Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Magnetisierungsmessungen mit einem supraleitenden Quanteninterferometer (SQUID)

ausgeführt am Institut für Festkörperphysik
unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing Dr.techn. Gerfried Hilscher

eingereicht von:

Hannes Schmid

Thermensiedlung 22
7132 Frauenkirchen

Matr. Nr. 0326274

Frauenkirchen,
am 26. April 2010 Hannes Schmid

Inhaltsverzeichnis

I EINFÜHRUNG **3**

II GRUNDLAGEN DER SUPRALEITUNG **5**

1 Einführende Überlegungen zur Supraleitung **7**

1.1 Kritische Temperatur und Kritisches Feld 7

1.2 Meißner-Ochsenfeld Effekt (MO-Effekt) 11

2 Thermodynamische Überlegungen zur Supraleitung **15**

2.1 Thermodynamik des supraleitenden Zustandes 15

2.2 Londongleichungen 18

3 Flussquantisierung **23**

3.1 Einführung in die Flussquantisierung 23

3.2 Flussquantisierung in einem mehrfach zusammenhängenden Supraleiter . 25

3.3 Flussbilanz eines supraleitenden Ringes im externen Feld 28

4 Typen von Supraleitern **32**

5 BCS Theorie - eine mikroskopische Theorie **37**

5.1 Einführung in die BCS Theorie 37

5.2 Cooper-Paare 39

6 Der Josephson-Effekt **40**

III VERSUCH: LEVITATION UND FLUSSLINIENVERANKERUNG **44**

IV DAS SQUID **48**

V MR. SQUID **55**

7 Beschreibung der Kontrolleinheit **56**
7.1 Anschlüsse und Einstellungsmöglichkeiten: 56

8 Vorbereitungen für die Inbetriebnahme **59**

9 Grundlegende Betriebsarten **61**
9.1 Die $V - I$ Betriebsart: der Spannungs-Strom-Verlauf 61
9.2 Die $V - \Phi$ Betriebsart: der Spannungs-Fluss-Verlauf 65

10 Bemerkungen zum Versuch **68**

VI SQUID MAGNETOMETER **69**

11 Konventionelle Magnetometer **69**

12 Pickup-Spulen und Flusstransformator **70**

13 Cryogenics Magnetometer S603 **72**
13.1 Temperaturkontrolle 73
13.2 Feldspulen und Energieversorgung (Power Supplies) 73
13.3 Magnetisierungs- und Suszeptibilitätsmessungen von Mo_3Al_2C 74

VII ZUSAMMENFASSUNG **79**

VIII LITERATURVERZEICHNIS **80**

Teil I

EINFÜHRUNG

Ziel dieser Arbeit ist es, Magnetisierungmessungen mit Hilfe von SQUIDs zu untersuchen. SQUID stammt aus dem Englischen und heißt Superconducting Quantum Interferometer Device - zu Deutsch ein supraleitender Quanteninterferenzdetektor. SQUIDs sind Messinstrumente mit denen man sehr schwache Magnetfelder beziehungsweise ganz geringe Änderungen magnetischer Eigenschaften von Stoffen und Verbindungen nachweisen kann. Genutzt werden dabei die Reaktionen, die schwache Magnetfelder auf die sogenannten Josephson-Kontakte ausüben. Hierbei handelt es sich um sehr kleine magnetische Änderungen des magnetischen Flusses beziehungsweise Magnetfelder, die sich unserem Vorstellungsvermögen völlig entziehen, weil sie rund ein millionstel mal kleiner sind als das Erdmagnetfeld.

Verwendet werden SQUIDs in der Messtechnik als hochempfindliche Flusssensoren. Alle wesentlichen Komponenten, zum Beispiel der Flussdetektor, mit dem Bruchteile von Flussquanten gemessen werden, bestehen dabei aus supraleitenden Verbindungen, die mithilfe der Dünnschichttechnik produziert werden. Seit die Supraleitung 1911 von H. Kamerlingh Onnes in Leiden [1] entdeckt wurde, hat sich ein wesentlicher Fortschritt sowohl beim tieferen Verständnis der Supraleitung, als auch deren Anwendung ergeben. Der Fortschritt ist vor allem in der Forschung und Industrie nicht mehr wegzudenken.

Die technische Anwendung von SQUIDs findet man einerseits in der Geologie zur Messung der Magnetisierung von Gesteinsproben und bei der Erkundung der Bodenbeschaffenheit, andererseits werden sie auch in der Medizin zur Abbildung biomagnetischer Signale von Gehirn- und Herzströmen eingesetzt.

Da SQUIDs die Fähigkeit haben, ganz geringe Magnetfeldschwankungen zu registrieren, bedeutet das, sie sind besonders dafür geeignet, Strömungsgeschwindigkeiten in Venen und Aterien zu messen. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber anderen Methoden ist es, dass Messsonden oder Kanülen nicht in den Körper eingeführt werden müssen, sondern es reichen supraleitende Defaktorspulen aus, die an die zu untersuchenden Körperstellen gelegt werden. Dazu ist es jedoch erforderlich alle äußeren Magnetfeldeinflüsse bei diesen Untersuchungen völlig auszuschließen, was in der heutigen Zeit mit entsprechendem Aufwand erreicht werden kann.

Eine weitere wichtige Anwendung ist das Gebiet der zerstörungsfreien Werkstoff-

prüfung. Im Speziellen werden Flugzeugteile und Brücken auf nicht sichtbare Schäden überprüft. SQUIDs werden somit zur Messung von sehr kleinen magnetischen Flussdichten als Magnetometer verwendet.

Neben den wissenschaftlichen Anwendungen werden SQUIDs auch in militärischen Bereichen verwendet. Zum Beispiel für die Ortung von tieftauchenden U-Booten beziehungsweise bei der Überwachung der Erdmagnetfeldveränderungen aus dem erdnahen Raum. SQUID Sensoren können so konstruiert werden, dass sie die gebräuchlichen Sonar-Geräte an Empfindlichkeit weit übertreffen.

Die nachfolgende Arbeit ist so aufgebaut, dass im zweiten Abschnitt eine Einführung in die Supraleitung gegeben wird. Dabei sollen wichtige Grundlagen für die Arbeit mit SQUIDs, wie zum Beispiel der Meißner-Ochsenfeld Effekt, die Londongleichungen, die Flussquantisierung, die BCS Theorie und der Josephson Effekt dargestellt werden. Im dritten Abschnitt der Arbeit werden Versuche angeführt, die das Phänomen Supraleitung näher beleuchten.

Die Abschnitte vier bis sechs beschäftigen sich mit SQUIDs, Mr. SQUID, SQUID Magnetometern und den dazugehörigen Versuchen. Der Abschnitt sieben fasst die wichtigsten Punkte der Arbeit nochmals zusammen und soll einen Gesamtüberblick zum Thema Magnetisierungsmessungen mit SQUIDs liefern.

Zum Gelingen der vorliegenden Arbeit haben viele Menschen beigetragen. Einigen von Ihnen gebühren besondere Dankesworte.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gerfried Hilscher für die tatkräftige Unterstützung bei der Erstellung meiner Diplomarbeit. Vielen Dank für Ihre hilfreichen Anregungen und die Geduld.

Besonders möchte ich mich auch bei meiner Frau Elisabeth für die unermüdliche Unterstützung und die aufmunternden Worte danken.

Zudem möchte ich meinen Eltern danken, die mich nicht nur finanziell, sondern auch moralisch immer unterstützt und mir den Rücken gestärkt haben.

Teil II

GRUNDLAGEN DER SUPRALEITUNG

Die Supraleitung ist ein physikalischer Effekt: Elektrischer Strom kann ohne Verluste fließen, wenn ganz bestimmte, fest umrissene Bedingungen eingehalten werden [2].

Diese Aussage ist widersprüchlich zu unseren Alltagserfahrungen, wo wir den Energieverlust bei Stromtransport als unvermeidbar erleben.

Um es vorweg zu nehmen, ganz ohne Verluste ist der Stromfluss auch bei Supraleitern nicht, es sind jedoch Verluste, die nötig sind, um den supraleitenden Zustand des Materials zu erreichen und zu erhalten. Der verlustfreie Stromtransport ist nur bei tiefen Temperaturen (unterhalb einer kritischen Temperatur T_c) möglich.

In einem SQUID-Magnetometer sind alle wesentlichen Bestandteile aus supraleitenden Verbindungen. Ein Hauptbestandteil ist dabei der supraleitende Ring mit zwei Tunnelkontakten, den so genannten *weak links* (Kapitel II.5). Der supraleitende Zustand wird dabei durch zwei wesentliche Eigenschaften charakterisiert: Einerseits handelt es sich beim supraleitenden Ring um einen Hochtemperatursupraleiter, der aus einer Verbindung von Yttrium, Barium, Kupfer und Sauerstoff ($YBa_2Cu_3O_7$) besteht. Entscheidend ist, dass die Verbindung eine kritische Temperatur von $90K$ besitzt und somit in flüssigem Stickstoff supraleitend wird. Dabei verschwindet der elektrische Widerstand unterhalb der kritischen Temperatur (ideale Leitfähigkeit). Die zweite wesentliche Eigenschaft des supraleitenden Zustandes ist ideales diamagnetisches Verhalten, welches bis zu einem temperaturabhängigen kritischen Magnetfeld stabil bleibt.

Mit diesen beiden Eigenschaften, ideale Leitfähigkeit und ideales diamagnetisches Verhalten, kann der supraleitende Zustand thermodynamisch als Phase behandelt werden (Kapitel II.1), was Meißner und Ochsenfeld experimentell bewiesen.

Bardeen, Cooper und Schrieffer gelang es die erste mikroskopische Theorie der Supraleitung zu entwickeln (Kapitel II.4). Ihrer Theorie nach kondensieren beim Übergang von Normalleitung zur Supraleitung Elektronen zu Cooper-Paaren, die aus Elektronen entgegengesetzten Spins bestehen und deren Impulse zwar gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet sind. Gemeinsam bilden die Paare einen makroskopischen Quantenzustand, mit ein und derselben Wellenfunktion.

Durch den Austausch von virtuellen Phononen erfolgt die Kopplung der Elektronen. Ein Paar bildet aufgrund des verschwindenden Gesamtimpulses einen stationären Zustand. Folglich sind die Cooper-Paare die Träger der idealen Leitfähigkeit. Die Kondensation der Paare ist möglich, weil es sich im weitesten Sinn um Bosonen handelt (die nicht dem Pauli-Verbot gehorchen müssen), die ein und denselben Zustand, nämlich den Grundzustand, einnehmen können.

1 Einführende Überlegungen zur Supraleitung

1.1 Kritische Temperatur und Kritisches Feld

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Quecksilber in einem Temperaturbereich des flüssigen Heliums entdeckte der niederländische Physiker H. Kamerlingh Onnes 1911 das sprunghafte Abfallen des Widerstandes unterhalb einer kritischen Temperatur T_c von $415K$ auf unmessbar kleine Werte. Für diese Entdeckung erhielt er bereits zwei Jahre später den Nobelpreis für Physik [2],[3].

In den darauffolgenden Jahren wurde die „Supraleitung“, wie dieser Zustand von Kamerlingh Onnes bezeichnet wurde, in vielen Legierungen, Verbindungen und metallischen Elementen entdeckt, wobei 26 Elemente des Periodensystems bei Normaldruck supraleitend sind. Obwohl viele Supraleiter entdeckt wurden, lagen die Werte für die kritische Temperatur T_c (auch als „Sprungtemperatur“ bekannt) immer im Bereich von $Millikelvin$ bis maximal $23K$.

Erst 75 Jahre nach der Entdeckung der Supraleitung gelang es J.B. Bednorz und K.A. Müller mithilfe von Metalloxiden supraleitende Verbindungen herzustellen, die eine kritische Temperatur von über $134K$ aufweisen und als „Hochtemperatursupraleiter“ bezeichnet werden. Wie schon Kamerlingh Onnes zuvor, erhielten auch Bednorz und Müller für ihre Entdeckung den Nodelpreis für Physik.

Das Phänomen Supraleitung tritt dabei nicht nur bei Unterschreiten von T_c auf, sondern ist auch abhängig von einem kritischen Magnetfeld $\overrightarrow{B}_c$, sowie einer kritischen Stromdichte $\overrightarrow{j}_c$. Aufgrund des Zusammenhangs der drei physikalischen Größen T_c, $\overrightarrow{B}_c$ und $\overrightarrow{j}_c$, kann man eine räumliche Fläche, welche den Existenzbereich der Supraleitung darstellt, aufziehen. In der Abbildung 1 ist der Existenzbereich der Supraleitung in Abhängigkeit der drei erwähnten Größen dargestellt. Darin ist erkennbar, dass schon beim Überschreiten eines einzigen Grenzwertes einer Größe die Supraleitung zusammenbricht. Bei einer vorgegebenen Temperatur T, sowie einem Magnetfeld $\overrightarrow{B}$, kann die Stromdichte $\overrightarrow{j}$, um im supraleitenden Bereich zu bleiben, nur jene Werte annehmen, die in der Abbildung durch den dicken Balken markiert werden.

Zum Nachweis, dass der spezifische Widerstand eines Supraleiters verschwindet, wird die Abklingzeit von Dauerströmen in einem supraleitenden Ring gemessen. Die Abklingzeit des Dauerstroms kann anhand des nachfolgenden Experiments gemessen werden:

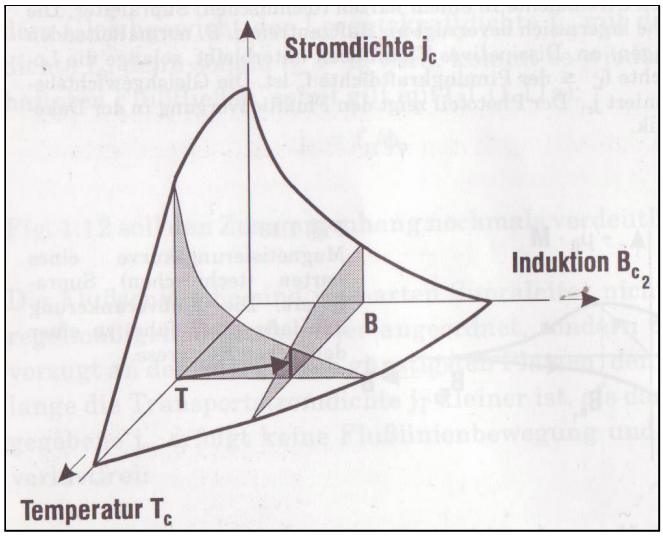

Abbildung 1: Kritische Fläche eines Supraleiters in Abhängigkeit von T_c, $\overrightarrow{B}_c$ und $\overrightarrow{j}_c$ [4].

Vorrausgesetzt wird ein Ring aus supraleitendem Material, der eine Temperatur $T > T_c$ hat. Um einen Dauerstrom in diesem Ring zu induzieren, wird zuerst ein Permanentmagnet (zum Beispiel mittels eines Stabmagneten) durch den Ring geleitet, sodass der supraleitende Ring einem magnetischen Feld ausgesetzt ist. Anschließend kühlt man den Ring unter seine Sprungtemperatur T_c ab. Entfernt man den Permanentmagneten, entsteht im supraleitenden Ring ein Dauerstrom, dessen Abklingzeit nun gemessen werden kann. In der nachfolgenden Abbildung 2 ist das Experiment schematisch dargestellt.

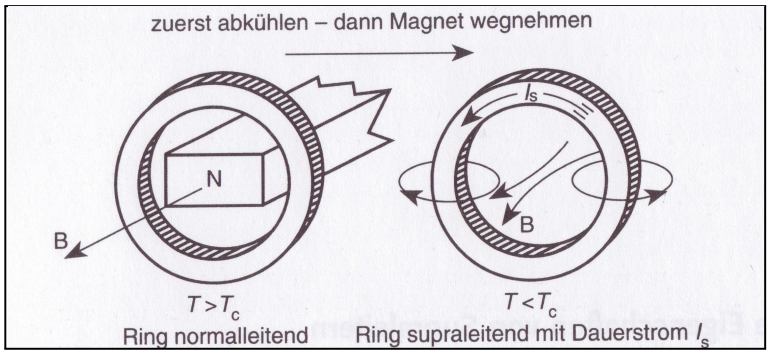

Abbildung 2: Erzeugung eines Dauerstroms in einem supraleitenden Bleiring mithilfe eines Permanentmagneten [5].

Das Abfallen des spezifischen Widerstandes wird auch durch ein Exponentialgesetz beschrieben:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{\frac{-Rt}{L}} \tag{1}$$

Dabei ist I_0 der Abschirmstrom zur Zeit $t = 0$, R der Widerstand und L der Selbstinduktionskoeffizient des supraleitenden Ringes. Aus der gemessenen Abklingzeit geht hervor, dass sich der Widerstand im supraleitenden Ring um 14 Größenordnungen vermindert hat. Da der Widerstandsunterschied zwischen einem Metall im supraleitenden und im normalleitenden Zustand mindestens so groß wie zwischen Kupfer und gebräuchlichen Isolatoren ist [5, S. 15] wird folglich der spezifische Widerstand unterhalb einer kritischen Temperatur Null gesetzt $(\rho = 0)$.

Die kritische Temperatur T_c ist materialabhängig und für verschiedene Elemente und Verbindungen in der Tabelle 1 angegeben [1].

Tabelle 1: Kritische Temperaturen supraleitender Materialien.

Element	$T_c[K]$	Element	$T_c[K]$	Element	$T_c[K]$
Al	$1,19$	Nb	$9,2$	Tc	$7,8$
Be	$0,026$	Np	$0,075$	Th	$1,37$
Cd	$0,55$	Os	$0,65$	Ti	$0,39$
Ga	$1,09$	Pa	$1,3$	Tl	$2,39$
Hf	$0,13$	Pb	$7,2$	U	$0,2$
Hg	$4,15$	Re	$1,7$	V	$5,3$
In	$3,40$	Rh	$0,0003$	W	$0,012$
Ir	$0,14$	Ru	$0,5$	Zn	$0,9$
La	$4,8$	Sn	$3,75$	Zr	$0,55$
Mo	$0,92$	Ta	$4,39$		
Verbindung	$T_c[K]$	Verbindung	$T_c[K]$	Verbindung	$T_c[K]$
$BaBi_3$	$5,69$	Nb_3Ge	$23,2$	UPt_3	$0,54$
$NbSn_2$	$2,6$	V_3Ge	$6,0$	$La_{1,8}Sr_{0,8}CuO_4$	$36,2$
Nb_3Sn	$18,0$	V_3Si	$17,1$	$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Au	$11,3$	MoC	$14,3$	$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$	134

Die Sprungtemperatur wird sowohl durch ein Magnetfeld, als auch durch einen Transportstrom zu tieferen Temperaturen verschoben, was zusätzlich in der Abbildung 1 zu erkennen ist. In der Abbildung 3 wird aus der dreidimensionalen Abbildung 1 die Dimension $\overrightarrow{j}_c$ entfernt und der Zusammenhang zwischen T_c und $\overrightarrow{B}_c$ gesondert betrachtet.

Man kann so folgende Abhängigkeit feststellen: Bei steigendem externen $\overrightarrow{B}$-Feld verschiebt sich der Übergang vom normalleitenden Zustand zum supraleitenden Zustand zu tieferen Temperaturen hin.

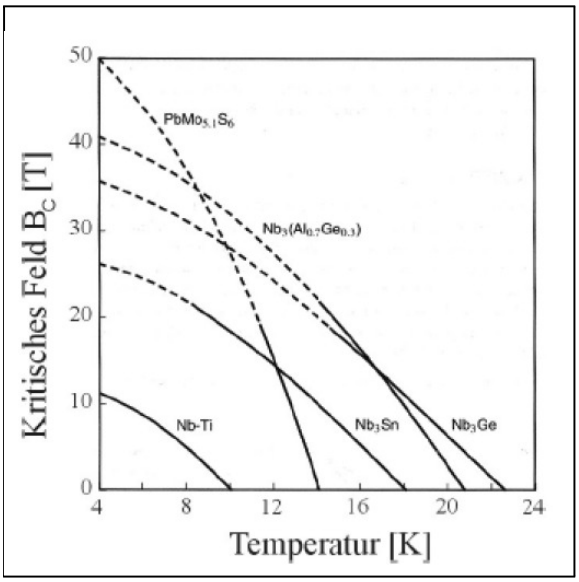

Abbildung 3: Temperaturabhängigkeit des kritischen Magnetfeldes $\overrightarrow{B}_c$ [6].

Kamerlingh Onnes erkannte 1916, dass ein Feld von $29mT$ die Supraleitung in einem Bleidraht unterdrückt. Es ist dabei nicht von Bedeutung, ob durch einen Transportstrom im Supraleiter ein magnetisches Feld an der Oberflächer erzeugt wird, oder von außen einwirkt (kritisches Feld $\overrightarrow{B}_c$). Das mit dem Stromfluss verbundene Magnetfeld begrenzt somit den maximalen Strom im Supraleiter.

W. Meißner und R. Ochsenfeld analysierten das Verhalten von Supraleitern in Magnetfeldern. Dabei kamen sie zum Schluss, dass Supraleiter nicht nur die Eigenschaften eines idealen Leiters aufweisen, sondern, wenn man von einer geringen Eindringtiefe absieht, sich wie ideale Diamagnete verhalten [1].

1.2 Meißner-Ochsenfeld Effekt (MO-Effekt)

1933 wurde von Meißner und Ochsenfeld nachgewiesen, dass der supraleitende Zustand nicht nur durch den Widerstand $\rho = 0$ charakterisiert wird, sondern es ebenso zu einer Magnetfeldverdrängung kommt. Wird das supraleitende Material unter seine kritische Temperatur abgekühlt, kann man sehen, dass die Magnetfeldlinien aus dem Supraleiter verdrängt werden und das $\vec{B}$-Feld innerhalb des supraleitenden Materials Null ist. (Abbildung 4)

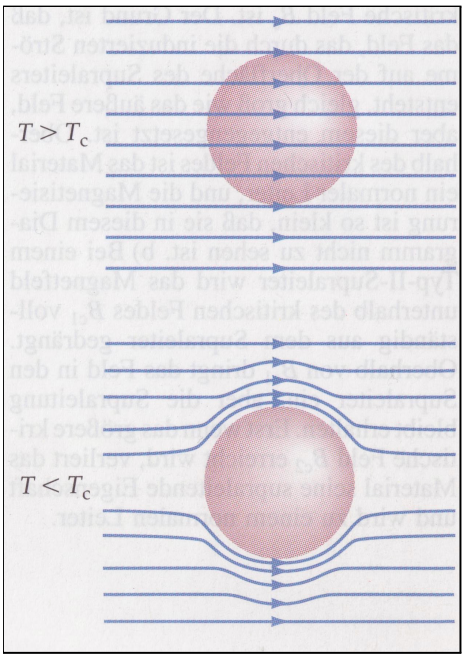

Abbildung 4: Darstellung des Meißner-Ochsenfeld Effekts [7].

Durch diese Entdeckung war es möglich, die Supraleitung als thermodynamische Phase anzusehen [8]. Wird eine supraleitende Kugel, die sich in einem konstanten äußeren Magnetfeld befindet unter ihre kritische Temperatur abgekühlt, wird das Magnetfeld aus der Kugel herausgedrückt.

Angenommen ein Supraleiter wäre nur ein idealer Leiter [5], d.h. ein Leiter mit Widerstand Null, so wäre der supraleitende Zustand kein thermodynamischer Zustand. Eine Erklärung dafür ist, dass sich auf unterschiedlichen Wegen im Phasendiagramm $\overrightarrow{H}_c(T)$ auch unterschiedliche Zustände ergeben würden. In der Abbildung 5 ist dieses Gedankenexperiment dargestellt.

