



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Dynamische Interaktion von erneuerbaren Ressourcen und Bevölkerungswachstum

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch

Sara Mösenbacher
Lerchenfelderstraße 55/8
1070 Wien

Wien, Februar 2010

*An dieser Stelle möchte ich Frau Professor Alexia Fürnkranz-Prskawetz recht herzlich für die
Betreuung meiner Diplomarbeit danken.*

*Meiner Familie, speziell meiner Mutter, danke ich für ihre Unterstützung.
Widmen möchte ich diese Arbeit meinem verstorbenen Vater.*

Kurzfassung

Mittels nichtlinearer dynamischer Modelle wird die Interaktion von erneuerbaren Ressourcen und Bevölkerungswachstum auf der Osterinsel diskutiert. Verschiedene Modellansätze werden vorgestellt und Simulationen, die die langfristigen Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklungen beschreiben, werden durchgeführt. Ausgangspunkt ist ein Räuber-Beute-Modell, das den Aufstieg und Fall der Osterinsel plausibel beschreibt. Weitere Modelle ergänzen dieses um institutionelle Adaptierungen wie zum Beispiel die Berücksichtigung der Änderung im Ressourcenstock auf die optimale Abbaurate der Ressource, einem Subsistenzniveau und Erhaltungspolitiken. Spezielles Augenmerk wird auf die Ergebnisse sowohl unter Einfluss von Eigentumsrechten als auch von Ressourcen im Gemeineigentum gelegt. Ebenso werden Modelle vorgestellt, die einen technischen Fortschritt in der Wachstumsrate der Ressource, der Ernterate und dem Sättigungsniveau berücksichtigen. Abschließend werden die vorgestellten Modelle im Hinblick auf ihr langfristiges Gleichgewicht und ihr dynamisches Verhalten verglichen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Die Osterinsel: ein historischer Rückblick	2
2. Ein dynamisches Modell der Interaktion von Ressourcen und Bevölkerung auf der Osterinsel	3
2.1. Erneuerbare Ressourcen-Dynamik nach Ricardo	3
2.2. Malthusianische Bevölkerungsdynamik	5
2.3. Steady-State Analyse	6
2.3.1. Schnitt der Isoklinen	6
2.3.2. Parameterveränderung	6
2.3.3. Charakterisierung der Eigenwerte	7
2.4. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	9
2.4.1. Parameterwahl	10
2.4.2. Graphische Darstellung der Dynamiken	10
3. Institutionelle Reformen	15
3.1. Institutionelle Adaptierung in Abhängigkeit des erwarteten zukünftigen Preises	15
3.1.1. Modellbeschreibung	16
3.1.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	18
3.2. Institutionelle Adaptierung durch Einführung eines Subsistenzlevels	22
3.2.1. Modellbeschreibung	22
3.2.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	23
3.3. Insitutionelle Adaptierung durch Einführung eines Subsitenzlevels und Erhaltungspolitiken	28
3.3.1. Modellbeschreibung	28
3.3.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	29
3.4. Vergleich der Modelle	36
4. Technischer Fortschritt	40
4.1. Logarithmische und exponentielle Modellierung des technischen Fortschritts . .	41
4.1.1. Modellbeschreibung	42
4.1.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	43
4.2. Ein bevölkerungsabhängiger technischer Fortschritt	50
4.2.1. Modellbeschreibung	50
4.2.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	52
4.3. Technischer Fortschritt anhand einer ceteris paribus Erhöhung	58
4.3.1. Modellbeschreibung	58

4.3.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung	60
4.4. Vergleich der Modelle	67
5. Zusammenfassung	71
Appendix	72
A. Das Phasenportrait	72
A.1. Trajektorie	72
A.2. Orbit	72
A.3. Vektorfeld, Fluss, dynamisches System	73
B. Charakterisierung der Eigenwerte	74
B.1. Linearisierung	74
B.2. Charakterisierung der Eigenwerte eines linearen dynamischen Systems	75
B.2.1. Der 2-dimensionale Fall	75
B.2.2. Reelle Eigenwerte	76
B.2.3. Komplexe Eigenwerte	77
C. Berechnung der Nutzenmaximierung	79
C.1. Nutzenmaximierung von Kapitel 2	79
C.2. Nutzenmaximierung von Kapitel 3.2	79
C.3. Nutzenmaximierung von Kapitel 3.3	80
Literaturverzeichnis	81

1. Einleitung

Das Zusammenspiel von Bevölkerungsentwicklung und Umwelt stellt heutzutage ein global bedeutendes Thema dar. Die Knappheit natürlicher Ressourcen muss berücksichtigt werden, um langfristig Wohlstand und Überleben der Menschen gewährleisten zu können. Gerade die Osterinsel eignet sich um die Wechselwirkung von Ressourcen und Bevölkerung zu untersuchen. In meiner Diplomarbeit behandle ich dynamische Modelle der Interaktion von erneuerbaren Ressourcen und Bevölkerungswachstum, die besonderen Augenmerk auf die historische Entwicklung dieser Insel legen. Ausgangspunkt meiner Arbeit ist ein Räuber-Beute Modell von Brander und Taylor aus ihrer Arbeit „The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use“, in dem die Bevölkerung als Räuber gesehen wird und die Beute einer erneuerbaren Ressource entspricht. Dieses Modell beschreibt plausibel den Aufstieg und Fall der Osterinsel, welche als isolierte Insel im Südostpazifik liegt.

In Abschnitt 1.1 präsentiere ich die Entwicklung der Insel und einen kurzen Rückblick auf die Geschichte. Das Modell von Brander und Taylor werde ich im zweiten Kapitel genauer betrachten. Es werden eine Steady-State Analyse und nach geeigneter Parametrisierung Simulationen speziell für den Fall der Osterinsel durchgeführt.

Ausgehend von diesem Modell wird im dritten Kapitel die Auswirkung einer institutionellen Adaptierung untersucht. Diese Adaptierung erfolgt in der ersten Erweiterung in Abschnitt 3.1 durch Betrachtung von Eigentumsverhältnissen in Abhängigkeit des erwarteten zukünftigen Preises. Abschnitt 3.2 führt ein Subsistenzlevel ein, und Abschnitt 3.3 untersucht zusätzlich die Auswirkungen einer Steuer auf die Ressource und Beschränkungen auf die Ernte und den Arbeitsaufwand. Der letzten Abschnitt des Kapitels vergleicht diese Erweiterungen, wobei Zusammenhänge und Unterschiede ausgearbeitet werden.

Im vierten Kapitel gebe ich zuerst einen Einblick in die Wachstumstheorien von Malthus bis heute im Bezug auf den technischen Fortschritt. In Abschnitt 4.1 wird anschließend technischer Fortschritt in der Wachstumsrate der Ressource, der Ernterate und dem Sättigungsniveau in Abhängigkeit von der Zeit untersucht. In Abschnitt 4.2 wird dieser Fortschritt endogenisiert und ist nun direkt vom Bevölkerungswachstum abhängig. Das letzte Modell in Abschnitt 4.3 verwendet die kritische Depensationswachstumsfunktion und untersucht den technischen Fortschritt anhand einer ceteris paribus Veränderung einzelner Parameter. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird erneut ein Vergleich der Erweiterungen ausgearbeitet. Mathematische Grundlagen, sowie längere Herleitungen sind im Appendix zusammengefasst. Die numerische Umsetzung erfolgte mit Wolfram Mathematica 6 und E&F Chaos software package (<http://www1.fee.uva.nl/cendef/whoiswho/makehp/page.asp?iID=19>).

1.1. Die Osterinsel: ein historischer Rückblick

Die im Südpazifik liegende Osterinsel (Rapa Nui) befindet sich 3200 km vom Festland entfernt und gehört heute politisch zu Chile. Gerade die Entwicklung ihrer Bevölkerung über die Zeit scheint bemerkenswert und rätselhaft.

Die moderne Wissenschaft nimmt an, dass die Insel etwa 400 nach Christus zum ersten Mal besiedelt wurde, zu einer Zeit als sie noch zum Großteil von Palmen bewachsen war. In der Folge stieg die Anzahl der Einwohner rasant an, bis um 1400 wahrscheinlich das Maximum von 10000 Bewohnern erreicht wurde und sich eine wohlhabende Gesellschaft entwickelte. Der Wohlstand des Volkes zu jener Zeit ergibt sich nicht zuletzt durch ihre enormen kulturellen Leistungen. Es wird argumentiert, dass beispielsweise die Herstellung, aber vor allem der Transport der berühmten Steinskulpturen (Moais) nur von einer Gesellschaft durchgeführt werden kann, die Essentials (z.B. Nahrungssuche) relativ leicht erledigen kann und dadurch Freizeit generiert. Es wird davon ausgegangen, dass diese monumentalen Artefakte, die zwischen 1100 und 1500 nach Christus entstanden, nur von einer genügend großen Gruppe von Menschen errichtet werden konnten.

Interessant scheint, dass zum Zeitpunkt dieser kulturellen Blüte um 1400 - die mit dem geschichtlichen Bevölkerungsmaximum einhergeht - der Palmenwald, der offensichtlich als wichtigste Ressource diente, bereits völlig abgeholzt war. Als Resultat gestaltete sich die Nahrungssuche schwieriger, da beispielsweise kaum Holz zum Erbauen von Booten für die Fischerei verfügbar war. Diese Ressourcenknappheit führte wahrscheinlich nicht nur zu einer Änderung der Ernährungsgewohnheiten, sondern auch zu gewalttätigen Konflikten. Funde aus der Zeit um 1500 lassen darauf schließen, dass vermehrt Waffen verwendet wurden und es sogar Ausformungen von Kannibalismus gab. Nach 1400 kam es offensichtlich zu einer dramatischen Reduktion der Bevölkerungszahl. 1722 wird sie auf 3000 Einwohner geschätzt, 1774 sogar nur noch auf etwa 2000. Auf den Zustand der Insel lässt sich aus einem Logbucheintrag von James Cook zu dieser Zeit schließen:

“Keine Nation wird je für die Ehre kämpfen, die Osterinsel erforscht zu haben, zumal es kaum ein anderes Eiland im Meer gibt, welches weniger Erfrischungen bietet und Annehmlichkeiten für die Schifffahrt denn dieses.“ [4]

Die derzeit vorherrschende Annahme über den Aufstieg und Fall der Osterinsel besagt, dass die Bevölkerung ihre natürlichen Ressourcen so weit ausgeschöpft hat, bis sie ihre Größe und kulturelle Ausprägung nicht mehr aufrecht erhalten konnte.

2. Ein dynamisches Modell der Interaktion von Ressourcen und Bevölkerung auf der Osterinsel

Brander und Taylor beschreiben in der Arbeit „**The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use**“ [3] ein Modell, das plausibel den Aufstieg und Fall der Osterinsel erklärt. Sie gehen von einer Ressourcendynamik nach Ricardo und einer malthusianischen Bevölkerungsentwicklung aus. Nach der Modellvorstellung wird eine allgemeine Steady-State Analyse durchgeführt. Weiters werden nach einer Parametrisierung Simulationen erstellt, die die Entwicklung der beiden Stocks über die Zeit darstellen. Die folgenden Ausführungen basieren auf der genannten Arbeit der beiden Autoren.

2.1. Erneuerbare Ressourcen-Dynamik nach Ricardo

Die grundlegende Annahme des Modelles ist, dass es keine Eigentumsrechte gibt und jeder auf die erneuerbaren Ressourcen Zugriff hat. Brander und Taylor gehen für das Ernteangebot von einer Schaefer-Produktionsfunktion aus und leiten die Nachfrage über die individuelle Nutzenmaximierung eines repräsentativen Konsumenten her.

Der Ressourcenstock zum Zeitpunkt t ist durch $S(t)$ gegeben. In Bezug auf die Osterinsel kann man sich unter den Ressourcen Wald und Erdboden vorstellen. Die Veränderung des Stocks ist gegeben durch die natürliche Wachstumsrate $G(S(t))$ minus der Ernterate („harvest“) $H(t)$.

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = G(S) - H \quad (2.1)$$

G ist eine logistische Wachstumsfunktion, die das Wachstum in einer beschränkten Umwelt plausibel beschreibt.

$$G(S) = rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) \quad (2.2)$$

K ist das **Sättigungsniveau** („**carrying capacity**“) und gibt an, wie groß der Ressourcenstock maximal werden kann. Gilt $S = K$ ist die Wachstumsrate bei 0; r ist die **Regenerationsrate** („**intrinsic growth rate**“).

Im vorliegenden Modell wird vollständige Konkurrenz unterstellt. Es werden genau 2 Güter

produziert und konsumiert. H ist die Ernte der erneuerbaren Ressource und M ist ein aggregiertes „anderes Gut“. M wird als Numeraire verwendet und hat somit den Preis 1.

Die Produktion von H hängt von 2 Faktoren ab, dem Ressourcenstock S und der Arbeit L . Zur Vereinfachung setzt man die Arbeit gleich der Bevölkerung. Für die Produktion von M benötigt man lediglich Arbeit und hat konstante Skalenerträge („constant returns to scale“). Weiters erzeugt genau eine Einheit Arbeit eine Einheit von M . Da der Preis von M genau 1 ist, haben wir ebenfalls einen Lohn w von 1 pro produzierter Einheit M . Somit gilt für die Angebotsseite von M

$$M^p = L_M \quad (2.3)$$

Die Ernte der Ressource - und somit die Angebotsseite von H - wird durch die Schaefer-Ernte-Produktionsfunktion beschrieben.

$$H^p = \alpha S L_H \quad (2.4)$$

Es gilt $\alpha > 0$ und αS beschreibt im Ressourcensektor die Produktivität pro verwendeter Einheit Arbeit. $a_{LH}(S)$ steht für den Arbeitsbedarf pro produzierter/ geernteter Einheit H . Da es sich hier um ein Modell mit freiem Zugang auf die Ressourcen handelt, entspricht der Preis der Ressource genau den Einheitskosten der Produktion. Es gibt keine zusätzlichen Kosten die durch den Zugriff auf die Ressource entstehen könnten. Da in einem Markt mit vollständiger Konkurrenz der Gewinn gleich 0 ist, folgt:

$$p = w a_{LH} = \frac{w}{\alpha S} \quad (2.5)$$

Um die Nachfrage nach Ressourcen zu bekommen, betrachtet man zuerst einen repräsentativen Konsumenten. Dieser ist ausgestattet mit einer Einheit Arbeit; sein momentaner Nutzen wird durch die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion beschrieben.

$$u = h^\beta m^{1-\beta} \quad (2.6)$$

wobei h und m dem individuellen Konsum von Gut H und M entsprechen. $\beta \in [0, 1]$ gibt die Präferenzen für die beiden Güter an. Für die Nutzenmaximierung muss man beachten, dass jeder Konsument nur eine Einheit Arbeit zur Verfügung hat. Daraus ergibt sich die Budgetrestriktion $ph + m = w$. Die Nutzenmaximierung - Herleitung siehe Appendix (C.1) - ergibt den individuellen optimalen Konsum, welcher durch $h = \frac{w\beta}{p}$ und $m = (1 - \beta)w$ gegeben ist. Es wird bei dieser Nutzenmaximierung nicht berücksichtigt, dass der Konsum heute einen Einfluss auf die Ressourcendynamik von morgen hat. Multipliziert man die Nachfrage von h und m mit der Bevölkerung L , ergibt sich die gesamte Nachfrage für H und M :

$$H^D = \frac{w\beta L}{p} \quad (2.7)$$

$$M^D = w(1 - \beta)L \quad (2.8)$$

Mit der Vollbeschäftigungsbedingung erhält man die Grenze der Produktionsmöglichkeiten, welche nicht überschritten werden kann:

$$H^P \alpha_{LH}(S) + M = L. \quad (2.9)$$

Eine Produktionsstruktur dieser Art nennt man auch „Ricardo Produktionsstruktur“. Das Einsetzen der Gleichung (2.5) in (2.7) führt zu folgendem kurzfristigen Gleichgewicht ($H^D = H^P$) von H :

$$H = \alpha\beta LS. \quad (2.10)$$

Der gleichgewichtige Output von M ist $M = (1 - \beta)L$. M wird also immer produziert und das mit einem Lohn von 1. Vergleicht man Gleichung (2.10) mit Gleichung (2.2) sieht man, dass das Ricardogleichgewicht der Ernte H nicht notwendigerweise mit der zugrundeliegenden biologischen Wachstumsfunktion G übereinstimmen muss. Nun muss man nur noch das abgeleitete kurzfristige Gleichgewicht von H in (2.1) einsetzen und erhält die Dynamik von S :

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta. \quad (2.11)$$

2.2. Malthusianische Bevölkerungsdynamik

Malthus veröffentlichte seine Bevölkerungstheorie 1798 in seinem Buch *Essay on the Principle of Population* [13]. Seine Theorie besagt, dass die ökonomische Situation von der Relation zwischen Bevölkerung und Ressource abhängig ist. Höherer Pro-Kopf-Konsum führt zu höherem Bevölkerungswachstum. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts verlor das malthusianische Modell seine Gültigkeit, als es Wirtschaftswachstum aber gleichzeitig eine Reduktion des Bevölkerungswachstums gab.

