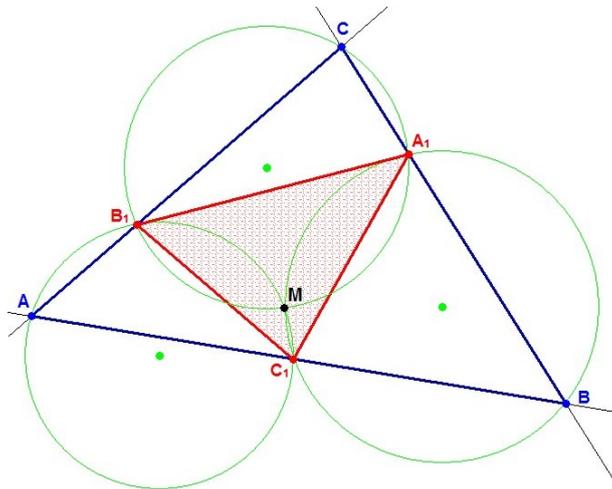


## Diplomarbeit

# Dreiecke, Vierecke,...- ebene Geometrie durch komplexe Zahlen erfasst und mit einer dynamischen Software visualisiert



ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof.Mag.Dr. Peter Paukowitsch

durch

**Viktoria Reither**

4690 Schwanenstadt, Anzental 1

Juli 2010

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich während der letzten sechs Jahre begleitet und mich während dem Studium in jeglicher Hinsicht unterstützt haben.

Zu aller erst möchte ich Herrn Ao.Univ.Prof.Mag.Dr. Peter Paukowitsch ganz herzlich für die Betreuung meiner Diplomarbeit danken. Sie hatten immer ein offenes Ohr bezüglich meiner Anliegen und haben mich sogar während Ihrer Urlaubszeit betreut.

Ich möchte auch allen meinen Studienkollegen und Freunden danken. Ihr habt mich in diesen Jahren auf unterschiedliche Arten begleitet und unterstützt. Besonders möchte ich Manuela, Cathi und Kathi danken. Ohne euch hätte ich die schwierigen Zeiten des Studiums nicht durchgestanden und hätte wahrscheinlich irgendwann aufgegeben. Durch euch wurde meine Studienzeit zu einem ganz besonderen Lebensabschnitt. Ich danke euch dafür und hoffe dass unsere Freundschaft lange bestehen bleibt.

Außerdem möchte ich meiner langjährigen Freundin Daniela danken. Unsere fast wöchentlichen Treffen in Wien haben mich immer wieder motiviert und bestärkt. Danke für deine tolle Freundschaft.

Ein besonderer Dank gilt auch meinem Freund Christian für seine Unterstützung jeglicher Art, für sein Verständnis und vor allem für seine Geduld. Es war nicht immer leicht eine Wochenendbeziehung zu führen. Danke, dass du mich immer wieder motiviert und aufgebaut hast.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Familie, vor allem bei meinen Eltern Anita und Max, bedanken. Euch gebührt mein größter Dank. Ohne euch wäre dieser Abschnitt meines Lebens nicht möglich gewesen. Ihr habt mir die Ausbildung finanziell ermöglicht und mich darüber hinaus in allem unterstützt. Waren es die interessanten Gespräche über den Lehrberuf mit dir, Papa, oder die teilweise sehr langen aufbauenden Spaziergänge mit dir, Mama, ich habe immer auf euch zählen können. Außerdem möchte ich meiner Schwester Katrin und meinem Bruder Jakob danken. Ihr habt mir auch immer wieder Kraft gegeben meine Ziele zu erreichen. Vor allem du Jakob, hast mich mit deiner fröhlichen und unbeschwerten Art eines Kindes oft motiviert und inspiriert.

Ohne euch wäre ich nicht wo ich bin, und was ich bin! DANKE!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>I</b>	<b>Aufsatzfiguren</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Rechnen mit den komplexen Zahlen</b>	<b>6</b>
2.1	Die komplexen Zahlen . . . . .	6
2.2	Die eulersche Formel . . . . .	10
2.3	Einfache Aufgabenstellungen der ebenen Geometrie . . . . .	11
2.4	Kreis und Gerade auf der komplexen Ebene . . . . .	19
2.5	Translationen und Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Regelmäßige Figuren</b>	<b>28</b>
3.1	Satz von Napoleon . . . . .	29
3.2	Beispiele . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Kopunktale Geraden</b>	<b>42</b>
4.1	Satz von Monge . . . . .	43
4.2	Satz von Miquel . . . . .	44
4.3	Satz von Carnot . . . . .	48
4.4	Beispiele . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Längen und Winkel</b>	<b>54</b>
5.1	Cosinussatz für Vierecke . . . . .	55
5.2	Satz von Brettschneider . . . . .	56
5.3	Beispiele . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Kollineare und konzyklische Punkte</b>	<b>71</b>
6.1	Satz von Gauss . . . . .	72
6.2	Satz von Poncelet . . . . .	73

6.3	Satz von Ptolemäus . . . . .	75
6.4	Satz von Droz-Farny . . . . .	76
6.5	Beispiele . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Orthogonale und parallele Geraden</b>	<b>81</b>
7.1	Satz von Aubel . . . . .	82
7.2	Beispiele . . . . .	83
<b>II</b>	<b>Dreiecke und ihre Formgrößen</b>	<b>89</b>
<b>8</b>	<b>Doppelverhältnisse in der Gauß'schen Ebene</b>	<b>90</b>
<b>9</b>	<b>Dreiecke und ihre Formgrößen</b>	<b>96</b>
9.1	Allgemeines . . . . .	96
9.2	Miquel Dreiecke . . . . .	101
9.3	Satz der ersten Formgröße . . . . .	108
9.4	Satz der zweiten Formgröße . . . . .	114
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>126</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>128</b>

# Kapitel 1

## Vorwort

Im Unterrichtsfach Mathematik wird der Körper der komplexen Zahlen als Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen eingeführt. Dabei beschränkt sich der Unterricht auf die Erforschung der arithmetischen Operationen und die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen.

Mit den komplexen Zahlen können komplizierte geometrische bzw. mathematische Aussagen und Sätze der ebenen Geometrie relativ einfach, aber sehr wohl elegant, gelöst werden. Leider nützt man die Vorteile der komplexen Zahlen als Instrument für die Lösung von verschiedenen Aufgaben der Elementargeometrie zu wenig.

Als Hauptziel meiner Diplomarbeit sehe ich nun, die Vorteile der komplexen Zahlen als Lösungsmittel an verschiedensten Beispielen der ebenen Geometrie anzuführen. Die Arbeit wird in zwei Bereiche getrennt. Zum Einen werden Beispiele der ebenen Geometrie mit den komplexen Zahlen erfasst und schriftlich festgehalten. Zum Anderen visualisiere ich die behandelten Beispiele mit einer dynamischen Software. Dazu wird das Programm "Euklid Dynageo, Version 3.1f" verwendet. Im Anhang zu dieser Arbeit findet sich eine CD mit allen Dateien zu den Beispielen im geo- bzw. jpg- Format. Die Beschriftung der Dateien wurde an die Kapitelnummerierung angelehnt, d.h. es befinden sich auf der CD Ordner mit der jeweiligen Kapitelüberschrift und darin die Beispiele. Die Dateien im jpg-Format haben zusätzlich zur Nummer der geo-Datei die Beschriftung "Bild\_".

Der schriftliche Teil meiner Arbeit wird ebenfalls in zwei Abschnitte getrennt. In **Teil I** werden Beispiele mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen und bedeutende Sätze der Geometrie mit den komplexen Zahlen mit verschiedenen Lösungswegen behandelt. Dabei führt die Addition von komplexen Zahlen auf Translationen und die Multiplikation auf Drehstreckungen. Einer der Sätze ist der von Napoleon oder der Satz von Gauss. In **Teil II** wird ein anderer Beweisstil

angeführt. Es werden Doppelverhältnisse definiert und damit die Formgröße von Dreiecken bestimmt. Diese Formgröße ist eine komplexe Zahl, die Dreiecke bis auf Ähnlichkeiten festlegt. In beiden Abschnitten findet sich zu Beginn ein Kapitel mit Grundbegriffe und Formeln, die zur Beweisführung der Beispiele benötigt werden.

Am Ende der Arbeit sind ein Literatur-, ein Internet- sowie ein Abbildungsverzeichnis angeführt. Alle geometrischen Begriffe, Formeln, Lehrsätze und Beispiele finden sich an unterschiedlichen Stellen in den genannten Büchern, Artikeln, Skripten, usw. des Literaturverzeichnisses bzw. Internetverzeichnisses.

Diese Diplomarbeit ist an jenen Leserkreis gerichtet, der sich für die Anwendungsmöglichkeiten der komplexen Zahlen in Zusammenhang mit der ebenen Geometrie interessiert. Zum leichteren Verständnis dieser Arbeit sollten zumindest die Kenntnisse der Schulmathematik über die komplexen Zahlen vorhanden sein.

# **Teil I**

## **Aufsatzfiguren**

# Kapitel 2

## Rechnen mit den komplexen Zahlen

### 2.1 Die komplexen Zahlen

Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0. \quad (2.1)$$

Da wir diese Gleichung in der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen nicht lösen können, erweitern wir die Menge der reellen Zahlen. Wir fügen ein neues Element, die Zahl  $i$ , deren Quadrat gleich  $-1$  ist, hinzu. Die Zahl  $i$  heißt imaginäre Einheit.

$$i^2 = -1 \quad (2.2)$$

Komplexe Zahlen werden meistens in der Form

$$z = a + ib \quad (2.3)$$

dargestellt, wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind und  $i$  ist die imaginäre Einheit.  $z$  heißt dann komplexe Zahl. Wir verwenden für die Menge der komplexen Zahlen das Symbol  $\mathbb{C}$ .

Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  lässt sich durch Punkte auf einer Zahlengeraden darstellen. Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  können wir daher als Punkt in einer Ebene, der komplexen oder Gauss'schen Ebene, darstellen. Die Teilmenge der reellen Zahlen wird auf die waagrechte Achse, sprich die x-Achse in einem kartesischen Koordinatensystem, abgebildet und die Teilmenge der reinimaginären Zahlen wird auf die senkrechte Achse, sprich die y-Achse, abgebildet.

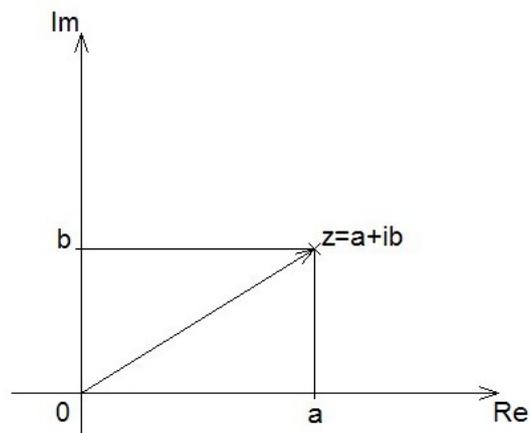


Abbildung 2.1: komplexe Ebene

Die komplexe Zahl  $z = (a, b) = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  besitzt dann die horizontale Koordinate  $a$  und die vertikale Koordinate  $b$ . Die Zahl  $z$  wird dann als komplexe Koordinate bezeichnet. In den folgenden Kapiteln verwenden wir statt dem Begriff "komplexe Koordinate" nur "Koordinate" und werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Anstelle der kartesischen Koordinaten  $a$  und  $b$  können wir eine komplexe Zahl auch durch die Polarkoordinaten darstellen. Dazu benötigen wir die positive Zahl

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2.4)$$

sie heißt Betrag der komplexen Zahl  $z = a + ib$ . In der komplexen Zahlenebene entspricht dabei  $r$  der euklidischen Vektorlänge (d.h. der Abstand vom Ursprung  $O$ ). Weiters brauchen wir für die Darstellung in Polarkoordinaten den Winkel  $\varphi$ , er wird durch die reelle Achse und der Zahl  $z$  eingeschlossen, er heißt ein Argument der Zahl  $z$  und wird mit  $\varphi = \arg(z)$  bezeichnet.

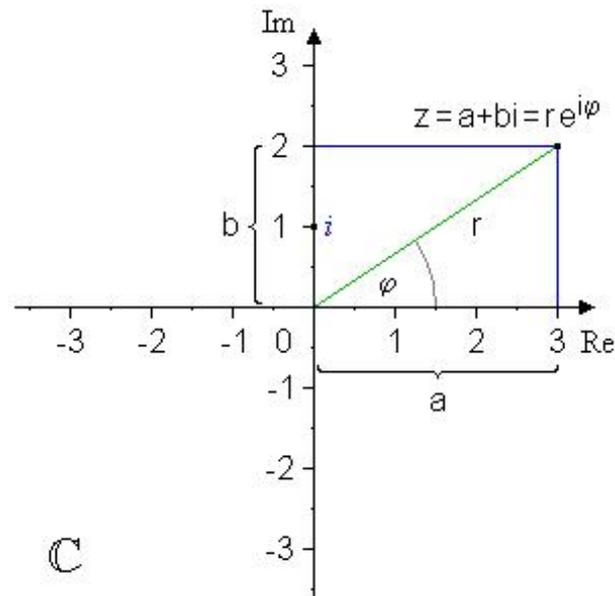


Abbildung 2.2: komplexe Ebene mit Polarkoordinaten

Somit erhalten wir für die Polardarstellung einer komplexen Zahl  $z$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (2.5)$$

Aus den Bedingungen  $a = r \cdot \cos\varphi$  und  $b = r \cdot \sin\varphi$  erhalten wir die trigonometrische Form der komplexen Zahl  $z$

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2.6)$$

Wir benützen die obigen Bedingungen und die trigonometrische Form der komplexen Zahlen und erhalten dann für die Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (2.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2.8)$$

d.h. bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert, während bei der Division die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert werden. Insbesondere gilt:

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \quad (2.9)$$

Dreht man das Vorzeichen des Imaginärteils einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  um, so erhalten

wir die zu  $z$  konjugierte Zahl

$$\bar{z} = a - ib. \quad (2.10)$$

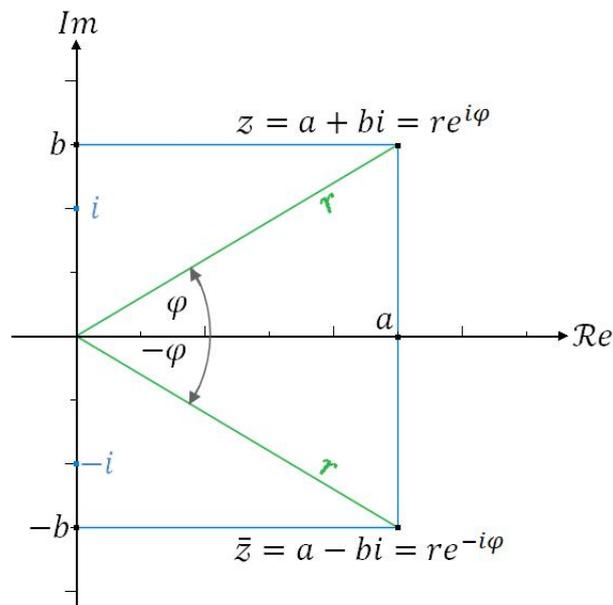


Abbildung 2.3: konjugiert Komplexe Zahl

Die Abbildung der Konjugation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow \bar{z}$  ist ein Körperautomorphismus und ist mit der Addition und Multiplikation verträglich, d.h. für alle  $y, z \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\overline{y + z} = \bar{y} + \bar{z}, \quad \overline{y \cdot z} = \bar{y} \cdot \bar{z} \quad (2.11)$$

Das Produkt aus einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  und ihrer komplex Konjugierten  $\bar{z}$  ergibt das Quadrat ihres Betrages:

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad (2.12)$$

Die Summe aus einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  und ihrer komplex Konjugierten  $\bar{z}$  ergibt das 2-fache ihres Realteils:

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \quad (2.13)$$

Die Differenz aus einer komplexen Zahl  $z = a + bi$  und ihrer komplex Konjugierten  $\bar{z}$  ergibt

das 2i-fache ihres Imaginärteils:

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) \quad (2.14)$$

Die Bedingung  $z = \bar{z}$  sagt aus, dass die komplexe Zahl  $z$  eine reelle Zahl ist und aus der Bedingung  $z = -\bar{z}$  erhalten wir, dass  $z$  eine reinimaginäre Zahl ist.

## 2.2 Die eulersche Formel

Die eulersche Formel oder auch Eulerformel genannt bezeichnet die Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi). \quad (2.15)$$

Sie stellt eine Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen dar.  $e$  bezeichnet dabei die eulersche Zahl und  $i$  die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.

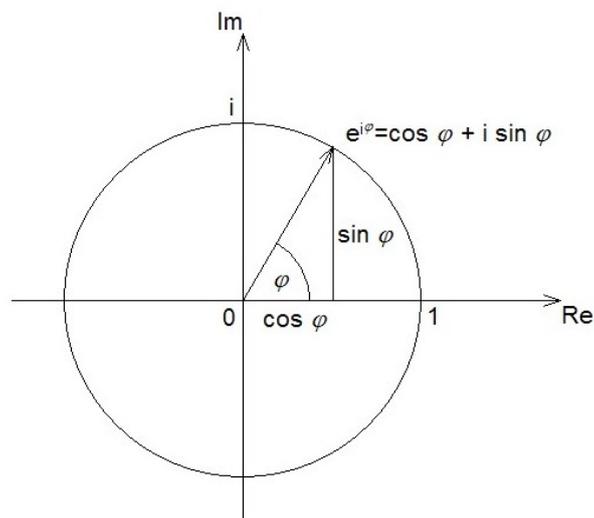


Abbildung 2.4: Eulersche Formel

Nach der Definition der trigonometrischen Funktionen  $\cos\varphi$  und  $\sin\varphi$  folgt, dass die Koordinaten der Punkte  $e^{i\varphi}$  auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt im Ursprung liegen.

## 2.3 Einfache Aufgabenstellungen der ebenen Geometrie

### 2.3.1 Abstand zweier Punkte, Kreis mit Radius $r$

Die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  sind die Koordinaten der Punkte  $M_1$  und  $M_2$ ,  $\vec{z}_1$  und  $\vec{z}_2$  sind die Vektoren davon, die durch diese Zahlen definiert sind. Dann gilt für den Abstand der beiden Punkte

$$M_1M_2^2 = |\vec{z}_2 - \vec{z}_1| = |z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \quad (2.16)$$

Daraus erhalten wir die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt  $M_0(z_0)$  und Radius  $r$

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \quad (2.17)$$

Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen, so gilt

$$z \cdot \bar{z} = r^2. \quad (2.18)$$

Somit lautet die Formel für den Einheitskreis

$$\bar{z} = \frac{1}{z}. \quad (2.19)$$

### 2.3.2 Teilverhältnis einer Strecke

$a$ ,  $b$  und  $c$  sind die Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Die Bedingung

$$\vec{AB} = \lambda \vec{CB}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \quad (2.20)$$

charakterisiert die Kollinearität der drei Punkte, die reelle Zahl  $\lambda$  gibt das Teilungsverhältnis im Punkt  $C$  der Strecke  $AB$  an. Aus der Bedingung 2.20 erhalten wir  $\vec{OC} - \vec{OA} = \lambda (\vec{OB} - \vec{OC}) \Leftrightarrow c - a = \lambda(b - c)$  und weiters

$$\lambda = \frac{c - a}{b - c} \quad (2.21)$$

Nachdem  $\lambda$  eine reelle Zahl ist, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{c - a}{b - c} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{c}}, \quad (2.22)$$

welche die **Kollinearität** der drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  charakterisiert. Aus der Gleichung 2.21

folgt, dass die Mitte der Strecke  $AB$   $\lambda = 1$  nach der Formel

$$c = \frac{a + b}{2} \quad (2.23)$$

definiert wird.

Ein Viereck  $ABCD$  ist genau dann ein **Parallelogramm**, wenn die Diagonalen einander halbieren. Der Schnittpunkt der Diagonalen ist das Symmetriezentrum. Aus 2.23 lässt sich ein Parallelogramm durch folgende Bedingung kennzeichnen:

$$a + c = b + d \quad (2.24)$$

Fällt das Symmetriezentrum des Parallelogramms  $ABCD$  mit dem Koordinatenursprung zusammen, so erhält die Bedingung 2.24 die Form  $c = -a$  und  $d = -b$ . In diesem Fall definieren wir das Viereck durch  $a\bar{a} = b\bar{b}$ .

### 2.3.3 Parallelität und Orthogonalität der Strecken $AB$ und $CD$

#### Parallelität

Zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  sind genau dann parallel, wenn

$$\overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{CD}$$

gilt, wobei  $\mu = \bar{\mu}$ , d.h. es gibt eine reelle Zahl  $\mu$ , so dass

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mu (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow b - a = \mu(d - c) \Rightarrow \mu = \frac{b - a}{d - c}$$

ist. Ist nun  $\mu = \bar{\mu}$  so folgt:

$$(a - b)(\bar{c} - \bar{d}) = (\bar{a} - \bar{b})(c - d) \quad (2.25)$$

die Bedingung, dass zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  parallel sind.

#### Orthogonalität

Zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  sind genau dann normal zueinander, wenn

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow d - c = \nu(b - a)e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Ist nun  $\nu = \bar{\nu}$ , so erhalten wir

$$\frac{d-c}{b-a} = \nu e^{\frac{i\pi}{2}} = \nu i$$

Weiters folgt

$$\frac{\bar{d}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} = \bar{\nu} i = -\nu i = -\frac{d-c}{b-a}$$

Daraus ergibt sich nun das Kriterium der Orthogonalität

$$(a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0 \quad (2.26)$$

Liegen die Punkte

,

,

und

auf dem Kreis  $\bar{z} = \frac{r^2}{z}$ , dann gilt  $\bar{a} = \frac{r^2}{a}$ ,  $\bar{b} = \frac{r^2}{b}$ ,  $\bar{c} = \frac{r^2}{c}$  und  $\bar{d} = \frac{r^2}{d}$  und wir erhalten aus 2.25 und 2.26 das Kriterium der Parallelität bzw. der Orthogonalität der Sehnen  $AB$  und  $CD$  des Kreises  $z \cdot \bar{z} = r^2$ :

$$ab = cd, \quad ab + cd = 0 \quad (2.27)$$

### 2.3.4 Tangenten und Sekanten des Kreises $z \cdot \bar{z} = r^2$

Ersetzen wir in Gleichung 2.26  $b$ ,  $d$  und  $c$  durch 0,  $a$  und  $z$  ( $z$  ist die komplexe Koordinate eines laufenden Punktes der Tangente), so erhalten wir die Gleichung der Tangente des Kreises  $z \cdot \bar{z} = r^2$  im Punkt  $A$ :

$$\bar{a}z + a\bar{z} - 2r^2 = 0$$

Die Koordinate des Schnittpunkts der Tangenten des Kreises  $z \cdot \bar{z} = r^2$  durch die Punkte  $A$  und  $B$  erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} - 2r^2 = 0 \\ \bar{b}z + b\bar{z} - 2r^2 = 0 \end{cases}$$

Sind die Tangenten also nicht parallel so erhalten wir für  $z$

$$z = \frac{2ab}{a+b} \quad (2.28)$$

Nun ersetzen wir in 2.22  $c$  durch  $z$  und erhalten die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $A$  und  $B$  mit den Koordinaten  $a$  und  $b$ :

$$(\bar{a} - \bar{b})z + (b - a)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \quad (2.29)$$

Liegen die Punkte  $A$  und  $B$  am Kreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$ , so wird die Gleichung 2.29 umgeformt zu

$$r^2 z + ab\bar{z} - r^2(a+b) = 0. \quad (2.30)$$

Schneiden sich die Sekanten durch  $AB$  und  $CD$  des Kreises  $z \cdot \bar{z} = r^2$ , wobei die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  am Kreis liegen, so erhalten wir den Schnittpunkt als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} r^2 z + ab\bar{z} = r^2(a+b) \\ r^2 z + cd\bar{z} = r^2(c+d) \end{cases}$$

Für  $z$  und  $\bar{z}$  ergibt sich dann

$$\bar{z} = \frac{r^2(a+b-c-d)}{ab-cd} \quad (2.31)$$

$$z = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab-cd} \quad (2.32)$$

Sind nun  $AB \perp CD$ , so erhält 2.32 nach Ausführung von 2.27 die Darstellung

$$z = \frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{ab}{c} \right) \quad (2.33)$$

$z$  beschreibt nun die Koordinate der Basis der Höhe des Dreiecks  $ABC$  durch den Eckpunkt  $C$  auf die Seite  $AB$ . Der Kreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$  ist somit der Umkreis des Dreiecks  $ABC$ .

### Koordinate des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks $ABC$ mit Umkreis $z \cdot \bar{z} = r^2$

$a$ ,  $b$  und  $c$  sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$ , das den Umkreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$  besitzt. Wir benützen die Formeln 2.29 und 2.32 und erhalten für die Gleichungen der Geraden, die die Höhen  $AA_1$  und  $BB_1$  des Dreiecks enthalten,

$$z - a = \frac{\frac{1}{2} \left( a + b + c - \frac{bc}{a} \right) - a}{\frac{1}{2} \left( \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}} \right) - \bar{a}} (\bar{z} - \bar{a})$$

$$z - b = \frac{\frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ac}{b}) - b}{\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{b}}) - \bar{b}} (\bar{z} - \bar{b})$$

Die Zahl

$$h = a + b + c \quad (2.34)$$

erfüllt beide Gleichungen. Daraus folgt, dass der Punkt  $H$  mit der Koordinaten  $h$  der Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist.

### 2.3.5 Winkel zwischen zwei Vektoren

$\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  sind zwei beliebige Vektoren. Beide Vektoren gehen nicht durch den Koordinatenursprung.  $\varphi$  ist ein positiv orientierter Drehwinkel.

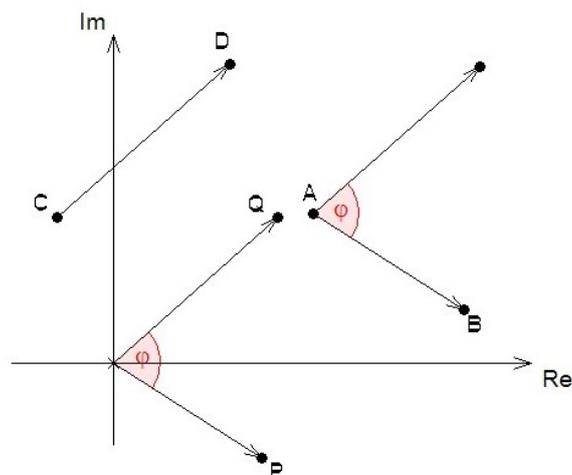


Abbildung 2.5: Winkel zwischen zwei Vektoren

Verschiebt man den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  zum Punkt  $C$  und dreht man ihn in entgegengesetzter Richtung des Uhrzeigersinns bis er auf Vektor  $\overrightarrow{CD}$  fällt. Dann erhalten wir den Vektor  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD}$  durch die positive Drehung gegen den Uhrzeigersinn des Vektors  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$  um den Winkel  $\varphi$  und durch Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl  $k$ . Für die Koordinaten von  $P$  und  $Q$  gilt  $b - a$  sowie  $d - c$  und wir erhalten

$$d - c = k(b - a)e^{i\varphi} = k(b - a)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2.35)$$

und als konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{d} - \bar{c} = k(\bar{b} - \bar{a})e^{-i\varphi} = k(\bar{b} - \bar{a})(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2.36)$$

Aus den Gleichungen 2.35 und 2.36 folgt dann weiters

$$\begin{aligned} (d - c)(\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{d} - \bar{c})(b - a) &= 2k|b - a||b - a|\cos\varphi = 2|d - c||b - a|\cos\varphi \\ (d - c)(\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{d} - \bar{c})(b - a) &= 2ik|b - a||b - a|\sin\varphi = 2i|d - c||b - a|\sin\varphi \end{aligned}$$

und wir erhalten für  $\cos\varphi$  und  $\sin\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{(d - c)(\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{d} - \bar{c})(b - a)}{2|b - a||d - c|}, \quad \sin\varphi = \frac{(d - c)(\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{d} - \bar{c})(b - a)}{2i|b - a||d - c|} \quad (2.37)$$

Fällt nun der Punkt  $C$  mit dem Punkt  $A$ , sowie  $D$  mit  $C$  zusammen so erhalten wir die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$S = \frac{\varepsilon}{2}|c - a||b - a|\sin\varphi = \frac{\varepsilon}{4i}((c - a)(\bar{b} - \bar{a}) - (\bar{c} - \bar{a})(b - a)) \quad (2.38)$$

Für Formel 2.38 gilt auch die Darstellung

$$S = \frac{i\varepsilon}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

wobei bei einem positiv orientiertem Dreieck  $ABC$   $\varepsilon = 1$  und bei einem negativ orientiertem Dreieck  $ABC$   $\varepsilon = -1$  ist. Hat das Dreieck  $ABC$  den Kreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$  als Umkreis, so lautet die Formel 2.39 dann

$$S = \frac{i\varepsilon r^2}{4} \cdot \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{abc} \quad (2.40)$$

### 2.3.6 Ähnliche und kongruente Dreiecke

Wir betrachten nun zwei ähnliche Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$ . Der kleinste Winkel der den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  in den Vektor  $\overrightarrow{AC}$  bzw.  $\overrightarrow{A_1B_1}$  in  $\overrightarrow{A_1C_1}$  überführt wird mit  $\varphi$  und  $\varphi_1$  bezeichnet. Haben die Winkel  $\varphi$  und  $\varphi_1$  die gleichen Vorzeichen, so spricht man von gleich orientierten Dreiecken (positiv (Drehung gegen den Uhrzeigersinn) orientiert bei  $\varphi, \varphi_1 \succ 0$  und negativ (Drehung im Uhrzeigersinn) orientiert bei  $\varphi, \varphi_1 \prec 0$ ). Die Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  sind entgegengesetzt orientiert, wenn die Vorzeichen der Winkel  $\varphi$  und  $\varphi_1$  verschieden sind.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke ist durch die Verhältnisse

$$|\varphi| = |\varphi_1|, \quad AC = kAB, \quad A_1C_1 = kA_1B_1 \quad (2.41)$$

Wir sprechen von einer **Ähnlichkeit erster Art** bei gleicher Orientierung der Dreiecke und erhalten aus 2.41

$$\left. \begin{aligned} c - a &= k(b - a)e^{i\varphi} \\ c_1 - a_1 &= k(b_1 - a_1)e^{i\varphi} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{c_1-a_1} = \frac{b-a}{b_1-a_1} = \sigma, \quad |\sigma| = k$$

Für die **Ähnlichkeit der zweiten Art** bei entgegengesetzter Orientierung erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} c - a &= k(b - a)e^{i\varphi} \\ c_1 - a_1 &= k(b_1 - a_1)e^{-i\varphi} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{c_1-a_1} = \frac{b-a}{b_1-a_1} = \sigma, \quad |\sigma| = k$$

Ist nun  $\sigma$  eine reelle Zahl, also wenn  $\sigma = \bar{\sigma}$  gilt, dann folgt aus 2.3.6 und 2.25 die Bedingung der Parallelität der Geraden  $AB$  und  $A_1B_1$  sowie für  $AC$  und  $A_1C_1$  und daher auch für  $BC$  und  $B_1C_1$ .

### 2.3.7 Gleichseitige Dreiecke

Für ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  gilt:

$$c - a = (b - a)e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad c - b = (a - b)e^{\frac{-i\pi}{3}} \quad (2.42)$$

Aus 2.42 folgt dann das Kriterium der Gleichseitigkeit des Dreieck  $ABC$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad (2.43)$$

Die Bedingung

$$(a + be^{\frac{2i\pi}{3}} + ce^{\frac{4i\pi}{3}})(ae^{\frac{4i\pi}{3}} + be^{\frac{2i\pi}{3}} + c) = 0 \quad (2.44)$$

ist äquivalent zu 2.43. Eine der beiden folgenden Bedingungen ist hinreichend und notwendig für die Gleichseitigkeit des Dreiecks  $ABC$ :

$$a + be^{\frac{2i\pi}{3}} + ce^{\frac{4i\pi}{3}} = 0 \quad (2.45)$$

$$ae^{\frac{4i\pi}{3}} + be^{\frac{2i\pi}{3}} + c = 0 \quad (2.46)$$

Wobei 2.45 der positiven und Bedingung 2.46 der negativen Orientierung des Dreiecks  $ABC$  entspricht. Ist der Kreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$  Umkreis des Dreiecks  $ABC$ , so muss  $a + b + c = 0$  gelten.

### 2.3.8 Mittelpunkte des Inkreises und Ankreises des Dreiecks $ABC$ mit Umkreis $z \cdot \bar{z} = r^2$

Wir nehmen das Dreieck  $ABC$  als positiv orientiert und den Punkt  $A$  auf der reellen Achse an. Dann gilt:

$$a = r, \quad b = re^{2i\beta}, \quad c = re^{2i\gamma}, \quad \gamma \prec \pi \quad (2.47)$$

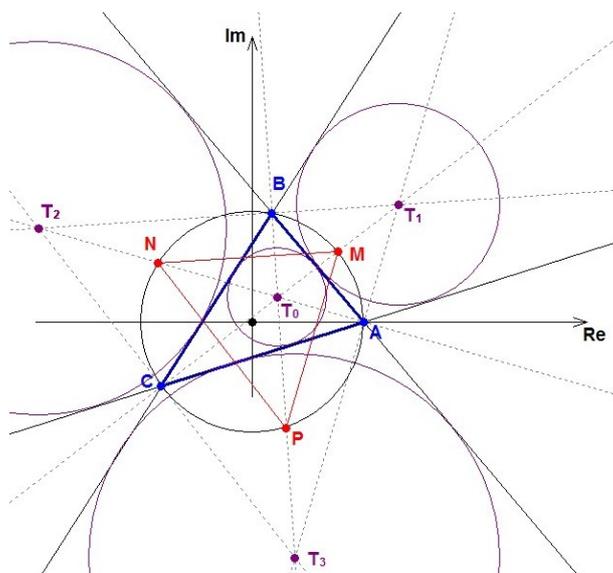


Abbildung 2.6: Inkreis- und Ankreismittelpunkte

Die Punkte  $M$ ,  $N$  und  $P$  sind die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen durch  $C$ ,  $A$  und  $B$  mit dem Umkreis  $z \cdot \bar{z} = r^2$  des Dreiecks  $ABC$ . Somit erhalten wir für die Koordinaten  $m$ ,  $n$  und  $p$

$$m = re^{i\beta}, \quad n = re^{i(\beta+\gamma)}, \quad p = re^{i(\pi+\gamma)} = -re^{i\gamma} \quad (2.48)$$

Folglich sind die Winkelsymmetralen  $CM$ ,  $AN$  und  $BP$  des Dreiecks  $ABC$  die Höhen des Dreiecks  $MNP$ . Nach Anwendung der Formel 2.34 und unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Orthogonalität der Winkelsymmetralen der Innen- und Außenwinkel erhalten wir

den Inkreis- und die Ankreismittelpunkte:

$$t_0 = r (e^{i\beta} + e^{i(\beta+\gamma)} - e^{i\gamma}) , \quad t_1 = r (e^{i\beta} + e^{i\gamma} - e^{i(\beta+\gamma)}) \quad (2.49)$$

$$t_2 = r (e^{i\gamma} + e^{i(\beta+\gamma)} - e^{i\beta}) , \quad t_3 = -r (e^{i\beta} + e^{i\gamma} + e^{i(\beta+\gamma)}) \quad (2.50)$$

## 2.4 Kreis und Gerade auf der komplexen Ebene

### 2.4.1 Gleichung einer Geraden mit dem komplexen Zahlen

Wir erhalten die Gleichung einer Geraden in komplexen Koordinaten durch Anwendung der Bedingung 2.22 der Kollinearität für drei Punkte auf einer Gerade. Der Punkt  $C$  wird durch den laufenden Punkt  $M$  mit der Koordiante  $z$  ersetzt:

$$(\bar{b} - \bar{a})z + (a - b)\bar{z} + b\bar{a} - a\bar{b} = 0 \quad (2.51)$$

Nachdem wir beide Seiten dieser Gleichung mit  $i$  multipliziert haben bezeichnen wir mit

$$u = i(a - b) , \quad v = i(b\bar{a} - a\bar{b}) \quad (2.52)$$

Nun schreiben wir die Gleichung 9.1 in der Form

$$\bar{u}z + u\bar{z} + v = 0 \quad (2.53)$$

an, wobei  $u \neq 0$  und  $v = \bar{v}$  ist, d.h.  $v$  ist eine reelle Zahl. Die Gleichung 8.4 heißt **auto-konjugierte Gleichung** einer Geraden, da die linke Seite der Gleichung eine reelle Funktion ist. Umgekehrt jede Gleichung mit der Darstellung 8.4 mit reellem  $v$  ist eine Gerade auf der komplexen Ebene.

### 2.4.2 Winkel zwischen zwei Geraden

Die komplexe Zahl

$$\kappa = \frac{b - a}{b - \bar{a}} \quad (2.54)$$

heißt komplexer Steigungskoeffizient der Geraden durch  $AB$ .

Der positiv orientierte Winkel zwischen den Vektoren  $\overrightarrow{OE}$  und  $\overrightarrow{AB}$  wird mit  $\alpha$  bezeichnet,  $E$  ist dabei der Einheitspunkt. Daraus folgt dann für den üblichen Steigungskoeffizienten der Geraden

$AB : \mu = \tan \alpha$ . Nach Anwendung der Formel 2.37 erhalten wir also

$$\mu = \frac{(b-a) - (\bar{b} - \bar{a})}{i((b-a) + (\bar{b} - \bar{a}))} = \frac{\kappa - 1}{i(\kappa + 1)} = i \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \quad (2.55)$$

Berücksichtigen wir nun die Bedingung der Parallelität, dass  $\mu_1 = \mu_2$  und die Bedingung der Orthogonalität, dass  $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$  ist, und verwenden 2.55, so erhalten wir

$$\kappa_1 = \kappa_2 \quad (2.56)$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 0 \quad (2.57)$$

Der Winkel  $\theta$  zwischen zwei Geraden wird durch die Formel

$$\tan(\theta) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} = i \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (2.58)$$

definiert. Nun multiplizieren wir beiden Seiten dieser Gleichung mit  $i$  und erhalten somit

$$i \tan(\theta) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} \Leftrightarrow \kappa_1 (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \kappa_2 (\cos(\theta) - i \sin(\theta)). \quad (2.59)$$

Weiters folgt

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}. \quad (2.60)$$

Nun suchen wir eine Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt  $M_1$  mit der Koordinate  $z_1$  geht und zur gegebenen Geraden  $z - z_0 = \kappa_1 (\bar{z} - \bar{z}_0)$  unter dem Winkel  $\theta$  geneigt ist.

Aus 2.60 erhalten wir  $\kappa_2 = \kappa_1 e^{2i\theta}$ . Die gesuchte Gerade hat nun die Gleichung

$$z - z_1 = \kappa_1 e^{2i\theta} (\bar{z} - \bar{z}_1). \quad (2.61)$$

### 2.4.3 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Um den Abstand eines Punktes  $M$  mit Koordinate  $z$  von einer gegebenen Geraden  $z - z_1 - \kappa (\bar{z} - \bar{z}_1) = 0$  zu finden, benötigen wir die Bedingung 2.57 der Orthogonalität zweier Geraden. Wir schneiden die gegebene Gerade mit der orthogonalen Geraden durch den Punkt  $M$  und erhalten für die Koordinate  $\hat{z}$  des Schnittpunktes  $\hat{M}$

$$\hat{z} = \frac{1}{2} (z_0 + z_1 + \kappa (\bar{z}_0 - \bar{z}_1)) \quad (2.62)$$

Der Abstand  $d$  des Punktes  $M$  von der Geraden  $z - z_1 - \kappa(\bar{z} - \bar{z}_1) = 0$  ist gleich der Länge der Strecke  $M\hat{M}$ :

$$d = |z_0 - \hat{z}| = \frac{1}{2} |z_0 - z_1 - \kappa(\bar{z}_0 - \bar{z}_1)| \quad (2.63)$$

Verwenden wir Formel 9.1, so erkennt man, dass die Koordinate der Basis der Normale auf die Sekante  $AB$  des Kreises  $z \cdot \bar{z} = r^2$  durch die Formel

$$h = \frac{1}{2} \left( a + b + z_0 - \frac{ab\bar{z}_0}{r^2} \right) \quad (2.64)$$

definiert wird. Die Punkte  $A$  und  $B$  gehören dem Kreis an.