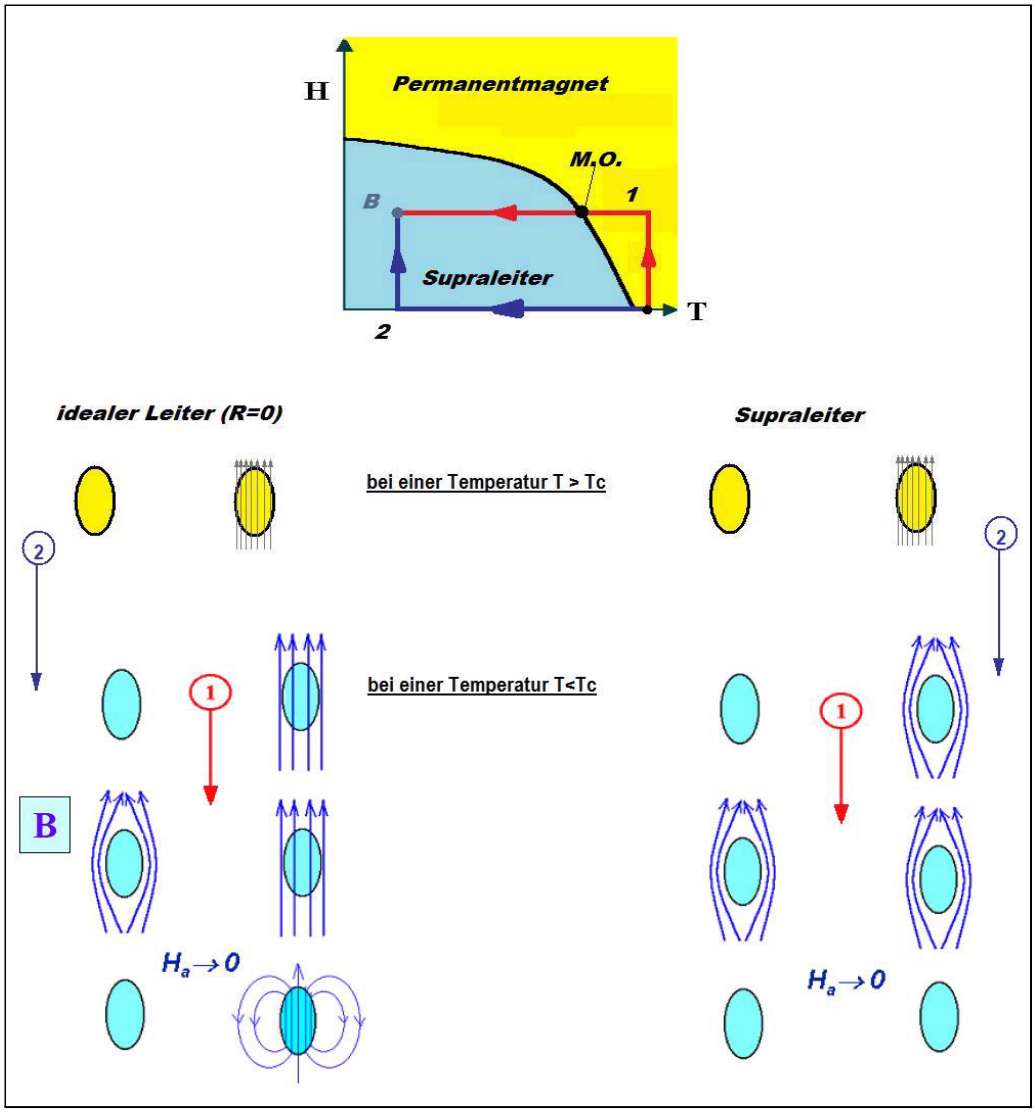

Abbildung 5: Darstellung des thermodynamischen Zustandsdiagramms T und $\overrightarrow{H}$, sowie die Darstellung der Magnetfeldverdrängung (MO-Effekt) [6].

Im oberen Bereich der Abbilung ist das Phasendiagramm, in welchem sich die zwei unterschiedlichen Wege befinden, dargestellt. Ausgehend von einer feldfreien Probe eines idealen Leiters (links) und einer Probe eines Supraleiters (rechts) kann man Folgendes feststellen: Bei einer Temperatur, die größer als die Sprungtemperatur ist, kann man keinen Unterschied erkennen, ob es sich bei der Probe um einen Supraleiter oder um einen idealen Leiter handelt. In beiden Fällen wird durch das Anlegen eines Magnetfeldes die Probe vom Feld durchsetzt, da bei einem endlichen Widerstand die Abschirmströme abklingen.

In den jeweils linken Spalten des idealen Leiters und des Supraleiters wird Folgendes dargestellt:

Zunächst wird die Probe ohne Magnetfeld unter die kritische Temperatur abgekühlt und anschließend ein Magnetfeld angelegt. Im Phasendiagramm ist dieser Zustand der Punkt B. Beide Proben reagieren auf dieselbe Weise: Das Magnetfeld kann in die Probe nicht eindringen, weil an der Oberfläche der Probe Ströme induziert werden, die das Feld abschirmen. Aufgrund des fehlenden elektrischen Widerstands werden die Ströme nicht gedämpft, klingen die Abschirmströme nicht ab und das Probeninnere bleibt dauerhaft magnetfeldfrei. Bei Abschalten des Magnetfeldes wird der Ausgangszustand der Probe wieder eingenommen. Auch hier kann man keinen Unterschied zwischen einer Probe eines idealen Leiters beziehungsweise eines Supraleiters feststellen. Das heißt, ein feldfreier Leiter entsteht, wenn man einen feldfreien idealen Leiter soweit abkühlt, dass er sich im supraleitenden Zustand befindet und anschließend ein Magnetfeld einschaltet.

In den jeweils rechten Spalten des idealen Leiters und des Supraleiters wird Folgendes dargestellt:

Die Proben sind vor dem Unterschreiten der Sprungtemperatur einem Magnetfeld ausgesetzt, dabei durchsetzen die Magnetfeldlinien des Feldes beide Proben, da wie schon erwähnt, bei einem endlichen Widerstand die Abschirmströme abklingen.

Im idealen Leiter bleibt der Zustand beim Unterschreiten der kritischen Temperatur gleich, das heißt, die Probe wird bei einem konstantgebliebenen magnetischen Fluss vom Magnetfeld durchsetzt. Wird nun das Magnetfeld abgeschaltet, so werden aufgrund der Lenzschen Regel Ströme angeworfen, die eine Änderung des Magnetflusses in der Probe verhindern. Der ideale Leiter besitzt nun ein permanentes magnetisches Moment.

Bei einem idealen Leiter kann aus der Abbildung 5 zusammenfassend gesagt werden, dass je nach Versuchsdurchführung zwei unterschiedliche Endzustände eintreffen können. Einerseits kann ein feldfreier Leiter entstehen indem man den Leiter ohne Einfluss eines externen Magnetfeldes unter seine kritische Temperatur abkühlt und ihn dann einem Magnetfeld aussetzt. Oder man erhält ein Feld im Leiter indem man vor dem Abkühlen den Leiter einem Magnetfeld aussetzt.

Ein anderes Verhalten als im idealen Leiter zeigt sich im Supraleiter. Beim Unterschreiten der Sprungtemperatur wird das Feld aus der Probe verdrängt. Wird das angelegte Magnetfeld abgeschaltet, gelangt man wieder zum Ausgangszustand zurück. Die beim Unterschreiten des kritischen Punktes auftretende Magnetfeldverdrängung wird als MO-Effekt bezeichnet [1].

Im Supraleiter wird das Feld durch Abschirmströme verdrängt, weswegen der Supraleiter als idealer Diamagnet mit der magnetischen Suszeptibilität $\chi = -1$ beschrieben werden kann (Meißner Zustand). Die Abschirmströme an der Oberfläche ergeben eine Magnetisierung $\overrightarrow{M} = -\overrightarrow{H}_a$, die dem externen Feld genau entgegengesetzt ist. Im Inneren des Supraleiters ist somit

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M} \right) = 0 \tag{2}$$

Da sowohl bei Abkühlung des Supraleiters ohne Feld und anschließendem Anlegen eines Feldes, als auch bei Abkühlung des Supraleiters im eingeschaltenen Magnetfeld das Feld verdrängt wird, ist der Supraleiter in beiden Fällen feldfrei, solange er sich in der Meißner Phase befindet. Somit ist die Flussverdrängung eine zusätzliche Vorraussetzung, damit die Supraleitung eine thermodynamische Phase ist (siehe dazu Abbildung 5).

2 Thermodynamische Überlegungen zur Supraleitung

2.1 Thermodynamik des supraleitenden Zustandes

Die Erkenntnisse von Meißner und Ochsenfeld erlaubten es, die Supraleitung bei äußerem Magnetfeld als thermodynamische Phase zu sehen. Eine makroskopische elektromagnetische Theorie war nötig und wurde 1935 von F. und H. London aufgestellt [6], [8], [9], [10].

Die Fundamentalgleichung der Thermodynamik (auch Gibbsche Fundamentalgleichung genannt) beschreibt die Menge aller Gleichgewichtspunkte eines thermodynamischen Systems als Funktion der Zustandsgröße *innere Energie* U und den Variablen $T, S, V, \overrightarrow{M}$ und $\overrightarrow{B}$. Die Enthalphie ist ein Maß für die Energie eines thermodynamischen Systems und ändert sich mit der Größe des betrachteten Systems. Das maßgebliche thermodynamische Potential ist die Gibbsche freie Enthalpie $G\left(T, p, \overrightarrow{B}\right)$. Mit der magnetischen Energie $-\mu\overrightarrow{B}$ ergibt sich für die freie Enthalpie:

$$G = U - TS + pV - V\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{B} \tag{3}$$

Die beiden Größen $\overrightarrow{M}$ und $\overrightarrow{B}$ sind üblicherweise parallel, weshalb die Darstellung als Vektor im Folgenden nicht mehr beachtet wird. Für die Änderung der inneren Energie ergibt sich mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik:

$$dU = -TdS - pdV + VBdM \tag{4}$$

Damit ist die Änderung der freien Enthalpie gegeben durch:

$$dU = -TdS - pdV + VBdM \tag{5}$$

Beim Phasenübergang zwischen normalem und supraleitendem Zustand werden die Enthalpie und der Entropieunterschied berechnet. Ein Supraleiter ist im so genannten Meißner Zustand ein idealer Diamagnet ($\chi = -1$), daher ist das magnetische Moment

$$\mu = MV = \frac{\chi B}{\mu_0} V = -\frac{B}{\mu_0} V \tag{6}$$

Die Enthalpieänderung eines Supraleiters [11] unter der Bedingung $dp = 0$ ist

$$dG_s = -SdT - VMdB \rightarrow dG_s = -SdT + \frac{B}{\mu_0} VdB = -SdT + \frac{V}{\mu_0} BdB \tag{7}$$

Die Enthalphiedifferenz im supraleitenden Zustand ist somit

$$G_s(B,T) = G_s(0,T) + \frac{V}{\mu_0} \int_0^B B' dB' = G_s(0,T) + \frac{VB^2}{2\mu_0} \tag{8}$$

Dabei wird die in der Formel vorkommende Energie $\frac{VB^2}{2\mu_0}$, welche durch das Auftreten des supraleitenden Zustandes gewonnen wurde, durch die Feldverdrängungsenergie kompensiert. Sie ist somit die Energie, die notwendig ist, um das Feld zu verdrängen und kompensiert beim kritischen Feld $\overrightarrow{B}_c$ die Energie, die durch den supraleitenden Zustand gewonnen wird und als Kondensationsenergie bezeichnet wird.

Beim Erreichen einer thermodynamischen kritischen Magnetflussdichte $\overrightarrow{B}_c$ bricht der supraleitende Zustand zusammen:

$$G_s(B_c,T) = G_n(B_c,T) \tag{9}$$

und

$$G_n(B_c,T) \cong G_n(0,T) \tag{10}$$

Aufgrund der Tatsache, dass χ, welches im normalleitenden Zustand einen Wert von

etwa 10^{-4} einnimmt, im Vergleich zum supraleitenden Zustand ($\chi = -1$) vernachlässigbar klein ist, kann die Differenz der Gibbschen Enthalpien errechnet werden:

$$G_n\left(0,T\right) - G_s\left(0,T\right) = \frac{1}{2\mu_0} V B_c^2 \tag{11}$$

G_n ist also größer als G_s und die Differenz der beiden ein Maß für die Stabilität des supraleitenden Zustands.

Mit steigendem Magnetfeld steigt die Enthalpiedifferenz G_s des Supraleiters mit B^2 an und erreicht beim kritischen Feld $\overrightarrow{B}_c$ den Wert des normalleitenden Zustandes, der Supraleiter wird instabil. Es findet ein Phasenübergang vom Supraleiter zum Normalleiter statt, wobei am Übergang die freien Enthalpien beider Phasen gleich sind.

2.2 Londongleichungen

Die Londongleichungen ergänzen die Maxwellgleichungen um zwei Gleichungen für den Suprastromanteil, die die unendliche Leitfähigkeit und das rasche Abklingen der inneren magnetischen Flussdichte auf Null beschrieben [1],[6],[12].

Mithilfe des Drude-Modells kann die klassische Bewegungsgleichung der Elektronen in einem elektrischen Feld angegeben werden:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right) m\overrightarrow{v} = -e\overrightarrow{E} \tag{12}$$

Im elektrischen Feld wird die Reibung, das heißt, der spezifische Widerstand ρ, durch die Stoßrate $\frac{1}{\tau}$ beschrieben. Dabei ist τ die Zeit zwischen zwei Stößen ($\tau = \frac{\Lambda}{\overline{v}}$, wobei Λ die mittlere freie Weglänge und $\overline{v}$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger ist). Geht $\tau \to \infty$, so verschwindet der Reibungsterm, was soviel bedeutet wie $\rho = 0$, d.h. es werden keine supraleitenden Ladungsträger gestreut. Setzt man die supraleitende Stromdichte $\overrightarrow{j}_s = -en_s\overrightarrow{v}$ (wobei n_s die Ladungsträgerdichte und e die Elementarladung ist) als Geschwindigkeit in die Bewegungsgleichung der Elektronen ein, so ergibt sich daraus die erste Londongleichung, die den perfekten Leiter beschreibt.

Durch Umwandeln der supraleitenden Stromdichte zu einer Geschwindigkeitsgleichung ergibt sich dafür $\overrightarrow{v} = \frac{-\overrightarrow{j}_s}{en_s}$, welche nun in die vereinfachte Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}m\overrightarrow{v} = -e\overrightarrow{E}$ eingesetzt werden kann.

Daraus ergibt sich für das elektrische Feld folgender Zusammenhang:

$$\overrightarrow{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{e^2 n_s}\overrightarrow{j}_s\right) \tag{13}$$

Mit dem Londonparameter $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s}$ (m ist die Masse des Teilchens, e die Ladung und n_s die Teilchendichte) folgt daraus die erste Londongleichung:

$$\overrightarrow{E} = \frac{d}{dt}\left(\Lambda\overrightarrow{j}_s\right) \tag{14}$$

Es lässt sich erkennen, dass ein stationärer Suprastrom mit dem elektrischen Feld $\overrightarrow{E} = 0$ verbunden ist. Für jeden $\overrightarrow{j}_s \neq 0$ ist die Spannung $U = 0$. Somit existiert ein Stromfluss ohne elektrischem Feld und ohne Widerstand.

Wendet man den Rotor rot auf die erste Londongleichung an und setzt man das Induktionsgesetz (dritte Maxwellgleichung) ein, so erhält man die zweite Londongleichung, welche die Feldverdrängung und $\chi = -1$ beschreibt, das heißt den perfekten Diamagneten. Durch Anwenden des $Rotors$ auf die erste Londongleichung erhält man

$$rot\overrightarrow{E} = \frac{d}{dt} rot\left(\Lambda \overrightarrow{j}_s\right) \tag{15}$$

wobei man nun diese Formel in das Induktiongesetz $rot\overrightarrow{E} = -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$ einsetzen kann:

$$\frac{d}{dt} rot\left(\Lambda \overrightarrow{j}_s\right) = rot\overrightarrow{E} = -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt} \tag{16}$$

Durch Zusammenfassen der zeitlichen Änderung erhält man

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{B} + rot\left(\Lambda \overrightarrow{j}_s\right)\right] = 0 \tag{17}$$

Damit man die stationäre Lösung erhält, muss der Klammerausdruck verschwinden, wodurch sich die zweite Londongleichung ergibt.

$$-\overrightarrow{B} = rot\left(\Lambda \overrightarrow{j}_s\right) \tag{18}$$

Ein stationäres Feld verursacht an der Oberfläche eines Supraleiters einen Suprastrom, sodass im Inneren des Supraleiters $\overrightarrow{B} = 0$ ist.

Kombiniert man die zweite Londongleichung mit der Maxwellgleichung $rot\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$, kann man das Eindringen des Feldes in den Supraleiter beschreiben.

Durch ein nochmaliges Anwenden des Rotors erhält man für die Maxwellgleichung

$$rot\left(rot\overrightarrow{B}\right) = rot\left(\mu_0\,\overrightarrow{j}\right) = \mu_0 rot\,\overrightarrow{j} \tag{19}$$

wobei sich ergibt:

$$rot\left(rot\overrightarrow{B}\right) = \nabla \times \nabla \times \overrightarrow{B} = \nabla\left(\nabla \cdot \overrightarrow{B}\right) - \Delta\overrightarrow{B} \tag{20}$$

Da die zweite Maxwellgleichung $div\overrightarrow{B} = 0$ lautet (anders geschrieben: $\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$), ergibt sich daraus eine Differentialgleichung, die das Eindringen des Feldes in den Supraleiter beschreibt:

$$\nabla\Big(\underbrace{\nabla \cdot \overrightarrow{B}}_{0}\Big) - \Delta\overrightarrow{B} = \mu_0 rot\,\overrightarrow{j} \tag{21}$$

Durch Einsetzen der zweiten Londongleichung (siehe Gleichung 18) ergibt sich daraus die nachfolgende Gleichung, wobei das negative Vorzeichen wegfällt:

$$\Delta\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{\Lambda} \cdot \overrightarrow{B} \tag{22}$$

Den Londonparameter Λ kann man auch wie folgt beschreiben

$$\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \mu_0 \lambda_L^2 \tag{23}$$

wobei es sich bei der Länge um die Londonsche Eindringtiefe handelt:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n_s}} \tag{24}$$

Wird nun die Londonsche Eindringtiefe in die zweite Londongleichung (Gleichung 18) eingesetzt, so erhält man dafür:

$$\Delta \overrightarrow{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \cdot \overrightarrow{B} \tag{25}$$

Aus dieser Differentialgleichung lässt sich der MO-Effekt ableiten, was hier nun gezeigt werden soll.

Man betrachtet die Oberfläche eines sehr großen Supraleiters, der aufgrund der Koordinatenwahl bei $x = 0$ liegen soll und sich unendlich weit in die $y-$, beziehungsweise $z-$Richtung ausdehnen soll. Außerdem soll der Supraleiter im Halbraum $x > 0$ liegen.

Wird nun ein äußeres Magnetfeld mit $\overrightarrow{B}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_a \end{pmatrix}$ angelegt, so kann man aufgrund der Symmetrie des Supraleiters annehmen, dass einzig die $z-$Komponente einen für das Magnetfeld verschiedenen Wert von Null aufweist und sich somit eine von der $x-$Koordinate abhängige Funktion bildet. Für $B_z(x)$ ergibt sich dann (für $x > 0$):

$$\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \cdot B_z(x) \tag{26}$$

Als Lösung für die Londonsche Eindringtiefe des Magnetfeldes in einem Supraleiter erhält man folgende Beziehung:

$$B_z(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}} \tag{27}$$

Graphisch dargestellt wird die Lösung in der Abbildung 6. Dabei nimmt das Magnetfeld mit steigender Eindringtiefe exponentiell ab und verschwindet weit innerhalb des Supraleiters. Die Eindringtiefe liegt dabei etwa im Bereich von 10 bis $400nm$.

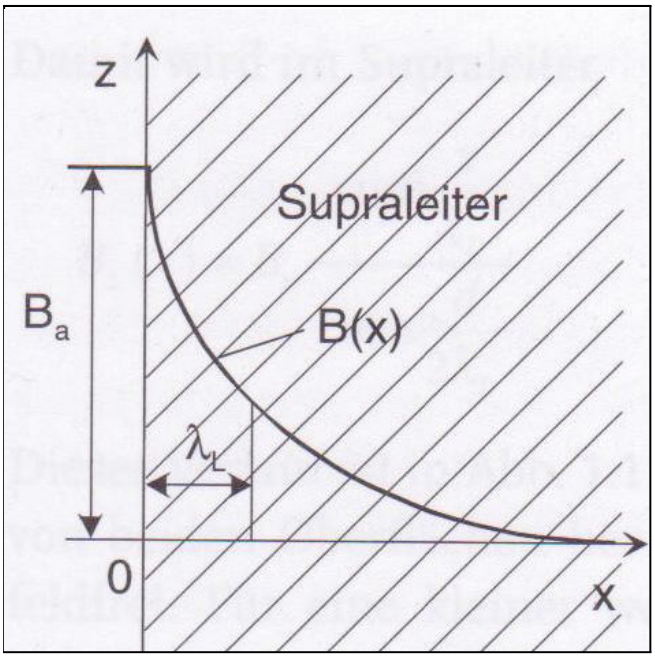

Abbildung 6: Darstellung der Eindringtiefe λ_L eines magnetischen Feldes in einem Supraleiter nahe einer ebenen Oberfläche [1].

3 Flussquantisierung

3.1 Einführung in die Flussquantisierung

Da der wesentliche Bestandteil eines SQUIDs ein Ring mit zumindest einem *weak-link* („Schwachstelle“) ist, soll nun kurz das Verhalten eines supraleitenden Ringes im externen Magnetfeld diskutiert werden. Eine charakteristische Eigenschaft des supraleitenden Zustandes ist die Phasenkohärenz der gemeinsamen Wellenfunktion der Cooper-Paare. Genau diese bleibt in einem weak-link nicht mehr bestehen. Angrenzende supraleitende Bereiche unterliegen aber nach wie vor einer schwachen Kopplung. Folglich bildet sich in der Schwachstelle eine Phasendifferenz aus, was zu zusätzlichen Strömen führt, die von B. Josephson theoretisch beschrieben wurden [1],[6],[13],[14].

Die zweite Londongleichung (siehe Gleichung 18) beschreibt einerseits die Flussverdrängung, wie auch die Flussquantisierung in einem mehrfach zusammenhängenden Supraleiter, zum Beispiel in einem supraleitenden Ring. Dieser hat im Inneren mindestens ein Loch, also einen normalleitenden Bereich.

Der Supraleiter ist nach F. und H. London ein makroskopischer Quantenzustand, der mit einer allgemeinen Wellenfunktion $\Psi(\overrightarrow{r})$ beschrieben werden kann. Die Lösung dieser makroskopischen Wellenfunktion ist eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, wobei die Phase $\phi\,(\overrightarrow{r})$ eine reelle Funktion des Ortes ist.

$$\Psi\,(\overrightarrow{r}) = \Psi_0\,(\overrightarrow{r})\,e^{i\phi(\overrightarrow{r})} \tag{28}$$

Für ein neutrales Teilchen wie zum Beispiel ein ^4He- Teilchen ergibt der Impuls $m\overrightarrow{v}$ und der Impulsoperator auf die Wellenfunktion:

$$\widehat{p}\Psi(\overrightarrow{r}) = -i\hbar\nabla\Psi\,(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{p}\,\Psi\,(\overrightarrow{r}) \tag{29}$$

$$-i\hbar\nabla\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{p}\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -i^2\hbar\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)\nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right) \tag{30}$$

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = \hbar\nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right) \tag{31}$$

Für Elektronen, deren Ladung an das $\overrightarrow{B}$-Feld gekoppelt ist, muss bei der Berechnung der kanonische Impuls verwendet werden. Außerdem wird aufgrund der Cooper-Paare (wo zwei Elektronen vorkommen) der Faktor 2 mitberücksichtigt. Somit ergibt sich für den Impuls:

$$\overrightarrow{p} = 2m\overrightarrow{v}_s + 2e\overrightarrow{A} = \nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right)\hbar \tag{32}$$

Durch Umformen erhält man eine im Supraleiter für die Phasenkohärenz verantwortliche Geschwindigkeit, die in Gleichung 33 angeführt ist:

$$\overrightarrow{v}_s = \frac{\hbar}{2m}\nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right) - \frac{e}{m}\overrightarrow{A} \tag{33}$$

Das Besondere an dieser Gleichung ist, dass diese der zweiten Londongleichung (Gleichung 18) entspricht. Wird nämlich der Rotor rot auf die Gleichung 33 angewendet erhält man:

$$rot\overrightarrow{v}_s = rot\left(\underbrace{\frac{\hbar}{2m}\nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right)}_{\frac{\hbar}{2m}rot\times\left(\nabla\phi\left(\overrightarrow{r}\right)\right)\equiv 0}\right) - rot\frac{e}{m}\overrightarrow{A} = -\frac{e}{m}rot\overrightarrow{A} = -\frac{e}{m}\overrightarrow{B} \tag{34}$$

woraus sich für das $\overrightarrow{B}$-Feld $-\overrightarrow{B} = \frac{m}{e}rot\overrightarrow{v}_s$ ergibt, was der zweiten Londongleichung (Kapitel II.2.2) entspricht.