Das Bevölkerungswachstum wird beschrieben durch die Gleichung:

$$\dot{L} = L(b - d + F), \quad (2.12)$$

wobei es sich bei b um die Geburtenrate und bei d um die Sterberate handelt. Somit wächst die Bevölkerung ohne Ressource mit $(b - d)$. Die Annahme $(b - d) < 0$, die in diesem Modell getroffen wird, impliziert, dass die Bevölkerung ohne Zugriff auf die Ressource mit der Zeit verschwinden würde. F ist die Geburtenfunktion, die vom Pro-Kopf-Konsum der Ressource und dem positiven Parameter ϕ abhängt, $F = \phi \frac{H}{L}$. Höherer Pro-Kopf-Konsum führt somit kurzfristig zu einem höheren Bevölkerungswachstum.

Mit Gleichung (2.10) gilt $\frac{H}{L} = \alpha\beta S$. Somit erhält man für die Bevölkerungsdynamik folgende Gleichung:

$$\dot{L} = L(b - d + S\alpha\beta\phi). \quad (2.13)$$

Gleichungen (2.11) und (2.13) ergeben ein System zweier Differentialgleichungen. Es handelt sich um ein Räuber-Beute Modell, wobei die Bevölkerung L als Räuber und der Ressourcenstock S als Beute interpretiert werden kann.

2.3. Steady-State Analyse

Im folgenden Abschnitt werden die Steady-State Lösungen hergeleitet und das globale Verhalten der beiden Dynamiken \dot{S} und \dot{L} analysiert. Die Stabilitätsanalyse für dynamische nichtlineare Systeme ist im Appendix A und B zusammengefasst.

2.3.1. Schnitt der Isoklinen

Schneidet man die beiden Isoklinen $\dot{S} = 0$ und $\dot{L} = 0$, erhält man alle Steady-States. Vereinfacht man die Gleichung $\dot{S} = 0$,

$$rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta = 0, \quad (2.14)$$

erhält man für S und L folgende Terme:

$$(S = 0) \text{ oder } \left(S = \frac{Kr - KL\alpha\beta}{r}\right) \text{ und } \left(L = \frac{r(K - S)}{K\alpha\beta}\right) \quad (2.15)$$

Vereinfacht man die Gleichung $\dot{L} = 0$,

$$L(b-d + S\alpha\beta\phi) = 0, \quad (2.16)$$

erhält man für S und L folgende Terme:

$$\left(S = -\frac{b-d}{\alpha\beta\phi}\right) \text{ oder } (L = 0). \quad (2.17)$$

Der Schnitt der Isoklinen führt hier zu folgenden 3 Gleichgewichten:

$$(S = 0, L = 0) \quad (2.18)$$

$$\left(S = \frac{d-b}{\alpha\beta\phi}, L = \frac{r(b-d + K\alpha\beta\phi)}{K\alpha^2\beta^2\phi}\right) \quad (2.19)$$

$$(S = K, L = 0) \quad (2.20)$$

Die Lösungen (2.18) und (2.20) sind Randlösungen.

Betrachtet man nun die innere Lösung (2.19) genauer, erkennt man, dass aus der Bedingung, dass S kleiner als das Sättigungsniveau K sein muss, folgt:

$$\frac{d-b}{\alpha\beta\phi} < K. \quad (2.21)$$

2.3.2. Parameterveränderung

Durch partielles Ableiten der inneren Lösung nach den einzelnen Parametern erhält man folgende Ergebnisse:

Die Steady-State Lösung S^* des Ressourcenstocks

- steigt mit steigender Sterberate (d) und sinkender Geburtenrate (b),
- fällt, wenn α auf Grund eines Fortschritts in der Erntetechnologie wächst,
- und bleibt unverändert, wenn sich die Regenerationsrate (r) oder das Sättigungsniveau (K) verändert.

Die Steady-State Lösung L^* der Bevölkerung

- steigt direktproportional mit der Regenerationsrate (r),
- fällt mit steigendem α , wenn $S < \frac{K}{2}$ und steigt, wenn $S > \frac{K}{2}$,
- fällt mit wachsender Präferenz für Gut H, wenn $S < \frac{K}{2}$ und steigt, wenn $S > \frac{K}{2}$,
- steigt, wenn das Sättigungsniveau K steigt.

2.3.3. Charakterisierung der Eigenwerte

Nun können wir das lokale dynamische Verhalten in einer Umgebung der Gleichgewichte untersuchen. Die Jakobimatrix für (S,L) ist gegeben durch:

$$J(S,L) = \begin{pmatrix} -\frac{2Sr}{K} + r - L\alpha\beta & -S\alpha\beta \\ L\alpha\beta\phi & b-d + S\alpha\beta\phi \end{pmatrix}$$

Für $(S = 0, L = 0)$ ergibt sich somit:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir für diese Randlösung die Eigenwerte $r > 0$ und $b - d < 0$, was einem Sattelpunkt entspricht.

Für $(S = K, L = 0)$ folgt:

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -r & -K\alpha\beta \\ 0 & b-d + K\alpha\beta\phi \end{pmatrix}.$$

Durch Null-Setzen des charakteristischen Polynoms $|J - zI|$ ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$z_1 = -r \quad z_2 = b-d + K\alpha\beta\phi \quad (2.22)$$

z_1 ist negativ und z_2 ist laut Voraussetzung (2.21) positiv. Somit haben wir hier einen positiven und einen negativen Eigenwert und es handelt sich wie im vorangegangenen Fall um einen Sattelpunkt.

Der stabile Fall

Für das innere Gleichgewicht $(S^* = \frac{d-b}{\alpha\beta\phi}, L^* = \frac{r(d-b+K\alpha\beta\phi)}{K\alpha^2\beta^2\phi})$ erhält man folgende Jakobimatrix:

$$J(S^*, L^*) = \begin{pmatrix} \frac{(b-d)r}{K\alpha\beta\phi} & \frac{b-d}{\phi} \\ r\left(\frac{(b-d)}{K\alpha\beta} + \phi\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Eigenwerte erhält man ebenfalls durch Null-Setzen des charakteristischen Polynoms:

$$\frac{-r(b-d)^2 - r(z + K\alpha\beta\phi)(b-d) + Kz^2\alpha\beta\phi}{K\alpha\beta\phi} = 0 \quad (2.23)$$

$$z_{1,2} = \frac{(b-d)r \pm \sqrt{(b-d)\sqrt{4K^2\alpha^2\beta^2\phi^2 + 4(b-d)K\alpha\beta\phi} + (b-d)r}\sqrt{r}}{2K\alpha\beta\phi} \quad (2.24)$$

Mithilfe der Determinante der Jakobimatrix und der Diskriminate der Eigenwerte lassen sich nun Bedingungen für das dynamische Verhalten in der Umgebung des Gleichgewichtes herleiten. Man kann mit Hilfe einer Abschätzung zeigen, dass die Determinante der Jakobimatrix positiv ist:

$$\text{Det}(J) = \underbrace{\frac{(d-b)(b-d)r}{K\alpha\beta\phi}}_{<0} - (b-d)r \quad (2.25)$$

Der erste Term der Determinante ist negativ da K, r, α, β und ϕ positive Parameter sind. Aus $\frac{d-b}{\alpha\beta\phi} < K$, siehe Gleichung (2.21), folgt:

$$\text{Det}(J) > \frac{K(b-d)r}{K} - (b-d)r = 0 \quad (2.26)$$

$$\Leftrightarrow \text{Det}(J) > 0 \quad (2.27)$$

Ist die Diskriminante der Eigenwerte positiv

$$\Delta = (b-d)(4K^2\alpha^2\beta^2\phi^2 + 4(b-d)K\alpha\beta\phi + (b-d)r) > 0, \quad (2.28)$$

erhält man 2 negative reelle Eigenwerte und somit einen anziehenden Knoten mit monotoner Konvergenz. Umgekehrt ergibt eine negative Diskriminante ein Paar konjugiert komplexer Zahlen mit negativem Realteil und somit einen stabilen Fokus (mathematischer Hintergrund siehe Appendix B). Vereinfacht man $\Delta < 0$, erhält man folgende Bedingung:

$$\frac{r(d-b)}{K\phi\alpha\beta} + 4((d-b) - K\phi\alpha\beta) < 0 \quad (2.29)$$

für den stabilen Fokus.

Parameterveränderung:

- Ein kleiner Wert der natürlichen Regenerationsrate r ,
- oder eine starke Abhängigkeit der Geburtenrate vom Pro-Kopf-Konsum (großes ϕ)
- oder eine sehr effiziente Erntetechnologie (hohes α)

führen eher zu einem stabilen Fokus.

Das globale Verhalten des Systems

- Ist $S = 0$ und $L > 0$, nähert sich das System dem 1. Gleichgewicht:

$$(S = 0, L = 0)$$

Wir wissen auf Grund der Eigenwertanalyse, dass $(0, 0)$ ein Sattelpunkt ist. Der Eigenwert r ist positiv und somit handelt es sich bei der horizontalen Achse (S-Achse) um eine instabile Mannigfaltigkeit (Seperatrix). Der Eigenwert $b - d$ ist negativ und somit ist die vertikale Achse die stabile Mannigfaltigkeit. Global gesehen ist die vertikale Achse eine Trajektorie, da sie von jedem Punkt aus, für den $S = 0$ und $L > 0$ gilt, gegen $(0,0)$ Punkt konvergiert. Das heißt, sind keine Ressourcen vorhanden, so stirbt die Bevölkerung aus.

- Ist $S > 0$ und $L = 0$, nähert sich das System dem 2. Gleichgewicht

$$(S = K, L = 0).$$

Der zu S gehörende Eigenwert $-r$ ist negativ. In diesem Fall bildet also die horizontale Achse (S-Achse) die stabile Seperatrix. Von jedem Punkt dieser Achse (also $S > 0$ und $L = 0$) haben wir eine globale Konvergenz gegen den Punkt $(K,0)$. Ist die Insel nicht von Menschen besiedelt, werden keine Ressourcen beansprucht und der Ressourcenstock wächst bis zu seinem Sättigungsniveau K an.

- $S > 0$ und $L > 0$ führt zu einer Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht. Wir wissen nun, dass die beiden Achsen Trajektorien sind. In einem autonomen und stetigen Differentialgleichungssystem ist es unmöglich, dass 2 Trajektorien sich schneiden. Somit muss eine Trajektorie, die im Inneren startet, auch gegen einen inneren Punkt konvergieren. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt simuliert und genauer untersucht.

2.4. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

In der Folge werden die Parameter für das Modell festgelegt, um so die Entwicklung von Bevölkerung und Ressource über die Zeit zu simulieren.

2.4.1. Parameterwahl

Die Autoren Brander und Taylor haben folgende Parametrisierung für die Modellierung der Osterinsel gewählt:

- Als Zeiteinheiten werden Dekaden gewählt.
- Vor der Besiedelung der Insel gab es um die 12000 Bäume auf der Insel. Daher wird das Sättigungsniveau K mit 12000 angenommen.
- α steht für die Arbeitsproduktivität und wird auf $= 0,00001$ gesetzt.
- β beschreibt die Präferenz für das Gut H . Es entspricht aber auch dem Anteil der Arbeitskraft, die zum Ernten der Ressource verwendet wird. Man geht davon aus, dass ein bisschen weniger als die Hälfte der Arbeit für den Ressourcensektor verwendet wurde. $\beta = 0.4$ ist dafür ein plausibler Wert.
- Die Bäume wachsen sehr langsam und haben daher nur eine Regenerationsrate von 4% pro Jahrzehnt ($r = 0.04$).
- $(b - d) = -0,1$ heißt, dass die Bevölkerung ohne dem Ressourcenstock S pro Jahrzehnt um 10% sinken würde.
- Die Autoren nehmen $\phi = 4$ an. Aus

$$\dot{L} > 0 \Leftrightarrow b - d + S\alpha\beta\phi > 0 \Leftrightarrow S > -\frac{(b - d)}{\alpha\beta\phi}$$

folgt, dass mit den bereits gegebenen Parametern diese Wahl ein positives Bevölkerungswachstum bei einem Ressourcenstock der größer als 6250 ist, impliziert. Das entspricht ca. 50% des Sättigungsniveaus.

- Man geht davon aus, dass 400.A.D ca. 40 Personen die Insel besiedelten und der Ressourcenstock gleich seinem Sättigungsniveau war. Somit ergeben sich die Anfangswerte $S_0 = 12000$ und $L_0 = 40$.

2.4.2. Graphische Darstellung der Dynamiken

Abbildung (2.1) zeigt die Ernte- und die Wachstumsfunktion der Ressource. Wobei bekanntlich $\dot{S} = H - G$ gilt. Im Schnittpunkt S^* gilt somit $\dot{S} = 0$. Abbildung (2.2) zeigt die Wachstumsrate der Bevölkerung.

Der Schnitt der Isoklinen (2.14) und (2.16) führt zu 3 Gleichgewichten, wobei 2 davon Randlösungen sind.

$$(L = 0, S = 0), \tag{2.30}$$

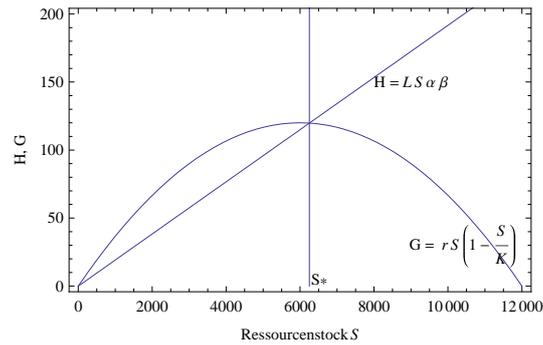


Abbildung 2.1.: Ressourcenwachstums- und Erntefunktion.

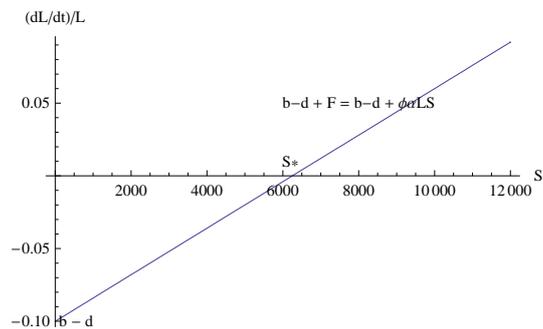


Abbildung 2.2.: Wachstumsrate der Bevölkerung.

$$(L = 4791.67, S = 6250) \text{ und} \tag{2.31}$$

$$(L = 0, S = 12000) \tag{2.32}$$

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, dass es sich bei den Randlösungen (2.30) und (2.32) um 2 Sattelpunkte handelt. Die Eigenwertuntersuchung des inneren Gleichgewichtes (2.31) ergibt ein konjugiert komplexes Paar mit negativem Realteil und somit einen stabilen Fokus. Abbildung (2.4) zeigt die graphische Darstellung des Orbits (mathematische Erklärungen siehe Appendix A). Der Schnitt der Isoklinen ergibt das innere Gleichgewicht. $\dot{L} = 0$ stellt eine Grenzlinie im ersten Quadranten dar. Links davon fällt die Bevölkerungsanzahl und rechts davon steigt sie. $\dot{S} = 0$ gibt die Grenze zwischen Wachstum und Rückgang des Ressourcenstocks an. Oberhalb dieser Isokline sinkt der Ressourcenstock und unterhalb steigt er.

Abbildungen (2.5) und (2.6) zeigen die Entwicklung der Bevölkerung und des Ressourcenstocks über die Zeit. Die Bevölkerung und die Ressource entwickeln sich am Anfang entgegengesetzt. Die Bevölkerung wächst zu Beginn der ersten Schwingung, bis sie etwa zum Zeitpunkt 80 ihr globales Maximum erreicht. Danach sinkt sie und nimmt nach ca. 150 Zeiteinheiten ein lokales

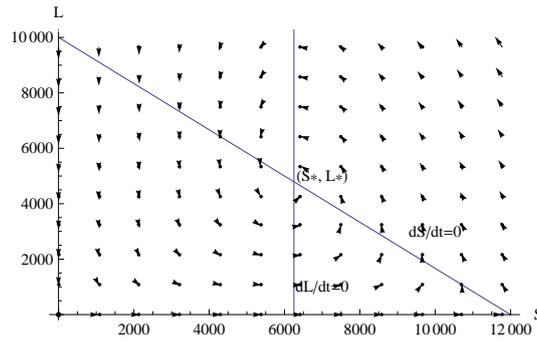


Abbildung 2.3.: Schnitt der Isoklinen.

Minimum an. Der Ressourcenstock, der einen Startwert von 12000 hat, sinkt, bis er ca. nach 100 Zeiteinheiten sein globales Minimum erreicht und danach wieder wächst. Diese Schwingung wiederholt sich mit immer kleiner werdenden Amplituden. Abbildung (2.6) zeigt wie sich die Bevölkerung und der Ressourcenstock auf ihrem inneren Gleichgewicht (2.31) einpendeln.

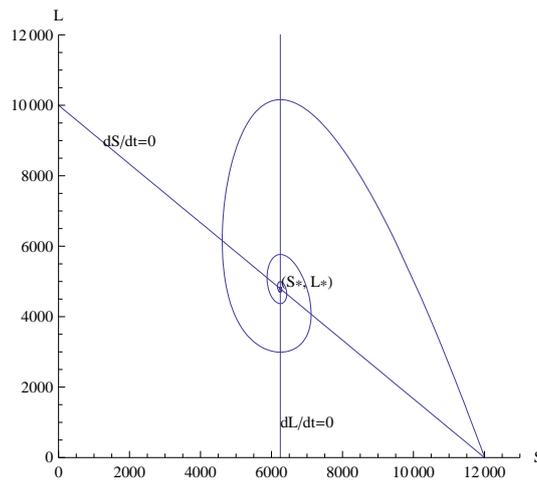


Abbildung 2.4.: Orbit und Schnitt der Isoklinen.