#### 2.4.4 Gleichung eines Kreises

Auf der komplexen Ebene ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $r > 0$  gegeben.  $a$  ist die Koordinate des Punktes  $A$ . Dann gilt für jeden Punkt  $M$  mit Koordinate  $z$  des Kreises die Gleichung  $|\overrightarrow{AM}| = r$ . Daraus erhalten wir für einen Kreis in der komplexen Ebene folgende Gleichung

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2 \quad (2.65)$$

Ist der Mittelpunkt  $A$  und ein Punkt  $B$  mit Koordinate  $b$  des Kreises gegeben, so gilt  $r^2 = (b - a)(\bar{b} - \bar{a})$ . Die Gleichung 2.65 des Kreises können wir auch wie folgt darstellen

$$z \cdot \bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + \bar{a}b + \bar{a}b - b\bar{b} = 0 \quad (2.66)$$

#### 2.4.5 Die Inversion

In der komplexen Ebene ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $r$  gegeben. Dieser Kreis wird Inversionkreis bezeichnet. Zwei Punkte  $M$  und  $M_-$  heißen invers oder symmetrisch bezüglich dem Inversionkreis, wenn  $r^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM_-}$  gilt.

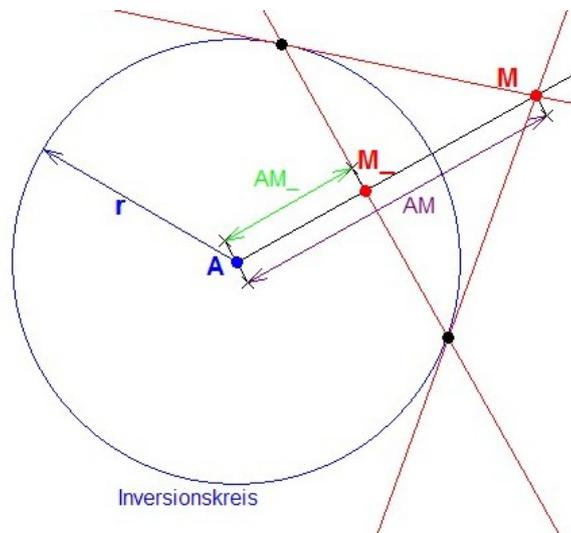


Abbildung 2.7: Konstruktion der Inversion

Eine Abbildung der komplexen Ebene, die den gegebenen Punkt  $M \neq A$  in den Punkt  $M_-$  bezüglich den Inversionskreis überführt, heißt Inversion. Folgende Formel gibt eine Inversion der komplexen Ebene an:

$$z_- - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}. \quad (2.67)$$

Aus obiger Formle folgt, dass die Zusammensetzung zweier Inversionen die Identität ist,  $z_{--} = z$ . Die Formeln 2.67 und 2.65 zeigen, dass das Innere des Inversionskreises nach Anwendung der Inversion in das Äußere übergehen und umgekehrt. Die Punkte am Inversionskreis sind Fixpunkt dieser Abbildung. Für die folgenden Kapitel benötigen wir

**Satz 1:** Eine Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt des Inversionskreises geht, wird nach Inversion auf einen Kreis abgebildet, der durch den Mittelpunkt des Inversionskreises geht. Durch den Mittelpunkt geht eine Tangente des Kreises. Eine Gerade, die den Mittelpunkt des Inversionskreises enthält, ist nach der Abbildung wieder eine Gerade durch den Mittelpunkt. Dieser Satz wird ohne Beweis angeführt.

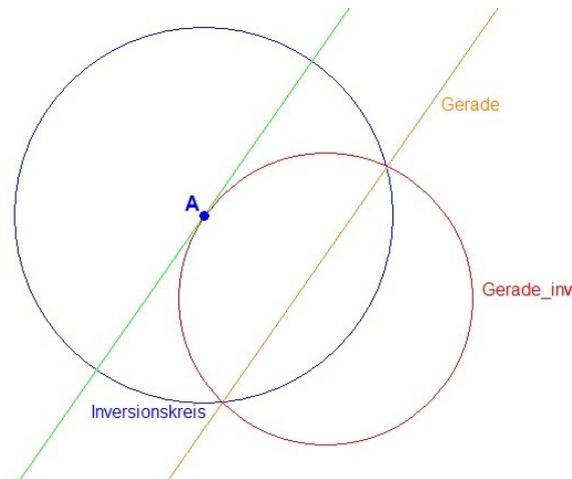


Abbildung 2.8: Gerade nach Inversion

Wir bezeichnen:

$$(ab; c) = \frac{c - a}{b - c}, \quad (ab; cd) = (ab; c) : (ab; d) \quad (2.68)$$

Die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit Koordinaten  $a$ ,  $b$  und  $c$  liegen genau dann auf einer Geraden, d.h. sie sind kollinear, wenn die Zahl  $(ab; c)$  eine reelle Zahl ist. Ist die Zahl  $(ab; cd)$  eine reelle Zahl, so ist auch  $(ab; d)$  reell. Daraus folgt, dass alle vier Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  kollinear sind. Die Zahl  $(ab; cd)$  ist das Doppelverhältnis der vier kollinearen Punkte.

Die Zahl  $(ab; cd) = \omega$  ist eine reelle Zahl und  $(ab; d)$  eine nicht reelle Zahl.

$$(ab; d) = x + iy, \quad y \neq 0 \quad (2.69)$$

Dann ist die Zahl

$$(ab; c) = \omega \cdot (x + iy), \quad \bar{\omega} = \omega \quad (2.70)$$

auch nicht reell.

Nun führen wir eine Parallelverschiebung des kartesischen Koordinatensystems durch und lassen den Koordinatenursprung mit dem Punkt  $B$  zusammenfallen. Daraus ergeben sich für die Punkte  $A$ ,  $C$  und  $D$  folgende Koordinaten  $a - b$ ,  $c - b$  und  $d - b$ . Nach Durchführung einer Inversion mit dem Einheitskreis als Inversionskreis, erhalten wir für die transformierten Punkte  $A_-$ ,  $B_-$ ,  $C_-$  und  $D_-$  die Koordinaten  $\frac{1}{a-b}$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{c-b}$  und  $\frac{1}{d-b}$ . Die Zahl

$$\frac{a_- - c_-}{d_- - a_-} = \frac{\frac{1}{\bar{a}-\bar{b}} - \frac{1}{\bar{c}-\bar{b}}}{\frac{1}{\bar{d}-\bar{b}} - \frac{1}{\bar{a}-\bar{b}}} = -\frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{b}} : \frac{\bar{d} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{d}} = -\bar{\omega} = -\omega.$$

Also sind die Punkte  $A_-$ ,  $C_-$  und  $D_-$  kollinear und liegen auf einer Geraden durch den Ursprung  $B_-$ . Daraus können wir folgern, dass die gegebenen Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  konzyklisch sind, d.h. sie liegen auf einem Kreis.

Umgekehrt, liegen die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  auf einem Kreis, so liegen die invertierten Punkte  $A_-$ ,  $B_-$ ,  $C_-$  und  $D_-$  auf einer Geraden und die Zahl  $\omega$  ist reell. Fassen wir nun diesen Sachverhalt zusammen, so erhalten wir

**Satz 2:** Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  liegen genau dann auf einer Geraden oder auf einem Kreis, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{c - a}{b - c} : \frac{d - a}{b - d} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{c}} : \frac{\bar{d} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{d}} \quad (2.71)$$

Das heißt, die Zahl

$$\omega = \frac{c - a}{b - c} : \frac{d - a}{b - d} \quad (2.72)$$

ist eine reelle Zahl. Dieser Satz wird ohne Beweis verwendet.

## 2.5 Translationen und Ähnlichkeitstransformationen

### 2.5.1 Eigenschaften der Translation

Eine Translation (Parallelverschiebung) der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist eine eindeutige Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die jeden Punkt der Ebene oder des Raumes in derselben Richtung um dieselbe Strecke verschiebt. Die Parallelverschiebung ist eine Kongruenzabbildung, da sie längen- und winkeltreu ist.

Da zu jedem Punkt  $M \in \mathbb{R}$  eine eindeutige komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  existiert, und umgekehrt, so wird die Translation in der Ebene durch eine Funktion  $f(z)$  mit einer komplexen Veränderlichen  $z$  definiert, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |f(z_2) - f(z_1)| = |z_2 - z_1|$$

## 2.5.2 Zusammengesetzte Drehungen

Wir betrachten eine Transformationen, die durch folgende Formel definiert ist:

$$\tilde{z} = (z - z_0) e^{i\alpha} + z_0 = f(z) \quad (2.73)$$

Da folgendes gilt, ist diese Transformation eine Translation, bei der ein beliebiger Punkt  $z \in \mathbb{C}$  auf einen Punkt  $\tilde{z}$  abgebildet wird.  $z$  und  $\tilde{z}$  haben denselben Abstand vom Fixpunkt  $z_0$ . Somit definiert 2.73 eine Drehung der Ebene um den Punkt  $z_0$ .

$$f(z_0) = z_0, \forall z \in \mathbb{C} : |\tilde{z} - z_0| = |f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| \cdot |e^{i\alpha}| = |z - z_0| \quad (2.74)$$

Es gilt folgender Satz:

**Satz 3:** Eine Zusammensetzung von zwei Drehungen der orientierten Ebene um die orientierten Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  um die Punkte  $A$  und  $B$  mit den Koordinaten  $a$  und  $b$  ist eine Drehung um den Punkt  $C$  mit Koordinate  $c$  um den Winkel  $\alpha + \beta$ , wenn  $\alpha + \beta \neq 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $c$  gilt

$$c = \frac{ae^{i\beta}(1 - e^{i\alpha}) + b(1 - e^{i\beta})}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}} \quad (2.75)$$

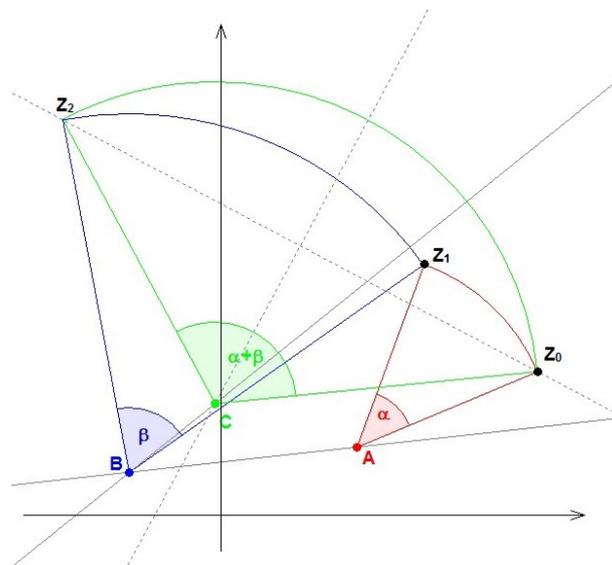


Abbildung 2.9: Satz 3: zusammengesetzte Drehungen

Ist nun  $\alpha + \beta = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  und  $A$  nicht kongruent  $B$ , so ist die Zusammensetzung der beiden Drehungen eine Translation mit Schiebevektor  $\overrightarrow{OD}$ , wobei für  $d$  gilt:

$$d = (a - b)(e^{i\beta} - 1) = (a - b)(e^{-i\alpha} - 1) \quad (2.76)$$

Die Ungleichungen  $\frac{\pi}{2} \prec \frac{\alpha}{2} \prec \pi$  und  $\frac{\pi}{2} \prec \frac{\beta}{2} \prec \pi$  definieren eine positive Orientierung des Dreiecks  $ABC$  und die Ungleichungen  $0 \prec \frac{\alpha}{2} \prec \frac{\pi}{2}$  und  $0 \prec \frac{\beta}{2} \prec \frac{\pi}{2}$  definieren eine negative Orientierung des Dreiecks. Dieser Satz wird ohne Beweis geführt.

### 2.5.3 Punkt- und Achsenspiegelung

Wir betrachten eine Transformation  $f : M(z) \rightarrow \tilde{M}(\tilde{z})$ :

$$\tilde{z} = -z + 2a = f(z) \quad (2.77)$$

Da  $|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1| = |z_1 - z_2|$  gilt, ist diese Abbildung eine Translation. Durch die Bedingung  $f(a) = a$  erhalten wir, dass die Transformation 2.77 den Punkt  $A$  als Mittelpunkt der Strecke  $M\tilde{M}$  besitzt,  $a = \frac{z+\tilde{z}}{2}$ . Daher ist diese Transformation eine Punktspiegelung bezüglich des Punktes  $A$ . Die Transformation 2.77 können wir auch wie folgt darstellen:

$$\tilde{z} = (z - a)e^{i\pi} + a \quad (2.78)$$

Das heißt eine Punktspiegelung bezüglich des Punktes  $A$  ist eine Drehung um Punkt  $A$  um den Winkel  $\pi$ .

Nun betrachten wir die Transformation  $f : M(z) \rightarrow \tilde{M}(\tilde{z})$ :

$$\tilde{z} = a + \kappa(\bar{z} - \bar{a}), \quad |\kappa| = 1 \quad (2.79)$$

Da  $|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1| = |a + \kappa(\bar{z}_2 - \bar{a}) - a - \kappa(\bar{z}_1 - \bar{a})| = |\kappa| \cdot |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |z_2 - z_1|$  gilt, ist diese Transformation eine Translation. Der Punkt  $M$  mit der Koordinate  $z$  der komplexen Ebene wird auf den Punkt  $M_-$  mit der Koordinate  $z_-$  auf die Gerade

$$z - a - \kappa(\bar{z} - \bar{a}) = 0 \quad (2.80)$$

projiziert. Nach Anwendung der Formel 2.62 definieren wir

$$z_- = \frac{1}{2}(z_0 + a + \kappa(\bar{z}_0 - \bar{a})) \quad (2.81)$$

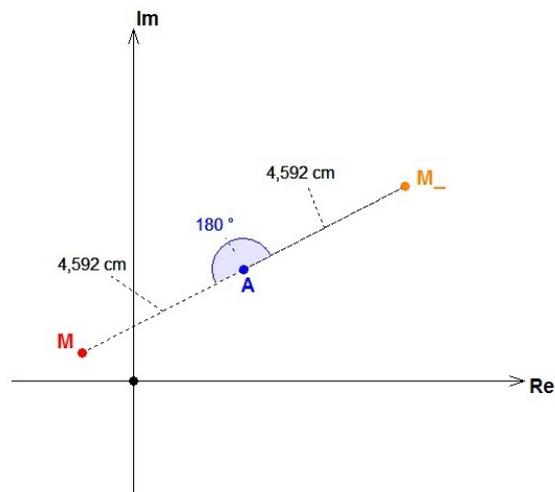


Abbildung 2.10: Punktspiegelung

Da  $\frac{1}{2}(z_0 + \varphi(z_0)) = z_-$  gilt, ist die Transformation 2.79 eine Achsenspiegelung mit 2.80 als Achse.

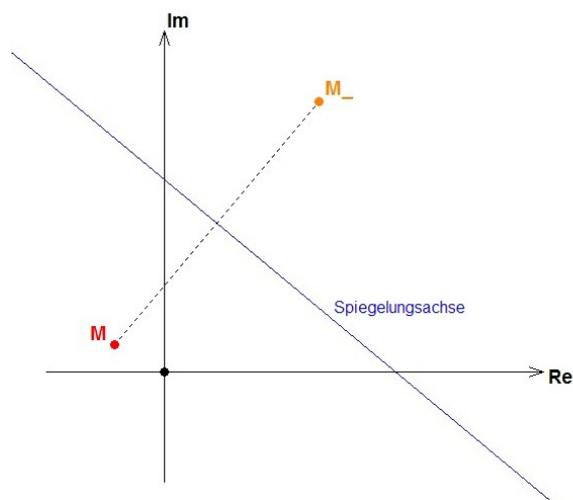


Abbildung 2.11: Achsenspiegelung

# Kapitel 3

## Regelmäßige Figuren

In diesem Kapitel werden Beispiele behandelt, die als Ergebnis regelmäßige Figuren aufweisen. Die Beispiele 1, 2, 3, sowie der Satz von Napoleon haben gleichseitige Dreiecke gemeinsam. Die Beweisstruktur der ersten drei Beispiele erfolgt gleich. Beim Satz von Napoleon wird das gleichseitige Dreieck anhand von zusammengesetzten Drehungen gezeigt.

Das Beispiel 4 weist ein rechtwinkeliges Dreieck auf. Die Beweisstruktur verläuft ähnlich zu den Beispielen 1, 2 und 3.

Bei den Beispielen 5, 6 und 8 ergeben sich keine Dreiecke, sondern ein Parallelogramm, ein Quadrat und ein Rechteck. Der Lösungsweg der Beispiele 5 und 8 ist ähnlich zu den ersten drei Beispielen. Es werden Punkte als Koordinatenursprung und Einheitspunkte festgelegt und die restlichen Punkte definiert. Danach wird wieder in grundlegende Formeln aus dem Kapitel eingesetzt. Das Beispiel 6 wird mit zusammengesetzten Drehungen gelöst.

### 3.1 Satz von Napoleon

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Auf den Seiten  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  werden gleichseitige Dreiecke  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  und  $ACB_1$  aufgesetzt und in diesen die Schwerpunkte konstruiert. Das Napoleon Dreieck entsteht durch Verbinden dieser Schwerpunkte.

Werden die Dreiecke nach **außen** aufgesetzt, so erhalten wir durch Verbinden der Schwerpunkte das **äußere Napoleondreieck**. Bei Anlage der Dreiecke nach **innen** erhält man das **innere Napoleondreieck**, dieses degeneriert aber in einem Punkt, falls das Ausgangsdreieck  $ABC$  gleichseitig ist.

**Dann gilt:** Das Napoleon Dreieck  $A_0B_0C_0$ , unabhängig von der Form des Ausgangsdreieckes  $ABC$ , ist stets gleichseitig.

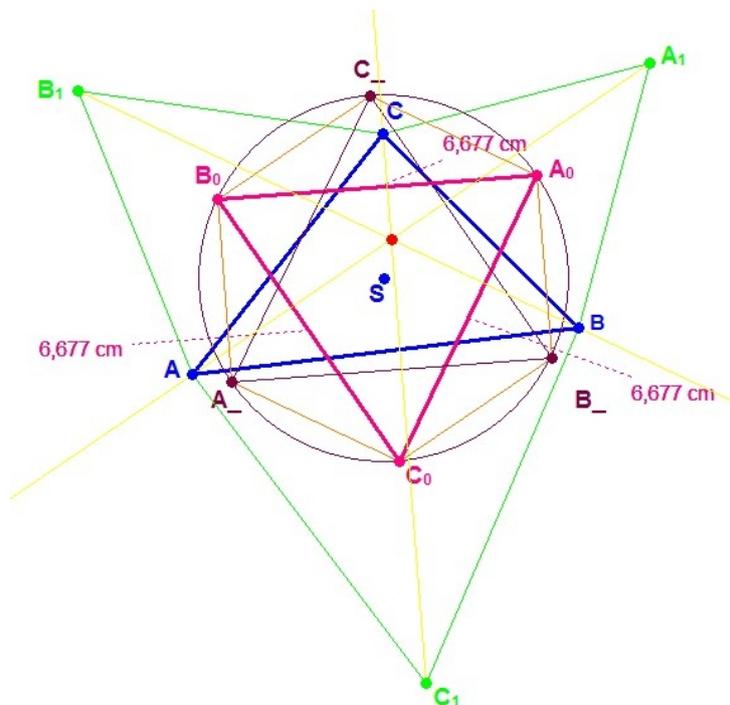


Abbildung 3.1: Satz von Napoleon

**Lösung:** Wir können o.B.d.A annehmen, dass das Dreieck  $ABC$  negativ orientiert ist. Nun betrachten wir die zusammengesetzten Drehungen  $R_{C_0}^{120^\circ} \circ R_{B_0}^{120^\circ} \circ R_{A_0}^{120^\circ}$  beziehungsweise  $R_{C_0}^{240^\circ} \circ R_{B_0}^{240^\circ} \circ R_{A_0}^{240^\circ}$  welche den Punkt  $B$  fixieren. Da  $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$  gilt, ist die Zusammensetzung der Drehungen eine Translation mit einem Fixpunkt, d.h. die Identität. Laut dem inversen Satz über die Zusammensetzung der drei Drehungen ist jeder der Innenwinkel des negativ orientierten Dreiecks  $A_0B_0C_0$   $60^\circ$ , womit bewiesen ist, dass das Napoleon Dreieck gleichseitig ist.

**Weiters gilt:** Die Schwerpunkte  $A_-$ ,  $B_-$  und  $C_-$  der Dreiecke  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  und  $CA_1B_1$  sind Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks  $A_-B_-C_-$ . Zusammen mit den Schwerpunkten  $A_0$ ,  $B_0$  und  $C_0$ , der nach außen (oder innen) aufgesetzten Dreiecke  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  und  $ABC_1$  bilden sie ein regelmäßiges Sechseck. Die Symmetriezentren der beiden gleichseitigen Dreiecke  $A_0B_0C_0$  und  $A_-B_-C_-$  fallen mit dem Schwerpunkt  $S$  des Dreiecks  $ABC$  zusammen. Weiters sind die Geraden durch  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  kopunktal.

**Lösung:** Wir können wieder o.B.d.A. eine negative Orientierung des Dreieck  $ABC$  annehmen. Dann gilt für die Koordinaten der Eckpunkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  der nach außen aufgesetzten Dreiecke  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  und  $ABC_1$ :

$$\begin{aligned}a_1 &= b + (c - b)e^{\frac{\pi i}{3}} \\b_1 &= c + (a - c)e^{\frac{\pi i}{3}} \\c_1 &= a + (b - a)e^{\frac{\pi i}{3}}\end{aligned}$$

Für die Koordinaten der Symmetriezentren  $A_0$ ,  $B_0$  und  $C_0$ , sowie für die Symmetriezentren  $A_-$ ,  $B_-$  und  $C_-$  der Dreiecke  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  und  $CA_1B_1$  gilt weiters

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{3}(2b + c + (c - b)e^{\frac{\pi i}{3}}) \\b_0 &= \frac{1}{3}(2c + a + (a - c)e^{\frac{\pi i}{3}}) \\c_0 &= \frac{1}{3}(2a + b + (b - a)e^{\frac{\pi i}{3}}) \\a_- &= \frac{1}{3}(2a + c + (b - c)e^{\frac{\pi i}{3}}) \\b_- &= \frac{1}{3}(2b + a + (c - a)e^{\frac{\pi i}{3}}) \\c_- &= \frac{1}{3}(2c + b + (a - b)e^{\frac{\pi i}{3}})\end{aligned}$$

Aus ... folgt:  $s = \frac{1}{3}(a + b + c) = s_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = s_- = \frac{1}{3}(a_- + b_- + c_-)$  und

$$\begin{aligned}b_0 - a_0 &= (c_0 - a_0)e^{\frac{\pi i}{3}} \\b_- - a_- &= (c_- - a_-)e^{\frac{\pi i}{3}} \\b_- - s &= (a_0 - s)e^{\frac{\pi i}{3}}\end{aligned}$$

Analog gilt für die nach innen aufgesetzten Dreiecke  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  und  $ABC_1$ :

$$a_1 = c + (b - c)e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad b_1 = a + (c - a)e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad c_1 = b + (a - b)e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$a_0 = \frac{1}{3}(2c + b + (b - c)e^{\frac{\pi i}{3}}), \quad b_0 = \frac{1}{3}(2a + c + (c - a)e^{\frac{\pi i}{3}}), \quad c_0 = \frac{1}{3}(2b + a + (a - b)e^{\frac{\pi i}{3}})$$

$$a_- = \frac{1}{3}(2a + b + (c - b)e^{\frac{\pi i}{3}}), \quad b_- = \frac{1}{3}(2b + c + (a - c)e^{\frac{\pi i}{3}}), \quad c_- = \frac{1}{3}(2c + a + (b - a)e^{\frac{\pi i}{3}})$$

$$s = \frac{1}{3}(a + b + c) = s_0 = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = s_- = \frac{1}{3}(a_- + b_- + c_-)$$

$$c_0 - a_0 = (b_0 - a_0)e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$c_- - a_- = (b_- - a_-)e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$a_0 - s = (b_- - s)e^{\frac{\pi i}{3}}$$

Infolge  $\frac{\kappa_{AA_1}}{\kappa_{CC_1}} = e^{\frac{\varepsilon 2\pi i}{3}}$  und  $\varepsilon^2 = 1$  schneiden einander die Geraden  $AA_1$  und  $CC_1$  im Punkt  $S$ . Wir lassen den Punkt  $S$  mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen. Überdies gilt:  $\frac{a}{a_1} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}$  und  $\frac{c}{c_1} = \frac{\bar{c}}{\bar{c}_1}$

Daraus können wir folgern, dass auch  $\frac{b}{b_1} = \frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}$  gilt. Das heißt weiters die Geraden  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  sind kopunktal. Analog folgt der Beweis, dass das Napoleon Dreieck  $A_0B_0C_0$  auch bei innen aufgesetzten Dreiecken gleichseitig ist.

### Historische Bemerkung:

Der Feldherr und Mathematiker Napoleon Bonaparte wurde am 15.8.1769 in Ajaccio auf Korsika geboren. Er war das vierte von insgesamt 12 Kindern, wobei nur acht Kinder überlebten. Napoleon wurde durch die hohe gesellschaftliche Stellung seiner Vorfahren adelig. Mit zehn Jahren kommt Napoleon als Kanonier in die Militärschule *École Royale* von Brienne. Dort verbringt er 5 Jahre und schließt mit einem Examen ab. Als er gerade mit der Militärschule *École Militaires* in Paris beginnt stirbt sein Vater, er kehrt in seinen Geburtsort zurück um die Versorgung der Familie seiner Mutter zu übernehmen. Doch so lange er studiert und kein eigenes Einkommen vorweisen kann, ist dies ein Ding der Unmöglichkeit.

Dank seiner außerordentlichen Begabung in Mathematik, kann er die Militärschule früher als geplant abschließen und wird mit bereits 16 Jahren zum Offizier ernannt. Napoleon wird deshalb nach Valence versetzt, wo er 3 Monate seinen Dienst macht. Während dieser Zeit führte er das unbefriedigte Leben eines Offiziers in Friedenszeiten.

Er vertrieb seinen unausgefüllten Stunden mit Schreiben und Lesen. Für militärische Bücher konnte er sich nicht begeistern, jedoch verschlingt er politische Bücher. Napoleon beherrschte außer Mathematik, Artillerie, Kriegskunst und Plutarch nur wenig. Jedoch hatte er die Fähigkeit sehr schnell neue Ideen zu finden und setzt sich mit Fragen auseinander, als wäre er der Erste der sich damit befasst.

Er bekommt zu Beginn der französischen Revolution den Auftrag mit seiner Armee die Roya-

listenaufstände in Burgund niederzuschlagen, was ihm auch äußerst erfolgreich gelingt. Durch die Heirat im Jahr 1796 mit Joséphine de Beauharnais, ihr Vater hat gute Verbindungen, wird er zum Oberbefehlshaber der Armee in Italien.

Viele von uns wissen nicht, dass Napoleon Bonaparte am 25.12.1797 als begabter Mathematiker in das Institut de France, Abteilung Mathematische Wissenschaft, aufgenommen wurde. Napoleon war gewiss kein forschender Wissenschaftler, er sich aber sehr für die Mathematik und besonders für Geometrie interessierte und der vorhin erwähnte "Satz von Napoleon" aus seiner Feder stammt. Der berühmte Mathematiker **Pierre Simon de Laplace** war auf der Militärschule sein Lehrer. Napoleon verschaffte ihm auch politische Ämter und adelte ihn 1806. Dass der "Satz von Napoleon" erstmalig von ihm entdeckt wurde, ist eher unwahrscheinlich. Man glaubt, dass er ihm aus Verehrung gewidmet wurde. In einem italienischen Schulbuch aus dem Jahr 1912 entdeckte man zum ersten Mal den Zusammenhang des Satzes mit dem Feldherrn.

Heute findet der Satz kaum noch Verwendung im Schulunterricht, obwohl er gar nicht so schwer zu verstehen wäre.

Napoleon war mehrere Jahre als Feldherr sehr erfolgreich, bis die Niederlage in Paris erfolgte. Er wurde nach Elba verbannt und behält das Recht der Herrschaft. Nach seiner 100-tägigen Herrschaft erfolgt die Niederlage von Waterloo und er wird endgültig und lebenslang auf die Insel St. Helena verbannt. Napoleon stirbt dort 1812.

## 3.2 Beispiele

### 3.2.1 Beispiel 1

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Das Dreieck  $A_1B_1C_1$  geht durch eine Drehung um  $60^\circ$  des Dreiecks  $ABC$  um den Punkt  $M$  hervor.

**Dann gilt:** Die Mittelpunkte  $L$ ,  $N$  und  $P$  der Strecken  $A_1B$ ,  $B_1C$  und  $C_1A$  bilden ein gleichseitiges Dreieck.

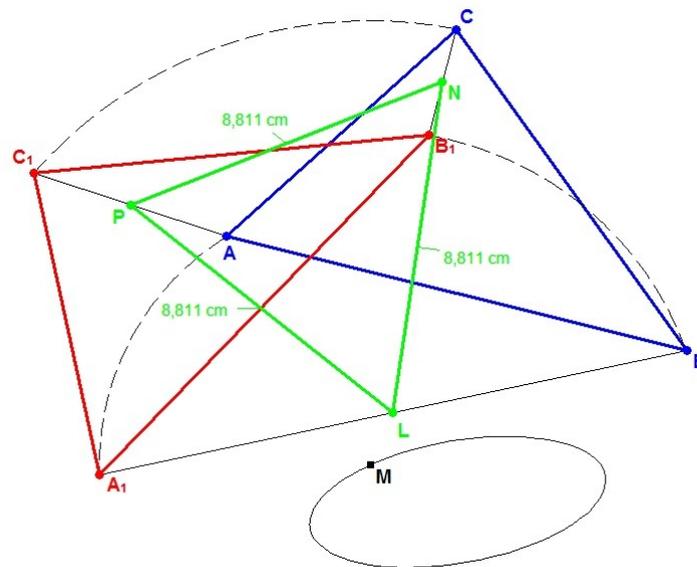


Abbildung 3.2: Beispiel 1

**Lösung:** Wir nehmen den Mittelpunkt  $M$  der Drehung als Koordinatenursprung  $O$  an. Dadurch erhalten wir für die Koordinaten  $a_1, b_1$  und  $c_1$  der Punkte  $A_1, B_1$  und  $C_1$

$$a_1 = ae^{\frac{\pi i}{3}}, \quad b_1 = be^{\frac{\pi i}{3}}, \quad c_1 = ce^{\frac{\pi i}{3}}$$

Dann gilt für die Punkte  $L, N$  und  $P$

$$l = \frac{1}{2}(ae^{\frac{\pi i}{3}} + b), \quad n = \frac{1}{2}(be^{\frac{\pi i}{3}} + c), \quad p = \frac{1}{2}(ce^{\frac{\pi i}{3}} + a)$$

Aus den obigen Gleichungen .. folgt dann  $l - n = (p - n)e^{\frac{\pi 2i}{3}}$ . Somit ist gezeigt, dass das Dreieck  $LNP$  gleichseitig ist.

### 3.2.2 Beispiel 2

Gegeben seien drei gleichseitige und gleichorientierte Dreiecke  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  und  $A_3B_3C_3$ , wobei das Dreieck  $A_1A_2A_3$  auch gleichseitig ist.

**Dann gilt:** Die Mittelpunkte  $P, Q$  und  $R$  der Strecken  $C_1B_2, C_2B_3$  und  $C_3B_1$  sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, wobei die Orientierung dieselbe ist wie die der Ausgangsdreiecke.

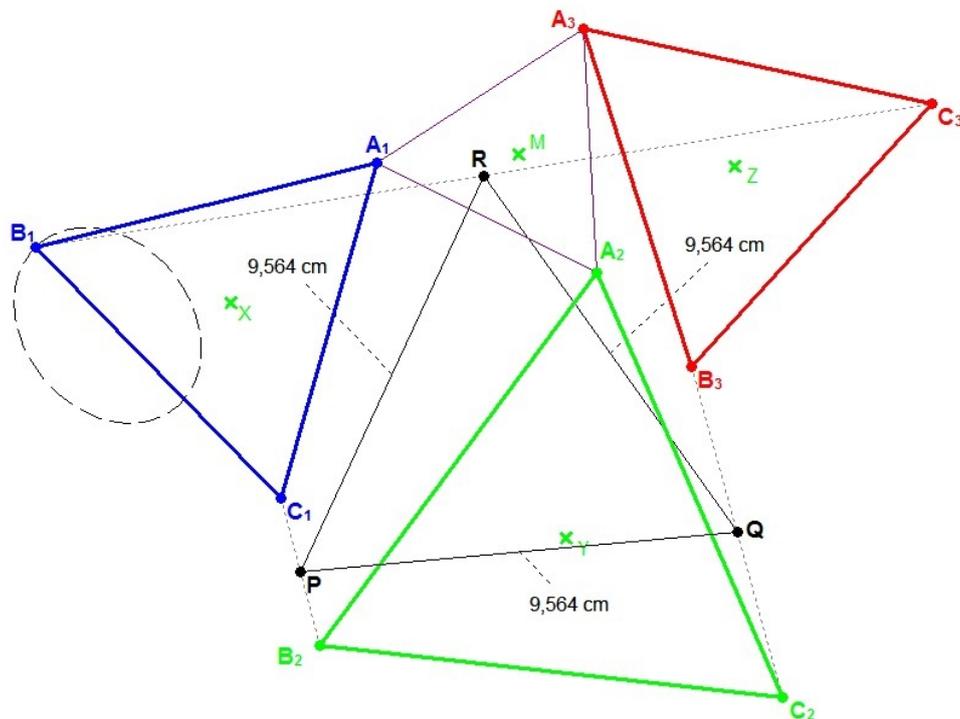


Abbildung 3.3: Beispiel 2

**Lösung:** Wir nehmen den Punkt  $A_1$  als Koordinatenursprung und  $A_2$  als Einheitspunkt des Koordinatensystems an. Dann erhalten wir

$$a_3 = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad c_1 = b_1 e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$c_2 = (b_2 - 1)e^{\frac{\pi i}{3}} + 1, \quad c_3 = (b_3 + a_2)e^{\frac{\pi i}{3}} - a_2 e^{\frac{\pi 2i}{3}}$$

Daraus ergibt sich für die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$ :

$$p = \frac{1}{2}(b_1 e^{\frac{\pi i}{3}} + b_2)$$

$$q = \frac{1}{2}(b_2 e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{3}} + 1 + b_3)$$

$$r = \frac{1}{2}(b_1 + b_3 e^{\frac{\pi i}{3}} + a_2)$$

Aus den obigen Gleichungen folgt die Gleichung  $r - p = (q - p)e^{\frac{\pi i}{3}}$ , die ein gleichseitiges Dreieck charakterisiert. Aus  $\frac{\pi i}{3}$  folgt, dass der Umlaufsinn des Dreiecks  $PQR$  der gleiche ist wie der Umlaufsinn der Ausgangsdreiecke.

### 3.2.3 Beispiel 3

Gegeben seien drei gleichseitige und gleichorientierte Dreiecke  $MAB$ ,  $MCD$  und  $MFG$ .

**Dann gilt:** Die Mitten  $P$ ,  $Q$  und  $R$  der Strecken  $AG$ ,  $BC$  und  $DF$  sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.

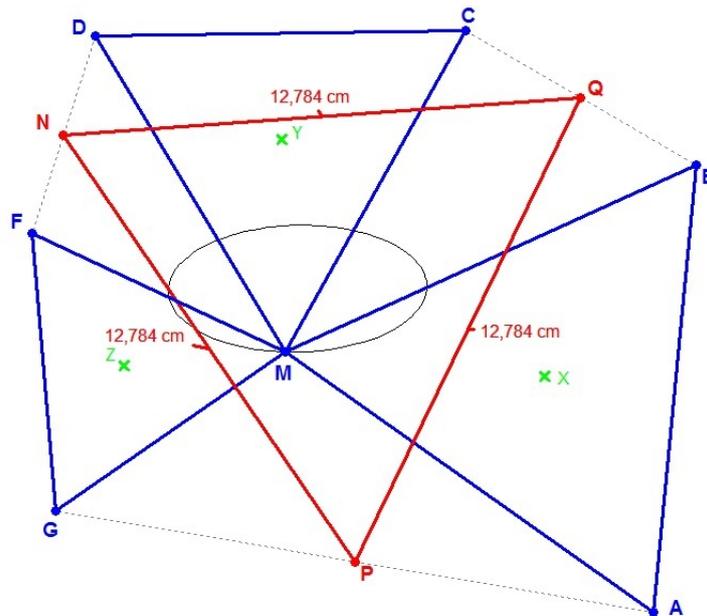


Abbildung 3.4: Beispiel 3

**Lösung:** Lässt man den Punkt  $M$  mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen, so bekommt man für die Punkte  $B$ ,  $D$ ,  $G$ ,  $Q$ ,  $N$  und  $P$  folgende Darstellungen:

$$b = ae^{\frac{\pi i}{3}}, \quad d = ce^{\frac{\pi i}{3}}, \quad g = fe^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$q = \frac{1}{2}(b + c), \quad n = \frac{1}{2}(d + f), \quad p = \frac{1}{2}(a + g)$$

Daraus folgt die Gleichung  $m - n = (p - n)e^{\frac{\pi i}{3}}$ , welche ein gleichseitiges Dreieck charakterisiert.

### 3.2.4 Beispiel 4

Gegeben ist ein konvexes Fünfeck  $ABCDF$ , wobei die Eckpunkte so anzuordnen sind, dass die Dreiecke  $ABC$  und  $CDF$  gleichseitig sind.

**Dann gilt:** Die Dreiecke  $QMF$  und  $QND$  sind zueinander ähnlich und entgegengesetzt orientiert. Zusätzlich ist  $Q$  das Symmetriezentrum des Dreiecks  $ABC$ , die Punkte  $M$  und  $N$  sind die Mittelpunkte der Strecken  $BD$  und  $AF$ .

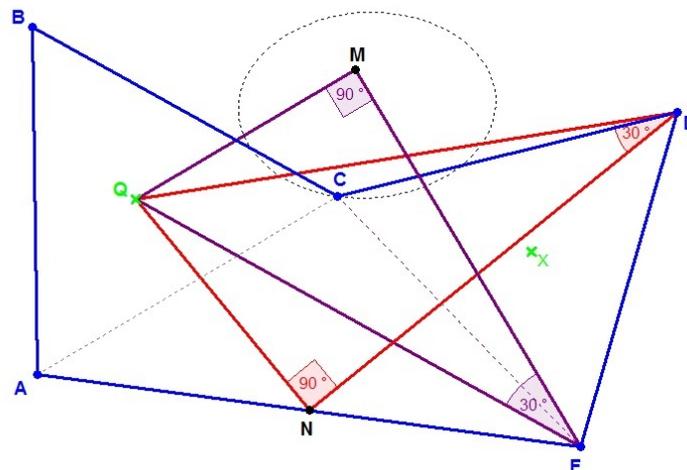


Abbildung 3.5: Beispiel 4

**Lösung:** Wir nehmen den Punkt  $Q$  als Koordinatenursprung und Punkt  $A$  als Einheitspunkt an. Daraus erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $A, C, B, F, N$  und  $M$

$$a = 1, \quad c = e^{\frac{\pi 2i}{3}}, \quad b = e^{\frac{\pi i}{3}} = -e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$f = d(1 - e^{\frac{\pi i}{3}}) - 1, \quad n = \frac{d}{2}(1 - e^{\frac{\pi i}{3}}), \quad m = \frac{1}{2}(d - e^{\frac{\pi i}{3}})$$

Weiters folgt

$$m\bar{d} = \frac{1}{2}(d\bar{d} - \bar{d}e^{\frac{\pi i}{3}})$$

$$f\bar{n} = \frac{1}{2}(d\bar{d} + \bar{d}(e^{-\frac{\pi i}{3}} - 1))$$

So erhalten wir

$$m\bar{d} = f\bar{n} \Leftrightarrow \frac{m - q}{\bar{n} - q} = \frac{f - q}{\bar{d} - q} \quad (3.1)$$

Das Kriterium der Ähnlichkeit 2.3.6 ist also erfüllt, die beiden Dreiecke sind zueinander ähnlich und entgegengesetzt orientiert.