3.2 Flussquantisierung in einem mehrfach zusammenhängenden Supraleiter

Für einen supraleitenden Ring, der einen nicht abklingenden Dauerstrom erzeugt, ergibt sich für die Flussquantisierung die nachfolgende Gleichung:

$$\oint \overrightarrow{p}\, d\overrightarrow{s} = nh \tag{35}$$

Betrachtet man im Wellenbild des Bohrschen Atommodells die Wellenfunktion, so muss diese bei einem Umlauf in sich selbst übergehen:

$$2\pi r = n\lambda \tag{36}$$

mit $\lambda = \frac{h}{p}$ ergibt sich daraus:

$$2\pi r p = nh \tag{37}$$

Dies entspricht der allgemeinen Quantisierung des Impulses $\oint \overrightarrow{p}\, d\overrightarrow{s} = nh$ des Bohr-Kreisstroms im Ring. Der nicht abklingende Kreisstrom wird analog zur kreisförmigen Bewegung eines Elektrons im Bohr-Modell behandelt:

$$\oint 2m\overrightarrow{v_s} d\overrightarrow{s} + 2e \oint \overrightarrow{A}\, d\overrightarrow{s} = nh \tag{38}$$

wobei die Stromdichte

$$\overrightarrow{j}_s = n_e e \overrightarrow{v}_s \tag{39}$$

ist, woraus sich ergibt:

$$\oint \underbrace{\frac{2m}{n_e e}\overrightarrow{j_s}\,d\overrightarrow{s}}_{\text{0 da im Inneren des Ringes } \overrightarrow{j_s}=0 \text{ ist}} + 2e\oint \overrightarrow{A}\,d\overrightarrow{s} = nh \tag{40}$$

$\overrightarrow{j}_s$ ist im Inneren des Ringes Null und fließt somit nur als Abschirmstrom an der Oberfläche (im Bereich der Eindringtiefe) des Feldes.

Mit Hilfe des Stokeschen Satzes ergibt sich für die Restterme aus der Gleichung 40:

$$2e\oint \overrightarrow{A}\,d\overrightarrow{s} = 2e\iint_F \nabla\times\overrightarrow{A}\,d\overrightarrow{F} = 2e\iint_F \overrightarrow{B}\,d\overrightarrow{F} = 2e\Phi = nh \tag{41}$$

Wodurch sich für den Fluss $\Phi = \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{F}$ mit $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07\cdot 10^{-15}Wb$ ergibt:

$$\Phi = \frac{nh}{2e} = n\cdot\Phi_0 \tag{42}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der magnetische Fluss Φ im Ring innerhalb eines normalleitenden Bereiches, nur in Vielfachen des magnetischen Flussquantums Φ_0 auftreten kann und sich aus dem Produkt des magnetischen Feldes und der vom supraleitenden Ring eingeschlossenen Fläche ergibt (siehe dazu Gleichung 41).

Das Verständnis eines supraleitenden Ringes in einem Magnetfeld ist die Grundlage zum Verständnis eines SQUID, was im nachfolgenden Beispiel veranschaulicht werden soll:

Ausgegangen wird von einem supraleitenden Ring im normalleitenden Zustand auf den ein Magnetfeld wirkt. Dieses Feld soll einem Fluss entsprechen, der im Inneren des Ringes mit einer Querschnittfläche $\overrightarrow{F}$ einem Flussquantum Φ_0 entspricht (Solange der Ring normalleitend ist, existiert keine Flussquantisierung!). Der Ring wird nun unter seine kritische Temperatur abgekühlt, wobei das Flussquantum im Ring eingeschlossen ist. Anschließend wird das äußere Magnetfeld abgeschaltet. In dem Augenblick, in dem der Fluss durch den supraleitenden Ring geändert wird, tritt ein Strom in diesem auf. Dabei versucht der induzierte Strom jener Änderung entgegenzuwirken, die man durch das Abschalten des äußeren Feldes erzeugt hat, wobei der induzierte Strom ein Magnetfeld erzeugt. Würde man mit einem gewöhnlichen Material arbeiten, würde der erzeugte Strom aufgrund des vorhandenen Widerstands sofort abklingen.

Da man aber ein supraleitendes Material verwendet, sind theoretisch mehrere Ergebnisse möglich, wobei davon einige ausgeschlossen werden müssen:

1. Würde der im supraleitenden Ring induzierte Strom leicht absinken, ergäbe sich für den Fluss im Inneren des Ringes ein Wert, der kleiner als ein Flussquantum ist. Dieser Zustand ist aber nicht erlaubt.

2. Der Fluss könnte daher den nächstmöglichen Wert, nämlich Null annehmen. Dabei müsste der Strom plötzlich verschwinden und nicht erst gedämpft werden. Da aber im supraleitenden Zustand sehr viele Elektronenpaare im selben Quantenzustand existieren und diese gleichzeitig in einen anderen Zustand übergehen müssten, ist dieser Ausgang sehr unwahrscheinlich. Er tritt sozusagen nie auf.

3. Aus den beiden vorigen Ergebnissen folgt, dass der induzierte Strom solange unbegrenzt fließt, solange sich der Ring im supraleitenden Zustand befindet.

3.3 Flussbilanz eines supraleitenden Ringes im externen Feld

Der im Ring enthaltene Fluss setzt sich aus dem externen Fluss, sowie einem Beitrag aus der Eigeninduktivität L des Rings und dem im Ring zirkulierenden Strom I_S zusammen [5]:

$$\Phi_{intern} = \Phi_{extern} \pm \underbrace{L \cdot I_S}_{\Delta\Phi = L \cdot I_c = \frac{\Phi_0}{2}} \tag{43}$$

Der externe Fluss kann kontinuierlich verändert werden, da er nicht quantisiert ist. Mit ansteigendem Fluss steigt die Stromstärke I_S und erreicht den kritischen Strom I_C, wo der Ring normalleitend wird und ein Fluss Φ_0 eindringen kann. Der Abschirmstrom wechselt das Vorzeichen, da die Flussbilanz gewährleistet werden muss. Deshalb stellt sich der Abschirmstrom so ein, dass sich entweder kein Flussquant oder ein ganzzahliges Vielfaches im Inneren des Ringes befindet, was in der Abbildung 7 schematisch dargestellt wird.

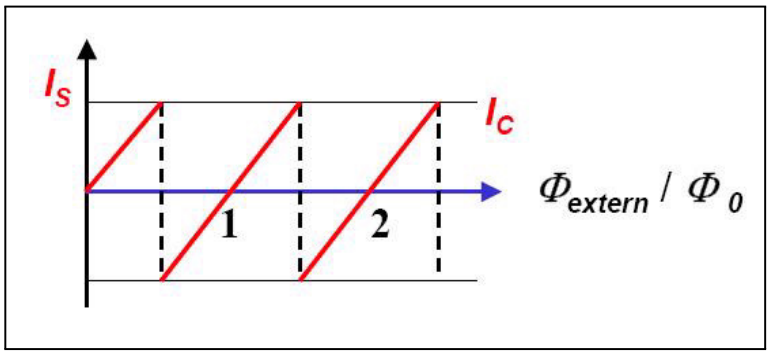

Abbildung 7: Schematische Darstellung zur Erklärung der Flussbilanz [6].

Wird, wie in Abbildung 8 gezeigt wird, für $\Delta\Phi = L \cdot I_c = \frac{\Phi_0}{2}$ gewählt, so erhält man einen treppenförmigen Anstieg ohne Hysterese.

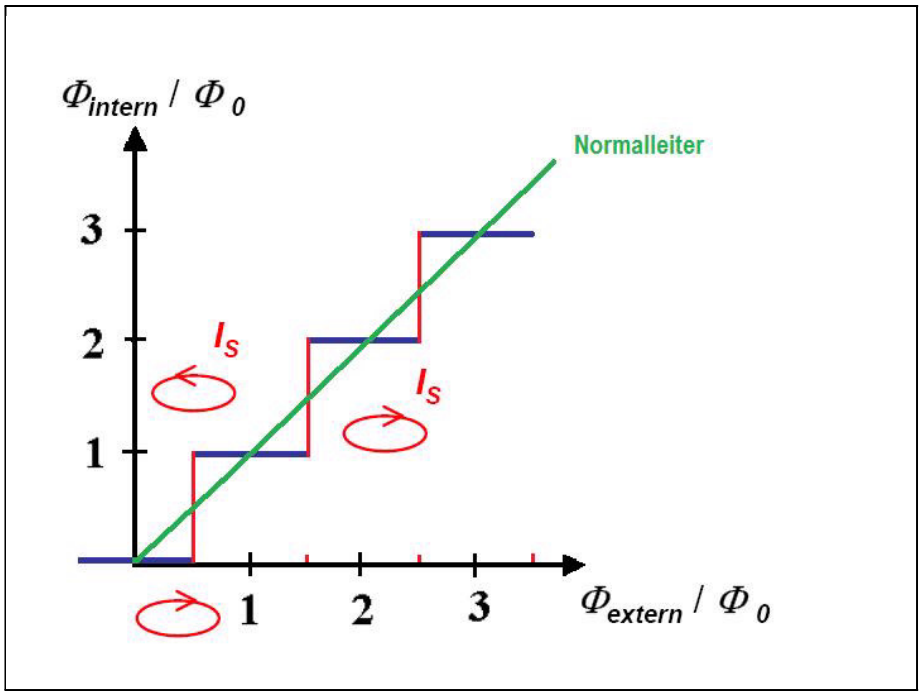

Abbildung 8: Eine Treppenkurve ohne Hysterese entsteht, wenn der magnetische Fluss $\frac{\Phi_0}{2}$ ist [6].

Die Flussquantisierung wurde in einem Resonanzexperiment von R. Doll und M. Nähbauer 1961 mit $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ nachgewiesen. In ihrem Experiment entdeckten sie, dass der in einem supraleitenden Hohlzylinder eingeschlossene magnetische Fluss quantisiert ist. Das galt in Physiker-Kreisen als Sensationsentdeckung, da dieses Experiment das erste Mal in der Geschichte der Physik das Auftreten eines Quantisierungseffekts im makroskopischen Zustand beschrieb. In der Abbildung 9 wird der Versuchsaufbau gezeigt und in Abbildung 10 sind die erhaltenen Messergebnisse für einen Bleizylinder dargestellt.

Bei dem Experiment handelte es sich um einen Blei-Hohlzylinder mit einem Durchmesser von etwa $10\mu m$, der auf einen Quarzstab aufgedampft wurde. Durch Abkühlung unter T_{cBlei} wurde ein Dauerstrom induziert. Der Hohlzylinder wurde aufgehängt, damit man den eingefrorenen Fluss aufgrund seines Drehmoments bestimmen konnte. Mit einem Lichtstrahl sowie einer Resonanzkopplung (diente zur höheren Auflösung der Schwingung) konnte der Ausschlag nachgewiesen werden. Dabei wurden bei Vergrößerung des externen Flusses (der nicht quantisiert ist, aber hier in der Abbildung 8 in Einheiten von $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ aufgetragen ist) nur Vielfache des Flussquants Φ_0 gemessen (siehe Abbildung 10) woraus sich schließen lässt, dass in einem supraleitenden Ring der

magnetische Fluss nur diskrete Werte $\Phi = n \cdot \Phi_0$ annimmt. Natürlich war der experimentelle Nachweis mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da es sich beim Flussquant um eine sehr kleine Größe handelt. Zusätzlich ist dies der experimentelle Nachweis, dass es sich bei einem Cooper-Paar (Kapitel II.5.2) um zwei Elektronen handelt.

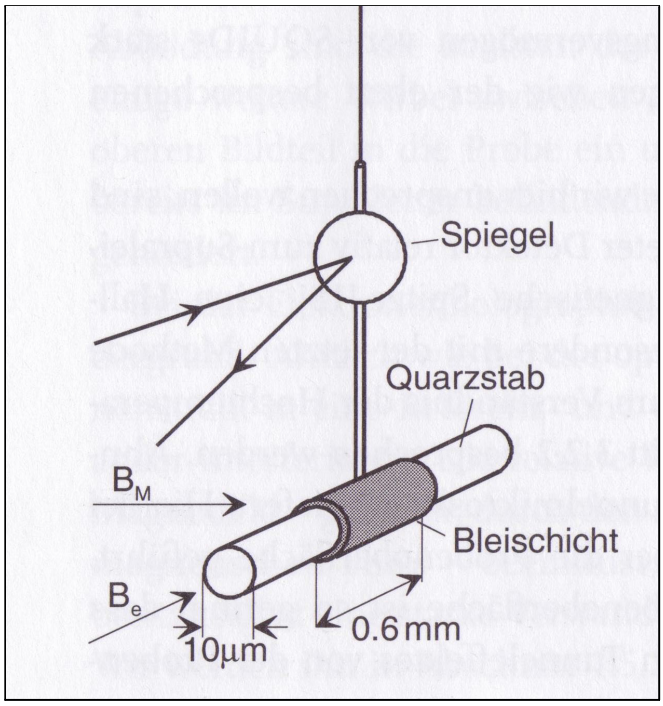

Abbildung 9: Schematische Darstellung des Messaufbaus vom Münchner Forscherteam Doll und Nähbauer [5].

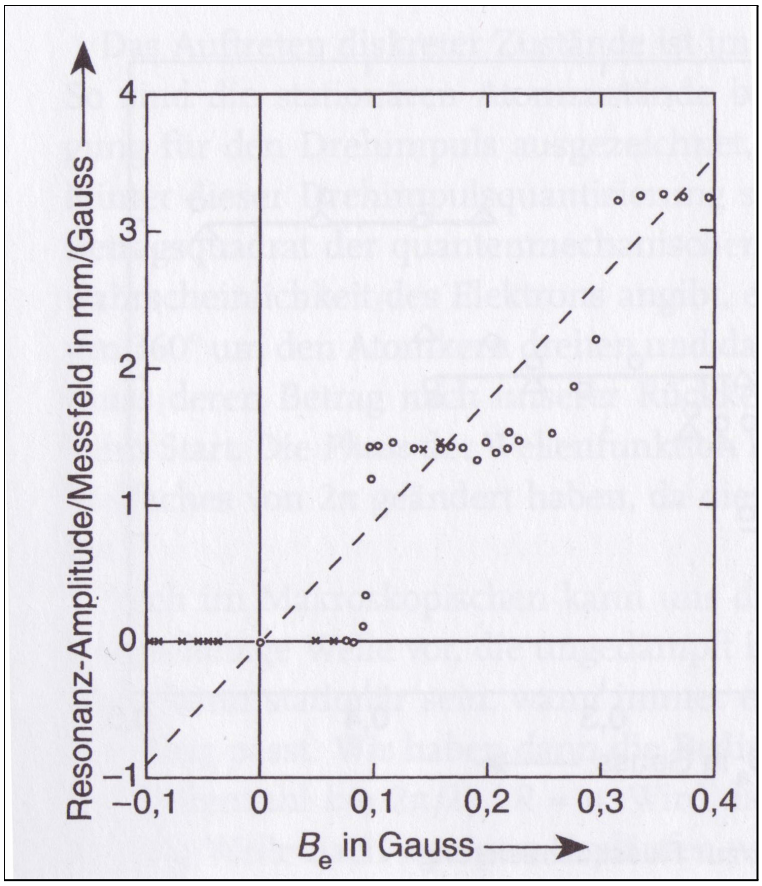

Abbildung 10: Messergebnisse eines Bleizylinders zur Darstellung der Flussquantisierung von Doll und Nähbauer [5].

4 Typen von Supraleitern

Man unterscheidet zwischen Typ-I (SL erster Art) und Typ-II (SL zweiter Art) Supraleitern, die sich in der Struktur, der Reaktion auf äußere Magnetfelder und in den verwendeten Legierungen unterscheiden.

Supraleiter erster Art weisen eine besondere Form der Magnetisierung auf. Wie schon im Kapitel zum MO-Effekt besprochen wurde, verhält sich ein Körper aus supraleitendem Material im supraleitenden Zustand ($T < T_c$) in einem Magnetfeld mit der Flussdichte $\overrightarrow{B}$ wie ein idealer Diamagnet. Wird ein externes Magnetfeld mit einer Flussdichte $\overrightarrow{B}_a$ angelegt, so stellt sich im Supraleiter eine negative Magnetisierung $\overrightarrow{M}$ ein, wobei im Inneren des Körpers die Magnetflussdichte $\overrightarrow{B}_i = 0$ ist. Die Magnetisierung nimmt mit wachsender Feldstärke zu, bis es zum Überschreiten der kritischen Feldstärke kommt und der Supraleiter wieder normalleitend wird. Die einfache Magnetisierungskurve für einen Typ-I Supraleiter kann folgendermaßen gedeutet werden:

Wird das Feld erhöht, so wird es für das Material über einem kritischen Feld $\overrightarrow{B}_c$ energetisch günstiger in den normalleitenden Zustand überzugehen, wo das Feld in das Material eindringt. In nachstehender Abbildung 11 ist die Feldverdrängung im Typ-I Supraleiter graphisch dargestellt.

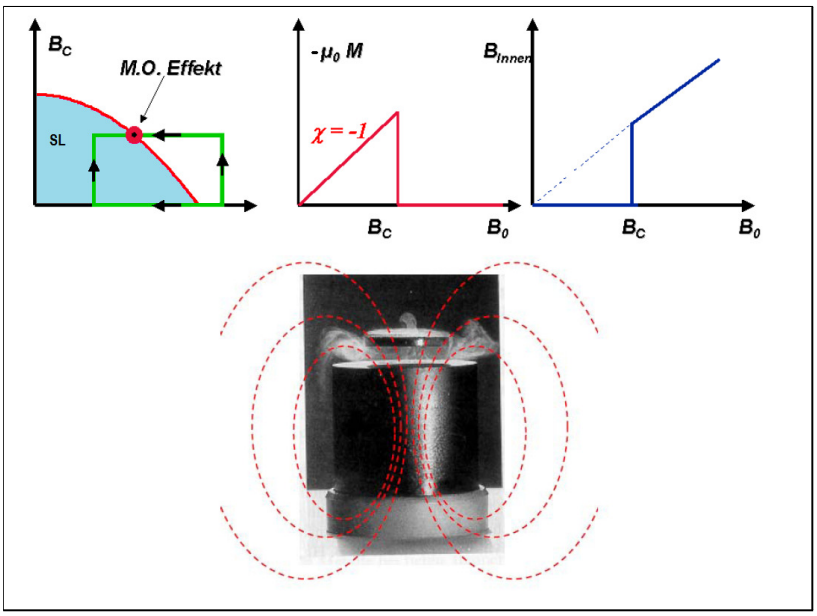

Abbildung 11: Meißner-Ochsenfeld Effekt und die Feldverdrängung eines Typ-I Supraleiters [6].

In technischen Anwendungen finden Supraleiter erster Art als Spulen keine Verwendung, da $\overrightarrow{B}_c$ im Bereich von wenigen mT liegt. Die in der Technik verwendbaren Supraleiter zweiter Art zeigen ein völlig anderes Verhalten. Bis zu einer *unteren kritischen Magnetflussdichte* $\overrightarrow{B}_{c_1}$ kann man den idealen MO-Effekt beobachten. Überschreitet die von außen einwirkende Feldstärke $\overrightarrow{B}_{c_1}$, so nimmt die negative Magnetisierung wieder ab, was in den Abbildungen 12 und 13 zu sehen ist. Dabei dringt ein magnetischer Fluss in Form von Flussquanten in den Supraleiter ein. Wird die Feldstärke weiter erhöht, gelangt man zu einer *oberen kritischen Magnetflussdichte* $\overrightarrow{B}_{c2}$ bei der der Übergang von Supraleitung zur Normalleitung mit voller Felddurchdringung passiert.

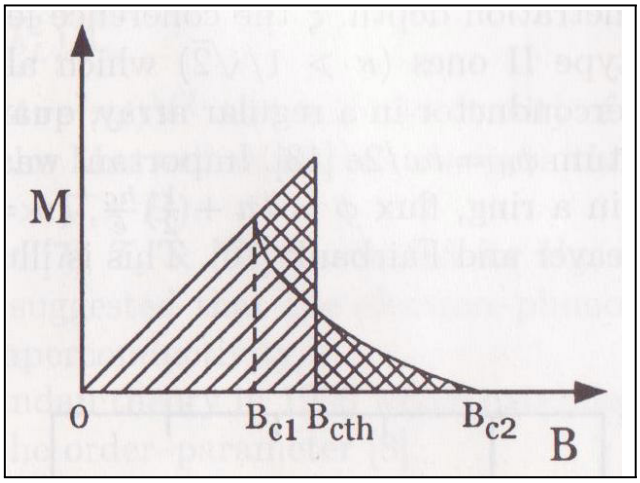

Abbildung 12: Darstellung der Magnetisierungskurve eines Typ-II Supraleiters - $\overrightarrow{B}_{cth}$ setzt voraus, dass die karierten Flächen gleich groß sind [15].

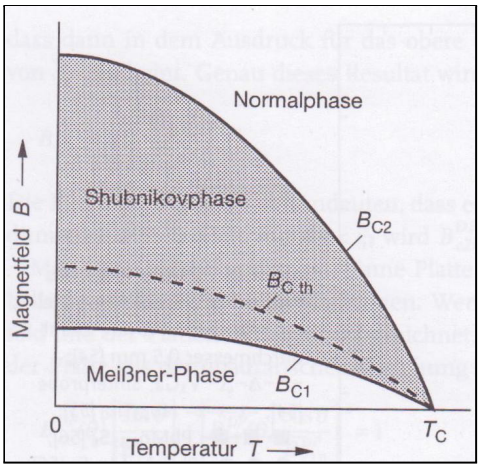

Abbildung 13: Schematische Darstellung eines Phasendiagramms von einem Typ-II Supraleiter [4].

Vergleicht man den Supraleiter zweiter Art mit dem Supraleiter erster Art so kann man im Bereich $0 < \overrightarrow{B}_a < \overrightarrow{B}_{c_1}$ keinen Unterschied feststellen. Beim Supraleiter zweiter Art wird dieser Bereich deshalb auch *Meißner-Phase* genannt. Der Bereich $\overrightarrow{B}_{c_1} < \overrightarrow{B}_a < \overrightarrow{B}_{c_2}$ wird als *Shubnikov-Phase* bezeichnet [5].

Zur Erläuterung wird nun der Übergangsbereich (Phasenübergang) zwischen Supraleiter und Normalleiter genauer betrachtet. In Abbildung 14 ist die Phasengrenzfläche mit den wichtigsten Größen dargestellt.

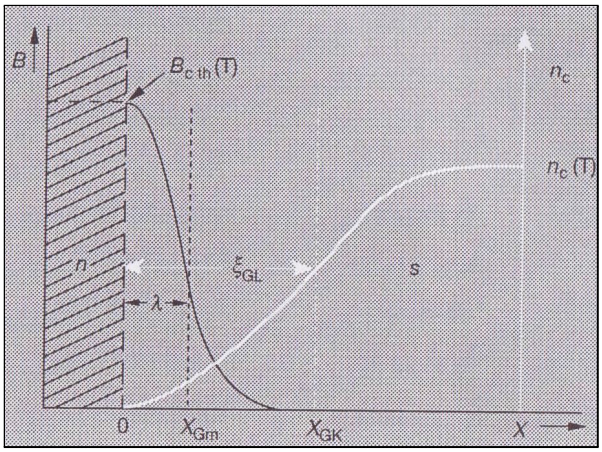

Abbildung 14: Darstellung der Grenzflächenenergie zwischen Normalleiter und Supraleiter [4].

Die Magnetfeldinduktion fällt mit der Londonschen Eindringtiefe (siehe Kapitel II.2.2) exponentiell auf Null ab. Analog dazu steigt die Dichte der Cooper-Paare n_c stetig an, wobei diese durch die Kohärenzlänge ξ dargestellt wird.

Zwei Energiebeiträge bestimmen maßgeblich den Phasengrenzbereich:

1. Die mit der Verdrängung des Magnetfeldes verknüpfte Energie ΔE_B
2. Die durch Kondensation aus Cooper-Paaren resultierende Energieabsenkung ΔE_C

Dabei entspricht die gesamte Kondensationsenergie gleich der gesamten Verdrängungsenergie (siehe Gleichung 8) und es folgt der Zusammenhang:

$$\Delta E_{ges} = \Delta E_C - \Delta E_B = (\xi - \lambda) \cdot A \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{44}$$

wobei das Volumen V bei ΔE_{ges} vereinfacht für die Energien ΔE_B und ΔE_C als $\xi \cdot A$ und $\lambda \cdot A$ mit A als Grenzflächenschicht dargestellt wird.

Im Normalleiter ist $E_B = E_C = 0$, das heißt, dass kein Magnetfeld verdrängt wird und keine Cooper-Paare vorhanden sind. Im Innen des Supraleiters, wo $n_s = const.$ kann die volle Kondensationsenergie gewonnen werden, jedoch fällt die Dichte der supraleitenden Ladungsträger n_s an der Grenzfläche auf Null (nach dem Konzept einer charakteristischen Länge ξ, welche die Änderung von n_s beschreibt).