Abbildung (2.7) zeigt die Entwicklung über die Zeit gegen die Randlösung (2.30) ($S = 0, L = 0$), wobei für die Startwerte $S = 0$ und $L > 0$ gilt. In dem Plot wurden für L die Startwerte 11.000, 50.000, 8.000, 1.000 und 300 genommen. Man erkennt, dass die Bevölkerung ohne vorhandene Ressourcen sehr rasch abnimmt und gegen 0 strebt. Hier entspricht der Orbit in der SxL -Ebene der Strecke zwischen Startwert und Ursprung auf der L -Achse. Wie bereits beschrieben, handelt es sich bei dieser Achse um die stabile Mannigfaltigkeit.

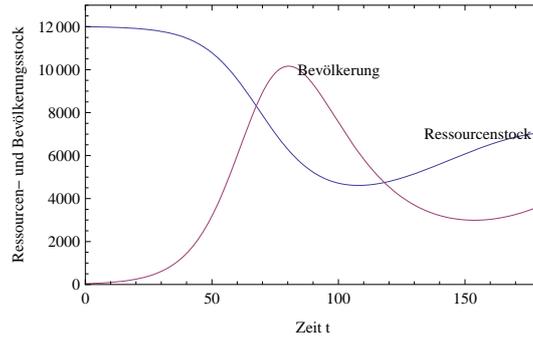


Abbildung 2.5.: Der Verlauf über die Zeit.

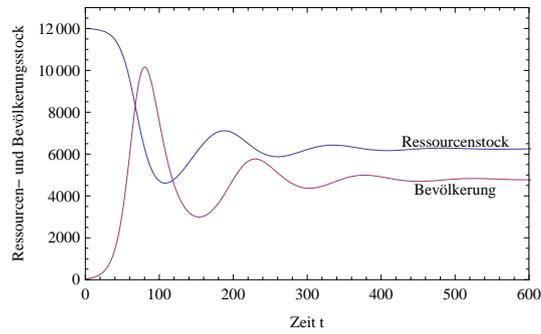


Abbildung 2.6.: Der Verlauf über die Zeit.

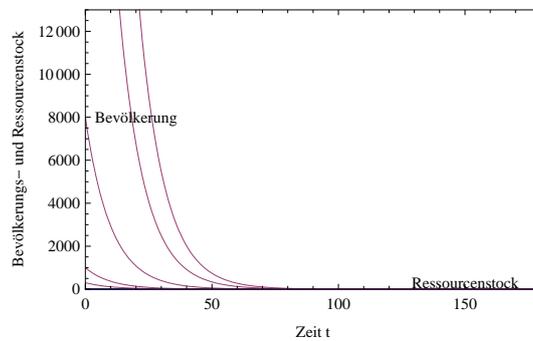


Abbildung 2.7.: Verlauf über die Zeit bei $S=0$ und verschiedenen Startwerten für L .

Abbildung (2.8) stellt ebenfalls die Entwicklung über die Zeit dar, in diesem Fall für das Gleichgewicht (2.32) und die Startwerte $S > 0$ und $L = 0$. Ohne Ressourcennutzung der Bevölkerung, also ohne Ernte, wächst die Ressource logistisch bis zum Sättigungsniveau ($K = 12000$). Als Startwerte dienen die Werte 12.000, 10.000, 8.000, 5.000, 1.000 und 300. Ein zugehöriger Orbit

in der SxL -Ebene entspricht der Strecke auf der vertikalen Achse zwischen Startwert und dem Randgleichgewicht (12000,0).

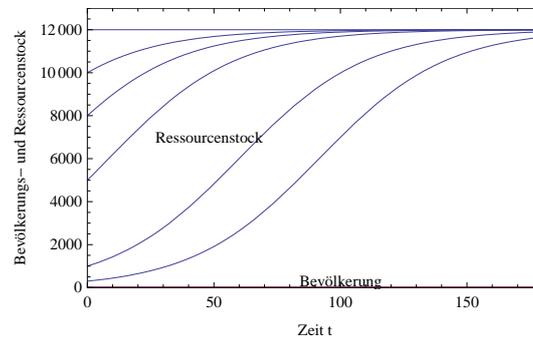


Abbildung 2.8.: Verlauf über die Zeit bei $L=0$ und verschiedenen Startwerten für S .

In diesem Kapitel wurde nun das Grundmodell analysiert und simuliert. Im folgenden wird dieses auf verschiedene Arten erweitert. Speziell wird untersucht, wie sich die Einführung von Institutionen und das Zulassen von technischem Fortschritt auf Ressource und Bevölkerung auswirkt.

3. Institutionelle Reformen

- **Institutionen:**

sind „soziale Gebilde, Organisationen und Prinzipien, die als Träger gesellschaftlicher Ordnung öffentlich anerkannt und garantiert sind; Hauptmerkmale sind relative zeitliche Konstanz, das einem kulturellen Muster folgende Zusammenwirken ihrer Glieder und normative Richtlinien, die mit Sanktionen und sozialer Kontrolle durchgesetzt werden.“¹

Der Einfluss von Institutionen: North [15] und Williamson [24] haben in ihren Arbeiten gezeigt, dass Institutionen die ökonomische Entwicklung einer Gesellschaft stark beeinflussen können. Sie prägen das Arbeits-, Spar- und Investitionsverhalten, sowie die Risikobereitschaft und weitere Eigenschaften von Konsumenten und Produzenten.

In diesem Kapitel diskutiere ich Arbeiten, die das Brander/Taylor Modell um Institutionen erweitert haben, bzw. Arbeiten, die sich mit den Auswirkungen institutioneller Adaptierung beschäftigen. Wenn nicht explizit erwähnt, wird die Parametrisierung von Brander und Taylor aus Abschnitt 2.4.1 übernommen. Kapitel 3.1 betrachtet ein Modell von Dalton und Coats. Sie untersuchen die langfristige Entwicklung der Bevölkerung und des Ressourcenstocks, wobei die Ressource einmal als Gut unter Eigentumsrechten und einmal als Gemeineigentum interpretiert wird. Im Kapitel 3.2 wird ein Subsistenzlevel eingeführt, welches der Pro-Kopf-Konsum-Mindestmenge entspricht. Dies führt zu einer nicht konstanten Arbeitsaufteilung in den beiden Sektoren H und M. Kapitel 3.3 setzt an dieser Stelle fort. Es werden zusätzlich vier Erhaltungspolitiken eingeführt und deren Auswirkungen untersucht.

3.1. Institutionelle Adaptierung in Abhängigkeit des erwarteten zukünftigen Preises

Dalton und Coats vergleichen in ihrem Paper „**Could Institutional Reform Have Saved Easter Island**“ [6] verschiedene institutionelle Adaptierungen, um die Frage zu beantworten, ob der „Absturz“ der Osterinseln zu verhindern gewesen wäre. Sie gehen davon aus, dass die Wachstumsrate der Ressource einen Prädiktor für den zukünftigen Wert der Ressource darstellt. Die Bevölkerung reagiert in Abhängigkeit von der Institution auf die erwartete Entwicklung des zukünftigen Preises. Speziell wird die Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung in Abhängigkeit einer institutionellen Adaptierung mit Eigentumsrechten und einer mit Ressourcen im Gemeineigentum untersucht und verglichen.

¹Meyers Lexikon online (2008). Institution (Sachartikel) Soziologie.
<http://lexikon.meyers.de/beosearch/permlink.action?pageId=31991190version=1> [Stand:Jänner2009]

Falls private Eigentumsrechte über die natürliche Ressource bestehen, beschreiben Dalton und Coats, dass die Eigentümer die Kosten, die durch den gegenwärtigen Konsum der Ressource entstehen, berücksichtigen. So achtet der Besitzer nicht nur auf den momentanen Nutzen seines Konsums, sondern auch auf die Auswirkung auf den zukünftigen Bestand der Ressource. Folglich besteht ein Anreiz, die Ressource vor Ausbeutung zu schützen.

Wenn die Ressource im Gemeineigentum steht, zeigt sich eine andere Situation. Der Grundgedanke ist hier: „Je mehr die anderen ernten, desto weniger bleibt für mich übrig.“ Die Individuen sind hier einem Gefangenendilemma ausgesetzt. Obwohl der soziale Nutzen in der Gesellschaft durch das Schützen der Ressource größer wäre, besteht der individuelle Anreiz den momentanen Konsum zu erhöhen. Das führt dazu, dass, um den gegenwärtigen Nutzen zu maximieren, nicht vorausschauend geerntet wird.

Ressourcen im Gemeineigentum können so zur Tragik der Allmende („Tragedy of the Commons“) führen. Garrett Hardin [10] argumentiert in seiner Arbeit, dass Konsumenten von Ressourcen im Gemeineigentum die Kosten, die durch ihre Entscheidungen für andere entstehen, nicht berücksichtigen. Die Ressource steht der Gemeinschaft zur Verfügung und jeder versucht nicht vorausschauend seinen temporären Gewinn/Ertrag zu maximieren, was schlussendlich zu einer schnellen Ausbeutung der Ressource führt.

3.1.1. Modellbeschreibung

Wie bei Brander und Taylor leiten sich die zwei Dynamiken aus der Angebots- und Nachfragefunktion von H und M her. Ausgehend von der Maximierung der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion eines repräsentativen Konsumenten,

$$u = h^\beta m^{1-\beta}, \quad (3.1)$$

und unter der Budgetrestriktion $ph + m = w$, ergibt sich in dieser Erweiterung dieselbe Nachfragefunktion der Ernte wie in Kapitel 2:

$$H^D = \frac{w\beta L}{p}. \quad (3.2)$$

Die Menge an Arbeit, die für die Ernte der Ressource verwendet wird, ist nun in diesem Modell zusätzlich vom Term $\delta\hat{S}$ abhängig, wobei $\hat{S} = \frac{\dot{S}}{S}$ die Wachstumsrate der Ressource darstellt und δ den Effekt der Institutionen auf die Ernte ausdrücken soll:

$$L_h = \beta L(1 + \delta\hat{S}) \quad (3.3)$$

Genauere Betrachtung von $\delta\hat{S}$:

\hat{S} ist die Wachstumsrate des Ressourcenstocks und kann als Prädiktor für den künftigen Preis der Ressource interpretiert werden. $\hat{S} < 0$, also eine negative Wachstumsrate bedeutet, dass die

Bewohner der Insel mehr konsumieren als nachwächst und führt zu einem Angebotsrückgang des Ressourcenstocks. Dies impliziert einen steigenden Preis in der Zukunft.

Umgekehrt wächst bei $\hat{S} > 0$ mehr als geerntet wird. Die Individuen gehen hier davon aus, dass aufgrund der positiven Wachstumsrate in der Zukunft genug von der Ressource vorhanden sein wird. Da genügend Ressourcen vorhanden sind, ist $\hat{S} > 0$ ein Prädiktor für einen sinkenden Preis.

Der Parameter δ beschreibt den Einfluss der gesellschaftlichen Institutionen auf das Verhalten der Menschen. Dieses Verhalten spiegelt sich in der Reaktion der Bevölkerung auf die geschätzten zukünftigen Preise der Ressource wider. Hier können drei Fälle unterschieden werden:

- Wenn die Institution die Bevölkerung bestärkt im Hinblick auf einen höheren zukünftigen Preis der Ressource mit der gegenwärtigen Ernte sparsam umzugehen, so gilt $\delta > 0$ und es werden Arbeitskräfte aus der Ernte abgezogen. Je größer δ desto stärker wird die Zukunft in der Gegenwart berücksichtigt. Dies stellt die Situation mit Eigentumsrechten dar. Die Eigentümer verringern die momentane Ernte aufgrund des sinkenden Ressourcenstocks.
- Wenn die Institution die Bevölkerung bestärkt im Hinblick auf einen höheren zukünftigen Preis die gegenwärtige Erntemenge zu vergrößern, um so ihren eigenen gegenwärtigen Nutzen zu erhöhen, bevor dies jemand anderer tun kann, so gilt $\delta < 0$. Dies stellt die Situation für Gemeineigentum dar, in der die Bevölkerung dem Gefangenendilemma ausgesetzt ist. Sie erhöhen die momentane Ernte, obwohl der Ressourcenstock sinkt.
- Reagiert die Bevölkerung nicht auf Änderungen im erwarteten zukünftigen Preis, so wie im Brander/Taylor Modell gilt $\delta = 0$.

Wie bei Brander und Taylor wird die Ernte der Ressource, und somit die Angebotsseite von H , durch die Schaefer-Ernte-Produktionsfunktion beschrieben.

$$H^P = \alpha S L_h \quad (3.4)$$

Diese Angebotsseite ist abhängig von der Menge der Arbeit L_h , die für die Ernte des Ressourcenstocks verwendet wird. Da man wieder von einer Vollbeschäftigung ausgeht, ist die restliche Bevölkerung in der Produktion des aggregierten Gutes M tätig, $L_M = M = [1 - \beta L(1 + \delta \hat{S})]$. Der gleichgewichtige Preis ergibt sich aus Gleichung (3.2) und (3.4):

$$p = \frac{w}{\alpha S(1 + \delta \hat{S})}. \quad (3.5)$$

Nun kann durch Einsetzen von Gleichung (3.5) in (3.2) das kurzfristige Gleichgewicht ($H^D = H^P$) von H bestimmt werden, welches nun auch von dem Term $\delta \hat{S}$ abhängig ist

$$H = \alpha \beta S L(1 + \delta \hat{S}). \quad (3.6)$$

Setzt man nun das kurzfristige Gleichgewicht in die Ausgangsformel (2.1), $\dot{S} = G - H$, ein, erhält man:

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha\beta L(1 + \delta\hat{S}). \quad (3.7)$$

αS ist die durchschnittliche Produktivität einer Einheit Arbeit im Erntesektor und $\beta L(1 + \delta\hat{S})$ ist die Anzahl der Arbeiter, die für die Ernte des Ressourcenstocks verwendet wird. Nun muss obige Gleichung noch nach \dot{S} ($\hat{S} = \frac{\dot{S}}{S}$) aufgelöst werden, um eine explizite Darstellung der Dynamik des Ressourcenstocks zu erhalten:

$$\dot{S} = \frac{rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha\beta SL}{1 + \delta\alpha\beta L}. \quad (3.8)$$

Ausgehend von der Gleichung der malthusianischen Bevölkerungsdynamik (2.12) mit $F = \phi \frac{H}{L}$ gilt:

$$\dot{L} = L [\text{b-d} + \alpha\beta\phi S(1 + \delta\hat{S})]. \quad (3.9)$$

Durch Einsetzen von \dot{S} ergibt sich die Bevölkerungsdynamik:

$$\dot{L} = L \left[\text{b-d} + S\alpha\beta \left(\frac{(rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta) \delta}{S(1 + L\alpha\beta\delta)} + 1 \right) \phi \right]. \quad (3.10)$$

3.1.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Da für die Steady-State Analyse $\dot{S} = 0$ und somit auch $\hat{S} = 0$ gilt, erhält man in diesem Modell dieselben langfristigen Gleichgewichte wie in Kapitel 2. Das heißt mit selber Parametrisierung erhalten wir wieder die Gleichgewichte (2.30)-(2.32). δ ist der einzige neue Parameter, für den Dalton und Coats verschiedene Werte untersucht haben.

Die Wahl $\delta = -5$ ergibt ein Ergebnis, dass einer institutionellen Adaptierung mit Ressourcen im Gemeineigentum entspricht. Die Bevölkerung erhöht die gegenwärtige Ernte im Hinblick auf einen höheren zukünftigen Preis der Ressource und erntet somit nicht vorausschauend. Abbildungen (3.1) und (3.2) zeigen die Entwicklung der Bevölkerung und der Ressource über die Zeit und das zugehörige Phasendiagramm. Im Vergleich zu dem Ergebnis von Brander und Taylor sind die Amplituden der Fluktuation gewachsen. Der maximale Wert der Bevölkerung wird zur selben Zeit angenommen, welcher hier auf 12000 Personen angestiegen ist (vgl. Brander und Taylor: 10000 Personen). Betrachtet man die Minima des Ressourcenstocks, erkennt man deutlich, dass das Minimum von Brander und Taylor einen höheren Wert annimmt. Somit wird klar, dass diese Modifizierung das Aufstieg- und Fallszenario verstärkt.

Nimmt δ den Wert -10 oder einen noch kleineren an, so werden die Schwingungen des Bevölkerungs- und Ressourcenstocks größer. Zuerst geht der Ressourcenbestand zurück auf ein minimales Niveau, danach sinkt die Bevölkerung rasant ab und wird schließlich gänzlich ausgelöscht. Nach dem Aussterben der Bevölkerung kann sich die Ressource wieder erholen und

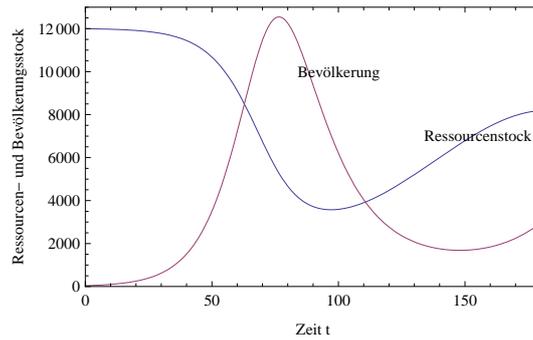


Abbildung 3.1.: Der Verlauf über die Zeit, $\delta = -5$.