### 3.2.5 Beispiel 5

Gegeben ist ein Sechseck  $ABCDEF$ . In den Ecken  $A$ ,  $C$  und  $E$  sind die Innenwinkel kongruent und nicht größer als  $180^\circ$ , wobei  $\angle ABF = \angle CBD$  und  $\angle AFB = \angle EFD$ .

**Dann gilt:** Das Viereck  $A_1CDE$  ist ein Parallelogramm, wobei  $A_1$  symmetrisch bezüglich des Eckpunktes  $A$  und der Diagonale  $BF$  liegt.

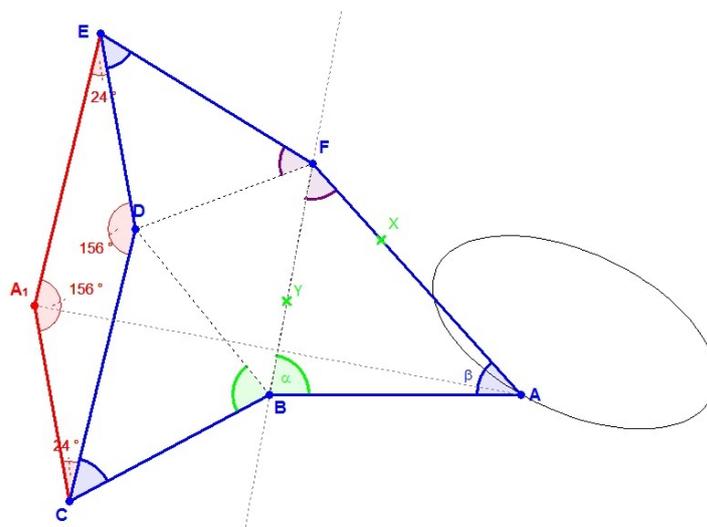


Abbildung 3.6: Beispiel 5

**Lösung:** Wir nehmen den Punkt  $F$  als Koordinatenursprung und Punkt  $B$  als Einheitspunkt an. Dann erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $F$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $C$  und  $A_1$

$$\begin{aligned} f &= 0, \quad b = 1 \\ a &= \mu e^{i\varphi}, \quad e = \mu d e^{-i\varphi} \\ c &= \mu(1-d)e^{-i\varphi} + d \\ a_1 &= \bar{a} = \mu e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $a_1 + d = \mu e^{-i\varphi} + d$ ,  $c + e = \mu e^{-i\varphi} - \mu d e^{-i\varphi} + d + \mu d e^{i\varphi}$ .

Und wir erhalten weiter  $a_1 + d = c + e$ , das Viereck  $A_1CDE$  ist laut Formel 2.24 daher ein Parallelogramm.

### 3.2.6 Beispiel 6

Gegeben ist ein beliebiges konvexes Viereck  $ABCD$ . Auf den Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $AD$  werden Quadrate nach außen (oder nach innen) aufgesetzt.

**Dann gilt:** Die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  der aufgesetzten Quadrate bilden genau dann ein Quadrat, wenn das gegebene Viereck ein Parallelogramm ist.

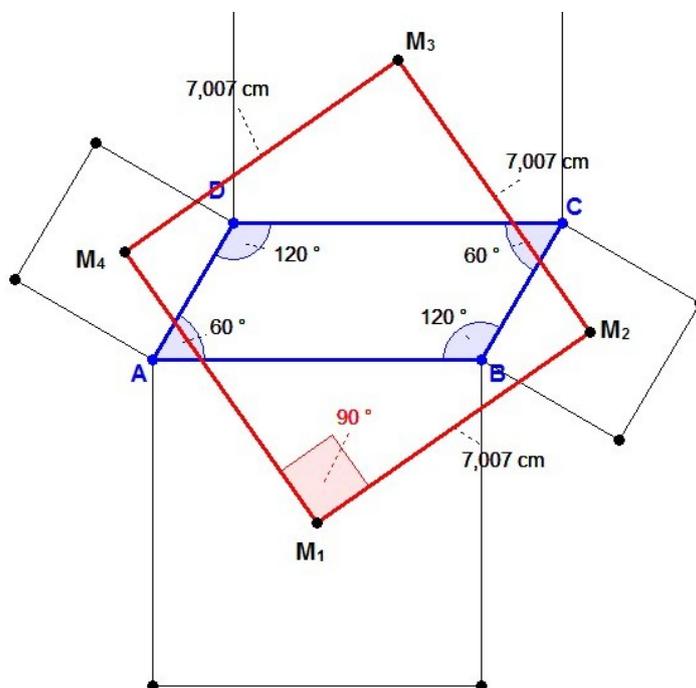


Abbildung 3.7: Beispiel 6

**Lösung:** ( $\Rightarrow$ ) Das Viereck  $ABCD$  sei ein Parallelogramm. Dann gilt:  $a + c = b + d$ .  
Wir betrachten die Zusammensetzung von vier Drehungen :  $R_{M_4}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_3}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_2}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_1}^{\frac{\pi}{2}}$   
Die Koordinaten der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  haben dann die Form:

$$m_1 = \frac{b - ai}{1 - i}, \quad m_2 = \frac{c - bi}{1 - i}$$

$$m_3 = \frac{d - ci}{1 - i}, \quad m_4 = \frac{a - di}{1 - i}$$

Die Drehzentren  $N$  und  $\hat{N}$  der zusammengesetzten Drehungen  $R_{M_2}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_1}^{\frac{\pi}{2}}$  und  $R_{M_4}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_3}^{\frac{\pi}{2}}$  fallen zusammen. Wir verwenden die Formel 2.75 und erhalten so:  $n = \frac{a+c}{2} = \hat{n}$ .

Da das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist, bekommen wir  $m_1 + m_3 = 2n = m_2 + m_4$ .  
Nun sehen wir uns die zusammengesetzten Drehungen  $R_N^{\pi} \circ R_{M_2}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_1}^{\frac{\pi}{2}}$  und  $R_{M_4}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_{M_3}^{\frac{\pi}{2}} \circ R_N^{\pi}$  an, welche die Identität ist. Unter Berücksichtigung von .. erhalten wir, dass das Viereck  $M_1M_2M_3M_4$  ein Quadrat ist.

( $\Leftarrow$ ) Für die Koordinaten der Punkte  $A, B, C$  und  $D$  haben wir:

$$b = (a - m_1)i + m_1$$

$$c = (b - m_2)i + m_2$$

$$d = (c - m_3)i + m_3$$

$$a = (d - m_4)i + m_4$$

$M_1M_2M_3M_4$  sei ein Quadrat. Dann erhalten wir:

$$m_3 - m_2 = (m_1 - m_2)i, \quad m_1 - m_4 = (m_3 - m_4)i$$

Aus ...folgt:

$$a + c - (b + d)i = m_2 + m_4 - i(m_2 + m_4)$$

$$b + d - (a + c)i = m_1 + m_3 - i(m_1 + m_3)$$

wir verwenden ... in ... und erhalten somit:  $b + d = m_2 + m_4 = m_1 + m_3 = a + c$ . Das heißt das Viereck  $ABCD$  ist ein Parallelogramm.

Analog beweisen wir die Angabe für nach innen gerichtete Quadrate.

### 3.2.7 Beispiel 7

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Auf den Seiten  $AB$  und  $BC$  werden rechtwinkelige Dreiecke  $APB$  und  $BQC$  nach außen aufgesetzt, wobei der Winkel  $\angle PAB$  gleich dem Winkel  $\angle BCQ$  ist, also  $\angle PAB = \angle BCQ = \alpha$ .

**Dann gilt:** Die Innenwinkel des Dreiecks  $PQR$  und hängen vom Winkel  $\alpha$  ab und sind konstant.  $R$  ist der Mittelpunkt der Seite  $AC$ .

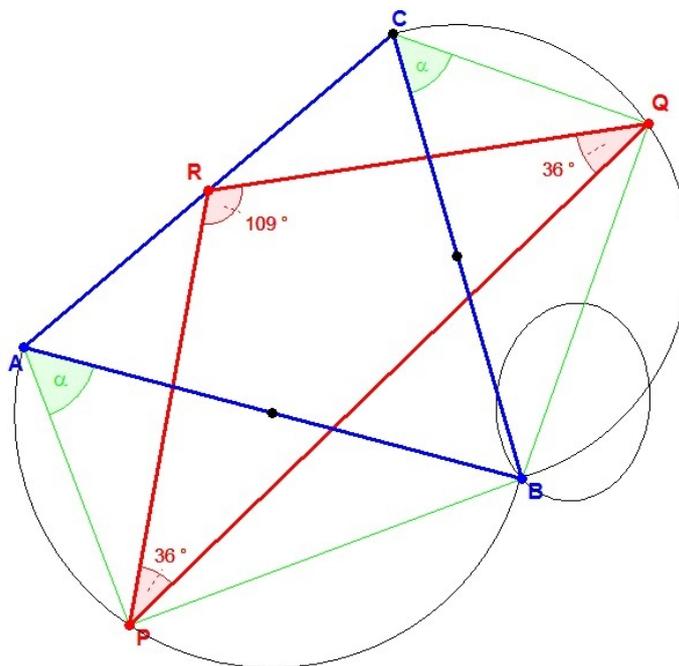


Abbildung 3.8: Beispiel 7

**Lösung:** Da  $\triangle APB$  kongruent zu  $\triangle BCQ$  ist gilt:  $\frac{AP}{BQ} = \frac{CQ}{BQ} = k$ . Weiters betrachten wir die Zusammensetzung  $f$  der Ähnlichkeiten  $\Pi_Q^{\frac{1}{k}, 90^\circ} \circ \Pi_P^{k, 90^\circ} \circ \Pi_R^{1, 180^\circ} = \Pi_S^{1, 360^\circ} \equiv f$ , welche die Identität ist. Nun suchen wir das Bild des Punktes  $R$  über der Abbildung  $f$ .

$$\begin{aligned} \Pi_R^{1, 180^\circ}(R) &= R \\ \Pi_P^{k, 90^\circ}(R) &= D \\ \Pi_Q^{\frac{1}{k}, 90^\circ}(D) &= R \end{aligned}$$

da  $f(R) = R$ , bekommen wir  $p = \frac{kri-d}{ki-1}$ ,  $q = \frac{\frac{1}{k}di-r}{\frac{1}{k}i-1}$ . Nun verwenden wir die Formel 2.79 und erhalten, dass die Punkte  $P$  und  $Q$  symmetrisch bezüglich der Geraden  $RD$  liegen. Daraus folgt  $\triangle PRD = \triangle QRD$ . Wegen der Kongruenz von  $\triangle PRD$  und  $\triangle APB$  erhalten wir  $\angle PRQ = 2\alpha$ ,  $\angle RPQ = \angle RQP = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

### 3.2.8 Beispiel 8

Gegeben ist ein Viereck  $ABCD$ .

**Dann gilt:** Ist genau dann das Viereck ein Sehnenviereck, so bilden die Inkreismittelpunkte  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $D_1$  der Dreiecke  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$  und  $ABC$  ein Rechteck.

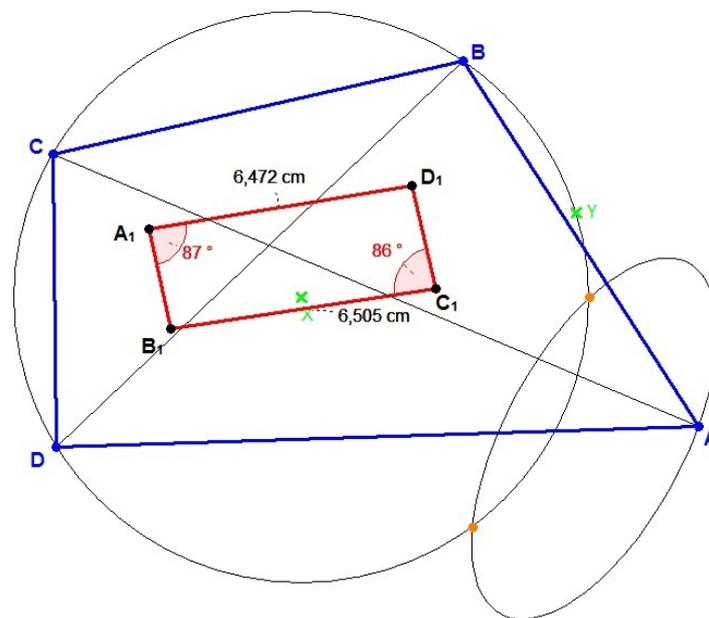


Abbildung 3.9: Beispiel 8

**Lösung:** Wir lassen den Mittelpunkt des Umkreises des Vierecks  $ABCD$  mit dem Koordinatenursprung und den Eckpunkt  $A$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen.

Dann erhalten wir:  $a = 1$ ,  $b = e^{2i\beta}$ ,  $c = e^{2i\gamma}$ ,  $d = e^{2i\delta}$ . Unter Verwendung der Formel 2.50 für die Koordinaten  $t_0$  des Punktes  $T_0$  erhalten wir weiter

$$a_1 = e^{i(\gamma+\beta)} + e^{i(\gamma+\delta)} - e^{i(\beta+\delta)}, \quad b_1 = e^{i\gamma} + e^{i(\delta+\gamma)} - e^{i\delta}$$

$$c_1 = e^{i\beta} + e^{i(\beta+\delta)} - e^{i\delta}, \quad d_1 = e^{i\beta} + e^{i(\gamma+\beta)} - e^{i\gamma}$$

Aus den obigen Gleichungen erhalten wir  $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$  und  $\kappa_{A_1B_1} = -\kappa_{A_1D_1}$ . Nach Verwendung der Formel 2.24 und 2.57 ergibt sich, dass das Viereck  $A_1B_1C_1D_1$  ein Rechteck.

# Kapitel 4

## Kopunktale Geraden

Wie schon der Name des Kapitels sagt, kommen hier Beispiele vor, beziehungsweise werden Sätze behandelt, die kopunktale Geraden aufweisen.

Der Satz von **Monge** geht auf den französischen Mathematiker und Physiker Gaspard Monge zurück. Durch mehrere physikalische Entdeckungen und vor allem durch die Schöpfung der darstellenden (deskriptiven) Geometrie machte er sich einen Namen. Beim Beweis wird zuerst der Umkreis des Vierecks  $ABCD$  als Einheitskreis festgelegt und dann werden die Gleichungen der Geraden aufgestellt.

Im Satz von **Miquel** schneiden sich drei Kreise in einem Punkt, dem sogenannten MIQUEL Punkt. Der Beweis wird anhand von Doppelverhältnissen durchgeführt und wird im zweiten Teil der Diplomarbeit noch genauer behandelt.

Der Satz von Carnot stammt aus der Feder des berühmten französischen Offiziers und Mathematikers Graf Lazare Nicolas Marguerite **Carnot**. Am Anfang des 20. Jahrhunderts war es sogar üblich den Kosinussatz der Trigonometrie als Kosinussatz von Carnot zu bezeichnen. Die Beweisstruktur des Satzes ist ähnlich zur Struktur des Satzes von Monge, zuerst wird ein Punkt als Koordinatenursprung festgelegt und dann die übrigen Punkte definiert.

Bei Beispiel 1, 2 und 3 verlaufen die Lösungswege analog. Es werden die Gleichungen der Kreise beziehungsweise der Geraden aufgestellt und dann das Gleichungssystem gelöst.

## 4.1 Satz von Monge

Gegeben ist ein Sehnenviereck  $ABCD$ . Man lege Geraden durch die Mitten der Seiten normal zur gegenüberliegenden Seite. Dasselbe erfolgt mit den Diagonalen.

**Dann gilt:** Die so erhaltenen Geraden schneiden sich in einem Punkt  $M$ , dem Monge- Punkt

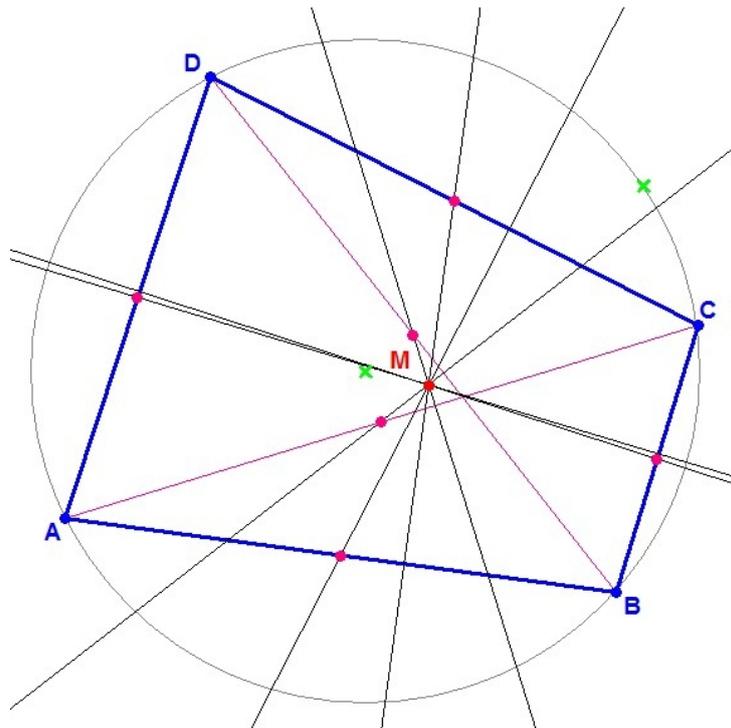


Abbildung 4.1: Satz von Monge

**Lösung:** Wir nehmen den Umkreis des Vierecks  $ABCD$  als Einheitskreis an. Die Koordinaten der Eckpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  des Vierecks bezeichnen wir mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ . Unter Benützung der Bedingung 2.57 erhalten wir für die Geraden  $g_{ab}$ ,  $g_{cd}$ ,  $g_{ad}$ ,  $g_{bc}$  durch die Seiten  $AB$ ,  $CD$ ,  $AD$  und  $BC$  die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 g_{ab} : z - \frac{a+b}{2} &= cd(\bar{z} - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}) \\
 g_{cd} : z - \frac{c+d}{2} &= ab(\bar{z} - \frac{\bar{c} + \bar{d}}{2}) \\
 g_{ad} : z - \frac{a+d}{2} &= bc(\bar{z} - \frac{\bar{a} + \bar{d}}{2}) \\
 g_{bc} : z - \frac{b+c}{2} &= ad(\bar{z} - \frac{\bar{b} + \bar{c}}{2})
 \end{aligned}$$

Für die Geraden  $d_{ac}$  und  $d_{bd}$  durch die Mittelpunkte der Diagonalen erhalten wir

$$d_{ac} : z - \frac{a+c}{2} = bd\left(\bar{z} - \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}\right)$$

$$d_{bd} : z - \frac{b+d}{2} = ac\left(\bar{z} - \frac{\bar{b}+\bar{d}}{2}\right)$$

Der Punkt  $M$  hat dann die Koordinate  $m = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$  und erfüllt jede dieser Geradengleichungen, ist also ein gemeinsamer Punkt dieser Geraden.

## 4.2 Satz von Miquel

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Zu den Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  werden Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  angenommen.

**Dann gilt:** Die Umkreise der Dreiecke  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  und  $A_1B_1C$  schneiden sich in einem Punkt  $M$ , dem MIQUEL Punkt.

*Bemerkung:* Ein Dreieck  $A_1B_1C_1$  wird Miquel Dreieck von  $M$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$  genannt. Die Punkte, die nicht Eckpunkte von  $\triangle ABC$  sind, haben unendlich viele Miquel Dreiecke. Die bekanntesten sind seinen "Pedal" Dreiecke, die vorkommen, wenn  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  die Fußpunkte der Normalen durch  $M$  auf die Seiten von  $\triangle ABC$  sind. Alle Miquel Dreiecke eines Punktes haben dieselbe Formgröße und sind somit gleichsinnig ähnlich. Daher geht der Durchlaufsinne des Dreiecks  $ABC$  nicht ein, es ist also egal ob man das Miquel Dreieck von  $M$  bezüglich  $\triangle ABC$  oder bezüglich  $\triangle BAC$  konstruiert, die Formgrößen bleiben gleich.

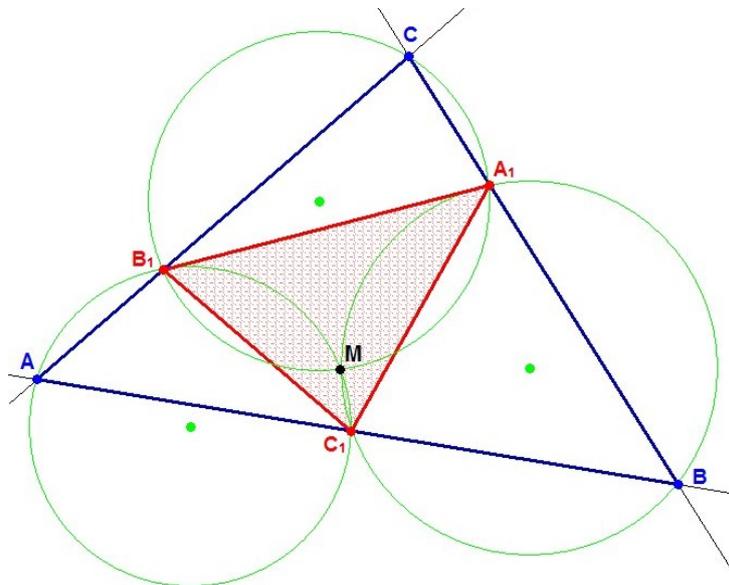


Abbildung 4.2: Satz von Miquel

**Lösung:**

Beim Satz von Miquel zeigen wir eine andere Beweismöglichkeit. Wir benützen dazu den **Peripheriewinkelsatz**. Dieser lautet:

**Peripheriewinkelsatz:** Peripheriewinkel, die dem selben Kreisbogen  $b_1$  zugeordnet sind, sind gleich groß. Sie sind halb so groß wie der diesem Kreisbogen zugeordnete Zentriwinkel.

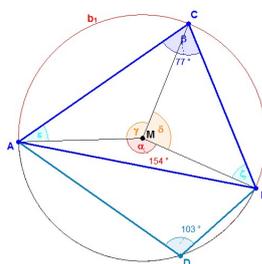


Abbildung 4.3: Peripheriewinkelsatz

**Beweis:** Zentriwinkel  $\alpha$ , Peripheriewinkel  $\beta$ , so lautet die Behauptung  $\alpha = 2\beta$

Das Dreieck  $ACM$  ist gleichschenkelig, so gilt  $\angle(ACM) = \angle(CAM) = \epsilon$ . Also ist  $\gamma = 180^\circ - 2\epsilon$ .

Das Dreieck  $BCM$  ist gleichschenkelig, so gilt  $\angle(BCM) = \angle(CBM) = \zeta$ . Also ist  $\delta = 180^\circ - 2\zeta$ .

Daraus folgt,  $\alpha = 360^\circ - \gamma - \delta = 2\epsilon + 2\delta$

**Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes:** Sind die beiden Winkel bei  $C$  und  $C_-$  gleich groß und liegen sie über derselben Strecke  $AB$ , so liegen die vier Punkte  $A, B, C$  und  $C_-$  auf einem Kreis.

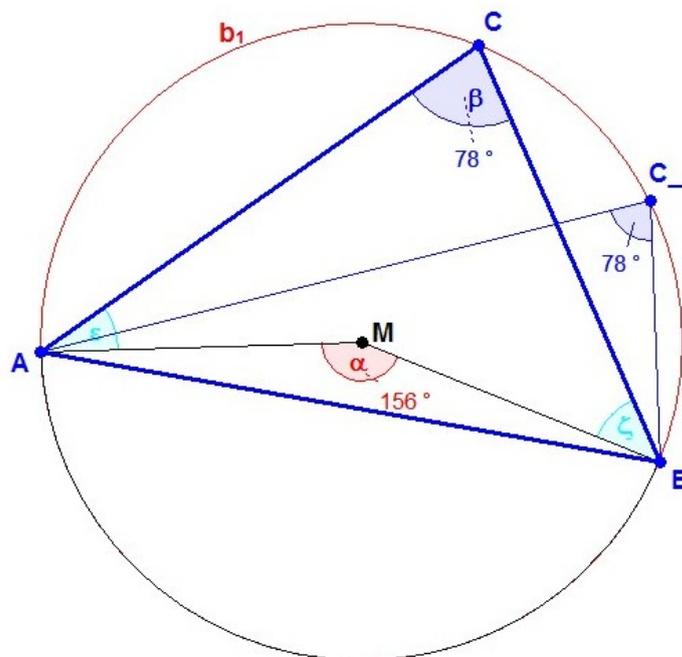


Abbildung 4.4: Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes

**Fortsetzung Lösung:** Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  und auf deren Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$ . Die Umkreise der Dreiecke  $AC_1B_1$  und  $BA_1C_1$  schneiden sich im Punkt  $M$ .

Nach Anwendung des Peripheriewinkelsatzes erhalten wir für den Winkel

$$\angle C_1MB_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1.$$

Analog erhalten wir für den Winkel

$$\angle A_1MC_1 = 180^\circ - \angle CBC_1.$$

Daraus folgt dann für den Winkel  $\angle A_1MB_1$ :

$$\angle A_1MB_1 = 360^\circ - \angle A_1MC_1 - \angle C_1MB_1 = 180^\circ - \angle B_1CA_1$$

Nach Anwendung der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt der Punkt  $M$  am Umkreis des Dreiecks  $CB_1A_1$ . Damit ist gezeigt, dass die drei Kreise durch  $AC_1B_1$ ,  $BA_1C_1$  und  $CB_1A_1$  kopunktal sind.

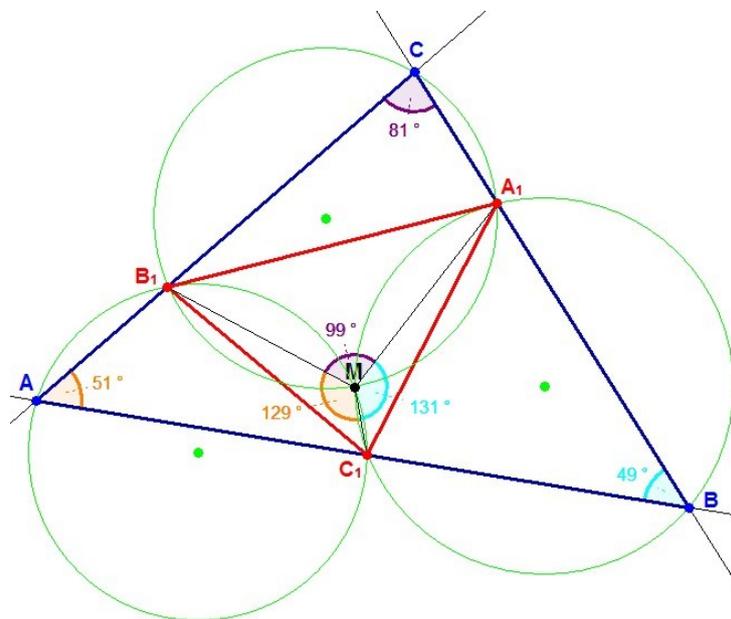


Abbildung 4.5: Skizze zum Beweis des Satzes von Miquel

### 4.3 Satz von Carnot

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  und drei Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$ . Durch diese Punkte werden Normalen zu den Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  des Dreiecks gelegt.

**Dann gilt:** Die drei erhaltenen Geraden sind genau dann kopunktal, falls  $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$  gilt.

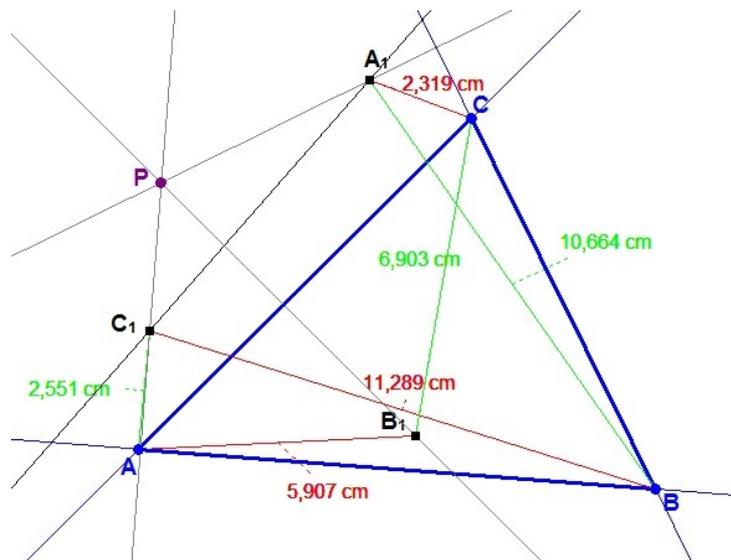


Abbildung 4.6: Satz von Carnot

**Lösung:** ( $\Rightarrow$ )

Der Schnittpunkt der drei Normalen zu den Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  durch die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  wird mit  $P$  bezeichnet. Lassen wir den Punkt  $P$  mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} g_1 : \frac{b-c}{a_1} &= -\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}_1} \\ g_2 : \frac{a-b}{c_1} &= -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}_1} \\ g_3 : \frac{c-a}{b_1} &= -\frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}_1} \end{aligned}$$

Nach Umformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} g_1 : \bar{a}_1 b + a_1 \bar{b} &= \bar{a}_1 c + a_1 \bar{c} \\ g_2 : \bar{c}_1 a + c_1 \bar{a} &= \bar{c}_1 b + c_1 \bar{b} \\ g_3 : \bar{b}_1 c + b_1 \bar{c} &= \bar{b}_1 a + b_1 \bar{a} \end{aligned}$$

Werden nun die drei Gleichungen gliedweise addiert so bekommt man:

$$a_1\bar{b} + b\bar{a}_1 + c_1\bar{a} + a\bar{c}_1 + b_1\bar{c} + c\bar{b}_1 = b_1\bar{a} + a\bar{b}_1 + a_1\bar{c} + c\bar{a}_1 + c_1\bar{b} + b\bar{c}_1, \quad (4.1)$$

womit die Aussage der Angabe bewiesen ist.

( $\Leftarrow$ )

Die Gleichung der Angabe sei erfüllt. Zwei Normalen zu den Seiten  $BC$  und  $CA$  des Dreiecks  $ABC$  durch die Punkte  $A_1$  und  $B_1$  schneiden sich o.B.d.A. im Punkt  $Q$ . Wir nehmen Punkt  $Q$  als Koordinatenursprung an und erhalten somit:

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a_1} &= -\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{a}_1} \\ \frac{c-a}{b_1} &= -\frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}_1} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von 4.1 und 4.2 folgt weiters,  $\frac{a-b}{c_1} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}_1}$ , was bedeutet, dass die dritte Normale zur Seite  $AB$  durch den Punkt  $C_1$  auch durch Koordinatenursprung beziehungsweise durch Punkt  $Q$  geht. Daraus folgt, dass die drei Normalen kopunktal sind.

## 4.4 Beispiele

### 4.4.1 Beispiel 1

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ .

**Dann gilt:** Die drei Kreise, die symmetrisch bezüglich dem Umkreismittelpunkt und der Geraden  $CA$ ,  $AB$  und  $BC$  liegen, schneiden sich im Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks.

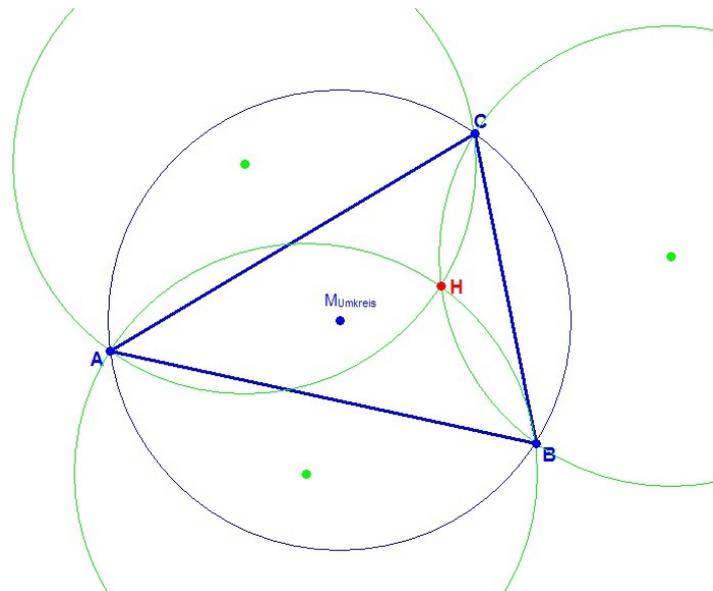


Abbildung 4.7: Beispiel 1

**Lösung:** Der Umkreis des Dreiecks  $ABC$  wird als Einheitskreis angenommen. Dann haben die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise, die durch die Punkte  $CA$ ,  $AB$  und  $BC$  gehen, die Darstellungen  $a + c$ ,  $a + b$  und  $b + c$ . Nach Verwendung der Formel 2.66 bekommen wir für die Kreise folgende Gleichungen:

$$z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{c})z - (a + c)\bar{z} + a\bar{c} + \bar{a}c + c\bar{c} = 0$$

$$z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} = 0$$

$$z\bar{z} - (\bar{b} + \bar{c})z - (b + c)\bar{z} + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{c} = 0$$

Der Höhenschnittpunkt  $H$  des Dreiecks  $ABC$ , welcher durch die Formel 2.34  $h = a + b + c$  definiert ist, erfüllt alle drei Kreisgleichungen, wodurch die in der Angabe formulierte Aussage bewiesen ist.

#### 4.4.2 Beispiel 2

Gegeben ist ein konvexes Viereck  $ABCD$ . Auf seinen Seiten werden nach innen gleichschenkelige Dreiecke aufgesetzt, wobei der Winkel bei den aufgesetzten Punkten  $N_i$  mit  $i = 1, \dots, 4$  jeweils ein Rechter sein soll.

**Dann gilt:** Fallen die Eckpunkte  $N_1$  und  $N_3$  zusammen, genau dann fallen auch die Eckpunkte  $N_2$  und  $N_4$  zusammen.

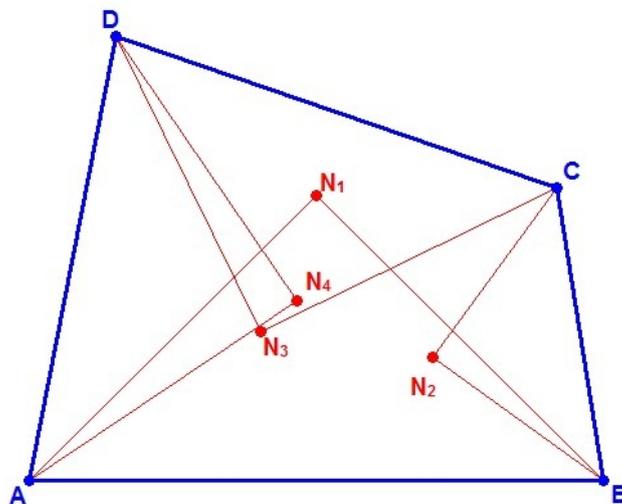


Abbildung 4.8: Beispiel 2

**Lösung:** Für die Koordinaten  $n_1, n_2, n_3$  und  $n_4$  der Eckpunkte  $N_1, N_2, N_3$  und  $N_4$  erhalten wir:

$$n_1 = \frac{a - bi}{1 - i}, \quad n_2 = \frac{b - ci}{1 - i}$$

$$n_3 = \frac{c - di}{1 - i}, \quad n_4 = \frac{d - ai}{1 - i}$$

( $\Rightarrow$ )

Falls wir  $n_1 = n_3$  annehmen, so erhalten wir  $a - c = (b - d)i$ . Durch Einsetzen für  $a - c$  bekommen wir weiters  $n_2 - n_4 = \frac{b-d+(a-c)i}{1-i} = \frac{(b-d)-(b-d)}{1-i} = 0$ , also  $n_2 = n_4$ .

( $\Leftarrow$ )

Der zweite Beweisteil folgt analog zum ersten Teil.

### 4.4.3 Beispiel 3

Gegeben sind zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$ .

**Dann gilt:** Die Geraden durch die Ecken des Dreiecks  $A_1B_1C_1$  parallel zu den Seiten  $BC, AC$  und  $AB$  sind genau dann kopunktal, wenn die Geraden durch die Punkte  $A, B$  und  $C$  parallel zu den Seiten  $B_1C_1, A_1C_1$  und  $A_1B_1$  auch kopunktal sind.

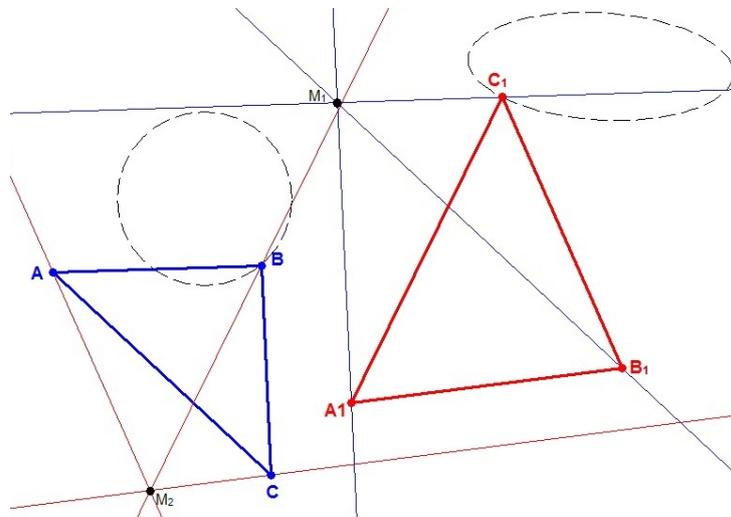


Abbildung 4.9: Beispiel 3

**Lösung:** Wir nehmen den Punkt  $M_1$  als Koordinatenursprung an und den Schnittpunkt  $M_2$  der Geraden durch die Punkte  $A$  und  $B$  parallel zu den Seiten  $B_1C_1$  bzw.  $C_1A_1$  legen wir in den Einheitspunkt. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} g_1 : \frac{a-b}{a-\bar{b}} &= \mu \frac{c_1}{\bar{c}_1} \\ g_2 : \frac{b-c}{b-\bar{c}} &= \mu \frac{a_1}{\bar{a}_1} \\ g_3 : \frac{c-a}{c-\bar{a}} &= \mu \frac{b_1}{\bar{b}_1} \\ h_1 : \frac{b_1-c_1}{\bar{b}_1-\bar{c}_1} &= \mu \frac{a-1}{\bar{a}-1} \\ h_2 : \frac{c_1-a_1}{\bar{c}_1-\bar{a}_1} &= \mu \frac{b-1}{\bar{b}-1} \end{aligned}$$

Weiters zeigen wir, dass die Gerade, die durch Punkt  $C$  und parallel zu  $A_1B_1$  verläuft durch den Einheitspunkt geht. Dass heißt sie erfüllt das Verhältnis  $h_3 : \frac{a_1-b_1}{\bar{a}_1-\bar{b}_1} = \epsilon \frac{c-1}{\bar{c}-1}$ .

Nach Umformen erhalten wir:

$$g_1 : \bar{c}_1 a - \bar{c}_1 b = \mu (c_1 \bar{a} - c_1 \bar{b}) \quad (4.2)$$

$$g_2 : \bar{a}_1 b - \bar{a}_1 c = \mu (a_1 \bar{b} - a_1 \bar{c}) \quad (4.3)$$

$$g_3 : \bar{b}_1 c - \bar{b}_1 a = \mu (b_1 \bar{c} - b_1 \bar{a}) \quad (4.4)$$

Die Gleichungen 4.2, 4.3 und 4.4 werden miteinander addiert und danach mit  $-1$  multipliziert:

$$\begin{cases} \mu(c_1\bar{b} - a_1\bar{b} - c_1 + a_1) = \bar{c}_1b - \bar{a}_1b - \bar{c}_1 + \bar{a}_1 \\ \mu(b_1\bar{a} - c_1\bar{a} - b_1 + c_1) = \bar{b}_1a - \bar{c}_1a - \bar{b}_1 + \bar{c}_1 \end{cases}$$

Nun werden die Gleichungen ?? gliedweise addiert und 4.4.3 berücksichtigt. Daraus erhalten wir das Verhältnis  $\frac{a_1 - b_1}{\bar{a}_1 - \bar{b}_1} = \mu \frac{c - 1}{\bar{c} - 1}$ .

# Kapitel 5

## Längen und Winkel

Die Beispiele beziehungsweise der Cosinussatz für Vierecke, die in diesem Kapitel behandelt werden, haben Längen oder Winkel als Ergebnis, die sich nicht verändern.