Ist die Energiedifferenz größer Null ($\xi > \lambda$), also der Verlust an Kondensationsenergie größer als der Gewinn an Verdrängungsenergie, so muss für den Aufbau von Grenzflächen Energie zugeführt werden. In diesem Fall ist die Bildung von Grenzflächen ungünstig, solche Supraleiter sind vom Typ-I.

Ist die Energiedifferenz kleiner Null ($\xi < \lambda$), das heißt, der Gewinn an Kondensationsenergie ist größer als der Verlust an Verdrängungsenergie, ergibt sich bei der Bildung von Grenzflächen ein Energiegewinn, was als Typ-II bezeichnet wird.

Von besonderer Bedeutung ist die Verteilung des während der Shubnikov-Phase in den Supraleiter eingedrungenen Magnetflusses. Sieht man sich die Phasengrenzenergie an, so erkennt man, dass möglichst viele Grenzflächen energetisch günstig sind. Dabei ist die kleinste Einheit jene, bei der der Magnetfluss der einzelnen normalleitenden Bereiche nicht größer als das elementare Flussquant ist (siehe Kapitel II.3.3). Voraussetzung für

die stabile Existenz eines magnetischen Flusses im Supraleiter ist eine Verknüpfung mit einem stationären elektrischen Ringstrom. Folglich ist jedes Flussquant mit einem solchen Ringstrom verknüpft (man nennt dieses Fluxoid oder Flussschlauch), wobei durch die gegenseitige Abstoßung der Fluxoide eine regelmäßige Gitteranordnung, das Flussliniengitter, entsteht. In nachfolgender Abbildung 15 ist die Gitterstruktur, welche die Form eines gleichseitigen Dreieckgitters hat, erkennbar. Es handelt sich um den energetisch günstigsten Zustand.

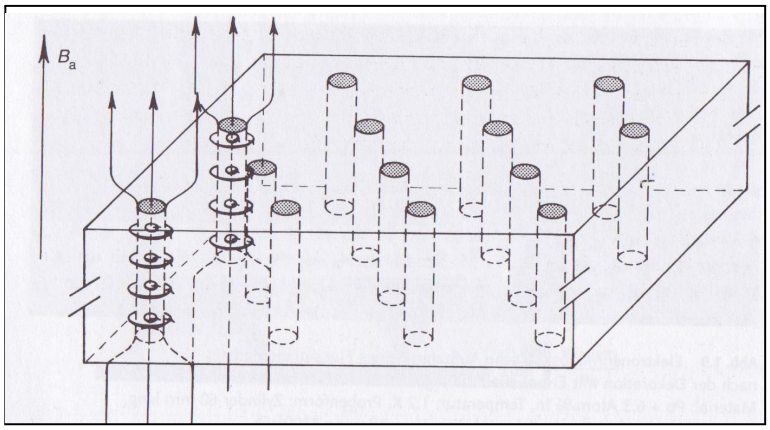

Abbildung 15: Der Fluss eines Typ-II Supraleiters tritt in Form von Flussschläuchen auf [5].

5 BCS Theorie - eine mikroskopische Theorie

5.1 Einführung in die BCS Theorie

Eine in sich geschlossene theoretische Beschreibung der Physik des supraleitenden Zustandes gelang erst 1957 durch J. Bardeen, L. Cooper und J. Schrieffer (BCS) mit der nach ihnen benannten BCS Theorie. Obwohl es schon früher viele experimentelle Befunde und gute theoretische Ansätze gab, erhielten sie für ihre Arbeiten 1972 den Nobelpreis für Physik. Es handelt sich dabei um die erste mikroskopische Theorie der Supraleitung [16], [13], [12].

Die BCS Theorie beruht auf folgenden Einsichten:

1. Die Kräfte zwischen den Leitungselektronen im Metall können anziehend sein, wenn eine Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen auftritt. (Elektron-Phonon Wechselwirkung)

2. Cooper untersuchte das Problem von zwei Elektronen, die sich am äußeren Rand der Fermi-Kugel befinden und konnte zeigen, dass sie ein stabiles gebundenes Paar (Cooper-Paar) bilden, wenn eine schwache anziehende Kraft vorhanden ist.

3. Schrieffer stellte eine Vierteilchenwellenfunktion auf, in der alle Elektronen im Bereich der Fermi-Energie E_F gepaart sind. Diese Wellenfunktion $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ hat Eigenschaften eines kohärenten Zustandes. Bei der Minimierung des BCS Grundzustandes ergibt sich eine Energielücke Δ in der Zustandsdichte an der Fermienergie. Diese Energie wird auch als BCS Gap bezeichnet und entspricht jener Energie, die zugeführt werden muss, um ein Cooper-Paar in zwei Elektronen aufzubrechen. Dies ist nur möglich, wenn dem Supraleiter Energie zugeführt wird, wobei diese als Supraleiter-Energielücke E_g bezeichnet wird.

Mit steigender Temperatur werden immer mehr Cooper-Paare aufgebrochen, die mit den verbliebenen Cooper-Paaren wechselwirken. Folglich konvergiert die Energielücke gegen Null bis sie bei der kritischen Temperatur T_c den Wert Null erreicht, was in der Abbildung 16 gezeigt wird.

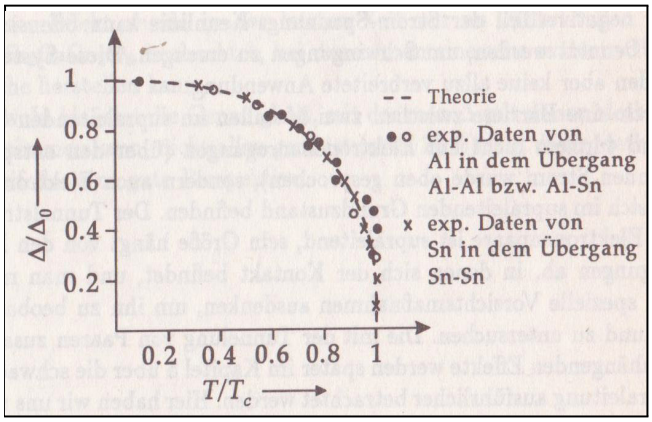

Abbildung 16: Zusammenhang zwischen der relativen Energielücke $\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}$ als Funktion der relativen Temperatur $\frac{T}{T_c}$ [17].

5.2 Cooper-Paare

Wie im vorigen Kapitel bereits erwähnt wurde, basiert die BCS Theorie auf der Erkenntnis, dass es nur dann zum Phänomen Supraleitung kommen kann, wenn eine Paarbildung stattfindet. Zwei unabhängige Elektronen sind im Bereich der Fermi-Energie instabil gegenüber einem gebundenen Paarzustand, wenn nur eine beliebig kleine anziehende Wechselwirkung existiert, die hier durch die Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen (Phononen) angenommen wird [5], [6], [17]. Cooper verwendete in seiner Theorie zur Vereinfachung eine kugelförmige Fermifläche, wobei angenommen wurde, dass bei $T = 0K$ alle Zustände unterhalb E_F besetzt sind. Weiters konnte er zeigen, dass nach Hinzufügen zweier Elektronen außerhalb von E_F der Gesamtimpuls erhalten bleibt, wenn das Elektronenpaar im Überlappungsbereich liegt.

Diese Überlappungsfläche muss maximal werden (Abbildung 17), damit möglichst viele Austauschprozesse stattfinden können. Dies tritt bei einem Gesamtimpuls $\overrightarrow{p} = \hbar \overrightarrow{k} = 0$ ein und bedeutet, dass sich zwei Elektronen mit entgegengesetztem Impuls $\overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{p_2}$ paaren. (Das Elektronenpaar kann auch durch das Wellenvektorenpaar $\left(\overrightarrow{k}, -\overrightarrow{k}\right)$ dargestellt werden.)

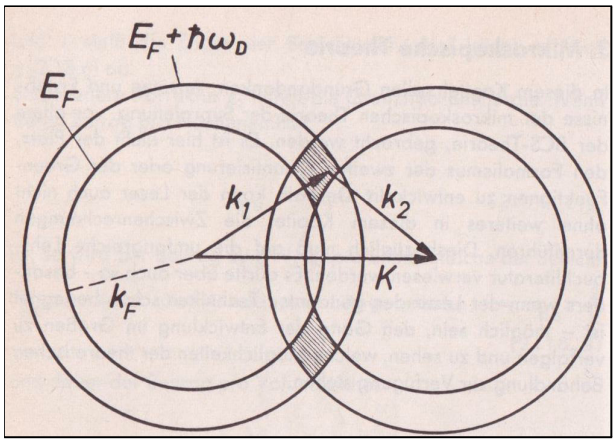

Abbildung 17: Überlappungsbereich der Elektronen eines Cooper-Paares [8].

Außerdem ist, bis auf wenige Ausnahmen, der Singulett-Zustand ($S = 0, \uparrow\downarrow$) für zwei Elektronen energetisch günstiger. Fast alle Supraleiter haben Singulett-Cooper-Paare, wobei sich das Cooper-Paar aus zwei Elektronen mit entgegengesetzten, gleich großen Wellenvektoren und entgegengesetzten Spins zusammensetzt:

$$\overrightarrow{k} \uparrow, -\overrightarrow{k} \downarrow \tag{45}$$

6 Der Josephson-Effekt

Josephson untersuchte 1962 an der Cambridge Universität zwei Supraleiter, die durch eine dünne nichtsupraleitende Barriere (Isolationsschicht) getrennt waren (Abbildung 18).

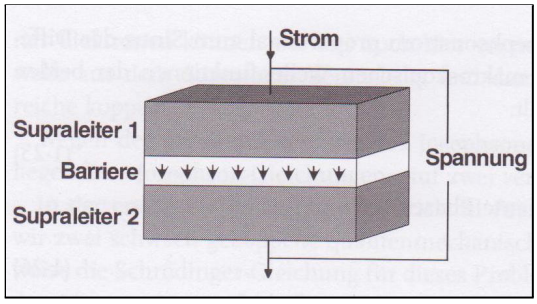

Abbildung 18: Schematischer Versuchsaufbau für den Josephson-Effekt [5].

Die $10 - 50\mathring{a}$ dicke Isolationsschicht bildet eigentlich eine Barriere für den Stromfluss. Da aber diese Schicht sehr dünn ist, können Elektronen von einem zum anderen Supraleiter tunneln. Dabei können nicht nur einzelne Elektronen von einem Supraleiter zum anderen tunneln, sondern auch Paare (Cooper-Paare). In seiner theoretischen Arbeit überlegte und beschrieb Josephson, dass die zu den Cooper-Paaren dazugehörigen quantenmechanischen Wellenfunktionen soweit in die Isolationsschicht reichen könnten, dass sie sich dort überlappen. Dadurch wären die beiden Supraleiter über die tunnelnden Cooper-Paare miteinander schwach gekoppelt (weak-link) und man könnte somit einen Strom durch die Isolationsschicht schicken. Zu beachten ist, dass im Supraleiter das Tunneln im Gegensatz zum klassischen Teilchenmodell widerstandsfrei geschieht. Für diesen nach Josephson benannten Effekt erhielt er 1973 den Nobelpreis.

Im Weiteren soll nun der Josephson-Effekt erklärt werden. Er ist wichtig, um den Aufbau eines SQUID zu verstehen. Wie bereits erwähnt, können mit gewisser Wahrscheinlichkeit Cooper-Paare durch die Isolationsschicht zwischen zwei Supraleitern tunneln.

Betrachtet man die Wellenfunktionen $\Psi_1 = \sqrt{n_1}e^{i\varphi_1}$ und $\Psi_2 = \sqrt{n_2}e^{i\varphi_2}$, so gilt allgemein, gemäß der zeitabhängigen Schrödingergleichung, für die zeitliche Änderung dieser Wellenfunktionen: $\frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} E_{1,2}\Psi_{1,2}$ [8].

Aufgrund ihrer weak-links beeinflussen sich die Wellenfunktionen bei ihrer zeitlichen Änderung gegenseitig. Deshalb führt man zusätzlich eine Kopplungsvariable K ein. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = E_1\Psi_1 + K\Psi_2 \tag{46}$$

sowie

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = E_2\Psi_2 + K\Psi_1 \tag{47}$$

Die Variable K gibt die Kopplungsstärke des Tunnelkontaktes an, was bedeutet, dass eine endliche Zahl von Cooper-Paaren vom ersten Supraleiter in den zweiten Supraleiter tunneln können. Durch Einsetzen der Wellenfunktionen in die Schrödingergleichung erhält man für den ersten Supraleiter:

$$i\hbar\left(\frac{1}{2\sqrt{n_1}}\frac{\partial n_1}{\partial t} + i\sqrt{n_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) = E_1\sqrt{n_1}e^{i\varphi_1} + K\sqrt{n_2}\cdot e^{i\varphi_2} \tag{48}$$

Durch Auflösen der Klammern, erhält man:

$$\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial n_1}{\partial t} - \hbar n_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = n_1E_1 + \sqrt{n_1n_2}K\left[\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right) + i\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right] \tag{49}$$

Betrachtet man den Imaginärteil der letzten Gleichung, so ergibt sich daraus der *Josephson-Gleichstrom* bei $U = 0$. Sind zusätzlich die beiden Supraleiter gleich, so ergibt sich bei konstanter Phasendifferenz $\varphi_2 - \varphi_1$ mit $n_1 = n_2 = n_s$ die Gleichung 51 für den Josephson-Gleichstrom:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} = \frac{2Kn_s}{\hbar}\sin(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2}) \tag{50}$$

$$I = I_0\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right) = I_{J\,\max}\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right) = \frac{4Kn_s}{\hbar}\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right) \tag{51}$$

Die Differenz der beiden Realteile aus Gleichung 49 ergibt den *Josephson-Wechselstrom* (die zeitliche Änderung der Phasendifferenz), der in Gleichung 55 angeschrieben ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_2) = \frac{2eU}{\hbar} \tag{52}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi\left(t\right) = \frac{2eU}{\hbar}t + \varphi_0 \rightarrow \omega_J = \frac{2eU}{\hbar} \tag{53}$$

$$\Delta\varphi\left(t\right) = \omega_J t + \varphi_0 \tag{54}$$

$$I = I_0 \sin\left(\omega_J t + \varphi_0\right) \tag{55}$$

Die Abbildung 19 zeigt den Strom-Spannungsverlauf eines Zinn-Zinnoxid-Zinn Tunnelkontaktes (weak-link). Bis zum Auftreten einer Spannung am Kontakt fließt der Josephson-Gleichstrom (bei $U = 0$). Dann springt die Kennlinie auf einen durch den Außenwiderstand festgelegten Wert und folgt dessen Charakteristik.

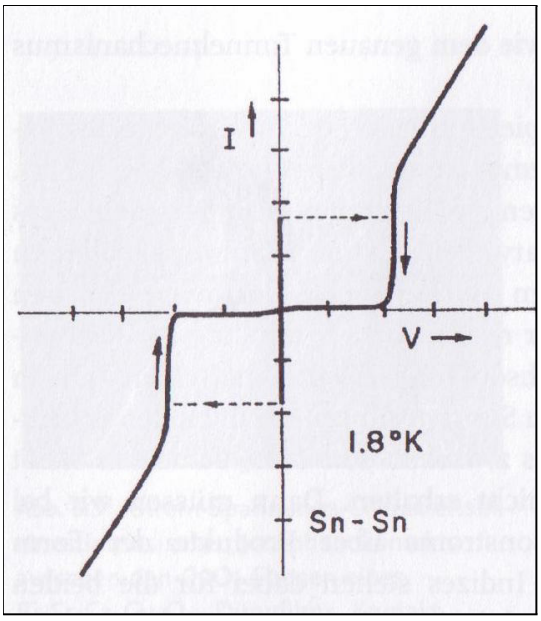

Abbildung 19: Strom-Spannungscharakteristik eines Josephson-Kontaktes (weak-link).

Der Josephson-Effekt kann also zusammenfassend in zwei Arten auftreten:

Einerseits existiert am Tunnelkontakt ein Josephson-Gleichstrom, solange am Kontakt die Spannung Null ist. Der Josephson-Gleichstrom wird dabei durch das Tunneln der Cooper-Paare verursacht. Herrscht jedoch am Kontakt eine endliche Spannung, so tritt einerseits ein Spannungsabfall auf, andererseits tritt der Josephson-Wechselstrom mit einer Frequenz von ω_J auf. Dieser zweite Effekt ist reversibel, das heißt man kann durch Einstrahlung von Mikrowellen eine Spannung am Kontakt erzeugen, die proportional zur eingestrahlten Frequenz ist. Deshalb eignen sich Josephson-Kontakte bestens als Spannungsnormale. Mit einem solchen Kontakt im Ring existiert also ein Bereich, der nicht mehr stromfrei sein kann.

Teil III

VERSUCH: LEVITATION UND FLUSSLINIENVERANKERUNG

Betrachtet man einen Typ-I Supraleiter, so kann man das freie Schweben (Levitation) des Magneten über dem Supraleiter sehr einfach durch die Magnetfeldverdrängung (MO-Effekt) erklären. Jedoch ist es auch für einen Typ-II Supraleiter möglich über einem Permanentmagneten zu schweben, obwohl das Magnetfeld nicht vollständig verdrängt wird. Ebenso ist eine Levitation von Supraleitern über Magneten möglich, was bei dieser Versuchsanordnung ausgenutzt wurde.

Ein Typ-II Supraleiter, der sich in einer kleinen Kunststoffwanne befindet (dient als "Kühlbeckenïndem der Supraleiter im flüssigen Stickstoff badet), wird über eine permanentmagnetische Bahn geschickt. Bei diesem Versuch standen zwei verschiedene Bahnen zur Verfügung. Einerseits handelte es sich um eine Kreisbahn, die in Abbildung 20 dargestellt ist, andererseits um einen Permanentmagneten in Form einer Schiene (siehe schematische Abbildung 21). Die Abbildung 20 zeigt mithilfe einer Flux-Detektor-Folie die Magnetfelder des Ringmagneten.

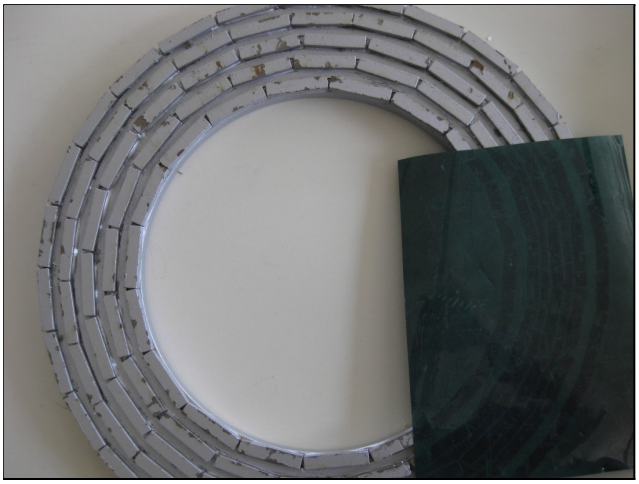

Abbildung 20: Der für den Versuch verwendete Ringmagnet, bei dem durch eine Flux-Detektor-Folie die Magnetfelder sichtbar gemacht werden.

Im Aufbau ergeben sich jedoch keine wesentlichen Unterschiede zwischen den beiden Bahnen. Als Grundplatte dient ein Weicheisen, auf dem in Längsrichtung einzelne

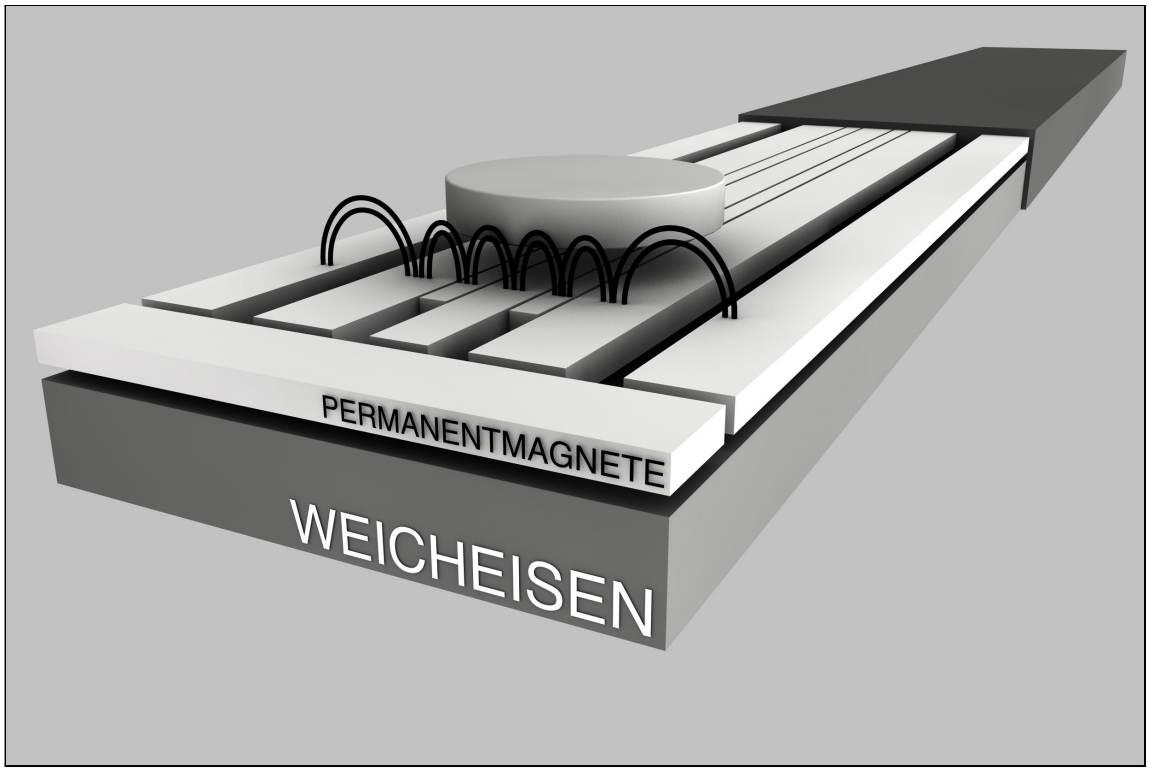

Abbildung 21: Schematischer Aufbau des Stabmagneten. Die exemplarisch eingezeichneten Magnetfeldlinien halten den Supraleiter in Position.

Streifen mit abwechselnder Polung aufgebracht sind. In den Abbildungen 21 und 22 sind die Magnetfeldlinien schematisch eingezeichnet, die aufgrund des parallel zur Bahn stehenden Magnetfeldes entstehen. Bei der Schienenbahn wurden an den Enden zusätzlich Streifen mit einer entgegengesetzten Polung angebracht.

Wird nun ein Typ-II Supraleiter über einer der Bahnen unter seine kritische Temperatur abgekühlt, so schließt dieser das Magnetfeld genauso ein, wie er von diesem durchsetzt wird. Dabei werden die Flussschläuche (Kapitel II.4) an den pinning-centers festgehalten und lassen sich nicht mehr verschieben. Man spricht dann von einer *Flusslinienverankerung* [18].

Beim Einfrieren muss zwischen dem Supraleiter und der Bahn kein direkter Kontakt vorhanden sein, was mithilfe von Distanzstreifen die einige Millimeter dick sind, erbracht wird.

Würde der Supraleiter nach dem Einfrieren in dieser Anordnung seinen Abstand zur Bahn verringern wollen, müssten die Magnetfeldlinien gestaucht werden, was jedoch energetisch ungünstiger ist, als wenn der Supraleiter über die Bahn (Permanentmagne-

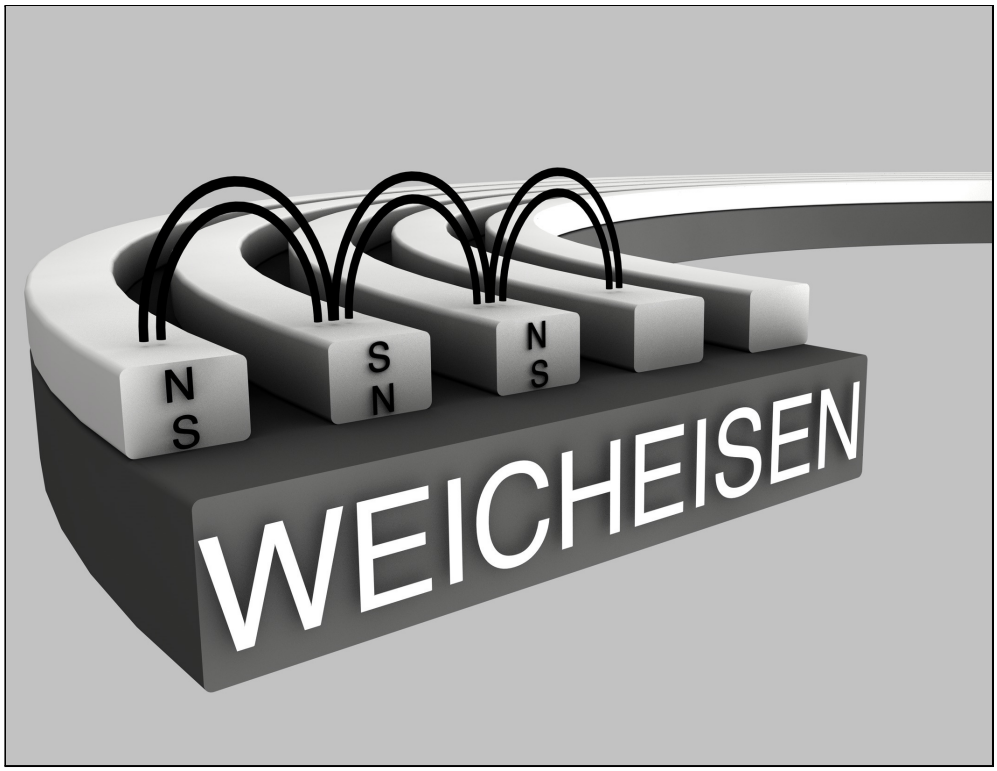

Abbildung 22: Schematischer Schnitt durch die Kreisbahn. Die Polung der Bahn sowie die Magnetfeldlinien sind exemplarisch eingezeichnet.

ten) schwebt.