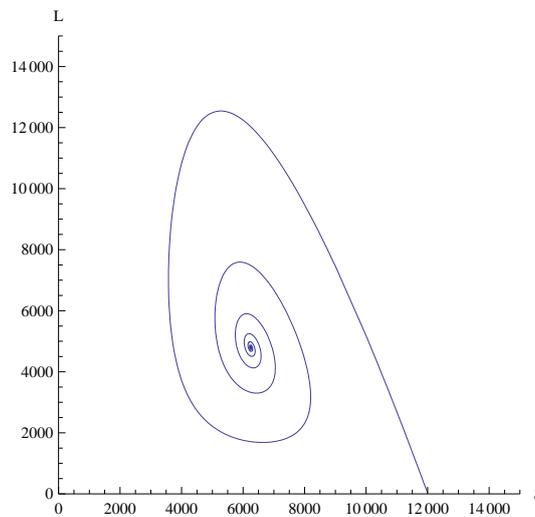


Abbildung 3.2.: Phasendiagramm ($\delta = -5$).

konvergiert gegen das Sättigungsniveau. Diese Entwicklung erkennt man schön in der Abbildung (3.3). In der Arbeit von Dalton und Coats [6] wird dieser Fall nur kurz erwähnt aber nicht genauer untersucht. Der kaum mehr vorhandene Ressourcenstock führt zum Aussterben der Bevölkerung und in diesem Fall kann das innere Gleichgewicht nicht erreicht werden.

Die Parameterwahl $\delta = 20$ ergibt ein Ergebnis für eine institutionelle Adaptierung mit Eigentumsrechte für die Ressource, siehe Abbildung (3.4) und (3.5). Gegenwärtig wird mit der Ernte gehaushaltet und im Hinblick auf einen steigenden Preis werden Arbeitskräfte aus dem Erntesektor abgezogen. Es werden die zukünftigen Kosten, die durch die gegenwärtige Ernte entstehenden, berücksichtigt. Man erkennt hier, dass die Amplituden im Vergleich zu den anderen beiden Fällen kleiner geworden sind. Die Bevölkerung lebt viel vorausschauender und erntet weniger. In diesem Fall erreicht die Bevölkerung einen maximalen Wert von ca. 8000. Diese Modifizie-

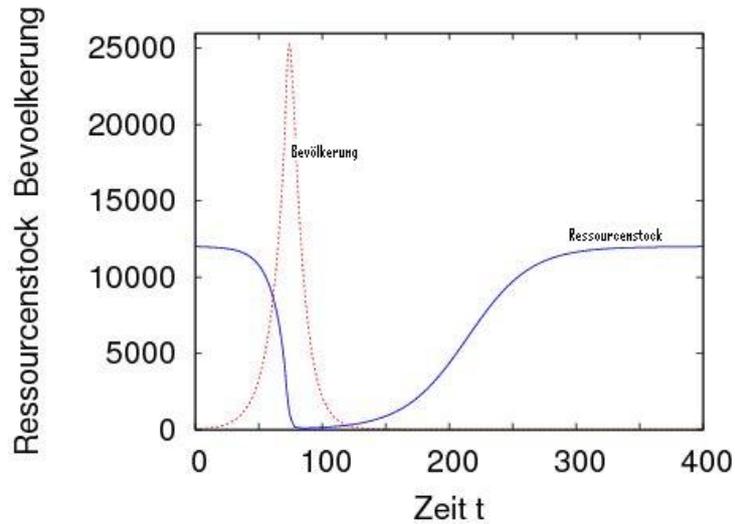


Abbildung 3.3.: Der Verlauf über die Zeit, $\delta = -10$.

ung führt zu einer gedämpften Entwicklung. Sowohl Bevölkerung als auch Ressourcenstock konvergieren sehr schnell zum inneren Gleichgewicht ohne das Aufstieg- und Fallszenario stark durchlebt zu haben.

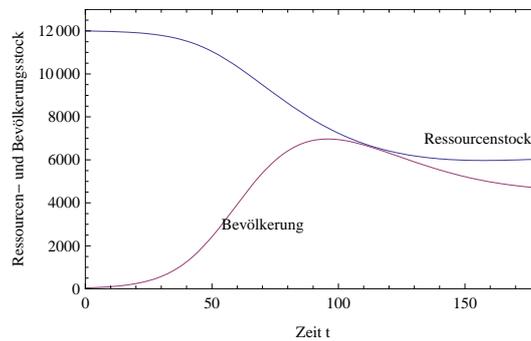


Abbildung 3.4.: Der Verlauf über die Zeit, $\delta = 20$.

Bei einer inneren Lösung führen sowohl Eigentumsrechte als auch Gemeineigentum zum selben inneren Gleichgewicht wie im Modell von Brander und Taylor. Es verändern sich zwar die Trajektorien und die Entwicklung über die Zeit, die Steady-State Lösung bleibt aber dieselbe. δ und somit die Institutionen haben in diesem Modell langfristig keinen Einfluss. Lediglich im Fall von Gemeineigentum ist es möglich, dass die Bevölkerung zur Gänze ausgelöscht wird, und so das Randgleichgewicht $(12000, 0)$ angenommen wird. Dies entspricht der Tragik von Allmende.

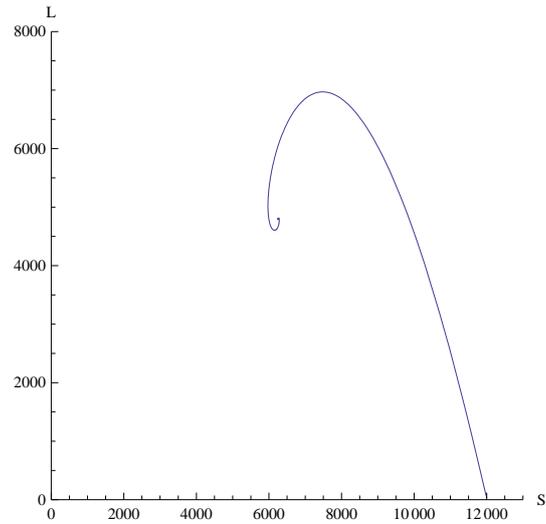


Abbildung 3.5.: Phasendiagramm ($\delta = 20$).

In der Realität können Institutionen auch die Technologie sowie Präferenzen, Fertilität und Mortalität der Individuen beeinflussen. Einige Ökonomen haben bereits in Modellen untersucht, wie sich Institutionen auf bestimmte Parameter auswirken (u.a. Bowles [2] und Sowell [19], [20]). Diese Parameterveränderung führt zu anderen Steady-State Gleichgewichten. Dalton und Coats haben die Einflüsse, welche Institutionen auf das menschliche Verhalten haben, außer Acht gelassen.

3.2. Institutionelle Adaptierung durch Einführung eines Subsistenzlevels

Anderies stellt sich in der Arbeit „**On modeling human behavior and institutions in simple ecological economic systems**“ [1] die Frage, wieso es historisch zu keiner institutionellen Adaptierung auf der Osterinsel gekommen ist. Sein Modell führt ihn auf eine neue geschichtliche Interpretation, nämlich dass der Rückgang der Bevölkerung und des Ressourcenstocks so schnell und unvorhergesehen geschehen ist, dass keine Zeit für eine institutionelle Adaptierung blieb. Diese Erkenntnis ergibt sich durch die Einführung eines Subsistenzlevels, welches zu einer nicht konstanten Arbeitsaufteilung in den einzelnen Sektoren führt.

3.2.1. Modellbeschreibung

Der Autor ersetzt die Cobb-Douglas Nutzenfunktion, siehe Gleichung (2.6), durch eine Stone-Geary Nutzenfunktion:

$$u = (h - h_{min})^\beta m^{1-\beta}, h > h_{min}. \quad (3.11)$$

Es wird das Subsistenzlevel h_{min} eingeführt, welches der Pro-Kopf-Konsum Mindestmenge entspricht, ab der sich erst ein positiver Nutzen ergibt. Wird dieses Niveau nicht erreicht, so wird der Nutzen null.

$h_{min} = 0$ entspricht dem Modell von Brander und Taylor. Der wesentliche Unterschied besteht nun darin, dass eine Cobb-Douglas Nutzenfunktion eine Substitution der Güter ermöglicht. Die Stone-Geary Funktion lässt nur limitierte Substitutionsmöglichkeiten zwischen den Gütern h und m zu. Die Maximierung unserer Nutzenfunktion unter Beachtung der Budgetrestriktion ergibt für einen repräsentativen Konsumenten folgende optimale innere Lösung von h und m , Herleitung siehe Appendix C.2:

$$h = (1 - \beta)h_{min} + \frac{w\beta}{p} \quad (3.12)$$

$$m = (1 - \beta)(w - ph_{min}). \quad (3.13)$$

Aus $m \geq 0$ folgt die notwendige Bedingung $p \leq \frac{w}{h_{min}}$, welche erfüllt ist, solange $h > h_{min}$ und somit $h_{min}p < hp \leq w$ gilt. Wie in den vorangegangenen Modellen gilt $w = 1$. Substituiert man nun $p = \frac{1}{\alpha S}$ (siehe Gleichung (2.5)), folgt

$$h_{min} \leq \alpha S. \quad (3.14)$$

Das heißt, das Subsistenzlevel muss kleiner als die gegenwärtige Arbeitsproduktivität αS sein. Ist obige Bedingung nicht erfüllt, erhält man die Randlösung $m = 0$ und $h = 1$. Schließlich ergeben die obige optimale Konsumpolitik und die Produktionsfunktionen (2.3) und (2.4) die optimale Aufteilung der Arbeitskräfte für H und M , welche von nun an nicht mehr konstant ist:

$$L_H = \begin{cases} \frac{L(1-\beta)h_{min}}{\alpha S} + \beta L & \text{wenn } h_{min} \geq \alpha S \\ L & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$L_M = \begin{cases} (1 - \beta)L(1 - \frac{h_{min}}{\alpha S}) & \text{wenn } h_{min} \geq \alpha S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

Da $p = \frac{1}{\alpha S}$ gilt, führt ein wachsender Preis zu einer Verschiebung der Arbeitskräfte vom M-Sektor in den H-Sektor. Hier spricht man auch von einer strukturellen Veränderung der Wirtschaft.

Das Einsetzen in (2.1) und (2.12) generiert nun folgende Dynamiken:

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - S\alpha * \begin{cases} \frac{Lh_{min}(1-\beta)}{\alpha S} + L\beta & h_{min} \leq S\alpha \\ \text{sonst} & \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\dot{L} = L \left(b - d + S\alpha\phi * \begin{cases} \frac{h_{min}(1-\beta)}{\alpha S} + \beta & h_{min} \leq S\alpha \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \right). \quad (3.18)$$

Ein höheres Subsistenzlevel führt zu einem erhöhten Abbau der Ressource und einer größeren Wachstumsrate der Bevölkerung. Man sieht allerdings, dass, sobald die Bedingung $h_{min} \leq \alpha S$ verletzt ist, die Dynamiken unabhängig vom Subsistenzniveau h_{min} sind.

3.2.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Anderies untersucht die langfristige Entwicklung in Abhängigkeit des Parameters h_{min} . Man erkennt schnell, dass kleine Änderungen zu großen Unterschieden führen können. $h_{min} = 0,0177$ ergibt im Phasenportrait einen Grenzyklus, siehe Abbildung (3.6). Die zugehörige Entwicklung über die Zeit wird in Abbildung (3.7) ersichtlich, wobei diese der speziellen Entwicklung eines Grenzyklus entspricht. Im Grenzyklus nimmt der Ressourcenstock S Werte zwischen ca. 1500 und 6000, und die Bevölkerung zwischen 1000 und 8500 an.

Nur eine kleine Veränderung in der Parametrisierung $h_{min} = 0,015$ führt zu einem völlig anderem Ergebnis. Das Phasendiagramm (3.8) und die Entwicklung der Bevölkerung über die Zeit (3.10) zeigen dies deutlich. Diese Parameterwahl führt zu einer Konvergenz gegen ein Steady-State. Im Vergleich zu dem Ergebnis von Brander und Taylor sind die Amplituden der Fluktuation gewachsen. Sowohl die Bevölkerung als auch der Ressourcenstock brauchen hier deutlich länger, um sich in ihrem Gleichgewicht einzupendeln. Die Konvergenz gegen das Steady-State Gleichgewicht ist deutlich langsamer als jene im Brander/Taylor Modell. Die minimalen und maximalen Werte, welche von Bevölkerung und Ressourcenstock angenommen werden, sind hier extremer. Die Bevölkerung wächst nach 60 Dekaden auf 16000 an, was eine schnellere Ressourcenknappheit zufolge hat. Nach 75 Dekaden wird im M-Sektor nicht mehr produziert und alle Arbeitskräfte werden im H-Sektor eingesetzt, siehe Abbildung (3.9). Die Steady-State-Lösung ist gegeben durch:

$$(S = 4000, L = 4267)$$

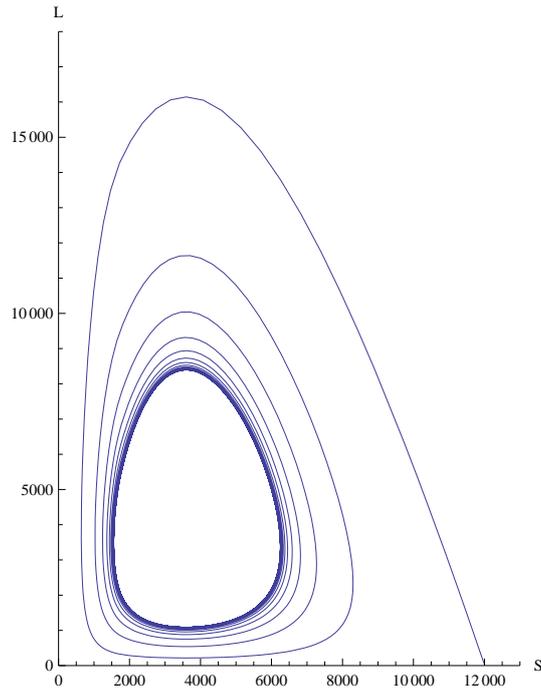


Abbildung 3.6.: Phasendiagramm für $h_{min} = 0,0177$ - Grenzyklus.

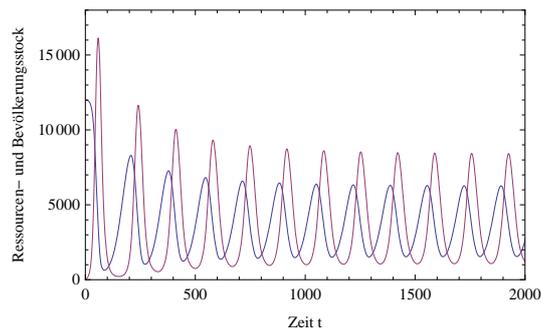


Abbildung 3.7.: Entwicklung über die Zeit - Grenzyklus.

Warum hat auf der Insel keine institutionelle Veränderung stattgefunden?

Um diese Frage zu beantworten wählt Anderies $h_{min} = 0,03$ und $\beta = 0,1$. Eine Verringerung von β bedeutet, dass der repräsentative Agent seine Präferenz gegenüber dem Konsumgut m erhöht bzw. gegenüber h verringert hat. Eine Erhöhung von h_{min} setzt die Mindestkonsummenge von h hinauf. Somit verlangt unsere Nutzenmaximierung einerseits wegen h_{min} einen höheren Pro-Kopf-Konsum von h , andererseits aufgrund der neuen Präferenz einen erhöhten Konsum von m . In Abbildung (3.11) ist die Aufteilung der Arbeitskräfte dargestellt. In den ersten 100

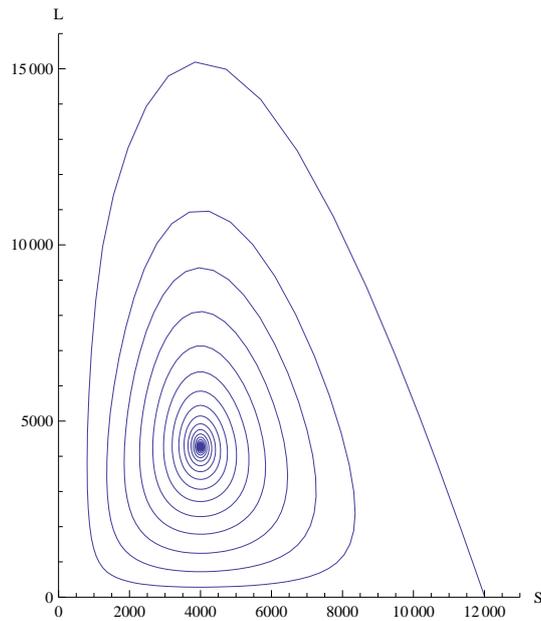


Abbildung 3.8.: Phasendiagramm für $h_{min} = 0,015$.

