal muss in einen Winkel umgerechnet werden. Dazu wird zunächst, unter der Voraussetzung einer linearen Winkel-Spannungskennlinie, die Spannung für zwei Positionen, deren Winkel zueinander bekannt ist, gemessen. Aus dieser ermittelten Beziehung zwischen Spannungsdifferenz ΔU und Winkeldifferenz $\Delta\delta$ kann von einer gemessenen Spannung auf den Winkel geschlossen werden. Eine zusätzliche Konstante δ_0 zur Definition der Nulllage kann noch hinzugefügt werden, was jedoch für die weitere Datenauswertung nicht erforderlich wäre. Die verwendete Umrechnungsformel mit der Spannung U als Eingangsgröße lautet:

$$\delta(U) = \frac{U - U_0}{\Delta U} \Delta\delta - \delta_0 = \frac{U - 0,082}{4,97 - 0,082} 125 - 69 [^\circ] \quad (5.1)$$

5.1.2 Kalibrieren des Geschwindigkeitssensors

Bevor der Drehzahlsensor (WSS – Wheel Speed Sensor) für die Messung der Geschwindigkeit verwendet werden kann, muss für die Umrechnung von der Frequenz auf die Geschwindigkeit der Abrolldurchmesser des Hinterrades bestimmt werden. Zur Kalibrierung wird das GPS-Geschwindigkeitssignal als Referenz herangezogen. Um eine möglichst exakte Geschwindigkeitsmessung per GPS zu ermöglichen, was direkt mit der GPS-Signalqualität zusammenhängt, ist die erforderliche Messfahrt auf einem großen nach oben hin offenen Platz vorgenommen worden. Die Auswertung der aufgezeichneten Messsignale erfolgt für einen Zeitbereich, in dem das Fahrrad (natürlich mit Fahrer) ausrollt, wodurch ein möglichst gleichmäßiger und nur leicht abfallender Geschwindigkeits- und Frequenzverlauf erzielt werden kann. Um einen Einfluss der Rollwinkelgeschwindigkeit auf das GPS-Geschwindigkeitssignal ausschließen zu können, erfolgte der Auslaufvorgang während der Geradeausfahrt.

Die erhaltenen Messsignale werden für die betrachteten Zeitbereiche gemittelt. Über den Zusammenhang

$$u_{GPS_{mittel}} = f_{WSS_{mittel}} \frac{2\pi r_2}{n} \quad (5.2)$$

mit der Teilungsanzahl $n = 50$ der Zahnscheibe kann der Abrolldurchmesser des Hinterrades zu $r_2 = 0,3355\text{m}$ abgeschätzt werden (siehe auch Tabelle 4.1).

Die Umrechnung der Messsignale von Lenkwinkel- und Drehzahlsensor erfolgt beim Einlesen der Messergebnisse mit der Software *Analysis* von der Firma *Race Technology*, aus welcher die Messdaten für die weitere Auswertung mit *Matlab* exportiert werden. Damit liegen die beiden Messsignale bei der Messsignalauswertung (siehe Kapitel 5.3) bereits in der richtigen Skalierung vor.

5.2 Testfahrten

Die Testfahrten werden auf einem geraden Fahrradweg mit leichtem Gefälle durchgeführt. Das Gefälle soll den, durch die Fahrwiderstände verursachten, Geschwindigkeitsverlust ausgleichen, da während der freihändigen Testfahrt nicht in die Pedale getreten wird. Die Fahrbahn, deren Oberflächenmaterial Asphalt ist, war bei den Testfahrten stets trocken.

Ziel der Testfahrten sind die Bestimmung der *Wobble-Geschwindigkeit*, welche hier als jene Geschwindigkeit definiert ist, bei der, mit ansteigender Fahrgeschwindigkeit von einer Testfahrt zur nächsten, erstmals eine instabile (aufklingende) Wobble-Schwingung auftritt, sowie die Frequenzen der Wobble-Schwingungen. Das auf- bzw. abklingende Verhalten der Lenkungsschwingung kann vom Testfahrer während der Fahrt recht gut beurteilt werden, sodass während der Testfahrten bereits der Bereich der Wobble-Geschwindigkeit abgeschätzt werden kann und dementsprechend vermehrt Testfahrten in diesem Geschwindigkeitsbereich durchgeführt werden können.

Der Ablauf einer typischen Testfahrt zu Beginn der Messungen sah folgendermaßen aus: Zunächst beschleunigt der Fahrer das Fahrrad und gleicht die Geschwindigkeit an die gewünschte Testgeschwindigkeit an. Hat er die gewünschte Geschwindigkeit erreicht so stoppt er das Treten in die Pedale und nimmt seine Hände in einer aufrechten Sitzposition vom Lenker. In dieser freihändigen Phase der Fahrt klingen instabile Moden aufgrund von zufällig auftretenden Störungen, die beispielsweise von Rillen oder einem Kanaldeckel auf der Fahrbahn verursacht werden auf. Wenn die Schwingungsamplituden oder der Rollwinkel zu groß bzw. die Geschwindigkeit zu klein geworden sind, greift der Fahrer wieder stabilisierend ein und beendet damit die freihändige Testfahrt.

Bei den ersten Testfahrten stellte sich heraus, dass die Wobble-Geschwindigkeit sehr stark variierte. Um die Messungen reproduzierbarer zu machen, wurde der Testfahrer angewiesen, zusätzlich zu dem bereits angeführten Verlauf der Testfahrten in einer aufrechten Sitzposition die Rumpfmuskulatur so stark wie möglich anzuspannen, um eine möglichst steife Verbindung mit dem Sattel sicherzustellen und durch einen leichten seitlichen Schlag auf ein Ende des Lenkers die Wobble-Schwingung anzuregen. Der leichte Schlag kann dabei als eine definierte Anfangsstörung angesehen werden. Ohne diese zusätzlichen Anweisungen ist es vom Zufall abhängig, ob eine Störung auftritt, die den Wobble-Mode anregt, und der Einfluss des Fahrers sowie dessen Verbindung zum Fahrrad waren davor nicht einzuschätzen.

5.3 Messsignalauswertung

Im Folgenden wird die Nachbearbeitung und Auswertung der Messsignale in der Reihenfolge, in der diese in Matlab implementiert wurden, anhand der rohen Messdaten von zwei, in den Abbildungen 5.4 und 5.5 eingezeichneten Messungen, erläutert. In den Diagrammen der Abbildungen sind, im Hinblick auf die Übersichtlichkeit, nur das rohe Messsignal des Lenkwinkels und der aus der Raddrehzahl berechneten Geschwindig-

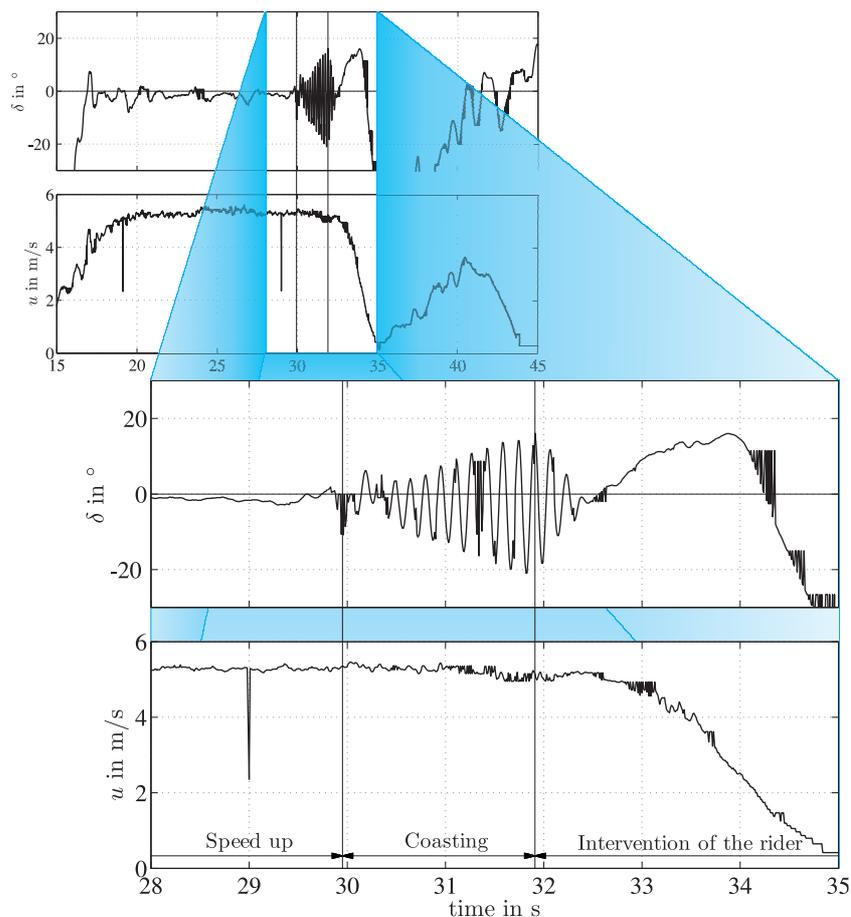


Abbildung 5.4: Rohes Messdaten vom Lenkwinkel- δ und Geschwindigkeitssensor u der Messung 1

keit eingetragen. Darüber hinaus wurden natürlich auch die Winkelgeschwindigkeiten, Beschleunigungen und die über die GPS-Antenne gemessene Geschwindigkeit aufgezeichnet.

5.3.1 Logische - Signalfilterung

Die aufgezeichneten Messsignale sind, wie man sowohl Abbildung 5.4 als auch Abbildung 5.6 entnehmen kann, mit teilweise recht starkem Rauschen behaftet. Zur Verbesserung der Signalqualität für die weitere Analyse wird dieses Rauschen durch die Verwendung eines eigens programmierten Logik-Filters deutlich reduziert (vergleiche Abbildung 5.6 - rote Linie). Der Filteralgorithmus beruht dabei darauf, dass das Messsignal beim Rauschen immer auf einen, innerhalb eines kleinen Zeitintervalls, zeitlich zurückliegenden Wert springt (der Sprung kann innerhalb von einem oder auch mehreren Zeitschritten Δt erfolgen), was überprüft und damit auch erkannt und korrigiert werden kann. Das Geschwindigkeitssignal des Drehzahlsensors wird vor dieser Filterung

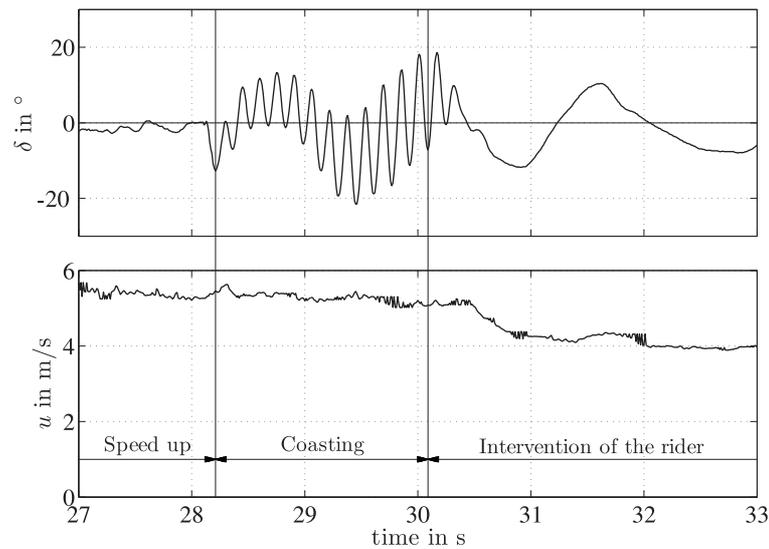


Abbildung 5.5: Rohes Messdaten vom Lenkwinkel- δ und Geschwindigkeitssensor u der Messung 2

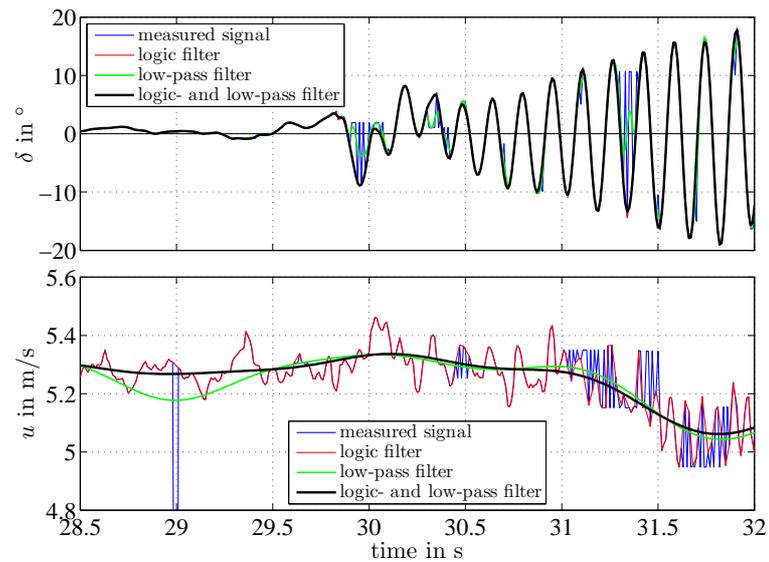


Abbildung 5.6: Lenkwinkel- und Geschwindigkeitssignalfilterung der Messung 1

noch zusätzlich bereinigt, indem die extremen Signalspitzen, wie sie beispielsweise im unteren Diagramm von Abbildung 5.6 bei 29s auftritt, entfernt werden.

5.3.2 Tiefpass - Signalfilterung

Zur Unterdrückung des hochfrequenten Rauschens in den Messsignalen wird ein Tiefpass - Butterworth - Filter 4. Ordnung in Verbindung mit der Matlab - Funktion `filtfilt` verwendet. Durch die Verwendung dieser Funktion, welche den Filter in

beide Richtungen – vorwärts und rückwärts – auf die Datenreihe des Messsignals anwendet, wird sichergestellt, dass keine Phasen- und damit auch keine Zeitverschiebung der Messsignale durch den Filter hervorgerufen wird.

Für das Geschwindigkeitssignal wurde eine obere Grenzfrequenz von 1Hz und für die übrigen Messsignale von 20Hz verwendet.

Aus der Abbildung 5.6 ist erkennbar, dass die Verwendung des Tiefpass-Filters ohne vorgeschaltetem Logik-Filter (grüne Linien) zu einer deutlichen Verschiebung (und damit zu einer Verschlechterung) des Signals, hervorgerufen durch das Messrauschen, im Vergleich zur schwarzen Linie, bei der beide Filter verwendet werden, führt. Ebenso ist, vor allem für das Geschwindigkeitssignal, die Verwendung des Tiefpass-Filters zur Glättung der Signalspitzen, welche vermutlich durch Fertigungsungenauigkeiten und scheinbar auch durch die Wobble-Schwingung hervorgerufen werden, für die weitere Auswertung sinnvoll (Vergleiche rote- und schwarze Linie im unteren Diagramm von Abbildung 5.6).

5.3.3 Transformation in Bezugssystem A

Für die Interpretation der Messwerte macht es Sinn, diese vom bewegten System m , in welchem diese aufgrund der Anordnung der Messsysteme am Gepäckträger gemessen werden, in das Bezugssystem A zu transformieren.

Winkelgeschwindigkeiten

Zunächst sollen die gemessenen Winkelgeschwindigkeiten und die daraus durch Integration erhaltenen Winkeln in dieses Bezugssystem transformiert werden. Das System A ist gegenüber dem Inertialsystem 0 um die z -Achse mit Gierwinkel ψ verdreht (vergleiche Abbildung 4.4) bzw. rotiert gegen dieses mit der Gierrate r . Damit folgt die Transformationsmatrix \mathbf{A}_{A0} und der Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^0\underline{\omega}_{A|0}$ von A gegen 0 , dargestellt im System 0 :

$$\mathbf{A}_{A0} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^0\underline{\omega}_{A|0} = {}^0\underline{\omega}_{A|A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Zur Berücksichtigung der Nickbewegung wird ein zusätzliches System n eingeführt, da diese bei der Modellerstellung in Kapitel 4 aufgrund der Linearisierung nicht berücksichtigt wurde, welches sich mit dem Nickwinkel θ um die y_A -Achse gegen das System A drehen kann:

$$\mathbf{A}_{nA} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad {}^A\underline{\omega}_{n|A} = {}^A\underline{\omega}_{n|n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Als dritte Drehung fehlt jetzt noch der Rollwinkel ϕ des Systems m um die x_n -Achse des Systems n :

$$\mathbf{A}_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad {}^n\underline{\omega}_{m|n} = {}^n\underline{\omega}_{m|m} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Mit diesen Definitionen berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit des rahmenfesten Systems m gegen das Bezugssystem 0, dargestellt im System m , zu:

$${}^0\underline{\omega}_{m|m} = {}^n\underline{\omega}_{m|m} + \mathbf{A}_{mn} ({}^A\underline{\omega}_{n|n} + \mathbf{A}_{nA} {}^0\underline{\omega}_{A|A}) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - r \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + r \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \phi + r \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Die vom Winkelgeschwindigkeitssensor gemessenen Werte stimmen mit ${}^0\underline{\omega}_{m|m}$ überein. Durch Umformen erhält man mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor der Messung ${}^0\underline{\omega}_{m|m} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$, für den Gierwinkel ψ , Nickwinkel θ sowie den Rollwinkel ϕ die drei Differentialgleichungen:

$$\dot{\phi} = \omega_x + (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \tan \theta \quad (5.7)$$

$$\dot{\theta} = \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi \quad (5.8)$$

$$r = (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \frac{1}{\cos \theta} \quad (5.9)$$

Diese können durch numerisches Integrieren mit den gemessenen Winkelgeschwindigkeiten als Eingangsgrößen gelöst werden. Der aus den Messergebnissen berechnete Rollwinkel ϕ wird dabei entsprechend der Definition gegen das genickte System n und nicht gegen das System A angegeben. Entsprechend DIN 70 000 [42] sind beide Definitionen zulässig, wobei der Winkel gegen A hier als Fahrzeugrollwinkel (Fahrzeugwankwinkel) bezeichnet wird.

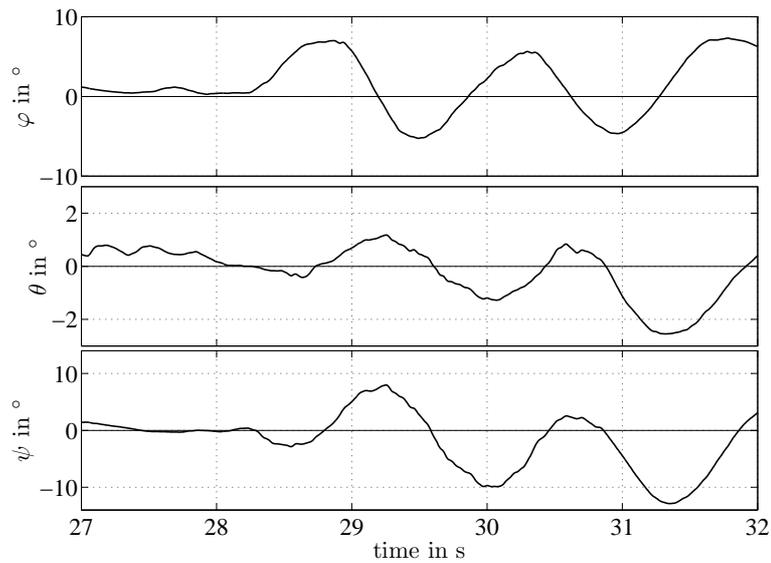
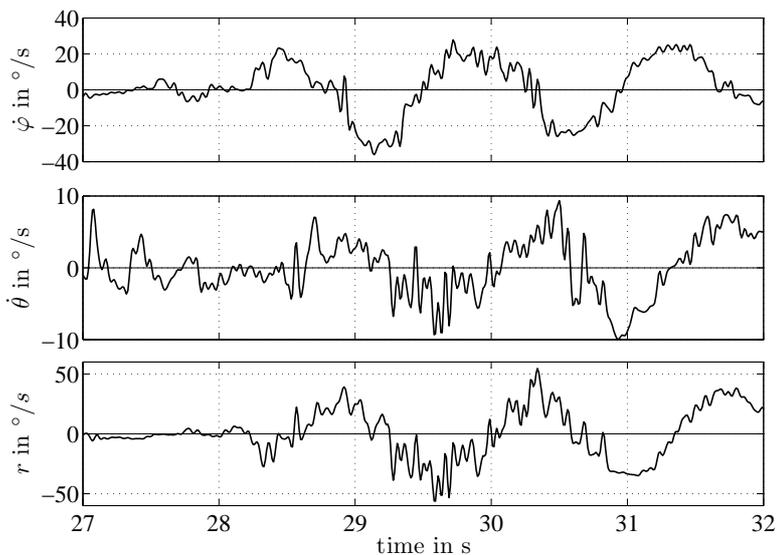
Der Rollwinkel ϕ kann in den Fahrzeugrollwinkel, welcher mit dem Rollwinkel φ des Modells übereinstimmt, unter Verwendung der zuvor beschriebenen Drehungen der einzelnen Systeme gegeneinander, übergeführt werden. Der Rollwinkel des Modells φ steht daher in folgender Beziehung zum Rollwinkel ϕ und zum Nickwinkel θ :

$$\varphi = \phi \cos \theta \quad (5.10)$$

Beschleunigungen

Unter der Voraussetzung einer Starrkörperbewegung kann die gemessene Beschleunigung des Sensors (Punkt M), mit dem Abstand $\underline{r}_{MA|m} = (-0,48\text{m} \ 0,00\text{m} \ -0,74\text{m})^T$ vom Bezugspunkt A zum Messpunkt M , in den Bezugspunkt A transformiert werden:

$$\underline{a}_{A|m} = \underline{a}_{M|m} - {}^0\underline{\dot{\omega}}_{m|m} \times \underline{r}_{MA|m} - {}^0\underline{\omega}_{m|m} \times ({}^0\underline{\omega}_{m|m} \times \underline{r}_{MA|m}) \quad (5.11)$$

Abbildung 5.7: In System A transformierte Fahrzeugwinkel von Messung 2Abbildung 5.8: In System A transformierte Fahrzeugwinkelgeschwindigkeiten von Messung 2

Da die Winkelbeschleunigungen nicht gemessen werden, wird der Term ${}^0\dot{\underline{\omega}}_{m|m} \times \underline{r}_{MA|m}$ bei der Überführung der Beschleunigungen in den Punkt A vernachlässigt.

Zur Darstellung der Beschleunigungen $a_{A|A}$ im System A muss noch die Transformation mit der Matrix $\mathbf{A}_{Am} = \mathbf{A}_{An} \cdot \mathbf{A}_{nm}$ durchgeführt werden, was für die in Abbildung 5.9 dargestellten Beschleunigungen gemacht wurde.

In den Abbildungen 5.7 – 5.9 sind die nach den eben beschriebenen Transformationen der gefilterten Messsignale in den Bezugspunkt A erhaltenen Fahrzeugwinkel, Fahrzeugwinkelgeschwindigkeiten und Beschleunigungen dargestellt. Aus den Signalen

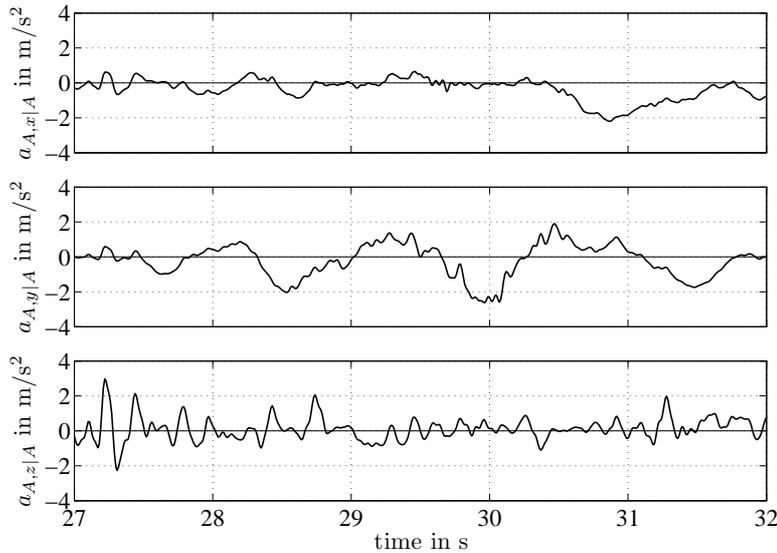


Abbildung 5.9: In System A transformierte Beschleunigungen des Bezugspunkts A von Messung 2

der Fahrzeugwinkel ist, im Vergleich zu deren Geschwindigkeiten, die Filterwirkung der Integration ersichtlich. Bei einem Vergleich der Winkelgeschwindigkeiten (Abbildung 5.8) mit dem Lenkwinkel (Abbildung 5.5) ist für erstere eine zusätzliche überlagerte Schwingung, welche höchstwahrscheinlich von einer Relativbewegung zwischen dem Gepäckträger, auf dem der Beschleunigungssensor befestigt ist, und dem Fahrradrahmen herrührt, erkennbar. Diese Relativbewegung ist dabei eine Folge der elastischen Anbindung des Gepäckträgers an den Fahrradrahmen.

Aufgrund dieser Umstände sind diese Signale zur Analyse des Wobbles äußerst ungeeignet.