Einflussfaktoren für die Levitation sowie die Schwebehöhe sind neben der Qualität des Supraleiters auch dessen Gewicht und die Stärke des Magnetfeldes.

Entfernt man kurzzeitig den Supraleiter von der Bahn, kann man beobachten wie sich die Schwebehöhe deutlich vergrößert. Wird der Supraleiter anschließend zum Permanentmagneten gedrückt, stellt sich wieder jene Schwebehöhe ein, die vor dem Entfernen des Supraleiters zu beobachten war. Wird ein Supraleiter vorsichtig in die Nähe eines Permanentmagneten gebracht, so entspricht das einem zunehmenden Magnetfeld $\overrightarrow{B}$. Die Magnetisierung $\overrightarrow{M}$ verläuft dabei im Intervall $\overrightarrow{B} < \overrightarrow{B}_{c1}$, ist also linear (vergleiche dazu Abbildung 12), was einem idealen Diamagneten entspricht.

Wurde der Supraleiter jedoch zuerst auf die Bahn gelegt und dann erst unter seine kritische Temperatur abgekühlt, so existierte im normalleitenden Supraleiter ein relativ hohes Magnetfeld, wodurch sich nach Abkühlung Flussschläuche ausbilden (Abbildung 15). Folglich ist die Magnetisierung $\overrightarrow{M}$ deutlich geringer als im diamagnetischen Zustand, woraus sich eine kleinere Schwebehöhe ergibt.

Durch den besonderen Aufbau der Bahnen kann man eine zusätzliche Eigenheit, die vor allem bei der Kreisbahn offensichtlich ist, feststellen:

Taucht man einen schwebenden Supraleiter über der Kreisbahn an, schwebt dieser entlang der Bahn und wird ganz ohne technische Hilfsmittel in der Kurve gehalten (siehe Abbildung 23). Grund dafür ist die *Pinningkraft*, die zusätzlich zum Nichtstauchen auch einer seitlichen Verschiebung des Supraleiters entgegenwirkt, da es ansonsten zu einer Verzerrung der Magnetfeldlinien käme. Selbst wenn man die Bahn neigt, schwebt der Supraleiter in einer stabilen Lage über die Bahn, woraus man schließen kann, dass die Pinningkraft in den Kurven der Zentrifugalkraft entgegenwirkt.

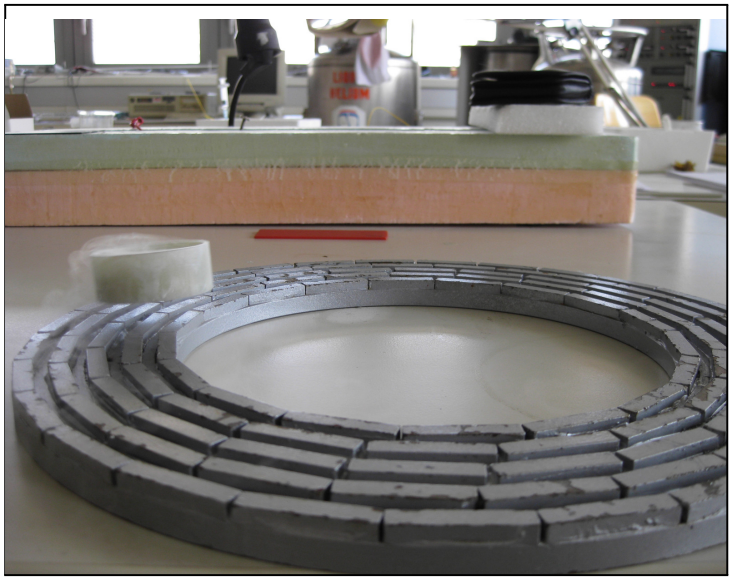

Abbildung 23: Levitation eines Supraleiters.

Durch folgende drei Faktoren wird die Schwebedauer beschränkt:

Einerseits kann der Supraleiter nur eine bestimmte Zeit unter seiner kritischen Temperatur gehalten werden, sodass die Supraleitung irgendwann zusammenbricht, der Supraleiter auf der Bahn aufsetzt und erneut eingefroren werden muss. Andererseits wird der Supraleiter durch das Schweben über der Bahn durch die Luftreibung sowie die Flusslinienverankerung kontinuierlich abgebremst.

Teil IV

DAS SQUID

In einem SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), zu Deutsch supraleitendes Quanteninterferometer, wird die Flussquantisierung in einem supraleitenden Ring, sowie die Interferenzerscheinungen an den Josephson-Kontakten ausgenutzt, um sehr kleine Magnetfeldänderungen, die sich im Bereich von $10^{-14}T$ befinden messen zu können [1],[19],[20],[21]. Folglich zählt das SQUID zu den genauesten Detektoren, mit dem man jede physikalische Größe, die sich in einen magnetischen Fluss umwandeln lässt, sehr präzise messen kann.

In früheren Zeiten wurden SQUIDs mit einem Josephson-Kontakt verwendet, durch die Fortschritte der Dünnschichttechnologie setzte sich das dc-SQUID mit zwei möglichst gleichartigen, parallel geschalteten Josephson-Kontakten durch (Abbildung 24). Üblicherweise wird diese Art von SQUIDs von einem Kontaktstrom gespeist, woraus man ein Signal erhält, welches durch den Gleichspannungsabfall über dem SQUID entsteht.

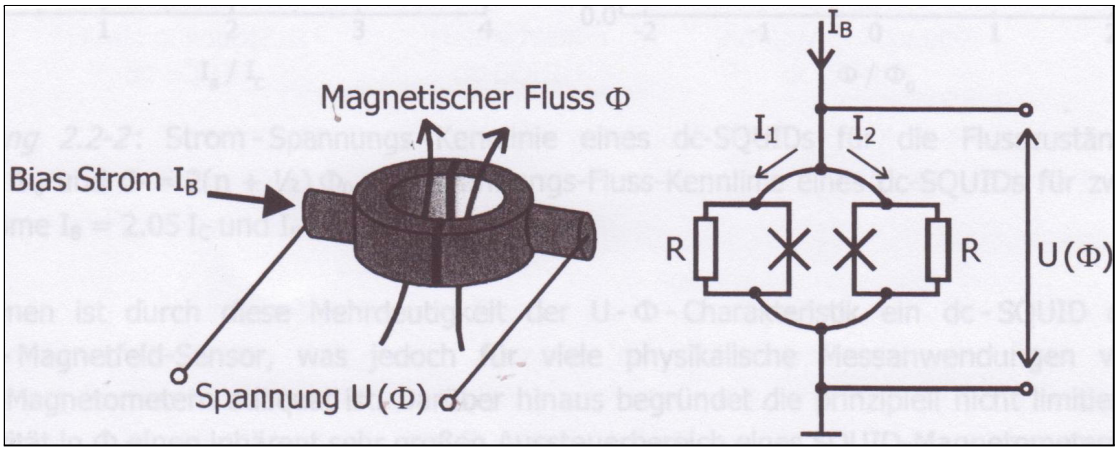

Abbildung 24: Schematische Darstellung eines dc-SQUIDs mit zwei Josephson-Kontakten und dem passende Ersatzschaltbild [22].

Das SQUID beruht auf folgenden zugrundeliegendem Prinzip:

> Im spannungslosen Zustand darf sich die Cooperpaar-Wellenfunktion in jedem Punkt einer supraleitenden Schleife nur um einen Phasenfaktor $e^{2in\pi}$ unterscheiden [23, S.30].

Beruhend auf dem Josephson-Gleichstrom (siehe Gleichung 51) teilt sich der eingeprägte Gesamtstrom I_B (Biasstrom), welcher durch den Ring mit zwei Kontakten geschickt wird, auf in:

$$I_B = I_1 \sin(\Delta\varphi_1) + I_2 \sin(\Delta\varphi_2) \tag{56}$$

wobei $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\varphi_2$ die Phasendifferenzen der Wellenfunktion bei den Tunnelkontakten angeben.

Da man möglichst gleichartige Kontakte fordert, ergibt sich an beiden Kontakten bei einem Magnetfeld $\overrightarrow{B} = 0$ ein Strom von $I_1 = I_2$. Vorausgesetzt wird jedoch, dass der eingeprägte Strom $I_B < 2I_{Jc}$ ist. Dabei sind die Ströme I_1 und I_2 durch ihre gleich konstanten Phasendifferenzen $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \arcsin\frac{I_B}{2I_J}$ miteinander verbunden.

Ist das Magnetfeld jedoch von Null verschieden, fließt zusätzlich noch ein Abschirmstrom welcher die Phasendifferenzen in den Kontakten beeinflusst. Mithilfe der Gleichungen 33 und 39, die im Kapitel II.3.2 erwähnt werden, sowie der Voraussetzung, dass $\overrightarrow{j}_s = 0$ ist (somit ist $\overrightarrow{A} = \frac{\hbar}{2e}\nabla\varphi$) folgt für den Fluss die Gleichung:

$$\Phi = \int \overrightarrow{B}\, d\overrightarrow{F} = \oint \overrightarrow{A}\, d\overrightarrow{s} = \frac{\hbar}{2e}\oint (\nabla\varphi)\, d\overrightarrow{s} = \frac{\Phi_0}{2\pi}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \tag{57}$$

Somit ergeben sich für die Phasendifferenzen $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\varphi_2$ bei einem von Null verschiedenen Magnetfeld folgende Gleichungen:

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \tag{58}$$

$$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \tag{59}$$

Berücksichtigt man den Abschirmstrom in der Gleichung 56 so ergibt sich im SQUID aufgrund der verschiedenen Phasendifferenzen folgende Gleichung für den eingeprägten Strom:

$$I_B = I_J \sin(\Delta\varphi_1) + I_J \sin(\Delta\varphi_2) = I_J \sin\left(\Delta\varphi + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + I_J \sin\left(\Delta\varphi - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \tag{60}$$

Mithilfe der Summensätze von Sinus und Cosinus vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$I_B = 2I_J \sin(\Delta\varphi) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \tag{61}$$

Der Josephsonstrom wird durch den Cosinus, der nur vom Fluss im Ring abhängt, moduliert und hat immer dasselbe Vorzeichen wie der eingeprägte Strom. Somit kann $\sin(\Delta\varphi)$ vernachlässigt werden und der Betrag über dem cos angeschrieben werden. Daraus ergibt sich für den eingeprägten Strom die Gleichung 62:

$$I_B = 2I_{J_0} \left|\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right| \tag{62}$$

Durch die zuletzt angeführten Gleichungen kann man nun erklären warum man ein SQUID auch als Quanteninterferometer bezeichnet. Wie beim Doppelspaltexperiment von Licht kann man hier ein feldabhängiges Interferenzmuster erzeugen (siehe Abbildung 25), welches sich aus der Interferenz der beiden Teilströme, deren Phasenunterschied vom Fluss abhängt, ergibt.

Beim Doppelspalt entsteht die Interferenz durch Summieren der beiden Teilwellen, die von den einzelnen Spalten ausgesendet werden. Beim SQUID verhält sich dies ähnlich. Betrachtet man, wie in Abbildung 26 dargestellt ist, einen Ring mit nur einem Josephson-Kontakt, so ergibt sich für die Phasendifferenz folgender Zusammenhang:

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{63}$$

Diese kann sehr einfach hergeleitet werden. Bei einem Umlauf ergibt sich für die Wellenfunktion aufgrund ihrer Eindeutigkeit:

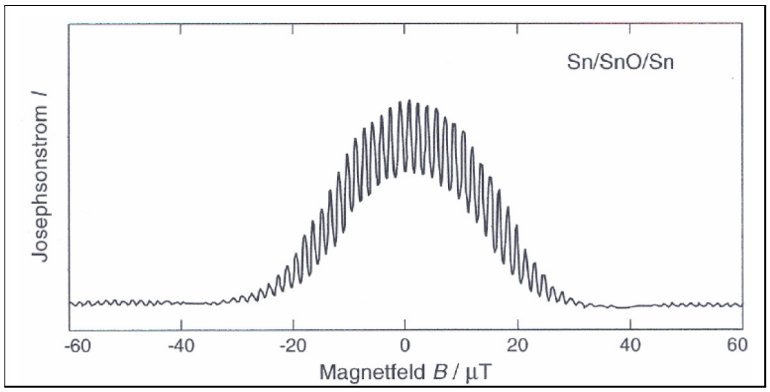

Abbildung 25: Schematische Darstellung eines Interferenzmusters von einem Zinn-Zinnoxid-Zinn Doppelkontakt [6].

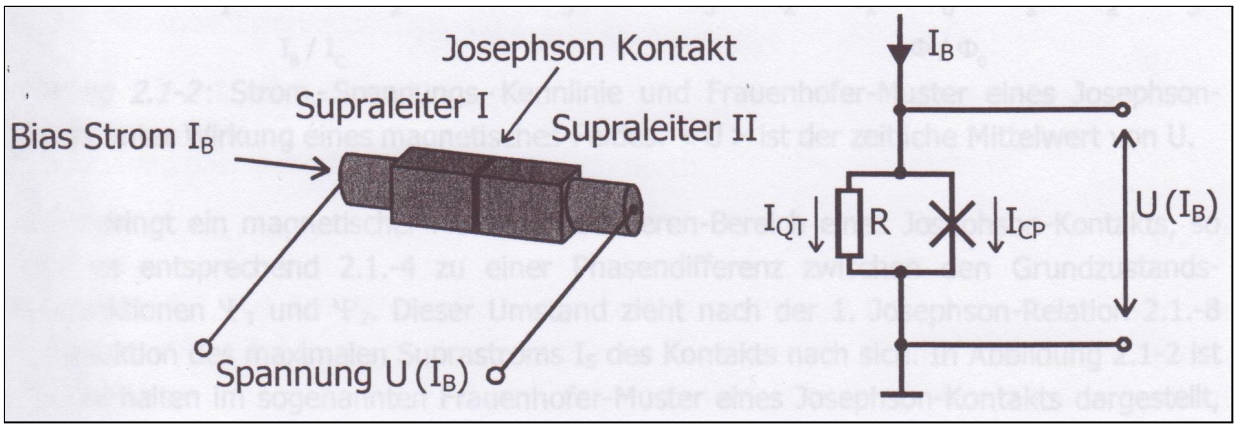

Abbildung 26: Schematische Darstellung eines SQUID mit einem Josephson-Kontakt und dessen elektrisches Ersatzschaltbild [22].

$$\oint (\nabla\varphi)\, d\overrightarrow{s} = 2\pi n \tag{64}$$

Berücksichtigt man wieder die Voraussetzung, dass $\overrightarrow{j}_s = 0$ ist (somit ist $\overrightarrow{A} = \frac{\hbar}{2e}\nabla\varphi$), so kann die Wellenfunktion wie folgt angeschrieben werden:

$$\oint (\nabla\varphi)\, d\overrightarrow{s} = 2\pi n = \frac{\hbar}{2e}\oint \overrightarrow{A}\, d\overrightarrow{s} - \int_1^2 \overrightarrow{A}\, d\overrightarrow{s} = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - \int_1^2 (\nabla\varphi)\, d\overrightarrow{s} \tag{65}$$

Löst man das Integral auf, so ergibt sich:

$$2\pi n = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - \int_1^2 (\nabla\varphi)\, d\overrightarrow{s} = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \left(\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\Delta\varphi}\right) \tag{66}$$

$$2\pi n = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \Delta\varphi \rightarrow 0 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \Delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi = -\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \tag{67}$$

Die Vielfachen von 2π tragen physikalisch gesehen nichts zum Ergebnis bei, wodurch diese (siehe Gleichung 67) ignoriert werden können. Somit ergibt sich für die Phasendifferenz der bereits erwähnte Zusammenhang $\Delta\varphi = -\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}$

Der eingeprägte Gesamtstrom ergibt sich somit zu:

$$I = -I_{J_0} \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \tag{68}$$

Der Zirkulationsstrom ist periodisch in Φ und hat die Form der Beugung am Spalt. Das negative Vorzeichen deutet darauf hin, dass der Strom den Fluss abzuschirmen versucht. Somit können Flussquanten gezählt werden. Da, wie bereits im Kapitel II.3.2 erwähnt wurde, $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} Wb$ ist, entspricht die Flussänderung von einem Flussquant Φ_0 in einer SQUID-Fläche von 1 cm^2 einer Feldänderung von $2 \cdot 10^{-11} T$. Jedoch können bereits Feldänderungen mithilfe der Lock-In Technik im Bereich von 10^{-14} bis $10^{-15} T$ nachgewiesen werden.

Für die Flussmessung wird das dc-SQUID mit einem Biasstrom I_B betrieben (siehe Abbildung 24), welcher sich knapp oberhalb des doppelten Josephson-Stroms befindet. So können $U(I)$-Kennlinien des SQUIDs als Funktion des magnetischen Flusses Φ dargestellt werden. Die Abbildung 27 zeigt eine solche Kennlinie. Vergleicht man diese mit der Kennlinie eines einfachen Josephson-Kontaktes (siehe Abbildung 17, Strom-Spannungscharakteristik eines Sn-SnO-Sn Kontakts) so kann man gewisse Ähnlichkeiten erkennen, wobei das Koordinatensystem um 90° gedreht, sowie beim Doppelkontakt ein Parallelwiderstand (siehe Abbildung 24) berücksichtigt wurde. Daher kommt es bei Überschreiten des Josephsonstromes in einem dc-SQUID nicht zum Sprung auf die Tunnelstromkennlinie, sondern die Funktion nähert sich mit steigender Spannung der $U(I)$-Kennlinie des ohmschen Parallelwiderstandes. Wird der externe Fluss weiter erhöht,

verschiebt sich die Charakteristik nach links zum einfachen Josephson-Strom (aufgrund der Interferenz der Teilströme) bis der Fluss im SQUID $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_0$ ist. Nimmt der Fluss weiter zu, verschiebt sich die Kennlinie nach rechts bis zum ursprünglichen doppelten Josephsonstrom bei $\Phi = n\Phi_0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ..)$

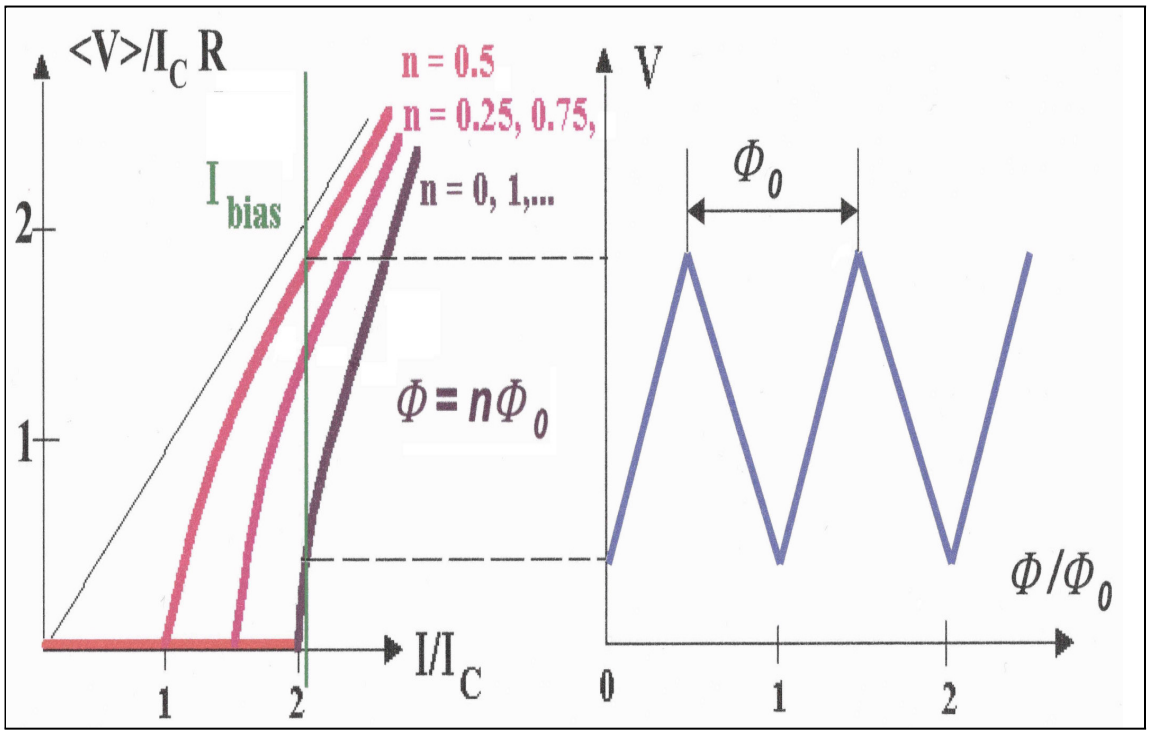

Abbildung 27: Schematische Darstellung der Magnetfeldabhängigkeit der $U(I)$- Kennlinie eines dc-SQUID [6].

Idealerweise wird der gesamte kritische Strom zur Modulation ausgenutzt, wodurch sich ein maximales Spannungssignal ergibt. In der Praxis erwies sich dies jedoch als schwierig, wodurch der Parameter β_L eingeführt wurde. Dieser wird folgendermaßen definiert:

$$\beta_L = \frac{2I_c \cdot L}{\Phi_0} \tag{69}$$

Daraus ergibt sich, dass je größer β_L ist, desto geringer ist der Anteil von I_c, der tatsächlich eine Magnetfeldabhängigkeit zeigt, wobei L die Induktivität des SQUIDs angibt.

Für gewöhnlich betreibt man ein SQUID im *Flux-Locked-Loop* Modus (siehe Ab-

bildung 28). Dabei wird einer externen Spule so Strom zugeführt, dass der dabei entstehende magnetische Fluss den neuen von außen auftretenden Fluss eliminiert. Über eine Elektronik wird dieser Strom geregelt beziehungsweise gemessen, wodurch man auf das angelegte Magnetfeld, welches nur einem Bruchteil eines Flussquantum entspricht, rückschließen kann.

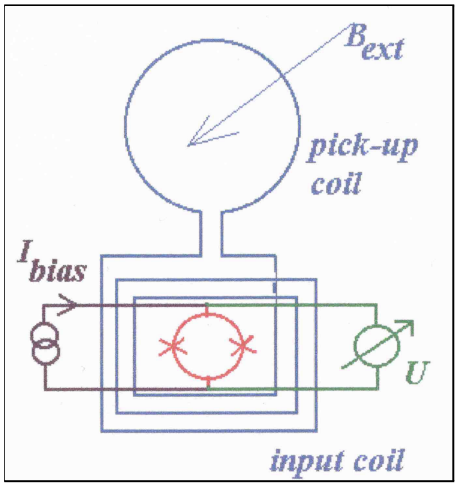

Abbildung 28: Schemtische Darstellung eines SQUIDs im Flux-Locked-Loop Modus [6].

Teil V

MR. SQUID

In dieser Arbeit wurde der SQUID-Sensor *Mr. SQUID* der Firma *STAR CRYOLELECTRONICS* verwendet [19],[20]. Mr. SQUID ist mit einem $YBa_2Cu_3O_7-$Supraleiter ausgestattet, der seine kritische Temperatur bei $T_c \approx 90K$ hat. Wie in der Abbildung 29 dargestellt besteht der Lieferumfang von Mr. SQUID aus einer batteriebetriebenen Kontrolleinheit, welche die Elektronik beinhaltet, einem Sensor, dem Verbindungskabel, welches den Sensor mit der Kontrolleinheit verbindet, einem $\mu-$Metall- Abschirmschild und einem Stickstoffdewar. Für die Inbetriebnahme benötigt man neben zwei $9V$ Blockbatterien noch flüssigen Stickstoff sowie ein Oszilloskop oder einen $X-Y-$ Schreiber, die mit BNC-Kabeln mit der Kontrolleinheit verbunden werden, um das Output Signal zu visualisieren.