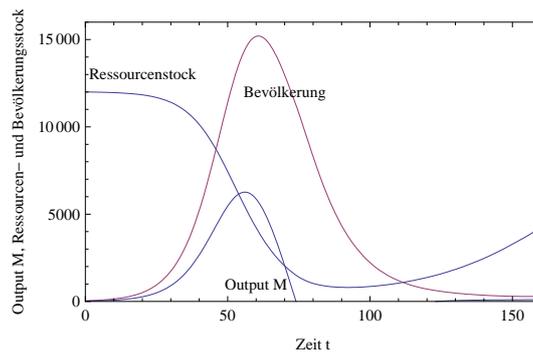


Abbildung 3.9.: Entwicklung über die Zeit.

Dekaden ist diese sehr stabil ($l_M \approx \frac{1}{3}$ und $l_H \approx \frac{2}{3}$). Nach 100 Dekaden beginnt der Ressourcenstock, vergleiche Abbildung (3.12), stark zu sinken und es werden die Arbeitskräfte aus dem M-Sektor abgezogen und für die Ernte H eingesetzt. Der Anteil an Arbeitern im H-Sektor steigt also nach ca. 80 Zeiteinheiten stetig an, um den Pro-Kopf-Konsum von h über dem Mindestniveau h_{min} zu halten. Die Bevölkerung nimmt ihr Maximum nach ca. 100 Zeiteinheiten an, geht dann aber innerhalb kürzester Zeit stark zurück. Die sehr rapide Veränderung in der Arbeitsaufteilung und der Bevölkerung entsteht durch die Ressourcenknappheit. Es wird schwieriger das Subsistenzniveau zu halten und durch diese plötzliche Veränderung bleibt keine Zeit für institutionelle Adaptierungen.

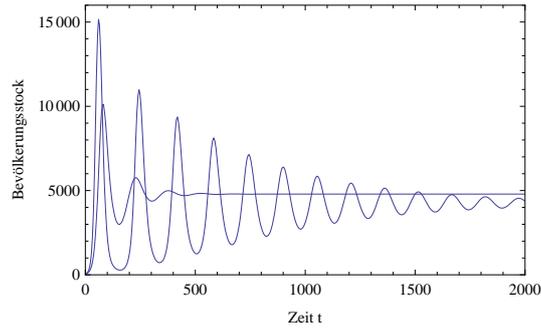


Abbildung 3.10.: Entwicklung der Bevölkerung - Vergleich mit Brander und Taylor Modell.

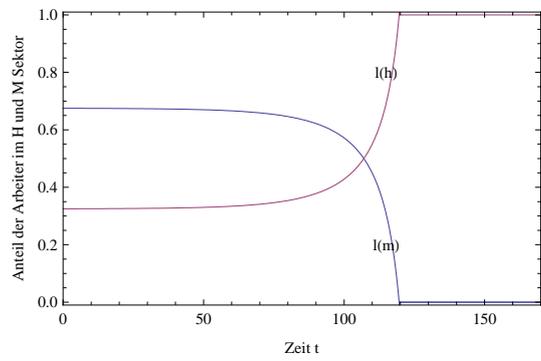


Abbildung 3.11.: Proportionen zwischen L_M und L_H .

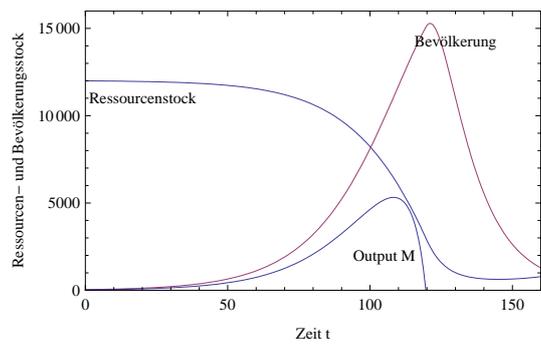


Abbildung 3.12.: Das Modell mit veränderten Parameterwerten $\beta = 0,1$ und $h_{min} = 0,3$.

Mit diesem Modell kann auch eine geschichtliche Gegebenheit sehr gut beschrieben werden. Die berühmten Statuen der Osterinsel gehören wie im Brander/Taylor-Modell zum aggregierten Gut M . Die Herstellung und der Transport der über 80 Tonnen schweren Statuen kann nur von einer Gesellschaft durchgeführt werden, die Essentials (z.B. Nahrungssuche) leicht erledigen kann [3]. Das erläuterte Modell erklärt somit sehr gut den tatsächlich stattgefundenen plötzlichen Arbeitsstopp im Bereich der Statuenproduktion, da zu dem Zeitpunkt, an dem die natürliche Ressource knapp wird, die Arbeitskräfte aus dem M-Sektor abgezogen und für die Ernte H eingesetzt werden.

Der hier verwendete Ansatz mit nicht konstanter endogener Arbeitsaufteilung scheint realistischer als jener von Brander und Taylor zu sein, da ein geringerer Ressourcenstock einen höheren Beschaffungsaufwand der Ressource impliziert, und Nahrung zum Überleben notwendiger als beispielsweise der Bau von Statuen ist. Ein Vergleich mit dem Modell von Brander und Taylor zeigt, dass bereits die Änderung in der Nutzenfunktion zu einer anderen geschichtlichen Interpretation führt. Brander und Taylor argumentieren in ihrer Arbeit, dass zu wenig ökologisches Verständnis und vorhandene Konfliktsituationen dazu geführt haben, dass keine institutionelle Adaptierung stattgefunden hat. Anderies liefert mit Hilfe seines Modells eine andere geschichtliche Interpretation. Er geht davon aus, dass es nicht genügend Zeit für Adaptierungen gegeben hat, da Veränderungen im Ressourcenstock und der Bevölkerung zu plötzlich aufgetreten sind.

3.3. Insitutionelle Adaptierung durch Einführung eines Subsistenzlevels und Erhaltungspolitiken

Pezzey und **Anderies** führen in ihrem Paper „**The effect of subsistence on collapse and institutional adaptation in population-resource societies**“ [16] institutionelle Veränderungen anhand eines Subsistenzlevels h_{min} in der Nutzenfunktion und vier Erhaltungspolitiken ein. Dieses Modell kann als Fortsetzung des Kapitel 3.2 gesehen werden. Es werden die Auswirkungen einer Steuer auf die Ressource, sowie einer Beschränkung auf den gesamten Ressourcenstock, auf den gesamten Arbeitsaufwand und auf den Pro-Kopf-Arbeitsaufwand untersucht. Ein höheres Subsistenzlevel verlangt einen höheren Pro-Kopf-Konsum der Ressource. Die Erhaltungspolitiken, welche den Ressourcenstock schützen sollen, können aber nur bis zu einem bestimmten Niveau dieser Subsistenzbedingung entgegenwirken, und dadurch eine Ausrottung der Ressource verhindern.

3.3.1. Modellbeschreibung

Die Subsistenzbedingung wird wie im vorangegangenen Kapitel eingeführt, und es ergibt sich wieder keine konstante Arbeitsaufteilung zwischen den Sektoren H und M , sondern eine von der Ressource - speziell von der Ressourcenknappheit - abhängige Aufteilung. Die Autoren zeigen, dass diese Subsistenzbedingung trotz Erhaltungspolitiken die Verhinderung einer Aufstieg- und Fall-Entwicklung erschwert oder sogar unmöglich macht.

Wie im vorangegangenen Kapitel verwenden die Autoren folgende Stone-Geary Nutzenfunktion:

$$u = (h - h_{min})^\beta m^{1-\beta}, h_{min} > 0 \quad (3.19)$$

Wieder gilt $M = L_M$ und $L_H = L - L_M$. Somit berechnet sich der Pro-Kopf-Arbeitsaufwand l_H wie folgt: $l_H = \frac{L_H}{L} = 1 - \frac{L_M}{L} = 1 - m$. Dieser entspricht dem Anteil an Arbeitskräften, welche im Erntesektor H tätig sind.

Die erste der vier Erhaltungspolitiken besteuert den Ressourcenkonsum mit der Rate t . Der Erlös wird der Bevölkerung als pauschale Subventionierung T zurückgegeben. Somit ist in diesem Modell die Budgetbeschränkung gegeben durch

$$(1 + t)ph + m = 1 + T. \quad (3.20)$$

Die gesamten bezahlten Steuern müssen mit der gesamten Subventionierung übereinstimmen. Die Maximierung unserer Nutzenfunktion unter Beachtung der Budgetrestriktion ergibt nun für einen repräsentativen Konsumenten folgende optimale Lösung von h und m , Herleitung siehe Appendix (C.3):

$$h = \begin{cases} \frac{\beta(1-ph_{min})}{(1+t-\beta t)p} + h_{min} & \text{wenn } p < \frac{1}{h_{min}} \\ \frac{1}{p} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$m = \begin{cases} \frac{(1-ph_{min})(1-\beta)(1+t)}{1+t+\beta t} & \text{wenn } p < \frac{1}{h_{min}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Somit hat die Steuer keinen Einfluss auf die Randlösung. Für die innere Lösung gilt, dass m mit steigendem t wächst. Verwendet man nun die Gleichung (2.5) für den Preis p , ergibt dies

$$h = \begin{cases} \frac{\beta(\alpha S - h_{min})}{(1+t-\beta t)} + h_{min} & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ \alpha S & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$m = \begin{cases} \frac{(1 - \frac{h_{min}}{\alpha S})(1-\beta)(1+t)}{1+t+\beta t} & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Die nun nicht mehr konstante optimale Aufteilung der Arbeitskräfte für die Ernte H und M ist gegeben durch

$$L_H = \begin{cases} L(1 - \frac{(1 - \frac{h_{min}}{\alpha S})(1-\beta)(1+t)}{1+t+\beta t}) & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ L & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$L_M = \begin{cases} L(\frac{(1 - \frac{h_{min}}{\alpha S})(1-\beta)(1+t)}{1+t+\beta t}) & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Setzt man nun in (2.1) ein, erhält man unter obigen Annahmen folgende Ressourcendynamik:

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - L * \begin{cases} \frac{\beta(\alpha S - h_{min})}{(1+t-\beta t)} + h_{min} & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ \alpha S & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Die Autoren gehen auch in diesem Modell von der Bevölkerungsdynamik, Gleichung (2.12), aus:

$$\dot{L} = L \left(b - d + \phi * \begin{cases} \frac{\beta(\alpha S - h_{min})}{(1+t-\beta t)} + h_{min} & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ \alpha S & \text{sonst.} \end{cases} \right) \quad (3.28)$$

\dot{S} steigt und \dot{L} sinkt mit steigendem t . Eine höhere Steuer vermindert den Abbau der Ressource und die Wachstumsrate der Bevölkerung. Ein höheres Subsistenzlevel führt zu einem erhöhten Abbau der Ressource und einer größeren Wachstumsrate der Bevölkerung. Wie im vorherigen Modell sieht man, dass aber, sobald die Bedingung $h_{min} < \alpha S$ verletzt ist, die Dynamiken unabhängig vom Subsistenzniveau h_{min} und der Steuer t sind.

3.3.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Subsistenzbedingung

Zunächst betrachtet man den Effekt der Subsistenzbedingung und lässt die Erhaltungspolitiken noch außen vor. $h_{min} = 0$ ergäbe das Brander/Taylor Modell. Die Autoren nehmen für h_{min} einen Wert von 0,015 an. Abbildung (3.13) zeigt die von Ressourcen und Bevölkerungsstock abhängige Aufteilung der Arbeitskräfte. Wie im Abschnitt 3.2 führt eine Ressourcenknappheit zu einer Veränderung der Arbeitsaufteilung. Je weniger Ressourcen vorhanden sind, desto mehr Menschen arbeiten im Erntesektor. Gilt $t = 0$, stimmt dieses Modell zu diesem Zeitpunkt mit jenem aus Kapitel 3.2 überein, siehe Abschnitt 3.2.2.

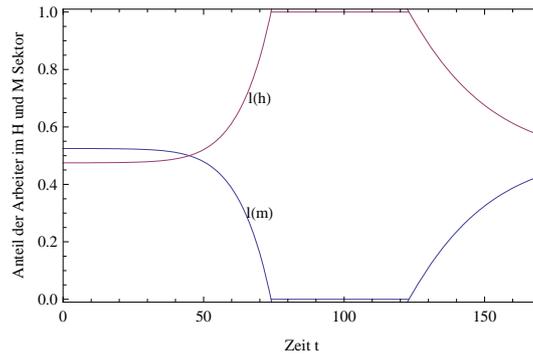


Abbildung 3.13.: Proportionen zwischen L_M und L_H .

Wertsteuer auf die Ressource („ad valorem resource tax“)

Um das Problem einer zu großen Bevölkerung und einem zu kleinen Ressourcenstock zu verhindern, wird die Steuer t eingeführt. Diese wurde bei der Herleitung des Modells bereits beachtet und erklärt. Die Autoren nehmen eine vom Pro-Kopf-Ressourcenstock $s \equiv \frac{S}{L}$ abhängige Steuer an, wobei $a = 5$ und $b = 3$ gewählt wird:

$$t = t_{max} \left[1 - \frac{s^b}{a^b + s^b} \right] \quad (3.29)$$

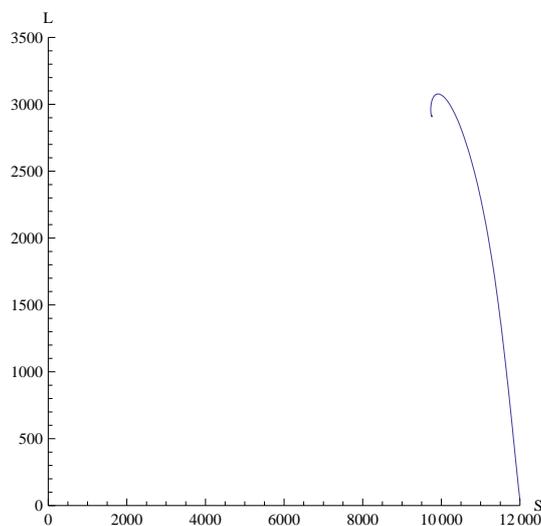


Abbildung 3.14.: Phasendiagramm $h_{min} = 0,015$, $t = t_{max} \left[1 - \frac{s^b}{a^b + s^b} \right]$, $a = 5$, $b = 3$ und $t_{max} = 5$.

Abbildung (3.14) und (3.15) zeigen das Ergebnis für $h_{min} = 0,015$. Sowohl die Bevölkerung als auch der Ressourcenstock konvergieren sehr rasch gegen ihre Steady-State Lösung. Das Bevöl-

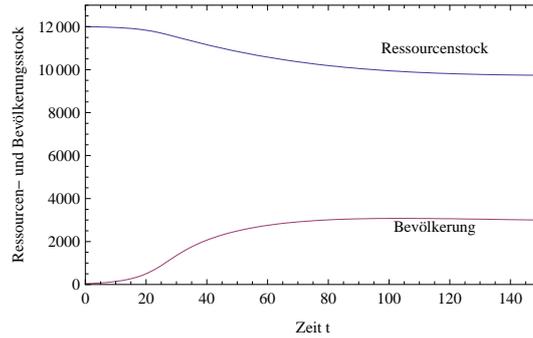


Abbildung 3.15.: Entwicklung über die Zeit, $h_{min} = 0,015$, $t = t_{max}[1 - \frac{s^b}{a^b+s^b}]$, $a = 5$, $b = 3$ und $t_{max} = 5$.

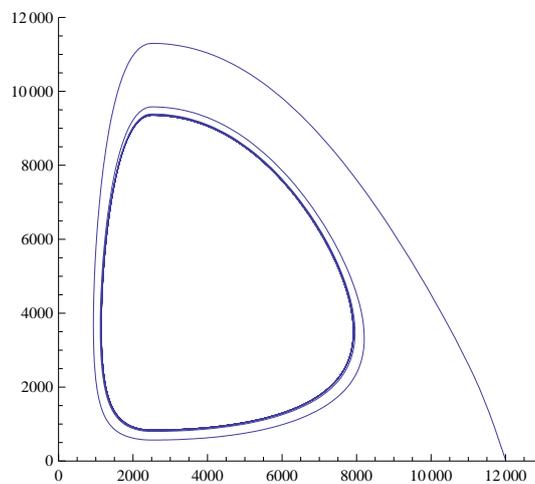


Abbildung 3.16.: Phasendiagramm $h_{min} = 0,025$, $t = t_{max}[1 - \frac{s^b}{a^b+s^b}]$, $a = 5$, $b = 3$ und $t_{max} = 5$.

kerungsmaximum wird hier jedoch bei 3000 angenommen und der Ressourcenstock kommt auf einen minimalen Wert von ca. 10000. Was bedeutet das? Die Steuer und das Subsistenzlevel h_{min} führen nur zu einem langsamen und nicht stark wachsenden Bevölkerungsstock, was keine Ressourcenknappheit zufolge hat. Erhöht man, wie in Abbildung (3.16) und (3.17), den Wert des Subsistenzlevels $h_{min} = 0,025$, so führt dies zu einem vollkommen anderen Ergebnis. Einerseits wächst die Bevölkerung sehr stark (maximaler Wert = 12000), gleichzeitig geht der Ressourcenstock stark zurück und nimmt nach 120 Dekaden einen minimalen Wert von unter 1000 an. Das Phasenportrait (3.16) zeigt, dass die dynamische Entwicklung in einem Grenzyklus endet. Der Vergleich der beiden Parameter bestätigt deutlich die oben erwähnte Aussage der Autoren, nämlich, dass eine Verschärfung der Subsistenzbedingung die Entstehung des Aufstieg- und Fallszenarios verstärkt.