GPS-Geschwindigkeit

Das vom GPS-Sensor erhaltene Geschwindigkeitssignal wird an der Position der Antenne gemessen. Zur Umrechnung in den fiktiven Bezugspunkt A , also zur Eliminierung der Relativgeschwindigkeit des Rahmens gegen das System A aufgrund der Winkelgeschwindigkeiten, kann die Geschwindigkeit \underline{v}_A folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\underline{v}_{A|A} = \mathbf{A}_{A0} \underline{v}_{M_{GPS}|0} + \mathbf{A}_{Am} \left({}^0\underline{\omega}_{m|m} \times \underline{r}_{MA|m} \right) \quad (5.12)$$

Da das vom GPS-Sensor ausgegebene Geschwindigkeitssignal allerdings der Betrag und kein Vektor ist, ist diese für Starrkörper exakte Umrechnung nicht möglich und es muss mit einer vereinfachten vorliebgenommen werden:

$$v_{A|A,x} = u = \sqrt{v_{M_{GPS}}^2 - v_{rel,y}^2 - v_{rel,z}^2 - v_{rel,x}^2}, \quad (5.13)$$

mit

$$\underline{v}_{rel} = \mathbf{A}_{Am} \left({}^0\underline{\omega}_{m|m} \times \underline{r}_{MA|m} \right) \quad (5.14)$$

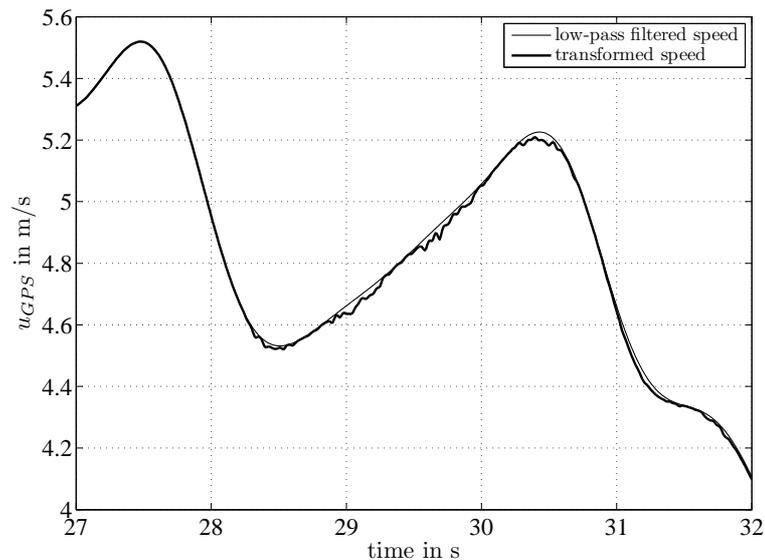


Abbildung 5.10: Vergleich der von der GPS-Antenne gemessenen Geschwindigkeit vor- und nach der Transformation in das System A für Messung 2

In Abbildung 5.10 ist eine Gegenüberstellung des Signals vor und nach der Transformation dargestellt. Das für die Transformation der Geschwindigkeit von der GPS-Antenne in den Bezugspunkt A verwendete Geschwindigkeitssignal des GPS-Sensors wurde bereits mit dem Tiefpass-Filter geglättet. Aus der Abbildung kann entnommen werden, dass die durch die Überführung des Geschwindigkeitssignals in den Bezugspunkt A hervorgerufenen Auswirkung auf dieses äußerst gering ist und auf den Geschwindigkeitsanstieg und -abfall während der freihändigen Fahrt (siehe Abbildung 5.10 zwischen Sekunde 30,8 und 32) keinerlei Verbesserung hat. Dies ist auch der Grund dafür, dass zusätzlich ein Raddrehzahlsensor zur Geschwindigkeitsmessung verwendet wird.

5.3.4 Auswertung - Kurvenanpassung

Die bisherigen Bearbeitungen der Messsignale konnten (Signalfilterung) bzw. mussten (Signaltransformation) von Beginn der Signalaufzeichnung an bis zum Ende der relevanten Messfahrt bzw. kurz darüber hinaus (Tiefpassfilterung) durchgeführt werden. Für die hier behandelte Auswertung der Messsignale ist es jedoch erforderlich, zunächst manuell durch optische Kontrolle der Messdaten und teilweise mit Hilfe der Videoaufzeichnungen von den Messfahrten, das Zeitfenster zwischen Störungseinleitung durch einen leichten seitlichen Schlag auf den Lenker und Eingreifen des Fahrers zur Stabilisierung des Fahrrades zu lokalisieren.

Zur Frequenzauswertung des Lenkwinkelsignals in diesem Zeitfenster würde sich prinzipiell eine Fourieranalyse (FFT) anbieten. Um jedoch eine brauchbare Frequenzauflösung von zumindest $\Delta f = 0,2\text{Hz}$ für die Wobble-Frequenz zu erreichen, wäre dafür, entsprechend [43] mit der Samplingfrequenz des Datenloggers von $f_s = 100\text{Hz}$

eine Zeitfenstergröße t von

$$t = \frac{1}{\Delta f} = 5\text{s} \left(= \frac{K}{f_s} = \frac{f_s}{\Delta f f_s} \right), \quad (5.15)$$

mit der Teilungsanzahl der Frequenzachse K zwischen 0 und f_s , nötig. Die analysierten Messdaten weisen hingegen im Mittel eine Zeitfenstergröße von 2,18s (min: 0,74s; max: 6,42s) auf, was einer mittleren Frequenzauflösung von $\Delta f = 0,46\text{Hz}$ entspricht. Damit ist die Fourieranalyse für die Frequenzbestimmung der Messsignale nur unzureichend geeignet.

Als Alternative dazu werden die dominierenden Eigenwerte durch eine Kurvenanpassung der Eigenbewegung an das Messsignal des Lenkwinkels abgeschätzt (siehe auch [29, 31]). Dabei wird davon ausgegangen, dass vom Fahrer keine Eingangsmomente (Lenk- und Rollmoment) aufgebracht werden (freihändige Fahrt) und alle Moden mit einem deutlich negativen Realteil der Eigenwerte sehr rasch (exponentiell) abklingen. Es verbleiben daher nur der Wobble- und Weave- bzw. für höhere Geschwindigkeiten der Wobble- und Capsize-Mode, die einen signifikanten Einfluss auf die Eigenbewegung haben. Die Kurvenanpassung wird daher mit einer Funktion vorgenommen, die zwei exponentiell gedämpfte oder wachsende Schwingungen abbilden kann, die Weave- und Wobble-Schwingung bzw. auch Capsize-Bewegung und Wobble-Schwingung, wobei dann die Kreisfrequenz einer Schwingung gleich null ist. Damit wird der Funktion die Form

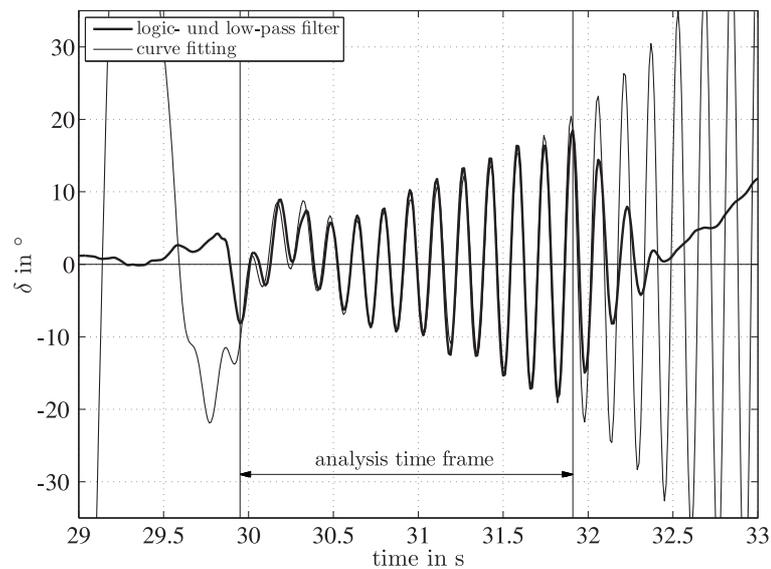
$$x(t) = c_1 + e^{d_1 t} [c_2 \cos \omega_1 t + c_3 \sin \omega_1 t] + e^{d_2 t} [c_4 \cos \omega_2 t + c_5 \sin \omega_2 t], \quad (5.16)$$

mit den Eigenkreisfrequenzen der Schwingungen $\omega_1 = \text{Im}(\lambda_{\text{Weave}})$ und $\omega_2 = \text{Im}(\lambda_{\text{Wobble}})$, den Dämpfungen der Schwingungen $d_1 = \text{Re}(\lambda_{\text{Weave}})$ und $d_2 = \text{Re}(\lambda_{\text{Wobble}})$ sowie den fünf Konstanten c_1 für den Offsetfehler, c_2 und c_4 für die cos-Amplitude sowie c_3 und c_5 für die sin-Amplitude der Weave- und Wobble-Schwingungen zugrundegelegt. Da die Frequenzen und Dämpfungen, im Gegensatz zu den Konstanten c_i , nichtlinear in die Funktion eingehen, wird zur Anpassung der Funktion an das Messsignal ein Minimumssuchalgorithmus (Matlab `fminsearch`) verwendet.

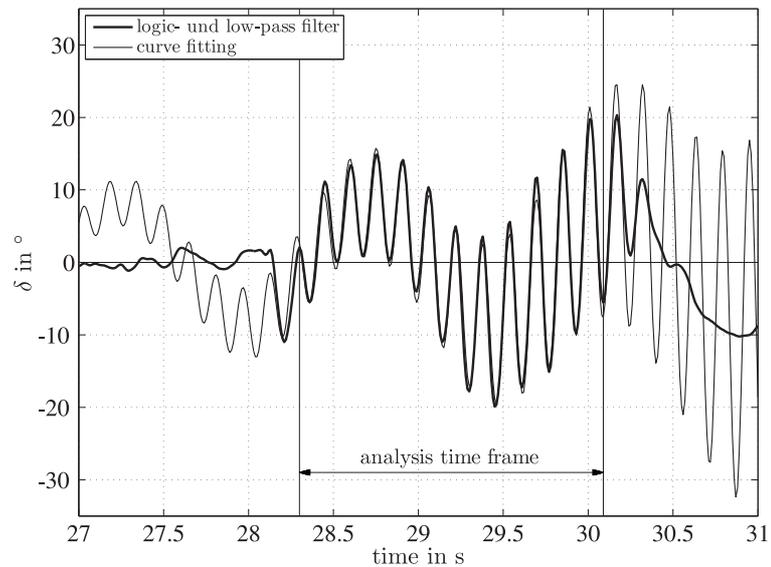
Zu der Funktion (5.16) kann noch angeführt werden, dass für die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte des Weave- oder Wobble-Modes $\lambda_{k,k+1} = d_k \pm i\omega_k$ der dazugehörige Lösungsvektor der homogenen Bewegungsgleichung $\underline{x}_h(t)$, mit den konjugiert komplexen Eigenvektoren \underline{v}_k und $\bar{\underline{v}}_k$, den konjugiert komplexen Konstanten C_k und \bar{C}_k und den reellen Konstanten $c_{k,1} = 2 \text{Re}(C_k)$ und $c_{k,2} = -2 \text{Im}(C_k)$, auch folgendermaßen angeschrieben werden kann (siehe auch Kapitel 6.1.4):

$$\begin{aligned} \underline{x}_h(t) &= C_k e^{\lambda_k t} \underline{v}_k + \bar{C}_k e^{\lambda_{k+1} t} \bar{\underline{v}}_k = C_k e^{(d_k + i\omega_k)t} \underline{v}_k + \bar{C}_k e^{(d_k - i\omega_k)t} \bar{\underline{v}}_k \\ &= e^{d_k t} \{ [c_{k,1} \cos \omega_k t + c_{k,2} \sin \omega_k t] \text{Re}(\underline{v}_k) + [c_{k,2} \cos \omega_k t - c_{k,1} \sin \omega_k t] \text{Im}(\underline{v}_k) \} \end{aligned}$$

Als Anfangswerte für die Minimumssuche mittels der Matlab - Funktion `fminsearch` werden, entsprechend der vorhin gemachten Zuordnung der Eigenwerte zu den Moden, für die Eigenkreisfrequenzen typische Werte der Moden $\omega_1 = 1 \cdot 2\pi$, $\omega_2 = 6 \cdot 2\pi$ verwendet. Die Anfangswerte der Dämpfungen werden mit $d_1 = 0,1$, $d_2 = 0,1$ festgelegt.



(a)



(b)

Abbildung 5.11: Kurvenanpassung an Lenkwinkelsignal δ (a) Messung 1 (b) Messung 2

In Abbildung 5.11a ist das gefilterte Messsignal im Vergleich mit der im Zeitfenster der freihändigen Fahrt (eingezeichnet als *analysis time frame*) angenäherten Kurve für die Messung 1 dargestellt. Die Parameterwerte der angepassten Funktion sind dabei: $d_1 = -3,142 \text{ 1/s}$, $\omega_1 = 6,803 \text{ rad/s}$, $d_2 = 0,851 \text{ 1/s}$, $\omega_2 = 39,909 \text{ rad/s}$.

Eine schöne Überlagerung der Weave- und Wobble-Schwingung von Messung 2 ist in Abbildung 5.11b mit Überlagerung der angepassten Kurve dargestellt. Damit sollen einerseits die Erfordernis der gewählten Form der anzupassenden Funktion mit ihren zwei exponentiell auf- bzw. abklingenden Schwingungen sowie die Funktion des gewählten Algorithmus veranschaulicht werden. Die ermittelten Parameterwerte dieser Messung

sind: $d_1 = 0,004 \text{ 1/s}$, $\omega_1 = 4,301 \text{ rad/s}$, $d_2 = 0,549 \text{ 1/s}$, $\omega_2 = 40,028 \text{ rad/s}$.

5.4 Vergleich GPS - Wheel Speed Geschwindigkeit

Als Begründung für die Verwendung eines Raddrehzahlsensors zur Geschwindigkeitsmessung anstatt der mit dem Datenlogger DL2 bereits vorhandenen GPS-Geschwindigkeitsmessung sollen die von den beiden Sensoren während einer Testfahrt ermittelten Geschwindigkeiten (ohne Transformation) gegenübergestellt werden. Für die anfangs betrachtete Testfahrt ist diese Gegenüberstellung der Geschwindigkeiten in Abbildung 5.12 dargestellt. Der Verlauf der über das GPS-Signal ermittelten Geschwindigkeit weist im Bereich der freihändigen Fahrt (zwischen Sekunde 30 und 32) einen deutlichen Geschwindigkeitsanstieg mit nachfolgendem deutlichen Abfall auf. Demgegenüber fällt die über den Raddrehzahlsensor (WSS) ermittelte Geschwindigkeit in diesem Bereich nur sehr leicht ab. Es liegt die Vermutung nahe, dass durch die Querbewegung der GPS-Antenne und des Trägheitsmessgeräts, hervorgerufen durch das Rollen und Gieren des Fahrrades während der Wobble-Schwingung, diese Spitzen im Geschwindigkeitsverlauf, welcher aus dem GPS-Signal und den Daten des Beschleunigungssensors berechnet wird, hervorgerufen werden.

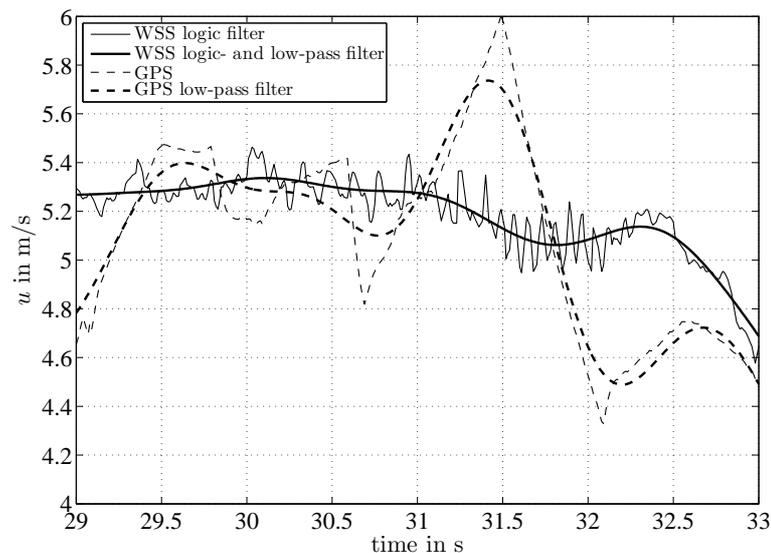
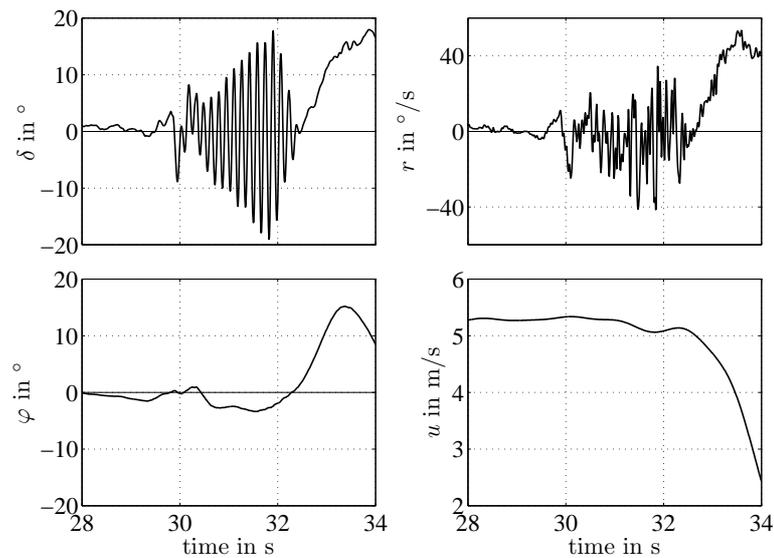


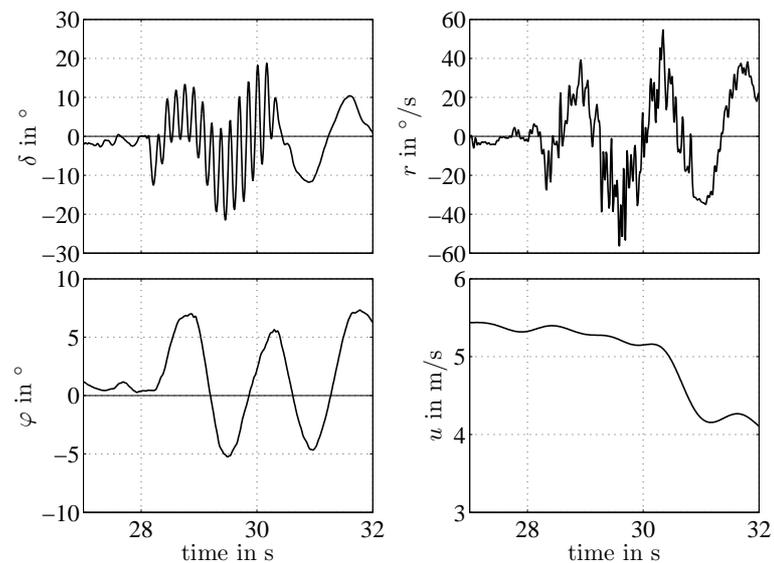
Abbildung 5.12: Vergleich der Geschwindigkeitssignale von der GPS-Antenne (GPS) und vom Raddrehzahlsensor (WSS ... *wheel speed sensor*) für Messung 1

5.5 Ergebnisse

Die Diagramme in Abbildung 5.13 zeigen die nach der entsprechend Kapitel 5.3 beschriebenen Nachbearbeitung der Messsignale erhaltenen Messergebnisse. Wie bereits



(a)



(b)

Abbildung 5.13: Messergebnisse (a) Messung 1 (b) Messung 2

in Kapitel 5.3.3 erwähnt wurde, eignen sich die vom Trägheitssensor ermittelten und transformierten Winkelgeschwindigkeiten und die aus diesen durch Integration erhaltenen Winkellagen, möglicherweise auch aufgrund der Flexibilität zwischen Fahrradrahmen und Gepäckträger, nicht zur Untersuchung der Wobble-Schwingung durch eine Kurvenannäherung. Daher wurde diese Analysemethode nur auf das Lenkwinkelsignal angewendet.

Von den ermittelten Eigenwerten aus dem Lenkwinkel wird nur jener der höheren Frequenz, also der Wobble-Schwingung, als zuverlässig angesehen, da diese Bewegung, im Gegensatz zur Weave-Bewegung, durch den freihändigen Fahrradfahrer kaum beein-

flusst werden kann. Auf die Weave-Schwingung hat der Fahrer hingegen durch eine Rollbewegung des Oberkörpers einen deutlichen Einfluss, was von diesem auch unbewusst zur Stabilisierung des Fahrrades verwendet wird. Damit sind sowohl die Weave-Frequenz, welche im Frequenzbereich der Fahrerbewegung liegt, als auch die zugehörige Dämpfung stark von der Bewegung des Fahrers abhängig und für eine objektive Beurteilung der Eigenwerte nicht verwendbar.

Der Geschwindigkeitsbereich einer Messung wird durch das minimale und maximale Geschwindigkeitssignal des Raddrehzahlsensors innerhalb des für die Analyse herausgegriffenen Zeitfensters der freihändigen Fahrt bestimmt.

Aus den Messungen können damit der Geschwindigkeitsbereich sowie die Wobble-Eigenwerte ausgelesen werden. Es wurden jeweils mehrere Messungen für verschiedene Konfigurationen des Testfahrrades (Näheres siehe Kapitel 6) durchgeführt. Die damit erhaltenen Messpunkte im Stabilitätsdiagramm (siehe beispielsweise Abbildung 6.15) werden zur Ermittlung der Wobble-Geschwindigkeit sowie der Wobble-Frequenz bei einer Geschwindigkeit von $u = 5\text{m/s}$ durch eine Gerade angenähert. Als Geschwindigkeit einer Messung wird dafür der Mittelwert von den beiden Extrema herangezogen. In der Tabelle 5.2 sind die Konfigurationen vom Trekking-Fahrrad, der Fahrer und dessen Instruktionen für die Testfahrt sowie die aus den angenäherten Werten erhaltenen Wobble-Geschwindigkeiten und Wobble-Frequenzen angeführt.

Für einige Fahrradkonfigurationen in der Tabelle war es zum Teil aufgrund von zu wenigen Testfahrten oder aufgrund von zu eng beieinander liegenden Geschwindigkeiten nicht möglich, vernünftige Wobble-Geschwindigkeiten und/oder Wobble-Frequenzen bei einer Annäherung der Messergebnisse durch eine Gerade zu erhalten. In diesen Fällen wurde kein Wert in die Tabelle eingetragen.

Tabelle 5.2: Messergebnisse

Num.	Vorderreifen	Gabel	Störung	Oberkörper	Fahrer	p_1 ¹	u_{Wobble} ²	f_{Wobble} ³
1	S. Marathon Race ⁴	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	3,70m/s	6,60Hz
2	S. Marathon Race	Federgabel	Lenkeranschlag	locker	Edelmann	4bar	10,23m/s	6,23Hz
3	S. Marathon Race	Federgabel	keine	angespannt	Edelmann	4bar	–	–
4	S. Marathon Race	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	2bar	4,93m/s	6,25Hz
5	S. Marathon Race	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	6bar	4,02m/s	6,51Hz
6	Schwalbe Tyrago	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	4,21m/s	6,54Hz
7	Schwalbe Tyrago	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	2bar	4,22m/s	6,45Hz
8	Schwalbe Tyrago	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	6bar	4,83m/s	6,51Hz
9	Conti. TourRide ⁵	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	4,28m/s	6,37Hz
10	Conti. TourRide	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	2bar	4,36m/s	6,30Hz
11	S.M.R. erhöhtes MTRM ⁶	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	4,67m/s	6,36Hz
12	S. Marathon Race	st. Gabel ⁷	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	4,94m/s	7,05Hz
13	S. Marathon Race	st. Gabel inv. ⁸	Lenkeranschlag	angespannt	Edelmann	4bar	4,43m/s	8,12Hz
14	S. Marathon Race	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Plöchl	4bar	–	6,75Hz
15	S. Marathon Race	Federgabel	Lenkeranschlag	angespannt	Ott	4bar	5,58m/s	–

¹ p_1 ... Vorderradluftdruck

² u_{Wobble} ... Wobble-Geschwindigkeit

³ f_{Wobble} ... Frequenz der Wobble-Schwingung bei $u = 5\text{m/s}$

⁴ S. Marathon Race ... Schwalbe Marathon Race

⁵ Conti. TourRide ... Continental TourRide

⁶ S.M.R. erhöhtes MTRM ... Schwalbe Marathon Race mit erhöhtem Massenträgheitsmoment, das durch einen mit Sand gefüllten Schlauch, der in den Speichen befestigt ist, erreicht wurde.

⁷ st. Gabel ... starre Gabel normal eingebaut

⁸ st. Gabel inv. ... starre Gabel mit nach hinten gerichtetem Nachlaufversatz eingebaut

Kapitel 6

Stabilitätsuntersuchung

6.1 Grundlagen

Bevor mit der Stabilitätsuntersuchung begonnen wird, soll zunächst die für die rechnergestützte Auswertung erforderliche Aufbereitung der Bewegungsgleichung erklärt werden. Ebenso werden eine Definition von Stabilität und zwei verwendeten Berechnungsmethoden, die eine Aussage über diese erlauben, angeführt.

6.1.1 Mathematische Aufbereitung

Die in Kapitel 4 hergeleiteten und um die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen lassen sich als Differentialgleichungen 2. Ordnung in der allgemeinen Form

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{q}} + \mathbf{D}\dot{\underline{q}} + \mathbf{C}\underline{q} = \underline{f}(t), \quad (6.1)$$

mit dem Lagevektor \underline{q} , der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} und dem eingepprägten Erregervektor $\underline{f}(t)$ anschreiben. Zur rechnergestützten Auswertung der Bewegungsgleichungen ist es zweckmäßig, das System 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung überzuführen und als Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\underline{x}}_B = \mathbf{A}_B \underline{x}_B + \mathbf{B}_B \underline{u}_B \quad (6.2)$$

anzuschreiben. Der Index B soll darauf hinweisen, dass es sich um die Zustandsraumdarstellung der Bewegungsgleichung handelt. Bei den in (6.2) angeführten Größen handelt es sich um den $(2n \times 1)$ Zustandsvektor

$$\underline{x}_B = (\underline{q} \quad \dot{\underline{q}})^T, \quad (6.3)$$

mit n Freiheitsgraden der Bewegungsgleichungen, der $(2n \times 2n)$ Systemmatrix

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist, und das Produkt der $(2n \times p)$ Eingangsmatrix \mathbf{B}_B mit den $(p \times 1)$ Stellvektoren $\underline{u}_B(t)$

$$\mathbf{B}_B \underline{u}_B(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}(t) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

gleich dem $(n \times 1)$ Nullvektor und dem $(n \times 1)$ eingepprägten Erregervektor $\underline{f}(t)$ ist. Berücksichtigt man weiters, dass die Bewegungsgleichungen (4.42 – 4.47) unabhängig von Gierwinkel ψ ($d\psi/dt = r$) und Querversatz y sind und, dass diese beiden Größen damit aus dem Zustandsvektor gelöscht werden können, so erhält man mit Berücksichtigung der Differentialgleichungen für die Reifenkräfte den (14×1) Zustandsvektor

$$\underline{x} = (\varphi \quad \varphi_r \quad \delta \quad \beta \quad v \quad r \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\delta} \quad \dot{\beta} \quad \alpha'_1 \quad \gamma'_1 \quad \alpha'_2 \quad \gamma'_2)^T. \quad (6.6)$$

Das System 1. Ordnung kann damit, unter der Voraussetzung, dass die Eingangsgrößen gleich zu null sind (d.h. $\underline{u}_B(t) \equiv \underline{0}$), der Fahrer also weder ein Lenk- noch ein Rollmoment aufbringt – es handelt sich folglich um ein homogenes System – in der allgemeinen Form

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x}, \quad (6.7)$$

mit der (14×14) Systemmatrix \mathbf{A} , angeschrieben werden.