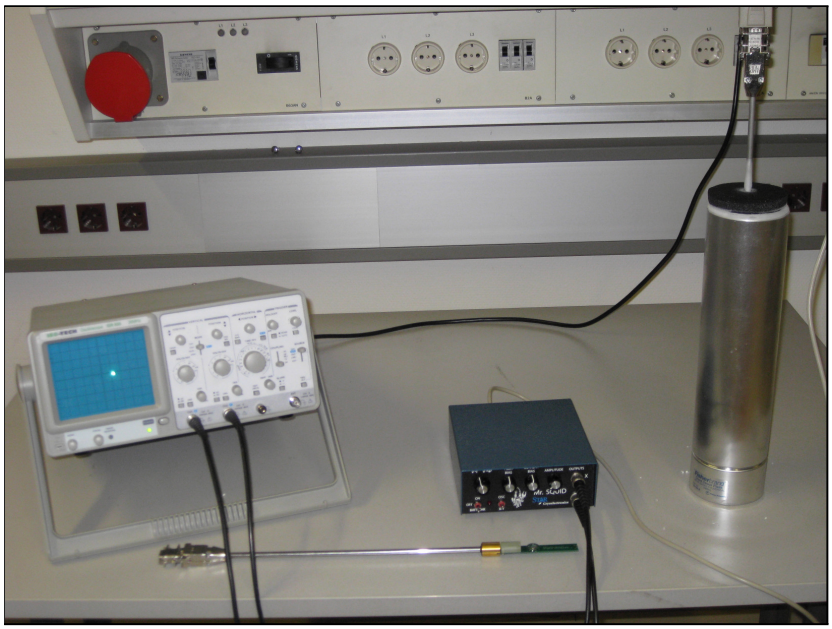

Abbildung 29: Darstellung der benötigten Teile für die Inbetriebnahme von Mr. SQUID.

7 Beschreibung der Kontrolleinheit

Die Abbildung 30 zeigt die Frontansicht von Mr. SQUID. Die diversen Einstell- sowie Anschlussmöglichkeiten sind nummeriert und werden im nächsten Kapitel detailiert besprochen.

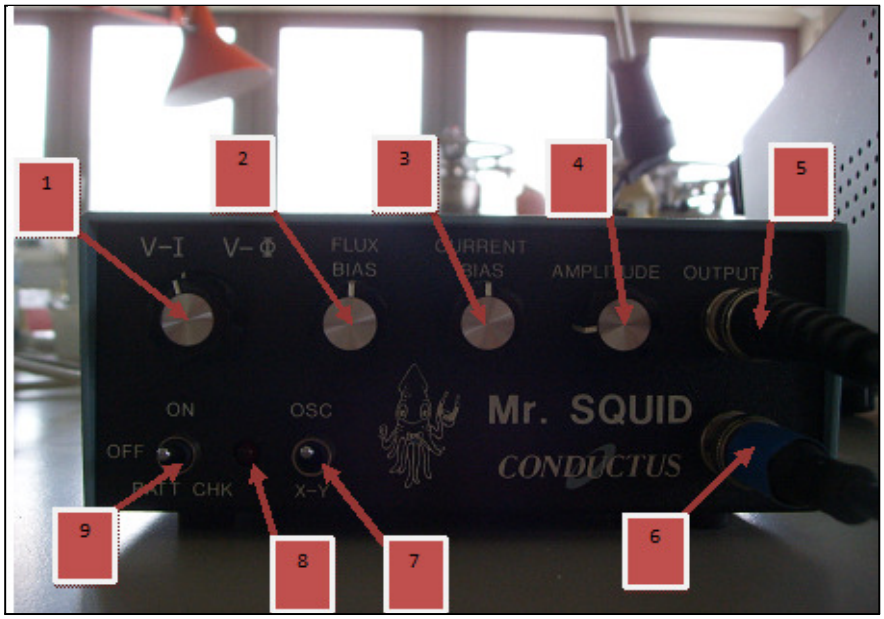

Abbildung 30: Frontansicht der Mr. SQUID Kontrolleinheit.

7.1 Anschlüsse und Einstellungsmöglichkeiten:

1. Der Funktionsschalter $V - I$; $V - \Phi$

Mit diesem kann man zwischen den zwei Betriebsarten wählen:

$V - I$: Wählt man diese Einstellung, so wird ein dreieckförmiger Strom am SQUID angelegt.

$V - \Phi$: Wählt man diese Einstellung, so wird der dreieckförmige Strom an die mit dem SQUID induktiv gekoppelte, normalleitende Modulationsspule angelegt.

2. Der Flux-Bias-Kontrollschalter

Durch Drehen wird ein Gleichstrom mit variabler Stärke an die Modulationsspule angelegt. Dreht man den Schalter auf die 12 Uhr Position ist dieser Strom fast Null. Diese Einstellung benötigt man, um den kritischen Strom I_c im SQUID manuell durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes beeinflussen zu können.

3. Der Current-Bias-Kontrollschalter

Durch Drehen wird ein Gleichstrom fester Stärke an das SQUID angelegt. Wie beim Flux-Bias-Kontrollschalter ist der Schalter in der 12 Uhr Position fast Null. Wird der Schalter nach links, beziehungsweise nach rechts gedreht wird ein beliebig starker Gleichstrom mit dem jeweiligen Vorzeichen angelegt.

4. Der Amplituden-Kontrollschalter

Dieser gibt, wenn er sich im linken Anschlag befindet, ein Minimum einer Amplitude wieder. Durch Drehen im Uhrzeigersinn wird die Amplitude des dreieckförmigen Stromes in beiden Betriebsarten eingestellt.

5. Der $X-$Ausgang

An diesem Ausgang liegt eine Spannung an, die dadurch erzeugt wird, dass der Strom, der gemessenen werden sollte, durch einen $10k\Omega$ Widerstand geleitet wird. Will man den Strom ausrechnen, muss man also die gemessene Spannung durch $10k\Omega$ dividieren. Dabei entspricht in der $V-I$ Einstellung der Strom jenem Strom, der durch das SQUID geleitet wird. Dieser setzt sich aus dem dreiecksförmigen Strom und dem voreingestellten Current-Bias-Gleichstrom zusammen. In der $V-\Phi$ Betriebsart entspricht er jenem Strom, der durch die Modulationsschleife geleitet wird, also dem dreiecksförmigen Strom und dem Strom aus der Flux-Bias-Einstellung.

6. Der $Y-$Ausgang

An diesem Ausgang wird jene Spannung gemessen, die durch den SQUID erzeugt wird. Zusätzlich wird die Spannung intern mit einem Faktor von 10^4 verstärkt.

7. Die Oszillationsfrequenz

Mit diesem Kippschalter kann man zwischen zwei Frequenzen für den dreiecksförmigen Strom wählen. Liegt der Kippschalter an der oberen Position an, beträgt die Frequenz zirka $15Hz$ und dient der Darstellung am Oszilloskop. Will man einen $X-Y-$Schreiber als Ausgabegerät anschließen, wählt man die untere Position des Kippschalters, wobei hier mit einer Frequenz von zirka $7 \cdot 10^{-2}Hz$ gearbeitet wird. Man sollte zusätzlich darauf achten, dass im hochfrequenten Modus nur das Oszilloskop als Ausgabegerät verwendet wird, da die hohen Geschwindigkeiten den $X-Y-$Schreiber beschädigen können.

8. Die Batteriekontrolle

Drückt man den Hauptschalter nach unten, so leuchtet das LED-Lämpchen, wenn die Batterien für das Gerät noch ausreichend geladen sind.

9. Der Hauptschalter

Ist der Kippschalter in der Mittelposition, so ist die Kontrolleinheit ausgeschaltet. Legt man den Schalter nach oben, so ist die Kontrolleinheit in Betrieb und es kann mit Mr. SQUID gemessen werden. Wie schon im Punkt 8 beschrieben, sollte das LED-Lämpchen für die Batteriekontrolle durch Nachuntendrücken des Hauptschalters aufleuchten.

Auf der Rückseite der Kontrolleinheit ist noch der Anschluss für das Verbindungskabel zum Senor, sowie ein BNC-Anschluss für eine externe Modulationsspule des SQUIDs.

8 Vorbereitungen für die Inbetriebnahme

1. Batterietest

Bevor man mit Mr. SQUID arbeitet, sollten die Batterien, die für die Kontrolleinheit benötigt werden, auf ihren Ladezustand getestet werden. Durch Nachuntendrücken des Hauptschalters erhält man über das LED-Lämpchen durch Aufleuchten die Information, ob die Batterien noch einen akzeptablen Ladezustand besitzen. Leuchtet das Lämpchen nur schwach beziehungsweise gar nicht, müssen die Batterien durch neue ersetzt werden, wobei sich das Batteriefach auf der Unterseite der Kontrolleinheit befindet.

Warum wird die Kontrolleinheit nicht mit Netzspannung versorgt?

Die Batterieversorgung bei dieser Kontrolleinheit ist darauf zurückzuführen, dass hier mit sehr kleinen Spannungen gearbeitet wird und somit Störungen, die von der Netzspannung hervorgerufen werden, wie zum Beispiel induktive Kopplungen ausgeschlossen werden können, da diese einen zu großen Einfluss auf das Messergebnis hätten. Darüber hinaus wäre ein direkter Anschluss an das Stromnetz mit einem zu großen Aufwand verbunden und ist daher nicht empfehlenswert.

Um die Lebensdauer der Batterien zu verlängern, sollte bei der Nichtverwendung von Mr. SQUID immer darauf geachtet werden, dass der Hauptschalter der Kontrolleinheit auf der Mittelposition steht, wodurch das Gerät ausgeschaltet ist.

2. Flüssiger Stickstoff

Im Paket von Mr. SQUID ist auch ein Stickstoffdewar mitgeliefert worden, das für die Versuche mit Mr. SQUID mit flüssigem Stickstoff befüllt werden muss. Man befüllt das Dewar zu $\frac{3}{4}$, wodurch man mehrere Stunden an Experimentierzeit gewinnt. Beim Befüllen ist auf ausreichenden Schutz der Augen und Hände, sowie auf die Handhabung mit dem Dewargefäß zu achten.

Sinkt während der Versuche der Stickstoffpegel unterhalb des SQUID-Sensors ab, muss flüssiger Stickstoff nachgefüllt werden.

3. Abkühlen des Sensors

Bevor der Sensor (siehe Abbildung 31) im flüssigen Stickstoff abkühlt, muss darauf geachtet werden, dass das Anschlusskabel nicht an der Kontrolleinheit angeschlossen ist. Anschließend wird die Abdeckung des Dewars an dem Sensorstab befestigt und der Sensor in den flüssigen Stickstoff getaucht. Bis der gesamte Sensor auf die Temperatur des flüssigen Stickstoffs ($77K$) abgekühlt ist, muss man eine Wartezeit von einigen Minuten einrechnen. Dabei sollte man darauf achten, dass der Sensor möglichst langsam

eintaucht, da ansonsten zu viel Stickstoff auf einmal verdampfen und der Druck im Dewar zu stark ansteigen würde, wodurch es zu einem Übersieden (Kochen) am Dewar kommen könnte.

4. Zusammenschließen des Sensors mit der Kontrolleinheit

Ist der Sensor einmal abgekühlt, kann man das Kabel an die Kontrolleinheit anschließen. Der Anschlussstecker befindet sich dafür auf der Rückseite der Kontrolleinheit. Beim Anschließen sollte darauf geachtet werden, dass einerseits das Dewargefäß samt Sensor nicht kippen kann, sowie dass der Sensor im Dewar ein wenig vom Dewarboden angehoben wird, um Beschädigungen am Sensor beziehungsweise Dewar zu vermeiden.

5. Anschließen der Ausgabegeräte

Damit die Messungen von Mr. SQUID auch visuell darstellbar sind, kann man entweder ein Oszilloskop oder einen $X-Y-$Schreiber oder auch beides verwenden. Das Oszilloskop ist dabei dc-gekoppelt und wird im $X-Y-$Modus betrieben, wobei man den Ausgang X an der Kontrolleinheit mit dem $X-$Eingang am Oszilloskop verbindet. Selbiges gilt für den $Y-$Ausgang.

Will man zusätzlich zum Oszilloskop einen $X-Y-$Schreiber anschließen, benötigt man zusätzlich zu den Kabeln noch zwei BNC-T-Stücke, die am Oszilloskop befestigt werden.

Nach dem Anschließen der Kabel ist Mr. SQUID betriebsbereit und kann eingeschaltet werden.

Abbildung 31: Sensor von Mr. SQUID: ein dc-SQUID mit zwei Josephson-Kontakten.

9 Grundlegende Betriebsarten

Um am Oszilloskop eine visuelle Darstellung zu bekommen, muss einerseits das Oszilloskop wie schon im vorigen Kapitel erwähnt, im $X-Y-$Modus betrieben werden und die beiden Eingänge auf dc geschaltet sein. Außerdem sollte der Kippschalter an der Kontrolleinheit auf OSC gestellt sein und die Eingangsempfindlichkeit am Oszilloskop für die $x-$Achse auf $0,5\frac{V}{cm}$ und für die $y-$Achse auf $5\frac{mV}{cm}$ eingestellt werden.

Wie bereits bei der Beschreibung der Kontrolleinheit erwähnt wurde, kann man bei Mr. SQUID zwischen zwei Betriebsarten wählen. Einerseits gibt es die $V-I$ Betriebsart, die den Spannungs-Strom-Verlauf darstellt, andererseits kann mithilfe der $V-\Phi$ Betriebsart der Spannungs-Fluss-Verlauf gezeigt werden. Folgend werden nun die zwei Betriebsarten detailiert angeführt.

9.1 Die $V-I$ Betriebsart: der Spannungs-Strom-Verlauf

Um überhaupt in der richtigen Betriebsart messen zu können, müssen vor dem Einschalten der Kontrolleinheit noch folgende Schritte vorgenommen werden:

a. den Funktionsschalter auf den $V-I$ Betrieb stellen

b. den Flux-Bias auf die 12 Uhr Position stellen

c. den Current-Bias auf die 12 Uhr Position stellen

d. die Amplitude auf Null stellen

Anschließend kann die Kontrolleinheit eingeschaltet werden. Im Ausgaberät (Oszilloskop) sollte nun ein heller Punkt erscheinen, der mithilfe der Offseteinstellungen in den Nullpunkt des Oszilloskopbildschirmes verschoben wird. Der Punkt entsteht dadurch, dass die Amplitude auf Null gestellt ist und somit die dreiecksförmige Spannung auf ein Amplitudenminimum gedrückt wird.

Dreht man am Current-Bias-Knopf, wodurch der Strom durch das SQUID erhöht werden kann, so wandert der Punkt über den Bildschirm. Dabei kann man auf der $x-$Achse den Current-Bias-Strom und auf der $y-$Achse die Spannung die am SQUID abfällt ablesen. Die so entstehende Kurve ist die sogenannte $V-I-$Kurve.

Den in der Abbildung dargestellten Verlauf am Oszilloskop erhält man, indem man den Current-Bias wieder auf die 12 Uhr Position bringt und langsam die Amplitude aufdreht. Dabei steigt die Amplitude des dreiecksförmigen Stroms durch das SQUID an und die Abtastung die vorher manuell ausgeführt wurde wird nun automatisiert. Durch einen zusätzlichen Current-Bias-Strom verschiebt sich das Zentrum der Kurve.

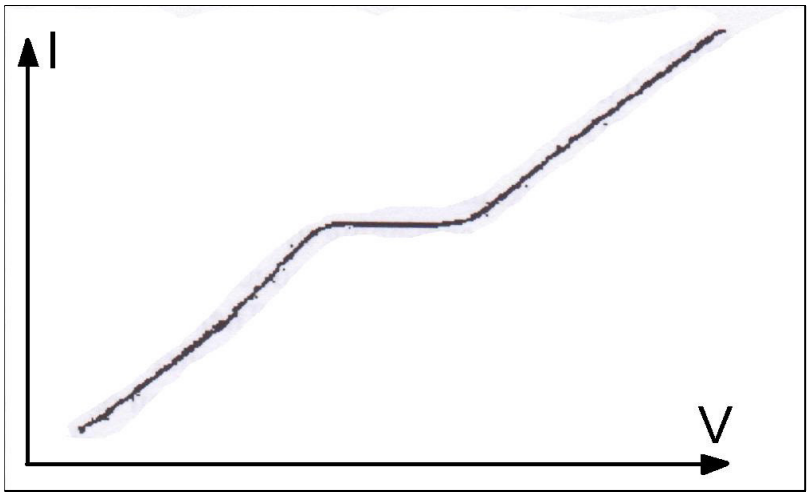

Abbildung 32: Darstellung einer typische $V - I-$ Kurve von Mr. SQUID [19].

Aus der dargestellten Spannung kann auf indirektem Wege auf den durch das SQUID geleiteten Strom I und auf die am SQUID abfallende Spannung U zurückgerechnet werden. Für den Strom I und für die Spannung U gelten die folgenden Formeln, wobei α den Maßstab der $x-$Achse und β den Maßstab der $y-$Achse angeben:

$$I = \frac{p_y \cdot \alpha}{10000} \tag{70}$$

$$V = \frac{p_x \cdot \beta}{10000} \tag{71}$$

Für die Variablen p_x und p_y werden dabei die Entfernungen des Punktes von der $x-$ beziehungsweise von der $y-$Achse eingesetzt.

Bei richtiger Einstellung am Oszilloskop beziehungsweise an der Kontrolleinheit, wird am Oszilloskop die in der Abbildung 32 gezeigte theoretische Kurve dargestellt, welche im Versuch in der Abbildung 33 gezeigt wird.

Führt man nun eine Änderung beim Flux-Bias-Kontrollschalter durch, so beeinflusst diese Änderung den horizontalen Bereich der $V - I-$Kurve erheblich, da dadurch ein Strom durch eine Spule geschickt wird, welche sich oberhalb des SQUID befindet und sich daher im SQUID ein Magnetfeld einprägt. Aus der Änderung des Flux-Bias-Kontrollschalters folgt eine Änderung des kritischen Stroms, wobei man versucht den horizontalen Bereich auf ein Maximum zu bringen (siehe Abbildung 34). Dabei handelt es sich bei der Länge des horizontalen Bereiches um den vierfachen kritischen Strom I_c.

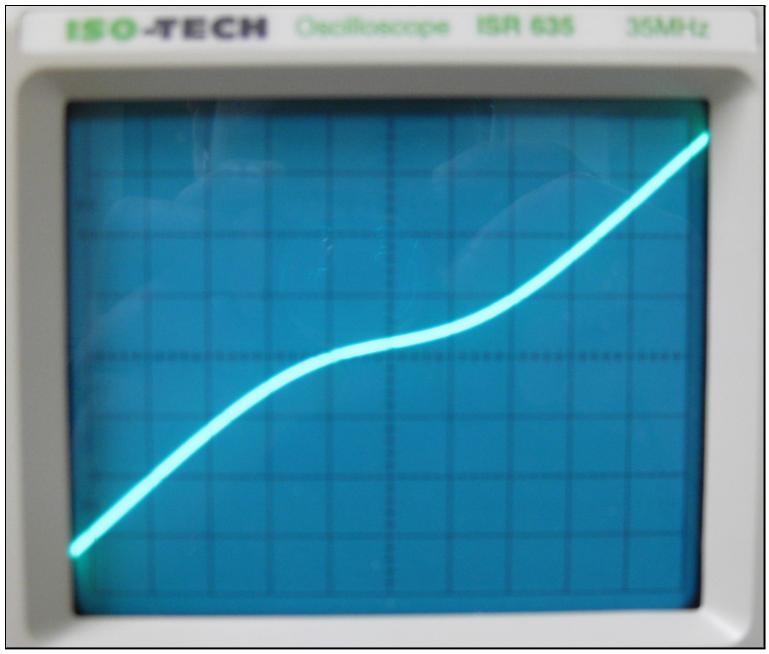

Abbildung 33: Darstellung der von Mr. SQUID ausgegebenen $V - I-$Kurve am Oszilloskop mit $\alpha = 0,5\frac{V}{cm}$ und $\beta = 20\frac{mV}{cm}$.

Der vierfache Betrag des kritischen Stromes rührt einerseits daher, dass zwei Josephson-Kontakte vorhanden sind, wie auch die positiven und negativen Ströme in der Kurve beinhaltet sind. Für einen Josephson-Kontakt erhält man bei Mr. SQUID einen kritischen Strom von etwa $I_c = 10\mu A$.

Eine weitere wichtige Größe ist der normalleitende Widerstand R_N der beim Übergang vom supraleitenden auf den normalleitenden Zustand gewonnen werden kann. Dabei wird bei richtiger Betrachtung (richtige Dimensionen sowie richtige Maßstäbe) R_N aus der Steigung der $V - I-$Kurve abgelesen. Da am SQUID jedoch zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte vorhanden sind, handelt es sich bei der Steigung um $\frac{R_N}{2}$. Berechnet man folglich das Produkt aus dem kritischen Strom I_c und R_N so erhält man einen Wert für die maximale Spannungsänderung im SQUID, welche durch ein Flussquantum hervorgerufen wird. Für Mr. SQUID erhält man für I_cR_N dabei Werte im Bereich von 1 und $10\mu V$.

Wie schon im Kapitel Vorbereitung für die Inbetriebnahme von Mr. SQUID angesprochen wurde, kann es passieren, dass während der Versuche der flüssige Stickstoff im Dewar verdampft und zu wenig vorhanden ist. Dadurch wird der Senor nicht ausreichend gekühlt und die $V - I-$Kurve weist keinen horizontalen Bereich mehr auf. Weit

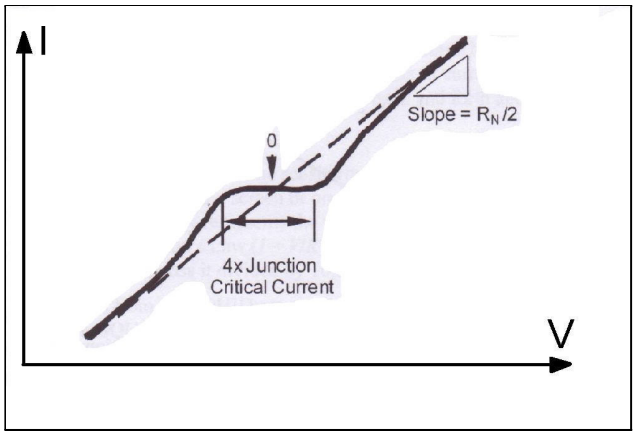

Abbildung 34: Theoretische Darstellung des vierfachen kritischen Stroms sowie der Steigung des normalleitenden Widerstands R_N [19].

häufiger kommt es aber vor, dass ein magnetischer Fluss beim Abkühlen eingefangen wird, was in der $V-I-$Kurve zu denselben Verläufen führt. So ein Kurvenverlauf ist in der Abbildung 35 dargestellt. Ein magnetischer Fluss wird vor allem dann eingefangen, wenn das Magnetschild vom Sensor entfernt wird. Durch Erwärmen des Sensors über eine kritische Temperatur $T_C \approx 90K$, bei dem der SQUID im Sensor normalleitend wird, werden die induzierten Ströme aufgrund des Widerstandes gedämpft. Vor einer neuen Abkühlung sollten noch alle in der Nähe befindlichen Elektrogeräte und Magnete abgestellt oder entfernt werden und das Anschlusskabel abgeklemmt werden.

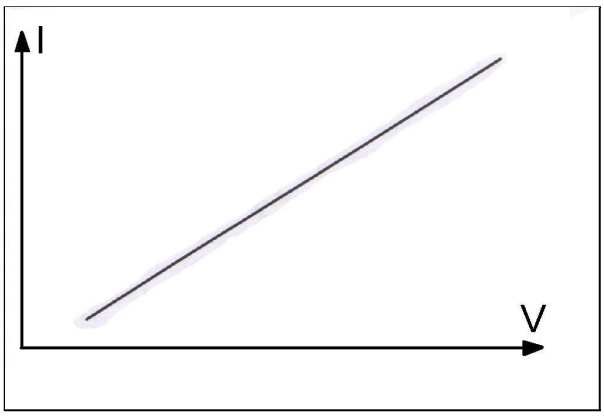

Abbildung 35: Theoretische $V-I-$Kurve bei nicht ausreichender Sensorkühlung [19].