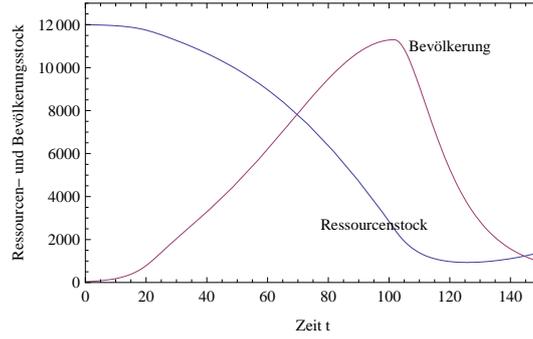


Abbildung 3.17.: Entwicklung über die Zeit, $h_{min} = 0,015$, $t = t_{max}[1 - \frac{s^b}{a^b + s^b}]$, $a = 5$, $b = 3$ und $t_{max} = 5$.

Beschränkung der gesamten Ressourcenernte („quotas on total resource harvest“)

In diesem Abschnitt betrachtet man eine Erhaltungspolitik, die die Ausrottung der Ressource durch eine Beschränkung auf die gesamte Ressourcenernte H verhindern soll. Es wird eine konstante Schranke \bar{H} eingeführt, wobei $H \leq \bar{H}$ gilt. Aufgrund dieser institutionellen Adaptierung ist es für die Bevölkerung nicht möglich diese Schranke zu überschreiten. Die Frage der Umsetzung wird von Pezzey und Anderies nicht weiter behandelt. Aus (3.25), $H = hL$ und $t = 0$ folgt zuerst ohne Beachtung der eingeführten Schranke für H :

$$H = \begin{cases} (\beta\alpha S + (1 - \beta)h_{min})L & \text{wenn } \alpha S > h_{min} \\ \alpha SL & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\implies H = \min[(\beta\alpha S + (1 - \beta)h_{min})L, \alpha SL] \quad (3.31)$$

Bekanntlich ergibt ein Pro-Kopf-Konsum unter h_{min} einen individuellen Nutzen von 0. Die Autoren nehmen daher an, dass die Beschränkung \bar{H} nur Sinn macht, wenn sie größer gleich $h_{min}L$ ist, da nur dann ein positiver Nutzen für die gesamte Bevölkerung möglich ist. Gilt diese Bedingung nicht, so wird daher die Beschränkung auf den gesamten Ressourcenstock aufgehoben und \bar{H} somit ignoriert. Dies entspricht:

$$\max(\bar{H}, h_{min}L). \quad (3.32)$$

Die Ernte H unter der Beschränkung \bar{H} - Gleichung (3.33) - setzt sich somit aus (3.31) und (3.32) und der eigentlichen Bedingung $H \leq \bar{H}$ zusammen:

$$H = \min[\max(\bar{H}, h_{min}L), (\beta\alpha S + (1 - \beta)h_{min})L, \alpha SL] \quad (3.33)$$

Zum Veranschaulichen, siehe Abbildung (3.18), haben die Autoren folgende Parameterwerte gewählt

$$(h_{min}, \bar{H}) = (0.015, 106.7)$$

bzw. $(h_{min}, \bar{H}) = (0.03, 106.7)$

Je höher das Subsistenzlevel h_{min} gewählt wird, desto stärker werden die Fluktuationen. Aufgrund der Beschränkung der Ernte und einem nicht zu großen Subsistenzlevel ergibt sich bei $h_{min} = 0.015$ eine schnelle Konvergenz der beiden Stocks. Die Erhöhung auf $h_{min} = 0.03$ löst hingegen ein starkes Aufstieg- und Fallszenario aus.

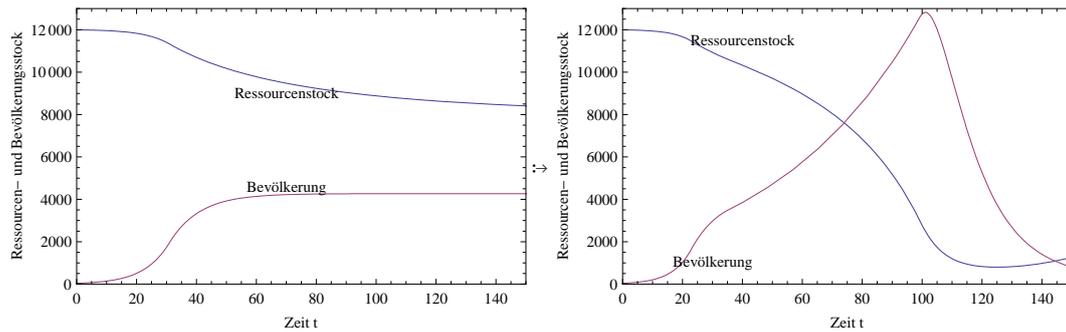


Abbildung 3.18.: Beschränkung auf die gesamte Ernte \bar{H} durch $\bar{H} = 106.7$ und $h_{min} = 0.015$ (linke Graphik) bzw. $h_{min} = 0.03$ (rechte Graphik).

Abbildung (3.19) stellt die Entwicklung von H mit den Parameterwerten $\bar{H} = 106,7$ und $h_{min} = 0,015$ dar, und verdeutlicht die Wirkung von \bar{H} . Nach ungefähr 30 Dekaden erreicht die geerntete Menge die Schranke \bar{H} , welche nicht überschritten werden darf.

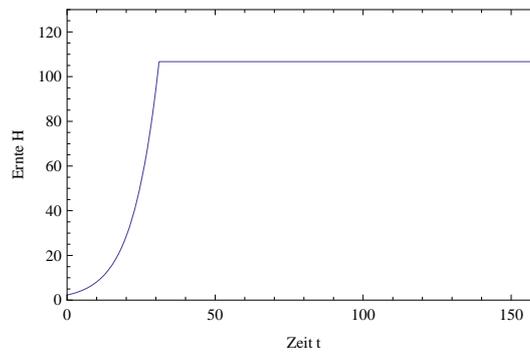


Abbildung 3.19.: Die Entwicklung der Ernte H über die Zeit mit $\bar{H} = 106,7$ und $h_{min} = 0,015$.

Abbildung (3.20) zeigt die Ernte für die Parameterwerte $\bar{H} = 106,7$ und $h_{min} = 0,03$. Wobei in dieser Graphik deutlich die einzelnen Bedingungen sichtbar werden. In den ersten 20 Dekaden

liegt die Ernte unter der Beschränkung \bar{H} gefolgt von ca. 15 Dekaden, in denen die Beschränkung eingehalten wird und das Ernteniveau bei 106,7 liegt. Danach ist die Bevölkerung so stark gestiegen, dass $\bar{H} < h_{min}L$ gilt und somit die Beschränkung unter dem Subsistenzniveau der Gesamtbevölkerung liegt. Daher wird die Bedingung aufgehoben und die Ernte steigt rasch an. Mit dem Rückgang der Bevölkerung nach insgesamt 100 Dekaden nimmt auch die gesamte Ernte wieder ab.

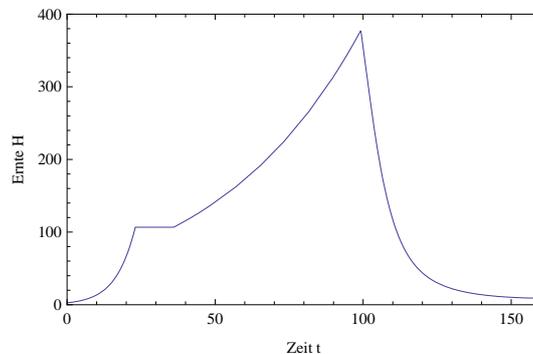


Abbildung 3.20.: Die Entwicklung der Ernte H über die Zeit mit $\bar{H} = 106,7$ und $h_{min} = 0,03$.

Beschränkung des gesamten Arbeitsaufwandes bzw. des Pro-Kopf-Aufwandes („quotas on total harvest effort“ bzw. „quotas on total per capita effort“)

Analog zum obigen Abschnitt kann eine konstante Schranke auf den gesamten Arbeitsaufwand $L_H \leq \bar{L}_H$ bzw. auch für den Pro-Kopf-Aufwand $l_H \leq \bar{l}_H$ eingeführt werden. Die Darstellung von H erfolgt analog zu (3.33):

$$H = \min[\max(\alpha S \bar{L}_H, h_{min}L), (\beta \alpha S + (1 - \beta)h_{min})L, \alpha SL] \quad (3.34)$$

bzw.

$$H = \min[\max(\alpha S \bar{l}_H, h_{min}L), (\beta \alpha S + (1 - \beta)h_{min})L, \alpha SL] \quad (3.35)$$

Auch diese beiden Beschränkungen führen bei einem höheren h_{min} eher zu einem Aufstieg- und Fallszenario. Je kleiner das Subsistenzlevel ist, umso schneller konvergieren sowohl Bevölkerungs- und Ressourcenstock zu ihrem Gleichgewicht.

Zum Veranschaulichen (siehe Abbildung (3.21)) habe ich folgende Parameterwerte gewählt

$$\begin{aligned} (h_{min}, \bar{L}_H) &= (0.015, 1000.7) \\ \text{bzw. } (h_{min}, \bar{L}_H) &= (0.03, 1000.7) \end{aligned}$$

Hier ergibt der Schnitt der Isoklinen für $h_{min} = 0,015$ eine Konvergenz gegen folgendes langfristige Gleichgewicht

$$(S = 8998, L = 3601).$$

$h_{min} = 0,03$ führt zu einem Grenzyklus, also einem nicht endenden Aufstieg- und Fallszenario.

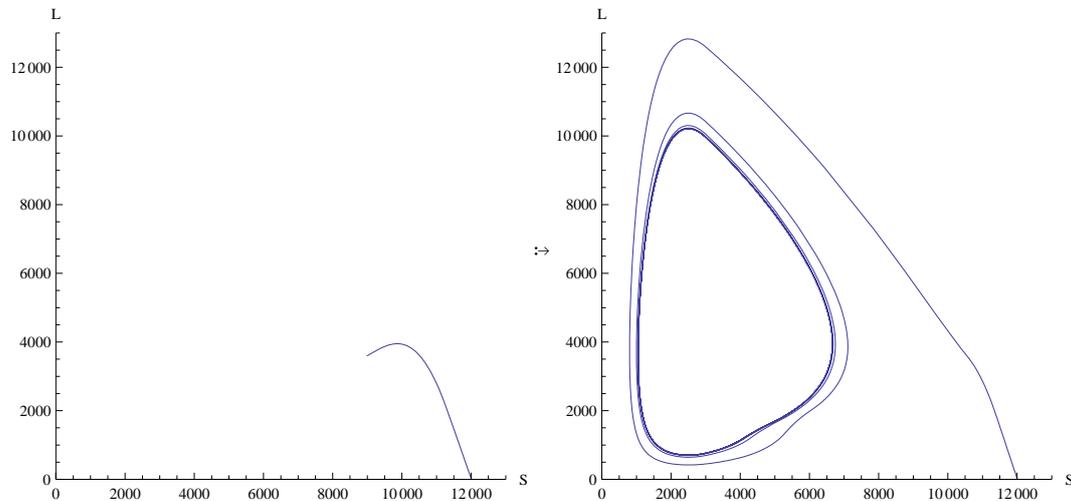


Abbildung 3.21.: Phasendiagramme mit Beschränkung auf den gesamten Arbeitsaufwand $\bar{L}_H = 1000,7$ und $h_{min} = 0.015$ (linke Graphik) bzw. $h_{min} = 0.03$ (rechte Graphik).

Die Einführung eines Subsistenzlevels führt zu einem erhöhten Abbau der Ressource. Dieser Effekt kann mit einer eingeführten Politik, welche den Ressourcenstock sichern soll, kompensiert werden. Bis zu einem bestimmten Niveau von h_{min} führt dies zu einer Konvergenz gegen ein Steady-State. Wird jedoch dieses Niveau zu groß, kann auch die Politik nicht mehr helfen, und es ergibt sich ein Grenzyklus, also ein nicht endender Zyklus zwischen Aufstieg und Fall. Dieses Kapitel hat gezeigt, dass Institutionen einen großen Einfluss auf die Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung haben. Die Erhaltungspolitiken schützen den Ressourcenstock und können so dem Effekt des Subsistenzlevels entgegenwirken. Kritisch anzumerken ist hier jedoch, dass sich die Umsetzung und die Kontrolle solcher Beschränkungen als schwierig erweisen kann.

3.4. Vergleich der Modelle

Nachdem nun alle 3 Modelle erklärt und erläutert wurden, möchte ich diese nun vergleichen und die wichtigsten Unterschiede ausarbeiten.

Die Nutzenfunktion

Kapitel 2 & Kapitel 3.1	Kapitel 3.2	Kapitel 3.3
Cobb-Douglas Nutzenfunktion $u = h^\beta m^{1-\beta}$	Stone-Geary Nutzenfunktion $u = (h - h_{min})^\beta m^{1-\beta}, h > h_{min}$	

Die Cobb-Douglas-Nutzenmaximierung führt zu einer konstanten, individuellen Nachfrage nach dem Gut h und m . Eine Stone-Geary-Nutzenmaximierung, wie in Kapitel 3.2 und 3.3, ergibt ein komplexeres Ergebnis. h und m sind nun von der Veränderung der Bevölkerung und dem Ressourcenstock abhängig. In diesen beiden Modellen führt ein Bevölkerungsüberschuss zu einer Ressourcenknappheit, welche eine Verschiebung der Arbeitskräfte aus dem Sektor M in den Sektor H bewirkt. Dieses Ergebnis ist plausibler, da Ressourcenknappheit die Nahrungssuche erschwert und so zum Überleben mehr Arbeitskräfte im Erntesektor benötigt werden.

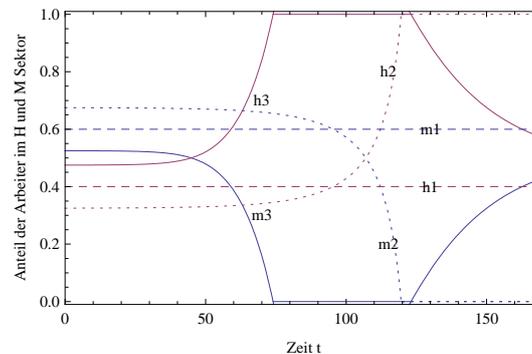


Abbildung 3.22.: Ein Vergleich der Proportionen von L_H und L_M der 3 Modelle. Die Parameterwerte werden wie in den einzelnen Kapitel gewählt. m und h entsprechen hier jeweils den Proportionen der Arbeiter. Das heißt, sie geben an wie groß der Anteil an Arbeitern ist, der im M und H Sektor eingesetzt wird. Wobei speziell die Ergebnisse aus dem Kapitel 3.1 durch m_1 und h_1 , aus dem Kapitel 3.2 durch m_2 und h_2 und aus dem Kapitel 3.3 durch m_3 und h_3 darstellt werden.

Die Dynamiken \dot{S}

Kapitel 2	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta$
Kapitel 3.1	$\dot{S} = \frac{rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha\beta SL}{1 + \delta\alpha\beta L}$
Kapitel 3.2	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha * \begin{cases} \frac{h_{min}(1-\beta)}{\alpha S} + \beta & \text{wenn } h_{min} \leq S\alpha \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
Kapitel 3.3	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - L * \begin{cases} \frac{\beta(\alpha S - h_{min})}{(1+t-\beta t)} + h_{min} & \text{wenn } h_{min} \leq S\alpha \\ \alpha S & \text{sonst} \end{cases}$

Im Kapitel 3.1 ist die rechte Seite der Ausgangsformel der Dynamik des Ressourcenstocks $\dot{S} = G - H$ von der Wachstumsrate der Ressource $\hat{S} = \frac{\dot{S}}{S}$ und somit von \dot{S} selbst abhängig. Durch eine Umformung erhält man obiges Ergebnis. Die Idee ist, dass \hat{S} als Prädiktor für den zukünftigen Preis der Ressource verwendet wird, und abhängig von der institutionellen Adaptierung, welche durch den Parameter δ dargestellt wird, die Menschen die gegenwärtige Ernte der Ressource im Hinblick auf die durch \hat{S} dargestellten Preisänderung erhöhen oder verringern.

Die Wachstumsfunktion G der Ressource bleibt in den beiden Kapiteln 3.2 und 3.3 unverändert. Da die Arbeitsaufteilung zwischen den Sektoren M und H nicht mehr als konstant angenommen wird, sondern von der Größe des Ressourcenstocks abhängig ist, ergeben sich neue Erntefunktionen. In Kapitel 3.3 wird zusätzlich noch die Steuer t auf den Ressourcenkonsum eingeführt.