6.1.2 Stabilitätsverhalten

Angaben über das Stabilitätsverhalten von Modellen dynamischer Systeme erlauben, je nach Güte des Modells, Aussagen über das reale Systemverhalten.

Für die folgenden Untersuchungen wird das Stabilitätsproblem im Sinne Ljapunows betrachtet. Es erlaubt eine Aussage darüber, ob durch Störungen, welche als Abweichung der Anfangszustände von der Gleichgewichtslage des Differentialgleichungssystems der Bewegungsgleichungen angesehen werden können, das System für $t \rightarrow \infty$ wieder den ungestörten (Gleichgewichts-) Zustand erreicht oder nicht erreicht.

Unvermeidbare äußere Störungen sind für ein Fahrrad beispielsweise ein nicht in der Symmetrieebene liegender Schwerpunkt, der dadurch ein Rollmoment verursacht, sowie Störkräfte, die von Fahrbahnunebenheiten, einer Reifenunwucht oder auch vom Seitenwind hervorgerufen werden.

Im Folgenden wird als ungestörter Zustand des Fahrrades die aufrechte unbeschleunigte Geradeausfahrt betrachtet. Der Fahrer wird dabei als passiv angesehen, Fahrereingriffe auf das Stabilitätsverhalten im Sinne eines Lenk- oder Rollmoments werden also nicht berücksichtigt. Es wird folglich die Auto- oder Selbststabilität des Fahrrades untersucht.

6.1.3 Stabilität im Sinne Ljapunows

Die Lösung $\underline{x}_0(t)$ eines dynamischen Systems

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad (6.8)$$

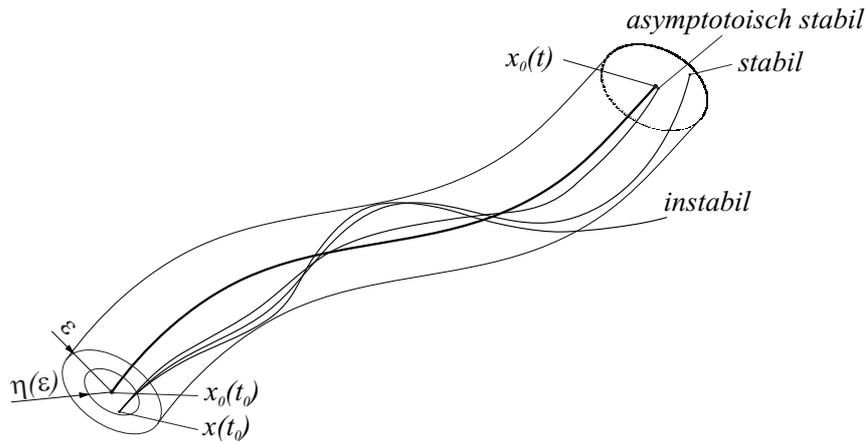


Abbildung 6.1: Integralkurven der gestörten Bewegung

heißt stabil im Sinne Ljapunows, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass für jede zum Zeitpunkt t_0 benachbart startende Lösung $\underline{x}(t)$, ausgedrückt durch

$$\|\underline{x}(t_0) - \underline{x}_0(t_0)\| < \eta(\varepsilon) \quad (6.9)$$

folgt, dass

$$\|\underline{x}(t) - \underline{x}_0(t)\| < \varepsilon \quad (6.10)$$

für alle t aus $t_0 \leq t < \infty$.

Die Lösung $\underline{x}_0(t)$ heißt *asymptotisch stabil*, wenn zusätzlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t) - \underline{x}_0(t)\| = 0 \quad (6.11)$$

gilt.

Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, dass für eine stabile Bewegung für ein fix vorgegebenes $\varepsilon > 0$ es immer ein $\eta > 0$ geben muss, sodass für alle $t > t_0$ der Abstand zwischen den beiden Bewegungen nicht größer als ε wird (vergleiche Abbildung 6.1). Existiert kein solches $\eta > 0$, dann ist die Bewegung instabil [44, 45, 48].

6.1.4 Eigenwertanalyse

Das lineare homogene System (6.7) besitzt stets ein Fundamentalsystem von n linear unabhängigen Lösungsvektoren $\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)$. Der allgemeine Lösungsvektor des Systems ist dann

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{x}_k(t), \quad (6.12)$$

die Konstanten c_k sind aus der Anfangsbedingung $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ zu bestimmen. Die Lösungsvektoren $\underline{x}_k(t)$ können aus der Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$\underline{x}_k(t) = e^{\mathbf{A}t} \underline{v}_k = e^{\lambda_k t} \left[\mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-1} \right] \underline{v}_k, \quad (6.13)$$

mit dem Eigenvektor \underline{v}_k und dem Eigenwert λ_k ermittelt werden. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gleichung (6.7) erhält man die Gleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\underline{v} = \underline{0}, \quad (6.14)$$

die nur dann nichttriviale Lösungen hat, wenn das *charakteristische Polynom* $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ null ist, also die *charakteristische Gleichung* $p(\lambda) = 0$ erfüllt ist. Aus der charakteristischen Gleichung können damit die Eigenwerte λ_k berechnet werden. (Einzelheiten zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung siehe Literatur z.B. [44, 47, 50].) Die Eigenwerte können entweder reell $\lambda_k = d_k$ oder konjugiert komplex $\lambda_{k,k+1} = d_k \pm i\omega_k$ sein. Unter Berücksichtigung der Gleichung (6.13) sind die folgenden Stabilitätsaussagen nach [44] unmittelbar einsichtig:

1. Haben *alle* Eigenwerte λ_k der Matrix \mathbf{A} *negative* Realteile, so ist das System *asymptotisch* stabil.
2. Hat auch nur *einer* der Eigenwerte λ_k einen *positiven* Realteil, so ist das System *instabil*.
3. Tritt ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil auf, dann entscheiden die Nichtlinearitäten über das Stabilitätsverhalten, und man erhält aus der Untersuchung des linearisierten Problems *keine* Stabilitätsaussage. (Bezüglich Stabilitätsaussage eines linearen Systems mit verschwindendem Realteil sei auf [44] verwiesen.)

Für die in dieser Arbeit betrachteten linearisierten Bewegungsgleichungen eines nicht-linearen Systems sei zu Punkt 1 über asymptotische Stabilität noch angemerkt, dass hier keine Aussage über die zulässige Größe einer Störung gemacht werden kann. Auf weitergehende Stabilitätsuntersuchungen im Bereich der Eigenwerte mit verschwindendem Realteil sowie auf zulässige Größen von Störungen im Bereich der asymptotischen Stabilität, durch Untersuchung der Stabilitätsverzweigungen, wird nicht näher eingegangen, da für die allgemeinen Stabilitätsaussagen, die in diesem Kapitel gemacht werden, die Beurteilung der Eigenwertrealteile ausreicht.

Der bereits mehrfach verwendete Begriff des Modes oder Eigenmodes lässt sich durch die Lösungsvektoren des homogenen Eigenwertproblems $\underline{x}_k(t) = e^{\lambda_k t} \underline{v}_k$ beschreiben. Ein Eigenmode ist eine, entsprechend dem Eigenvektor des Modes definierte, Bewegung des Systems, die entsprechend dem Eigenwert exponentiell angefacht oder abgeschwächt wird. Bei komplexen Eigenwerten stellt die Eigenbewegung eine Schwingung der beteiligten Freiheitsgrade dar, wobei der Phasenversatz, welcher durch den in diesem Fall komplexen Eigenvektor definiert wird, zwischen den Freiheitsgraden konstant bleibt. Diese Aussagen gelten natürlich nur für das lineare homogene System.

Der Betrag des Eigenvektors ist aufgrund des Faktors c_k in (6.12) nicht eindeutig definiert und wird daher meist mit $\|\underline{v}_k\| = 1$, also normiert, angegeben. Dies wurde auch in Tabelle 6.1 gemacht, in der die Eigenwerte und Eigenvektoren des Capsize-,

Mode	Capsize	Weave	Wobble	Lean
Eigenwert	-3,7973	1,0315±2,7548i	0,7196±41,5374i	-4,7731±13,2229i
φ	0,2004	-0,1496∓0,0923i	-0,0004∓0,0015i	0,0070±0,0105i
φ_r	-0,0289	-0,0136±0,0038i	0,0000±0,0019i	-0,0188∓0,0522i
δ	-0,0923	-0,1408±0,0039i	0,0004∓0,0222i	0,0356∓0,0187i
β	0,0009	0,0002±0,0013i	0,0024±0,0072i	-0,0010∓0,0000i
v	-0,1146	-0,2022∓0,0027i	-0,0574∓0,0029i	0,0489∓0,0081i
r	-0,3878	-0,6254	-0,1828±0,0092i	0,1661∓0,0724i
$\dot{\varphi}$	-0,7610	0,1001∓0,5074i	0,0601∓0,0158i	-0,1724±0,0421i
$\dot{\varphi}_r$	0,1097	-0,0246∓0,0336i	-0,0778±0,0034i	0,7800
$\dot{\delta}$	0,3507	-0,1559∓0,3839i	0,9242	0,0782±0,5596i
$\dot{\beta}$	-0,0033	-0,0033±0,0017i	-0,2958±0,1048i	0,0050∓0,0136i
α'_1	-0,0012	-0,0001∓0,0012i	-0,0005∓0,0060i	0,0008±0,0003i
γ'_1	0,1752	-0,1955∓0,0861i	0,0015∓0,0023i	0,0183±0,0030i
α'_2	-0,0029	-0,0011±0,0005i	-0,0004±0,0013i	0,0010∓0,0034i
γ'_2	0,2051	-0,1502∓0,0893i	-0,0007∓0,0013i	0,0080±0,0102i

Tabelle 6.1: Normierte Eigenvektoren bei 5m/s der dominierenden Moden

Weave-, Wobble- und Lean-Modes, für die Parameterwerte des Testfahrrades bei einer Geschwindigkeit von $u = 5\text{m/s}$ angegeben sind. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass der am stärksten angeregte Freiheitsgrad beim Capsize-Mode, welcher keinen imaginären Eigenwert aufweist und damit kein schwingender Mode ist, die Rollrate $\dot{\varphi}$, beim Weave-Mode die Gierrate r , beim Wobble-Mode die Lenkrate $\dot{\delta}$ und beim Lean-Mode die Fahrerrollrate $\dot{\varphi}_r$ ist.

Bei komplexen Eigenwerten $\lambda_{k,k+1} = d_k \pm i\omega_k$ kann das Lehr'sche Dämpfungsmaß D_k und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_{n_k} über den Zusammenhang

$$D_k = \frac{-d_k}{\sqrt{d_k^2 + \omega_k^2}} \quad (6.15)$$

$$\omega_{n_k} = \sqrt{d_k^2 + \omega_k^2} \quad (6.16)$$

berechnet werden. Die komplexen Eigenwerte können damit auch folgendermaßen

$$\lambda_{k,k+1} = -D_k\omega_{n_k} \pm i\omega_{n_k}\sqrt{1 - D_k^2} \quad (6.17)$$

angeschrieben werden.

6.1.5 Hurwitz-Kriterium

Zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens eines Systems ist es ausreichend, dessen charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ bzw. charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (6.18)$$

zu kennen, um auf dessen Stabilitätsverhalten schließen zu können. Ein Kriterium, mit dem überprüft werden kann, ob alle Nullstellen eines Polynoms einen negativen Realteil besitzen, womit auf ein stabiles Systemverhalten geschlossen werden kann, stellt das Hurwitz-Kriterium, welches mit dem Stodola-Kriterium ergänzt werden kann, dar.

Stodola-Kriterium

Eine *notwendige* Bedingung für negative Realteile der Wurzeln λ_k der Gleichung (6.18) lautet:

$$a_j > 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (6.19)$$

Dieses Kriterium ist vor allem in seiner Umkehrung von Bedeutung: aus einem Vorzeichenwechsel in der charakteristischen Gleichung folgt, dass das System mit Sicherheit nicht asymptotisch stabil ist.

Eine Erklärung für dieses Kriterium kann [2] entnommen werden.

Hurwitz-Kriterium

Eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für negative Realteile der Wurzeln λ_k , unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten entsprechend (6.19) positiv sind, ist, dass alle Hauptabschnittsdeterminanten der Hurwitz-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

positiv sind. [2, 44]

Diese beiden Kriterien wurden in Kapitel 6.8 mit den Koeffizienten a_k in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit u für ein analytisch ermitteltes charakteristisches Polynom des Fahrradmodells verwendet, um den Parametereinfluss (von einzelnen ausgewählten Parametern) auf die autostabilen Bereiche darstellen zu können.

6.2 Stabilität des Fahrrades

Das Trekking-Fahrradmodell hat mit seinen vierzehn Differentialgleichungen erster Ordnung (inkl. Reifenmodell) folglich auch vierzehn Eigenwerte. Diese sind in Abbildung 6.2 in Abhängigkeit von der Längsgeschwindigkeit u des Fahrrades und getrennt in Realteil $\text{Re}(\lambda)$ und Imaginärteil $\text{Im}(\lambda)$ dargestellt. Als Geschwindigkeitsbereich wird der Bereich $u = 0,1 - 20\text{m/s}$ gewählt. Die untere Grenze wird nicht zu null gewählt,

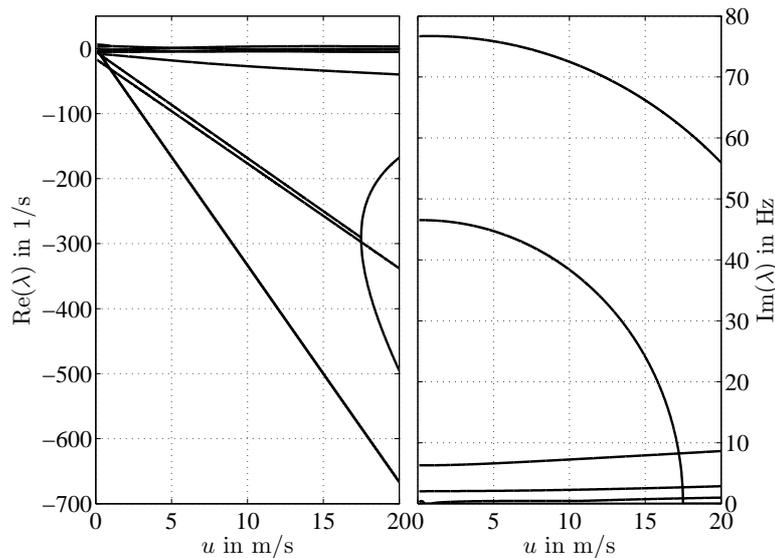


Abbildung 6.2: Stabilitätsdiagramm für die Parameterwerte vom Trekking-Fahrrad und Darstellung aller Moden.

da das Reifenmodell eine Längsgeschwindigkeit für die Reifenkraftherzeugung (kleiner Schräglaufwinkel α_i) voraussetzt. Als obere Grenzggeschwindigkeit wird 20m/s gewählt, da ein durchschnittlicher Fahrradfahrer (ohne Berücksichtigung von Rennrädern) diese Geschwindigkeitsgrenze nicht erreichen bzw. überschreiten wird.

Diagramme solcher Art werden in dieser Arbeit kurz als Stabilitätsdiagramme bezeichnet. Zur Darstellung der imaginären Werte im rechten Diagramm ist vollständigkeithalber noch zu erwähnen, dass das dargestellte Diagramm symmetrisch bezüglich der u -Achse ist, und die Werte auf die Einheit Hz skaliert wurden.

Aus dem linken Diagramm kann, wenn man den Zusammenhang zwischen Eigenwert und Abklingverhalten berücksichtigt (vergleiche (6.13)), gefolgert werden, dass die Moden mit einem Realteil von unter $-7/s$ bei einer Störung sehr rasch abklingen und daher für die folgende Stabilitätsuntersuchung nicht weiter betrachtet werden müssen. In Abbildung 6.3 ist daher jener Bereich, in dem die Moden mit einem Einfluss auf das Stabilitätsverhalten liegen, vergrößert dargestellt. Bei den Moden handelt es sich namentlich um den Capsize-, Weave-, Wobble- und Lean-Mode, die zur Identifikation in der Abbildung beschriftet wurden. Die verbleibenden sieben Moden, da drei der vier gezeigten Moden konjugiert komplexe Eigenwerte besitzen, werden aufgrund ihres rasch abklingenden Verhaltens nicht weiter betrachtet und werden daher in den Stabilitätsdiagrammen auch nicht mehr eingezeichnet.

Anhand von Abbildung 6.3 sollen die dominierenden Moden, entlang der mit steigender Geschwindigkeit durchlaufenen Linien, kurz diskutiert werden:

Capsize (Kentern): Charakteristisch für diesen Mode ist, dass er sich bei steigender Geschwindigkeit von einem stabilen Wert zunächst weiter stabilisiert, das Minimum befindet sich für das Trekkingfahrrad entsprechend dieser Abbildung bei

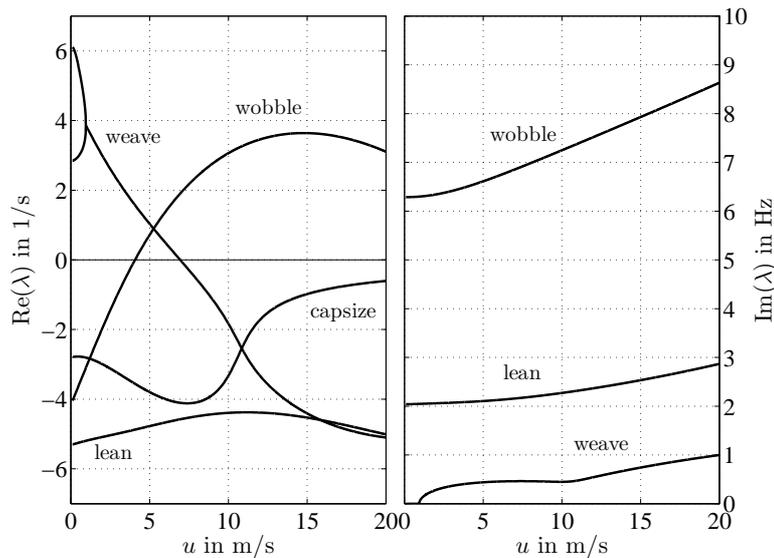


Abbildung 6.3: Stabilitätsdiagramm für die Parameterwerte vom Trekking-Fahrrad

7,39m/s, und anschließend an die Abszisse annähert bzw. für andere Parameterwerte bzw. Modelle diese auch kreuzen kann, wie es beispielsweise in Abbildung 6.6 der Fall ist. Da der Capsize-Mode für alle Geschwindigkeiten nur reelle Eigenwerte besitzt, also eine nichtschwingende Bewegung beschreibt, gibt es keine zu diesem Mode gehörende Kurve im Diagramm der Eigenwertimaginärteile.

Weave (Pendeln): Der Weave-Mode besteht für sehr kleine Geschwindigkeiten aus zwei reellen instabilen Eigenwertästen, die sich für das Trekking-Fahrrad bei einer Geschwindigkeit von 0,95m/s treffen und für größere Geschwindigkeiten konjugiert komplexe Eigenwerte bilden, die sich mit steigender Geschwindigkeit zunehmend stabilisieren. Ab einer Fahrgeschwindigkeit von 6,94m/s, bei der der Weave-Mode die Nulllinie schneidet, ist dieser bis zur betrachteten Höchstgeschwindigkeit stabil. Die Schwingungsfrequenz dieses Modes steigt zunächst auf eine Frequenz von 0,46Hz bei einer Geschwindigkeit von 7,4m/s, fällt im Bereich des Kreuzungspunktes von Weave- und Capsize-Mode auf ein lokales Frequenzminimum von 0,45Hz ab (siehe auch Abbildung 6.6) und steigt anschließend mit steigender Geschwindigkeit laufend an. Der Frequenzbereich liegt, für den betrachteten Geschwindigkeitsbereich, unter 1Hz und typischerweise im Bereich von ca. 0,45Hz.

Wobble (Flattern): Bis zu einer Geschwindigkeit von 4,06m/s ist der Wobble-Mode, dessen Eigenwerte für den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich konjugiert komplex sind, stabil, um anschließend auf ein Maximum von 3,64/s bei 14,78m/s anzusteigen und sich bei höheren Geschwindigkeiten wieder zu „stabilisieren“. Die Frequenz ist stark geschwindigkeitsabhängig und steigt mit dieser vom Startwert 6,29Hz an. Typische Schwingungsfrequenzen dieses Modes liegen zwischen 6 und 9Hz.

Lean: Der Lean-Mode ist über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich stabil und weist ein lokales Maxima bei 11,16m/s auf. Die Schwingungsfrequenz liegt im Bereich von 2,04 bis 2,87Hz und ist von der Längsgeschwindigkeit abhängig.

In Abbildung 6.4 sind die Eigenwerte als Wurzelortskurven (auch als *root locus* bezeichnet) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt. Dazu werden die Imaginärteile der Eigenwerte über die dazugehörigen Realteile aufgetragen. Wenn man den Moden mit steigender Geschwindigkeit folgt, so ist der Startpunkt durch ein Quadrat ($u = 0,1\text{m/s}$) und der Endpunkt durch einen Stern ($u = 20\text{m/s}$) gekennzeichnet. Dieses Diagramm ist ebenso wie jenes der Eigenwertimaginärteile symmetrisch bezüglich der Abszisse, was man anhand des Weave-Modes erkennen kann.

Eine Aussage über das Stabilitätsverhalten des Systems ist auch mit dieser Darstellung der Eigenwerte möglich. So ist das System für Eigenwerte, die auf der linken Seite der Ordinate liegen, entsprechend Kapitel 6.1.4, asymptotisch stabil. Da aus dieser Darstellung jedoch keine Information über die zugrundeliegende Geschwindigkeit eines Punktes auf den Kurven gemacht werden kann, wird diese Darstellungsform nicht weiter verwendet.

Als eine weitere Darstellung können für die komplexen Eigenwerte, entsprechend den Gleichungen (6.15) und (6.16), das Lehr'sche Dämpfungsmaß D und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_n (bzw. ungedämpfte Eigenfrequenz f_n) in einem Diagramm dargestellt werden, wie dies in Abbildung 6.5 gemacht wurde. Der Unterschied zwischen gedämpfter und ungedämpfter Eigenkreisfrequenz (vergleiche die rechten Diagramme der Abbildungen 6.3 und 6.5) ist für den Wobble- und Lean-Mode sehr gering, wie auch aus dem Zusammenhang für die gedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ mit

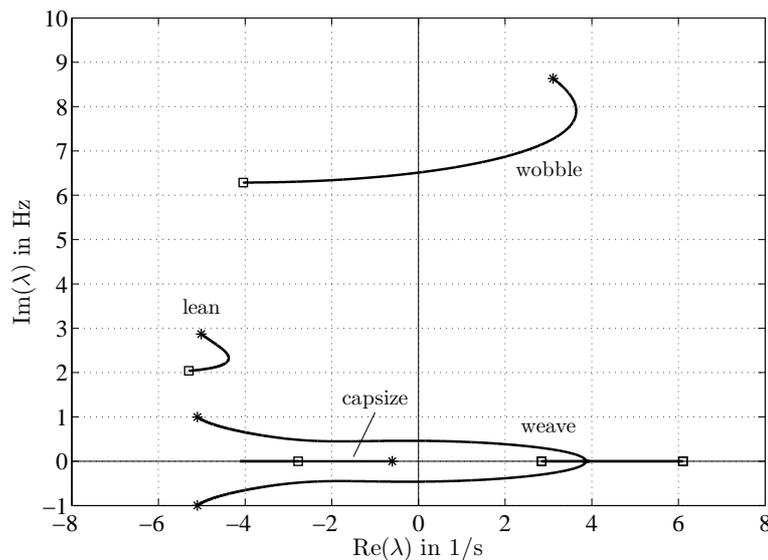


Abbildung 6.4: Wurzelortskurve des Trekking-Fahrrades in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit inkl. Benennung der Moden.

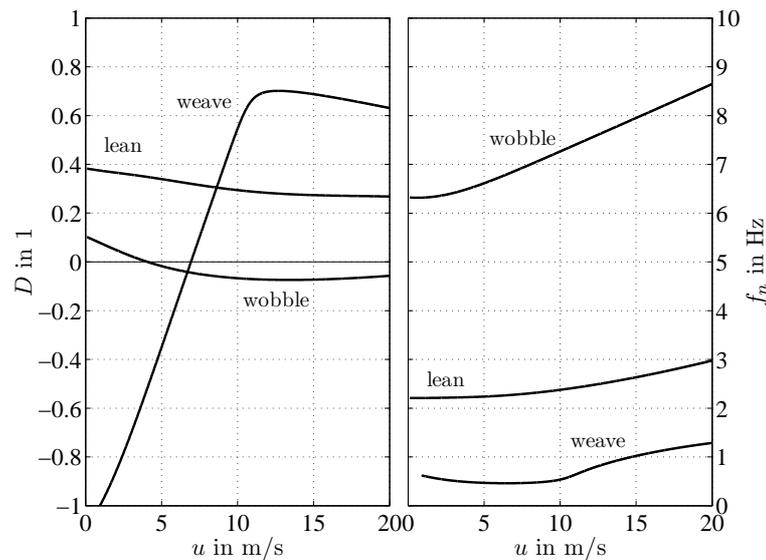


Abbildung 6.5: Lehr'sche Dämpfung D und ungedämpfte Eigenfrequenz f_n des Testfahrrades in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

D entsprechend dem linken Diagramm in Abbildung 6.5 gefolgert werden kann. Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz für den Weave-Mode weist hingegen teilweise deutlich höhere Werte auf als deren gedämpften Eigenkreisfrequenz, wie es auch die großen Dämpfungswerte vermuten lassen.

Auf das Stabilitätsverhalten der einzelnen Moden kann aus den Werten der zugehörigen Dämpfungen D geschlossen werden, welche für einen asymptotisch stabilen Mode positiv sein muss. Hat er hingegen eine *negative* Dämpfung so ist dieser Mode, und damit das System, instabil. Da in diesem Diagramm nur die komplexen Eigenwerte abgebildet werden können, ist diese Darstellung zur Stabilitätsbeurteilung des Gesamtsystems, für welche auch die reellen Eigenwerte berücksichtigt werden müssen, nicht besonders geeignet.