Der Cosinussatz für Vierecke zeigt, dass die später erwähnte Bedingung für jedes Viereck gilt. Er stellt die Beziehung zwischen den Quadraten Seitenlängen und den dazugehörigen Winkeln dar.

In Beispiel 1 wird die vom deutschen Philosophen und Mathematiker **Gottfried Wilhelm Leibniz** stammende Formel behandelt. Er war einer der bedeutendsten Philosophen und "der universale Geist" seiner Zeit. "Leibniz sagte über sich selbst: Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben."

Die Beweisstrukturen der Beispiele in diesem Kapitel verlaufen alle ähnlich. Es werden zuerst die Koordinaten der Punkte definiert und anschließend in gegebene Formeln beziehungsweise Bedingungen eingesetzt. Einzig die Beispiele 7, 8 und 12 weichen von den anderen ab. Die Aufgabenstellung ist bereits verschieden zu den restlichen Beispielen. Es ist die Menge von Punkten gesucht. Als Ergebnis erhalten wir Kreise und Paare von Geraden.

## 5.1 Cosinussatz für Vierecke

Gegeben ist ein Viereck  $ABCD$ .

Dann gilt:  $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta - 2BC \cdot CD \cdot \cos\gamma - 2AB \cdot CD \cdot \cos\delta$

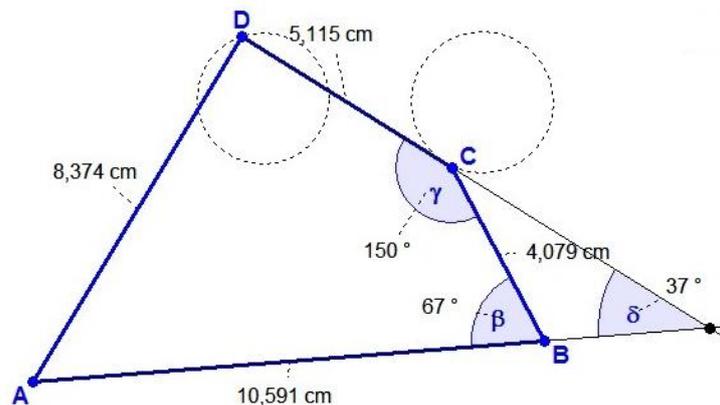


Abbildung 5.1: Cosinussatz für Vierecke

**Lösung:** Die Koordinaten der Eckpunkte des Vierecks  $ABCD$  werden mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  bezeichnet. Der Winkel  $\beta$  wird von den Seiten  $AB$  und  $BC$  und der Winkel  $\gamma$  wird von den Seiten  $BC$  und  $CD$  eingeschlossen. Verlängert man die Seiten  $AB$  und  $DC$  in dieselbe Richtung, so erhält man einen Schnittpunkt; hier liegt der Winkel  $\delta$ .

Wir benützen die Formeln 2.16 und 2.37 aus Kapitel ... und finden somit:

$$\begin{aligned}
 AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta - 2BC \cdot CD \cdot \cos\gamma - 2AB \cdot CD \cdot \cos\delta &= \\
 &= (b - a)(\bar{b} - \bar{a}) + (c - b)(\bar{c} - \bar{b}) + (d - c)(\bar{d} - \bar{c}) - \\
 &\quad - (c - b)(\bar{a} - \bar{b}) - (a - b)(\bar{c} - \bar{b}) + (d - c)(\bar{b} - \bar{c}) - \\
 &\quad - (b - c)(\bar{d} - \bar{c}) - (c - d)(\bar{b} - \bar{a}) - (b - a)(\bar{c} - \bar{d}) = \\
 &= (a - d)(\bar{a} - \bar{d}) = AD^2
 \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage der Angabe gezeigt.

## 5.2 Satz von Brettschneider

Gegeben ist ein Viereck  $ABCD$ .

**Dann gilt:**  $AC^2 \cdot BD^2 = AD^2 \cdot BC^2 + AB^2 \cdot CD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD \cdot \cos(\varphi)$

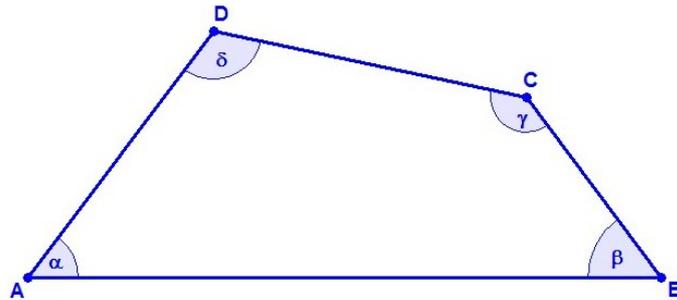


Abbildung 5.2: Satz von Brettschneider

**Lösung:** Wir verwenden die Formeln 2.16 und 2.37. Mit dem Additionstheorem für den Cosinus können wir die Richtigkeit des Satzes beweisen.

$$AC^2 \cdot BD^2 = AD^2 \cdot BC^2 + AB^2 \cdot CD^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD \cdot \cos(\varphi)$$

wobei  $\varphi = \alpha + \gamma$  oder  $\varphi = \beta + \delta$  ist.

Haben wir den Fall eines überschlagenen Vierecks, d.h. die Seiten durch  $AD$  und  $BC$  schneiden einander, so gilt dieser Satz auch. Der Winkel  $\alpha$  wird hier aber von den Seiten  $AB$  und  $AD$  eingeschlossen, sowie der Winkel  $\gamma$  von den Seiten  $CB$  und  $CD$ .

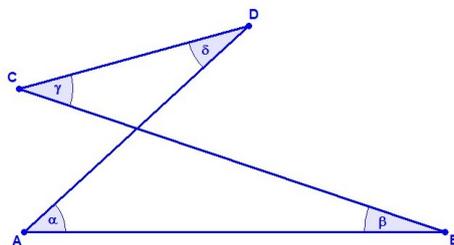


Abbildung 5.3: Satz von Brettschneider, überschlagenes Viereck

## 5.3 Beispiele

### 5.3.1 Beispiel 1

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden bezeichnen wir mit  $M$  und  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene.

Dann gilt die Formel von Leibniz  $PM^2 = \frac{1}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2) - \frac{1}{9}(BC^2 + AC^2 + AB^2)$

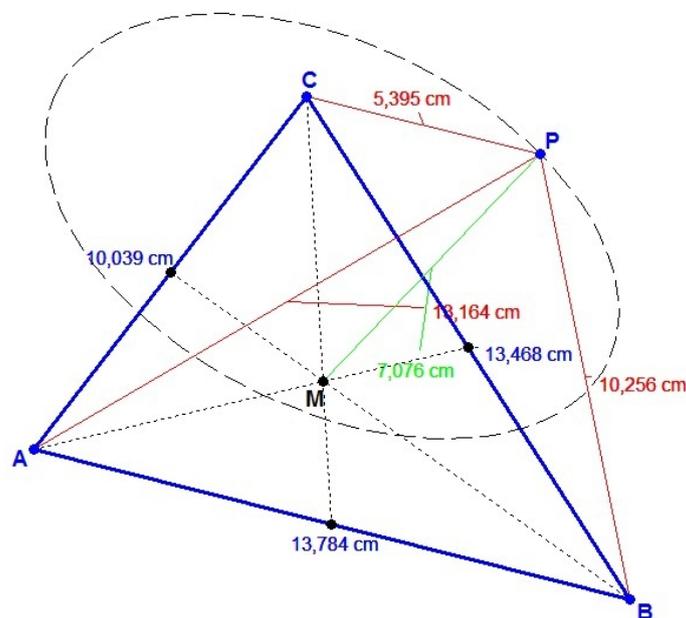


Abbildung 5.4: Beispiel 1

**Lösung:**  $a, b, c$  und  $p$  sind die Koordinaten der Punkte  $A, B, C$  und  $P$ . Für die Koordinate des Schwerpunktes  $M$  gilt  $m = \frac{1}{3}(a + b + c)$ . Nun setzen wir in die Formel von Leibniz ein:

$$\begin{aligned} & 9\left(\frac{a + b + c}{3} - p\right)\left(\frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3} - \bar{p}\right) = \\ & = 3\left((a - p)(\bar{a} - \bar{p}) + (b - p)(\bar{b} - \bar{p}) + (c - p)(\bar{c} - \bar{p})\right) - \\ & \quad - \left((c - b)(\bar{c} - \bar{b}) + (c - a)(\bar{c} - \bar{a}) + (b - a)(\bar{b} - \bar{a})\right) \end{aligned}$$

Werden die Klammern in der obigen Gleichung aufgelöst und dann umgeformt, so kommt man zur Identität, die Formel von Leibniz ist somit bewiesen.

### 5.3.2 Beispiel 2

Gegeben ist ein Sehnenviereck  $A_1A_2A_3A_4$ .

**Dann gilt:** Das Viereck  $A_1A_2A_3A_4$  ist mit dem Viereck  $M_1M_2M_3M_4$  kongruent. Die Eckpunkte  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  sind Schnittpunkte der Höhen der Dreiecke  $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4$  und  $A_1A_2A_3$ .

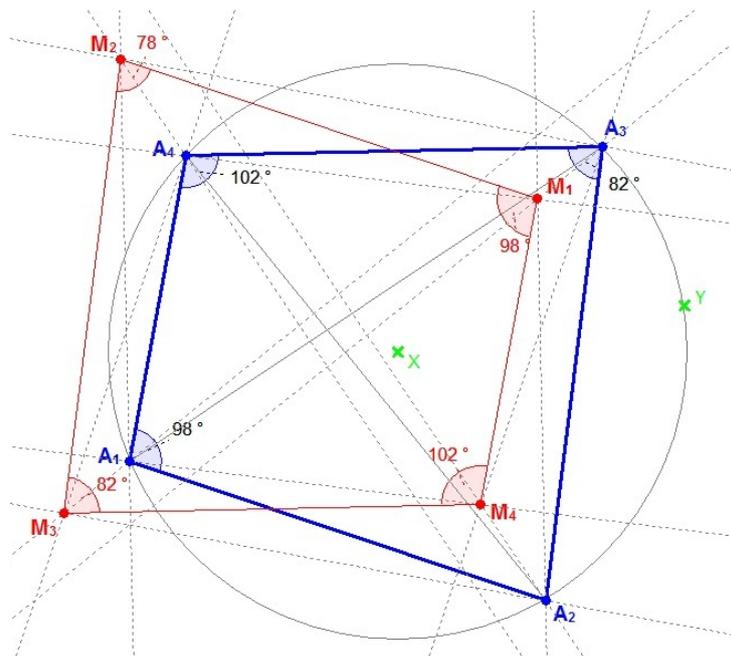


Abbildung 5.5: Beispiel 2

**Lösung:** Wir nehmen den Umkreis des Vierecks  $A_1A_2A_3A_4$  als Einheitskreis an. Laut Formel 2.34 aus Kapitel ... erhalten wir für die Höhenschnittpunkte der Dreiecke  $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4$  und  $A_1A_2A_3$ :

$$m_1 = a_2 + a_3 + a_4, \quad m_2 = a_1 + a_3 + a_4$$

$$m_3 = a_1 + a_2 + a_4, \quad m_4 = a_1 + a_2 + a_3$$

Daraus folgt dann:

$$h_1 - h_2 = a_2 - a_1$$

$$h_2 - h_3 = a_3 - a_2$$

$$h_3 - h_4 = a_4 - a_3$$

$$h_4 - h_1 = a_1 - a_4$$

Es gilt daher:  $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{M_3M_2} = \overrightarrow{A_2A_3}$ ,  $\overrightarrow{M_4M_3} = \overrightarrow{A_3A_4}$  und  $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{A_1A_4}$ . Aus diesen Gleichungen kann man die Kongruenz und ihre entgegengesetzte Orientierung schließen.

### 5.3.3 Beispiel 3

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ , mit  $M$  als Mittelpunkt des Inkreises. Der Punkt  $D$  ist der Schnittpunkt der Geraden durch  $AM$  mit dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$ .

Dann gilt:  $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DM}$ .

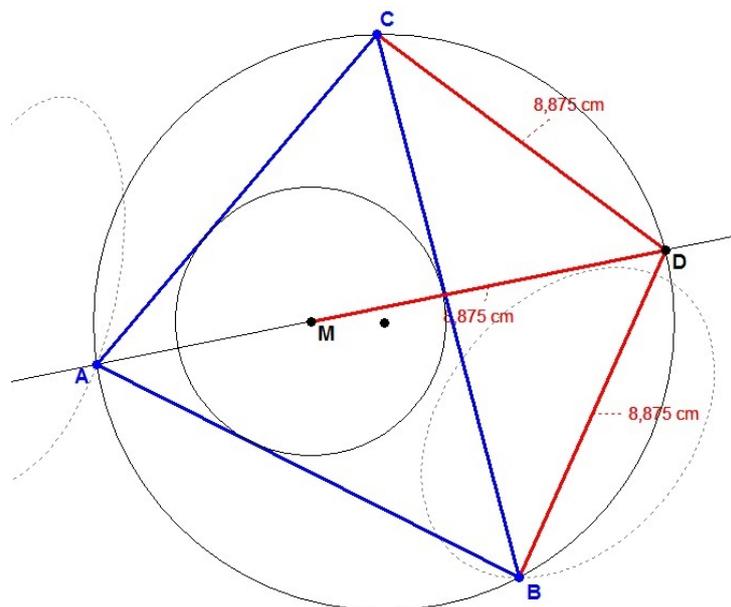


Abbildung 5.6: Beispiel 3

**Lösung:** Wir nehmen den Umkreis des Dreiecks  $ABC$  als Einheitskreis und den Punkt  $A$  als Einheitspunkt an. Weiters setzen wir ohne Einschränkung eine positive Orientierung des Dreiecks  $ABC$  voraus und erhalten:

$$a = 1, \quad b = e^{2i\beta}, \quad c = e^{2i\gamma}, \quad d = e^{i(\beta+\gamma)}$$

Wir benützen die Formel 2.50, und folgern für den Punkt  $M$  daher  $m = e^{i\beta} + e^{i(\beta+\gamma)} - e^{i\gamma}$ . Nach Einsetzen in die obigen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} DC &= |c - d| = |e^{i\gamma} - e^{i\beta}| \\ DB &= |b - d| = |e^{i\beta} - e^{i\gamma}| = |e^{i\gamma} - e^{i\beta}| \\ DM &= |m - d| = |e^{i\gamma} - e^{i\beta}| \end{aligned}$$

also gilt  $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DM}$ .

### 5.3.4 Beispiel 4

Gegeben sind ein Trapez  $ABCD$  und zwei Quadrate  $ANDM$  und  $BQCP$  mit jeweils gleicher Orientierung.

**Dann gilt:** Die Strecken  $MP$  und  $QN$  haben die gleiche Länge.

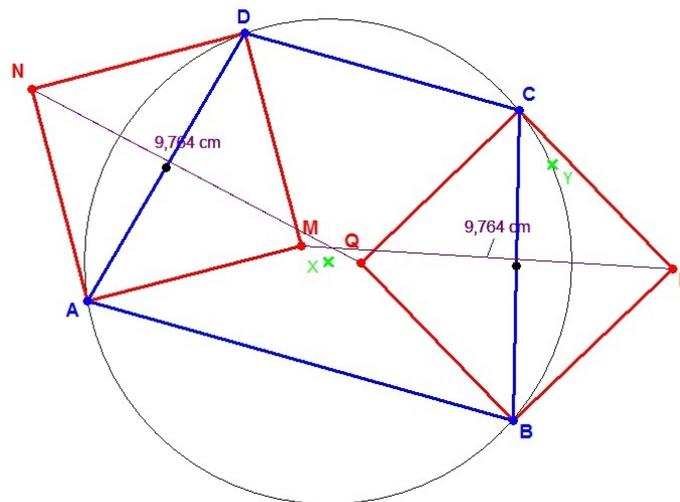


Abbildung 5.7: Beispiel 4

**Lösung:** Aus der Parallelität von  $AB$  und  $CD$  folgt  $(a - b)(\bar{c} - \bar{d}) = (\bar{a} - \bar{b})(c - d)$ . Weiters berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 m &= \left(d - \frac{a+d}{2}\right)i + \frac{a+d}{2} \\
 n &= \left(a - \frac{a+d}{2}\right)i + \frac{a+d}{2} \\
 p &= \left(c - \frac{b+c}{2}\right)i + \frac{b+c}{2} \\
 q &= \left(b - \frac{b+c}{2}\right)i + \frac{b+c}{2}
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Parallelität von  $AB$  und  $CD$  erhalten wir:

$$MP^2 = (p - m)(\bar{p} - \bar{m}) = (n - q)(\bar{n} - \bar{q}) = NQ^2$$

### 5.3.5 Beispiel 5

Gegeben ist ein Kreis  $\omega$  und Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , die am Kreis liegen. Weiters ist ein Punkt  $D$  im inneren des Kreises gegeben, und zwar so, dass  $AB = BC$  und das Dreieck  $BCD$  ein gleichseitiges ist. Die Gerade durch  $AD$  schneidet den Kreis  $\omega$  in einem weiteren Punkt  $E$ .

**Dann gilt:** Die Länge der Strecke  $AD$  ist gleich dem Radius des Kreises  $\omega$ .

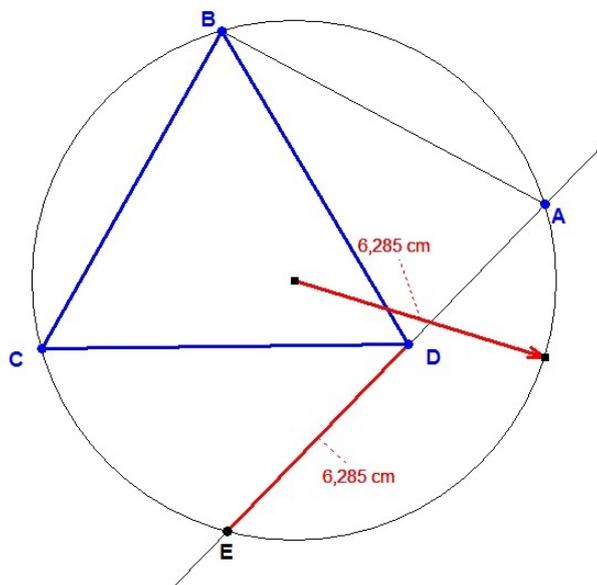


Abbildung 5.8: Beispiel 5

**Lösung:** Wir nehmen den Kreis  $\omega$  als Einheitskreis und den Punkt  $A$  als Einheitspunkt an. Dann erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ :

$$a = 1 \quad (5.1)$$

$$b = e^{i\varphi} \quad (5.2)$$

$$c = e^{2i\varphi} \quad (5.3)$$

$$d = e^{i\varphi-1} e^{i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + e^{i\varphi} \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

wobei  $\varphi \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Die Koordinate  $e$  des Punktes  $E$  erhalten wir als Lösung des Systems:

$$\begin{cases} z\bar{z} = 1 \\ z - 1 = \frac{(e^{i\varphi}-1)e^{i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + e^{i\varphi}-1}{(e^{-i\varphi}-1)e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + e^{-i\varphi}-1} (\bar{z} - 1) \end{cases}$$

Durch den Satz von Vieta erhalten wir:  $e = \frac{e^{i(2\varphi+\frac{\pi}{3})} + e^{i\varphi}}{e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + 1}$ . Wegen obiger Gleichungen finden wir für die Länge der Strecke  $DE$  den Ausdruck:

$|e - d| = \left| \frac{(e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + 1)(-e^{i\varphi} + e^{i(\varphi+\frac{\pi}{3})})}{e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{3})} + 1} \right| = |e^{i\varphi}| \left| e^{\frac{\pi i}{3}} - 1 \right| = \left| e^{\frac{2i\pi}{3}} \right| = 1$  Daraus können wir schließen, dass die Länge  $\overline{DE}$  gleich dem Radius ist.

### 5.3.6 Beispiel 6

Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser  $AB$ . Weiters wird eine Kreissehne  $CD$  mit fixer Länge gelegt. Der Punkt  $M$  ist die Mittelpunkt der Sehne  $CD$  und den Schnittpunkt der Normalen durch den Punkt  $C$  zum Durchmesser mit dem Durchmesser  $AB$  bezeichnen wir als Punkt  $H$ .

**Dann gilt:** Der Wert des Winkels  $\angle CHM$  ist von der Lage der Sehne  $CD$  unabhängig.

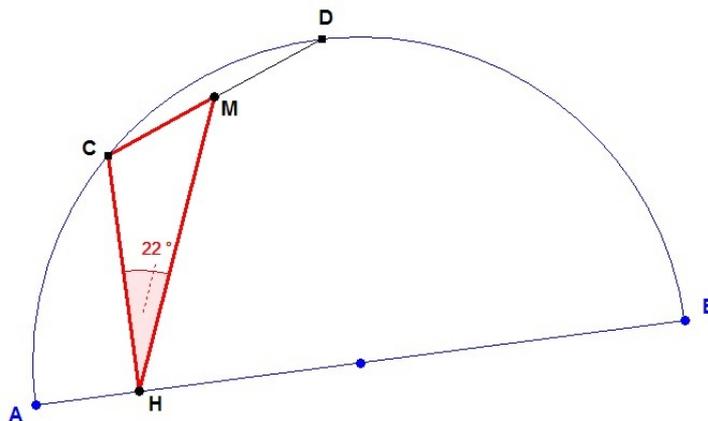


Abbildung 5.9: Beispiel 6

**Lösung:** Wir nehmen den gegebenen Kreis als Einheitskreis und den Punkt  $B$  als Einheitspunkt an. Dann erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $A, B, C$  und  $D$ , wobei  $\alpha$  ein konstanter Winkel ist:

$$\begin{aligned} a &= -1, \quad b = 1, \quad c = e^{i(\varphi+\alpha)}, \quad d = e^{i\varphi} \\ m &= \frac{e^{i\varphi}}{2}(e^{i\alpha} + 1) \\ h &= \frac{1}{2}(c + \bar{c}) = \frac{1}{2}(e^{i(\varphi+\alpha)} + e^{-i(\varphi+\alpha)}) \end{aligned}$$

Der komplexe Steigungskoeffizient der Geraden  $CM$  ist gleich  $\kappa_1 = -1$ . Laut Formel 2.60 ist der komplexe Steigungskoeffizient der Geraden  $HM$  gleich  $\kappa_2 = \frac{h-m}{h-\bar{m}}$ . Durch Einsetzen der obigen Gleichungen erhalten wir weiter:  $\kappa_2 = \frac{e^{-i(\varphi+\alpha)} - e^{i\varphi}}{e^{i(\varphi+\alpha)} - e^{-i\varphi}} = -\frac{1 - e^{i(2\varphi+\alpha)}}{(1 - e^{i(2\varphi+\alpha)})e^{i\alpha}} = -\frac{1}{e^{i\alpha}}$ .

Es sei  $\theta = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HC})$ . Nun benutzen wir die Formel 2.60 zum zweiten Mal und erhalten danach  $e^{2i\theta} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = e^{i\alpha} = const.$ , woraus folgt, dass der Wert des Winkels  $\angle CHM$  von der Lage der Sehne  $CD$  unabhängig ist.

### 5.3.7 Beispiel 7

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck  $ABC$ , wobei der rechte Winkel an der Ecke  $C$  liegt. Das Dreieck ist so gelagert, dass die Punkte  $A$  und  $B$  auf einem festen Kreis bleiben, und der Punkt  $C$  im Inneren des Kreises festgehalten wird. **Zu finden** ist die Menge der Mittelpunkte  $M$  von  $AB$  und die Menge der Schnittpunkte  $D$  der Tangenten an den Kreis durch  $A$  und  $B$ .

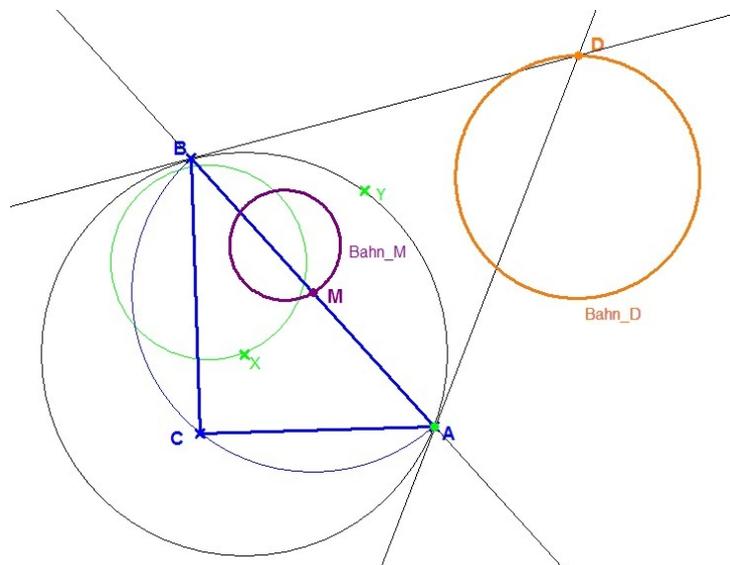


Abbildung 5.10: Beispiel 7

**Lösung:** Wir lassen den Mittelpunkt des festgelegten Kreises mit dem Koordinatenursprung und Punkt  $C$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen. Daraus ergibt sich für die Koordinaten der Punkte  $C$ ,  $A$  und  $B$   $c = 1$ ,  $a = Re^{i\alpha}$  und  $b = Re^{i\beta}$ , wobei  $R$  der Radius des festen Kreises ( $R > 1$ ) ist. Die Charakteristik des rechten Winkels beim Punkt  $C$  des Dreiecks  $ACB$  führt zu  $\frac{Re^{i\alpha}-1}{Re^{-i\alpha}-1} = -\frac{Re^{i\beta}-1}{Re^{-i\beta}-1}$  und wird weiter umgeformt zu  $R^2(e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\alpha)} + 2) - R(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) - R(e^{-i\alpha} + e^{-i\beta}) + 2(1 - R^2) = 0$ .

Wir bezeichnen die Koordinate des Punktes  $M$  mit  $z$  und die Koordinate des Punktes  $D$  mit  $z'$ . Aus den Formeln 2.23 und 2.28, sowie der obigen Gleichung folgt schließlich:

$$(z - \frac{1}{2})(\bar{z} - \frac{1}{2}) = \frac{2R^2 - 1}{4} \tag{5.6}$$

$$(z_1 + \frac{R^2}{R^2 - 1})(\bar{z}_1 + \frac{R^2}{R^2 - 1}) = \frac{R^4(2R^2 - 1)}{(R^2 - 1)^2} \tag{5.7}$$

Daraus erhalten wir, dass die Menge  $\{M\}$  der Mittelpunkte ein Kreis mit Mittelpunkt  $(\frac{1}{2}; 0)$  und Radius  $\frac{\sqrt{2R^2-1}}{2}$  ist, die Menge  $\{D\}$  ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $(-\frac{R^2}{R^2-1}; 0)$  und Radius  $\frac{R^2\sqrt{2R^2-1}}{R^2-1}$ .

### 5.3.8 Beispiel 8

Zu der Ebene sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Durch den Punkt  $A$  wird ein Kreis gelegt, er schneidet die Gerade durch  $AB$  ein zweites Mal im von  $B$  verschiedenen Punkt  $K$ . Weiters wird ein Kreis durch die Punkte  $B, K$  und durch den Mittelpunkt des ersten Kreises gelegt. Dieser Kreis schneidet den ersten Kreis ein zweites Mal im Punkt  $M$ . **Zu finden** ist die Menge der Punkte  $M$ .

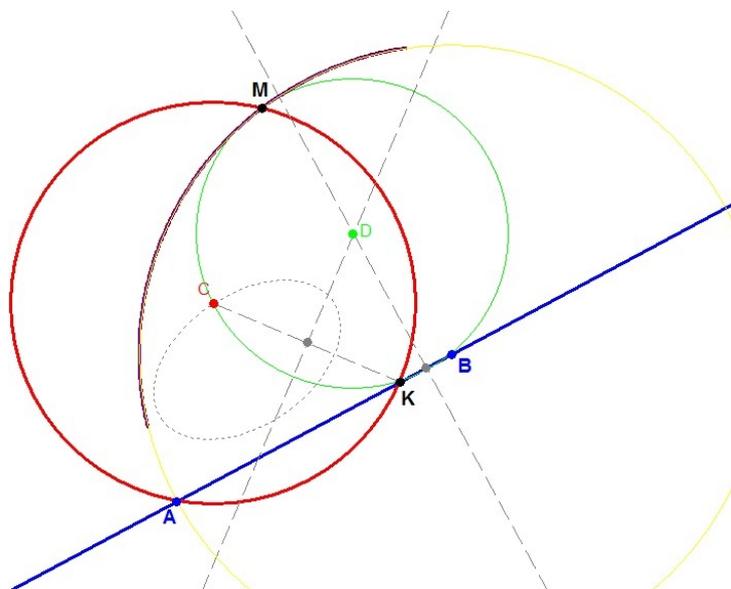


Abbildung 5.11: Beispiel 8

**Lösung:** Wir nehmen den Punkt  $A$  als Koordinatenursprung und den Punkt  $B$  als Einheitspunkt an. Mit  $C$  bezeichnen wir den Mittelpunkt des ersten Kreises:  $(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = c\bar{c}$ , und mit  $D$  den Mittelpunkt des zweiten Kreises:  $(z - d)(\bar{z} - \bar{d}) = (1 - c)(1 - \bar{d})$ . Mit  $m$  und  $k$  werden die Koordinaten der Punkte  $M$  und  $K$  bezeichnet. Aus der Angabe geht hervor, dass  $M$  und  $K$  die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z = 0 \\ z\bar{z} - d\bar{z} - \bar{d}z = 1 - d - \bar{d} \end{cases}$$

sind. Weiters kann man aus der Angabe entnehmen, dass  $k = c + \bar{c}$ ,  $d + \bar{d} = k + 1$  gilt. Nach benützen des Satzes von Vieta erhalten wir für  $m$  dann  $m = \frac{1}{d - \bar{c}}$ . Aus den obigen Gleichungen

erhalten wir daher  $(m - 1)(\bar{m} - 1) = 1$ , die Menge  $\{M\}$  ist daher ein Kreis mit Mittelpunkt  $B$  und Radius 1.

### 5.3.9 Beispiel 9

Gegeben ist ein Kreis  $k$  sowie die Punkte  $A$  und  $B$  auf  $k$ , sie begrenzen einen Kreisbogen, mit Mittelpunkt  $M$ .  $K$  ist ein beliebiger Punkt am Kreis.

Dann gilt  $\overline{AK} \cdot \overline{KB} = \overline{AM}^2 - \overline{KM}^2$ .

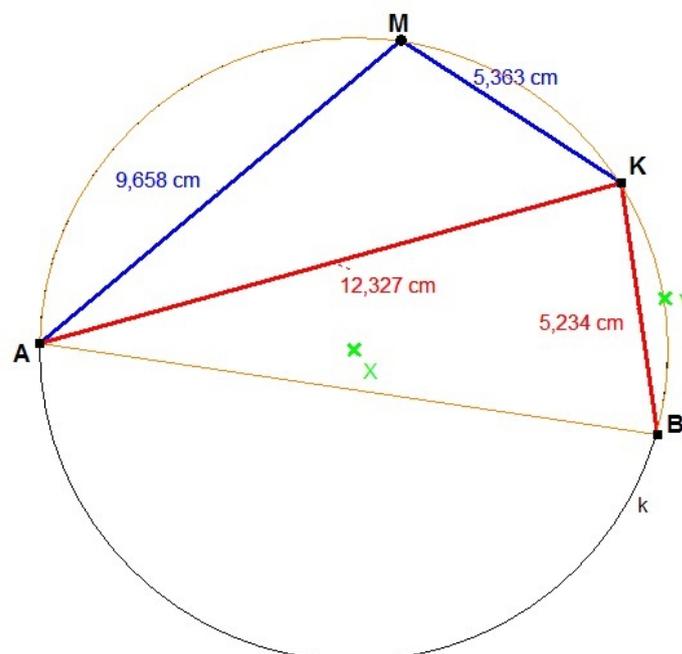


Abbildung 5.12: Beispiel 9

**Lösung:** Wir nehmen den Kreis als Einheitskreis und den Punkt  $B$  als Einheitspunkt an. Daraus ergibt sich für die Koordinaten der Punkte  $B, A, M$  und  $K$ :

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= e^{i\alpha} \\ m &= e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ k &= e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Setzen wir nun in die Aussage der Angabe ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \overline{AK} \cdot \overline{KB} &= |e^{i\varphi} - e^{i\alpha}| \cdot |1 - e^{i\varphi}| = |e^{i\varphi}| \cdot \left| \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\alpha + i\sin\alpha} - 1 \right| \cdot |1 - e^{i\varphi}| = \\ &= |\cos(\varphi - \alpha) + i\sin(\varphi - \alpha) - 1| \cdot |1 - e^{i\varphi}| = 4\sin\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\alpha - 2\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\overline{AM}^2 - \overline{KM}^2 = (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\alpha}) \cdot (e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\alpha}) - (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\varphi}) \cdot (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\varphi}) = 2(\cos(\frac{\alpha - 2\varphi}{2}) - \cos(\frac{\alpha}{2}))$$

Da bei beiden Gleichungen der letzte Term übereinstimmt, haben wir daher die Aussage der Angabe bewiesen.

### 5.3.10 Beispiel 10

Gegeben sind zwei verschiedene Kreise  $(\omega_1, C_1)$  und  $(\omega_2, C_2)$ , die sich in zwei Punkten schneiden, einer davon wird mit  $A$  bezeichnet. Durch den Punkt  $A$  wird eine beliebige Gerade gelegt, welche die beiden Kreise in zwei weiteren Punkten  $M_1$  und  $M_2$  schneidet. Durch die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  werden Tangenten an den jeweiligen Kreis gelegt, die sich im Punkt  $N$  schneiden. Weiters werden parallele Geraden zu den Tangenten  $M_1N$  und  $M_2N$  durch die Mittelpunkte  $C_1$  und  $C_2$  der Kreise gelegt.

**Dann gilt:** Die Gerade  $DN$  geht durch ein und denselben Punkt und die Länge der Strecke  $DN$ , unabhängig von der Wahl der Gerade durch  $A$ , ist konstant.

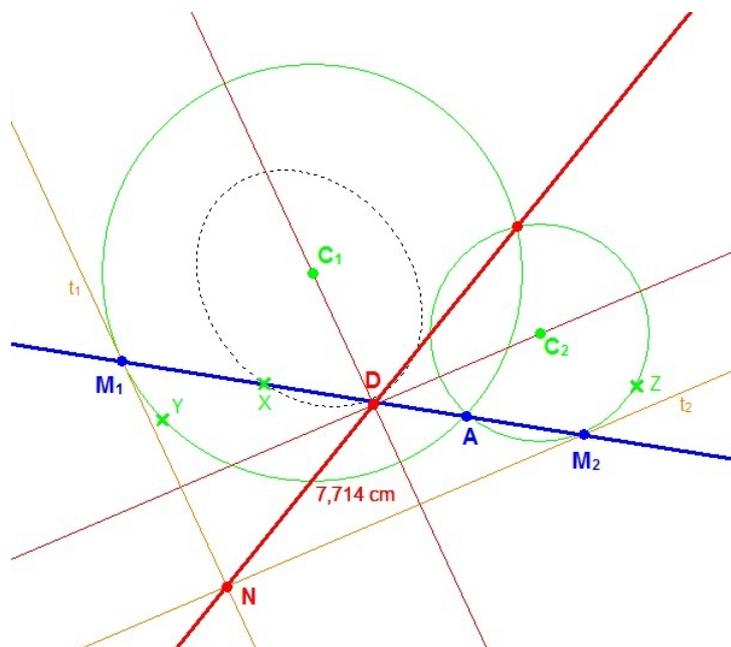


Abbildung 5.13: Beispiel 10

**Lösung:** Der Kreis  $(\omega_1, C_1)$  wird als Einheitskreis und Punkt  $A$  als Einheitspunkt angenommen. Dann erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $A, C_1, M_1$  und  $M_2$

$$a = 1, \quad c_1 = 0$$

$$m_1 = e^{i\varphi}, \quad m_2 = c_2 + (1 - \bar{c}_2)e^{i\varphi}$$

Wird der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise mit  $B$  bezeichnet, so erhalten wir für ihn  $b = \frac{c_2}{\bar{c}_2}$ . Die Gleichungen der Geraden durch  $M_1N$ ,  $M_2N$ ,  $C_1D$  und  $C_2D$  haben dann die Darstellungen

$$\begin{aligned} g_{M_1N} : 2 &= e^{i\varphi}\bar{z} + e^{-i\varphi}z \\ g_{M_2N} : z - m_2 &= \frac{\bar{c}_2 - 1}{1 - c_2} e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{m}_2) \\ g_{C_1D} : z &= -e^{2i\varphi}\bar{z} \\ g_{C_2D} : z - c_2 &= \frac{\bar{c}_2 - 1}{1 - c_2} e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{c}_2) \end{aligned}$$

Aus den obigen Gleichungen erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $D$  und  $N$

$$\begin{aligned} d &= \frac{c_2(1-c_2) + \bar{c}_2(1-\bar{c}_2)e^{2i\varphi}}{\bar{c}_2 - c_2} \\ n &= \frac{c_2(1-c_2) - 2c_2e^{i\varphi}(1-\bar{c}_2) + \bar{c}_2(1-\bar{c}_2)e^{2i\varphi}}{\bar{c}_2 - c_2} \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen für  $D$  und  $N$  folgt dann für die Länge dieser Strecke  $|d - n| = 2 \left| \frac{c_2(1-\bar{c}_2)}{\bar{c}_2 - c_2} \right|$ . Die Gleichung der Geraden durch  $DN$  hat daher die Darstellung  $z - n = -\frac{c_2(1-\bar{c}_2)}{\bar{c}_2(1-c_2)} e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{n})$ , womit der Punkt  $B$  auch auf dieser Geraden liegt.

### 5.3.11 Beispiel 11

Gegeben ist ein Sehnenviereck  $ABCD$ . Eine Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke.

**Dann gilt:** Die Summe der Inkreisradien der beiden Dreiecke ist unabhängig von der Wahl der Diagonale.

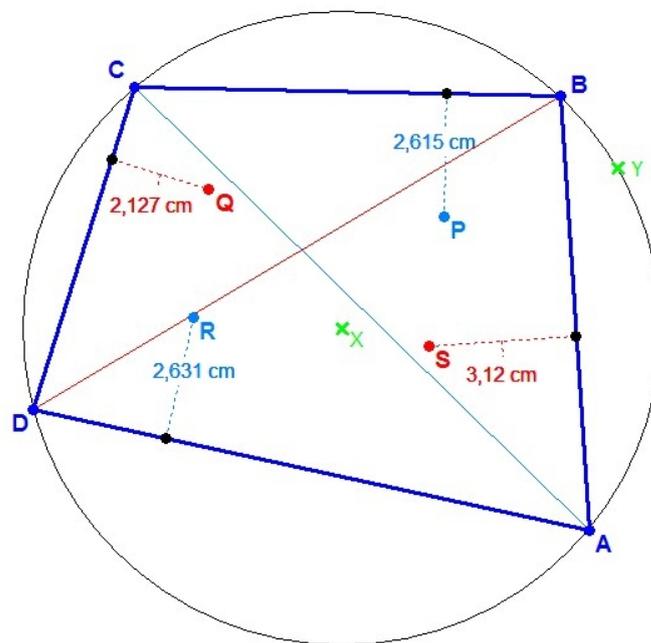


Abbildung 5.14: Beispiel 11

**Lösung:** Wir nehmen den Umkreis des Vierecks  $ABCD$  als Einheitskreis und Punkt  $A$  als Einheitspunkt an. O.B.d.A. können wir annehmen, dass das Viereck  $ABCD$  positiv orientiert ist. Daraus ergibt sich für die Koordinaten der Punkte  $A, B, C$  und  $D$

$$a = 1, \quad b = e^{2i\beta}, \quad c = e^{2i\gamma}, \quad d = e^{2i\delta}$$

Nach Benützung der Formel 2.50 erhalten wir die Koordinaten der Punkte  $P, Q, R$  und  $S$  der Mittelpunkt der Inkreise der Dreiecke  $ABC, BCD, CAD$  und  $BAD$

$$\begin{aligned} p &= e^{i\beta} + e^{i(\gamma+\beta)} - e^{i\gamma} \\ q &= e^{i(\gamma+\beta)} + e^{i(\gamma+\beta)} - e^{i(\beta+\delta)} \\ r &= e^{i\gamma} + e^{i(\delta+\gamma)} - e^{i\delta} \\ s &= e^{i\beta} + e^{\beta+\delta} - e^{i\delta} \end{aligned}$$

Wir projizieren die Punkte  $P$  und  $Q$  normal auf eine Gerade, die durch die Punkte  $R$  und  $S$  orthogonal zu den Geraden  $AC$  und  $BD$  sind. Aus den Formeln 2.62 und 2.60 erhalten wir  $q' - s = (p' - r)e^{i\varphi}$ , wobei  $e^{2i\varphi} = \frac{\kappa_{BD}}{\kappa_{AC}} = e^{2i(\beta+\delta-\gamma)}$  gilt. Aus der Angabe und der obigen Formel folgt weiters  $\varphi = \beta + \delta - \gamma$ . Die Summe der Inkreisradien für eine Diagonale ist  $|q' - s|$  und für die andere Diagonale ist sie  $|p' - r|$ . Aus der Formel ... erhält man dann die

Unabhängigkeit der Wahl der Diagonale.