Die Dynamiken \dot{L}

Kapitel 2	$\frac{\dot{L}}{L} = b - d + S\alpha\beta\phi$
Kapitel 3.1	$\frac{\dot{L}}{L} = b - d + S\alpha\beta\phi \left(\frac{(rS(1 - \frac{S}{K}) - LS\alpha\beta)\delta}{S(1 + L\alpha\beta\delta)} + 1 \right)$
Kapitel 3.2	$\frac{\dot{L}}{L} = b - d + S\alpha\phi * \begin{cases} \frac{h_{min}(1-\beta)}{\alpha S} + \beta & \text{wenn } h_{min} \leq S\alpha \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
Kapitel 3.3	$\frac{\dot{L}}{L} = -\sigma + \phi * \begin{cases} \frac{\beta(\alpha S - h_{min})}{(1+t-\beta t)} + h_{min} & \text{wenn } h_{min} \leq S\alpha \\ \alpha S & \text{sonst} \end{cases}$

Ausgehend von Gleichung (2.12), wobei die Geburtenfunktion $F = \phi \frac{H}{L}$ bekanntlich vom Pro-Kopf-Konsum abhängig ist, erhält man in Kapitel 3.1 auch eine von \hat{S} abhängige Bevölkerungsdynamik. Obige Gleichung ergibt sich durch Einsetzen von \dot{S} und Umformen. In den Kapiteln 3.2 und 3.3 führt die nicht konstante Arbeitsaufteilung bzw. die Einführung des Subsistenzlevels zu obigen Geburtenfunktionen. Wie bei der Ressourcendynamik ist im Kapitel 3.3 die Bevölkerungsdynamik auch von der neu eingeführten Steuer abhängig.

Steady State Analyse

Der Schnitt von $\dot{S} = 0$ und $\dot{L} = 0$ führt im Kapitel 3.1 unabhängig von δ zur selben langfristigen Steady-State-Lösung, nämlich jener vom Brander/Taylor Modell. Die Phasendiagramme und die Verläufe über die Zeit variieren nur in der Stärke der Fluktuationen und der Geschwindigkeit,

mit der die Bevölkerung und der Ressourcenstock konvergieren. Das bedeutet, dass die eingeführten Institutionen keinen Einfluss auf das langfristige Ergebnis haben. Gegenteiliges passiert in den beiden Kapiteln 3.2 und 3.3. Hier werden die dynamischen Lösungen in Abhängigkeit vom neu eingeführten Parameter h_{min} betrachtet. Man kann das dritte Modell als Erweiterung des zweiten sehen, da das Weglassen der Steuer t und aller weiteren Beschränkungen und dieselbe Parameterwahl für β und h zum selben Ergebnis führen. Beide Modelle sind stark von der Parameterwahl abhängig. Diese kann sowohl zu einem Grenzzyklus, zu einer langsamen aber auch zu einer schnell konvergierenden dynamischen Lösung führen, siehe unter anderem Abbildung (3.6), (3.8) und (3.21). Das heißt, ein wesentlicher Unterschied der Modelle ist, dass die Gleichgewichtslösungen im ersten Modell unabhängig und in den anderen beiden stark abhängig sind von den neu eingeführten Parametern, welche institutionelle Adaptierungen beschreiben.

Institutionen

Wie werden nun die Institutionen eingeführt bzw. in welcher Weise kommt es zu institutionellen Veränderungen?

Dalton und Coats stellen sich in [6] die Frage ob Institutionen - genauer gesagt Eigentumsrechte oder Ressourcen im Gemeineigentum - das Aufstieg- und Fallszenario verhindert hätten. Die institutionelle Adaptierung wird anhand von Präferenzen für den gegenwärtigen und zukünftigen Konsum dargestellt. Eigentumsrechte führen zu keinem Aufstieg und Fall, sondern zu einer schnellen Konvergenz gegen das Steady-State-Gleichgewicht.

Anderies will in [1] zeigen, dass es keine institutionelle Adaptierung auf den Osterinseln gegeben hat, da die Entwicklung - der Aufstieg und Fall - der Bevölkerung und des Ressourcenstocks zu schnell geschehen ist und es nicht genügend Zeit für institutionelle Eingriffe vorhanden war. Er erweitert das Brander/Taylor Modell um das Subsistenzlevel in der Nutzenfunktion.

Pezzey und Anderies führen in [16] institutionelle Veränderungen anhand einer Steuer und Beschränkungen auf die gesamte Ernte und den Arbeitsaufwand ein. Diese Erhaltungspolitiken sollen eine Ressourcenausbeutung verhindern. Die Subsistenzbedingung, also ein festgelegter Mindest-Pro-Kopf-Konsum der Ressource, wirkt wie in Kapitel 3.2 entgegengesetzt und verstärkt die Fluktuationen im Ressourcen- und Bevölkerungsstock.

In [6] führt eine Veränderung des Parameters zu einer impliziten Veränderung der institutionellen Situation. Im Gegensatz dazu finden wir in [16] explizite Beschränkungen und Nebenbedingungen, die den Ressourcenstock schützen sollen.

[6] und [16] untersuchen mögliche Auswirkungen, die institutionelle Eingriffe gehabt hätten. Auf die Frage, warum es diese institutionellen Eingriffe auf der Osterinsel nicht gegeben hat, wird nicht eingegangen. Anderies hingegen versucht mit seinem Modell in [1] speziell mit dieser Frage zu beantworten. Er findet eine andere Erklärung als Brander und Taylor, warum es zu keiner institutionellen Adaptierung gekommen ist.

Das Modell aus Kapitel 3.3 scheint mir im Vergleich zu den beiden anderen die Situation der Osterinseln mit institutioneller Adaptierung am plausibelsten zu erklären. Einerseits weil es als Erweiterung von dem Modell aus Kapitel 3.2 gesehen werden kann, andererseits weil jenes aus 3.1 keiner Veränderungen in den Steady-State-Lösungen aufweist und sicherlich noch sehr ausbaufähig ist.

In diesem Kapitel wurden nun das Brander/Taylor-Modell um Institutionen erweitert und deren Auswirkungen verglichen. Eine wachsende Wirtschaft kann aber auch zu einem technischen Fortschritt führen. Diese Tatsache führt uns zu Kapitel 4.

4. Technischer Fortschritt

Dieser Abschnitt behandelt drei Erweiterungen des Brander/Taylor Modells, in denen ein endogener technischer Fortschritt eingeführt und die daraus entstehenden Auswirkungen untersucht werden.

Bevölkerungsentwicklung und technischer Fortschritt - ein kurzer Überblick der Wachstumstheorien

Das Brander/Taylor-Modell betrachtet eine malthusianische Bevölkerungsentwicklung. In der Theorie von Malthus gibt es nur eine einseitige Relation zwischen der Bevölkerung und der Technologie. Steinmann beschreibt dieses einseitige Zusammenspiel folgendermaßen:

„Der technische Fortschritt wird als das Instrument identifiziert, das die Ernährung einer immer größeren Zahl von Menschen ermöglicht hat und noch ermöglicht.“[21]

Auch die Neoklassiker vertreten die Ansicht, dass die Bevölkerung aufgrund von besser werdender Technologie wächst. Erst in der modernen Bevölkerungsökonomie sprechen Ökonomen von einer beidseitigen Beziehung. Sie gehen davon aus, dass eine hohe Bevölkerungsdichte oder hohes Bevölkerungswachstum zu technologischem Fortschritt führen kann, und somit hat die Bevölkerung Einfluss auf den technischen Stand einer Gesellschaft.

Im Bezug auf technisches Wachstum wird die Zeit von 500 nach Christus bis heute in drei Perioden eingeteilt. Den wesentlichen Unterschied findet man im Pro-Kopf-Einkommen sowie in der Beziehung zwischen Wachstumsrate der Bevölkerung und Pro-Kopf-Einkommen. Die erste Periode ist das **Malthus-Regime**, in dem das Pro-Kopf-Einkommen konstant bleibt und es eine positive Beziehung zwischen Bevölkerungswachstum und Pro-Kopf-Einkommen gibt. Danach spricht man vom **Post-Malthus-Regime** und zuletzt vom **modernen Wachstumsregime**, in dem es ein ständiges Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens und des Technologieniveaus gibt; das Bevölkerungswachstum und das Pro-Kopf-Einkommen weisen hier eine negative Relation auf. Im Post-Malthus-Regime tritt jeweils ein Merkmal der beiden anderen Perioden auf, einerseits ein Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens, wenn auch nicht so schnell wie in der darauf folgenden Periode. Andererseits gibt es hier noch eine wachsende Bevölkerung bei wachsendem Einkommen. Die Autoren O. Galor und D. Weil sprechen in ihrer Arbeit davon, dass nach lang anhaltender malthusianischen Stagnation der demographische Übergang zum modernen Wachstum geführt hat.[8]

In der Abbildung 4.1 erkennt man, dass die malthusianische Theorie um 1820 mit dem starken Wirtschafts- und Bevölkerungswachstum - also dem sogenannten demographischen Übergang -

seine Gültigkeit in Europa verlor. Ab 1929 kommt es zu einem andauernden Wirtschaftswachstum und einem Rückgang in der Bevölkerungswachstumsrate, was einen höheren Pro-Kopf-Output impliziert. Somit wird die malthusianische Theorie durch den entstehenden höheren Lebensstandard widerlegt.

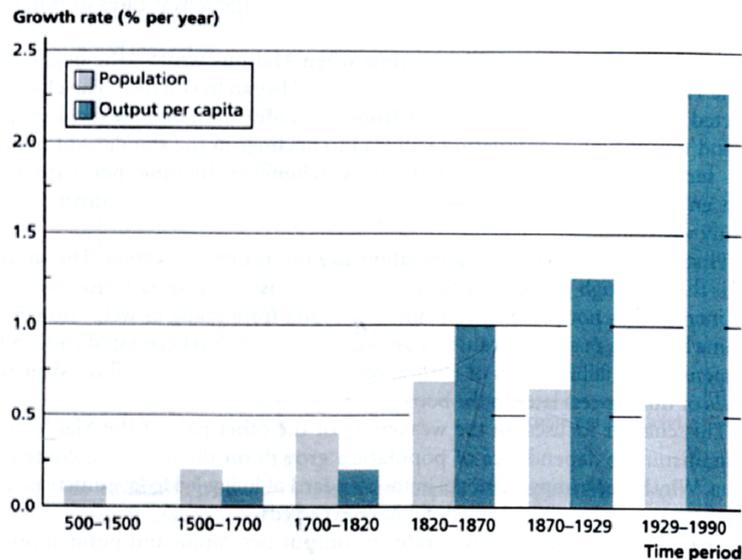


Abbildung 4.1.: Vom Malthus-Regime zur modernen Wachstumstheorie - der Zusammenbruch des Malthus-Regime [23],S.94.

Ein Vertreter der modernen Wachstumstheorie ist E. Boserup, die in ihrem „Boserup-Modell“ einen nachfrageorientierten, endogenen, technischen Fortschritt definiert. Durch eine größer werdende Bevölkerungsdichte entsteht ein Druck, welcher zu einem technischen Fortschritt führt. [21]

Im Brander/Taylor-Modell und den bisher betrachteten Erweiterungen wird die Technologie konstant gehalten. Im Folgenden werden verschiedenste Technologien endogenisiert und deren Auswirkungen untersucht. Ein Fortschritt in der Erntetechnologie α hat klarerweise andere Effekte auf den Ressourcenstock und somit auch auf die Bevölkerung, als eine Erhöhung der natürlichen Wachstumsrate der Ressource r . Ein Fortschritt in α kann zwar kurzfristig zu einem höheren Pro-Kopf-Konsum führen, steigert aber gleichzeitig die Gefahr der Auslöschung des Ressourcenstocks.

4.1. Logarithmische und exponentielle Modellierung des technischen Fortschritts

Reuveny und Decker erweitern in ihrem Paper **Easter Island: historical anecdote or warning for the future?** [17] das Brander/Taylor-Modell und endogenisieren den technischen Fortschritt.

Sie untersuchen eine Entwicklung des Sättigungsniveaus, der Ressourcenwachstumsrate und der Ernterate. Außerdem modellieren sie eine schnelle, langsame und moderate Fertilitätsrate.

4.1.1. Modellbeschreibung

Die Autoren gehen wie im Brander/Taylor-Modell von einer linearen Produktionsfunktion aus.

$$M^P = \lambda L_M \text{ mit } 0 < \lambda \leq 1 \quad (4.1)$$

$$H^P = \alpha S^\psi L_H^\theta \text{ mit } 0 < \theta \leq 1 \quad (4.2)$$

Es wird neben α ein Technologieparameter λ für den M-Sektor eingeführt. Eine Annahme ist, dass es auf den Osterinseln nur zu einem technologischen Fortschritt im H-Sektor kommen kann. Somit kann sich α erhöhen, λ jedoch nicht. Ein ganz einfaches Beispiel für eine Erhöhung von α ist die Verwendung von mehr Werkzeugen, was die Ernte erleichtert und die Ernterate erhöht. Auf der Angebotsseite von H wird wieder die Schaeferproduktionsfunktion verwendet. Die Gleichung (2.5) von Brander und Taylor wird hier über den Produzentengewinn hergeleitet.

$$\Pi_H = p H^P - w L_H \quad (4.3)$$

$$\Pi_M = M - w L_M \quad (4.4)$$

Da in einem Markt mit vollständiger Konkurrenz der Gewinn gleich 0 ist ($\Pi_H = \Pi_M = 0$),

$$\implies p = \frac{w L_H}{H^P} \quad (4.5)$$

Aufgrund der Marktträumungsbedingung $M = M^D = M^P$ folgt

$$M = M^P \implies w L_M = \lambda L_M \implies w = \lambda \quad (4.6)$$

$$\implies p = \frac{w L_H^{1-\theta}}{\alpha S^\psi}. \quad (4.7)$$

Auch hier wird die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion $u = h^\beta m^{(1-\beta)}$ verwendet und der Nutzen eines repräsentativen Individuums maximiert, wobei dies $h = \frac{\lambda \beta}{p}$ und $m = (1 - \beta) \lambda$ ergibt, siehe Appendix (C.1). Die Nachfrageseiten der beiden Sektoren für die gesamte Bevölkerung sind dann wie folgt gegeben:

$$H^D = \frac{L \lambda \beta}{p} \quad (4.8)$$

$$M^D = L(1 - \beta) \lambda \quad (4.9)$$

Die Vollbeschäftigungs- und die Marktgleichgewichtsbedingungen in beiden Sektoren ($H^P = H^D$ und $M^P = M^D$) ergeben die kurzfristigen Gleichgewichte

$$H = \alpha \beta^\theta L^\theta S^\psi \quad (4.10)$$

$$M = (1 - \beta) L \quad (4.11)$$

M wird also immer produziert. Da M als Numeraire verwendet wird und der Preis gleich dem Lohn $w = 1$ ist, wird genau soviel von M produziert, wie Arbeiter in diesem Sektor beschäftigt sind. Die Ernte H ist von der Erntetechnologie α , der Anzahl an Arbeitern in diesem Sektor βL , und der Ressourcenstockgröße abhängig. Einsetzen in 2.1 ergibt folgende Dynamik des Ressourcenstocks:

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - L^\theta S^\psi \alpha \beta^\theta. \quad (4.12)$$

Die Geburtenfunktion wird durch $F = \phi \left(\frac{H}{L} \right)^x$ angenommen, wobei x die Sensitivität im Bezug auf den Pro-Kopf-Konsum angibt. Je größer x desto größer ist der Einfluss des Pro-Kopf-Konsum auf die Geburtenfunktion. ($x = 1$ entspricht dem Brander/Taylor-Modell) Daher gilt:

$$\dot{L} = L(b-d + \phi(S^\psi L^{\theta-1} \alpha \beta^\theta)^x). \quad (4.13)$$

Für die weiteren Untersuchungen setzen die Autoren die Parameter θ und ψ - die eine Gewichtung darstellen - gleich eins, da Simulationen mit $\theta, \psi < 1$ die Grundaussage der Lösungen nicht verändern. Somit hat sich im Vergleich zum Brander/Taylor Modell die Ressourcendynamik, siehe Gleichung (2.11) nicht verändert. Die Bevölkerungsdynamik ist bis auf die Erweiterung durch x auch gleich geblieben, vergleiche Gleichung (2.13).

4.1.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Technologischer Fortschritt in K

Zuerst wird ein technischer Fortschritt im Sättigungsniveau angenommen, wobei dieses mit der Zeit steigt. Eine sehr gebräuchliche Art dies zu modellieren, ist eine in der Zeit t exponentielle Funktion. Außerdem wird eine logarithmische Entwicklung betrachtet.

$$K = 12000 + 30e^t \quad (4.14)$$

$$\text{bzw. } K = 12000 + 30 \ln(t + 1) \quad (4.15)$$

Die Abbildungen (4.2) und (4.3) zeigen den zeitlichen Verlauf, wobei der exponentielle Fortschritt zu einem Grenzyklus führt. Zuerst „explodiert“ die Bevölkerung nahezu und nimmt ihr Maximum bei ca. 80000 an. Der Ressourcenstock hat einen maximalen Wert von über 20000. Bereits nach 50 Dekaden hat das Sättigungsniveau einen Wert von $1.55541 * 10^{23}$ erreicht. Die Bevölkerung stürzt dann sehr schnell gegen Null. Die Erholungsphase der Bevölkerung ist weit länger als die Phase der Überbevölkerung. Ca. 40 Dekaden dauert der Aufstieg der Bevölkerung, gefolgt von über 100 Dekaden, in denen die Insel kaum besiedelt ist. Auch der individuelle Nutzen schwankt sehr stark.