Stabilitätsaussagen

Allgemein ist bei einer Stabilitätsaussage immer hinzuzufügen für welche (Gleichgewichts-) Lage des Systems diese gemacht wird. Um dies jedoch im folgenden nicht immer anführen zu müssen, wird an dieser Stelle festgelegt, dass alle getätigten Stabilitätsaussagen bezüglich der *aufrechten Geradeausfahrt ohne vom Fahrer aufgebrachten Lenk- und Rollmomenten* gemacht werden.

Wenn bei der Untersuchung der Einflüsse auf das Stabilitätsverhalten in den folgenden Unterkapiteln, beim Vergleich der Eigenwertkurven für unterschiedliche Parameterwerte, von einem *stabileren* oder *instabileren* Mode im Vergleich zum gleichen Mode für andere Parameterwerte die Rede ist, so wird z.B. ein Mode mit positiven Eigenwertrealteilen als *stabiler* als der gleiche Mode mit anderen Parameterwerten und größeren positiven Eigenwertrealteilen bezeichnet, obwohl natürlich beide aufgrund des positi-

ven Realteils des Eigenwertes instabil sind.

Grundsätzlich sei dazu noch angemerkt, dass ein beispielsweise instabiler Mode im Vergleich zu einem anderen instabilen Mode weder stabiler noch instabiler sein kann, sondern beide instabile Moden sind und daher die Ausdrücke *stabiler* und *instabiler* eigentlich keinen Sinn machen (gleiches gilt natürlich auch für den stabilen Fall). Zur Vereinfachung der Formulierung bei der Ermittlung des Parametereinflusses auf das Stabilitätsverhalten in diesem Kapitel werden die beiden Ausdrücke und Abwandlungen davon, unter Berücksichtigung dieser Erläuterung, trotzdem verwendet.

6.3 Modellvergleich

Der Einfluss der Modellkomplexität auf das Stabilitätsverhalten soll durch eine Gegenüberstellung der Eigenwerte für verschiedene Modelle mit den Parameterwerten für das Trekking-Fahrrad dargestellt werden.

Eine solche Gegenüberstellung von drei Modellen mit nichtholonomen Reifenbindungen ist Abbildung 6.6 zu entnehmen. Es werden hier wieder nur die vier Moden (Capsize, Weave, Lean und Wobble), falls vorhanden, dargestellt. Es ist aus den Eigenwertkurven ersichtlich, dass mit dem Benchmark-Modell, aufgrund der fehlenden Freiheitsgrade, weder der Lean-Mode noch der Wobble-Mode abgebildet werden können. Durch eine Erweiterung dieses Modells um den Rollfreiheitsgrad des Fahrers φ_r findet der Lean-Mode eine Berücksichtigung.

Aus einem Vergleich der Kurven im Stabilitätsdiagramm kann geschlossen werden, dass

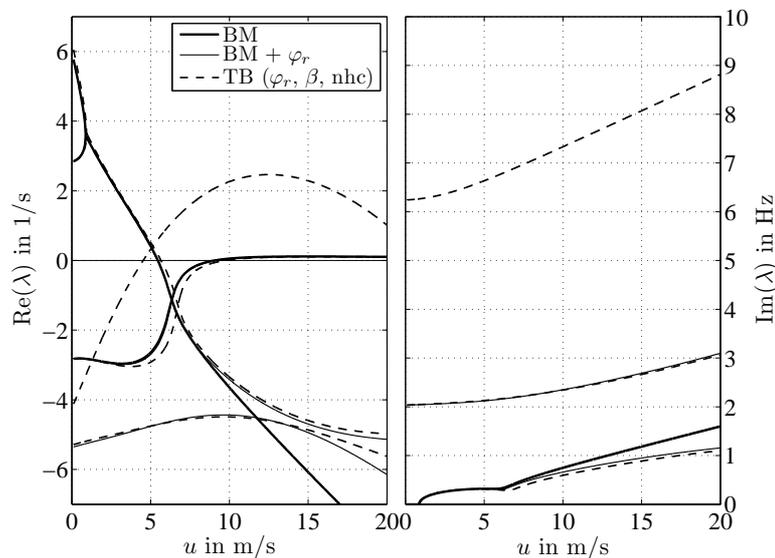


Abbildung 6.6: Stabilitätsdiagramm – Vergleich von Modellen mit nichtholonomen Reifenbindungen (BM – Benchmark-Modell; $BM + \varphi_r$ – Benchmark-Modell mit Fahrerrollfreiheitsgrad; $TB(\varphi_r, \beta, nhc)$ – Trekking-Fahrradmodell mit Fahrerrollfreiheitsgrad und Rahmenflexibilität sowie nichtholonomen Reifenbindungen)

bereits das einfache Benchmark-Modell, bestehend aus zwei Freiheitsgraden und damit vier Differentialgleichungen erster Ordnung, der Capsize-Mode und – zumindest für geringe Geschwindigkeiten – auch der Weave-Mode recht gut mit den Ergebnissen der aufwendigeren Modelle übereinstimmen. Bei höheren Geschwindigkeiten sinkt mit steigender Modellkomplexität die Weave-Frequenz und die Dämpfung von diesem Mode nimmt ebenfalls ab.

Ein Vergleich des Whipple-Fahrradmodells inklusive Fahrerrollfreiheitsgrad mit dem abgebildeten Trekking-Fahrradmodell legt den Schluss nahe, dass die Rahmenflexibilität eine leichte Verschiebung des Kreuzungspunktes von Capsize und Weave zu höheren Geschwindigkeiten hervorruft und damit den Capsize-Mode in diesem Bereich leicht stabilisiert und den Weave-Mode leicht destabilisiert. Bei höheren Geschwindigkeiten tritt eine geringe Frequenzdifferenz des Weave-Modes sowie eine geringere Dämpfung des Lean-Modes als Folge der Rahmenflexibilität auf. Auf die Lean-Frequenz scheint die Rahmensteifigkeit hingegen, im betrachteten Geschwindigkeitsbereich, keinen Einfluss zu haben. Eine weitere Folgerung aus dem Diagramm ist, dass zur Beschreibung des Wobble-Modes eine Rahmenflexibilität benötigt wird. Dies gilt zumindest solange, als kein Reifenmodell welches einen Querschlupf ermöglicht verwendet wird.

Eine Gegenüberstellung der Eigenwerte des Trekking-Fahrradmodells mit Berücksichtigung von Reifenkräften mit dem Trekking-Fahrradmodell mit nichtholonomen Reifenbindungen ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die Verwendung des Reifenmodells einen deutlichen Einfluss auf die Dämpfung der Weave-, Capsize- und Wobble-Moden hat. So werden der Weave- und Wobble-Mode deutlich destabilisiert,

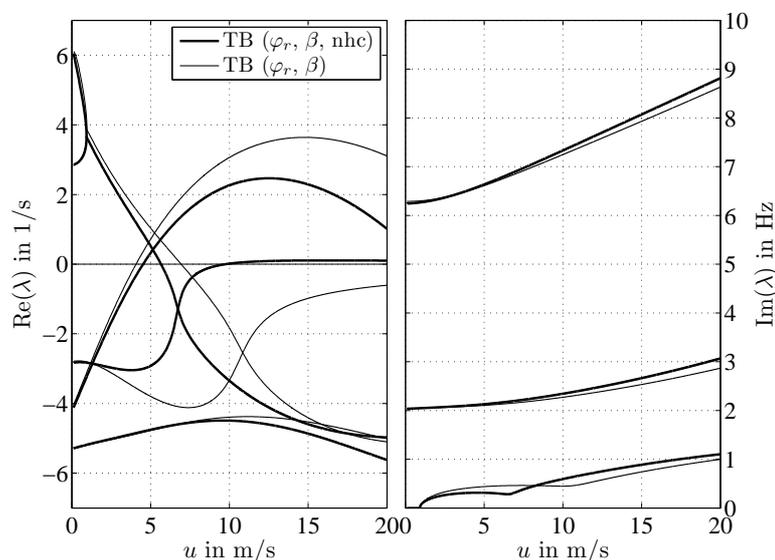


Abbildung 6.7: Stabilitätsdiagramm – Vergleich der nichtholonomen Reifenbindung mit einem Reifenmodell ($TB(\varphi_r, \beta, nhc)$ – Trekking-Fahrradmodell mit Fahrerrollfreiheitsgrad und Rahmenflexibilität sowie nichtholonomen Reifenbindungen; $TB(\varphi_r, \beta)$ – Trekking-Fahrradmodell mit Fahrerrollfreiheitsgrad und Rahmenflexibilität sowie Reifenmodell)

der Capsize-Mode ist hingegen über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich stabil. Bei den Frequenzen von Wobble- und Lean-Mode zeigen sich nur sehr geringe Differenzen, wohingegen die Verläufe der Weave-Frequenzen deutliche Unterschiede aufweisen. Wertmäßig ist jedoch auch hier, im Vergleich zur Dämpfung, der Unterschied nicht so eklatant.

Zusammenfassung

Aus dem Modellvergleich der Modelle mit nichtholonomen Reifenbindungen kann geschlossen werden, dass bereits das einfache Whipple-Fahrradmodell recht gute Ergebnisse für den Weave- und Capsize-Mode bei geringen Geschwindigkeiten liefert und sich daher zur Untersuchung dieser beiden Instabilitätsformen sehr gut eignet, zumal es mit seinen 2 Freiheitsgraden ein sehr einfaches Modell darstellt. Zur Untersuchung des Wobble-Modes ist offensichtlich die Berücksichtigung der Rahmenelastizität erforderlich, wobei zusätzlich der Reifen mit dem Reifenmodell abgebildet werden sollte, da dieser ebenfalls einen deutlichen Einfluss auf die Wobble-Schwingung besitzt. Das verwendete Reifenmodell wirkt, zumindest mit den verwendeten Parameterwerten, destabilisierend auf den Weave- und Wobble-Mode und stabilisierend auf den Capsize-Mode. Der Verlauf des Capsize-Modes in Abbildung 6.7 lässt vermuten, dass er falls überhaupt dann erst bei (für ein Fahrrad) sehr hohen Geschwindigkeiten instabil wird.

6.4 Einfluss der Reifen

Die in diesem und den folgenden Kapiteln durchgeführten Variationen von einzelnen Parametern wurden, um Klarheit über deren Einfluss auf das Stabilitätsverhalten schaffen zu können, mit übertriebenen Wertänderungen, welche nicht als realistische Werte gelten müssen, durchgeführt. Die dicken durchgezogenen Linien in den Stabilitätsdiagrammen stellen dabei, wenn nicht anders beschrieben, die Standardkonfiguration, also das Testfahrrad, dar. Bei der dünnen Linie hat der betrachtete Parameter nur die Hälfte seines ursprünglichen Wertes, bei der strichlierten Linie den doppelten Wert.

Die Bestimmung der Reifenparameter ist sehr schwierig, da es kaum Vergleichswerte in der Literatur gibt. Es soll daher in diesem Kapitel der Einfluss der einzelnen Parameterwerte auf das Stabilitätsverhalten betrachtet werden. Variationsmöglichkeiten bei den Messungen sind zum einen durch eine Änderung des Luftdrucks und zum anderen durch die Verwendung von unterschiedlichen Reifenmänteln möglich.

Die betrachteten Variationen der Reifenparameter wurden nur für den Vorderreifen durchgeführt, da bei den Messfahrten die genannten Variationsmöglichkeiten ebenfalls nur am Vorderreifen gemacht wurden. In vorausgegangenen Berechnungen wurde darüber hinaus festgestellt, dass der Einfluss der Hinterreifenparameter auf den Wobble-Mode wenn überhaupt feststellbar, dann äußerst gering ist (siehe auch [37]).

6.4.1 Einlauflänge

Mit Hilfe der Einlauflänge (Relaxationslänge) wird die dynamische Krafterzeugung des Reifens berücksichtigt. Eine längere Einlauflänge des Schräglaufwinkels, also eine größere zeitliche Verzögerung des Aufbaus der Seitenkraft (und damit auch des Rückstellmoments) zufolge von Schräglauf am Vorderreifen $\sigma_{\alpha 1}$ hat, entsprechend Abbildung 6.8, einen kleinen destabilisierenden Einfluss auf den Wobble-Mode sowie eine leichte Frequenzabsenkung dieser Schwingung zur Folge. Bei den anderen drei betrachteten Eigenbewegungen können keine Veränderungen festgestellt werden.

Für die Einlauflänge des Sturzwinkels am Vorderreifen $\sigma_{\gamma 1}$ konnte hingegen auf keinen der vier betrachteten Moden ein nennenswerter Einfluss festgestellt werden. Es wurde daher auf eine Abbildung verzichtet.

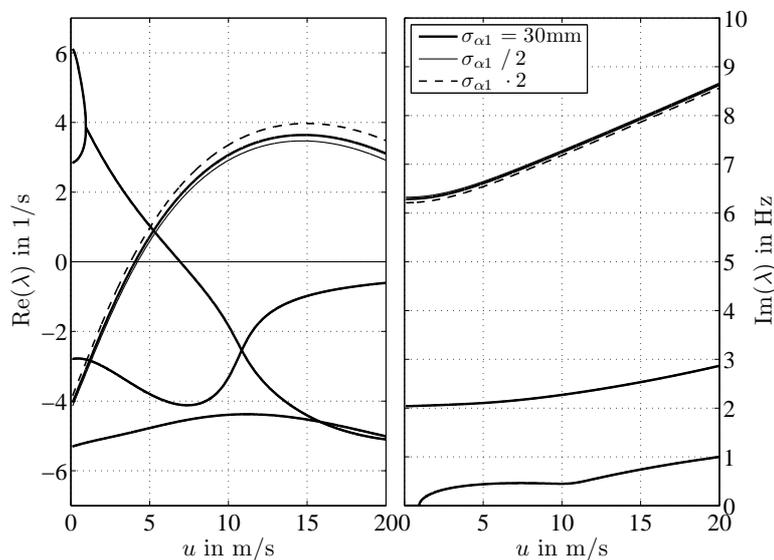


Abbildung 6.8: Stabilitätsdiagramm – Variation der Einlauflänge des Schräglaufwinkels am Vorderreifen $\sigma_{\alpha 1}$

6.4.2 Schräglauf- und Sturzsteifigkeit

Diese beiden Steifigkeiten stellen einen linearen Zusammenhang zwischen dem Schräglauf- bzw. Sturzwinkel und der Seitenkraft für kleine Winkel dar.

Der Abbildung 6.9 ist zu entnehmen, dass eine größere Schräglaufsteifigkeit $c_{F\alpha 1}$ den Wobble-Mode deutlich destabilisiert und dessen Frequenzanstieg mit der Geschwindigkeit ebenfalls größer ist. Auf den Weave- und Capsize-Mode hat die Schräglaufsteifigkeit hingegen kaum einen Einfluss.

Bei der Sturzsteifigkeit $c_{F\gamma 1}$ verhält es sich hingegen genau umgekehrt (siehe Abbildung 6.10). Eine größere Steifigkeit wirkt destabilisierend auf den Weave-Mode und deutlich stabilisierend auf den Capsize-Mode. Auf den Wobble-Mode kann hingegen erst bei

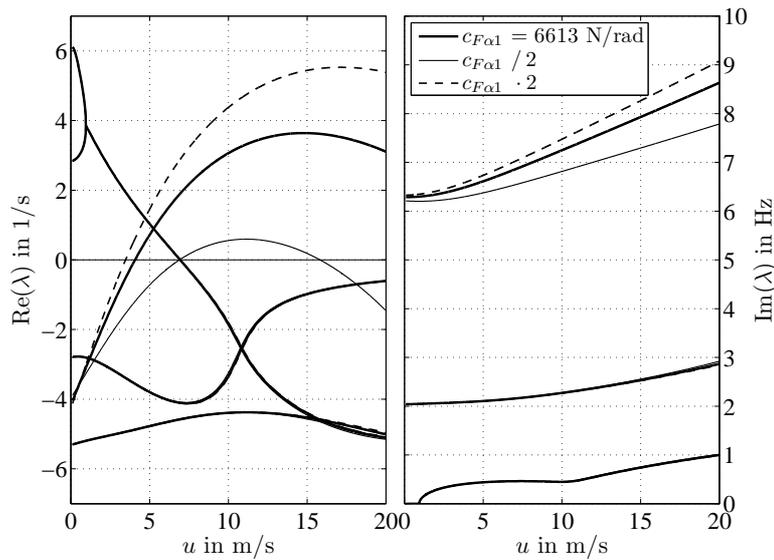


Abbildung 6.9: Stabilitätsdiagramm – Variation der Schräglauftsteifigkeit $c_{F\alpha 1}$

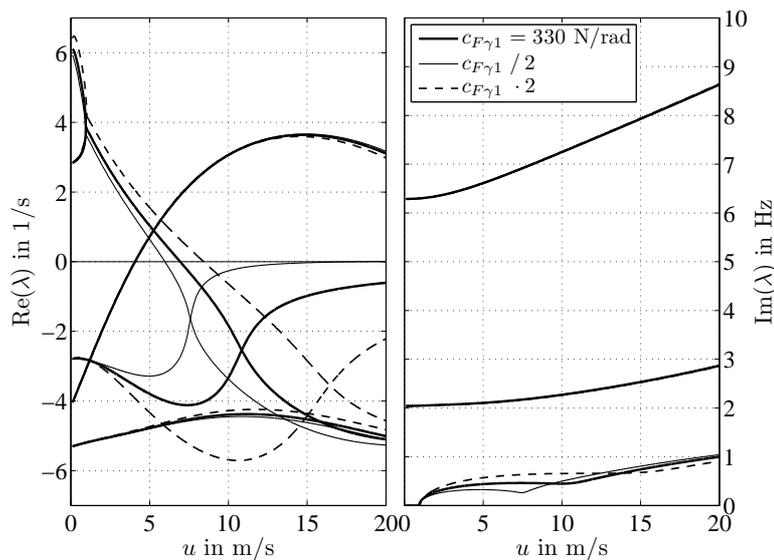


Abbildung 6.10: Stabilitätsdiagramm – Variation der Sturzsteifigkeit $c_{F\gamma 1}$

höheren Geschwindigkeiten ein sehr geringer Einfluss festgestellt werden. Bei den Frequenzverläufen wird nur jener des Weave-Modes beeinflusst. Für eine größere Steifigkeit ist die Weave-Frequenz im unteren Geschwindigkeitsbereich größer, im oberen hingegen niedriger als bei der Ausgangskonfiguration. Aus dem Frequenzverlauf ist darüber hinaus auch noch der Zusammenhang des lokalen Minimums der Weave-Frequenz mit dem Kreuzungspunkt der Realwerte von Weave und Capsize erkennbar.

6.4.3 Rückstellmomentensteifigkeit

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Seitenkraft und Rückstellmoment mit dem pneumatischen Nachlauf des Reifens, kann eine Veränderung der Koeffizienten $c_{M\alpha 1}$ bzw. $c_{M\gamma 1}$ bei konstanten Werten für $c_{F\alpha 1}$ bzw. $c_{F\gamma 1}$ als eine Änderung des pneumatischen Nachlaufs $t_{\alpha 01}$ bzw. $t_{\gamma 01}$ interpretiert werden (siehe auch Kapitel 4.2.2). In den Abbildungen 6.11 und 6.12 wurden genau diese Parameter variiert.

Ein größerer pneumatischer Nachlauf $t_{\alpha 01}$ bewirkt entsprechend den Eigenwertkurven in Abbildung 6.11 eine leichte Destabilisierung von Wobble und Weave sowie eine geringe Stabilisierung von Capsize. Bei höheren Geschwindigkeiten zeigt sich eine geringe Abnahme der Weave-Frequenz, wohingegen die Wobble-Frequenz für den gesamten Geschwindigkeitsbereich erhöht wurde.

Der Einfluss des pneumatischen Nachlaufs $t_{\gamma 01}$ auf die Eigenwerte wird in Abbildung 6.12 dargestellt. Der Reifenparameter $c_{M\gamma 1}$ hat offensichtlich auf den Wobble keinen relevanten Einfluss. Weave wird hingegen für größere Parameterwerte destabilisiert und Capsize deutlich stabilisiert. Auf die Weave-Frequenz ist ebenfalls ein geringer Einfluss feststellbar.

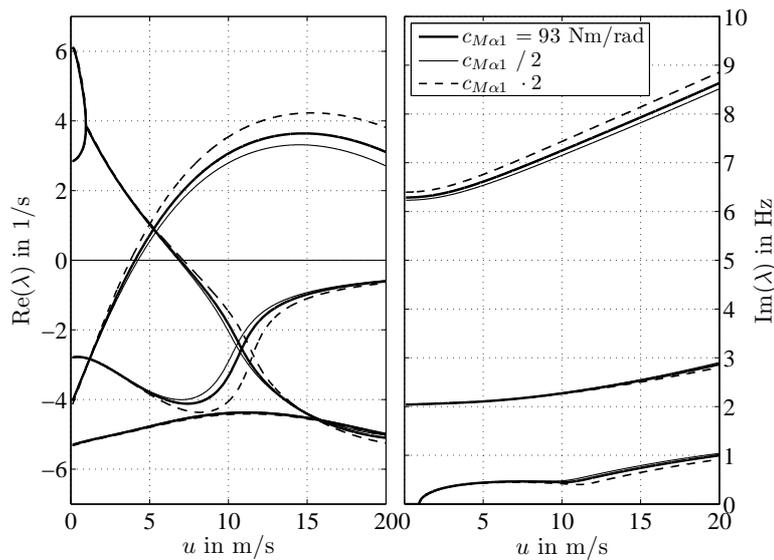


Abbildung 6.11: Stabilitätsdiagramm – Variation der Rückstellmomentensteifigkeit $c_{M\alpha 1}$

6.4.4 Kippmomentensteifigkeit

Die Kippmomentensteifigkeit $c_{Mx\gamma 1}$ entspricht für geringe Sturzwinkel, wie sie hier aufgrund der Linearisierung betrachtet werden, dem Produkt von Reifenquerschnittsradius bzw. dem deformierten Reifenquerschnittsradius mit der Aufstandskraft des Reifens. Ein größerer Reifenquerschnitt, und somit auch eine höhere Kippmomentensteifigkeit,

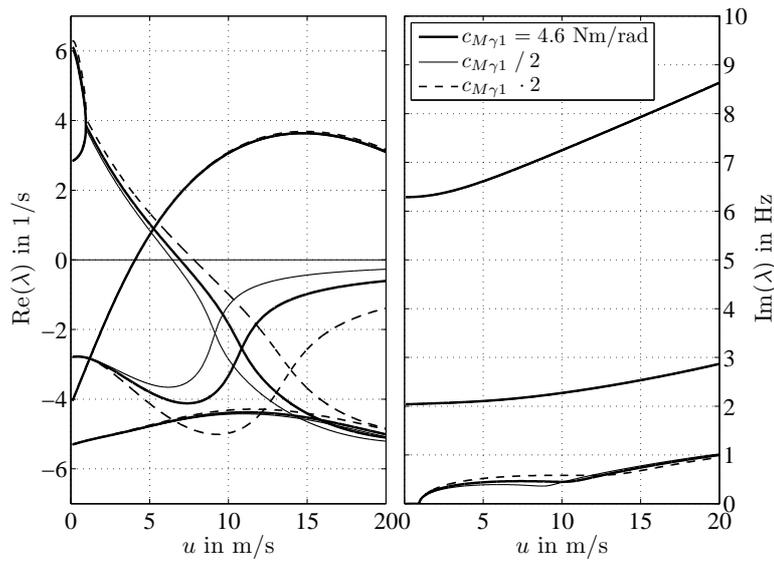


Abbildung 6.12: Stabilitätsdiagramm – Variation der Rückstellmomentensteifigkeit $c_{M\gamma 1}$

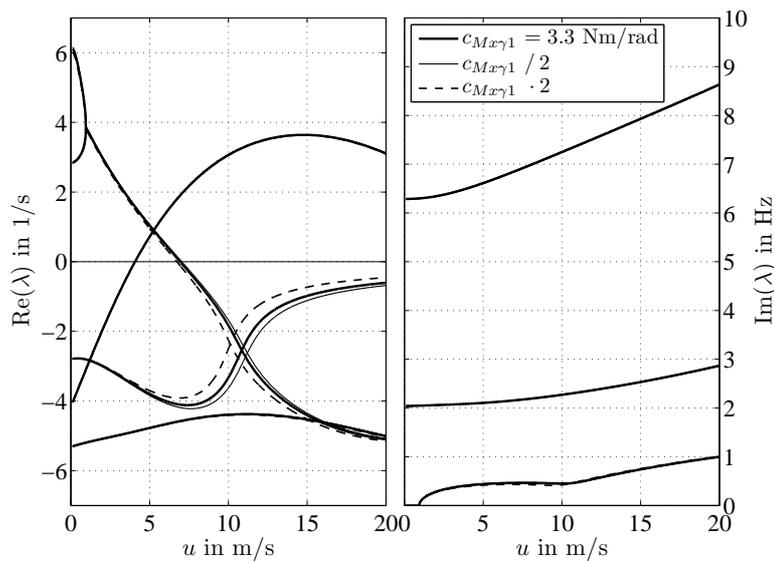


Abbildung 6.13: Stabilitätsdiagramm – Variation der Kippmomentensteifigkeit $c_{Mx\gamma 1}$

bewirkt lt. Abbildung 6.13 eine leichte Stabilisierung des Weave-Modes und eine leichte Destabilisierung des Capsize-Modes. Auf die Frequenzen kann kein nennenswerter Einfluss für die betrachtete Parametervariation festgestellt werden.

6.4.5 Messung

Um den Einfluss der Reifenparameter durch Messungen überprüfen zu können, wurden, wie bereits angedeutet, Messungen mit verschiedenen Reifenmänteln und Reifenluft-

drücken durchgeführt. Die aus den Messungen berechneten Eigenwerte des hochfrequenten Wobble-Modes sind in den folgenden Stabilitätsdiagrammen zusätzlich zu den Eigenwertkurven des Trekking-Fahrrades eingetragen.

Zunächst wurden Messfahrten mit drei möglichst unterschiedlichen Reifenmänteln am Vorderrad, die anhand von Abbildung 6.14 verglichen werden können, durchgeführt. Es handelt sich dabei, entsprechend der Abbildung von links nach rechts gehend, um den Standardreifenmantel mit der Bezeichnung *Schwalbe Marathon Race*, der schon deutlich abgefahren und auch am Hinterrad montiert ist, sowie um zwei neue Reifenmäntel, dem *Schwalbe Tyrago*, ein mit Profil versehener Reifen, der auf dem Bodenbelag im Büro die beste Haftung hatte, sowie dem *Continental TourRide*, ein Mantel mit größerem Reifenquerschnitt, tieferem Profil und, im Vergleich zu den anderen, einem deutlich steiferen Aufbau.