### 5.3.12 Beispiel 12

Zu der Ebene ist eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $A$  gegeben, der nicht auf der Geraden liegt.  $B$  ist ein beliebiger Punkt auf der gegebenen Geraden. **Zu finden** ist die Menge der dritten Eckpunkte und der Inkreismittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke  $ABC$  und  $ABC_1$ .

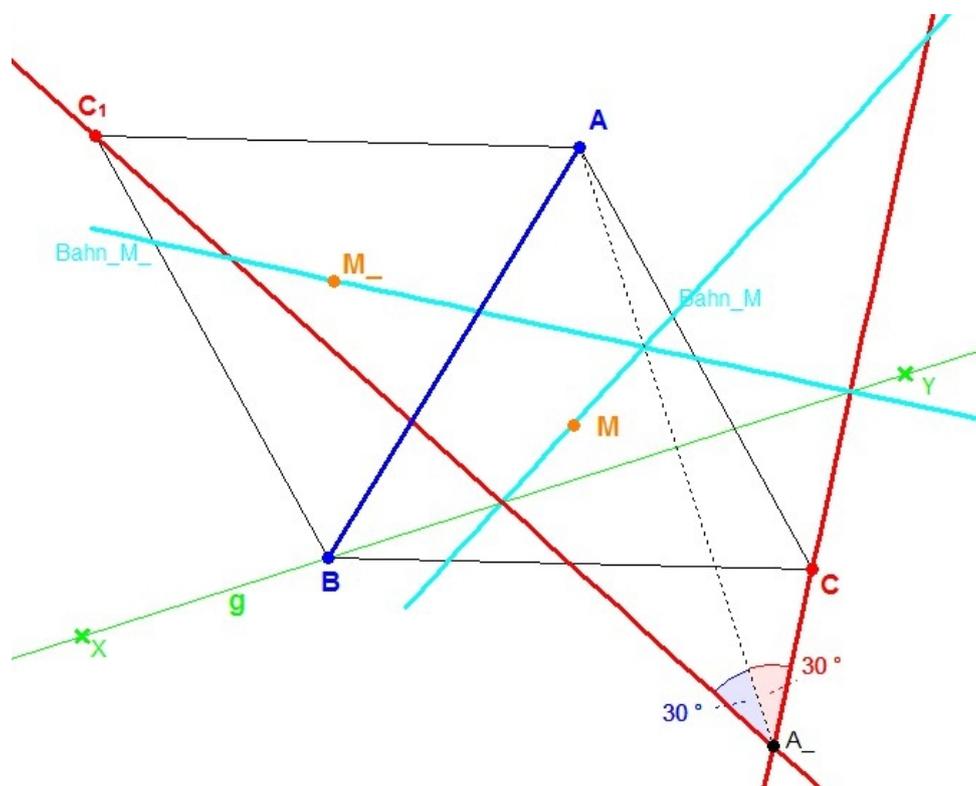


Abbildung 5.15: Beispiel 12

**Lösung:** Wir nehmen die gegebene Gerade als die reelle Achse an und erhalten

$$a \neq \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad \varepsilon^2 = 1$$

$$c - a = (b - a)e^{\varepsilon \frac{\pi i}{3}}$$

Für die Koordinaten der Punkte  $B$  und  $C$  bekommen wir:

$$c = ae^{-\varepsilon \frac{\pi i}{3}} + be^{\varepsilon \frac{\pi i}{3}}$$

$$b = \bar{c}e^{\varepsilon \frac{\pi i}{3}} + \bar{a}e^{-\varepsilon \frac{\pi i}{3}}$$

Aus den beiden Gleichungen der Koordinaten  $c$  und  $b$  folgt dann  $c - \bar{a} = -e^{-\epsilon \frac{\pi i}{3}} (\bar{c} - a)$ . Deshalb ist die Menge der Eckpunkte  $C$  ein Paar von Geraden, die den Schnittpunkt  $A_-$  besitzen. Sie schließen mit der Geraden durch  $AA_-$  die Winkel  $\frac{\pi}{6}$  und  $\frac{-\pi}{6}$  ein.

Der Schwerpunkt  $M$  des Dreiecks  $ABC$  hat die Koordinate  $m = \frac{1}{3}(a + b + c)$ . Da  $b = \bar{b}$  gilt, bekommen wir  $m - \frac{1}{3}a(1 + e^{-\epsilon \frac{\pi i}{3}}) = e^{\epsilon \frac{\pi i}{3}} (\bar{m} - \frac{1}{3}\bar{a}(1 + e^{\epsilon \frac{\pi i}{3}}))$ . Daher beschreibt auch die Menge der Schwerpunkte  $M$  ein Paar von Geraden, wobei der Punkt  $D$  mit der Koordinate  $d = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\bar{a}$  der Schnittpunkt der Geraden ist.

# Kapitel 6

## Kollineare und konzyklische Punkte

Der erste Satz in diesem Kapitel stammt vom berühmten Mathematiker **Carl Friedrich Gauss**. Seine Interessen waren breitgefächert und widmeten sich nicht nur der Mathematik. Bereits seinen Zeitgenossen waren seine herausragenden wissenschaftlichen Leistungen bewusst. So ließ zum Beispiel der König Hannover sogar Gedenkmünzen mit seinem Bild und der Inschrift "dem Fürsten der Mathematiker" prägen.

Der nächste Satz ist aus der Feder des französischen Mathematikers und Physikers **Jean-Victor Poncelet**. Er beschäftigte sich während einer 2-jährigen Kriegsgefangenschaft mit projektiver Geometrie, ohne Bücher benutzen zu können. Zu dieser Zeit entstanden die Grundzüge seines Hauptwerkes *Traite des proprietes projectives des figures*.

Der griechische Mathematiker **Claudius Ptolemäeus** beschäftigt sich in seinem Satz mit Sehenvierecke. Dieser Satz gilt auch für symmetrische Trapeze, da diese auch einen Umkreis aufweisen. Weiters gilt der Satz auch für Rechtecke, auch diese haben einen Umkreis. Daraus ergibt sich, dass der Satz von Ptolemäus den Satz von **Pythagoras** als Spezialfall enthält.

Die Beweisstrukturen beim Satz von **Droz-Farny**, sowie bei den beiden Beispielen 1 und 2 sind ähnlich zu den ersten Sätzen. Meistens wird der konstruierte Kreis (Umkreis oder Inkreis des Dreiecks oder Vierecks) als Einheitskreis angenommen und dann werden die Koordinaten der Punkte entsprechend definiert.

## 6.1 Satz von Gauss

Gegeben ist ein Viereck  $ABCD$ , wobei keine der Seiten parallel zu einer anderen ist. Die gegenüberliegenden Seiten werden zu Geraden verlängert und miteinander geschnitten.

**Dann gilt:** Der Mittelpunkt  $R$  der beiden Schnittpunkte liegt auf einer Geraden durch die Mittelpunkte der Diagonalen  $AC$  und  $BD$ .

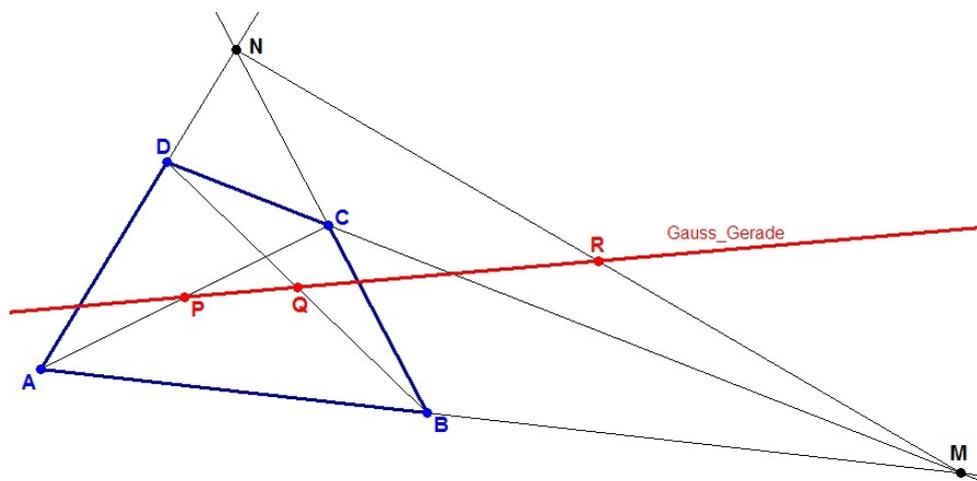


Abbildung 6.1: Satz von Gauss

**Lösung:** Die Koordinaten der Eckpunkte  $A, B, C$  und  $D$  werden mit  $a, b, c, d$  und die Koordinaten der Mittelpunkte der Diagonalen  $P$  und  $Q$  mit  $p$  und  $q$  bezeichnet. Weiters seien  $m, n$  und  $r$  die Koordinaten der Schnittpunkt der Geraden durch  $AD$  und  $BC$  beziehungsweise durch  $AB$  und  $DC$  sowie der Mitte  $R$  der Strecke  $MN$ . Unter Verwendung von Formel 2.22 schreiben wir die Bedingung der Kollinearität für die Punktetripel  $A, D, N, B, C, N, A, B, M$  und  $D, C, M$  auf.

$$\begin{aligned} a(\bar{d} - \bar{n}) + d(\bar{n} - \bar{a}) + n(\bar{a} - \bar{d}) &= 0 \\ b(\bar{c} - \bar{n}) + c(\bar{n} - \bar{b}) + n(\bar{b} - \bar{c}) &= 0 \\ a(\bar{b} - \bar{m}) + b(\bar{m} - \bar{a}) + m(\bar{a} - \bar{b}) &= 0 \\ d(\bar{c} - \bar{m}) + c(\bar{m} - \bar{d}) + m(\bar{d} - \bar{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Für  $p, q$  und  $r$  erhalten wir weiters:

$$p = \frac{1}{2}(a + c), \quad q = \frac{1}{2}(b + d), \quad r = \frac{1}{2}(m + n)$$

Aus den obigen Gleichungen folgt die kollineare Lage der Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$

$$p(\bar{q} - \bar{r}) + q(\bar{r} - \bar{q}) + r(\bar{p} - \bar{q}) = 0, \quad (6.1)$$

und somit ist die Aussage der Angabe des Beispiels bewiesen.

Wir betrachten nun den oberhalb ausgenommenen Sonderfall, dass das Viereck  $ABCD$  ein Trapez ist, sprich die beiden Geraden durch  $AB$  und  $CD$  sind parallel.

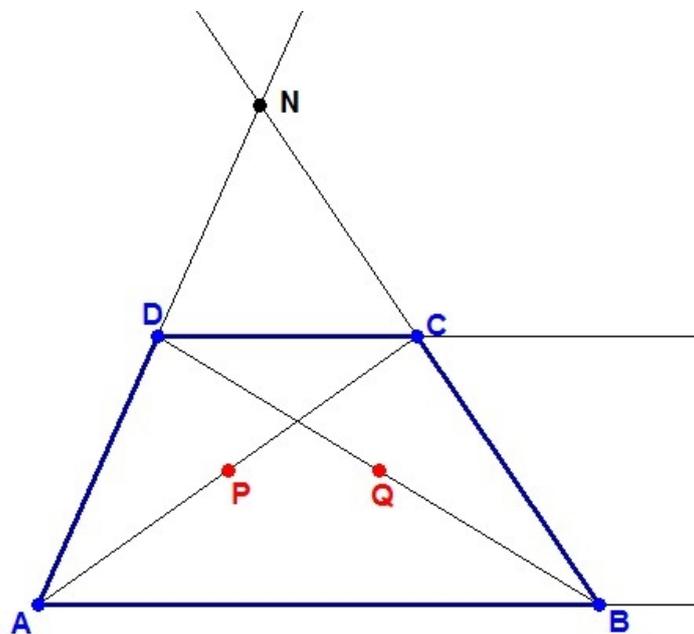


Abbildung 6.2: Satz von Gauss Sonderfall

Hier ist die Gerade durch  $PQ$  auch parallel zu den Geraden durch  $AB$  und  $CD$ . Daher können die Punkte  $M$  und  $R$  als Fernpunkte angenommen werden.

## 6.2 Satz von Poncelet

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  und ein beliebiger Punkt  $P$ , welcher aber nicht auf einer der Geraden durch  $AB$ ,  $BC$  oder  $AC$  liegt. Die Schnittpunkte der Geraden, die durch den Punkt  $P$  unter einem bestimmten Winkel  $\alpha$ , und den Geraden durch die jeweiligen Seiten des Dreiecks bezeichnen wir mit  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in CA$  und  $C_1 \in AB$ .

**Dann gilt:** Der Punkt  $P$  liegt genau dann auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$ , wenn die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  kollinear sind.

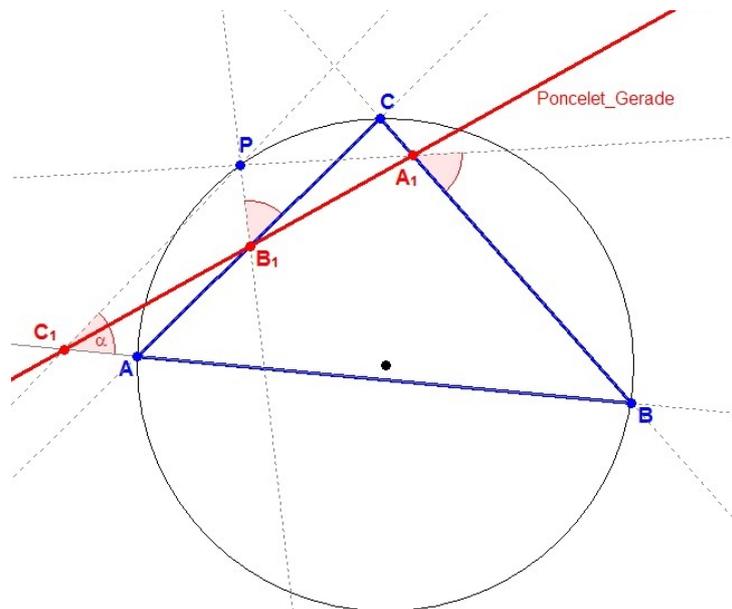


Abbildung 6.3: Satz von Poncelet

**Lösung:** ( $\Rightarrow$ ) Wir nehmen den Umkreis des Dreiecks  $ABC$  als Einheitskreis an. Unter Verwendung der Formeln 2.61 und 2.60 erhalten wir für die Gleichung der Geraden durch den Punkt  $P$  unter dem orientierten Winkel  $\alpha$  zur Geraden durch  $BC$ :

$$z - p = -bce^{2i\alpha}(\bar{z} - \bar{p})$$

Anschließend wird die Koordinate  $a_1$  des Punktes  $A_1$  durch das System

$$\begin{cases} z - p = -bce^{2i\alpha}(\bar{z} - \bar{p}) \\ z - q = -bc(\bar{z} - \bar{q}) \end{cases}$$

definiert und wir erhalten

$$a_1 = \frac{e^{2i\alpha}(\bar{p}bc - b - c) + p}{1 - e^{2i\alpha}}. \quad (6.2)$$

Durch analoge Rechnung erhalten wir die Koordinaten

$$b_1 = \frac{e^{2i\alpha}(\bar{p}ac - a - c) + p}{1 - e^{2i\alpha}} \quad (6.3)$$

$$c_1 = \frac{e^{2i\alpha}(\bar{p}ab - a - b) + p}{1 - e^{2i\alpha}}. \quad (6.4)$$

Durch 6.2 und 6.4 wird die Bedingung

$$\frac{b_1 - a_1}{a_1 - c_1} = \frac{\overline{b_1} - \overline{a_1}}{\overline{a_1} - \overline{c_1}} \tag{6.5}$$

der Kollinearität 2.25 erfüllt und die Punkte  $A_1, B_1$  und  $C_1$  liegen deshalb auf einer Geraden.

( $\Leftrightarrow$ ) Das Verhältnis ist durch 6.5 erfüllt. Wir benützen die Ausdrücke von 6.2 und 6.4 und erhalten weiters:  $\frac{\overline{p}c-1}{\overline{p}b-1} = \frac{p-c}{p-b}$  oder  $p\overline{p}(c-b) = c-b$ . Da  $B \neq C$ , also  $b \neq c$  ist, folgt  $p\overline{p} = 1$ . Daraus folgt, dass der Punkt  $P$  am Umkreis des Dreiecks  $ABC$  liegt.

### 6.3 Satz von Ptolemäus

Für ein konvexes Viereck  $ABCD$  gilt folgende Kennzeichnung: Dem Viereck lässt sich genau dann ein Kreis umschreiben - es ist also genau dann ein Sehnenviereck, wenn das Produkt der Längen der Diagonalen des Vierecks gleich der Summe der Produkte der Längen der gegenüberliegenden Seiten ist:  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

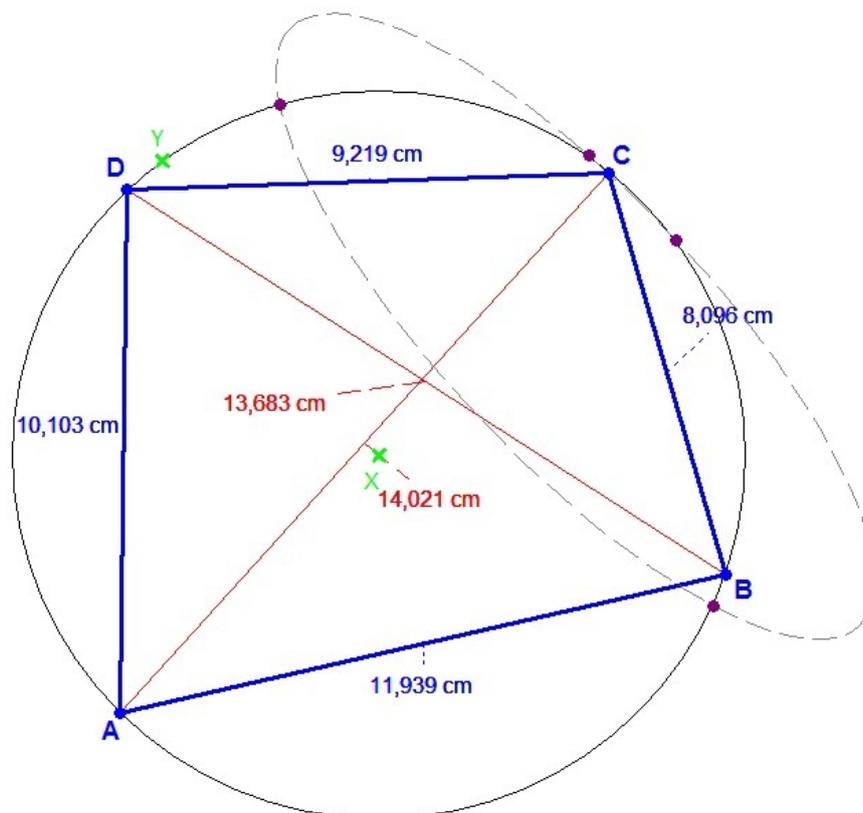


Abbildung 6.4: Satz von Ptolemäus

**Lösung:** ( $\Rightarrow$ ) Nach dem Satz von Brettschneider ?? erhalten wir:

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot DC^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2 \cdot AB \cdot DC \cdot AD \cdot BC \cdot \cos(\beta + \delta). \quad (6.6)$$

Besitzt das Viereck einen Umkreis, so gilt  $\hat{B} + \hat{D} = \pi$ . Aus der obigen Formel erhalten wir nach Einsetzen:

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot DC + AD \cdot BC)^2, \quad (6.7)$$

so dass

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC \quad (6.8)$$

gilt.

( $\Leftarrow$ ) Die Bedingungen 6.8 und 6.7 sind erfüllt. Aus 6.6 und 6.7 können wir schließen, dass  $\cos(\hat{B} + \hat{D}) = -1$  gilt und daher weiter  $\hat{B} + \hat{D} = \pi$ . Daraus folgt, dass das Viereck  $ABCD$  einem Kreis eingeschrieben ist.

## 6.4 Satz von Droz-Farny

Gegeben ist ein Dreieck  $A_1B_1C_1$ . Durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks werden zwei beliebige zueinander normale Geraden gelegt. Man erhält auf den Geraden durch  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$  und  $A_1A_2$  dann Strecken  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  und  $D_1D_2$ .

**Dann gilt:** Die Mittelpunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  dieser Strecken sind kollinear.

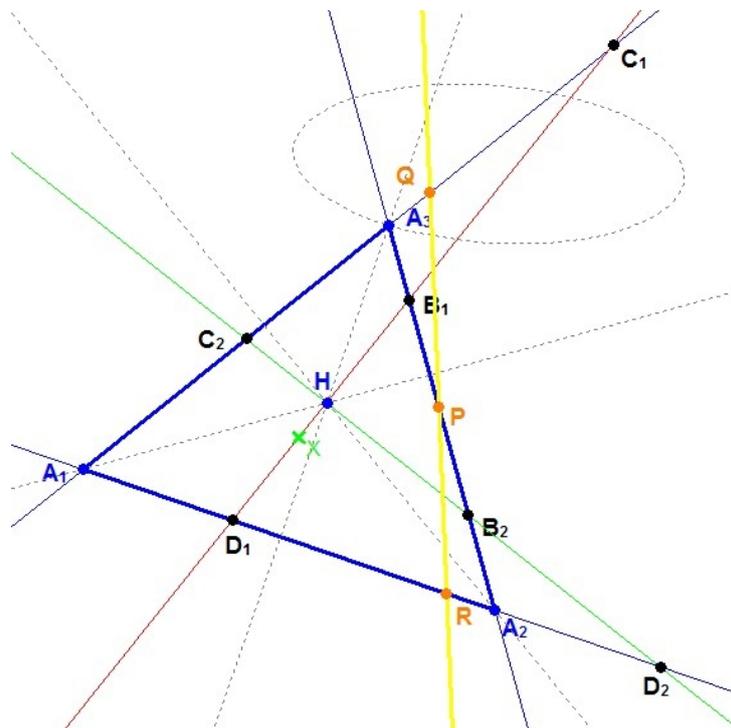


Abbildung 6.5: Satz von Droz-Farny

**Lösung:** Wir nehmen den Umkreis des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  als den Einheitskreis an. Folglich haben dann die beiden zueinander normalen Geraden und die Geraden durch  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$  und  $A_1A_2$  die folgenden Gleichungen:

$$z - h = \kappa(\bar{z} - \bar{h})$$

$$z - h = -\kappa(\bar{z} - \bar{h})$$

$$z + a_2a_3\bar{z} = a_2 + a_3$$

$$z + a_3a_1\bar{z} = a_3 + a_1$$

$$z + a_1a_2\bar{z} = a_1 + a_2$$

Für den Punkte  $H$  gilt:  $h = a_1 + a_2 + a_3$  Wir benutzen die obigen Gleichungen und erhalten so für die Koordinaten der Punkte  $B_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$ , wobei  $i = 1, 2$ :

$$b_1 = \frac{uh - \kappa a_2 a_3}{u + a_1 \kappa}, \quad c_1 = \frac{uh - \kappa a_3 a_1}{u + a_2 \kappa}, \quad d_1 = \frac{uh - \kappa a_1 a_2}{u + a_3 \kappa}$$

$$b_2 = \frac{uh + \kappa a_2 a_3}{u - a_1 \kappa}, \quad c_2 = \frac{uh + \kappa a_3 a_1}{u - a_2 \kappa}, \quad d_2 = \frac{uh + \kappa a_1 a_2}{u - a_3 \kappa}$$

wobei  $u = a_1 a_2 a_3 - 3$  gesetzt ist. Unter Benützung der obigen Formel erhalten wir für die Koordinaten der Mittelpunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  der Strecken  $B_1 B_2$ ,  $C_1 C_2$  und  $D_1 D_2$  dann

$$p = \frac{u(uh + \kappa)}{u^2 - (a_1 \kappa)^2}$$

$$q = \frac{u(uh + \kappa)}{u^2 - (a_2 \kappa)^2}$$

$$r = \frac{u(uh + \kappa)}{u^2 - (a_3 \kappa)^2}$$

Da  $\frac{q-p}{r-q} = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \frac{p}{r} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)(u^2 - a_3^2 \kappa^2)}{(a_2^2 - a_3^2)(u^2 - a_1^2 \kappa^2)} = \frac{qp}{rq}$  gilt, sind die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  kollinear.

## 6.5 Beispiele

### 6.5.1 Beispiel 1

Die Seite  $BC$  eines Dreiecks  $ABC$  berührt seinen Inkreis im Punkt  $D$ .

**Dann gilt:** Der Mittelpunkt des Inkreises liegt auf einer Geraden durch die Mitten  $M$  und  $N$  der Strecke  $BC$  und  $AD$ .

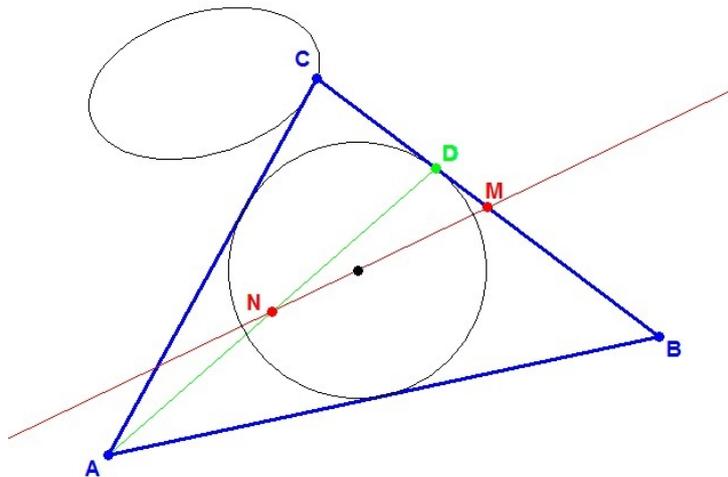


Abbildung 6.6: Beispiel 1

**Lösung:** Wir nehmen den Inkreis als Einheitskreis und den Punkt  $D$  als Einheitspunkt an. Die Punkte  $E$  und  $F$  sind die Berührungspunkte mit den Seiten  $AB$  und  $AC$ . Daraus folgt laut Bedingung 2.28:

$$b = \frac{2e}{e+1}, \quad c = \frac{2f}{f+1}, \quad a = \frac{2ef}{e+f} \quad (6.9)$$

$$n = \frac{1}{2}(a+1), \quad m = \frac{1}{2}(c+b) \quad (6.10)$$

Weiters erhalten wir aus den obigen Gleichungen  $m\bar{n} = \bar{m}n$ . Das heißt, die Bedingung ?? der kollineare Lage ist für die Punkte  $M$ ,  $N$  und  $O$  erfüllt.

### 6.5.2 Beispiel 2

Es sind zwei kongruente und entgegengesetzt orientierte Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  gegeben.

**Dann gilt:** Die Mittelpunkte  $M$ ,  $N$  und  $P$  der Strecken  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  sind kollinear.

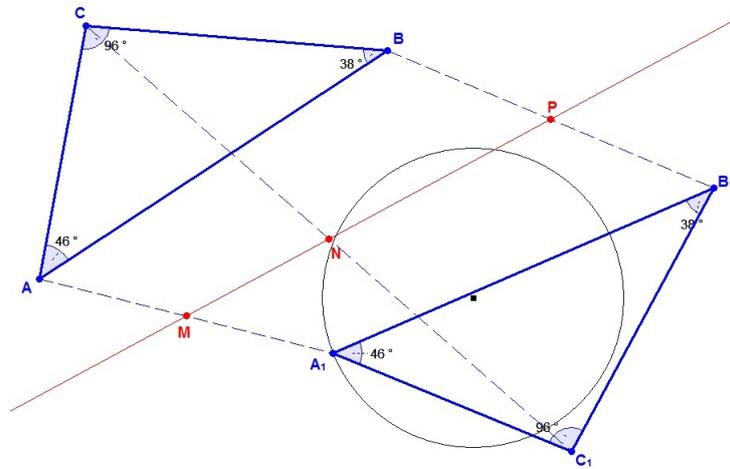


Abbildung 6.7: Beispiel 2

**Lösung:** Für die Koordinaten der Punkte  $B$ ,  $C_1$ ,  $A_1$  und  $B_1$  gilt:

$$\begin{aligned} b &= \mu(c - a)e^{i\varphi} + a \\ c_1 - a_1 &= (c - a)e^{i\psi} \\ b_1 &= \mu(c_1 - a_1)e^{-i\varphi} + a_1 \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir für die Koordinaten der Punkte  $M$ ,  $N$  und  $P$ :

$$m = \frac{1}{2}(a + a_1), \quad n = \frac{1}{2}(b + b_1), \quad p = \frac{1}{2}(c + c_1)$$

Wegen  $\frac{m-n}{p-m} = -\frac{\mu(e^{i\varphi} + e^{i(\psi-\varphi)})}{1+e^{i\psi}} = \frac{\bar{m}-\bar{n}}{\bar{p}-\bar{m}}$  und Formel 2.25 sind die Punkte  $M$ ,  $N$  und  $P$  kollinear.

# Kapitel 7

## Orthogonale und parallele Geraden

Dieser Teil der Diplomarbeit befasst sich mit Beispielen, die nach der Konstruktion der Aufgabenstellungen orthogonale oder parallele Geraden aufweisen.

Der Satz von **Aubel** ist in diesem Kapitel der Einzige beziehungsweise das einzige Beispiel über Aufsatzfiguren. Einem Viereck Quadrate an den Seiten aufgesetzt. Die Mittelpunkte der Quadrate bilden Strecken, die gleich lang und orthogonal sind. Der Beweis erfolgt über die Festlegung der Koordinaten der Mittelpunkte der Quadrate. Danach werden die Längen ausgerechnet und gezeigt, dass die Strecken zueinander orthogonal sind.

In Beispiel 1 erhält ist sind ein Kreis und vier Punkte darauf gegeben. Nach Ausführung der Angabe erhält man parallele Geraden. Zu Beginn des Beweises wird der Ausgangskreis als Einheitskreis angenommen. Daraus ergeben sich die Koordinaten der übrigen Punkte. Nach Anwendung von Formeln aus Kapitel ... ist gezeigt, dass die Geraden parallel sind.

Die Beweise der Beispiele 2, 3, 4 und 5 verlaufen ähnlich. Es werden Punkte, Kreise oder Geraden an das Koordinatensystem gebunden und daraus wird der Rest definiert.

## 7.1 Satz von Aubel

Über den Seiten eines Vierecks  $ABCD$  werden Quadrate nach außen aufgesetzt. Verbindet man jeweils die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Quadrate, so entstehen zwei Strecken.

**Dann gilt:** Diese Strecken sind gleich lang und orthogonal.

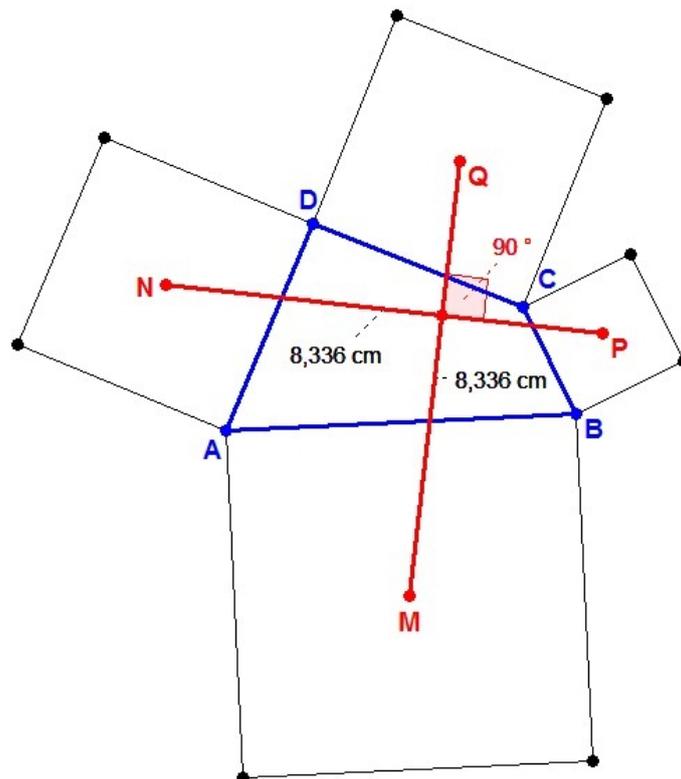


Abbildung 7.1: Satz von Aubel

**Lösung:** Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $AD$  die nach außen aufgesetzt sind, mit  $M$ ,  $N$ ,  $P$  und  $Q$ . Dann erhalten wir

$$a - m = (b - m)e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$b - n = (c - n)e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$c - p = (d - p)e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$d - q = (a - q)e^{\frac{\pi i}{2}}$$

Daraus folgt weiters:

$$m = \frac{ai + b}{i + 1}, \quad n = \frac{bi + c}{i + 1}$$

$$p = \frac{ci + d}{i + 1}, \quad q = \frac{di + a}{i + 1}$$

Aufgrund dieser Gleichungen erhalten wir  $(p-m)i = q-n$ , woraus dann weiter  $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{NQ}|$  und  $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{NQ}$  folgt.

## 7.2 Beispiele

### 7.2.1 Beispiel 1

Gegeben ist ein Kreis. Auf ihm sind Punkte  $A, B, M$  und  $N$  gegeben. Aus dem Punkt  $M$  sind Sehnen  $MA_1$  und  $MB_1$  zu legen.

**Dann gilt:** Die Geraden durch  $AA_1$  und  $BB_1$  sind zueinander parallel.

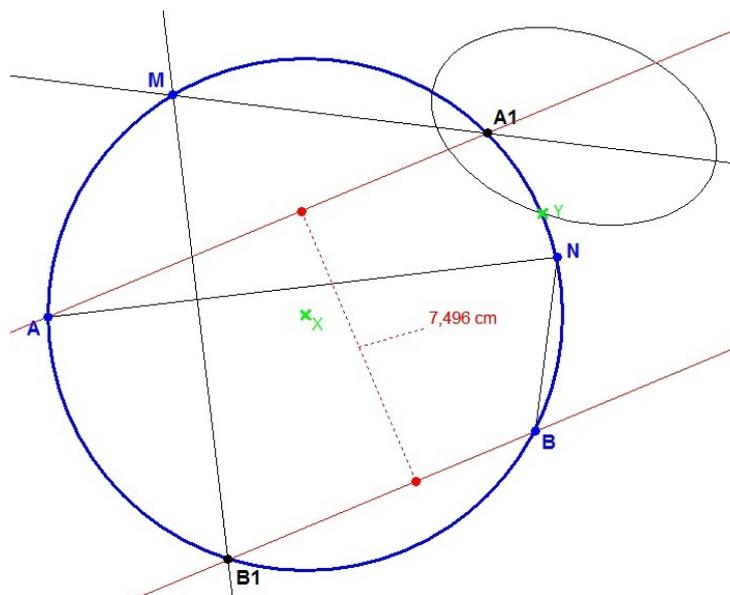


Abbildung 7.2: Beispiel 1

**Lösung:** Wir nehmen den Kreis als Einheitskreis an. Dann werden aufgrund von 2.30 und 2.57 die Koordinaten  $a_1$  und  $m$  der Punkte  $A_1$  und  $M$  durch das System

$$\begin{cases} z\bar{z} = 1 \\ z - m = bn\bar{z} - \bar{m} \end{cases}$$

definiert. Lassen wir in 7.2.1  $\bar{z}$  weg, so erhalten wir:  $z^2 + z(bn\bar{m} - m) - bn = 0$  Weiters folgt  $a_1 = -\frac{bn}{m}$ , und analog erhalten wir  $aa_1 = bb_1$ . Daraus folgt, dass die Geraden durch  $AA_1$  und  $BB_1$  zueinander parallel sind.

### 7.2.2 Beispiel 2

Gegeben ist ein konvexes Viereck  $ABCD$ . Zu den Eckpunkten  $B$  und  $E$  liegen rechte Winkel vor, weiters soll ohne Einschränkung  $\angle(BAC) = \angle(EAD)$  gelten.

**Dann gilt:** Schneiden sich Diagonalen  $BD$  und  $CE$  im Punkte  $M$ , so sind die Geraden durch  $AM$  und  $BE$  orthogonal.

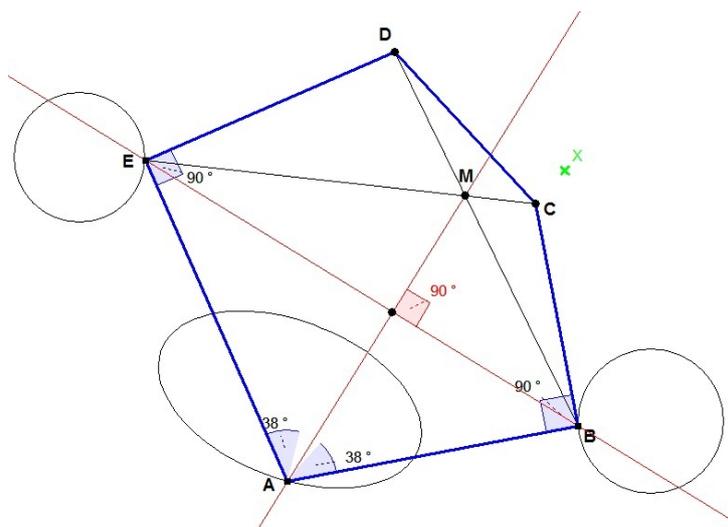


Abbildung 7.3: Beispiel 2

**Lösung:** Wir lassen den Punkte  $E$  mit dem Koordinatenursprung und den Punkt  $B$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen. Dann erhalten wir  $d = -kai$ ,  $k = \bar{k}$  und  $c = 1 + ki(a - 1)$ . Unter Verwendung von 2.29 bekommen wir das System

$$\begin{cases} m - 1 = \frac{-kai-1}{k\bar{a}-1}(\bar{m} - 1) \\ m = \frac{c}{\bar{c}}\bar{m} \end{cases}$$

und finden so die Koordinate  $m$  des Punktes  $M$ .

$$m = \frac{(a + \bar{a})(ka - i - k)}{-2i + k(a - \bar{a})}$$

Die Gleichung der Geraden  $BE$  hat die Form  $z = \bar{z}$ . Wegen ... erhalten wir für die Gerade  $AM$  die Gleichung der Form  $z - a = -(\bar{z} - \bar{a})$ . Daraus können wir letztendlich folgern, dass  $AM \perp BE$  gilt.

### 7.2.3 Beispiel 3

Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$ , der Punkt  $M$  ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks  $ABC$ . Der Punkt  $D$  sei die Mitte der Seite  $AB$  und  $F$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ACD$ .

**Dann gilt:**  $MF$  ist genau dann orthogonal zu  $CD$ , wenn  $\overline{AB} = \overline{AC}$  gilt, das Dreieck  $ABC$  also gleichschenkelig ist.