9.2 Die $V - \Phi$ Betriebsart: der Spannungs-Fluss-Verlauf

Neben den wichtigen Eigenschaften in der $V - I$ Betriebsart sind auch in der $V - \Phi$ Betriebsart einige Eigenschaften von Bedeutung. Zum Beispiel steht die Ausgangsspannung in Beziehung zum anliegenden magnetischen Fluss, was man aus der Flussquantisierung in supraleitenden Ringen (siehe Kapitel II.3) herleiten kann. In der $V - I$ Betriebsart wurde durch die Änderung des Flux-Bias-Stroms schon die Abhängigkeit vom magnetischen Feld gezeigt. Im $V - \Phi$ Modus kann diese Abhängigkeit automatisiert dargestellt werden.

Befindet man sich in der $V - I$ Betriebsart, so wird, wie schon besprochen, durch Änderung des Flux-Bias, in dem ein Strom über eine Modulationsspule läuft, ein Magnetfeld angelegt. Mr. SQUID ist so konzipiert, dass man zusätzlich noch eine weitere externe Spule versorgen kann die in Abbildung 36 dargestellt ist.

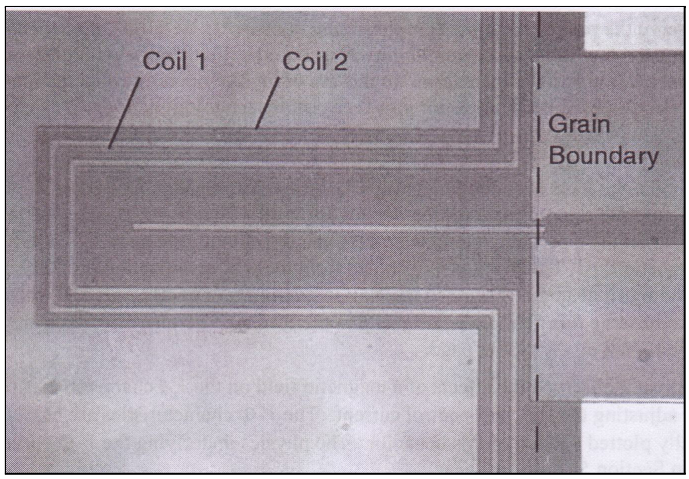

Abbildung 36: Darstellung der in Mr. SQUID eingebauten internen sowie der externen Modulationsspule. Der schematische Aufbau wurde bereits im Abschnitt IV Abbildung 28 dargestellt [19].

Der kritische Strom beziehungsweise die ganze $V - I -$Kurve wird durch das Variieren des Flux-Bias verändert. Ausgelöst wird die Änderung der Kurve durch das hervorgerufene Magnetfeld, welches sich bei der Variation des Flux-Bias natürlich ändert. Bewegt man einen Permanentmagneten auf der Höhe des Sensors rund um den Dewar, kann man auch so den Zusammenhang zwischen einem externen Magnetfeld und dem kritischen Strom veranschaulichen.

In der $V - \Phi$ Betriebsart kann der $V - \Phi -$Kurvenverlauf nur dann sehr gut darge-

stellt werden, wenn der Bias-Current so eingestellt wird, dass das SQUID ein Maximum an Empfindlichkeit gegenüber dem Magnetfeld aufweist, welches sich in der $V - I$ Betriebsart im Knie der $V - I-$Kurve (siehe Abbildung 37) befindet.

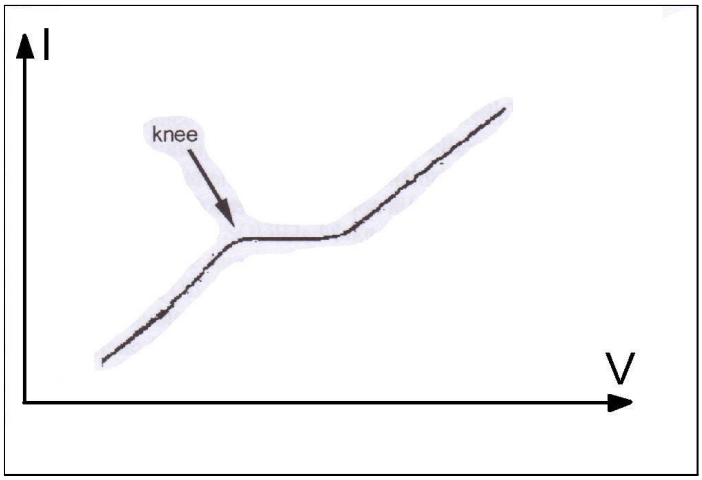

Abbildung 37: Darstellung der $V - I-$Kurve mit eingezeichnetem Knie [19].

Das Knie der $V - I-$Kurve kann folgendermaßen bestimmt werden:

Im $V - I$ Modus sucht man durch Variieren des Flux-Bias den maximalen kritischen Strom. Anschließend dreht man die Amplitude auf Null zurück, sodass nur mehr ein Punkt am Oszilloskopbildschirm sichtbar ist. Mit Hilfe des Current-Bias kann nun der Punkt so verschoben werden, dass man diesen in das Knie der $V - I-$Kurve setzt. Durch zusätzliche Änderung am Flux-Bias läuft der Punkt nun einer vertikalen periodischen Bewegung nach, welche durch auftretende Ströme im SQUID entstehen. Die Periodizität entsteht aufgrund der Differenz des angelegten magnetischen Flusses (durch den Flux-Bias) und den darin enthaltenen ganzen Flussquanten. Somit ist makroskopisch bewiesen, was bereits im Kapitel der Flussquantisierung durchbesprochen wurde: Die Supraleitung ist von quantenhafter Natur.

Für eine Automatisierung der periodischen Funktion, schaltet man nun auf die $V - \Phi$ Betriebsart um. Die Kontrolleinheit von Mr. SQUID ist so konzipiert, dass alle Bedienelemente bis auf den Amplitudenknopf in beiden Betriebsarten dieselben Funktionen aufweisen. Die Amplitudenkontrolle im $V - I$ Modus wird in der $V - \Phi$ Betriebsart für die Regelung des Stromes durch die Modulationsspule verwendet, was folglich das Magnetfeld beeinflusst. Damit man am Oszilloskopbildschirm so viele $V - \Phi-$Perioden wie

möglich erhält, muss man den Amplituden-Kontrollschalter auf ein Maximum drehen, wobei die gezeigte $V - \Phi-$Kurve dann der Abbildung 38 ähneln sollte.

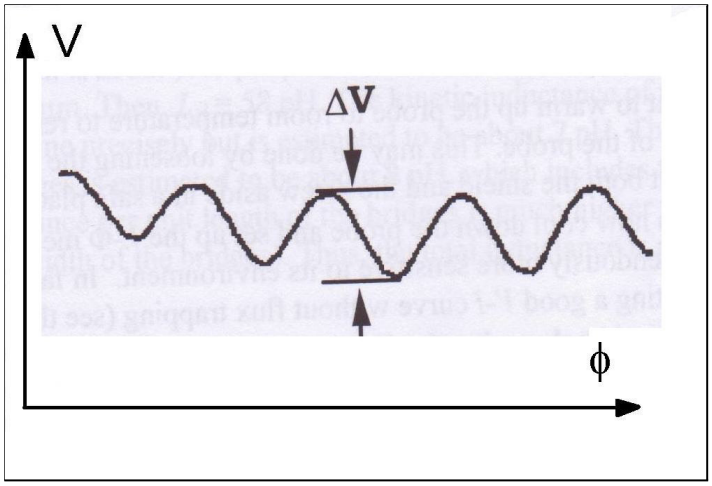

Abbildung 38: Theoretische Darstellung der Spannungsamplitude ΔV im $V - \Phi$ Modus [19].

Am Ausgabebildschirm sollten zum Schluss zwischen vier und fünf oszillierende Perioden dargestellt sein. Die horizontale Achse stellt dabei jene Spannungsänderung dar, welche durch den Einfluss des magnetischen Feldes entsteht, wobei für Mr. SQUID eine Spitze-Spitze-Spannung zwischen 10 und $30\mu V$ zu erwarten ist. Die $V - \Phi-$Kurve kann noch insoweit optimiert werden, indem man einerseits den Current-Bias feinjustiert und somit eine maximale Signalspannung erhält, sowie andererseits am Oszilloskop das vertikale Signal ac-koppelt. Mit Hilfe des Flux-Bias kann folgender Effekt in der $V-\Phi-$Kurve gezeigt werden:

Durch die Veränderung des Flux-Bias-Wertes kann der zentrale Wert des Flusses Φ eingestellt werden, um welchen dann die Amplitudenkontrolle variiert. Dadurch erreicht man, dass sich der ganze $V - \Phi-$Kurvenverlauf horizontal verschieben lässt.

Eine weitere Möglichkeit, den $V - \Phi-$Kurvenverlauf horizontal zu verschieben ist es, wenn man sich mit einem Permanentmagneten dem Sensor nähert. Wird zusätzlich das magnetische Abschirmschild abgenommen, stellt man fest, dass der SQUID viel sensibler auf seine Umgebung reagiert.

10 Bemerkungen zum Versuch

Leider stellte sich heraus, dass das μ-Metall-Abschirmschild, das die Probe umfasst, zuerst nicht vollständig entmagnetisiert war. Dieses wurde mithilfe eines Ofens über den Curiepunkt erhitzt und langsam abgekühlt, sodass diese schlussendlich entmagnetisiert waren.

Als weitere Fehlerquelle hat sich die Radiofrequenz der neu installierten Telefonanlage in der TU-Wien erwiesen. Die Messungen wurden daher in einem abgeschirmten Raum durchgeführt. Da aber auch hier ein, wenn auch schwacher Telefonempfang möglich ist, wurde versucht die Radiofrequenz mit einem geschlossenen Kupfer-Zylinder abzuschirmen. Die Messleitungen wurden durch eine Bohrung in den geschlossenen Kupferhohlzylinder durchgeführt. Dies war nur teilweise erfolgreich. So konnten bis auf die $V-I-$ Kennlinie (siehe Abbildung 33), welche annähernd der theoretischen Kurve entspricht, keine weiteren nennenswerten Messergebnisse am Oszilloskop dargestellt werden. Aus dieser Kennlinie erhält man für einen Josephson-Kontakt einen kritischen Strom von $I_c = \frac{p_y \cdot \alpha}{4 \cdot 10000} = \frac{8 \cdot 0{,}02}{40000} = 4\mu A$.

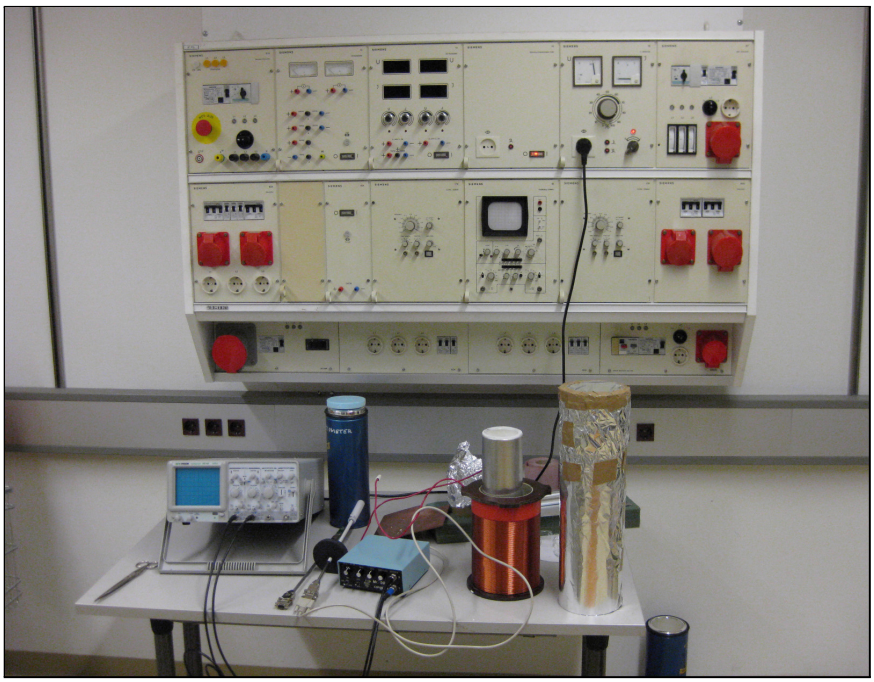

Abbildung 39: Versuchsaufbau von Mr. SQUID mit Kupferschild für die Radiofrequenzabschirmung. Nachdem dieses Kupferschild nicht ausgereicht hatte, die Radiofrequenz abzuschirmen, wurde ein geschlossener Kupfer-Zylinder angefertigt.

Teil VI

SQUID MAGNETOMETER

11 Konventionelle Magnetometer

Bei konventionellen Magnetometern wird entsprechend dem Induktionsgesetz in einer Aufnehmerspule (Pickup-Spule) durch die Änderung der Magnetisierung einer Probe eine Spannung induziert [14], [24], die mit einem geeigneten Voltmeter gemessen wird. Dabei bringt jede Flussänderung sowohl vom externen Feld als auch von der Magnetisierung der Probe eine induzierte Spannung mit sich. Folglich existieren zwei Möglichkeiten für eine zeitliche Flussänderung. Einerseits kann man durch Änderung des angelegten Feldes eine Flussänderung erzwingen oder man bewegt die Probe in einem Pickup-System so, dass es zu einer Änderung des Flusses kommt.

Wie bereits erwähnt, wird durch eine zeitliche Flussänderung eine induzierte Spannung hervorgerufen, die in integrierter Form ein Maß für die Magnetisierung ist. In Gleichung 72 ist diese induzierte Spannung angegeben:

$$U_{ind} = -\frac{n}{l}\mu_0 \int_V \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{V_s}\frac{\partial M}{\partial t} \right) d^3r \tag{72}$$

Betrachtet man die Möglichkeit des Pickup-Systems genauer, so steigt die Empfindlichkeit des Systems mit der Anzahl der Windungen n der Pickup-Spulen, wobei üblicherweise $n = 1000$ Windungen sind.

Somit lassen die besten konventionellen Magnetometer (auch *vibrating sample magnetometer* genannt) die Probe mit einer kleinen Amplitude in der Feldspule schwingen. Die induzierte Spannung wird entweder integriert oder mit einem Lock-in phasensensitiv gemessen.

Jedoch müssen vor den Messungen mit einer Probe Vergleichsmessungen ohne Probe gemacht werden, da sich durch die thermische Ausdehnung der Pickup-Spulen ihre Induktivitäten verändern. Dieses sogenannte $0-$Signal muss von dem Signal der Probe abgezogen werden und begrenzt somit das Auflösungsvermögen der Messung.

12 Pickup-Spulen und Flusstransformator

Im Abschnitt IV wurde beschrieben, dass man mithilfe von SQUIDs den magnetischen Fluss, der aus Bruchteilen von Flussquanten bestehen kann, sehr exakt bestimmen kann. Dazu ist es notwendig die Flussänderung einer Probe, die sich in Feldern von 0 bis $6T$ befindet, zu dem vom Magnetfeld abgeschirmten SQUID-Sensor zu bringen. Dies wird mit einem Flusstransformator erreicht, der aus zwei oder vier supraleitenden Leiterschleifen besteht (Pickup-Spulen), die die Probe umschließen und mit einer supraleitenden Einkopplungsspule mit dem SQUID verbunden ist (siehe Abbildung 40). Eine Flussänderung durch das Streufeld der Probe in dem supraleitenden Pickup-System ergibt somit eine Flussänderung beim SQUID-Sensor, die gemessen wird. Da sowohl Änderungen des externen Feldes als auch Änderungen der Magnetisierung einen Abschirmstrom und somit eine Flussänderung in der supraleitenden Leiterschleife verursachen, besteht das Pickup-System im einfachsten Fall aus zwei entgegengesetzten Windungen mit gleicher Fläche, wodurch der störende Einfluss des externen Feldes kompensiert wird.

Verwendet man vier Windungen, wobei die beiden äußeren Windungen entgegengesetzten Windungssinn zu den beiden Windungen im Inneren haben (vergleiche dazu Abbildung 40), so werden auch die Feldgradienten kompensiert. Dieses Pickup-System befindet sich auf dem Trägerrohr der supraleitenden Spule und bleibt somit immer auf $4,2K$. Vorausgesetzt wird jedoch eine präzise Fertigung dieses Trägerrohrs, damit die vier Windungsflächen möglichst gleich sind. Dies gelingt gegenwärtig mit einer Präzision von 10^{-8} bis 10^{-9}, während bei mehrlagigen Pickup-Spulen in konventionellen Systemen eine Genauigkeit der beiden Spulen von nur 10^{-3} bis 10^{-4} erreicht wird.

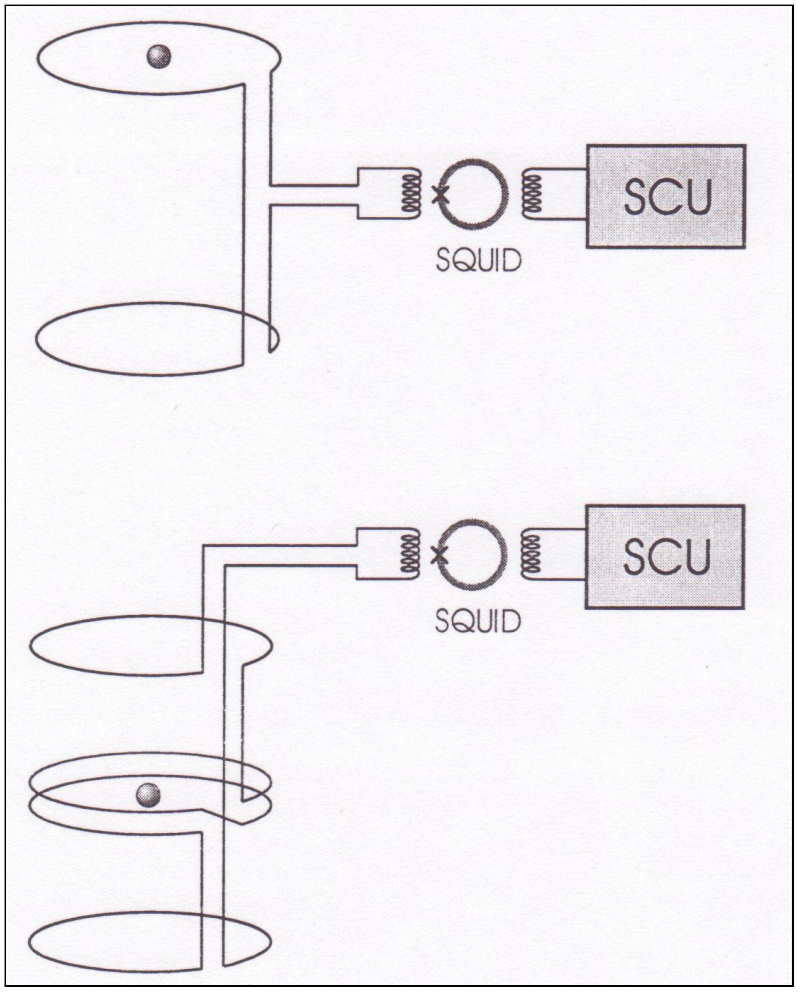

Abbildung 40: Schematische Darstellungen der Leiterschleifen von einem konventionellen Pickup-System. Das einfachste System (oben) besteht aus zwei entgegengesetzten Windungen. Bei der unteren Darstellung werden vier Windungen gezeigt, wobei die mittleren zwei Windungen den entgegengesetzten Windungssinn zu den äußeren Windungen haben. Die kleinen Kugeln geben jene Probenposition an, die das größte Signal im Pickup-System liefert [14].

13 Cryogenics Magnetometer S603

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem SQUID Magnetometer der Firma CRYOGENICS Ltd., welches die Magnetisierung, die als Funktion des angelegten Magnetfeldes und der Temperatur für eine bestimmte Probe, messen kann. In der Abbildung 41 sind die wichtigsten Komponenten des Magnetometers dargestellt. Der Kyrostat beinhaltet zwei übereinander liegende Tanks, wobei der obere mit flüssigem Stickstoff und der untere mit flüssigem Helium befüllt ist. Der Stickstofftank hat die Aufgabe die Abdampfrate des flüssigen Heliums zu minimieren, wobei der durchschnittliche Heliumverbrauch bei zirka fünf Litern pro Tag liegt. Im Heliumtank hängt der Temperatureinsatz an der Spule und den Abschirmschildern (Niobzylinder), in denen sich die SQUIDs befinden. Aus Kostengründen wurde der Durchmesser des Heliumtanks im Bereich der Spule verkleinert. Zusätzlich befindet sich in der Spule das miteingegossene Pickup-System. Am oberen Ende des Temperatureinsatzes befindet sich eine Luftschleuse über die im kalten Zustand die Proben gewechselt werden können. Ein Schrittmotor, der für die Flussänderung verantwortlich ist, bewegt den Probestab während der Messung auf und ab.

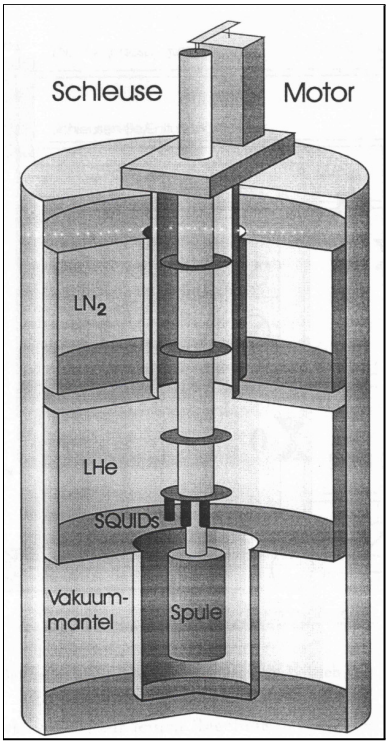

Abbildung 41: Schematischer Aufbau der wichtigsten Komponenten des Magnetometers S603 der Firma CRYOGENICS Ltd ohne Elektronikschrank [14].

13.1 Temperaturkontrolle

Über den sogenannten *Variable Temperature Insert* wird die Temperatur der Probe eingestellt. Flüssiges Helium wird über einen Wärmetauscher auf die gewünschte Temperatur gebracht, umströmt anschließend die Probe und wird von einer angeschlossenen Pumpe abgesaugt. Dabei wird die Temperatur der Probe indirekt durch zwei Sensoren gemessen, da eine direkte Messung zusätzliche Störsignale bei den Sensoren des Pickup-Systems vorweisen würde. So wird die Temperatur des flüssigen Heliums vor und nach dem Umströmen der Probe gemessen. Existiert dabei keine Temperaturdifferenz, kann man davon ausgehen, dass die Probe die gewünschte Temperatur erreicht hat.

Gesteuert wird dieser Prozess durch den Computer, wobei bei jeder neuen Solltemperatur zuerst der Wärmetauscher auf die richtige Temperatur gebracht wird und anschließend durch die zwei Thermometer auf ihre Übereinstimmung geprüft wird.

13.2 Feldspulen und Energieversorgung (Power Supplies)

Das Magnetfeld wird durch eine supraleitende $6T$ starke Primärspule erzeugt, die von zwei verschiedenen Stromquellen versorgt wird. Für sehr hohe Felder steht eine vollautomatische $80A$ starke Quelle zur Verfügung, die durch eine Relais-Umpoleinheit einen vollen Vier-Quadranten-Betrieb ermöglicht. Damit während eines Messpunkts das angelegte Magnetfeld nicht variiert, wird die Primärspule im *persistend mode* betrieben. Das bedeutet, sie ist kurzgeschlossen und von ihrer Versorgungsquelle abgetrennt, sodass sie ein brummfreies Feld erzeugt. Die vollautomatische Quelle garantiert auch, dass die SQUIDs während der Feldänderung vom Pickup-System entkoppelt sind, indem ein Heizer die SQUIDs über ihre kritischen Temperaturen bringt. Nachdem die Feldänderung durchgeführt und eine Wartezeit von etwa einer Minute eingehalten wurde, wird mithilfe der SQUIDs das Feld auf seine Stabilität überprüft. Wird über die SQUID-Kontrolleinheit ein lineares Signal als Funktion der Zeit ausgegeben, kann das Magnetometer S603 mit der Messung der Magnetisierung einer Probe beginnen. Zu erwähnen ist, dass im Vergleich zu einer temperaturabhängigen Messung bei einem konstant vorgegebenen Magnetfeld die Bestimmung der Magnetisierung als Funktion des angelegten Magnetfeldes viel zeitintesiver ist.

Bei kleinen Feldern ($< 80G$) wird eine andere Stromquelle mit $I_{\max} = 100mA$ verwendet, wodurch neben der feineren Feldänderungseinstellung auch das Umpolen viel exakter von statten geht.