Abbildung 6.14: Verwendete Reifenmäntel: „SMR“ – Standardreifen: *Schwalbe Marathon Race*; „ST“ – *Schwalbe Tyrago*; „CTR“ – *Continental TourRide* (v.l.n.r)

Aus einem Vergleich der Wobble-Frequenzen und Wobble-Dämpfungen der drei Reifenmäntel kann unter Berücksichtigung einer Streuung, entsprechend Abbildung 6.15, festgestellt werden, dass die Wobble-Frequenzen für den Standardreifen (SMR) mit 6,60Hz bei 5m/s am höchsten, und für den Reifen der Firma Continental (CTR) mit 6,37Hz am niedrigsten sind. Die Wobble-Geschwindigkeiten liegen für die beiden neuen Reifen mit 4,21 und 4,28m/s sehr eng beieinander und deutlich über jener des Standardreifens. Es kann also, in Verbindung mit Abbildung 6.9, vermutet werden, dass die Schräglaufsteifigkeit $c_{F\alpha 1}$, welche den größten Einfluss auf Wobble hat, vom linken zum rechten Mantel in Abbildung 6.14 abnimmt. Die Messungen wurden mit einem Reifendruck von 4bar durchgeführt, die angeführten Werte sind aus Tabelle 5.2 übernommen.

In den Abbildungen 6.16 – 6.18 sind die gemessenen Wobble-Eigenwerte der drei Mäntel für unterschiedlichen Reifenluftdruck dargestellt. Dieser wurde dabei vom gewählten Standardreifenluftdruck von 4bar, welcher bei den Messungen wenn nicht anders angegeben verwendet wurde, um ± 2 bar variiert. Für den Reifen von Continental konnten keine Messungen bei 6bar durchgeführt werden, da dies über dem zulässigen Maximaldruck des Reifens liegen würde.

Aus den in Abbildung 6.16 eingetragenen Messergebnissen ist ersichtlich, dass die

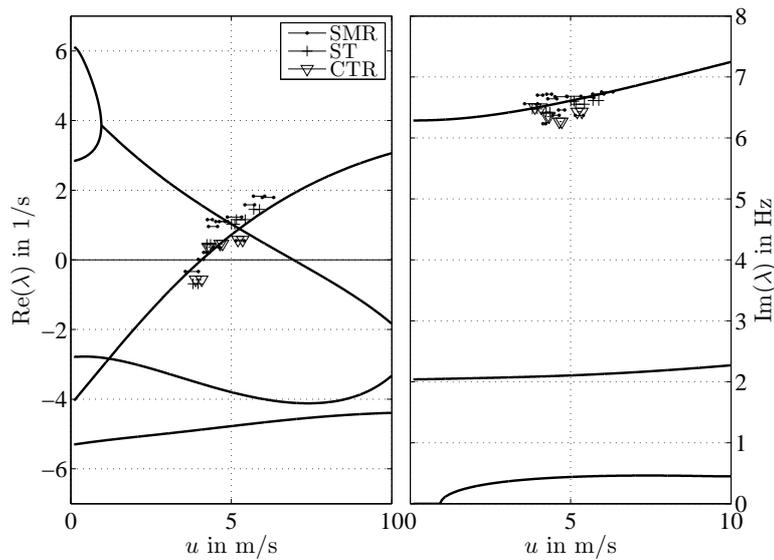


Abbildung 6.15: Stabilitätsdiagramm – Reifenmantelvergleich bei einem Reifenluftdruck von 4bar

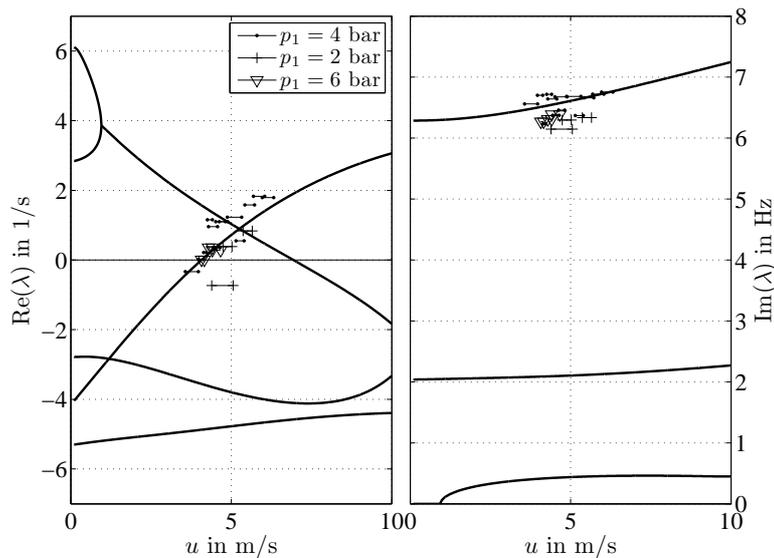


Abbildung 6.16: Stabilitätsdiagramm – Reifendruckeinfluss auf den Standardreifen *Schwalbe Marathon Race*

Wobble-Geschwindigkeit des Standardreifens mit sinkendem Luftdruck steigt. Zahlenmäßig ausgedrückt bedeutet das einen Anstieg der Wobble-Geschwindigkeit um 1,23 auf 4,93m/s. Der Umkehrschluss, dass die Wobble-Geschwindigkeit bei steigendem Luftdruck abnimmt, kann aufgrund der Messungen hingegen nicht bestätigt werden. Bei den Schwingungsfrequenzen des Lenkers kann ebenfalls ein frequenzsenkender Einfluss mit sinkendem Reifenluftdruck festgestellt werden. Eine Erhöhung von 4 auf 6bar Druck hat hingegen wie bei der Wobble-Geschwindigkeit keinen Einfluss auf die Frequenz.

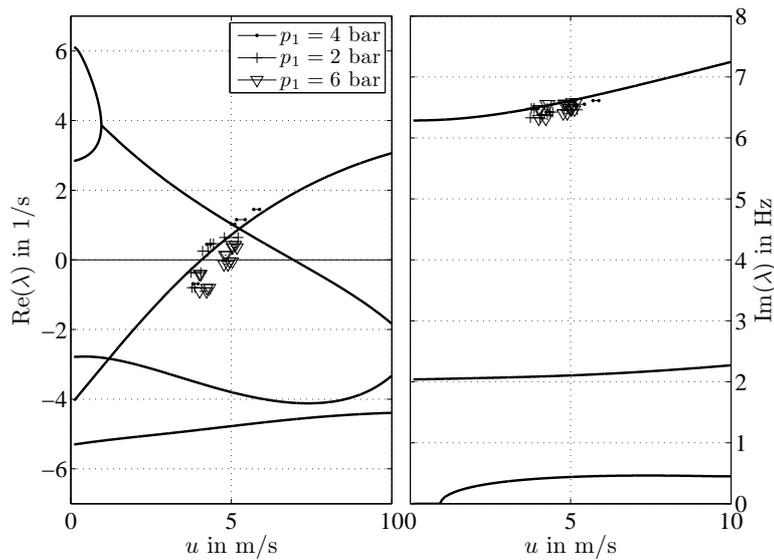


Abbildung 6.17: Stabilitätsdiagramm – Reifendruckeinfluss auf den Reifen *Schwalbe Tyrago*

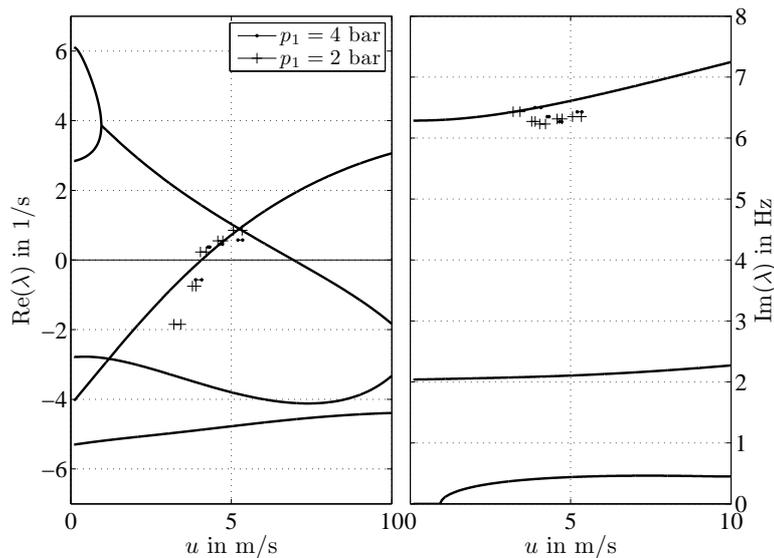


Abbildung 6.18: Stabilitätsdiagramm – Reifendruckeinfluss auf den Reifen *Continental TourRide*

Möglicherweise ist dies eine Folge der Nichtlinearitäten in den Reifenkennlinien. Der Wobble-Mode zeigt für den Reifen *Schwalbe Tyrago*, im Vergleich zum Standardreifen, eine gänzlich andere Abhängigkeit des Stabilitätsverhaltens vom Reifenluftdruck. Bei diesem Reifen bewirkt eine Erhöhung des Reifenluftdrucks auch eine Erhöhung der Wobble-Geschwindigkeit von 4,21 auf 4,83m/s, ein Druckabsenken zeigt hingegen keinen Einfluss auf die Stabilität des Wobbles. Den gemessenen Frequenzen kann aufgrund der Messergebnisstreuung kein Zusammenhang zum Reifendruck entnommen werden

(vergleiche Abbildung 6.17).

Bei Messungen mit dem Reifen von *Continental* konnten entsprechen Abbildung 6.18 keine Auswirkungen des Reifendrucks auf das Stabilitätsverhalten festgestellt werden.

6.4.6 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann aus den Parametervariationen in diesem Kapitel geschlossen werden, dass sich auf den Wobble-Mode jene Reifenparameter merklich auswirken, die in Zusammenhang mit dem Schräglaufwinkel des Vorderreifens stehen. Weiters ist auffällig, dass eine Erhöhung dieser Werte zu einer Destabilisierung dieses Modes führen.

Auf den Weave- und Capsize-Mode haben hingegen vornehmlich jene Reifenparameter einen Einfluss, die mit dem Sturzwinkel am Vorderreifen in Verbindung stehen. Aus den Diagrammen ist überdies noch ersichtlich, dass größere Werte zumeist zu einer Destabilisierung des Weave- und einer Stabilisierung des Capsize-Modes führen. Die einzige Ausnahme stellt dabei die Kippmomentensteifigkeit dar.

Einen nennenswerten Einfluss auf drei der vier hier behandelten Schwingungsformen besitzt die Rückstellmomentensteifigkeit (vergleiche Abbildung 6.11). Die Zusammenhänge einer höheren Steifigkeit mit der Stabilität der Moden gelten auch hier.

Reifenmäntel

Aus dem Vergleich der gemessenen Lenkungsschwingungsfrequenzen mit den unterschiedlichen Reifenmänteln kann, wenngleich auch die Differenzen relativ gering sind, in Verbindung mit den durchgeführten Parametervariationen gefolgert werden, dass die Schräglaufsteifigkeit (und die Rückstellmomentensteifigkeit zufolge Schräglauf) der Mäntel entsprechend Abbildung 6.14 vom linken zum rechten abnimmt. Diese Aussage bezieht sich auf einen Reifenluftdruck von 4bar.

Reifenluftdruck

Ein Zusammenhang zwischen Schräglaufwinkel- bzw. Sturzwinkelsteifigkeit und dem Reifendruck ist anhand von Messungen für Motorradreifen in [20, 21, 26] angegeben. Eines dieser Diagramme wird in Abbildung 6.19 dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass die Seitenkraft zufolge Sturz mit steigendem Luftdruck abnimmt (links oben) und die Seitenkraft zufolge eines Schräglaufwinkels mit steigendem Luftdruck zunimmt (links unten). Der Seitenkraft-Reifenluftdruck-Zusammenhang für den Schräglaufwinkel ist allerdings laut [21] nicht eindeutig und kann auch genau umgekehrt, sprich die Seitenkraft zufolge eines Schräglaufwinkels nimmt mit steigendem Luftdruck ab, sein.

Die Zusammenhänge der Rückstellmomente zufolge eines Sturz- oder Schräglaufwinkels sind in den beiden rechten Diagrammen der Abbildung dargestellt. Das durch

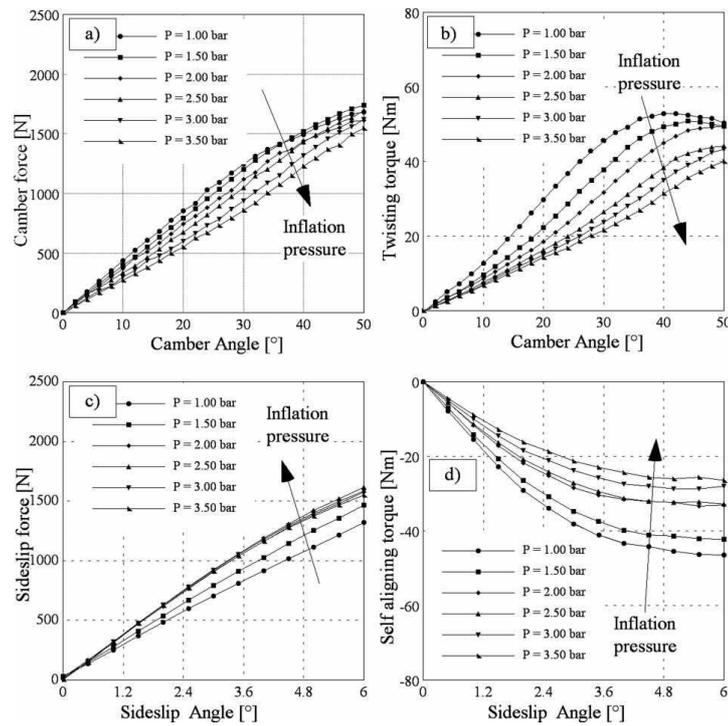


Abbildung 6.19: Einfluss des Reifenluftdrucks auf Reifenkräfte und Momente, [26]

einen Sturzwinkel des Reifens erzeugte Moment wird im Englischen als *twisting torque* bezeichnet und bewirkt ein Drehen des Rades in die Kurve, wohingegen das vom Schräglaufwinkel hervorgerufene Rückstellmoment (Englisch: *self aligning torque*) das Rad aus der Kurve herausdreht, was auch aus den Vorzeichen der Momente im Diagramm erkennbar ist. Darüber hinaus kann aus den Diagrammen eine Verringerung der Steifigkeiten mit steigendem Luftdruck abgelesen werden.

Der Zusammenhang für die Einlauflänge σ_α mit der Schräglaufsteifigkeit $c_{F\alpha}$ und der Seitensteifigkeit c_{Fy} wird in [19] Gleichung (7.6) folgendermaßen angegeben:

$$\sigma_\alpha = \frac{c_{F\alpha}}{c_{Fy}} \quad (6.21)$$

Für eine Erhöhung des Reifenluftdrucks bedeutet dies, dass die Schräglaufsteifigkeit $c_{F\alpha}$, entsprechend der Abbildung 6.19, ebenso wie die Seitensteifigkeit c_{Fy} zunimmt, womit die Änderung der Einlauflänge vom Verhältnis dieser beiden Änderungen abhängig ist und keine allgemeine Aussage über den Einfluss des Reifendrucks auf die Einlauflänge aus dieser Gleichung gemacht werden kann.

Neben dieser Gleichung wird in [16] Kapitel 4.6 aus Messdaten für Flugzeugreifen darauf geschlossen dass die Relaxationslänge proportional zur halben Latschlänge ist. Unter der Voraussetzung dass diese Beziehung neben einer Veränderung der Radlast auch bei einer Variation des Reifenluftdrucks gültig ist, würde dies bedeuten, dass mit steigendem Reifenluftdruck und damit kleinerer Reifenkontaktlänge auch die Einlauflänge abnimmt.

Für die weitere Betrachtung soll vorausgesetzt werden, dass der Fahrradreifen ein ähnliches Verhalten wie ein Motorradreifen, entsprechend Abbildung 6.19 aufweist.

Über den Zusammenhang der Schwingungsinstabilitäten mit steigendem Reifenluftdruck kann folgendes zusammengefasst werden:

Wobble:

- Stabilisierung durch kürzere Einlauflänge (unter der Voraussetzung, dass die Schräglaufsteifigkeitssteigerung zufolge Luftdruckerhöhung geringer ist als die Seitensteifigkeitserhöhung bzw. in Übereinstimmung mit der Proportionalitätsbeziehung zur halben Latschlänge),
- Destabilisierung durch höhere Schräglaufsteifigkeit,
- Stabilisierung durch geringere Rückstellmomentensteifigkeit zufolge Schräglauf.

Weave:

- Stabilisierung durch geringere Sturzsteifigkeit,
- Stabilisierung durch geringere Rückstellmomentensteifigkeit zufolge Schräglauf,
- Stabilisierung durch geringere Rückstellmomentensteifigkeit zufolge Sturz.

Ganz allgemein kann aus einem Vergleich der Diagramme der Reifenparametervariation mit jenem des Modells mit Rahmenflexibilität und Fahrerrollfreiheitsgrad sowie nichtholonomen Reifenkräften (Abbildung 6.7) gefolgert werden, dass durch die Verwendung des Pacejka-Reifenmodells eine Verschlechterung der Stabilität des Weave- und Wobble-Modes, jedoch eine Stabilisierung des Capsize-Modes gegenüber einem Modell ohne Querschlupf der Reifen (nichtholonom) eintritt.

6.5 Einfluss des gyroskopischen Effekts

In der Literatur ist immer wieder vom wichtigen Einfluss der Kreiseffekte auf das Stabilitätsverhalten von Fahrrädern zu lesen. So stellten Sommerfeld und Klein bereits 1910 in [5] für das Fahrradmodell von Whipple fest, dass dieses ohne dem gyroskopischen Effekt keinen stabilen Geschwindigkeitsbereich besitzt.

Für das Trekking-Fahrrad kann dieser Sachverhalt ebenfalls recht einfach überprüft werden, indem man das polare Massenträgheitsmoment vom Vorderrad zu null setzt, wodurch dessen Kreiseffekte eliminiert werden. Als Folge davon bleibt der Weave-Mode über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich instabil und der Wobble-Mode wird ebenfalls deutlich destabilisiert, wohingegen der Capsize-Mode wesentlich stabiler wird (vergleiche Abbildung 6.20). Dieses Ergebnis stimmt, zumindest im

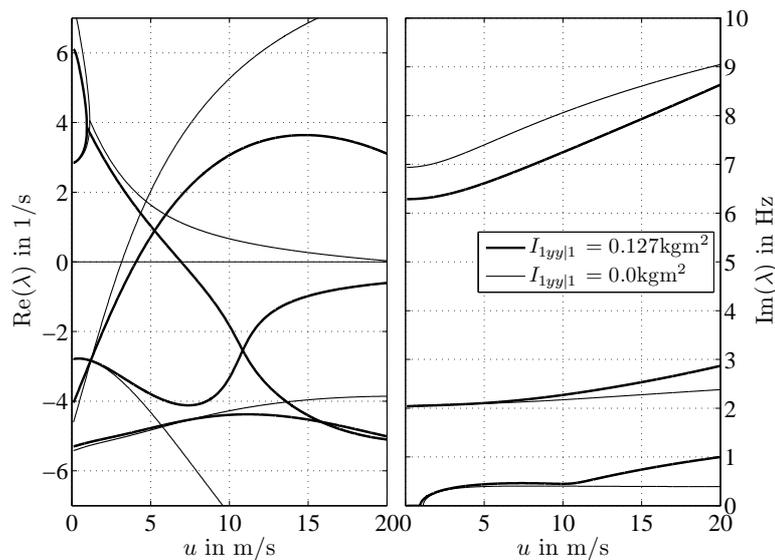


Abbildung 6.20: Stabilitätsdiagramm – Variation des Massenträgheitsmoments am Vorderrad

betrachteten Geschwindigkeitsbereich, mit jenem von Sommerfeld und Klein überein. Die Wobble-Frequenzen steigen gegenüber der Standardkonfiguration deutlich an, wohingegen die Weave-Frequenz bei höheren Geschwindigkeiten deutlich verringert wird. Beachtenswert ist auch die relativ starke Beeinflussung des Lean-Modus bei höheren Geschwindigkeiten.

Eine Erhöhung des Massenträgheitsmoments am Vorderrad hat im Umkehrschluss zu diesen Beobachtungen einen stabilisierenden Einfluss auf Weave und Wobble zur Folge. Um dies durch Messungen überprüfen zu können, wurde zwischen den Speichen ein mit Sand gefüllter Fahrradschlauch mit 1,4kg entsprechend Abbildung 6.21b befestigt. Den Messergebnissen mit diesem Vorderrad wurde in Abbildung 6.21a eine Berechnung mit dem erhöhten Massenträgheitsmoment gegenübergestellt. Die Wobble-Frequenzen der Messungen, welche bei einer Geschwindigkeit von 5m/s bei 6,36Hz liegen, stimmen mit der Berechnung (6,37Hz) sehr gut überein. Bei der Wobble-Geschwindigkeit, welche bei den Messungen für das schwerere Vorderrad auf 4,67m/s anstieg, ist die Übereinstimmung mit der Berechnung (4,87m/s) nicht ganz so gut. Die Eigenwertrealteile der Messungen weichen, wie man der Abbildung entnehmen kann, von der Berechnung deutlich ab. Ein möglicher Grund dafür ist die Unwucht des Vorderrads, aufgrund der ungleichmäßig verteilten Masse des Sandschlauchs, wodurch die Wobble-Schwingung verstärkt angeregt wird.

6.6 Einfluss des Fahrers auf den Wobble-Mode

Ganz allgemein kann der Fahrer durch ein leichtes Festhalten der Lenkstange Wobble verhindern. Aber auch bei der freihändigen Fahrt hat der Fahrer einen starken Einfluss

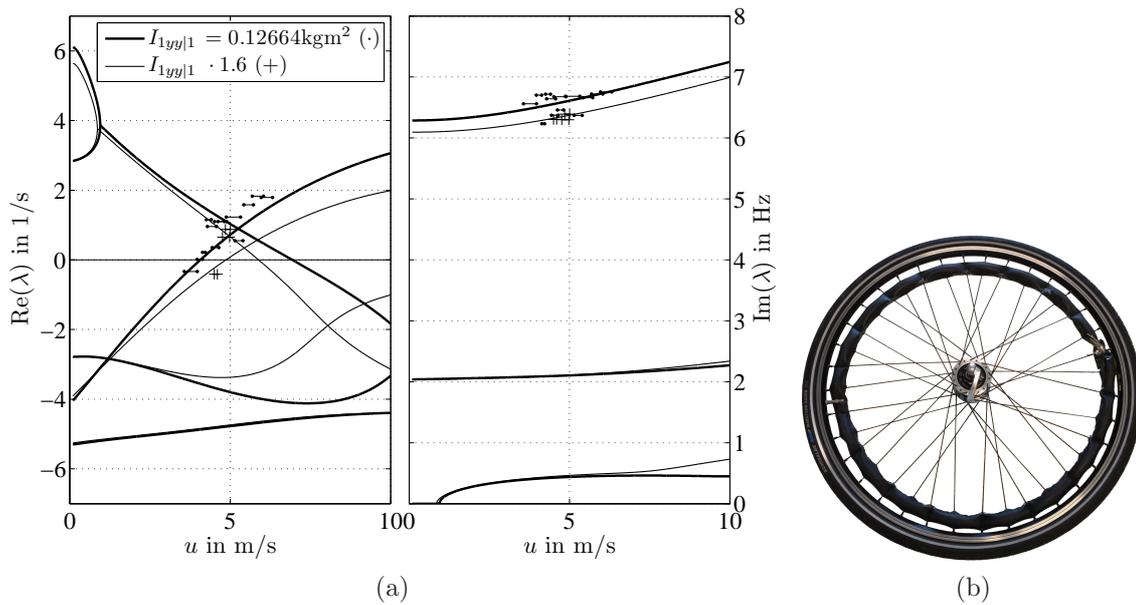


Abbildung 6.21: (a) Stabilitätsdiagramm – Variation des Massenträgheitsmoments am Vorderrad inklusive Messungen (b) Vorderrad mit erhöhtem Massenträgheitsmoment

auf Wobble.

6.6.1 Fahrergewicht

Aus Abbildung 6.22 wird der Einfluss der Fahrer Masse auf das Stabilitätsverhalten sichtbar. Die Parameter für die verwendeten Fahrer wurden aus [37] entnommen. Dabei handelt es sich beim Standardfahrer, wie bereits in Kapitel 4.5 beschrieben, um das 50. Perzentil (86,15kg). Die beiden anderen Parametersätze des Fahrers beschreiben das 5. Perzentil (68,58kg) bzw. das 95. Perzentil (101,81kg). Für einen leichteren Fahrer kann sich der Wobble-Mode komplett stabilisieren, oder es erhöht sich zumindest, wie in dem Diagramm, die Wobble-Geschwindigkeit. Aber auch die anderen Moden sind stark vom Fahrergewicht abhängig. Die Wobble-Frequenz erhöht sich für einen leichteren Fahrer ebenso wie die Lean- und die Weave-Frequenz. Letztere aber erst bei höheren Geschwindigkeiten.

Aus den Messungen mit verschiedenen Fahrern, die ebenfalls in dem Diagramm eingetragen sind, können diese Aussagen für den Wobble-Mode bestätigt werden. Die Wobble-Geschwindigkeit für den leichtesten Testfahrer steigt von 3,70m/s auf 5,58m/s an. Bei der Beurteilung der Messergebnisse mit den beiden leichteren Testfahrern ist jedoch zu berücksichtigen, dass aufgrund der geringen Fahrpraxis unter Testbedingungen und der damit verbundenen Instruktionen während der Testfahrt, eine relativ große Streuung der wenigen Messergebnisse vorliegt.