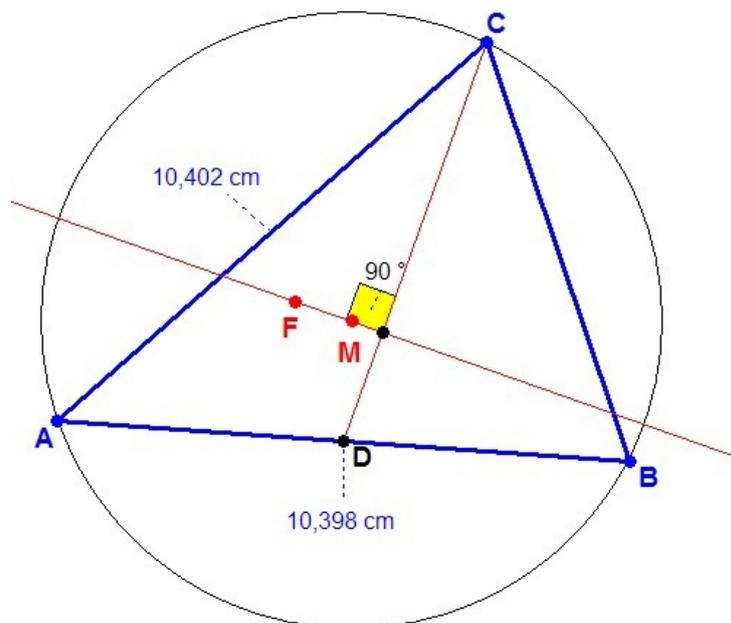


Abbildung 7.4: Beispiel 3

**Lösung:** ( $\Rightarrow$ ) Wir nehmen den Umkreis als Einheitskreis an und lassen Eckpunkt  $A$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen. Falls  $\overline{AB} = \overline{AC}$  gilt, so folgt:

$$\begin{aligned}
 b &= e^{i\alpha} \\
 c &= e^{-i\alpha} \\
 d &= \frac{1}{2}(1 + e^{i\alpha}) \\
 f &= \frac{1}{6}(2e^{-i\alpha} + 3 + e^{i\alpha})
 \end{aligned}$$

Aufgrund der obigen Gleichungen für die Koordinaten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $F$  wird die Bedingung der Perpendikularität 2.26 erfüllt:

$(c - d)\bar{f} + (\bar{c} - \bar{d})f = 0$  Die Geraden  $MF$  und  $CD$  sind orthogonal.

( $\Leftarrow$ ) Wir setzen voraus, dass  $MF$  und  $CD$  orthogonal sind, also ist das Kriterium der Perpendikularität  $(c - d)\bar{f} + (\bar{c} - \bar{d})f = 0$  erfüllt. Daraus folgt die Behauptung, dass  $\overline{AB} = \overline{AC}$  gilt. Wir führen nun den Beweis indirekt durch. Wir nehmen also an, dass  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$  und somit  $MF$  und  $CD$  nicht orthogonal zueinander sind.

Wir wählen ein nicht- gleichschenkeliges Dreieck  $ABC$ .

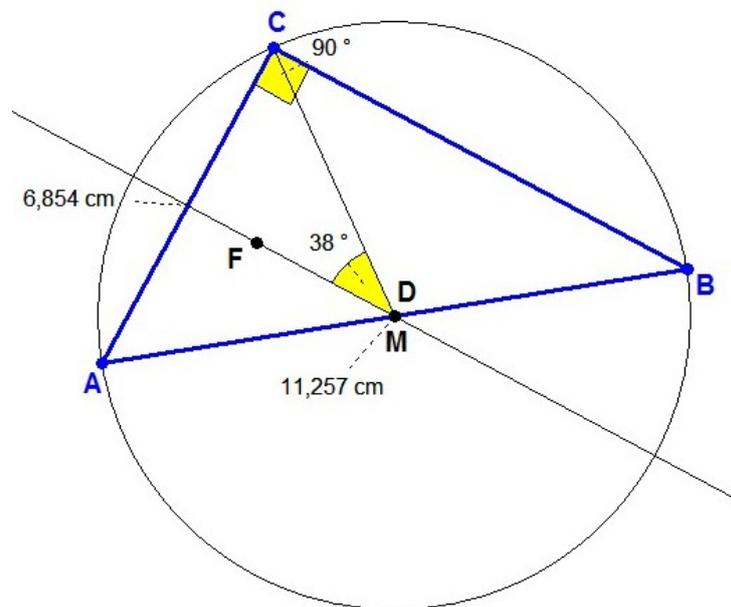


Abbildung 7.5: Beispiel 3, Beweis

In Figur 7.2.3 sehen wir nun, dass  $M = D$  gilt. Daraus ergibt sich, dass  $FM$  nicht orthogonal zu  $CD$  ist, es existiert also ein Beispiel dafür und ist damit allgemein nicht gültig. Damit hätten wir bewiesen, dass  $MF \perp CD$  genau dann gilt, wenn  $\overline{AB} = \overline{AC}$  gilt.

#### 7.2.4 Beispiel 4

Auf einer Ebene sind zwei gleichseitige und gleichorientierte Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  gegeben. Die Mitten der Seiten  $BC$  und  $B_1C_1$  fallen zusammen.

**Dann gilt:** Der Winkel zwischen den Geraden  $AA_1$  und  $BB_1$  ist ein Rechter und für das Verhältnis gilt  $AA_1 : BB_1 = 1 : \sqrt{3}$ .

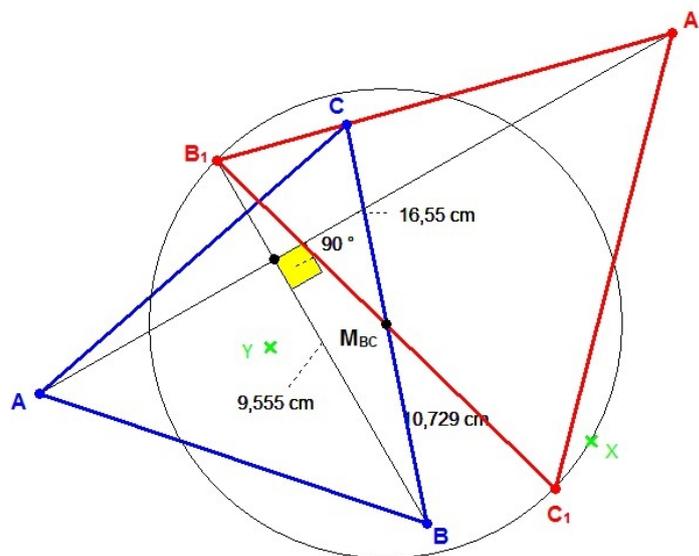


Abbildung 7.6: Beispiel 4

**Lösung:** Wir lassen den Mittelpunkt  $M_{BC}$  der Strecke  $BC$  und  $B_1C_1$  mit dem Koordinatenursprung und den Punkt  $B$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen. Daraus erhalten wir für die Koordinaten  $a$  und  $a_1$  der Punkte  $A$  und  $A_1$ :

$$a = i\sqrt{3}$$

$$a_1 = ib_1\sqrt{3}$$

Die Gleichungen der Geraden  $BB_1$  und  $AA_1$  haben laut Formel 2.29 dann die Darstellungen:

$$z - 1 = \frac{b_1 - 1}{b_1 - 1}(\bar{z} - 1)$$

$$z - i\sqrt{3} = -\frac{b_1 - 1}{b_1 - 1}(\bar{z} + i\sqrt{3})$$

Laut 2.60 wird der Winkel  $\theta$  zwischen den Geraden durch die Formel  $e^{2i\theta} = -1$  definiert, das heißt weiter, dass  $\theta = \frac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$ .

Für das Verhältnis  $AA_1 : BB_1$  erhalten wir daher:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{|a_1 - a|}{|b_1 - b|} = \frac{|ib_1\sqrt{3} - i\sqrt{3}|}{|b_1 - 1|} = \sqrt{3}$$

### 7.2.5 Beispiel 5

Auf einer Ebene sind drei Quadrate  $ABCD$ ,  $AB_1C_1D_1$  und  $A_2B_2CD_2$  mit gleichen Orientierungen gegeben.

**Dann gilt:**  $D_1D_2$  ist zu  $BM$  normal und es gilt  $\overline{D_1D_2} = 2\overline{MB}$ . Der Punkt  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $B_1B_2$ .

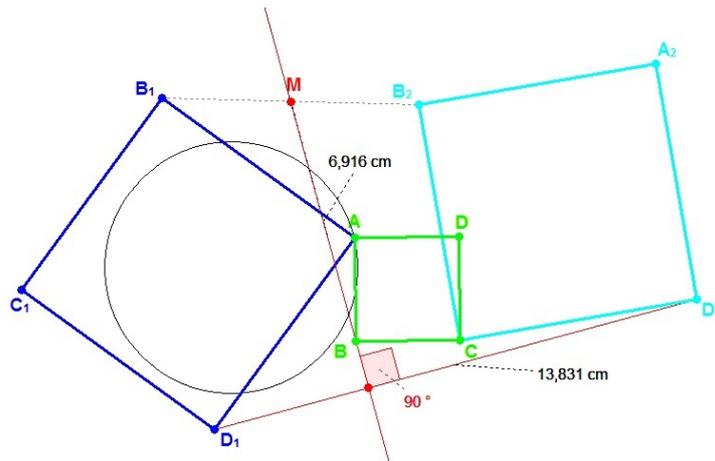


Abbildung 7.7: Beispiel 5

**Lösung:** Wir lassen den Mittelpunkt des Quadrats  $ABCD$  mit dem Koordinatenursprung und den Eckpunkt  $B$  mit dem Einheitspunkt zusammenfallen. Daraus ergeben sich folgende Koordinaten:

$$c = i, a = -i$$

$$d_1 = (b_1 - a)i + a, d_2 = (c - b_2)i + c$$

Weiters erhalten wir  $\frac{1}{2}(d_1 - 1 - d_2)i = b - m$ . Daraus können wir schließen, dass  $|\overrightarrow{D_1D_2}| = 2|\overrightarrow{MB}|$  und  $\overrightarrow{D_1D_2} \perp \overrightarrow{MB}$  gilt.

## **Teil II**

# **Dreiecke und ihre Formgrößen**

# Kapitel 8

## Doppelverhältnisse in der Gauß'schen Ebene

Wir identifizieren die Euklidische Ebene mit den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  und geben einen Fernpunkt  $\infty$  dazu und sprechen dann von der Gauß'schen Ebene  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Es gilt die folgende Festlegung:  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$  sowie  $a + \infty = \infty + a = \infty \forall a \in \mathbb{C}$  und  $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \forall a \neq 0$ . Das Doppelverhältnis von vier Punkten  $A, B, C$  und  $D$  in  $\mathbb{C}_\infty$ , von denen höchstens zwei übereinstimmen, wird definiert als die Zahl

$$[a, b; c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \quad (8.1)$$

Enthalten Terme  $\infty$ , so "heben" sich diese aufgrund der genannten Rechenregel weg. Das Doppelverhältnis von vier paarweise verschiedenen Punkten kann Werte außer 0, 1 und  $\infty$  annehmen, denn wir haben  $z = [z, 1; 0, \infty]$  für beliebige  $z \neq 0, 1, \infty$ . Haben  $A, B, C$  und  $D$  die gleichen komplexen Koordinaten, so erhalten wir nach Anwendung der Formel 9.1 die Werte 0, 1 oder  $\infty$ . Zum Beispiel bekommen wir den Wert 1, wenn  $a$  mit  $b$  zusammenfällt, sprich  $[a, a; c, d] = \frac{(a-c)(a-d)}{(a-d)(a-c)} = 1$ . Analog erhalten wir die anderen Werte.

Bei den Doppelverhältnissen gelten zwei Symmetrie- Gesetze:

Wenn  $[a, b; c, d] =: \lambda$  ist, dann ist  $[b, a; c, d] = [a, b; d, c] = \lambda^{-1}$  und  $[a, c; b, d] = 1 - \lambda$ .

Diese Gesetze bestimmen die Doppelverhältnisse von jeder der 24 Permutationen von  $A, B, C$  und  $D$ .

Eine nützliche Eigenschaft ist das zyklische Vertauschen der letzten drei Punkte, für  $z \in \mathbb{C}_\infty$  definieren wir:

$$z' := \frac{1}{1-z} \quad (8.2)$$

Dann gilt für alle  $p, a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$  mit höchstens zwei gleiche Punkte:

$$[p, a; b, c]' = [p, b; c, a] \quad (8.3)$$

$$[p, a; b, c]'' = [p, b; c, a]' = [p, c; a, b] \quad (8.4)$$

Die grundlegenden Eigenschaften dieser zyklischen Vertauschung sind:

$$z'' = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}, \quad z''' = z, \quad z \cdot z' \cdot z'' = 1 \quad (8.5)$$

Weiters ist zu beachten, dass  $0' = 1$ ,  $1' = \infty$  und  $\infty' = 0$  ist und die Rechenregeln  $(z^{-1})' = (z'')^{-1}$  und  $(z^{-1})'' = (z')^{-1}$  gelten.

Die Zahl  $\omega := e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  werden wir öfters verwenden.  $\omega$  und ihre konjugierte Zahl  $\bar{\omega}$  treten als Lösungen der nachstehenden Bedingungen auf:

$$z = z' = z'', \quad |z| = |z'| = |z''| = 1, \quad z^2 - z + 1 = 0 \quad (8.6)$$

Außerdem brauchen wir folgende Rechenregeln:

$$\omega \cdot \bar{\omega} = 1, \quad \omega + \bar{\omega} = 1, \quad \omega^3 = -1 \quad (8.7)$$

Doppelverhältnisse erfüllen viele nützliche Identitäten, so gilt zum Beispiel für  $a, b, c \neq p, q$  dann

$$[p, q; a, b] = [p, q; b, c] = [p, q; c, a] = 1 \quad (8.8)$$

Um zu beweisen, dass Doppelverhältnisse gleich sind verwenden wir folgenden Satz:

**Satz der gleichen Doppelverhältnisse (SGD):**  $r_1, s_1, t_1, u_1$ , und  $r_2, s_2, t_2, u_2$  sind beliebige Quadrupel von Punkten in  $\mathbb{C}_\infty$

- Wir setzen voraus, dass beide Quotienten  $\frac{[r_1, s_1; t_1, u_1]'}{[r_2, s_2; t_2, u_2]}'$  und  $\frac{[r_1, s_1; t_1, u_1]''}{[r_2, s_2; t_2, u_2]''}$  reell sind, jedoch das Doppelverhältnis nicht. Daraus folgt, dass  $[r_1, s_1; t_1, u_1] = [r_2, s_2; t_2, u_2]$ .
- Beide Produkte  $[r_1, s_1; t_1, u_1]' \cdot [r_2, s_2; t_2, u_2]'$  und  $[r_1, s_1; t_1, u_1]'' \cdot [r_2, s_2; t_2, u_2]''$  sind reell, jedoch das Doppelverhältnis nicht. Dann gilt  $[r_1, s_1; t_1, u_1] = \overline{[r_2, s_2; t_2, u_2]}$ .

Nach Identifizierung der Euklidischen Ebene mit den komplexen Zahlen ergeben sich viele Vorteile. Verwendet man Doppelverhältnisse, so kann man grundlegende geometrische Messungen und Beziehungen prägnant ausdrücken und analytisch studieren.

Nun einige elementare Beziehungen:

- Für verschiedene Punkte  $P, Q$  und  $R$  in  $\mathbb{C}$  gilt  $\angle pqr \equiv \arg[\infty, q; p, r]$ .
- Die Punkte  $P, Q$  und  $R$  sind genau dann kollinear, wenn  $[\infty, p; q, r]$  reell ist. Der Punkt  $P$  ist der Mittelpunkt der Seite  $BC$  genau dann, wenn  $[\infty, p; q, r] = -1$  gilt.
- Die Punkte  $P, Q, R$  und  $S$  in  $\mathbb{C}$  sind genau dann konzyklisch oder kollinear, wenn  $[p, q; r, s]$  reell ist.

Die elementaren geometrischen Abbildungen können auch durch die komplexen Zahlen dargestellt werden:

- zentrische Streckung (mit Faktor  $\rho \succ 0$ ):  $z \rightarrow \rho z$
- Translation (um Vektor  $\vec{oa}$ ):  $z \rightarrow z + a$
- Drehung (um Koordinatenursprung um den Winkel  $\theta$ ):  $z \rightarrow e^{i\theta} z$
- Spiegelung (an der reellen Achse):  $z \rightarrow \bar{z}$

Die Zusammensetzungen der oben genannten Transformationen sind Ähnlichkeitsabbildungen oder konjugierte Ähnlichkeiten. Zum Beispiel haben wir  $z \rightarrow cz + a$  oder  $z \rightarrow c\bar{z} + a$ , wobei  $a, c \in \mathbb{C}$  mit  $c \neq 0$ . Ähnlichkeiten können zur Gauß'schen Ebene erweitert werden, in dem wir  $\infty$  fest vorgeben. Zum Beispiel hat die Inversion am Kreis mit Mittelpunkt  $c$  und Radius  $\rho$  die Darstellung  $z \rightarrow w$  für  $(w - c)\overline{(z - c)} = \rho^2$  und vertauscht  $c$  mit  $\infty$ . Durch die Zusammensetzung der Inversionen und einer "Nicht"-Ähnlichkeit erhalten wir linear gebrochene Transformationen oder konjugiert linear gebrochene Abbildungen, wie zum Beispiel

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{oder} \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{wobei} \quad ab - bc \neq 0$$

Diese Abbildungen sind genau dann Ähnlichkeiten oder "Nicht"-Ähnlichkeiten, wenn sie  $\infty$  fixieren, zum Beispiel wenn  $c = 0$  ist.

Linear gebrochene Abbildungen beinhalten Doppelverhältnisse und konjugierte linear gebrochene Abbildungen konjugierter Doppelverhältnisse. Diese Eigenschaft gibt uns einige nützliche Rechenregeln, die wir ohne Beweis verwenden: Für alle  $A, B, C$  und  $D$  in  $\mathbb{C}$  mit höchstens zwei gleichen gilt:

- $[a, b; c, d] = [a + n, b + n; c + n, d + n] \quad \forall n \in \mathbb{C}$
- $[a, b; c, d] = [ma, mb; mc, md] \quad \forall m \neq 0 \in \mathbb{C}$
- $[a, b; c, d] = [a^{-1}, b^{-1}; c^{-1}, d^{-1}]$
- $\overline{[a, b; c, d]} = [\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d}]$

Außerdem ist zu bemerken: Da die Abbildung  $z \rightarrow z'$  linear gebrochen ist, haben wir die Rechenregel

$$[a, b; c, d] = [a', b'; c', d']. \quad (8.9)$$

Nach Anwendung des Doppelverhältnisses 9.1 erhalten wir folgende Eigenschaft:

Da die Inversion den Kreis der Inversion fixiert, wird das Zentrum mit  $\infty$  vertauscht, und das Doppelverhältnis konjugiert, der Mittelpunkt  $M$  des Kreises durch die Nicht-Kollinearen Punkte  $A, B$  und  $S$  ist die Lösung von

$$[m, a; b, c] = \overline{[\infty, a; b, c]}$$

**Definition:** Die **Gestalt** eines Dreiecks  $ABC$  ist definiert durch die komplexe Zahl

$$\Delta_{abc} := [\infty, a; b, c] = \frac{a - c}{a - b} \quad (8.10)$$

Das Argument und der Betrag von  $\Delta_{abc}$  gibt den Winkel zwischen den Seiten  $AB$  und  $AC$  und dem Verhältnis ihrer Längen an, so sind zwei Dreiecke gleichsinnig ähnlich, wenn sie die gleiche Gestalt haben und sie sind gegensinnig ähnlich, wenn sie konjugierte Gestalten besitzen. Durch zyklisches Vertauschen entstehen die anderen Gestalten  $\Delta_{bca}$  und  $\Delta_{cab}$ ; wenn  $\Delta_{abc} = \Delta$  dann gelten  $\Delta_{bca} = \Delta'$  und  $\Delta_{cab} = \Delta''$ .

Das nachstehende Lemma wird in den kommenden Kapiteln benötigt:

**Lemma 1.1:**  $V, W, P$  und  $Q$  sowie  $V, W, D$  und  $E$  jeweils Quadrupel von kollinearen oder konzyklischen Punkten. Wir nehmen an, dass alle Punkte paarweise verschieden sind, außer

- Die Trägerobjekte berühren einander, dann ist  $V = W$

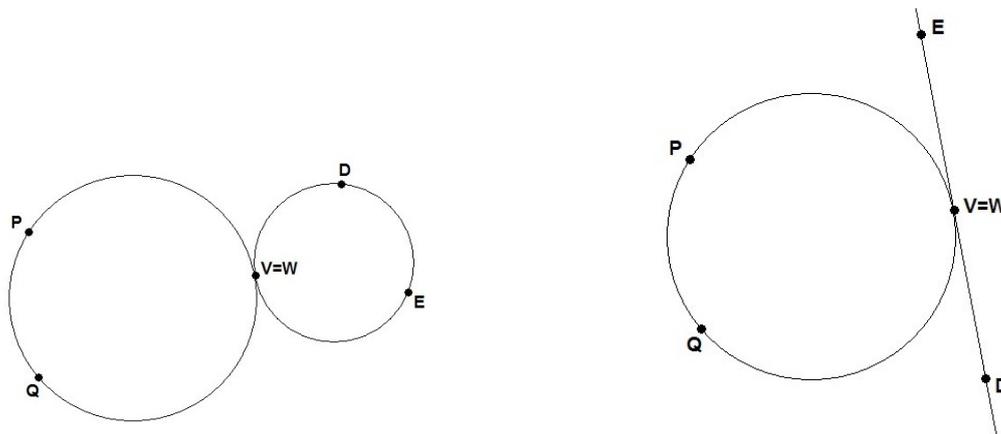


Abbildung 8.1: Lemma 1.1

- Oder es liegt keine Berührung der Trägerobjekte vor, dann ist  $V = Q$  oder  $W = E$  möglich

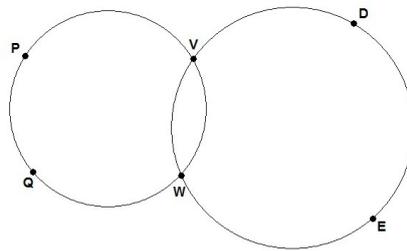


Abbildung 8.2: Lemma 1.1

Dann ist das Doppelverhältnis  $\frac{[v,q;e,p]}{[w,e;q,d]}$  reell und nicht Null.

**Lösung:** Die Behauptung ist invariant unter linear gebrochenen Abbildungen, also o.B.d.A.,  $v = \infty$  und die Kreise sind Geraden. Wenn die Geraden parallel sind, zum Beispiel  $w = v = \infty$ , dann reduziert sich der Quotient auf  $\frac{p-q}{e-d}$ , welcher reell und nicht Null ist. Sind die Geraden nicht parallel, dann ist der Quotient gleich  $[\infty, q; w, p] \cdot [\infty, d; e, w]$ , welcher reell und nicht Null ist, wenn  $Q, W, P$  und  $D, E, Q$  Tripel von verschiedenen kollinearen Punkten sind.

# Kapitel 9

## Dreiecke und ihre Formgrößen

### 9.1 Allgemeines

Die endlichen und verschiedenen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  bestimmen ein Dreieck  $ABC$ . Es sei bei allen Dreiecken vorausgesetzt, dass sie orientiert sind und ebenso ihre Winkeln. Speziell sind die Winkel von  $\triangle ABC$  definiert durch

$$\alpha := \angle BAC, \quad \beta := \angle CBA, \quad \gamma := \angle ACB$$

Für alle nicht ausgearteten (die 3 paarweise verschiedenen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind kollinear) Dreiecke sind alle Winkel entweder positiv oder negativ.

**Definition:** Die **Formgröße** eines Dreiecks  $\triangle ABC$  ist die komplexe Zahl  $\Delta_{abc} = [\infty, a; b, c]$ .

Zwei Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle \hat{A}\hat{B}\hat{C}$  sind genau dann gleichsinnig ähnlich, wenn sie dieselbe Formgröße besitzen,  $[\infty, a; b, c] = [\infty, \hat{a}; \hat{b}, \hat{c}]$ . Sie sind gegensinnig ähnlich, wenn sie konjugierte Formgrößen haben,  $[\infty, a; b, c] = [\infty, \hat{a}; \hat{b}, \hat{c}]$ . Wir notieren, dass die Koordinaten  $a$ ,  $b$  und  $c$  der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  nur endlich und verschieden sein müssen,  $\Delta_{abc}$  kann jede komplexe Zahl außer 0, 1 und  $\infty$  sein und ist genau dann reell, wenn das Dreieck ausgeartet ist. Die Dreiecke, die durch andere Beschriftungen entstehen, haben verschiedene Formgrößen, was durch die Symmetrie-eigenschaften der Doppelverhältnisse bestimmt ist:

$$\Delta_{bca} = (\Delta_{abc})', \quad \Delta_{cab} = (\Delta_{abc})'', \quad \Delta_{acb} = (\Delta_{abc})^{-1}$$

Die Formgröße von Dreiecken beinhaltet nützliche Informationen über die Winkel und die

Verhältnisse der Seitenlängen, beispielsweise haben wir

$$\alpha = \arg(\Delta_{abc}), \quad \frac{|a-c|}{|a-b|} = |\Delta_{abc}|$$

und ähnliche Darstellungen,  $(\Delta_{abc})'$  und  $(\Delta_{abc})''$  für die anderen Winkel und Verhältnisse.

Das Dreieck  $ABC$  ist gleichschenkelig mit Scheitelpunkt  $A$ , wenn  $|\Delta_{abc}| = 1$  ist, das Dreieck  $ABC$  ist gleichseitig, wenn  $\Delta_{abc} = \omega := e^{i\frac{\pi}{3}}$  oder  $\Delta_{abc} = \bar{\omega}$  gilt.

Weiters benützen wir die Formeln

$$e^{i\alpha} = \frac{\Delta_{abc}}{|\Delta_{abc}|}, \quad e^{2i\alpha} = \frac{\Delta_{abc}}{\overline{\Delta_{abc}}}$$

**Berechnung der Formgröße aus den Winkeln (BFW):** Für  $\beta := \angle CBA$  und  $\gamma := \angle ACB$  hat das Dreieck  $ABC$  die Formgröße

$$\Delta_{abc} = \frac{1 - e^{-2i\beta}}{1 - e^{2i\gamma}} = (e^{2i\beta})''(e^{2i\gamma})' \tag{9.1}$$

**Beweis:** Wir verwenden den Sinussatz und erhalten dann

$$\Delta_{abc} = |\Delta_{abc}| \cdot e^{i\arg\Delta_{abc}} = \frac{|a-c|}{|a-b|} e^{i\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} e^{i\alpha} = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}} e^{i(\pi-\beta-\gamma)} = \frac{1 - e^{-2i\beta}}{1 - e^{2i\gamma}} = (e^{2i\beta})''(e^{2i\gamma})'.$$

Eine zahlenmäßige Formgröße ermöglicht uns viele Sätze über die Ähnlichkeit von Dreiecken analytisch zu beweisen. Wir illustrieren dies mit einigen elementaren Beispielen.

### 9.1.1 Beispiele

#### Beispiel 1

Gegeben ist eine Strecke  $AB$  und ein Dreieck  $JKM$ , welches nicht gleichseitig oder gleichschenkelig ist. Nun konstruieren wir auf  $AB$  Dreiecke  $PAB$ ,  $BQA$  und  $ABR$ , die gleichsinnig ähnlich sind zu  $\triangle JKM$ .

**Dann gilt:** Das aus der Konstruktion entstandene Dreieck  $PQR$  ist gleichsinnig ähnlich zu  $\triangle JKM$ .

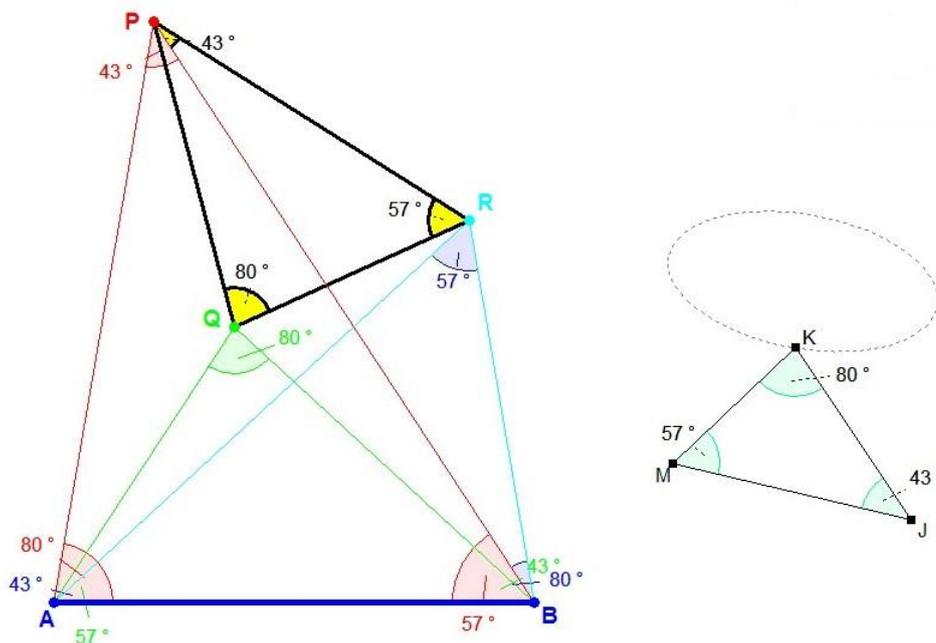


Abbildung 9.1: Beispiel 1

**Lösung:** Wir definieren für die Formgröße des Dreiecks  $JKM$   $\lambda := [\infty, j; k, M]$ . Da die drei konstruierten Dreiecke gleichsinnig ähnlich sind erhalten wir für ihre Formgrößen

$$[\infty, p; a, b] = [\infty, b; q, a] = [\infty, a; b, r] = \lambda.$$

Die Gleichungen  $\frac{p-b}{p-a} = \frac{b-a}{b-q} = \frac{a-r}{a-b} = \lambda$  sind nach  $p, q$  und  $r$  umzuformen und wir erhalten

$$p = \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda}, \quad q = \frac{b(\lambda - 1) + a}{\lambda}, \quad r = a(1 - \lambda + \lambda b).$$

Dann berechnen wir

$$p - r = \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda} - a(1 - \lambda) - \lambda b \Rightarrow (p - r)(1 - \lambda) = (b - a)(1 - \lambda + \lambda^2)$$

$$p - q = \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda} - \frac{b(\lambda - 1) + a}{\lambda} \Rightarrow (p - q)(1 - \lambda)\lambda = (b - a)(1 - \lambda + \lambda^2)$$

Nun wenden wir für die beiden Gleichungen das Gleichsetzungsverfahren an und bekommen  $(p - r)(1 - \lambda) = (p - q)(1 - \lambda)\lambda \Rightarrow \Delta_{pqr} = [\infty, p; q, r] = \frac{p-r}{p-q} = \lambda$ . Das heißt,  $\Delta PQR$  hat die Formgröße  $\lambda$  und hat daher dieselbe Formgröße wie  $\Delta JKM$  und ist somit gleichsinnig ähnlich zu  $\Delta JKM$ .

**Beispiel 2**

Gegeben ist ein Dreieck  $JKM$  und ein Punkt  $E$ , welcher kein Eckpunkt des Dreiecks ist. Wir nehmen ein Dreieck  $ABC$  an und konstruieren auf deren Seiten Dreiecke  $PCB$ ,  $CQA$  und  $BAR$ , die alle ähnlich zu Dreieck  $JKM$  sind. Weiters werden in diesen Dreiecken jeweils Punkte  $S$ ,  $T$  und  $U$  konstruiert, welche in den betreffenden Ähnlichkeiten durch "Mitnahme" der Position von  $E$  zu  $\triangle JKM$  entstehen.

**Dann gilt:** Das konstruierte Dreieck  $STU$  ist ähnlich zu  $\triangle JKM$ .

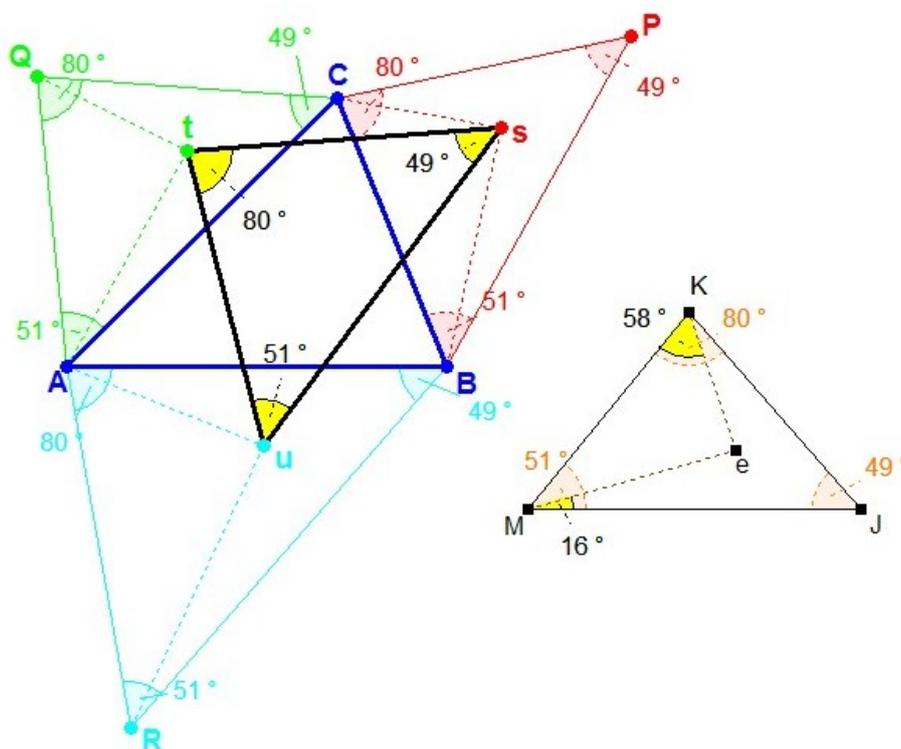


Abbildung 9.2: Beispiel 2

**Lösung:** Wir definieren für  $\triangle JKM$  die Formgröße  $\sigma := \Delta_{jkm} = [\infty, j; k, m]$ . Daraus erhalten wir für den Punkt  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$  die Formgröße  $\rho := [e, j; k, m]$ . Die Dreiecke  $PCB$ ,  $CQA$  und  $BAR$  sind ähnlich zu  $\triangle JKM$  und haben daher die Formgröße  $\sigma$ .

$$\Delta_{pcb} = [\infty, p; c, b] = \Delta_{cqa} = [\infty, c; q, a] = \Delta_{bar} = [\infty, b; a, r] = \sigma$$

Die Punkte  $S$ ,  $T$  und  $U$  haben dieselbe Position wie Punkt  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$ , daher gilt für deren Formgröße

$$[s, p; c, b] = [t, c; q, a] = [u, b; a, r] = \rho.$$

Dividiert man nun die ersten beiden Doppelverhältnisse, so erhält man

$$\frac{[\infty, p; c, b]}{[s, p; c, b]} = \frac{\frac{p-b}{p-c}}{\frac{(s-c)(p-b)}{(s-b)(p-c)}} = \frac{s-b}{s-c} = [\infty, s; c, b] = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Nach umformen nach  $s$  erlangen wir

$$s = \frac{\rho b - \sigma c}{\rho - \sigma}.$$

Analoge Rechenschritte führen wir mit den beiden anderen Paaren von Doppelverhältnisse durch.

$$\begin{aligned} [\infty, q; a, c] &= \sigma' \quad \text{und} \quad [t, q; a, c] = \rho' \\ [\infty, r; b, a] &= \sigma'' \quad \text{und} \quad [u, r; b, a] = \rho'' \end{aligned}$$

Wir bekommen dann  $\frac{t-c}{t-a} = [\infty, t; a, c] = \frac{\sigma'}{\rho'}$ , setzen für  $\sigma' = \frac{1}{1-\sigma}$  und  $\rho' = \frac{1}{1-\rho}$  ein, in  $\frac{u-a}{u-b} = [\infty, u; b, a] = \frac{\sigma''}{\rho''}$  setzen wir für  $\sigma'' = 1 - \frac{1}{\sigma}$  und  $\rho'' = 1 - \frac{1}{\rho}$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} t &= \frac{(1-\sigma)c - (1-\rho)a}{\rho - \sigma} \\ u &= \frac{\sigma(1-\rho)a - \rho(1-\sigma)b}{\rho - \sigma} \\ \Rightarrow \triangle_{stu} &= \frac{\frac{\rho b - \sigma c}{\rho - \sigma} - \frac{\sigma(1-\rho)a - \rho(1-\sigma)b}{\rho - \sigma}}{\frac{\rho b - \sigma c}{\rho - \sigma} - \frac{(1-\sigma)c - (1-\rho)a}{\rho - \sigma}} = \frac{\sigma(s - c - \rho a + \rho b)}{a - c - \rho a + \rho b} = \sigma \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Dreieck  $STU$  dieselbe Formgröße wie  $\triangle JKM$  hat und somit gleichsinnig ähnlich ist zu  $\triangle JKM$ .

## 9.2 Miquel Dreiecke

### Verallgemeinerung des Satzes von Miquel:

Bestimmt man für vier Punkte eines Kreises (oder einer Geraden)  $k$  eine zyklische Folge und legt in der Kreisebene durch je zwei benachbarte dieser Punkte einen Kreis, so liegen die zweiten Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender Kreise auf einem neuen Kreis  $k'$ .

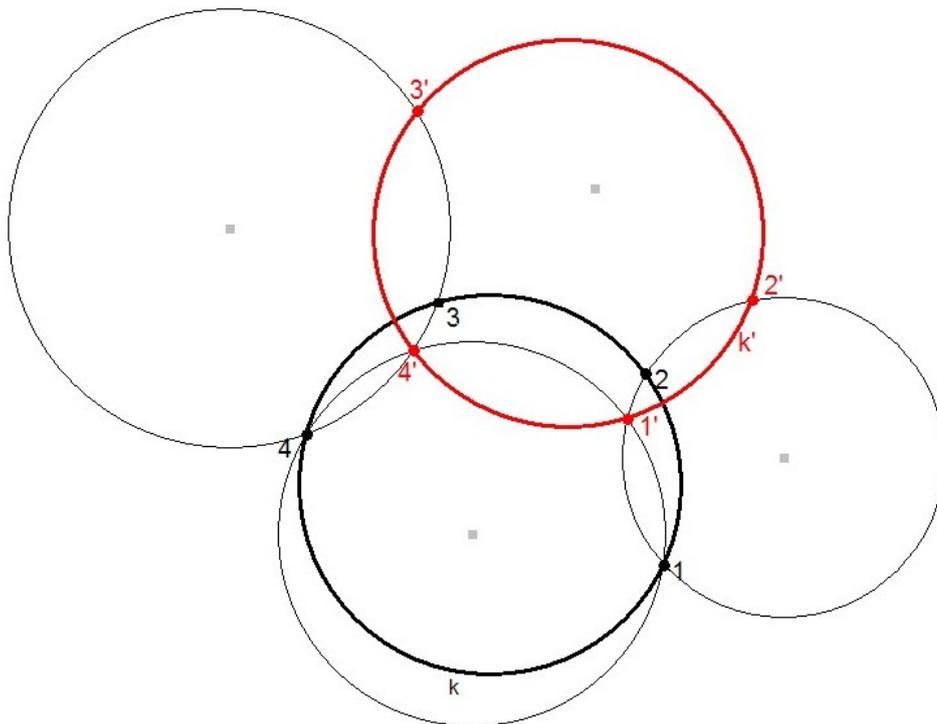


Abbildung 9.3: Miquel allgemein

Wie schon im Kapitel "Kopunktale Geraden" erwähnt, lautet der **Satz von Miquel**:

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Zu den Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$  werden Punkte  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  angenommen.

**Dann gilt:** Die Umkreise der Dreiecke  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  und  $A_1B_1C$  schneiden sich in einem Punkt  $M$ , dem MIQUEL Punkt.

Nun definieren wir Miquel Dreiecke.

Ein Dreieck  $A_1B_1C_1$  wird Miquel Dreieck von  $M$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$  genannt. Die Punkte, die nicht Eckpunkte von  $\triangle ABC$  sind, haben unendlich viele Miquel Dreiecke. Die bekanntesten sind seine Pedal"Dreiecke, die vorkommen, wenn  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  die Fußpunkte der Normalen durch  $M$  auf die Seiten von  $\triangle ABC$  sind. Alle Miquel Dreiecke eines Punktes

haben dieselbe Formgröße und sind somit gleichsinnig ähnlich. Daher geht der Durchlaufsinns des Dreiecks  $ABC$  nicht ein, es ist also egal ob man das Miquel Dreieck von  $M$  bezüglich  $\triangle ABC$  oder bezüglich  $\triangle BAC$  konstruiert, die Formgrößen bleiben erhalten.