13.3 Magnetisierungs- und Suszeptibilitätsmessungen von Mo_3Al_2C

Über die supraleitenden Eigenschaften von Mo_3Al_2C haben bereits 1968 L. Toth und J. Zbasnik mithilfe von spezifischen Wärmemessungen berichtet [26]. Mo_3Al_2C kristallisiert in der kubischen $\beta - Mn$-Struktur, die kein Inversionszentrum aufweist. Bei konventionellen Supraleitern ist jedoch ein Inversionszentrum notwendig, was damals jedoch nicht berücksichtigt wurde, beziehungsweise auch nicht allgemein bekannt war. Eine neuere Untersuchung dieser Verbindung [27] zeigt, dass Mo_3Al_2C aufgrund des fehlenden Inversionszentrums unkonventionelle Supraleitung aufweist, was durch das Verschwinden der Energielücke entweder entlang von Linien oder an Punkten an der Fermifläche charakterisiert ist. Dadurch weist die Wärmekapazität nicht die der BCS-Theorie entsprechende exponentielle Temperaturabhängigkeit auf, sondern variiert mit der dritten Potenz der Temperatur ($C_p \propto T^3$).

Daher wurden im Rahmen dieser Arbeit zur weiteren Charakterisierung des supraleitenden Zustandes Magnetisierungs- und Suszeptibilitätsmessungen von Mo_3Al_2C durchgeführt. Die Abbildung 42 zeigt den Labormessplatz.

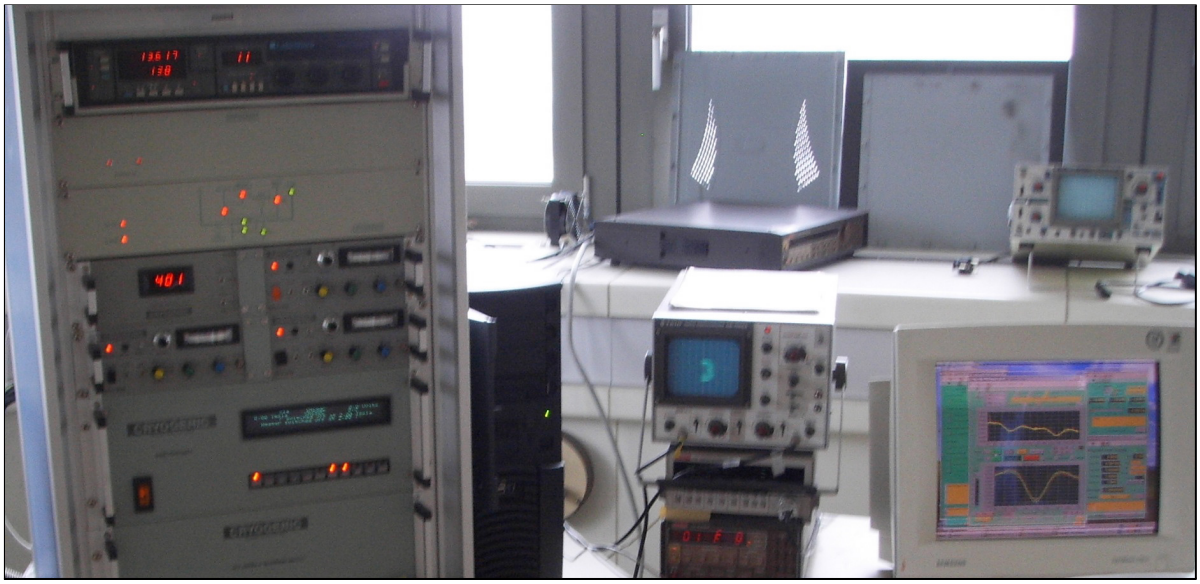

Abbildung 42: Labormessplatz für die Magnetisierungsmessungen des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C.

In der Abbildung 43 ist die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität $\chi = \frac{M}{H}$ als Funktion der Temperatur für verschiedene externe Magnetfelder dargestellt. Dabei wurde die Probe im Nullfeld abgekühlt und dann bei dem entsprechenden Feld erwärmt (dieser Prozess wird als *zero field cooling (ZFC)* bezeichnet).

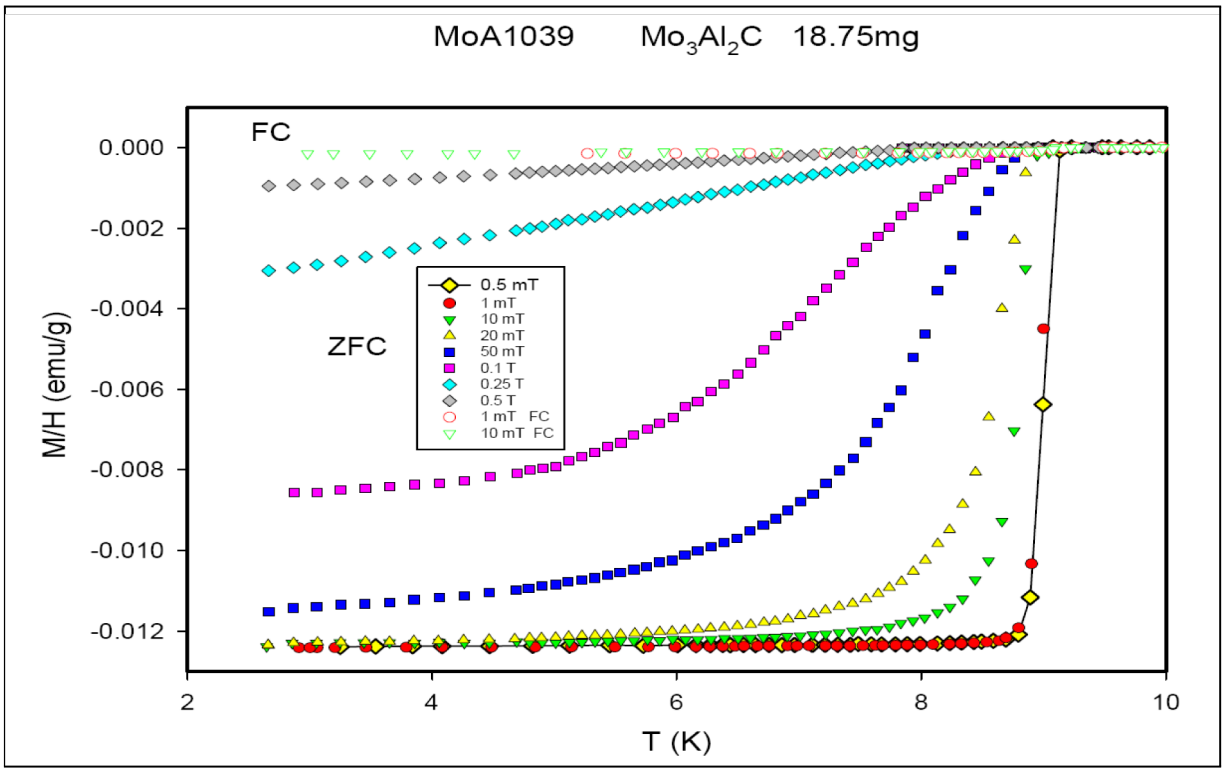

Abbildung 43: Suszeptibilität als Funktion der Temperatur bei konstant vorgegebenen Magnetfeldern des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C.

Dabei sollte die Probe das Feld vollständig verdrängen. Im cgs-System $\left(\overrightarrow{B} = \overrightarrow{H} + 4\pi\overrightarrow{M}\right)$ muss somit die dimensionslose Volumssuszeptibilität bei vollständiger Feldverdrängung den Wert $\chi = -\frac{1}{4\pi} = -7,958 \cdot 10^{-2}$ erreichen. Da die in der Abbildung 43 dargestellte Suszeptibilität pro Masseneinheit ist (in cgs Einheiten $\frac{emu}{g} = \frac{cm^3}{g}$), muss dieser Wert mit der Dichte $\rho = 6,2\ \frac{cm^3}{g}$ multipliziert werden, um den Wert $\frac{1}{4\pi}$ zu erreichen. Bei kleinen Feldern bis $20mT$ ist dies gut erfüllt und beweist die vollständige Feldverdrängung $(6,2\frac{cm^3}{g} \cdot 0,0123\frac{cm^3}{g} = 7,626 \cdot 10^{-2})$. Die fünfprozentige Abweichung ist durch den Entmagnetisierungsfaktor der zylinderförmigen Probe gegeben, die einen Entmagnetisierungsfaktor von $0,05$ aufweist. Mit steigendem externen Feld wird der supraleitende Übergang zu tieferen Temperaturen verschoben. Bei Abkühlung im Feld sollte sich zumindest für

einen Typ-I Supraleiter ebenfalls eine vollständige Flussverdrängung ergeben, was hier jedoch nicht gefunden wird. Der geringe Suszeptibilitätswert bei Abkühlung im Feld (*field cooling* (FC)) ergibt sich durch den eingefrorenen Fluss der gesinterten Probe und des geringen unteren kritischen Feldes bei diesem ausgeprägten Typ-II Supraleiter mit einem sehr hohen Wert des Ginzburg Landau Parameters $\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = 76$.

Die Magnetisierungskurven von Mo_3Al_2C sind in der Abbildung 44 für verschiedene Temperaturen dargestellt und sind typisch für einen Typ-II Supraleiter. Aus der Abweichung der $M - H$-Kurve vom linearen Verhalten bei kleinen Feldern kann das untere kritische Feld bestimmt werden, während der Übergang in den paramagnetischen Zustand das obere kritische Feld ergibt.

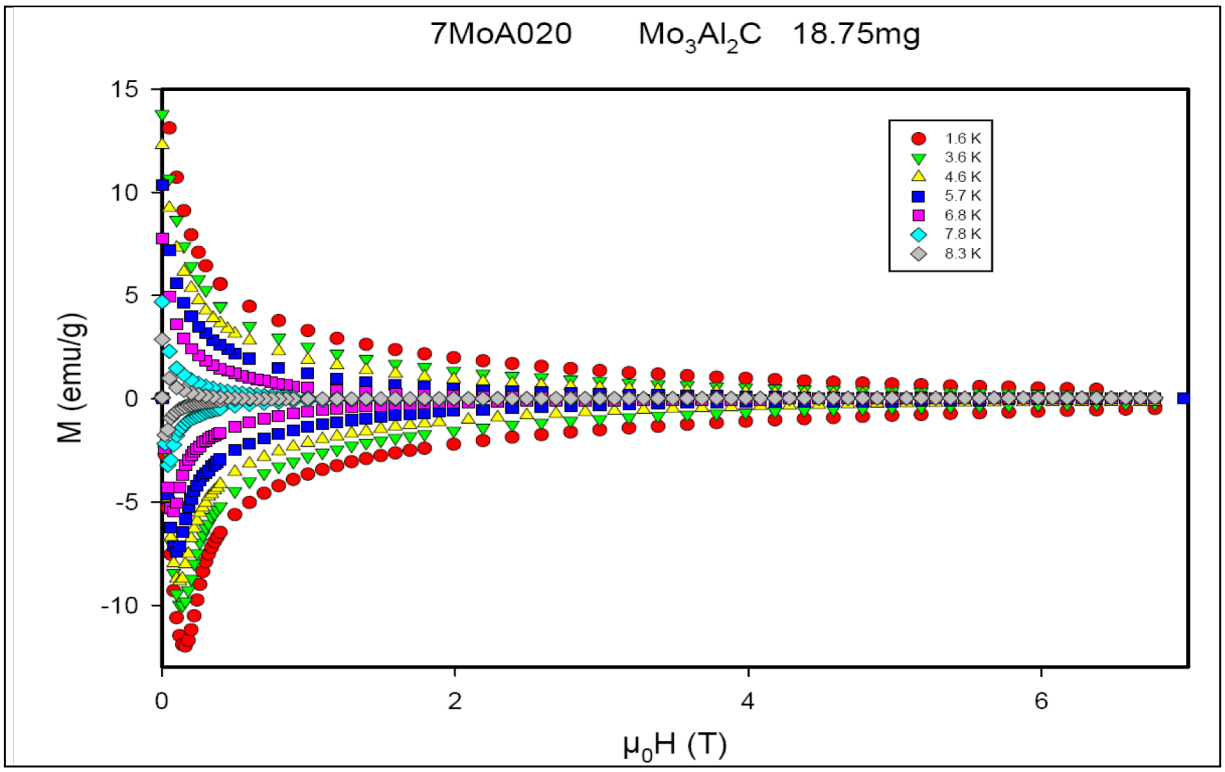

Abbildung 44: Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes bei konstant vorgegebenen Temperaturen des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C.

Die entsprechende Auswertung ist in diesem Maßstab nicht erkennbar, jedoch ist aus der Abbildung 45 ersichtlich, dass das obere kritische Feld bei $1,6K$ noch nicht erreicht ist. Der extrapolierte Wert des oberen kritischen Feldes bei $T = 0K$ liegt bei $15,7T$.

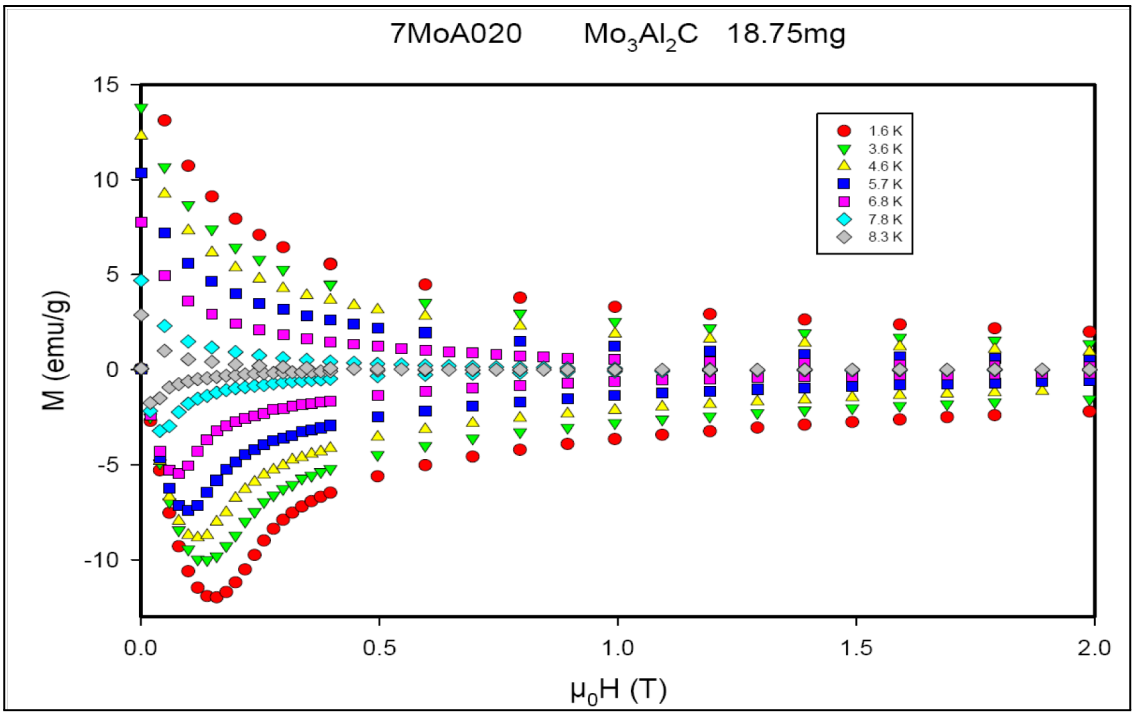

Abbildung 45: Messergebnisse der Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes bei konstant vorgegebenen Temperaturen des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C im Bereich von 0 bis $2T$.

Die ausgewerteten oberen kritischen Felder sind in der Abbildung 46 mit den Werten aus spezifischen Wärmemessungen zusammengestellt und sind miteinander in guter Übereinstimmung.

Zusammengefasst sind die magnetischen Messungen mit den Widerstands- und spezifischen Wärmemessungen, die in der Publikation veröffentlicht werden, in guter Übereinstimmung und charakterisieren den ausgeprägten Typ-II Supraleiter Mo_3Al_2C.

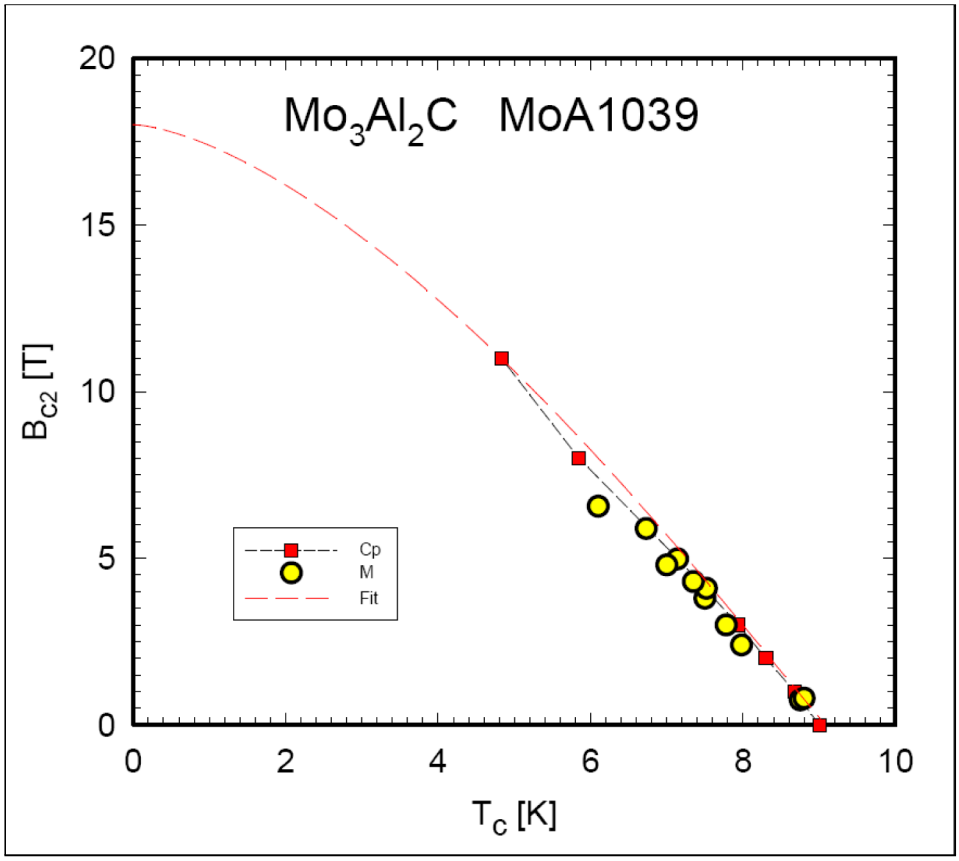

Abbildung 46: Oberes kritisches Feld des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C, welches durch spezifische Wärmemessungen (gekennzeichnet durch das Quadratsymbol), der Magnetisierung (Kreissymbol) und einer einfachen Anpassung an die Messdaten (strichlierte Linien) dargestellt wird. Das kritische Feld liegt bei $17,8T$.

Teil VII

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurde der Schwerpunkt auf Magnetisierungsmessungen mit SQUIDs, den supraleitenden Quanteninterferometern gerichtet.

Begonnen wurde mit physikalischen sowie thermodynamischen Grundlagen zum Thema Supraleitung. Neben dem Meißner-Ochsenfeld Effekt, der Flussquantisierung und der BCS-Theorie wurde weiters auf die verschiedenen Arten der Supraleiter eingegangen. Im Speziellen wurde der Josephson-Effekt näher erläutert, der zeigt, dass Cooper-Paare zwischen zwei Supraleitern, die durch eine dünne Isolationsschicht getrennt sind, tunneln können. Ziel der relativ genauen Beschreibung der Grundlagen in Abschnitt II war es, dem Lesenden bewusst zu machen, wie bedeutend die Kenntnis über Supraleiter für die Anwendung eines SQUIDs ist.

Im Abschnitt III wurde die Levitation sowie die Flusslinienverankerung eines Typ-II Supraleiters mithilfe von Versuchen praktisch durchgeführt.

Die Abschnitte IV bis VI beschäftigten sich dann ausschließlich mit SQUIDs. In Abschnitt IV wurden neben den Grundlagen auch Eigenschaften und wichtige Parameter von SQUIDs beschrieben. Der Abschnitt V beschäftigte sich vollkommen mit Mr. SQUID, einem Flusssensor, der mithilfe eines Oszilloskops den Spannungs-Strom-Verlauf sowie den Spannungs-Fluss-Verlauf eines dc-SQUIDs darstellen kann.

Schließlich wurde im Abschnitt VI ein SQUID-Magnetometer genauer betrachtet, mit dem man Magnetisierungs- und Suszeptibilitätsmessungen als Funktion des Feldes von 0 bis $6T$ und im Temperaturbereich von 2 bis $300K$ messen kann. Als Anwendungsbeispiel wurden dann im Speziellen Magnetisierungs- und Suszeptibilitätsmessungen an einer Mo_3Al_2C-Probe durchgeführt, um die supraleitenden Eigenschaften des Typ-II Supraleiters Mo_3Al_2C zu charakterisieren.

Dem Lesenden sollen durch die Aufzählung der verschiedenen Anwendungsbereiche die vielfältigen praktischen Möglichkeiten von SQUIDs nähergebracht werden.

Teil VIII

LITERATURVERZEICHNIS

Literatur

[1] Enss Ch. u.a., Tieftemperaturphysik, Berlin/Heidelberg, 2000

[2] Nöldechen A., Die Supraleitung. Nobelpreis für eine technische Revolution, Düsseldorf, 1988

[3] Ouboter R., Heike Kamerlingh-Onnes und die Supraleitung, Spektrum der Wissenschaft, 1997

[4] Komarek P., Hochstromanwendungen der Supraleitung, Stuttgart, 1995

[5] Buckel W., Kleiner R., Supraleitung. Grundlagen und Anwendungen, 6.Aufl., Weinheim, 2004

[6] Hilscher G., Magnetismus und Supraleitung, Skriptum zur LV Festkörperphysik I, Teil 2, Institut für Festkörperphysik der TU Wien, 2006

[7] Tipler P., Physik, 3.Aufl., Heidelberg/Berlin, 2000

[8] Weber H. u.a., Supraleitung, München, 1979

[9] Bauer E. u.a., Materialwissenschaften für Technische Physiker, Skriptum des Instituts für Festkörperphysik der TU Wien, 2007

[10] Demtröder W., Experimentalphysik 3. Atome, Moleküle und Festkörper, 2. Aufl., Berlin u.a., 2004

[11] Dekker M., Superconductivity. Volume I, New York, 1969

[12] Poole C. u.a., Superconductivity, 2. Aufl., Columbia, 2007

[13] Tipler P., Llewellyn R., Moderne Physik, München/Wien, 2003

[14] Holubar T., 3-Achsen SQUID-Magnetometrie, Dissertation, TU Wien, 1995

[15] Bennemann K. u.a., The Physics of Superconductore Volume I Conventional and High-T_c Superconductors, Berlin/Heidelberg, 2003

[16] Seeber B., Applied Superconductivity. Volume 1, London 1998

[17] Sawaritzki N., Supraleitung, Frankfurt am Main, 1995

[18] Theuß H., Untersuchung der Flusslinienverankerung in Hoch-T_c Supraleitern, Dissertation, Universität Stuttgart, 1992

[19] Simon R. u.a., Mr. SQUID User´s Guide, Version 6.3, Santa Fee, 2007

[20] o.V., Mr. SQUID, Anleitung für Laborversuche, TU Wien

[21] Narlikas A., High Temperature Superconductivity 2. Engineering Applications, Berlin/Heidelberg, 2004

[22] Beyer J., SQUID-Magnetometrie von optisch generierten Strömen: Grundlagenuntersuchungen und Anwendungen eines neuen Verfahrens zur nichtinvasiven Analytik von Halbleitern und photovoltaischen Bauelementen, Dissertation, Humboldt-Universität Berlin, 2001

[23] Wunderlich R., SQUID-Magnetometer aus $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-X}$, Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 1994

[24] Feiten R., Einrichtung eines SQUID-Magnetometer-Meßstandes,magnetochemische Untersuchungen an $M_2FeRh_5B_2$ und $M_2MnRh_5B_2$ $(M = Mg, Sc)$, PbF_2 und $B_4t - Bu_4$ sowie Versuche zur Darstellung von $ErPt_x-$ Phasen aus Metallschmelzen, Dissertation, Technische Hochschule Aachen, 1996

[25] Bauer E., Hilscher G. u.a., Unconventional superconductivity in weakly correlated, non-centrosymmetric Mo_3Al_2C, eingereicht zur Publikation in Physics Review Letters, 2010

[26] Toth L. E., Zbasnik J., Low temperature heat capactities of superconducting Molybdenum carbides, Acta Metallurgica, Vol.16, September 1968

[27] Bauer E. u.a., Physics Review Letters, Band 76, 014528, 2007