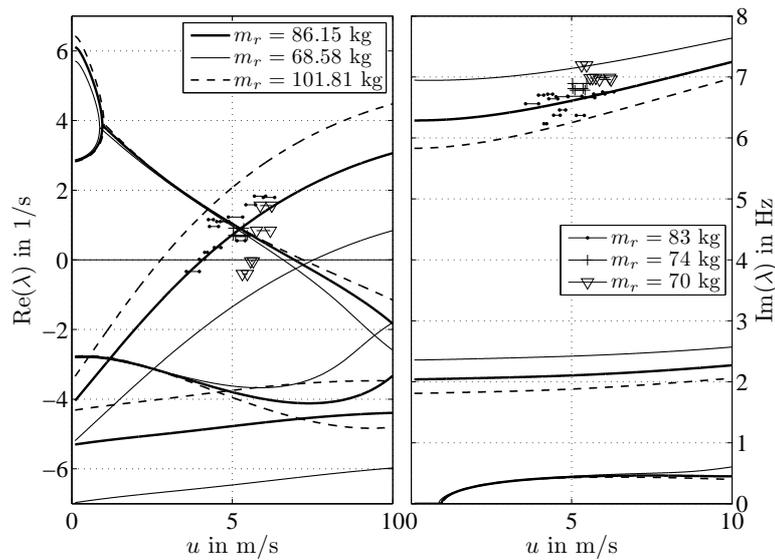


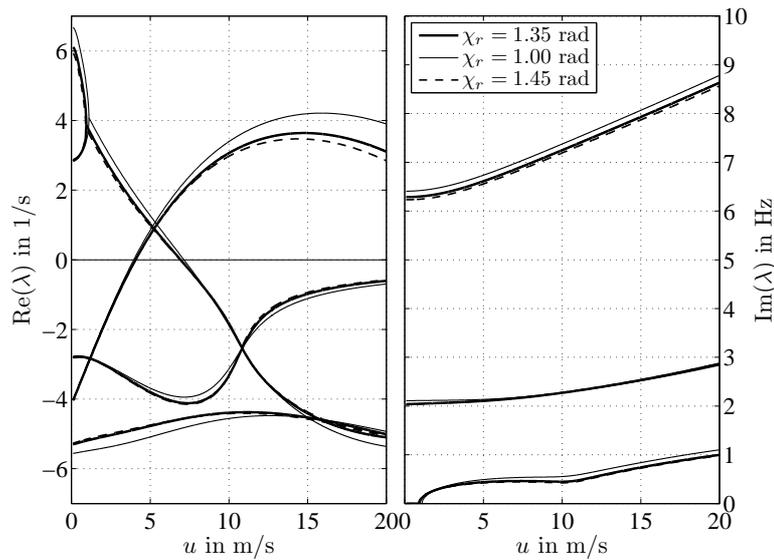
Abbildung 6.22: Stabilitätsdiagramm – Variation des Fahrergewichts mit Messungsergebnissen

6.6.2 Sitz- und Sattelposition

Im Gegensatz zum eben behandelten Fahrergewicht kann die Oberkörperneigung vom Fahrer ganz bewusst geändert werden. Es stellt sich daher die Frage, ob durch eine bestimmte Sitzposition, also einer bewusst aufrechten oder nach vorne geneigten Position des Oberkörpers, der Wobble-Mode stabilisiert werden kann. Neben diesem Aspekt ist dies aber auch für die Beurteilung der Messfahrten von Interesse, da bei diesen die Oberkörperneigung, obwohl darauf geachtet wurde, bestimmt nicht immer identisch war.

Die Auswirkungen einer Änderung der Oberkörperneigung, welche durch den Winkel χ_r , der den Winkel zwischen Fahrbahn und der Verbindungslinie von Oberkörperschwerpunkt mit Sattel angibt, definiert ist, von dem standardmäßig verwendetem Winkel $\chi_r = 1,35\text{rad} \approx 77,3^\circ$ zu einer sportlicheren Position mit einem Winkel von $\chi_r = 1,00\text{rad} \approx 57,3^\circ$ bzw. zu einer komfortableren aufrechten Sitzposition $\chi_r = 1,45\text{rad} \approx 83,1^\circ$, auf die dominanten Moden sind in Abbildung 6.23 dargestellt. Der Schwerpunkt des Fahreroberkörpers verschiebt sich dabei um $(\Delta x_r \ \Delta z_r) = (111,65 \ 46,65)$ mm bzw. $(-34,23 \ -5,90)$ mm¹. Bei einer Verlagerung des Oberkörperschwerpunktes nach vorne unten (sportliche Oberkörperhaltung), und damit einer höheren Gewichtsbelastung des Vorderreifens, tritt im oberen Geschwindigkeitsbereich eine leichte Destabilisierung des Wobbles auf. Überdies erhöht sich die Wobble-Frequenz etwas. Auf den Weave-, Capsize- und Lean-Mode können ebenfalls geringe Auswirkungen festgestellt werden. In Hinblick auf die Messungen kann zusammengefasst werden, dass die gemessenen Wobble-Eigenwerte durch die Oberkörperneigung nicht sehr stark beeinflusst werden. Für die Wobble-Geschwindigkeit scheint der Einfluss überhaupt äußerst gering

¹Bemerkung: Die z -Achse ist entsprechend Kapitel 4 nach unten gerichtet

Abbildung 6.23: Stabilitätsdiagramm – Veränderung des Oberkörperneigewinkels χ_r

zu sein.

Anhand einer Veränderung der Sattelposition, mit dem die Positionen der Fahrerswerpunkte (Oberkörper mit Armen und Kopf sowie Beine) mitverschoben werden, kann der Einfluss einer Lageänderung des Gesamtschwerpunktes sowie des Fahreroberkörpers diskutiert werden. Prinzipiell würde sich dazu eine Veränderung des Sitzrohrwinkels und der Sattelhöhe eignen. Da das Sattelrohr jedoch geneigt ist, würde eine Änderung von einer der beiden Komponenten immer einen Schwerpunktsversatz in Längs- und Hochrichtung hervorrufen. Um hingegen den Einfluss einer Lageänderung des Fahrerswerpunktes getrennt in x - und z -Richtung betrachten zu können, wird der Fahrer zunächst in Längsrichtung und anschließend in vertikaler Richtung verschoben. Die in Abbildung 6.24 gezeigten Eigenwerte für eine Verschiebung des Fahrers um $\mp 100\text{mm}$ bewirken eine Versatz des Gesamtschwerpunktes von $x_T = 351,2\text{mm}$ auf $268,8$ bzw. $433,7\text{mm}$. Der Wobble-Mode wird dabei vor allem bei höheren Geschwindigkeiten für eine weiter vorne liegende Fahrerposition destabilisiert. Im Bereich der Wobble-Geschwindigkeit und der Imaginärwerte des Wobbles sind die Differenzen hingegen nicht so ausgeprägt.

Ein vertikaler Versatz des Fahrers um $\pm 100\text{mm}$ und damit des Gesamtschwerpunktes von $z_T = -1039,4\text{mm}$ auf $-956,9$ bzw. $-1121,9\text{mm}$ scheint hingegen keinen ausgeprägten Einfluss auf das Stabilitätsverhalten nach sich zu ziehen (vergleiche Abbildung 6.25). Für einen niedriger gelegenen Schwerpunkt des Fahrers nehmen die Eigenwertrealteile des Lean-Modus durchwegs etwas stabilere Werte an, und die Imaginärteile werden leicht erhöht. Ebenso wird dadurch die Wobble-Frequenz ein wenig verringert.

Aus einem Vergleich der Abbildung 6.24 mit 6.25 kann gefolgert werden, dass der Abstand des Schwerpunktes von der Fahrbahn im Vergleich zu dessen Position in Längsrichtung, und damit der Gewichtsverteilung auf die Räder, einen untergeordneten Ein-

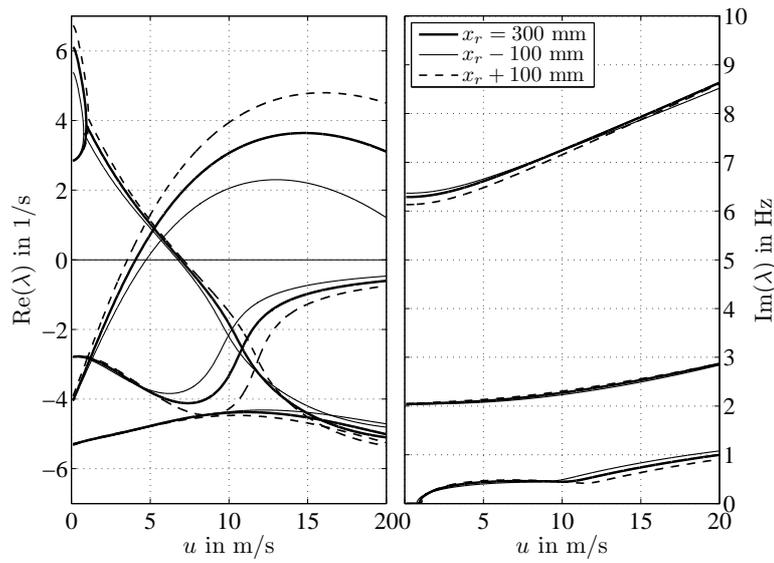


Abbildung 6.24: Stabilitätsdiagramm – Variation der Sattelposition in Längsrichtung

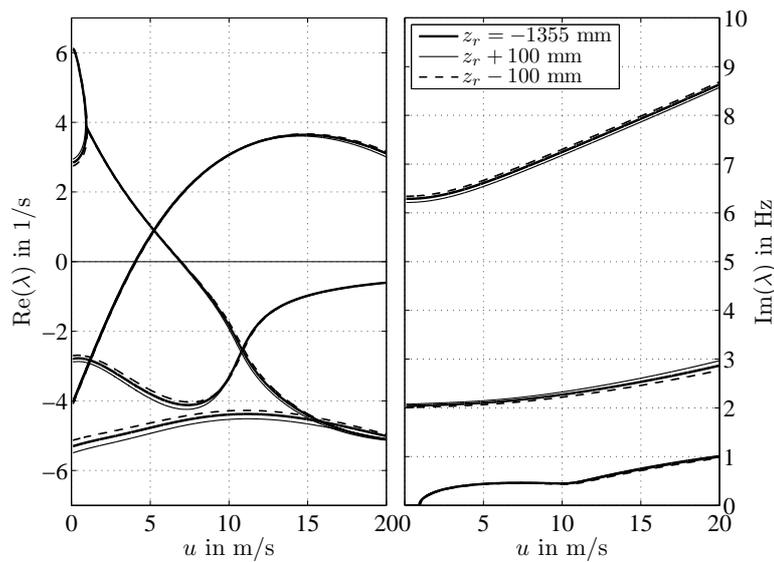


Abbildung 6.25: Stabilitätsdiagramm – Variation der Sattelposition in Hochrichtung

fluss auf das Stabilitätsverhalten besitzt. Ebenso kann daraus gefolgert werden, dass die Auswirkungen der Oberkörperneigung auf die Eigenwerte nur durch eine Änderung des Abstandes a_r hervorgerufen werden. Das Stabilitätsverhalten des Fahrrades, und dabei besonders jenes des Wobbles, wird also sehr stark von der Position des Gesamtschwerpunkts in Längsrichtung, aber nicht von dessen Abstand zur Fahrbahn, beeinflusst.

6.6.3 Rumpfmuskulanspannung

Bei den Messfahrten wurde ein relativ großer Einfluss der Rumpfmuskulaturanspannung auf das Stabilitätsverhalten des Wobble-Modes festgestellt. Im Modell wird der Fahreroberkörper als invertiertes Pendel, mit dem Gelenk in der Hüfte, das eine Drehbewegung um eine in Längsrichtung zeigende Achse ermöglicht, modelliert. Der Oberkörper wird dabei von einem passiven Feder- Dämpferelement gestützt. Die Beine des Fahrers werden hingegen als fix mit dem Rahmen verbunden betrachtet.

Um den Einfluss der Rumpfmuskulatur auch in der Berechnung zeigen zu können, werden die aus [37] übernommenen Werte für die Steifigkeit und Dämpfung des Fahreroberkörpers variiert. Über den Zusammenhang zwischen Muskelanspannung und Steifigkeit ist aus [18] zu entnehmen, dass die RumpfstEIFigkeit mit der Anspannung der Rumpfmuskulatur steigt. Der Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Dämpfung wird in [28] über das Lehr'sche Dämpfungsmaß D hergestellt, welches annähernd konstant gehalten wird.

Für ein konstantes Lehr'sches Dämpfungsmaß D ist bei einem Einmassenschwinger, als welcher der Oberkörper bei fixierten Beinen angesehen werden kann, die Dämpfung proportional zur Wurzel der Steifigkeit:

$$k_{\varphi_r} \propto \sqrt{c_{\varphi_r}} \quad (6.22)$$

Für eine Halbierung bzw. Verdoppelung der Steifigkeit bedeutet dies, dass die Dämpfung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ dividiert bzw. multipliziert werden muss. Es ergibt sich damit für eine Steifigkeit von $c_{\varphi_r} = 380\text{Nm/rad}$ bzw. 1520Nm/rad eine Dämpfung von $k_{\varphi_r} = 24,0\text{Nms/rad}$ bzw. $48,1\text{Nms/rad}$.

Bei den Steifigkeitswerten wird prinzipiell von einer vor- bzw. angespannten Rumpfmuskulatur ausgegangen. Der niedrigere Wert für die Steifigkeit gilt für eine entspannte Rumpfmuskulatur und der höhere Wert soll eine besser trainierte Rumpfmuskulatur darstellen. Der Einfluss der Rumpfmuskulaturanspannung auf die Eigenwerte ist in Abbildung 6.26 dargestellt. Auf den Weave- Wobble- und Capsize-Mode kann, trotz der starken Parametervariation, kaum eine Änderung festgestellt werden. Der Lean-Mode ändert sich hingegen, verständlicherweise, sehr stark.

In der Grafik sind neben den Eigenwertkurven auch Ergebnisse von Messungen eingezeichnet. Die mit einem „Punkt“ eingezeichneten Datenpunkte gehören dabei zur Standardtestanweisung, also volle Anspannung der Rückenmuskulatur, während die „+“-Markierungen Messergebnisse einer entspannten aufrechten Position des Fahrers angeben. Die zur entspannten Position gehörenden Wobble-Frequenzen sind um einiges kleiner als jene der angespannten Position. Die Lage der „+“-Markierungen im linken Diagramm kennzeichnet, dass die zugehörigen Eigenwerte einen negativen Realteil aufweisen, also der Wobble-Mode stabil ist. Es besteht damit keine Übereinstimmung des mit der weichen Feder (und geringerer Dämpfung) berechneten Wobble-Modes, was bedeutet, dass damit der entspannte Fahrer nicht abgebildet werden kann.

Um den gedämpften Wobble-Mode bei einer lockeren Sitzposition des Fahrers mit dem Modell richtig nachbilden zu können, müsste möglicherweise ein energieabsorbierendes

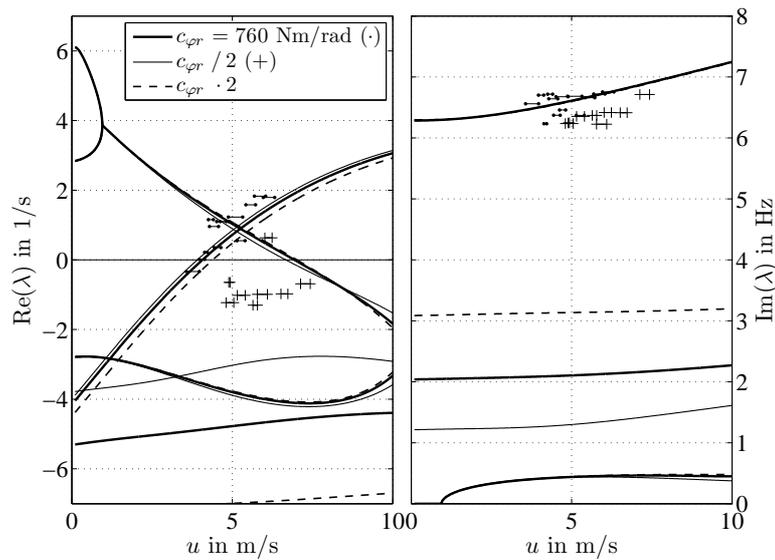


Abbildung 6.26: Stabilitätsdiagramm – Variation der Rumpfmuskulatursteifigkeit c_{φ_r} und -dämpfung k_{φ_r} inklusive Messergebnisse

Element, welches die Querelastizität und Dämpfung sowie eventuell auch die Drehelastizität und Drehdämpfung um die z -Achse des Fahrer - Sattelkontakts modelliert, hinzugefügt werden. Ein steifer Kontakt des Fahrers mit dem Sattel, durch das Zusammendrücken der Beine, unterstützt offenbar die Entstehung und Aufrechterhaltung der instabilen Wobble-Schwingung.

6.7 Einfluss einer zusätzlichen Masse

Eine zusätzliche Masse von 4kg (Punktmasse ohne Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt) auf einen Gepäckträger oder im Lenkerkorb hat entsprechend Abbildung 6.27 einen deutlichen Einfluss auf alle Moden. Die Punktmasse am Gepäckträger ist dabei an der gleichen Position wie die Messeinrichtung angebracht. Die Lage der vorderen Zusatzmasse wird, gegenüber der Lenkstange, um 10cm nach vorne und 15cm entlang der Lenkachse nach unten versetzt, festgelegt. Durch die Zusatzmassen wird der Wobble-Mode in den instabileren Bereich und zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Das zusätzliche Gewicht im Lenkerkorb bewirkt darüber hinaus ein Ansteigen der Wobble-Geschwindigkeit sowie eine Destabilisierung des Weave-Modes und eine Absenkung von dessen Frequenz vor allem bei höheren Geschwindigkeiten.

In der Veröffentlichung [35] von Robin S. Sharp wird in einem Absatz darauf hingewiesen, dass ein darin definierter Faktor g_2 , der hier dem Ausdruck $g_2 = -I_{H\delta x_D} - \mu I_{T_{xz}|D}$ entspricht, welcher wesentlich von der Massenverteilung der vorderen Baugruppe beeinflusst wird, möglicherweise einen starken Einfluss auf den Wobble-Mode hat, besonders dann, wenn eine erhebliche Last in einem am Lenker befestigten Korb transportiert

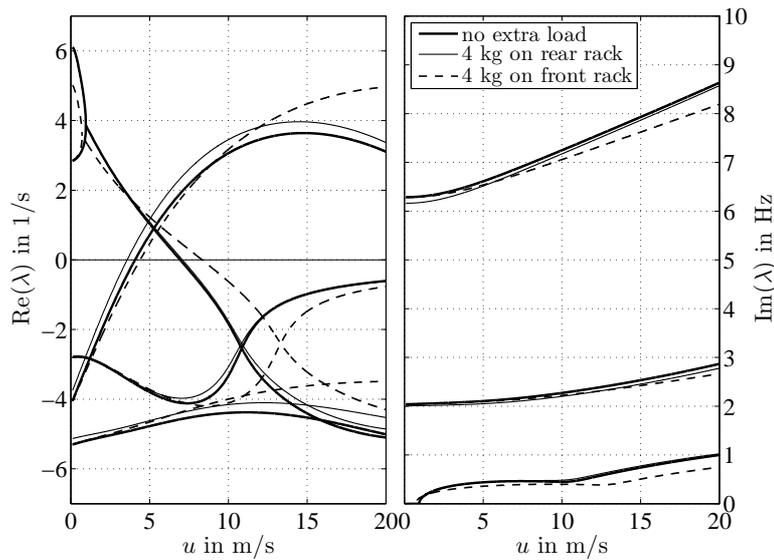


Abbildung 6.27: Stabilitätsdiagramm – Einfluss einer zusätzlichen Punktmasse von 4kg am Gepäckträger bzw. in einem Lenkerkorb

wird. Das Deviationsmoment der vorderen Baugruppe um die δx_D -Achse $I_{H\delta x_D}$ ist entsprechend (4.52) mit (4.30) definiert. Der Einfluss der einzelnen in diesem Term vorkommenden Parameter wird in den Abbildungen 6.28 – 6.30 dargestellt und der Wert von g_2 entsprechend der Reihenfolge in der Legende angegeben. In diesen Abbildungen wurde das Gewicht des Vorbaus, welches gemeinsam mit der Masse des Lenkers die Größe m_f ergibt, zur besseren Übersicht der einzelnen Einflüsse vernachlässigt.

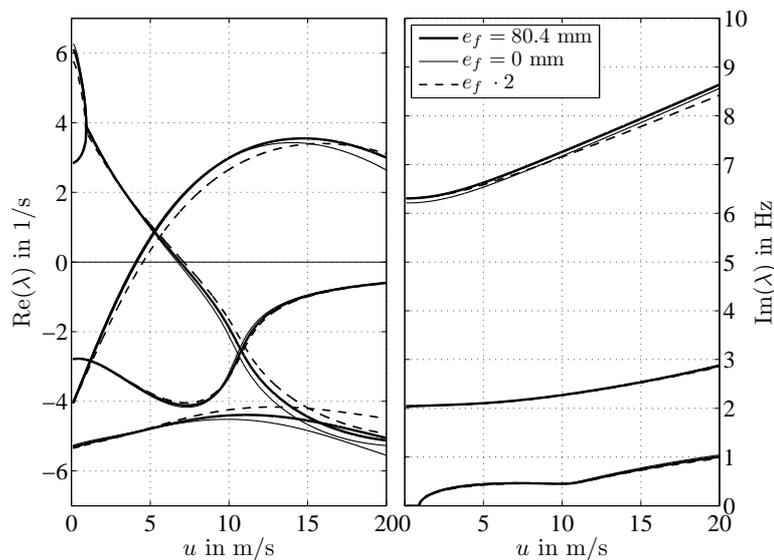


Abbildung 6.28: Stabilitätsdiagramm – Variation des Abstandes zwischen Lenkerschwerpunkt und Lenkachse e_f ($g_2 = -0,137; -0,016; -0,264\text{kgm}^2$)

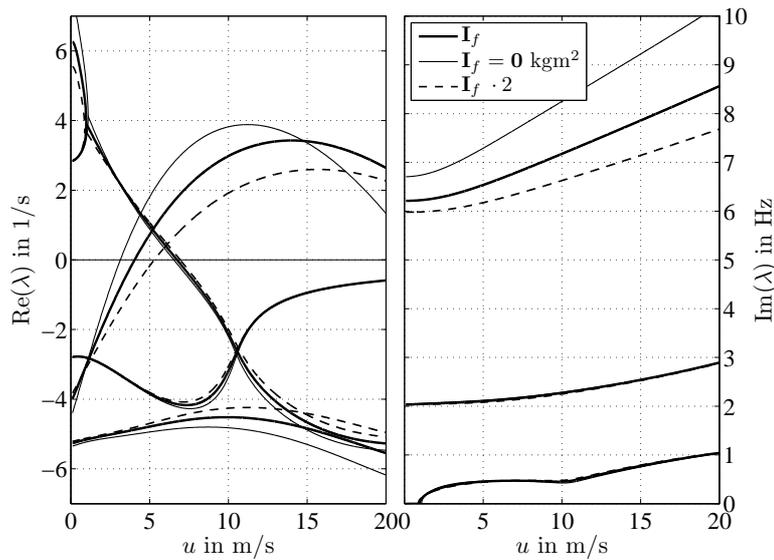


Abbildung 6.29: Stabilitätsdiagramm – Variation des Lenker-Masseträgheitsmoments mit Schwerpunktlage in der Lenkachse ($e_f = 0\text{mm}$), ($g_2 = -0,016; 0,001; -0,034\text{kgm}^2$)

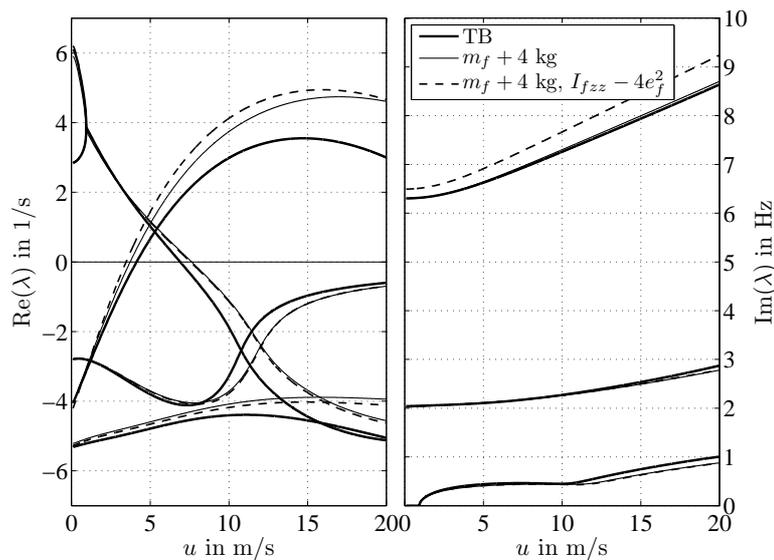


Abbildung 6.30: Stabilitätsdiagramm – Erhöhen der Lenkermasse um 4kg, mit und ohne Korrektur des Massenträgheitsmomentes um die Lenkachse ($-4e_f^2$), ($g_2 = -0,137; -0,621; -0,612\text{kgm}^2$)

Eine Verlagerung des Schwerpunktes nach vorne bewirkt ebenso wie ein höheres Massenträgheitsmoment des Lenkers ein Verschieben der Eigenwertrealteile des Wobble-Modes zu höheren Geschwindigkeiten und ein Absinken der zugehörigen Frequenzen. Berücksichtigt man noch den Einfluss der Masse anhand von Abbildung 6.30, in der für die strichlierten Linien das Massenträgheitsmoment um die Lenkachse gleich jenem des Trekking-Bikes gesetzt wurde, so erkennt man den deutlich destabilisierenden Einfluss

der Masse auf den Wobble-Mode wie er in [35] vermutet wurde. Der Zusammenhang von g_2 mit der Stabilität des Wobble-Modes kann entsprechend den Wertangaben in den Abbildungen 6.28 – 6.30 nicht bestätigt werden.

6.8 Einfluss der Fahrradgeometrie

Nach den bisher gezeigten Auswirkungen von Parameterwerten, auf die der Fahrradhersteller kaum Einfluss nehmen kann, soll in diesem Abschnitt der Einfluss der Rahmengenometrie, und dabei im speziellen die Lenkkopfgeometrie und der Nachlauf, sowie der Radstand betrachtet werden.

6.8.1 Rahmengenometrie

Um den Einfluss von einzelnen Parametern über einen größeren Variationsbereich darstellen zu können, wird zusätzlich zu dem bisher verwendeten Stabilitätsdiagramm eine Stabilitätskarte, die den stabilen Geschwindigkeitsbereich ausweist, verwendet. Für die Berechnung der Stabilitätskarten wird zunächst das Hurwitz-Kriterium, welches in Kapitel 6.1.5 angeführt wurde, in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auf das charakteristische Polynom der Bewegungsgleichung angewendet.