**Satz über die Formgröße von Miquel Dreiecken (MDF):** Das Dreieck  $STU$  ist ein Miquel Dreieck eines Nicht-Eckpunktes  $M$  bezüglich eines nicht ausgearteten Dreiecks  $ABC$ .

**Dann gilt:** Das Dreieck  $STU$  hat die Formgröße  $\triangle_{stu} = \overline{[m, a; b, c]}$ .

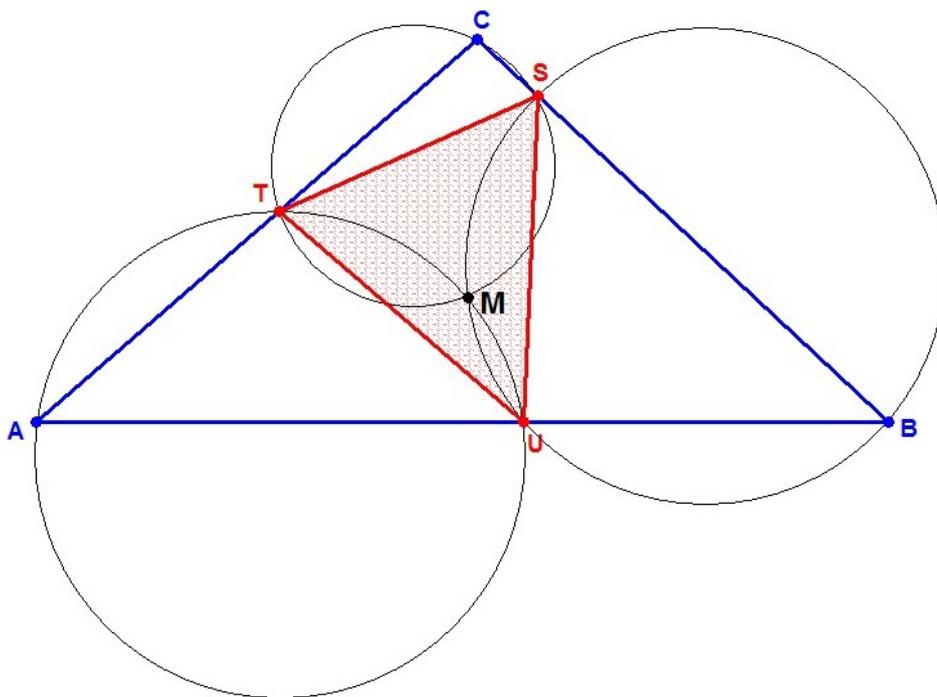


Abbildung 9.4: Miquel Dreieck

**Lösung:** Da der Punkt  $M$  mit höchstens einem der drei Punkte  $S$ ,  $T$  oder  $U$  zusammenfällt, können wir für die Koordinaten dieser Punkte annehmen, dass  $m \neq s$  und  $m \neq t$  gilt. Nun untersuchen wir, ob die rechte Seite der Gleichung

$$[m, a; b, c] \cdot [\infty, s; t, u] = \frac{[c, s; a, m]}{[t, a; c, \infty]} \cdot \frac{[u, a; s, \infty]}{[b, s; a, m]} \quad (9.2)$$

reell ist. Wir wenden *Lemma 6.1* auf die Kreislinienpaare  $ctms - cta\infty$  und  $ubms - uba\infty$  an. Da  $[a, b; c, d] = [a^{-1}, b^{-1}; c^{-1}, d^{-1}]$  gilt, erhalten wir

$$[m, a; b, c] \cdot \left[0, \frac{1}{s}; \frac{1}{t}, \frac{1}{u}\right] = \frac{[c, s; a, m]}{\left[\frac{1}{t}, \frac{1}{a}; \frac{1}{s}, 0\right]} \cdot \frac{\left[\frac{1}{u}, \frac{1}{a}; \frac{1}{s}, 0\right]}{[b, s; a, m]}$$

Durch weitere Rechengänge folgt

$$\begin{aligned} \left( \frac{m-b}{m-c} \cdot \frac{a-c}{a-b} \right) \left( \frac{u}{t} \cdot \frac{t(u-s)}{u(t-s)} \right) \left( \frac{s-t}{s} \cdot \frac{s}{s-a} \right) \left( \frac{b-a}{b-m} \cdot \frac{s-m}{s-a} \right) &= \\ &= \left( \frac{c-a}{c-m} \cdot \frac{s-m}{s-a} \right) \left( \frac{s-u}{s} \cdot \frac{s}{s-a} \right) \\ &\Rightarrow 1 = 1 \end{aligned}$$

Nach Anwendung von *Lemma 6.1* erhalte ich die Quotienten der Doppelverhältnisse  $\frac{[c,s;a,m]}{[t,a;s,\infty]}$  und  $\frac{[u,a;s,\infty]}{[b,s;a,m]}$ . Wir nehmen die Kreislinienpaare  $ctms - cta\infty$  und  $ubms - uba\infty$ , setzen ein und bekommen  $\frac{[c,a;a,m]}{[m,a;b,c]}$  und  $\frac{[u,a;s,\infty]}{[b,s;a,m]}$ . Da die rechte Seite der Gleichung 9.2 reell ist, ist auch die linke Seite, sprich  $[m, a; b, c] [\infty, s; t, u]$  reell.

Analoge Berechnungen führen wir für  $[m, b; c, a] [\infty, t; u, s]$  durch. Hier verwenden wir die Kreislinienpaare  $aumt - aub\infty$  und  $scmt - scb\infty$  und wenden *Lemma 6.1* an. Da die rechte Seite der Gleichung

$$[m, b; c, a] [\infty, t; u, s] = \frac{[a, t; b, m]}{[u, b; t, \infty]} \cdot \frac{[s, b; t\infty]}{[c, t; b, m]} \quad (9.3)$$

reell ist, ist auch  $[m, b; c, a] [\infty, t; u, s]$  reell. Nach Anwendung von *ECRT*, vorausgesetzt  $[m, a; b, c]$  und  $[\infty, s; t, u]$  sind nicht reell, erhalten wir  $\triangle_{stu} = [\infty, s; t, u] = \overline{[m, a; b, c]}$  und sind mit dem Beweis fertig.

Nun nehmen wir an, dass  $[m, a; b, c]$  und  $[\infty, s; t, u]$  reell sind und auch nicht Null. Der Punkt  $M$  liegt am Umkreis des Dreiecks  $ABC$ . Das Dreieck  $STU$  ist ausgeartet und es gilt  $m \neq u$ . Zuerst setzen wir voraus, dass alle Punkte verschieden sind. Die rechten Seiten der beiden Gleichungen

$$\frac{[s, b; a, u]}{[s, c; a, t]} = \frac{[\infty, b; a, u] \cdot [\infty, c; t, a]}{[\infty, s; t, u]} \quad (9.4)$$

$$\frac{[s, a; u, b]}{[s, a; t, c]} = \frac{[\infty, s; t, u]}{[\infty, s; c, b]} \cdot \frac{[\infty, a; u, b]}{[\infty, a; t, c]} \quad (9.5)$$

sind reell. Laut *ECRT* gilt dann  $[s, c; a, t] = [s, b; a, u]$ . Aus Gleichung

$$\frac{[m, a; b, c]}{[\infty, s; t, u]} = \frac{[s, b; a, u]}{[s, c; a, t]} \cdot \frac{[\infty, b; u, m]}{[\infty, c; t, m]} \quad (9.6)$$

folgt nun, dass  $\frac{[\infty, b; u, m]}{[\infty, c; t, m]}$  reell ist.

Nun verwenden wir *Lemma 6.1* bezogen auf die Kreislinienpaare  $aumt - aub\infty$  und  $acbm -$

$act\infty$ . Die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{[\infty, m; b, u]}{[\infty, m; c, t]} = \frac{[u, b; m, \infty]}{[a, m; b, t]} \cdot \frac{[c, t; m, \infty]}{[a, m; t, b]} \quad (9.7)$$

ist also reell, nach Anwendung von 'ECRT' erhalten wir  $[\infty, b; u, m] = [\infty, c; t, m]$ . Aus Gleichung 9.6 bekommen wir  $\Delta_{stu} = [\infty, s; t, u] = [m, a; b, c] = \overline{[m, a; b, c]}$ .

Sind die Punkte  $S, T$  und  $U$  jeweils verschieden von  $A, B$  und  $C$ , so gilt o.B.d.A  $u = a$ . Dann sind  $S, T$  und  $A$  kollinear, und so ist  $S = C$ , was aus  $[s, c; a, t] = 1 = [s, b; a, u]$  folgt. Die Gleichungen 9.6 und 9.7 gelten auch hier und wir bekommen wieder  $\Delta_{stu} = \overline{[m, a; b, c]}$ .

### 9.2.1 Beispiele

#### Die Brocard Punkte

Als ausgearteten Fall des Satzes von Miquel nehmen wir die Punkte  $S, T$  und  $U$  zusammenfallend mit den Eckpunkten  $A, B$  und  $C$  des Dreiecks  $ABC$  an. Folglich ist jede Seite eines Eckpunktes Tangente der Kreise durch die Punkte  $AUT, BSU$  und  $CTS$ . Es gibt zwei Möglichkeiten, diese darzustellen.

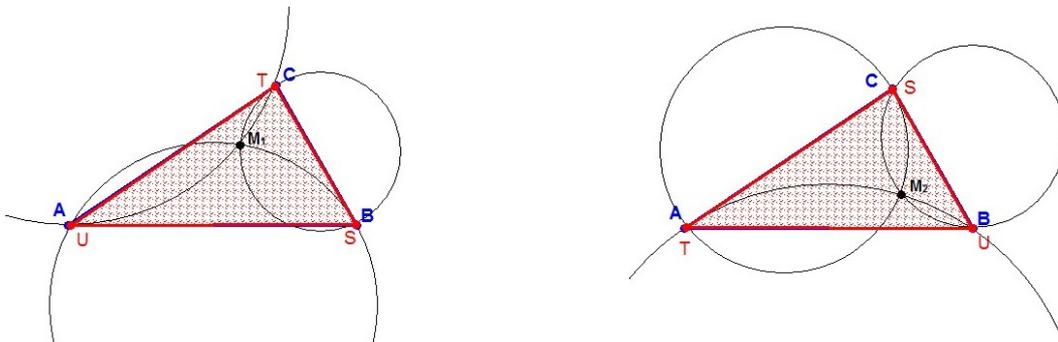


Abbildung 9.5: zwei Möglichkeiten der Brocard Punkte

Die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  mit Miquel Dreiecken  $\Delta_{STU} = \Delta_{BCA}$  und  $\Delta_{STU} = \Delta_{CAB}$  werden **Brocard Punkte** des Dreiecks  $ABC$  genannt, und haben Miquel Dreieck mit der Formgröße  $(\Delta_{abc})''$  und  $(\Delta_{abc})'$ . Der **Brocard Winkel** des Dreiecks  $\Delta_{ABC}$  ist der Winkel

$\varphi := \angle cbm_1 = \angle bam_1 = \angle acm_1 = \angle bcm_2 = \angle abm_2 = \angle bam_2$  und wird durch

$\varphi = \arg \overline{[\infty, b; m_1, c]}$  berechnet. Da  $[\infty, b; m_1, c] = 1 - [\infty, m_1; b, c] = 1 - \frac{[\infty, a; b, c]}{[m_1, a; b, c]} = 1 - \frac{\Delta_{abc}}{\overline{\Delta_{abc}}} = 1 - \Delta_{abc} + \Delta_{abc} \cdot \overline{\Delta_{abc}}$  gilt, bekommen wir nach Anwendung der Formel 9.1

$$\varphi = \arg 1 - \overline{\Delta_{abc}} + \Delta_{abc} \overline{\Delta_{abc}} = \arg 3 - e^{-2i\alpha} - e^{-2i\beta} - e^{-2i\gamma}.$$

### Die isodynamischen Punkte

Bezüglich dem Dreieck  $ABC$  ist der Apollonische Kreis durch den Punkt  $A$  die Menge der Punkte  $M$ , die  $\frac{|m-b|}{|m-c|} = \frac{|a-b|}{|a-c|}$  oder  $|\rho| = 1$  für  $\rho := [m, a; b, c]$  erfüllen.

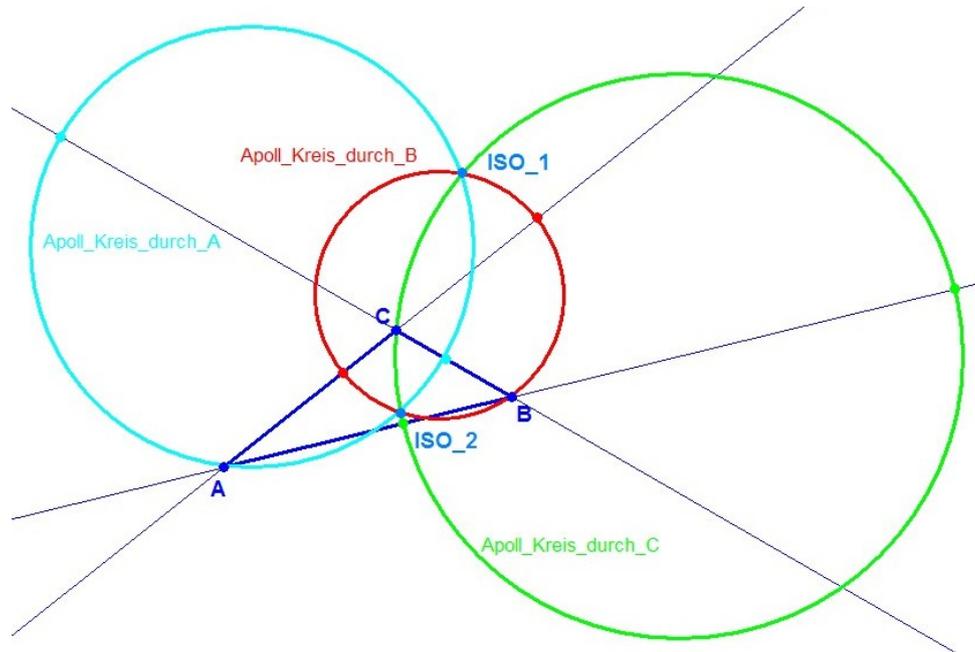


Abbildung 9.6: isodynamische Punkte

Analog erhalten wir den Apollonischen Kreis durch  $B$ , der Punkt  $M$  liegt darauf genau dann, wenn  $|\rho'| = 1$  gilt und am Apollonischen Kreis durch  $C$  genau dann, wenn  $|\rho''| = 1$  gilt. Die beiden Punkte, die auf allen drei Kreisen liegen heißen **isodynamische Punkte** und erfüllen  $|\rho| = |\rho'| = |\rho''| = 1$ . Die einzigen Lösungen zu diesen Bedingungen sind  $\rho = \omega$  und  $\rho = \bar{\omega}$ . Laut *MDF* haben die isodynamischen Punkte nicht-ähnlich gleichseitige Miquel Dreiecke und sind Inverse im Umkreis.

**Beispiel 1**

Gegeben ist ein Dreieck  $JKM$  und ein Punkt  $E$ , der kein Eckpunkt ist. Nun konstruieren wir ein Dreieck  $ABC$  und auf seinen Seiten Dreiecke  $PCB$ ,  $ACQ$  und  $ARB$ , die alle ähnlich sind zu  $\triangle JKM$ . Weiters werden Punkte  $S, T$  und  $U$  in derselben Position wie  $E$  zu  $\triangle JKM$  konstruiert.

**Dann gilt:** Die Formgröße von  $\triangle STU$  ist unabhängig von der Formgröße des Dreiecks  $ABC$ .

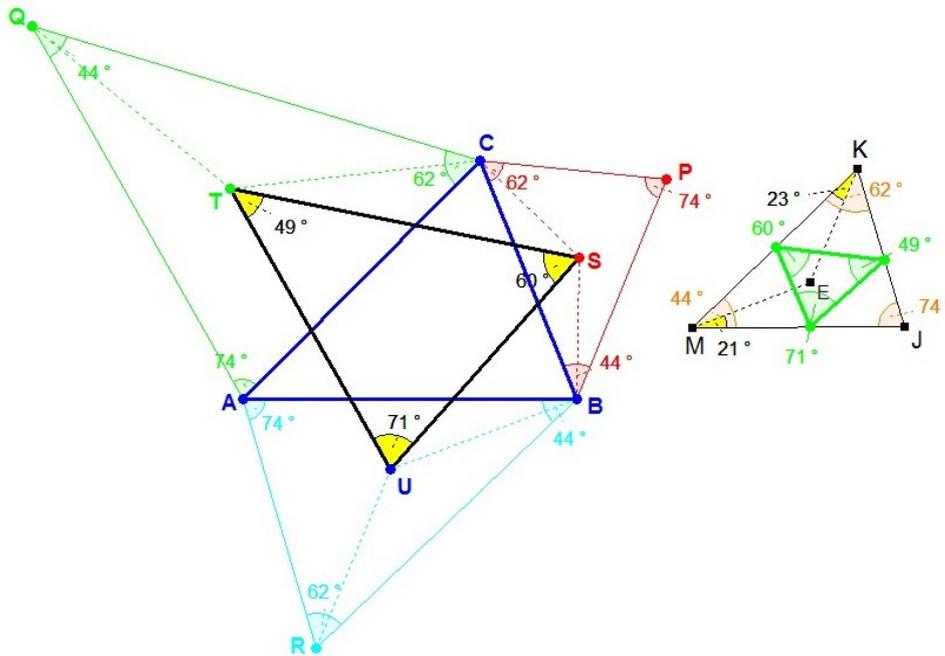


Abbildung 9.7: Beispiel 1

**Lösung:** Wir beweisen dieses Beispiel in dem wir zeigen, dass  $\triangle STU$  eigentlich gegenseitig ähnlich ist zu den Miquel Dreiecken von  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$ .

Wir definieren die Formgröße von  $JKM$  mit  $\sigma := \Delta_{jkm} = [\infty, j; k, m]$  und für den Punkt  $E$  bezüglich  $JKM$  haben wir  $\rho := [e, j; k, m]$ . Daraus ergibt sich für die Dreiecke  $PCB$ ,  $ACQ$  und  $ARB$  bzw. für die Punkte  $S, T$  und  $U$

$$[\infty, p; c, b] = [\infty, a; c, q] = [\infty, a; r, b] = \sigma$$

$$[s, p; c, b] = [t, a; c, q] = [u, a; r, b] = \rho$$

Dividiert man die ersten beiden Doppelverhältnisse so erhalten wir nach umformen nach  $s$

$$\frac{[\infty, p; c, b]}{[s, p; c, b]} = \frac{\sigma}{\rho} \Rightarrow s = \frac{\sigma c - \rho b}{\sigma - \rho}$$

Analoge Rechenschritte führen wir mit den beiden anderen Paaren von Doppelverhältnisse durch.

$$\frac{[\infty, q; a, c]}{[t, q; a, c]} = \frac{\sigma''}{\rho''} \quad \text{und} \quad \frac{[\infty, r; b, a]}{[u, r; b, a]} = \frac{\sigma'}{\rho'}$$

Nach dem Umformen nach  $t$  und  $u$  bzw. nach Einsetzen für  $\sigma'' = 1 - \frac{1}{\sigma}$ ,  $\rho'' = \frac{1}{\rho}$ ,  $\sigma' = \frac{1}{1-\sigma}$  und  $\rho' = \frac{1}{1-\rho}$  erhalten wir.

$$t = \frac{\sigma\rho a - \rho a - \sigma\rho c + \rho c}{\sigma - \rho}$$

$$u = \frac{\sigma a - a + b - \rho b}{\sigma - \rho}$$

Daraus folgt dann weiters

$$\Delta_{stu} = \frac{\frac{\sigma c - \rho b}{\sigma - \rho} - \frac{\sigma a - a + b - \rho b}{\sigma - \rho}}{\frac{\sigma c - \rho b}{\sigma - \rho} - \frac{\sigma\rho a - \rho a - \sigma\rho c + \rho c}{\sigma - \rho}} = \frac{\sigma(c - a) + a - b}{\sigma\rho(c - a) + \rho(a - b)} = \frac{1}{\rho} = [e, j; k, m]^{-1}$$

Laut *MDF* hat das Miquel Dreieck von  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$  die Formgröße  $[e, j; k, m]$ . Außerdem ist laut Definition der Miquel Dreiecke der Durchlaufsinn des Ausgangsdreiecks egal, also  $\Delta_{stu} = \rho$  und somit gleichsinnig ähnlich zum Miquel Dreieck von  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$ .

### 9.3 Satz der ersten Formgröße

Das Beispiel ... ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes.

**Satz der ersten Formgröße (SEF):** Auf einer Strecke  $AB$  werden Dreiecke  $PAB$ ,  $QAB$  und  $RAB$  mit verschiedenen Formgrößen  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  konstruiert.

**Dann gilt:** Das entstandene Dreieck  $PQR$  hat die Formgröße  $\Delta_{pqr} = [1, \lambda; \mu, \nu]$  und die Miquel Dreiecke von  $A$  und  $B$  bezüglich  $\triangle PQR$  haben die Formgröße  $[\infty, \lambda; \mu, \nu]$  und  $[0, \lambda; \mu, \nu]$ .

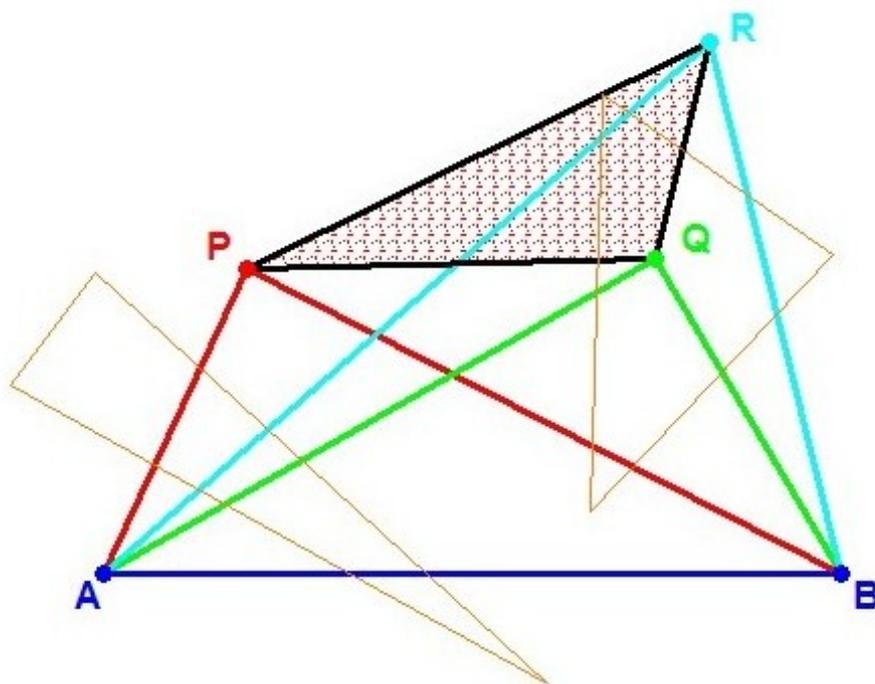


Abbildung 9.8: Satz der ersten Formgröße

**Lösung:** Wir lösen die Gleichungen  $\lambda = [\infty, p; a, b]$ ,  $\mu = [\infty, q; a, b]$  und  $\nu = [\infty, r; a, b]$  nach  $p$ ,  $q$  und  $r$  auf und erhalten dann

$$p = \frac{\lambda a - b}{\lambda - 1}, \quad q = \frac{\mu a - b}{\mu - 1}, \quad r = \frac{\nu a - b}{\nu - 1}$$

Daraus ergibt sich dann die Formgröße für das Dreieck  $PQR$

$$\Delta_{pqr} = [\infty, p; q, r] = \frac{p - r}{p - q} = \frac{\frac{\lambda a - b}{\lambda - 1} - \frac{\nu a - b}{\nu - 1}}{\frac{\lambda a - b}{\lambda - 1} - \frac{\mu a - b}{\mu - 1}} = \frac{(1 - \mu)(\lambda - \nu)}{(1 - \nu)(\lambda - \mu)} = [1, \lambda; \mu, \nu]$$

Für das Miquel Dreieck von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$  erhalten wir:

Laut *MDF* hat das Dreieck die Formgröße  $\overline{[a, p; q, r]}$ , nun setzen wir für  $p, q$  und  $r$  ein und erhalten dadurch

$$[a, p; q, r] = \frac{(a - q)(p - r)}{(a - r)(p - q)} \Rightarrow \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu} = [\infty, \lambda; \mu, \nu]$$

Das Miquel Dreieck von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$  hat nun die Formgröße  $\overline{[a, p; q, r]} = \overline{[\infty, \lambda; \mu, \nu]}$ .

Für das Miquel Dreieck von  $B$  bezüglich  $\triangle PQR$  erhalten wir:

Analog: Wir können  $p, q$  und  $r$  übernehmen und setzen wieder ein. Laut *MDF* hat das Dreieck die Formgröße  $\overline{[b, p; q, r]}$ ,

$$[b, p; q, r] = \frac{(b - q)(p - r)}{(b - r)(p - q)} \Rightarrow \frac{\mu(\lambda - \nu)}{\nu(\lambda - \mu)} = [0, \lambda; \mu, \nu]$$

Das Miquel Dreieck von  $B$  bezüglich  $\triangle PQR$  hat nun die Formgröße  $\overline{[b, p; q, r]} = \overline{[0, \lambda; \mu, \nu]}$ .

### 9.3.1 Beispiele

#### Korollar SEF-1

Gegeben ist ein nicht ausgeartetes Dreieck  $JKM$  und ein Punkt  $E$ , der kein Eckpunkt ist. Auf einer Strecke  $AB$  werden Dreiecke  $PAB$ ,  $BQA$  und  $ABR$  errichtet, die alle ähnlich sind zu  $\triangle JKM$ . Außerdem werden Punkte  $S$ ,  $T$  und  $U$  in derselben Position wie  $E$  zu  $\triangle JKM$  konstruiert.

**Dann gilt:** Wenn das Miquel Dreieck von  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$  die Formgröße  $\bar{\rho}$  hat, dann hat das Dreieck  $STU$  die Formgröße

$$\Delta_{stu} = \frac{\Delta_{jkm} + \rho - \rho \Delta_{jkm}}{\Delta_{jkm} + \rho - 1}$$

und die Miquel Dreiecke von  $A$  und  $B$  bezüglich  $\triangle STU$  haben die Formgröße  $\overline{\rho' \Delta'_{jkm} \Delta_{stu}}$  und  $\overline{\rho'' \Delta''_{jkm} \Delta_{stu}}$ .

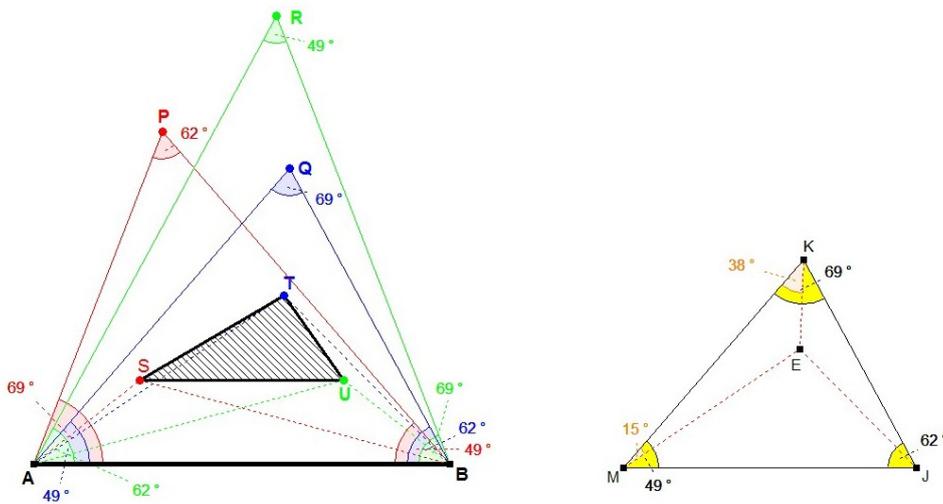


Abbildung 9.9: Korollar SEF-1

**Lösung:** Laut *MDF* hat das Miquel Dreieck von  $E$  bezüglich  $\triangle JKM$  die Formgröße  $\bar{\rho} = \overline{[e, j; k, m]}$ , womit folgt dass  $\rho = [e, j; k, m]$  gilt. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \lambda &:= [\infty, s; a, b] = [\infty, e; k, m] = \frac{[\infty, j; k, m]}{[e, j; k, m]} = \frac{e - m}{e - k} = \frac{\Delta_{jkm}}{\rho} \\ \mu &:= [\infty, t; a, b] = [\infty, e; m, j] = \frac{[\infty, k; m, j]}{[e, k; m, j]} = \frac{\Delta'_{jkm}}{\rho'} \\ \nu &:= [\infty, u; a, b] = [\infty, e; j, k] = \frac{[\infty, m; j, k]}{[e, m; j, k]} = \frac{\Delta''_{jkm}}{\rho''} \end{aligned}$$

Nun setzen wir in *SEF* ein und vereinfachen:

$$\begin{aligned} \Delta_{stu} = [1, \lambda; \mu, \nu] &= \left[ 1, \frac{\Delta_{jkm}}{\rho}; \frac{\Delta'_{jkm}}{\rho'}, \frac{\Delta''_{jkm}}{\rho'} \right] = \frac{\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\Delta_{jkm}}\right) \left(\frac{\Delta_{jkm}}{\rho} - \frac{\rho\Delta_{jkm}-\rho}{\rho\Delta_{jkm}-\Delta_{jkm}}\right)}{\left(1 - \frac{\rho\Delta_{jkm}-\rho}{\rho\Delta_{jkm}-\Delta_{jkm}}\right) \left(\frac{\Delta_{jkm}}{\rho} - \frac{1-\rho}{1-\Delta_{jkm}}\right)} = \\ &= \dots = \frac{\Delta_{jkm} + \rho - \rho\Delta_{jkm}}{\Delta_{jkm} + \rho - 1} \end{aligned}$$

Für das Miquel Dreieck von *A* bezüglich  $\Delta_{STU}$  erhalten wir laut *SEF*:

$$\overline{[\infty, \lambda, \mu, \nu]} = \frac{(\rho \Delta_{jkm} - \rho - \Delta_{jkm}) \left(1 - \frac{1}{\Delta_{jkm}}\right)}{(\rho + \Delta_{jkm} - 1)(1 - \rho)} = \overline{\rho' \Delta''_{jkm} \Delta_{stu}}$$

Für das Miquel Dreieck von *B* bezüglich  $\Delta_{STU}$  erhalten wir laut *SEF*:

$$\overline{[0, \lambda; \mu, \nu]} = \frac{(\rho \Delta_{jkm} - \rho - \Delta_{jkm})(\rho - 1)}{\rho(\rho + \Delta_{jkm} - 1)(\Delta_{jkm} - 1)} = \overline{\rho'' \Delta'_{jkm} \Delta_{stu}}$$

**Beispiel 1**

Gegeben ist ein Parallelogramm  $JKMN$  und ein Punkt  $E$ . Auf einer Strecke  $AB$  werden Dreiecke  $PAB$ ,  $QAB$ ,  $RAB$  und  $SAB$  konstruiert, die alle ähnlich zu  $\triangle EKJ$ ,  $\triangle EMK$ ,  $\triangle ENM$  und  $\triangle EJN$  sind.

**Dann gilt:** Das "Mittenparallelogramm" von  $\square PQRS$  ist gleichsinnig ähnlich zum Parallelogramm  $JKMN$ .

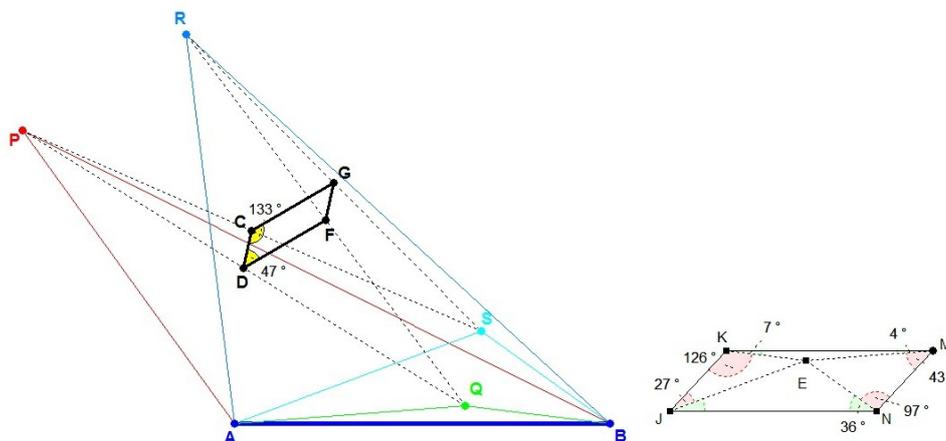


Abbildung 9.10:

**Lösung:** Wir definieren für die Dreiecke  $PAB$ ,  $QAB$ ,  $RAB$  und  $SAB$  die Formgrößen

$$\lambda := [\infty, e; k, j] = [\infty, p; a, b], \quad \mu := [\infty, e; m, k] = [\infty, q; a, b]$$

$$\nu := [\infty, e; n, m] = [\infty, r; a, b], \quad \sigma := [\infty, e; j, n] = [\infty, s; a, b]$$

Daraus folgen dann

$$[\infty, j; n, k] = [\infty, j; e, k][\infty, j; n, e] = \lambda''\sigma' = \Delta_{jnk}$$

$$[\infty, m; k, n] = [\infty, m; e, n][\infty, m; k, e] = \mu'\nu'' = \Delta_{mkn}$$

Nun ist erkennbar, dass das  $JKMN$  ein Parallelogramm ist:

$$\lambda''\sigma' = \frac{\sigma'}{1 - \lambda'} = \Delta_{jnk} = \Delta_{mkn} = \frac{\mu'}{1 - \nu'} = \mu''\nu'. \tag{9.8}$$

$C$ ,  $D$ ,  $F$  und  $G$  sind die Mittelpunkte der Seiten  $SP$ ,  $PQ$ ,  $QR$  und  $RS$  des Vierecks  $PQRS$ . Dann lösen wir die Gleichungen

$$\lambda = [\infty, p; a, b], \quad \mu = [\infty, q; a, b], \quad \nu = [\infty, r; a, b], \quad \sigma = [\infty, s; a, b]$$

und erhalten

$$p = \frac{\lambda a - b}{\lambda - 1}, \quad q = \frac{\mu a - b}{\mu - 1}, \quad r = \frac{\sigma a - b}{\sigma - 1}, \quad s = \frac{\nu a - b}{\nu - 1}.$$

Wir setzen für  $p$ ,  $q$  und  $s$  ein

$$\Delta_{pqs} = \frac{q - s}{q - p} = \frac{(1 - \lambda)(\mu - \sigma)}{(1 - \sigma)(\mu - \lambda)} = [1, \mu; \lambda, \nu].$$

Da  $\triangle DPC$  gleichsinnig ähnlich zu  $\triangle QPS$  ist, wissen wir laut *SEF*, dass

$$[\infty, d; p, c] = [\infty, p; q, s] = [1, \mu; \lambda, \sigma] = [\infty, \mu'; \lambda', \sigma'] \text{ gilt.}$$

Analog erhalten wir für

$$\Delta_{prq} = \frac{p - q}{p - r} = \frac{(1 - \nu)(\lambda - \mu)}{(1 - \mu)(\lambda - \nu)} = [1, \lambda; \nu, \mu]$$

Da  $\triangle DFQ$  ähnlich ist zu  $\triangle PRQ$ , wissen wir laut *SEF*, dass

$$[\infty, d; f, g] = [\infty, p; r, q] = [1, \lambda; \mu, \nu] = [\infty, \lambda'; \mu', \nu'] \text{ gilt.}$$

Nachdem  $[\infty, d; q, p] = -1$  gilt ( $D$  ist der Mittelpunkt der Seite  $PQ$ ) erhalten wir:

$$\Delta_{dfc} = [\infty, d; f, g] [\infty, d; q, p] [\infty, d; p, c] = - [\infty, \lambda'; \nu', \mu] [\infty, \mu'; \lambda', \sigma'] = \frac{\mu' - \sigma'}{\lambda' - \nu'}$$

Wir benützen 9.8 um  $\sigma'$  zu eliminieren:

$$\Delta_{dfc} = \frac{\mu'}{1 - \nu'} = \Delta_{mkn}$$

Daraus folgt, dass  $\triangle DFC$  gleichsinnig ähnlich ist zu  $\triangle MKN$  und weiters ist das Parallelogramm  $DCGF$  gleichsinnig ähnlich zum Parallelogramm  $JKMN$ .

## 9.4 Satz der zweiten Formgröße

Sätze wie der von Napoleon oder von Morley erfordern Konstruktionen von Dreiecken mit bekannter Formgröße an den Seiten eines anderen Dreiecks mit ebenfalls bekannter Formgröße. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall.

**Satz der zweiten Formgröße (SZF):** Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . An seinen Seiten werden Dreiecke  $PCB$ ,  $QAC$  und  $RBA$  mit den Formgrößen  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  konstruiert.

**Dann gilt:** Sind  $P$ ,  $Q$  und  $R$  verschieden, so hat das Dreieck  $PQR$  die Formgröße

$$\Delta_{pqr} = \frac{\lambda \Delta_{abc} - \left(\frac{1-\lambda\nu}{1-\nu}\right)}{\left(\frac{1-\lambda\mu}{1-\mu}\right) \Delta_{abc} - 1} \quad (9.9)$$

Außerdem haben die Miquel Dreiecke von  $A$  bezüglich  $\Delta PQR$  die Formgröße  $\overline{\mu'\nu'' \Delta_{pqr} \Delta_{abc}}$ . Die Miquel Dreiecke von  $B$  und  $C$  bezüglich  $\Delta PQR$  erhält man durch zyklische Vertauschung.