Das charakteristische Polynom wurde aus den Bewegungsgleichungen analytisch berechnet und getrennt nach den Potenzen von λ (Laplace-Operator) und u in Textdateien abgelegt. Für die numerische Auswertung des Hurwitz-Kriteriums wurden diese Textdateien wieder eingelesen und die enthaltenen Variablen durch ihre Zahlenwerte unter Berücksichtigung der jeweiligen Parametervariation ersetzt.

Für die Berechnung des charakteristischen Polynoms wurden zunächst die Bewegungsgleichungen des Trekking-Fahrradmodells (inkl. Reifenmodell) verwendet. In Abbildung 6.31 ist der stabile Geschwindigkeitsbereich in Abhängigkeit vom Lenkachsenwinkel ε bei konstantem Radstand l und Nachlaufversatz $c_n = r_1 \sin \varepsilon - t_c$ durch horizontale Linien gekennzeichnet. Für eine sehr steile Lenkachse stellt die untere Begrenzung des stabilen Geschwindigkeitsbereichs der Weave-Mode dar. Die obere Grenze wird durch den Lean-Mode, der für sehr hohe Geschwindigkeiten (1000 – 2000m/s) wieder stabil wird, festgelegt. Der Wobble-Mode durchschneidet die Grenzgeschwindigkeit des Weaves und stellt einen eiförmigen Einschnitt in den stabilen Bereich dar. Die einzelnen Punkte auf der linken Seite im linken Diagramm stammen von numerischen Ungenauigkeiten (Rundungsfehlern) bei der Auswertung des Hurwitz-Kriteriums und könnten in der Abbildung weggelassen werden. Aus dem rechten Diagramm ist der Reifennachlauf $c = t_c / \cos \varepsilon$, also der Abstand des Vorderreifenkontaktpunktes C zum Durchstoßpunkt der Lenkachse durch die Fahrbahnebene B (für das aufrechte Fahrrad in der Geradeausfahrt) eingezeichnet.

Da die Rechenzeiten aufgrund des sehr aufwendigen charakteristischen Polynoms (Gesamtgröße der Textdateien 18,7MB) und der teilweisen symbolischen Rechnung (Variable u) in Matlab für eine Parametervariation wie in Abbildung 6.31 dargestellt auf

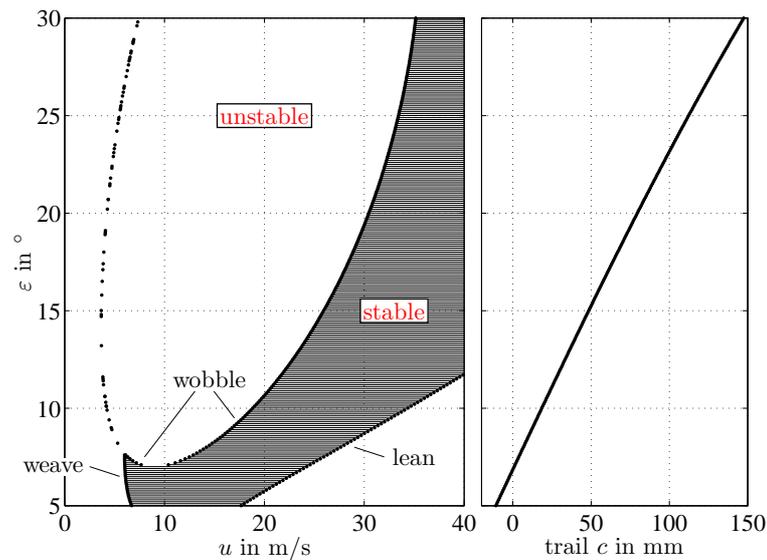


Abbildung 6.31: Stabilitätskarte des Lenkachsenwinkels ε bei konstantem Radstand l und Nachlaufversatz c_n – Fahrradmodell mit Reifenschlupf

dem verwendeten Rechner über zwei Tage beträgt, wurde auch das charakteristische Polynom für das Modell des Trekking-Fahrrades mit nichtholonomen Bindungen an den Kontaktstellen der Reifen anstatt des Reifenmodells berechnet. Dadurch wird die Ordnung des Polynoms um vier verringert und die Größe der Textdateien nimmt genauso wie die Rechenzeit drastisch ab. Das Ergebnis für die gleiche Parametervariation mit dem vereinfachten Modell ist in der Abbildung 6.32, überlagert mit Ergebnissen einer Nullstellensuche der einzelnen Eigenwertrealteile, dargestellt. Bei der Nullstellensuche wurden für jede Parametervariationen die Grenzggeschwindigkeiten der einzelnen Moden gesucht und anschließend für jeden Mode zu einer Linie verbunden. Obwohl die Ergebnisse aus dem Hurwitz-Kriterium für die beiden Modelle grundlegend unterschiedlich aussehen, was eine Folge des instabilen Capsize-Moden beim einfacheren Modell ist, sind die Unterschiede auf den eiförmigen instabilen Wobble-Bereich nicht so groß. Dieser vergrößert sich lediglich für das aufwendigere Modell. Bei den folgenden Betrachtungen wird das einfachere Modell verwendet, da offensichtlich für den Wobble die grundlegenden Aussagen nicht anders sind, sowie der Lean-Mode bei diesem Modell in den Betrachtungen nicht aufscheint, dieser jedoch, wie bereits gezeigt, stark vom Fahrer abhängig ist, sowie die Berechnung wesentlich schneller vonstatten geht. Wie man sich überzeugen kann, stimmen die Ergebnisse aus der Nullstellensuche mit jenen des Hurwitz-Kriteriums in Abbildung 6.32 überein, da jedoch aus der Nullstellensuche wesentlich mehr über den Einfluss eines Parameters auf die Moden ausgesagt werden kann, wird in den folgenden Stabilitätskarten nur noch diese Berechnung herangezogen.

Aus der Stabilitätskarte (Abbildung 6.32) kann gefolgert werden, dass der Lenkkopfwinkel einen recht deutlichen Einfluss auf den Wobble besitzt und ein prinzipiell instabiler Wobble durch einen sehr flachen oder sehr steilen Lenkkopfwinkel ($90 - \varepsilon$) stabilisiert

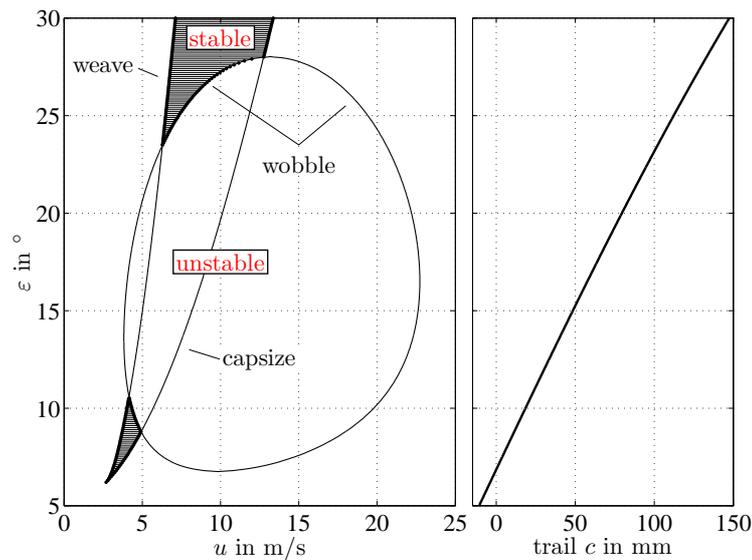


Abbildung 6.32: Stabilitätskarte des Lenkachsenwinkels ε bei konstantem Radstand l und Nachlaufversatz c_n – Fahrradmodell ohne Reifenschlupf

werden kann. Entsprechend der Abbildung würde ab einem Lenkachsenwinkel von ca. 28° ein stabiler Wobble vorliegen, was jedoch mit dem aufwändigeren Modell nicht bestätigt werden kann, Abbildung 6.31.

6.8.2 Radstand

Ein größerer Radstand l zeigt entsprechend Abbildung 6.33 eine Stabilisierung des Wobble-Modes. Die Weave- und Capsize-Geschwindigkeit weisen hingegen keine Abhängigkeit von diesem Parameter auf. Lässt man hingegen die Aufstandskräfte der beiden Räder bei Verändern des Radstands durch Verschieben der Schwerpunkte von Rahmen (ohne Hinterrad) und Fahrer um Δx , wie im linken Diagramm von Abbildung 6.34 eingetragen, gleich wie in der Ausgangskonfiguration, so bewirkt dies ebenfalls eine Stabilisierung des Wobbles bei längerem Radstand, wobei diese geringfügig kleiner ist als in Abbildung 6.33. Darüber hinaus steigt die Capsize-Geschwindigkeit mit einem längeren Radstand leicht an. Der Einfluss der Schräglaufsteifigkeit am Vorderad, welche von der Aufstandskraft des Reifens abhängig ist, kann anhand der beiden Diagramme nicht diskutiert werden, da diese Größe in das verwendete Modell nicht eingeht.

6.8.3 Nachlaufversatz der Gabel

Bei einer Änderung des Nachlaufversatzes c_n einer ansonsten unveränderten Gabel (Gabellänge, Masse, Schwerpunktlage) und Rahmen, ändert sich aufgrund der geneigten

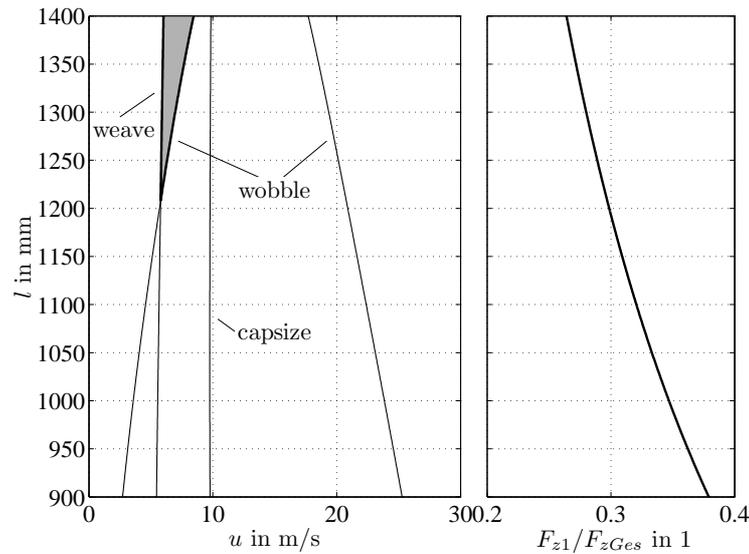


Abbildung 6.33: Stabilitätskarte des Radstandes l bei konstantem Lenkachsenwinkel ε und Nachlaufversatz c_n

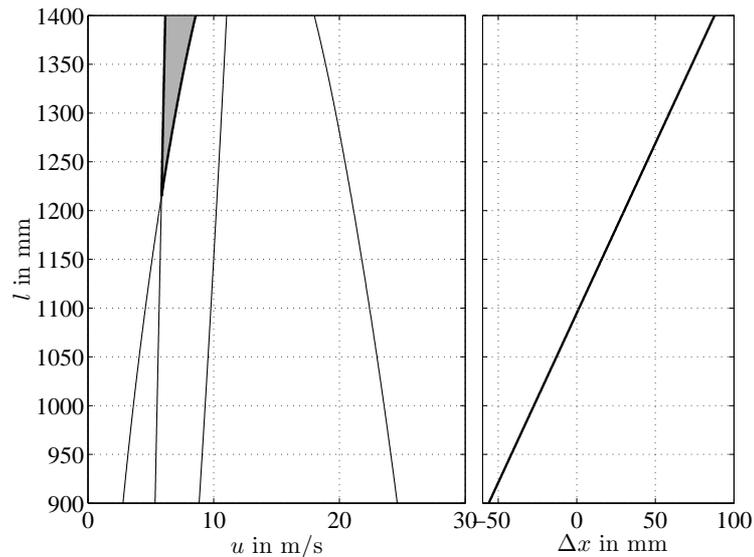


Abbildung 6.34: Stabilitätskarte des Radstandes l bei konstantem Lenkachsenwinkel ε und Nachlaufversatz c_n sowie konstanter Gewichtsverteilung auf die beiden Räder entsprechend der Ausgangskonfiguration

Einbaulage der Gabel sowohl der Radstand l als auch der Lenkachsenwinkel ε . Die Lageänderung des Schwerpunktes vom Rahmen, hervorgerufen durch eine geänderte Neigung von diesem, wurde bei den folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt. Unter Berücksichtigung der eben genannten geometrischen Zusammenhänge wurden die kritischen Geschwindigkeiten für Abbildung 6.35 berechnet. Es zeigt sich wieder, wie bei der Variation des Lenkkopfwinkels, ein eiförmiger Wobble-Bereich. Der Wobble-

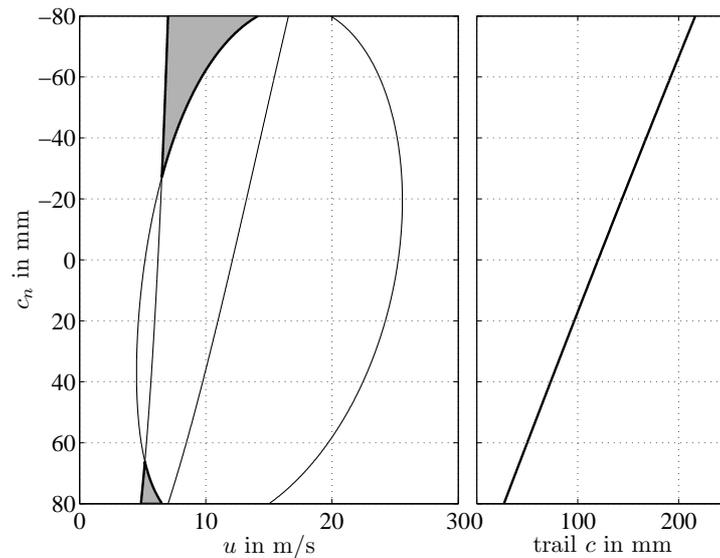


Abbildung 6.35: Stabilitätskarte des Nachlaufversatzes c_n bei variablem Lenkachsenwinkel ε und Radstandes l

Mode stabilisiert sich demnach also sowohl bei einem sehr großen als auch einem sehr geringen Nachlauf c .

Von den bisher gezeigten Variationen der Rahmenparameter ist für Vergleich mit Messungen nur die Veränderung des Nachlaufversatzes c_n der Gabel für einen gegebenen Rahmen möglich. Um eine deutliche Auswirkung dieser Änderungen bei Messungen zu erreichen, wurde eine ungefederte, also starre, Gabel in der normalen und in der um die Lenkachse gedrehten Lage eingebaut. Die verwendete Gabel besitzt einen Nachlaufversatz von $c_n = 48\text{mm}$. In Bild 6.36 ist das Trekking-Fahrrad mit der umgedreht eingebauten starren Gabel abgebildet.

Sowohl in den Messungen als auch in der Berechnung zeigt sich ein deutlicher Anstieg der Wobble-Frequenz für die umgedreht (*reversed*) eingebaute starre Gabel (siehe Abbildung 6.37). Zum Abgleich der berechneten Wobble-Frequenz mit den Messergebnissen der normal eingebauten starren Gabel musste die Rahmenssteifigkeit c_β von $78\text{Nm}/^\circ$ auf $92\text{Nm}/^\circ$ erhöht werden. Die Differenz der von der umgedreht eingebauten starren Gabel gemessenen Wobble-Frequenzen mit jener der Berechnung ist trotz der Berücksichtigung der Radstands- und Lenkachsenwinkeländerung aufgrund des Nachlaufversatzes eklatant. Eine Verbesserung der Differenz zwischen den berechneten und gemessenen Wobble-Frequenzen konnte, entsprechend Abbildung 6.38, durch die Verschiebung des Rahmenflexibilitätsfreiheitsgrades β von der Gabel in den Lenkkopf erreicht werden. Diese Verschiebung hat zur Folge, dass die gesamte vordere Baugruppe, also auch der Lenker, um die β -Achse rotieren können. Die dafür nötigen linearisierten Bewegungsgleichungen erhält man, unter der Voraussetzung eines masselosen Steuerrohrs, indem man die beiden starren Körper f und s zu einem Körper s zusammenfügt und der Körper f weder eine Masse noch ein Massenträgheitsmoment besitzt (vergleiche Abbildung 4.1).



Abbildung 6.36: Testfahrrad mit umgedreht eingebauter starrer Gabel

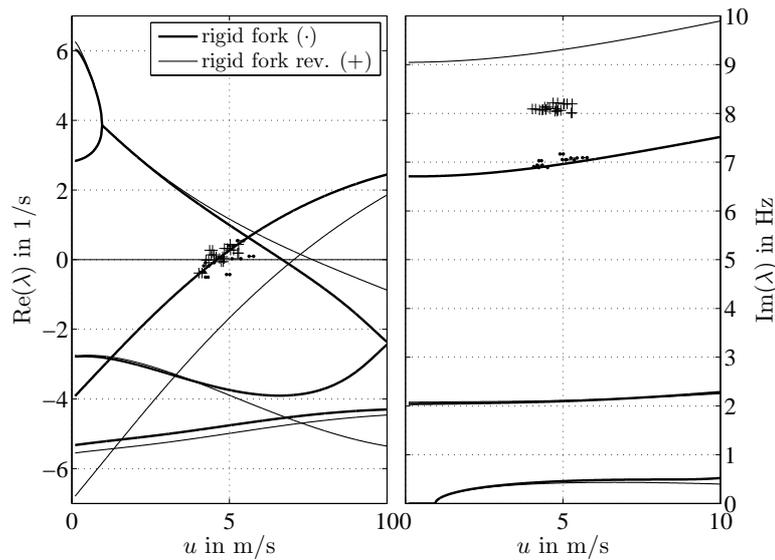


Abbildung 6.37: Stabilitätsdiagramm - Variation des Nachlaufversatzes c_n

Der, für die umgedrehte Gabel mit größerem Nachlauf, aus beiden Berechnungen ersichtliche Anstieg der Wobble-Geschwindigkeit konnte bei den Messungen nicht beobachtet werden. Dafür war für den Testfahrer ein ausgeprägter Weave-Mode feststellbar. Dieser könnte auch der Grund für die nicht beobachtete Stabilisierung des Wobbles sein, da es dem Fahrer, aufgrund des deutlich instabilen Weaves, nicht möglich war, während der freihändigen Fahrt in die gewohnte aufrechte Sitzposition zu gelangen, da er die Weave-Schwingung aktiv stabilisieren musste.

Die Modelländerung wurde nur für diese eine Abbildung durchgeführt. Alle anderen

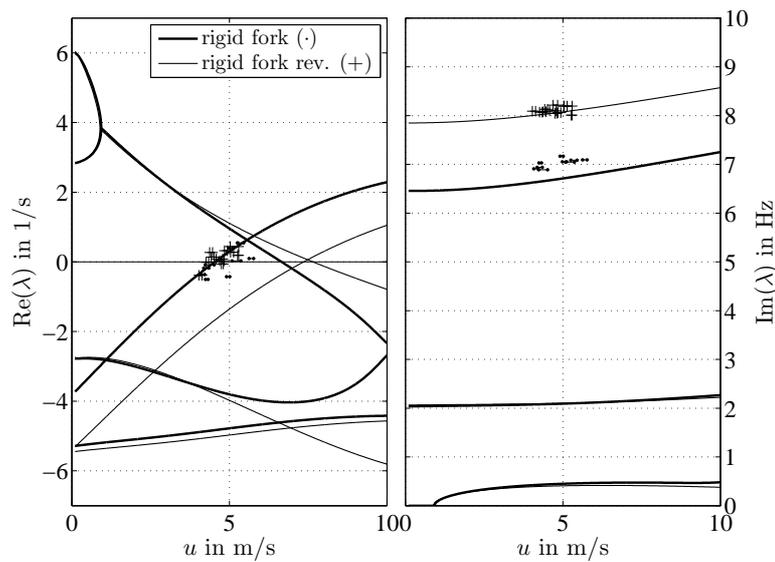


Abbildung 6.38: Stabilitätsdiagramm - Variation des Nachlaufversatzes c_n mit Vershub der Rahmenflexibilität in den Lenkkopf

Stabilitätsdiagramme wurden, wenn nicht anders angegeben, für das Trekkingfahrrad-Modell entsprechend Kapitel 4.1 berechnet.

6.9 Rahmenflexibilität

Nach den bisher gemachten Parametervariationen soll abschließend noch auf den Einfluss der Rahmenflexibilität, welche ja entsprechend Kapitel 6.3 für die Modellierung des Wobbles benötigt wird, sowie die Lage der zugehörigen Drehachse eingegangen werden. Bisher wurde gezeigt, dass für das betrachtete Testfahrrad durch die Reifen, das Gesamtgewicht sowie dessen Verteilung auf die Räder und die Rahmengeometrie die Stabilität des Wobble beeinflusst bzw. im begrenzten Umfang verbessert werden kann. Aus der Abbildung 6.39a ist ersichtlich, dass durch einen steiferen und damit infolge der Materialdämpfung auch besser gedämpften Rahmen der Wobble-Mode vollständig stabilisiert werden kann. Der Einfluss der Rahmenflexibilität auf den Wobble-Mode ist also wesentlich stärker als die anderen, im übrigen teilweise nicht vom Fahrradhersteller beeinflussbaren Parameter. Bei dem analysierten Testfahrrad ist auffällig, dass das Widerstandsmoment des Rahmenunterrohrs in Querrichtung aufgrund seiner schmalen hohen Form wesentlich geringer ist als in Hochrichtung und die Anbindung an das Steuerrohr auch nicht besonders steif ausgeführt wurde (vergleiche Abbildung 6.39b). Diese beiden Konstruktionsmerkmale sind möglicherweise die Ursache für den ausgeprägten Wobble-Mode des Testfahrrades. Aus dem Stabilitätsdiagramm ist infolge der erhöhten Rahmensteifigkeit ein deutlicher Anstieg die Wobble-Frequenz von 6,61Hz auf 8,69Hz, bei einer Geschwindigkeit von 5m/s, ersichtlich.

Für die Modellierung der Rahmenflexibilität ist zusätzlich noch die Lage der β -Achse

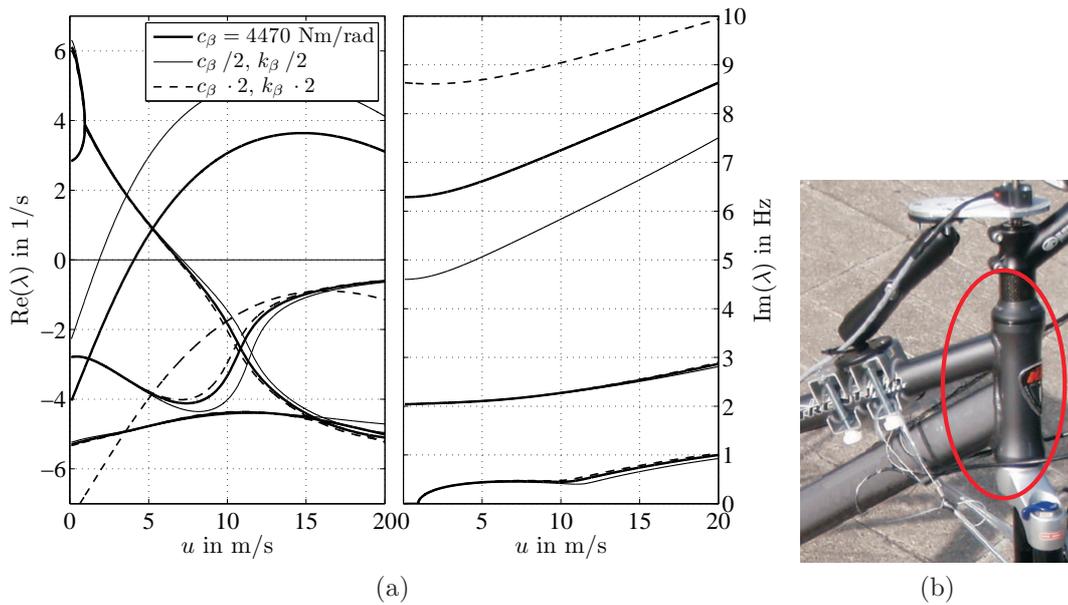


Abbildung 6.39: (a) Stabilitätsdiagramm - Variation der Rahmensteifigkeit c_β und Rahmendämpfung k_β ; (b) Lenkkopfanbindung

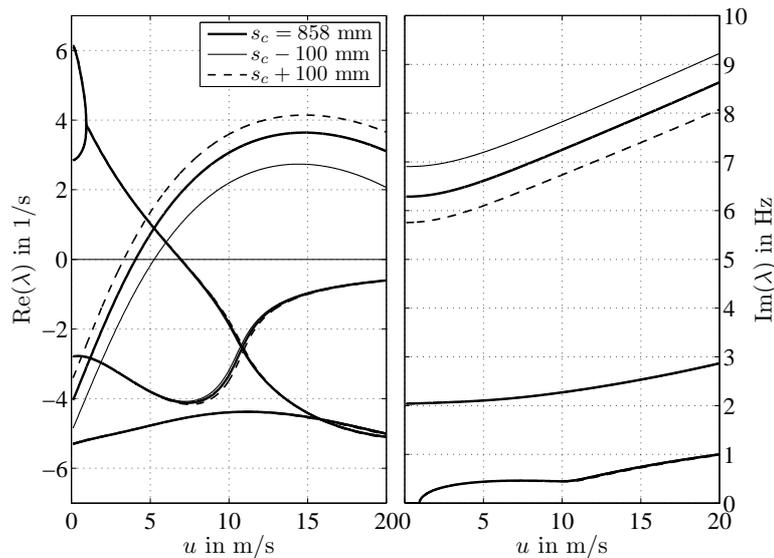


Abbildung 6.40: Stabilitätsdiagramm - Variation der Lage des Drehfreiheitsgrades für die Rahmenflexibilität s_c

durch den Abstand s_c , welcher den Abstand vom Aufstandspunkt des Vorderreifens zu dieser Drehachse entlang der Lenkachse angibt, erforderlich. Diese Größe ist eine reine Modellgröße, die am tatsächlichen Fahrrad nicht gemessen werden kann. Für die Standardparameter wurde angenommen, dass sich die Achse in der Mitte des Steuerrohrs befindet. Ein Absenken der Achse bewirkt einen Versatz der Eigenwertrealteile in Richtung stabilerer Werte und der Eigenwertimaginärteile in Richtung größerer Frequenzen

(Abbildung 6.40). Diese reine Modellgröße hat offensichtlich einen sehr ausgeprägten Einfluss auf den Wobble-Mode.

Auffällig in den beiden Abbildungen 6.39a, 6.40 ist, dass durch eine Veränderung der Rahmenflexibilität bzw. durch Verschieben des zugehörigen Drehfreiheitsgrades der Capsize- und Weave-Mode im Gegensatz zum Wobble-Mode kaum beeinflusst werden.

6.10 Zusammenfassung

Im Zuge der Stabilitätsuntersuchungen in diesem Kapitel wurde zunächst der Modellierungseinfluss durch einen Vergleich von aufeinander aufbauenden Modellen gezeigt. Es konnte dabei festgehalten werden, dass für das grundlegende Verständnis der Stabilität des Fahrrades, zumindest im niedrigen Geschwindigkeitsbereich, das einfache Whipple-Fahrradmodell mit nur zwei Freiheitsgraden ausreicht. Soll jedoch auch Wobble untersucht werden, so ist zumindest die Rahmenflexibilität wenn nicht auch noch ein Reifenmodell zur Berücksichtigung eines Schlupfs der Reifen in Querrichtung und des verzögerten Kraftaufbaus von diesem erforderlich.

Aus der Untersuchung der Vorderrad-Reifenparameter kann für das verwendete Reifenmodell und die vier betrachteten Moden gefolgert werden, dass die dem Schräglaufwinkel zugeordneten Parameter nur auf den Wobble einen Einfluss haben und diesen bei größeren Werten destabilisieren. Der Weave und Capsize werden hingegen von jenen Reifenparametern, die dem Sturzwinkel zugeordnet sind, beeinflusst. Die einzige Ausnahme dieser Zuordnung stellt das durch den Schräglaufwinkel hervorgerufene Rückstellmoment dar, welches auf alle drei Moden einen Einfluss hat. Durch Messungen mit verschiedenen Reifenmänteln und Reifenluftdrücken konnten einerseits die gewählten Parameterwerte des Trekking-Fahrrades bestätigt werden und andererseits konnte daraus auf die Verhältnisse der Schräglaufsteifigkeiten, welche den Wobble-Mode am stärksten beeinflusst, zwischen den verwendeten Reifenmänteln geschlossen werden. Sowohl durch Messungen als auch durch die Berechnung konnte der in der Literatur häufig erwähnte stabilisierende Einfluss der gyroskopischen Kräfte, welche durch ein größeres Massenträgheitsmoment am Vorderrad verstärkt wurden, nachgewiesen werden.

Im Zuge der Messfahrten wurde ein starker Einfluss des Fahrers auf die Wobble-Geschwindigkeiten beobachtet. Ein stabilisierender Effekt des Wobbles bei einem leichteren Fahrer konnte in Übereinstimmung mit der Berechnung durch Messungen bestätigt werden. Gegenteiliges ist jedoch für einen entspannten Fahrer der Fall. In Messungen wurde eine durchwegs stabile Wobble-Schwingung festgestellt, was jedoch durch die Berechnung des Modells, in dem der Fahreroberkörper als inverses Pendel modelliert wurde, nicht wiedergegeben werden konnte. Es wird daher vermutet, dass hier eine Erweiterung des Modells, welche die Flexibilität und Dämpfung des Fahrer-Sattelkontakts berücksichtigt, zu Verbesserungen der Fahrermodellierung führen. Die Berechnung zeigte darüber hinaus, dass nur die Position des Fahrers in Längsrichtung einen Einfluss auf die Eigenwerte besitzt, wohingegen ein vertikaler Versatz des Fahrers die Eigenwerte praktisch nicht verändert. In Übereinstimmung mit dem Einfluss des Fahrergewichts

wirkt auch ein auf den Gepäckträger oder in einem Lenkerkorb angebrachtes Zusatzgewicht destabilisierend.

Neben der rein rechnerischen Betrachtung der Stabilität in Abhängigkeit vom Lenkkopfwinkel und vom Radstand wurde der Einfluss vom Nachlaufversatz der Gabel auch durch Messungen überprüft. Aus der Stabilitätsberechnung mit Variation des Lenkkopfwinkels ging hervor, dass der Wobble sowohl für eine sehr flache als auch für eine sehr steile Lenkachse komplett stabilisiert werden kann. Der Einfluss vom Radstand auf die Eigenwerte ist dagegen recht gering, bewirkt aber für einen größeren Radstand eine Stabilisierung des Wobbles. Testfahrten mit einer starren Gabel, welche zur Veränderung des Nachlaufversatzes sowohl in der normalen als auch in der um die Lenkachse um 180° gedrehten Lage eingebaut war, zeigten einen deutlichen Anstieg der Wobble-Frequenz, die Wobble-Geschwindigkeit änderte sich hingegen kaum. Um mit der Berechnung auf ähnliche Werte für die Frequenzen zu kommen, musste die β -Achse, mit welcher die Rahmenflexibilität modelliert wird, von der Gabel in den Lenkkopf verschoben werden. Der Lenker dreht sich dadurch gemeinsam mit der Gabel um die β -Achse.

In der vorletzten Parameteruntersuchung wurde mit der Rahmensteifigkeit und -dämpfung der wohl wichtigste Einflussparameter auf die Wobble-Stabilität von Fahrrädern gefunden. Es ist aus den Berechnungsergebnissen ersichtlich, dass durch eine ausreichende Dämpfung des Rahmens der Wobble-Mode vollständig stabilisiert werden kann. Da ein Zusammenhang zwischen der Steifigkeit und der Dämpfung besteht (Materialdämpfung) wird aus dieser Erkenntnis gefolgert, dass der Grund für den ausgeprägten Wobble des Trekking-Fahrrades dessen geringe Steifigkeit ist.

Neben der Rahmensteifigkeit wirkt sich jedoch auch die Lage der β -Achse deutlich auf den Wobble-Mode aus. Die Größe s_c , welche den Normalabstand der β -Achse zum Aufstandspunkt des Vorderrads definiert, ist jedoch, da sie eine reine Modellgröße ist, für ein reales Rad schwer zu bestimmen und daher auch nicht einfach zu beeinflussen.

Kapitel 7

Conclusio und Ausblick

7.1 Conclusio

Das Ziel der Arbeit war die Untersuchung der Stabilität von Fahrrädern in der aufrechten Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit. Der Fokus dieser Stabilitätsbetrachtungen sollte dabei auf die Wobble-Schwingung gerichtet werden. Die Ausgangsbasis für die Untersuchung stellte ein Damentrekking-Fahrrad mit einem ausgeprägten Wobble-Mode dar.

Zur Abbildung des Trekking-Fahrrades durch ein mathematisches Modell mit Berücksichtigung des Wobble-Modes musste, gegenüber dem in der Literatur sehr häufig verwendeten Fahrradmodell von *Whipple*, zusätzlich die Rahmenflexibilität, mit welcher die Quersteifigkeit von Rahmen, Steuerrohr, Gabel, Felge und Reifen zusammengefasst werden, sowie ein Reifenmodell, welches einen Querschlupf der Reifen sowie einen verzögerten Kraftaufbau im Kontaktpunkt ermöglicht, berücksichtigt werden. Anschließend an eine Modellbeschreibung wurden die zugehörigen um die aufrechte Geradeausfahrt linearisierten Bewegungsgleichungen angeschrieben. Darüber hinaus wurden zu Vergleichszwecken auch die Bewegungsgleichungen von einfacheren Modellen angeführt. Das Modell des Trekking-Fahrrades wurde durch Messergebnisse von Testfahrten validiert. Dazu wurde das Damenfahrrad mit einer Messausrüstung, mit welcher der Lenkwinkel, die Geschwindigkeit sowie die Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten aufgezeichnet werden können, ausgestattet. Nach einer allgemeinen Signalaufbereitung konnten durch eine Kurvenanpassung einer exponentiellen Funktion an den Lenkwinkel die dominierenden Eigenwerte des Trekking-Fahrrades für die jeweilige Geschwindigkeit aus den Messdaten extrahiert werden. Mithilfe dieser Eigenwerte konnten durch einen Vergleich mit den berechneten Eigenwerten die gewählten Parameterwerte des Modells, welche größtenteils aus [37] übernommen wurden, angepasst bzw. bestätigt werden.

Aus der numerischen Analyse des Modells konnten Parameter mit einem großen Einfluss auf den Wobble identifiziert werden. Neben dem Gewicht des Fahrers, dessen

Sitzposition und Verbindung zum Sattel sind dies auch noch die Schräglaufsteifigkeit am Vorderrad, dessen polares Massenträgheitsmoment sowie die Lenkgeometrie und die Rahmensteifigkeit bzw. Rahmendämpfung. Vergleichende Messungen wurden für unterschiedliche Reifenmäntel und Reifenluftdrücke, einem erhöhten polaren Massenträgheitsmoment am Vorderrad, einem deutlich größeren Nachlaufversatz der Gabel, durch Drehen dieser um 180° um die Lenkachse, sowie für unterschiedliche Fahrer und eine lockere Sitzposition durchgeführt. Dabei musste festgestellt werden, dass mit dem verwendeten Modell die Wobble-Schwingung für einen entspannt auf dem Fahrrad sitzenden Fahrer nicht abgebildet werden kann. Dies legt daher die Vermutung nahe, dass dafür zusätzlich die Flexibilität im Sattel-Fahrerkontakt in Querrichtung und Rotation um die z-Achse berücksichtigt werden müssen. Ebenfalls konnte aus den Messergebnissen abgeleitet werden, dass die in dieser Arbeit standardmäßige Modellierung der Rahmenflexibilität in der Gabel, wie es für Motorräder nicht unüblich ist, in den Lenkkopf verschoben werden sollte. Der stabilisierende Einfluss der gyroskopischen Kräfte, welche durch das polare Massenträgheitsmoment am Vorderrad beeinflusst werden, konnte hingegen sowohl in der Berechnung als auch bei Messungen nachgewiesen werden. Für praktische Anwendungen ist diese Art der Wobble-Stabilisierung jedoch nicht besonders attraktiv, da im Allgemeinen das Bestreben nach einem möglichst leichten, energieeffizienten Fahrrad vorrangig ist.

Für den Fahrradhersteller sind die wichtigsten Einflussgrößen, mit denen die Wobble-Instabilität von Fahrrädern beeinflusst werden kann, die Rahmensteifigkeit und -dämpfung sowie in vermindertem Ausmaß die Lenkgeometrie. Vor allem durch die Dämpfung des Rahmens kann die Wobble-Neigung eines Fahrrades deutlich verbessert bzw. gänzlich verhindert werden. Eine Veränderung der Lenkgeometrie kann durchaus stabilisierend auf den Wobble-Mode wirken, bringt jedoch auch eine Beeinflussung des Fahrverhaltens mit sich.

7.2 Ausblick

Trotz der guten Übereinstimmung der Messergebnisse mit der Berechnung verbleibt eine Unsicherheit bei einigen Parameterwerten. So mussten die Reifenparameter aufgrund von fehlenden Messwerten anhand von in der Literatur angeführten üblichen Bereichen abgeschätzt werden. In Zukunft könnte hier der in [39] beschriebene relativ einfache Aufbau eines Fahrradreifenprüfstandes eine Abhilfe bringen. Die Rahmensteifigkeit wurde zwar auf einem Prüfstand gemessen, musste jedoch zur Anpassung an die gemessenen Wobble-Frequenzen deutlich erhöht werden. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass für den Wobble-Mode nicht die Rahmendrehsteifigkeit zwischen Lenkkopf und hinterem Ausfallende, sondern zwischen Lenkkopf und der Sattelstrebe um eine normal auf die Lenkachse stehende Achse ist. Der Einfluss einer Querelastizität von Gabel und Felge muss in diese gemessene Steifigkeit gegebenenfalls nachträglich berücksichtigt werden.

Im Gegensatz zur Steifigkeit wurde die Dämpfung des Rahmens, welche offensicht-

lich einen wesentlichen Einfluss auf die Stabilität des Wobble-Modes hat, bisher messtechnisch noch nicht erfasst, sondern nur an die Wobble-Geschwindigkeit bzw. an die Wobble-Eigenwertrealteile der Messungen angepasst. Eine geeignete Messvorrichtung zur Messung dieser Größe wäre aber auch in Hinblick auf den Zusammenhang der Rahmenkonstruktion bzw. des Rahmenwerkstoffes mit dieser Größe interessant.

Ein Problem stellt auch die Bestimmung der Drehachsenlage, welche für die Modellierung der Rahmenflexibilität benötigt wird, dar. Diese reine Modellgröße hat einen deutlichen Einfluss auf Wobble, kann jedoch aus den geometrischen Abmessungen eines Fahrrades nicht bestimmt werden.

Für den Vergleich von Messungen mit den numerischen Berechnungen des mathematischen Modells ist zur besseren Abbildung des Fahrers möglicherweise eine Anpassung der Fahrermodellierung erforderlich, wobei der Fahrer aufgrund von dessen nicht genau bestimmbarer und variierender Sitzposition sowie dessen unbewusster Reglertätigkeit immer Unsicherheiten bzw. Ungenauigkeiten in der Messung hervorruft.

Neben der reinen Stabilitätsbetrachtung sollte, vor allem bei Änderungen der Geometrie, das Handling nicht außer acht gelassen werden. Für ein so stark vom Fahrer beeinflusstes Fahrzeug wie das Fahrrad ist es jedoch schwierig, eine geeignete Methode zur Beurteilung von dessen Handling zu finden. Es gibt daher noch keine Standardmethode, aber einen möglichen Ansatz dafür liefert [38].

Abbildungsverzeichnis

2.1	Stabilitätsdiagramm für das Trekking-Fahrrad	5
3.1	Whipple- oder Basic Bicycle Model, [27]	8
4.1	Fahrradmodell in aufrechter Position	13
4.2	Fahrradmodell in Kurvenfahrt	13
4.3	Definition von Schräglaufwinkel α und Sturzwinkel γ an einem Rad . .	16
4.4	Draufsicht auf das Fahrradmodell in der Kurvenfahrt	17
4.5	Kräfte und Momente am Fahrradreifen	19
5.1	Testrad mit Messausrüstung	34
5.2	Drehzahlsensor bei Hinterrad	35
5.3	Lenkwinkelsensor	35
5.4	Rohe Messdaten von Messung 1	38
5.5	Rohe Messdaten von Messung 2	39
5.6	Lenkwinkel- und Geschwindigkeitssignalfilterung	39
5.7	In System A transformierte Fahrzeugwinkel	42
5.8	In System A transformierte Fahrzeugwinkelgeschwindigkeiten	42
5.9	In System A transformierte Beschleunigungen des Bezugspunkts A . . .	43
5.10	Transformation der GPS-Geschwindigkeit	44
5.11	Kurvenanpassung an Lenkwinkelsignal δ	46
5.12	Geschwindigkeitsvergleich GPS vs. WSS	47
5.13	Messergebnisse	48

6.1	Integralkurven der gestörten Bewegung	53
6.2	Stabilitätsdiagramm der Testfahrradparameter mit allen Moden	57
6.3	Stabilitätsdiagramm der Testfahrradparameter	58
6.4	Wurzelortskurven vom Trekking-Fahrrad	59
6.5	f_n und D der Ausgangsparameter	60
6.6	Stabilitätsdiagramm – Vergleich von Modellen mit nichtholonomen Reifenbindungen	61
6.7	Stabilitätsdiagramm – Vergleich der nichtholonomen Reifenbindung mit einem Reifenmodell	62
6.8	Stabilitätsdiagramm – Variation $\sigma_{\alpha 1}$	64
6.9	Stabilitätsdiagramm – Variation $c_{F\alpha 1}$	65
6.10	Stabilitätsdiagramm – Variation $c_{F\gamma 1}$	65
6.11	Stabilitätsdiagramm – Variation $c_{M\alpha 1}$	66
6.12	Stabilitätsdiagramm – Variation $c_{M\gamma 1}$	67
6.13	Stabilitätsdiagramm – Variation $c_{Mx\gamma 1}$	67
6.14	Verwendete Reifenmäntel	68
6.15	Stabilitätsdiagramm – Reifenmantelvergleich	69
6.16	Stabilitätsdiagramm – Druckeinfluss Standardreifen	69
6.17	Stabilitätsdiagramm – Druckeinfluss Schwalbe Tyrago	70
6.18	Stabilitätsdiagramm – Druckeinfluss Continental TourRide	70
6.19	Einfluss des Reifenluftdrucks auf Reifenkräfte und Momente, [26]	72
6.20	Stabilitätsdiagramm – Einfluss des Vorderrad-Massenträgheitsmoments	74
6.21	Stabilitätsdiagramm – Vorderrad mit erhöhtem Massenträgheitsmoment	75
6.22	Stabilitätsdiagramm – Einfluss vom Fahrergewicht	76
6.23	Stabilitätsdiagramm – Einfluss des Oberkörperneigewinkels	77
6.24	Stabilitätsdiagramm – Einfluss der Sitzposition	78
6.25	Stabilitätsdiagramm – Einfluss der Sitzposition	78
6.26	Stabilitätsdiagramm – Einfluss der Rumpfmuskulatur	80
6.27	Stabilitätsdiagramm – Einfluss einer Punktmasse auf Gepäckträger	81
6.28	Stabilitätsdiagramm – Einfluss der Lenkerlage	81

<i>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</i>	98
6.29 Stabilitätsdiagramm – Einfluss des Lenkermassenträgheitsmomentes . . .	82
6.30 Stabilitätsdiagramm – Einfluss der Lenkermasse	82
6.31 Stabilitätskarte des Lenkachsenwinkels ε	84
6.32 Stabilitätskarte des Lenkachsenwinkels ε	85
6.33 Stabilitätskarte des Radstandes l	86
6.34 Stabilitätskarte des Radstandes l	86
6.35 Stabilitätskarte des Nachlaufversatzes c_n	87
6.36 Testfahrrad mit umgedreht eingebauter starrer Gabel	88
6.37 Stabilitätsdiagramm - Variation des Nachlaufversatzes c_n	88
6.38 Stabilitätsdiagramm - Variation des Nachlaufversatzes c_n mit Rahmen- flexibilität im Lenkkopf	89
6.39 Stabilitätsdiagramm - Variation der Rahmensteifigkeit c_β	90
6.40 Stabilitätsdiagramm - Variation des Gelenksabstands s_c	90

Tabellenverzeichnis

4.1	Parameterwerte von Fahrrad und Fahrer	31
4.2	Parameterwerte für die Feder- und Dämpferelemente	32
4.3	Parameterwerte der Reifen	32
5.1	Verwendete Messausrüstung	34
5.2	Messergebnisse	50
6.1	Normierte Eigenvektoren bei 5m/s der dominierenden Moden	55

Literaturverzeichnis

- [1] W. J. M. Rankine, *On the dynamical principles of the motion of velocipedes*, The Engineer, Aug. 6, S. 2, 79, 129, 153, 175, 1869/1870.
- [2] A. Hurwitz, *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt*, Mathematische Annalen Volume 46, Nummer 2, S. 273–284, Leipzig 1895.
- [3] E. Carvallo, *Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette*, Paris, France: Gauthier-Villars, 1899.
- [4] F. J. W. Whipple, *The Stability of the Motion of a Bicycle*, Quart. J. Pure Appl. Math. 30, S. 312–348, 1899.
- [5] F. Klein, A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Kapitel IX, §8, “Stabilität des Fahrrads.”, Leibzig, Teubner, S. 863–884, 1910.
- [6] E. P. Hanavan, JR. Captain, *USAF A mathematical model of the human body*, AMRL-TR-64-102, AD-608-463, Aerospace Medical Research Laboratories, Wright Patterson Air Force Base/Ohio, 1964.
- [7] D. E. H. Jones, *The stability of the bicycle*, Physics Today 23, S. 34–40, April 1970 (Neuaufgabe September 2006).
- [8] R. S. Sharp, *The stability and control of motorcycles*, Journal mechnaical engineering science, Vol 13 No 5, S. 316–329, 1971.
- [9] D. H. Weir, *Motorcycle handling dynamicx and rider control and the effect of design configuration on response and performance*, Ph.D. dissertation, UCLA, 1972.
- [10] R. D. Roland, *Computer Simulation of Bicycle Dynamics*, Proceedings of the ASME Symposium Mechanics and Sport, Detroit, 1973.
- [11] R. S. Sharp, C. J. Alstead, *The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles*, Vehicle System Dynamics 9, S. 327–357, 1980.
- [12] R. S. Sharp, *The Lateral Dynamics of Motorcycles and Bicycles*, Vehicle System Dynamics 17, S. 265-283, 1985.

- [13] J. M. Papadopoulos, *Bicycle steering dynamics and self-stability: a summary report on work in progress*, Preliminary Draft, Dec. 1987.
- [14] R. S. Hand, *Comparisons and stability analysis of linearized equations of motion for a basic bicycle model*, MSc Thesis, Cornell University, Mai 1988.
- [15] R. Skrna, *Untersuchungen zur Stabilität des Fahrrades bei der Geradeausfahrt*, Diplomarbeit, TU Wien, September 1989.
- [16] I. J. M. Besselink, *Shimmy of Aircraft Main Landing Gears*, Dissertation TU Delft, September 2000.
- [17] R. S. Sharp, *Stability, Control and Steering Responses of Motorcycles*, Vehicle System Dynamics, Vol. 35, No. 4–5, S. 291–318, 2001.
- [18] M. G. Gardner-Morse, I. A. F. Stokes, *Trunk stiffness increases with steady-state effort*, Journal of Biomechanics 34, 2001.
- [19] H. B. Pacejka, *Tyre and vehicle dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2002.
- [20] V. Cossalter, *Motorcycle Dynamics*, Greendale, Wisc., Race Dynamics, 2002.
- [21] V. Cossalter, A. Doria, R. Lot, N. Ruffo, M. Salvador, *Dynamic Properties of Motorcycle and Scooter Tires: Measurement and Comparison*, Vehicle System Dynamics, Vol. 35, S. 329–352, 2003.
- [22] R. S. Sharp, D. J. N. Limebeer, *On steering wobble oscillations of motorcycles*, Proc. Instn Mech. Engrs Vol. 218 Part C: J. Mechanical Engineering Science 2004.
- [23] A. L. Schwab, J. P. Meijaard, J. M. Papadopoulos, *Benchmark Results on the Linearized Equation of Motion of an Uncontrolled Bicycle*, Proceedings of ACMD'04, Seou, August 1–4, 2004.
- [24] A. Pick, D. Cole, *Neuromuscular Dynamics and the Vehicle Steering Task*, Vehicle System Dynamics Supplement 41, S. 182–191, 2004.
- [25] K. J. Åström, R. E. Klein, A. Lennartsson, *Bicycle Dynamics and Control*, IEEE Control Systems Magazine, S. 26–47, August 2005.
- [26] V. Cossalter, A. Doria, *The relation between contact patch geometry and the mechanical properties of motorcycle tyres*, Vehicle System Dynamics, Vol. 43, S. 156–167, 2005.
- [27] A. L. Schwab, J. P. Meijaard, J. M. Papadopoulos, *A multibody dynamics benchmark on the equations of motion of an uncontrolled bicycle*, Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, ENOC-2005, August 7–12, 2005.

- [28] K. M. Moorhouse, K. P. Granata, *Trunk stiffness and dynamics during active extension exertions*, Journal of Biomechanics 38, 2005.
- [29] J. D. G. Kooijman, *Experimental Validation of a Model for the Motion of an Uncontrolled Bicycle*, MSc Thesis, Delft University of Technology, April 2006.
- [30] D. J. N. Limebeer, R. S. Sharp, *Bicycles, Motorcycles and Models*, IEEE Control Systems Magazine, Oktober 2006.
- [31] J. D. G. Kooijman, A. L. Schwab, J. P. Meijaard *Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle*, Multibody Syst Dyn 2008, 19, S. 115–132, Published online 5 May 2007.
- [32] A. L. Schwab, J. P. Meijaard, J. D. G. Kooijman, *Some recent developments in bicycle dynamics*, 12th IFToMM World Congress, Besançon, June 18–21, 2007.,
- [33] J. P. Meijaard, J. M. Papadopoulos, A. Ruina, A. L. Schwab, *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*, Proc. R. Soc. A (2007) 463, 1955–1982, Published online 11 June 2007.
- [34] R. S. Sharp, *Optimal stabilization and path-following controls for a bicycle*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Volume 221, Number 4, S. 415–427, 2007.
- [35] R. S. Sharp *On the Stability and Control of the Bicycle*, Applied Mechanics Review, Vol. 61/060803-1, November 2008.
- [36] NASA Main System Integration Standards Volume I, Section 3 Anthropometry and Biomechanics, <http://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm>, Stand vom 1. Dezember 2009.
- [37] B. Angrosch, *Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatterns*, Diplomarbeit, TU Wien, Jänner 2010.
- [38] R. Hess, J. K. Moore, M. Hubbard, D. L. Peterson *Modeling Manually Controlled Bicycle Maneuvers* Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles, Delft, Oct. 20–22, 2010.
- [39] A. E. Dressl, A. Rahman, *Measuring Dynamic Properties of Bicycles Tires*, Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles, Delft, Oct. 20–22, 2010.
- [40] C. Ott, B. Angrosch, J. Edelmann, M. Plöchl, *Some Investigations on the Wobble Mode of a Bicycle*, Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles, Delft, Oct. 20–22, 2010.
- [41] Race Technology Ltd., <http://www.race-technology.com>

- [42] DIN 70 000, Straßenfahrzeuge *Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten* Begriffe, ISO 8855 Ausgabe 1991, modifiziert, Stand Januar 1994.
- [43] J. Wassermann, *Skriptum zur Vorlesung "Digitale Messsignalerfassung und PC-Messtechnik"*, Institut für Mechanik und Mechatronik, TU Wien, Studienjahr 2007.
- [44] W. Mack, M. Plöchl, *Skriptum zur Vorlesung "Stabilitätsprobleme bewegter Systeme"*, Institut für Mechanik und Mechatronik, TU Wien, Studienjahr 2006/07.
- [45] H. Troger, *Skriptum zur Vorlesung "Mechanik 3"*, Institut für Mechanik und Mechatronik, TU Wien, Studienjahr 2006/07.
- [46] P. Lugner, W. Mack, M. Plöchl, H. Springer, *Skriptum zur Vorlesung "Grundlagen der Mehrkörperdynamik"*, Institut für Mechanik und Mechatronik, TU Wien, Studienjahr 2008.
- [47] R. Gasch, K. Knothe, *Strukturdynamik*, Band1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, 1987.
- [48] J. Lunze, *Regelungstechnik 1*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, Zweite Auflage Juni 1999.
- [49] J. J. Santin, C. H. Onder, J. Bernard, D. Isler, P. Kobler, F. Kolb, N. Weidmann, L. Guzzela, *The World's Most Fuel Efficient Vehicle*, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, Zürich/Singen, 2007.
- [50] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, 12. Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.