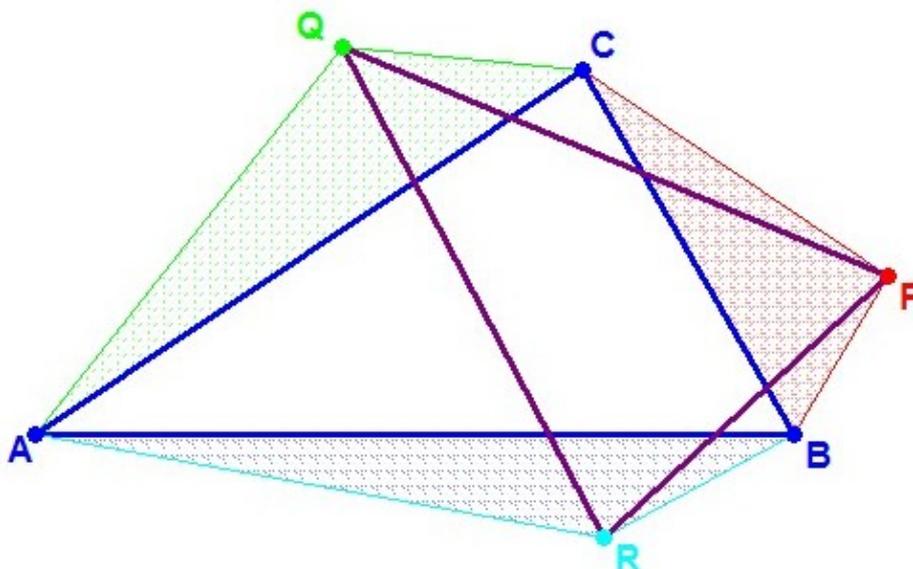


Abbildung 9.11: Satz der zweiten Formgröße

**Lösung:** Wir lösen die Gleichungen  $\lambda = [\infty, p; c, b]$ ,  $\mu = [\infty, p; c, b]$  und  $\nu = [\infty, p; c, b]$  nach  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auf:

$$\lambda = \frac{p-b}{p-c} \Rightarrow p = \frac{b-\lambda c}{1-\lambda}, \quad \mu = \frac{q-c}{q-a} \Rightarrow q = \frac{c-\mu a}{1-\mu}, \quad \nu = \frac{r-a}{r-b} \Rightarrow r = \frac{a-\nu b}{1-\nu}$$

Danach berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 p - r &= \frac{b - \lambda c}{1 - \lambda} - \frac{a - \nu b}{1 - \nu} \\
 \Rightarrow (p - r)(1 - \lambda)(1 - \nu) &= b - a + \lambda(a - c) + \lambda\nu(c - b) = \\
 &= (a - b) \cdot \frac{-1\{a - b - \lambda(a - c) - \lambda\nu(c - b)\}}{a - b} = \\
 &= (a - b)\{-1 + \lambda \Delta_{abc} + \lambda\nu(1 - \Delta_{abc})\} = \\
 &= (a - b)\{\lambda(1 - \nu) \Delta_{abc} - (1 - \lambda\nu)\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{c - b}{a - b} = \frac{b - c}{b - a} = [\infty, b; a, c] 1 - \Delta_{abc}$$

$$\begin{aligned}
 p - q &= \frac{b - \lambda c}{1 - \lambda} - \frac{c - \mu a}{1 - \mu} \\
 \Rightarrow (p - q)(1 - \lambda)(1 - \mu) &= b - c + \mu(a - b) + \lambda\mu(c - a) \\
 &= (a - b) \cdot \frac{-1\{c - b - \mu(a - b) + \lambda\mu(a - c)\}}{a - b} = \\
 &= (a - b)\{-1 + \Delta_{abc} + \mu - \lambda\nu\Delta_{abc}\} = \\
 &= (a - b)\{(1 - \lambda\mu) \Delta_{abc} - (1 - \mu)\}
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun für  $p - r$  und  $p - q$  in die Formgröße Formel ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{pqr} &= \frac{p - r}{p - q} = \frac{(1 - \mu)\{\lambda(1 - \nu) \Delta_{abc} - (1 - \lambda\nu)\}}{(1 - \nu)\{(1 - \lambda\mu) \Delta_{abc} - (1 - \mu)\}} = \frac{\lambda(1 - \nu) \Delta_{abc} - (1 - \lambda\nu)}{(1 - \nu) \left(\frac{1 - \lambda\mu}{1 - \mu} \cdot -1\right)} = \\
 &= \frac{\lambda \Delta_{abc} - \left(\frac{1 - \lambda\nu}{1 - \nu}\right)}{\left(\frac{1 - \lambda\mu}{1 - \mu}\right) \Delta_{abc} - 1}
 \end{aligned}$$

Für das Miquel Dreieck von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$  erhalten wir:

Von  $MDF$  wissen wir, dass das Dreieck die Formgröße  $\overline{[a, p; q, r]}$  hat.

$$\Rightarrow [a, p; q, r] = \frac{a - q}{a - r} \cdot \frac{p - r}{p - q} = [\infty, a; r, q] [\infty, p; q, r]$$

$$\mu'\nu''\Delta_{abc} = [\infty, a; c, q] \cdot [\infty, a; r, b] \cdot [\infty, a; b, c] = \frac{a - q}{a - c} \cdot \frac{a - b}{a - r} \cdot \frac{a - c}{a - b} = \frac{a - q}{a - r} = [\infty, a; r, q]$$

Nun setzen wir für  $\overline{[a, p; q, r]}$  ein:

$$\overline{[a, p; q, r]} = \overline{[\infty, a; r, q]} \cdot \overline{[\infty, p; q, r]} = \overline{\mu' \nu'' \triangle_{abc} \triangle_{pqr}}.$$

### 9.4.1 Beispiele

#### Ein analytischer Beweis des Satzes von Morley

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Die angrenzenden "Winkel-Dreiteiler" schneiden sich in den Punkten  $P, Q$  und  $R$ .

**Dann gilt:** Das Dreieck  $PQR$  ist gleichseitig.

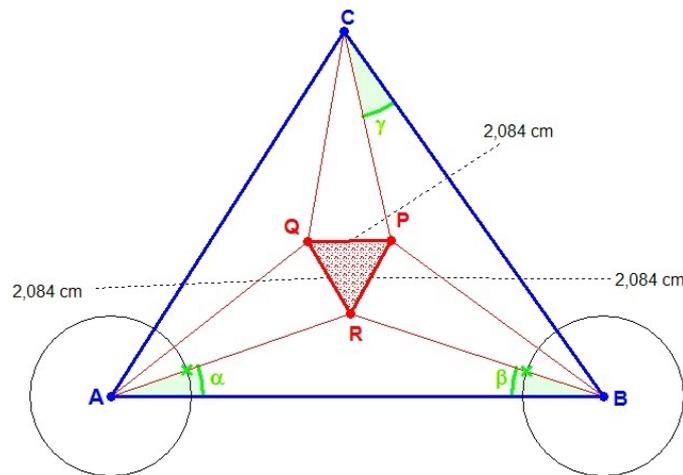


Abbildung 9.12: Satz von Morley

**Lösung:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir die Winkel positiv an. Für die Winkel haben wir

$$\alpha := e^{\frac{2iA}{3}}, \quad \beta := e^{\frac{2iB}{3}}, \quad \gamma := e^{\frac{2iC}{3}}$$

Für  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gilt  $\alpha\beta\gamma = e^{\frac{2iA}{3}} \cdot e^{\frac{2iB}{3}} \cdot e^{\frac{2iC}{3}} = \omega^2 = -\bar{\omega}$

Da das Dreieck  $PCB$  die Winkel  $-\frac{C}{3}$  und  $-\frac{B}{3}$  bei  $C$  und  $B$  besitzt, hat es die Gestalt

$$\lambda := \frac{1 - e^{-2i(\frac{-C}{3})}}{1 - e^{2i(\frac{-B}{3})}} = \frac{1 - \gamma}{1 - \beta^{-1}}$$

Analog erhalten wir für die Gestalt der Dreiecke  $QAC$ ,  $RBA$  und  $ABC$ :

$$\begin{aligned} \mu &:= \frac{1 - e^{-2i(\frac{-A}{3})}}{1 - e^{2i(\frac{-C}{3})}} = \frac{1 - \alpha}{1 - \gamma^{-1}} \\ \nu &:= \frac{1 - e^{-2i(\frac{-B}{3})}}{1 - e^{2i(\frac{-A}{3})}} = \frac{1 - \beta}{1 - \alpha^{-1}} \\ \Delta_{ABC} &:= \frac{1 - e^{-2iB}}{1 - e^{2iC}} = \frac{1 - \beta^{-3}}{1 - \gamma^3} = \frac{1 - \beta^{-1}}{1 - \gamma} \cdot \frac{1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}}{1 + \gamma + \gamma^2} \end{aligned}$$

Wir benützen die Formel *SZF*, formen um und erhalten:

$$\Delta_{PQR} = \frac{\frac{1 - \lambda \Delta_{ABC}}{1 - \lambda} - \frac{1}{1 - \nu^{-1}}}{\frac{1 - \lambda \Delta_{ABC}}{1 - \lambda} - \frac{\Delta_{ABC}}{1 - \mu}}$$

Aus direkter Berechnung erhalten wir für

$$\begin{aligned} \frac{1 - \lambda \Delta_{ABC}}{1 - \lambda} &= \frac{1 - \frac{1 - \gamma}{1 - \beta^{-1}} \cdot \frac{1 - \beta^{-1}}{1 - \gamma} \cdot \frac{1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}}{1 + \gamma + \gamma^2}}{1 - \frac{1 - \gamma}{1 - \beta^{-1}}} = \frac{\gamma + \gamma^2 - \beta^{-1} - \beta^{-2}}{\frac{1 + \gamma + \gamma^2}{1 - \beta^{-1}}} = \\ &= \frac{(1 - \beta^{-1})(\gamma + \gamma^2 - \beta^{-1} - \beta^{-2})}{(\gamma - \beta^{-1})(1 + \gamma + \gamma^2)} = \frac{(1 - \beta^{-1}) \left( \frac{(\beta\gamma + \beta + 1)(\beta\gamma - 1)}{\beta(\beta\gamma - 1)} \right)}{\gamma^2 + \gamma + 1} = \\ &= \frac{(1 - \beta^{-1})(\gamma + 1 + \beta^{-1})}{\gamma^2 + \gamma + 1} \end{aligned}$$

Weiters verwenden wir  $\omega\bar{\omega} = 1$ ,  $\omega + \bar{\omega} = 1$ ,  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\bar{\omega} = -\gamma$  und setzen ein

$$\frac{1}{1 - \nu^{-1}} = \frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{1 - \beta}{\alpha^{-1} - \beta} = \frac{1 - \beta}{\alpha^{-1} - \beta} \cdot \frac{\beta^{-1}\bar{\omega}(\omega + \gamma)}{\beta^{-1}\bar{\omega}(\omega + \gamma)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\beta^{-1}\bar{\omega} + \beta^{-1}\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}\omega - \bar{\omega}\gamma}^{\beta^{-1}\bar{\omega}(\omega + \gamma) - \bar{\omega}(\omega + \gamma)}}{-\bar{\omega}(\omega + \gamma) + \underbrace{\alpha^{-1}\beta^{-1}\bar{\omega}(\omega + \gamma)}_{-\gamma}} = \frac{1 + \bar{\omega}\gamma - \beta^{-1} - \beta^{-1}\bar{\omega}\gamma}{1 + \underbrace{\bar{\omega}\gamma + \omega\gamma}_{\gamma(\bar{\omega} + \omega)} + \gamma^2} = \frac{(1 - \beta^{-1})(1 + \bar{\omega}\gamma)}{1 + \gamma + \gamma^2}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \mu} &= \frac{1 - \gamma^{-1}}{\alpha - \gamma^{-1}} = \frac{1 - \gamma^{-1}}{\alpha - \gamma^{-1}} \cdot \frac{\overbrace{\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta)}^{-\gamma\beta\omega}}{\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta)} = \\ &= \frac{\overbrace{\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta) - \gamma^{-1}\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta)}^{-\gamma\beta\omega - \gamma\beta^2 + \gamma\beta + \beta^2}}{\underbrace{\alpha\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta) - \gamma^{-1}\alpha^{-1}\bar{\omega}(\omega + \beta)}_{1 + \beta(\bar{\omega} + \omega) + \beta^2}} = \frac{-\gamma\beta^{-1}\omega - \gamma + \beta^{-1}\gamma + 1}{1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}} = \frac{(1 - \gamma)(1 + \omega\beta^{-1})}{1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}} \end{aligned}$$

Und wir bekommen weiter  $\frac{\Delta_{ABC}}{1 - \mu} = \frac{(1 - \beta^{-1})(1 + \beta^{-1} + \beta^{-2})}{(1 - \gamma)(1 + \gamma + \gamma^2)} \cdot \frac{(1 - \gamma)(1 + \omega\beta^{-1})}{1 + \beta^{-1} + \beta^{-2}} = \frac{(1 - \beta^{-1})(1 + \omega\beta^{-1})}{1 + \gamma + \gamma^2}$ .

Der Zähler und der Nenner von  $\Delta_{PQR}$  werden dann zu

$$\frac{(1 - \beta^{-1})(\beta^{-1} + \omega\gamma)}{1 + \gamma + \gamma^2} \quad \text{und} \quad \frac{(1 - \beta^{-1})(\bar{\omega}\beta^{-1} + \gamma)}{1 + \gamma + \gamma^2}$$

Woraus dann für  $\Delta_{PQR} = \frac{(1 - \beta^{-1})(\beta^{-1} + \omega\gamma)}{(1 - \beta^{-1})(\bar{\omega}\beta^{-1} + \gamma)} = \frac{\beta^{-1} + \omega\gamma}{\beta^{-1}\omega^{-1} + \gamma} = \frac{\omega(\beta^{-1} + \omega\gamma)}{\beta^{-1} + \omega\gamma} = \omega$  folgt. Damit hätten wir bewiesen, dass das Dreieck  $PQR$  gleichseitig ist.

Laut **Hahn** ist der Satz von Morley auch gültig, wenn wir die inneren "Winkel-Dreiteiler" durch die äußeren "Winkel-Dreiteiler" ersetzen.

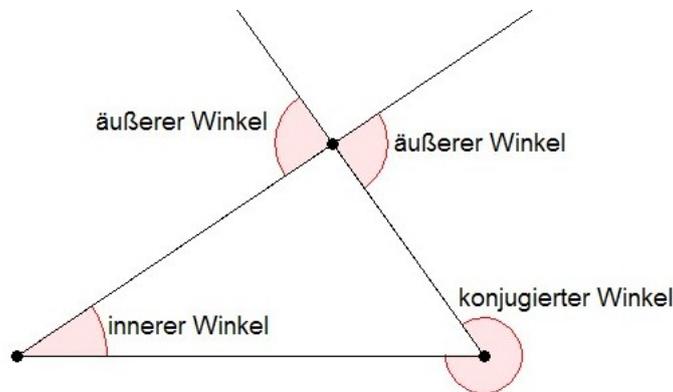


Abbildung 9.13: äußere und innere Winkel

Konstruiert man die äußeren "Winkel-Dreiteiler" und schneidet diese miteinander, so ergeben die Schnittpunkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auch ein gleichseitiges Dreieck.

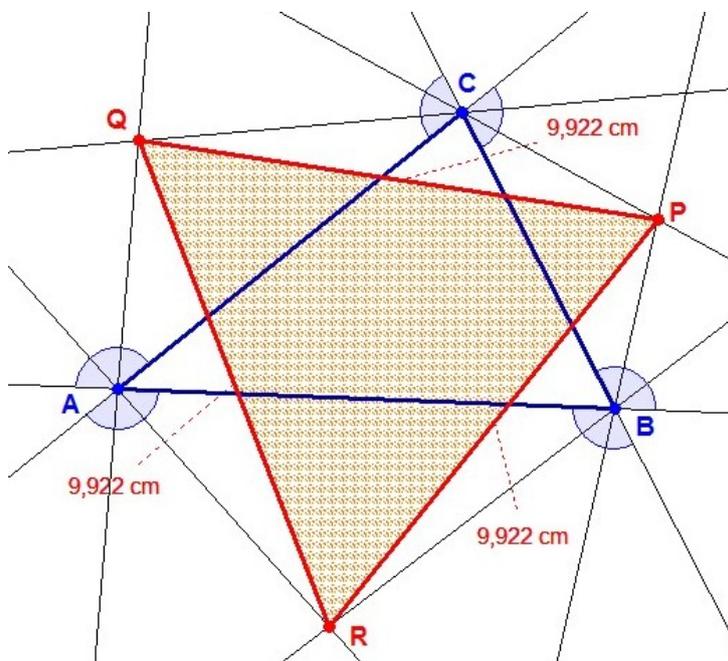


Abbildung 9.14: Satz von Morley, äußere Winkel- Dreiteiler

Der Satz von Napoleon ist ein Spezialfall des folgenden Korollars:

**Korollar SZF-1**

Die Dreiecke  $PCB$ ,  $QAC$  und  $RBA$  haben die Formgrößen  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  und laut *SZF* gilt  $\lambda\mu\nu = 1$ .

**Dann gilt:** Das Dreieck  $PQR$  hat die Formgröße  $\Delta_{pqr} = \mu''\nu'$  und die Miquel Dreiecke von  $A$  bezüglich  $\Delta PQR$  sind gleichsinnig ähnlich zu den Miquel Dreiecken von  $P$  bezüglich  $\Delta ABC$ .

**Lösung:** Es gilt  $\lambda = \frac{1}{\mu\nu}$ . Wir setzen in die Formel von *SZF* ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta_{pqr} &= \frac{\lambda \Delta_{abc} - \left(\frac{1-\lambda\nu}{1-\nu}\right)}{\left(\frac{1-\lambda\mu}{1-\mu} \Delta_{abc} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{\mu\nu} \Delta_{abc} - \left(\frac{1-\mu^{-1}}{1-\nu}\right)}{\left(\frac{1-\nu^{-1}}{1-\mu}\right) \Delta_{abc} - 1} = \frac{\frac{1}{\mu\nu} \Delta_{abc} - \mu''\nu'}{\nu''\mu' \Delta_{abc} - 1} = \\ &= \frac{\mu' \mu'' \nu' \nu'' \Delta_{abc} - \mu''\nu'}{\nu''\mu' \Delta_{abc} - 1} = \frac{\mu''\nu'(\mu'\nu'' \Delta_{abc} - 1)}{\mu'\nu'' \Delta_{abc} - 1} = \\ &= \mu''\nu' \end{aligned}$$

Wir erhalten das Miquel Dreieck von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$ : Laut *SZF* haben die Miquel Dreiecke von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$  die Formgröße  $\overline{\mu'\nu'' \triangle_{pqr} \triangle_{abc}}$ . Nach dem Einsetzen bekommen wir

$$\begin{aligned} \overline{\mu'\mu''\nu'\nu'' \triangle_{abc}} &= \overline{\left(\frac{1}{1-\mu}\right) \left(1-\frac{1}{\nu}\right) \left(1-\frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{1-\nu}\right) \triangle_{abc}} = \overline{\mu^{-1}\nu^{-1} \triangle_{abc}} = \\ &= \overline{\lambda \triangle_{abc}} = \overline{[\infty, p; c, b]} \cdot \overline{[\infty, a; b, c]} = \overline{[p, a; b, c]} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Miquel Dreiecke von  $A$  bezüglich  $\triangle PQR$  laut *MDF* gleichsinnig ähnlich zu den Miquel Dreiecken von  $P$  bezüglich  $\triangle ABC$  sind, da sie dieselbe Formgröße besitzen.

*Bemerkung zum Satz von Napoleon:* Sind  $P$ ,  $Q$  und  $R$  die Zentren von gleichseitigen Dreiecken, die an den Seiten des Dreiecks  $ABC$  errichtet werden, so gilt  $\lambda = \mu = \nu = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \omega^2$ , woraus dann folgt, dass  $\triangle_{pqr} = (\omega^2)'' (\omega^2)' = \omega$  gilt und somit bezeugt ist, dass das Dreieck  $PQR$  gleichseitig ist.

**Beispiel 1**

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . An den Seiten des Dreiecks werden Dreiecke  $PCB$ ,  $QAC$  und  $RBA$  mit den Formgrößen  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  errichtet, die  $\lambda\mu\nu = 1$  erfüllen. Nun spiegeln wir  $P$ ,  $Q$  und  $R$  an den Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  von  $\triangle ABC$ . Daraus folgt, dass  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  vertauscht (konjugiert) werden.

**Dann gilt:** Das resultierende Dreieck hat laut *Korollar SZF-1* die Formgröße  $\overline{\mu''\nu'}$ , d.h. das Dreieck der gespiegelten Punkte ist gegenseitig ähnlich zum Ausgangsdreieck  $ABC$ .

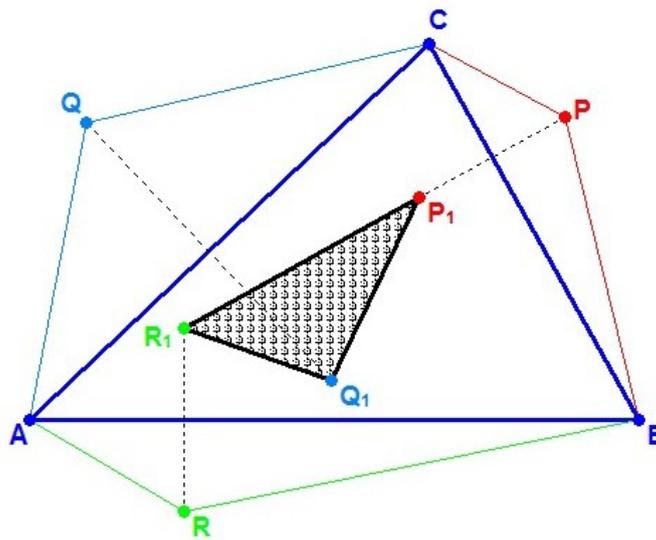


Abbildung 9.15: Beispiel 1

**Lösung:** Eine Alternative ist, dass man  $P$ ,  $Q$  und  $R$  an den Mittelpunkten der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  von  $\triangle ABC$  spiegelt.

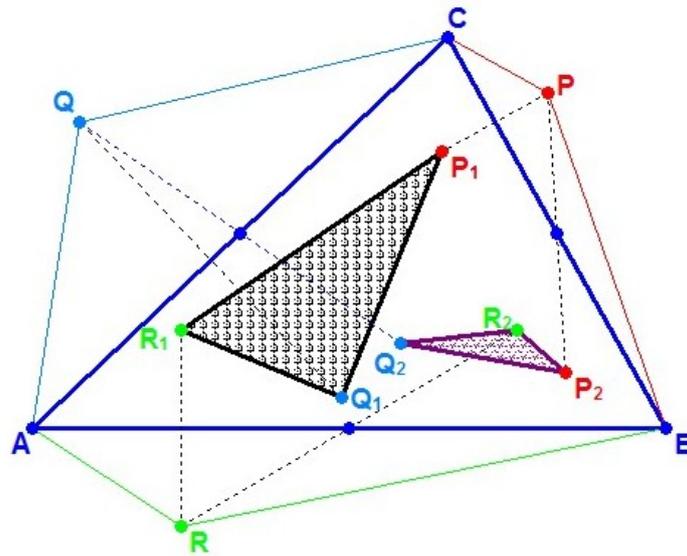


Abbildung 9.16: Lösung

Daraus erhalten wir, dass  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  bei den Kehrwerte vertauscht werden und laut *Korollar SZF-1* hat das resultierende Dreieck dann die Formgröße  $(\mu^{-1})'' (\nu^{-1})' = (\mu')^{-1} (\nu'')^{-1} = (\mu' \nu'')^{-1}$ .

**Beispiel 2**

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Wir errichten an den Seiten  $BC, CA$  und  $AB$  Dreiecke  $PCB, QAC$  und  $RBA$  mit den Formgrößen  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  für die  $\lambda\mu\nu = 1$  gilt. Keiner der Punkte  $P, Q$  und  $R$  soll der Umkreismittelpunkt von  $\triangle ABC$  sein. Nun invertieren wir die Punkte  $P, Q$  und  $R$  am Umkreis von  $\triangle ABC$  und erhalten die Punkte  $P_{inv}, Q_{inv}$  und  $R_{inv}$ .

**Dann gilt:** Das resultierende Dreieck  $P_{inv}Q_{inv}R_{inv}$  hat die Formgröße  $\Delta_{P_{inv}Q_{inv}R_{inv}} = \overline{(\mu e^{2i\beta})'' (\nu e^{2i\gamma})'}$ .

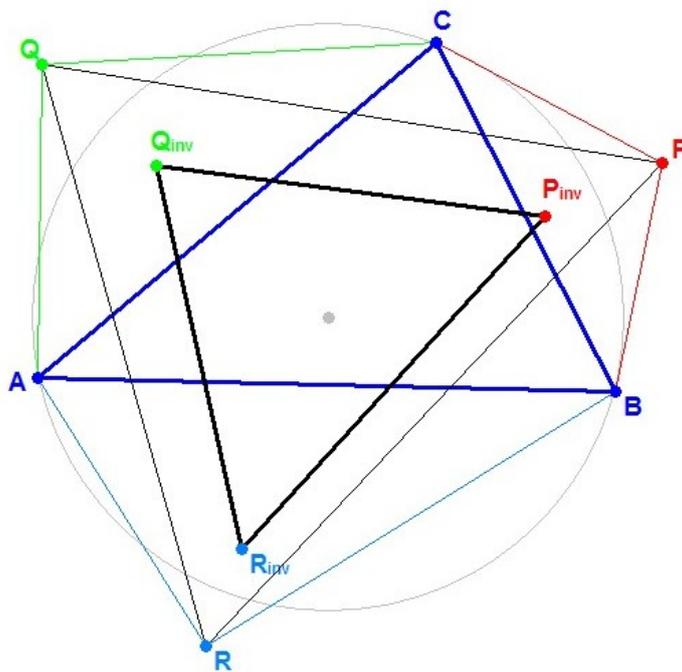


Abbildung 9.17: Beispiel 2

**Lösung:** Die Inversion hält die Punkte  $A, B, C$  und das konjugierte Doppelverhältnis fest, so ist  $\lambda_{inv} = [\infty, p_{inv}; c, b]$ . Wir haben nun  $\lambda_{inv}\Delta_{abc} = [p_{inv}, a; b, c] = \overline{[p, a; b, c]} = \overline{\lambda\Delta_{abc}}$ , woraus wir dann  $\lambda_{inv} = \frac{\overline{\lambda\Delta_{abc}}}{\Delta_{abc}} = \overline{\lambda}e^{-2i\alpha}$  erhalten.

Analog erhalten wir  $\mu_{inv} = \overline{\mu}e^{-2i\beta}$  und  $\nu_{inv} = \overline{\nu}e^{-2i\gamma}$ , somit gilt  $\lambda_{inv}\mu_{inv}\nu_{inv} = 1$  und das resultierende Dreieck hat die Formgröße

$$\Delta_{P_{inv}Q_{inv}R_{inv}} = \mu_{inv}''\nu_{inv}' = (\overline{\mu}e^{-2i\beta})'' (\overline{\nu}e^{-2i\gamma})' = \overline{(\mu e^{2i\beta})'' (\nu e^{2i\gamma})'}$$

**Spezialfall:** Wir nehmen an, dass das Dreieck  $ABC$  kein rechtwinkeliges Dreieck ist (der Umkreismittelpunkt  $U$  liegt auf keiner Seite) und lassen  $P, Q$  und  $R$  die Umkreismittelpunkte der Dreiecke  $UBC, UCA$  und  $UAB$  sein. Wir invertieren die Punkte  $P, Q$  und  $R$  wieder am Um-

kreis und erhalten die Punkte  $P_{inv}$ ,  $Q_{inv}$  und  $R_{inv}$ .

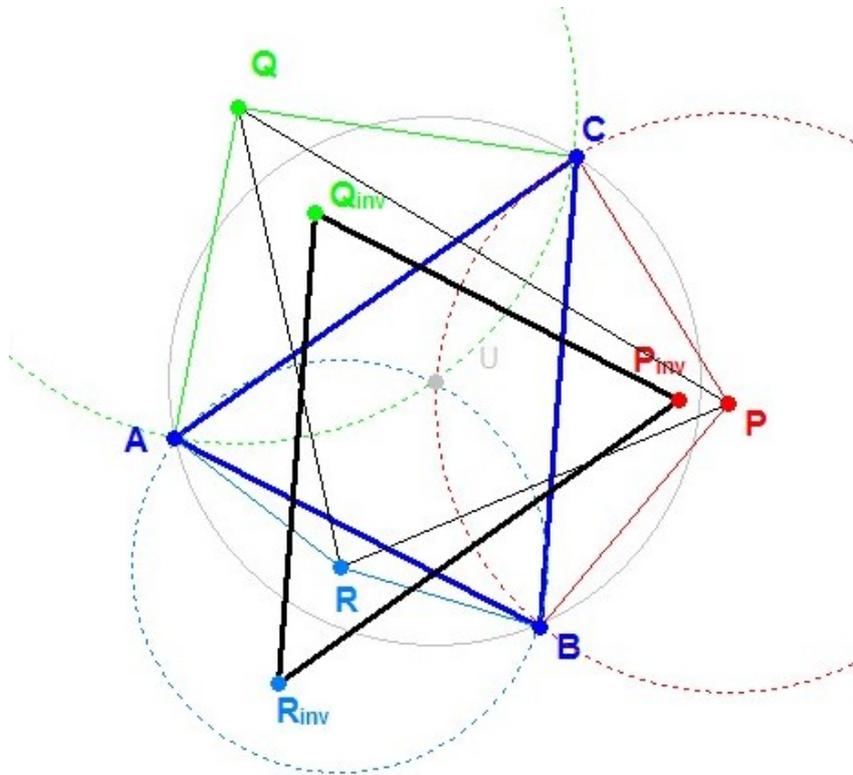


Abbildung 9.18: Beispiel 2 Spezialfall

**Lösung:** Nun wissen wir, dass die Inversion am Umkreis von  $\triangle ABC$   $U$  und  $\infty$  vertauscht, so dass  $[u, a; b, c] = [\infty, a; b, c] = \overline{\Delta_{abc}}$  und woraus dann  $\Delta_{abc} = \frac{[u, a; b, c]}{\Delta_{abc}} = \frac{\overline{\Delta_{abc}}}{\Delta_{abc}} = e^{-2i\alpha}$  folgt. Da  $P$  der Umkreismittelpunkt von  $\triangle UBC$  ist, erhalten wir  $\Delta_{pbc} = \frac{\Delta_{abc}}{\Delta_{abc}}$  und bekommen  $\lambda = (\Delta_{pbc})^{-1} = \frac{e^{-2i\alpha}}{e^{-2i\alpha}} = e^{-4i\alpha}$ .

Analog erhalten wir  $\mu = e^{-4i\beta}$  und  $\nu = e^{-4i\gamma}$ , die  $\lambda\mu\nu = 1$  erfüllen. Laut obiger Diskussion und der BFW wird das Dreieck durch die Inversion von  $P$ ,  $Q$  und  $R$  am Umkreis von  $\triangle ABC$  konstruiert und hat die Formgröße

$$\Delta_{p_{inv}q_{inv}r_{inv}} = \overline{(e^{-2i\beta})'' (e^{-2i\gamma})'} = (e^{-2i\beta})'' (e^{-2i\gamma})' = \Delta_{abc}$$

Somit ist gezeigt, dass das Dreieck gleichsinnig ähnlich ist zu  $\triangle ABC$ .

**Verallgemeinerung des Satzes von Thebault:**

Der Satz von Thebault sagt aus, dass die Zentren, von nach außen gerichteten Vierecken errichtet an den Seiten eines Parallelogramms ein Viereck bilden. Wir verallgemeinern diesen Satz in der Art ähnlich wie die Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon in Beispiel 2 aus dem Kapitel "Allgemeines".

Gegeben ist ein fixes Parallelogramm  $JKMN$  und ein Punkt  $E$ . An den Seiten eines Parallelogramms  $ABCD$  werden Parallelogramme  $ABC_1D_1$ ,  $A_2BCD_2$ ,  $A_3B_3CD$  und  $AB_4C_4D$  alle gleichsinnig ähnlich zu Parallelogramm  $JKMN$ , und Punkte  $R$ ,  $S$ ,  $R$  und  $U$  in derselben Position wie  $E$  zu  $JKMN$  konstruiert.

**Dann gilt:** Das "Mittenparallelogramm" des Vierecks  $RPST$  ist gleichsinnig ähnlich zum Parallelogramm  $JKMN$ .

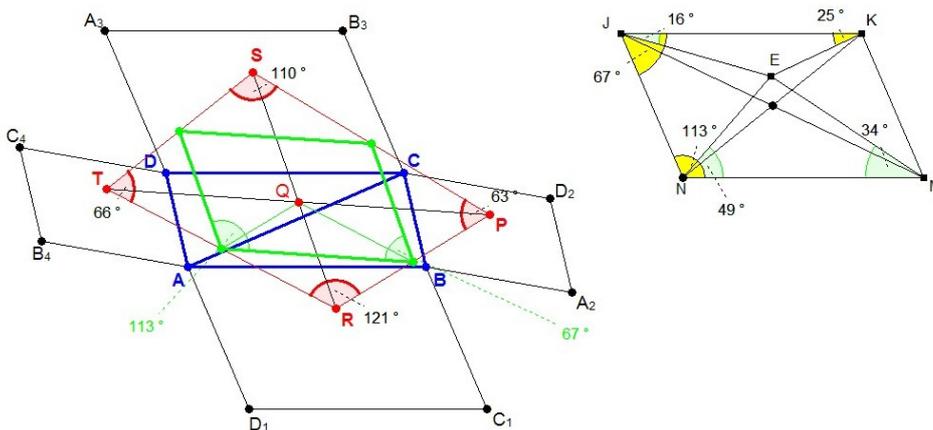


Abbildung 9.19: Satz von Thebault

**Lösung:** Die Seiten des "Mitten- Parallelogramms" vom Viereck  $RPST$  sind parallel zu den Diagonalen von  $RPST$  und haben die halbe Länge. Die Essenz des Beweises besteht darin, dass zu zeigen ist, dass sich die Diagonalen im korrekten Winkel schneiden und dass die Längen im bestimmten Verhältnis sind.

Die Parallelogramme gegenüberliegender Seiten des Vierecks  $ABCD$  gehen aus Translationen auseinander hervor, Abschnitte zugehöriger Punkte (z.B. Diagonalen von  $RPST$ ) sind jeweils parallel und gleich zu den Abschnitten verbundener Zentren. Es ist hinreichend den Fall, dass  $E$  das Zentrum von  $JKMN$  zu zeigen.

In diesem Fall zeigt die Symmetrie, dass das Viereck  $RPST$  ein Parallelogramm ist mit demselben Zentrum  $Q$  wie das Parallelogramm  $ABCD$ . Sein "Mitten- Parallelogramm" hat Seiten

parallel und gleich zu  $QP$  und  $QR$ , darum müssen wir nur zeigen, dass  $\triangle PQR$  gleichsinnig ähnlich ist zu  $\triangle KJN$ .

Wir definieren die Formgrößen der Dreiecke  $PCB$  und  $RBA$  mit  $\lambda := [\infty, p; c, b] = [\infty, e; j, n]$  und  $\nu := [\infty, r; b, a] = [\infty, e; k, j]$  und (wenn  $Q$  und  $E$  die Mittelpunkte von  $AC$  und  $NK$  sind) für die Dreiecke  $QAC$  und die Formgröße  $\mu := [\infty, q; a, c] = -1 = [\infty, e; n, k]$ . Dadurch ist  $\lambda\mu\nu = 1$  erfüllt.

Laut *Korollar SZF-1* hat  $\triangle PQR$  die Formgröße  $\Delta_{pqr} = \mu''\nu'$ . Nun setzen wir also ein und erhalten

$$\mu'' = [\infty, e; n, k]'' = [\infty, k; e, n]$$

$$\nu' = [\infty, e; k, j]' = [\infty, k; j, e]$$

$$\Delta_{pqr} = \mu''\nu' = [\infty, k; e, n] \cdot [\infty, k; j, e] = \frac{k-n}{k-e} \cdot \frac{k-e}{k-j} = \frac{k-n}{k-j} = [\infty, k; j, n] = \Delta_{kjn}$$

Daraus folgt nun, dass das Dreieck  $PQR$  gleichsinnig ähnlich zu  $\triangle KJN$  ist.

# Literaturverzeichnis

- [1] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Anwendung der Komplexen Zahlen zur Lösung planimetrischer Aufgaben", Staatsuniversität Kaliningrad, Königsberg 1997
- [2] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Methode der komplexen Zahlen in der Planimetrie", Unterrichtsmittel, Kaliningrad-Königsberg, 1996
- [3] Clark KIMBERLING: "Triangle centers and central Triangles", Congressus Numeratum 129, Winnipeg-Canada, 1998
- [4] Liang-shin HAHN: "Complex Numbers and Geometry", The Mathematical Association of America, 1994
- [5] I.M.YAGOLOM: "Complex Numbers in Geometry", Academic Press New York and London, 1968
- [6] Hans SCHWERTFEGER: "Geometry of Complex Numbers", Dover Publications, INC. New York, 1979
- [7] J.A. LESTER: "A Generalization of Napoleon's Theorem to Polygons", University of New Brunswick, 1994
- [8] J.A. LESTER: "Triangles I: Shapes", University of New Brunswick, 1996
- [9] J.A. LESTER: "Triangles II: Complex Triangle Coordinates", University of New Brunswick, 1996
- [10] J.A. LESTER: "Triangles III: Complex Triangle Functions", University of New Brunswick, 1997
- [11] Oswald GIERING: "Zur Theorie der Aufsatzdreiecke", TU München, Zentrum Mathematik, IBDG 1, 2007
- [12] Pavel PECH: "The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleons Theorem", J. Geometry and Graphics Vol.5, 2001

- [13] K. PETR: "Ein Satz über Vielecke", Arch. Math. Phys., Band 13, 1908
- [14] Hellmuth STACHEL: "Napoleons Theorem and Generalizations Through Linear Maps", Contr. Algebra and Geometry Vol. 43, 2002
- [15] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Isogonale Konjugation in der Ebene", 1997
- [16] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Darstellung ebener affiner Transformationen durch komplexe Zahlen", 1997
- [17] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Über eine planimetrische Aufgabe", Kalinigrad- Königsberg, 1996
- [18] Nikolaj MALACHOWSKIJ: "Affine Transformationen der Ebene", 1997
- [19] Horst MARTINI: "On the theorem of Napoleon and related topics", Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Mathematische Fakultät Chemnitz, 1995

### **verwendete Internetadressen**

- [20] [http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/02\\_\\_Mathematik\\_\\_alles\\_\\_was\\_\\_z\\_C3\\_A4hlt/05\\_\\_Napoleon\\_\\_KW25.html](http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/02__Mathematik__alles__was__z_C3_A4hlt/05__Napoleon__KW25.html)
- [21] <http://www.dieherkunftdermathematik.de/Napoleon.html>
- [22] [http://de.wikipedia.org/wiki/Napoleon\\_Bonaparte](http://de.wikipedia.org/wiki/Napoleon_Bonaparte)
- [23] <http://de.wikipedia.org/wiki/Napoleon-Dreieck>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	komplexe Ebene . . . . .	7
2.2	komplexe Ebene mit Polarkoordinaten . . . . .	8
2.3	konjugiert Komplexe Zahl . . . . .	9
2.4	Eulersche Formel . . . . .	10
2.5	Winkel zwischen zwei Vektoren . . . . .	15
2.6	Inkreis- und Ankreismittelpunkte . . . . .	18
2.7	Konstruktion der Inversion . . . . .	22
2.8	Gerade nach Inversion . . . . .	23
2.9	Satz 3: zusammengesetzte Drehungen . . . . .	25
2.10	Punktspiegelung . . . . .	27
2.11	Achsen Spiegelung . . . . .	27
3.1	Satz von Napoleon . . . . .	29
3.2	Beispiel 1 . . . . .	33
3.3	Beispiel 2 . . . . .	34
3.4	Beispiel 3 . . . . .	35
3.5	Beispiel 4 . . . . .	36
3.6	Beispiel 5 . . . . .	37
3.7	Beispiel 6 . . . . .	38
3.8	Beispiel 7 . . . . .	40
3.9	Beispiel 8 . . . . .	41
4.1	Satz von Monge . . . . .	43
4.2	Satz von Miquel . . . . .	45
4.3	Peripheriewinkelsatz . . . . .	45
4.4	Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes . . . . .	46
4.5	Skizze zum Beweis des Satzes von Miquel . . . . .	47
4.6	Satz von Carnot . . . . .	48
4.7	Beispiel 1 . . . . .	50

4.8	Beispiel 2	51
4.9	Beispiel 3	52
5.1	Cosinussatz für Vierecke	55
5.2	Satz von Brettschneider	56
5.3	Satz von Brettschneider, überschlagenes Viereck	56
5.4	Beispiel 1	57
5.5	Beispiel 2	58
5.6	Beispiel 3	59
5.7	Beispiel 4	60
5.8	Beispiel 5	61
5.9	Beispiel 6	62
5.10	Beispiel 7	63
5.11	Beispiel 8	64
5.12	Beispiel 9	65
5.13	Beispiel 10	66
5.14	Beispiel 11	68
5.15	Beispiel 12	69
6.1	Satz von Gauss	72
6.2	Satz von Gauss Sonderfall	73
6.3	Satz von Poncelet	74
6.4	Satz von Ptolemäus	75
6.5	Satz von Droz-Farny	77
6.6	Beispiel 1	79
6.7	Beispiel 2	80
7.1	Satz von Aubel	82
7.2	Beispiel 1	83
7.3	Beispiel 2	84
7.4	Beispiel 3	85
7.5	Beispiel 3, Beweis	86
7.6	Beispiel 4	87
7.7	Beispiel 5	88
8.1	Lemma 1.1	94
8.2	Lemma 1.1	95
9.1	Beispiel 1	98

9.2	Beispiel 2 . . . . .	99
9.3	Miquel allgemein . . . . .	101
9.4	Miquel Dreieck . . . . .	102
9.5	zwei Möglichkeiten der Brocard Punkte . . . . .	104
9.6	isodynamische Punkte . . . . .	105
9.7	Beispiel 1 . . . . .	106
9.8	Satz der ersten Formgröße . . . . .	108
9.9	Korollar FST-1 . . . . .	110
9.10	. . . . .	112
9.11	Satz der zweiten Formgröße . . . . .	114
9.12	Satz von Morley . . . . .	116
9.13	äußere und innere Winkel . . . . .	118
9.14	Satz von Morley, äußere Winkel- Dreiteiler . . . . .	119
9.15	Beispiel 1 . . . . .	121
9.16	Lösung . . . . .	122
9.17	Beispiel 2 . . . . .	123
9.18	Beispiel 2 Spezialfall . . . . .	124
9.19	Satz von Thebault . . . . .	125