Der exponentielle Anstieg im Sättigungsniveau führt anfangs zu einer Vergrößerung des Ressourcenstocks. Dies ergibt eine starke Überbevölkerung, welche rasch den positiven Effekt von K kompensiert. Da der Einfluss des exponentiell steigenden Sättigungsniveaus auf die Wachstumsfunktion $G = rS \left(1 - \frac{S}{K} \right)$ mit der Zeit geringer wird, kann der Ressourcenstock dem Druck der Bevölkerung nicht standhalten und wird ausgebeutet. Der Rückgang im Ressourcenstock

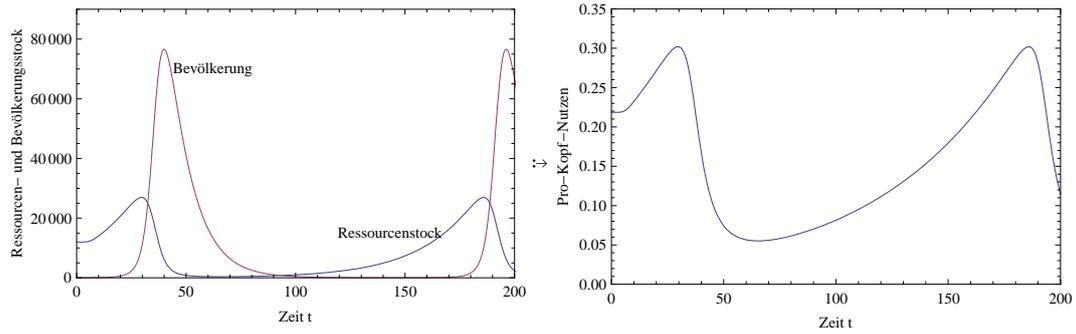


Abbildung 4.2.: Exponentieller technologischer Fortschritt im Sättigungsniveau, Gleichung (4.14).

impliziert den Bevölkerungsabsturz, welcher bei einem minimalen Pro-Kopf-Nutzen von 0,05 eingeleitet wird.

Der logarithmische Fortschritt, siehe Abbildung (4.3), führt zu einer ähnlichen Entwicklung wie beim Brander/Taylor-Modell und hat daher kaum einen Einfluss auf die langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung. Das Phasendiagramm (4.4) zeigt die Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht. Ein exponentielles Wachstum des Sättigungsniveaus scheint mir sehr unplausibel, da nach kürzester Zeit ein sehr hoher Wert K erreicht wird. Der Vergleich der Phasendiagramme (4.4) macht deutlich, dass exponentielles Wachstum des Sättigungsniveaus das Aufstieg- und Fall-Szenario nicht verhindert, sondern verstärkt.

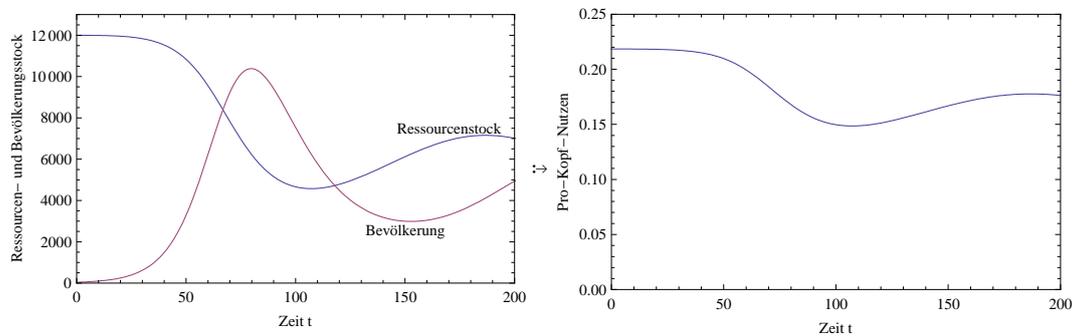


Abbildung 4.3.: Logarithmischer technologischer Fortschritt im Sättigungsniveau, Gleichung (4.15).

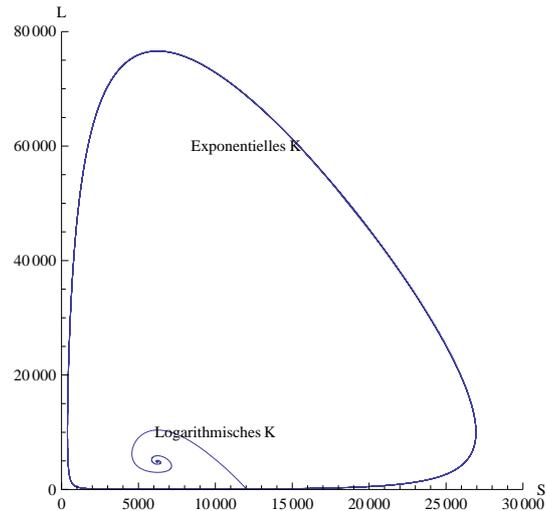


Abbildung 4.4.: Phasendiagramm für exponentiellen und logarithmischen technologischen Fortschritt im Sättigungsniveau.

Technologischer Fortschritt in r

Als nächstes wird ein exponentieller und ein logarithmischer technischer Fortschritt in der Wachstumsrate der Ressource untersucht. Die Erhöhung von r über die Zeit ist wie folgt definiert:

$$r = 0.04 + 0.00155e^{\frac{t}{35}} \quad (4.16)$$

$$\text{bzw. } r = 0.04 + 0.1 \ln(t + 1) \quad (4.17)$$

Abbildung (4.5) zeigt den exponentiellen, technologischen Fortschritt in der Ressourcenwachstumsrate. Zu Beginn fluktuiert die Bevölkerung, nach ca. 140 Dekaden beginnt sie sehr stark zu steigen - sie explodiert nahezu und nimmt nach 200 Dekaden einen Wert von 50000 an. Der Ressourcenstock fluktuiert nur kurz zu Beginn, pendelt sich aber schnell auf seinem Gleichgewicht - ca. bei der Hälfte des Sättigungsniveaus - ein. Hier führt die exponentiell steigende Ressourcenwachstumsrate zu einem konvergenten Ressourcenstock und einer weiter steigenden Bevölkerung.

Ein steigendes r bedeutet, dass die Ressource schneller wächst. Das führt dazu, dass mehr geerntet wird und impliziert eine bessere Versorgung, welche sich positiv auf das Bevölkerungswachstum auswirkt und den von r verursachten Wachstumseffekt kompensiert. Dieses Ergebnis unterstützt die Theorie von Malthus, nämlich dass zusätzlich verfügbare Ressourcen eine Zunahme der Bevölkerung bewirkt.

Abbildung (4.6) zeigt den logarithmischen technologischen Fortschritt in r . Die Bevölkerung wächst in den ersten 50 Dekaden sehr langsam, in den darauf folgenden 50 Dekaden sehr schnell. Nach 100 Dekaden geht der Anstieg zurück und die Bevölkerung wächst nahezu linear weiter.

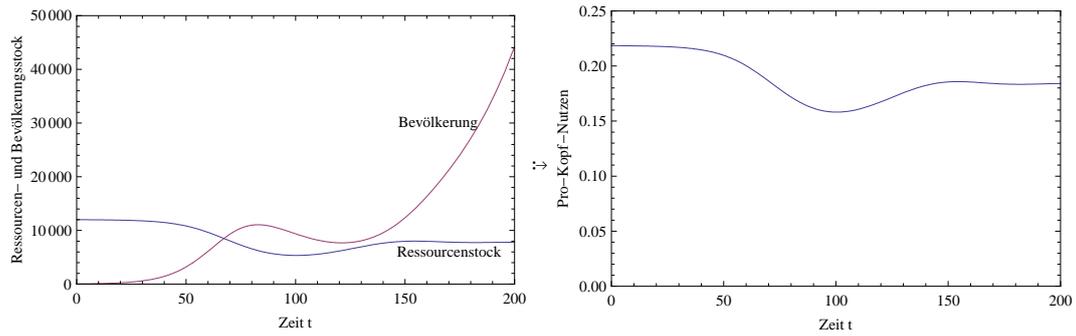


Abbildung 4.5.: Exponentieller technologischer Fortschritt in r , Gleichung (4.16).

Der Ressourcenstock konvergiert wie in Abbildung (4.5) gegen sein Steady-State, das ca. der Hälfte des Sättigungsniveaus entspricht. Auffallend ist hier, dass es keine Fluktuationen gibt. Die Bevölkerung wächst und der Ressourcenstock sinkt bis zum Gleichgewichtswert stetig. Die Erklärung dieser Entwicklung ist analog zum exponentiellen technologischen Fortschritt. Einziger Unterschied ist jener, dass der logarithmische Fortschritt ein schwächeres, langfristig beinahe lineares Bevölkerungswachstum ergibt.

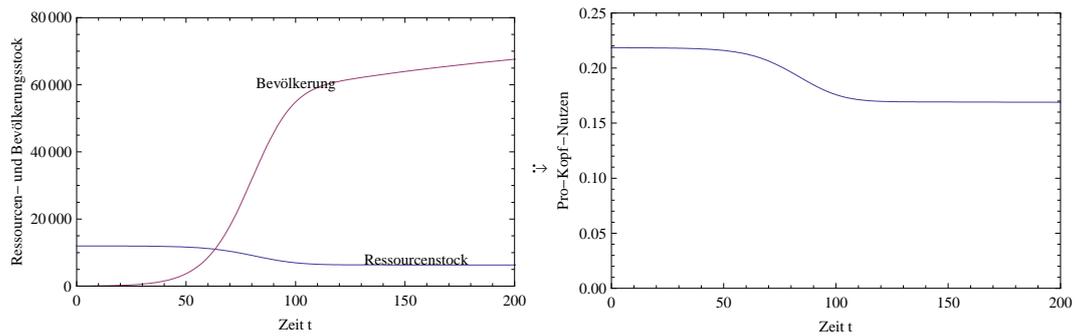


Abbildung 4.6.: Logarithmischer technologischer Fortschritt in r , Gleichung (4.17).

Technologischer Fortschritt in α

Wie in der Einleitung bereits kurz erwähnt, kann es auch einen technischen Fortschritt in der Ernte geben. Dies modellieren die Autoren durch den Technologieparameter α . Wie in den obigen beiden Fällen, betrachten sie eine exponentielle und logarithmische Entwicklung.

$$\alpha = 0.00001e^{\frac{t}{20}} \quad (4.18)$$

$$\text{bzw. } \alpha = 0.00001 + \ln\left(\frac{t}{500000} + 1\right) \quad (4.19)$$

In beiden Fällen nimmt die Bevölkerung ihr Maximum nach ca. 50 Dekaden an, wobei das Maximum im exponentiellen Fall größer ist, siehe Abbildung (4.9). Die Bevölkerung wird nach ca. 150 Dekaden ausgelöscht. Daher bricht auch der Pro-Kopf-Nutzen des repräsentativen Agenten ab. Mit sinkender Bevölkerung erholt sich der Ressourcenstock und kann so wieder steigen, siehe Abbildung (4.7).

Je besser die Erntetechnologie, desto eher wird der Ressourcenstock ausgebeutet. Diese Überbewirtschaftung bewirkt hier das Aussterben der Bevölkerung. Betrachtet man die Dynamik der Bevölkerung 4.12 erkennt man, dass im Falle von $\frac{H}{L} < \frac{-(b-d)}{\phi}$ auch ein positiver Stock S den Rückgang der Bevölkerung - und so wie hier das Aussterben - nicht verhindern kann. Das heißt, hier wird der Pro-Kopf-Konsum von H so gering, dass die Bevölkerung nicht überleben kann.

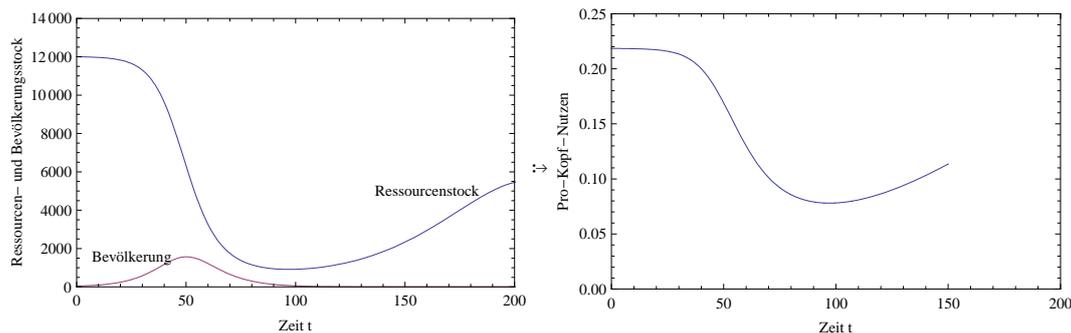


Abbildung 4.7.: Exponentieller technologischer Fortschritt in α .

Geht man von einem logarithmischen Fortschritt in der Ernte aus, wird die Bevölkerung zwar nicht ausgelöscht, bleibt jedoch auf einem sehr niedrigen Niveau. Der Ressourcenstock wird zu Beginn stark ausgebeutet, sinkt auf unter 4000, beginnt sich aber mit sinkender Bevölkerung nach 50 Dekaden zu erholen, siehe Abbildung (4.8). Im Gegensatz zum Brander/Taylor-Modell nimmt die Bevölkerung hier schon sehr früh ihr weit geringeres Maximum an.

Hier haben wir eine ähnliche Situation wie bei exponentiellem Wachstum. Einziger Unterschied ist, dass sich die Bevölkerung auf Grund des nicht so stark steigenden technischen Fortschritts auf einem sehr niedrigen Niveau halten kann und nicht ausstirbt.

Veränderung in der Fertilitätsrate

In der Herleitung des Modells wird der Sensitivitätsparameter x bereits erklärt.

- $x = 1$ entspricht dem Brander/Taylor Modell.
- $x = 0.5$ ergibt eine niedrige,
- $x = 0.7$ eine moderate und
- $x = 1.2$ eine hohe Fertilitätsrate.

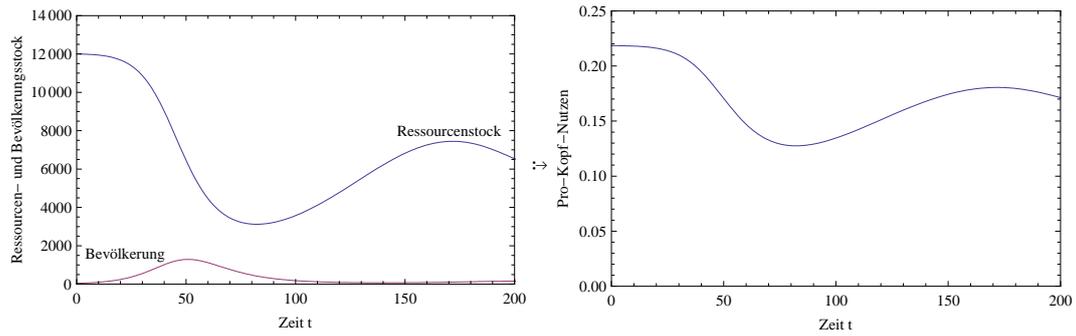


Abbildung 4.8.: Logarithmischer technologischer Fortschritt in α .

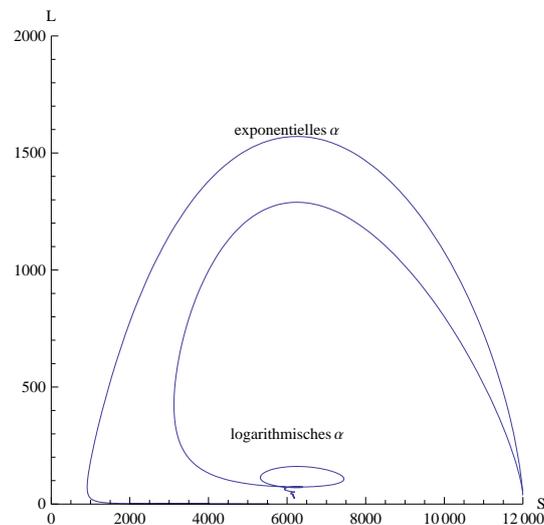


Abbildung 4.9.: Phasenportait eines logarithmischen und exponentiellen technologischen Fortschritts in α .

Diese verschiedenen Niveaus der Geburtenrate können nun beliebig mit den technologischen Fortschritten kombiniert werden. Ein mögliches Beispiel ist eine moderate Fertilität kombiniert mit einem logarithmischen technologischen Fortschritt in der Ressourcenwachstumsrate, siehe Abbildung (4.10). Vergleicht man dies mit Abbildung (4.6), erkennt man, dass nur eine kleine Änderung in der Sensitivität zu einem völlig anderen Ergebnis führt. Hier weisen sowohl die Bevölkerung als auch der Ressourcenstock starke Fluktuationen auf. Die Bevölkerung wächst stark und nimmt schlussendlich einen Gleichgewichtswert von ca. 130000 an. Der Ressourcenstock wird stark ausgeschöpft und hat einen Gleichgewichtswert von unter 2000. Die moderate Geburtenrate - also eine langsamere als wie in Abbildung (4.6) - führt dazu, dass die Bevölkerung zwar ein hohes Niveau annimmt, schlussendlich aber doch konvergiert.

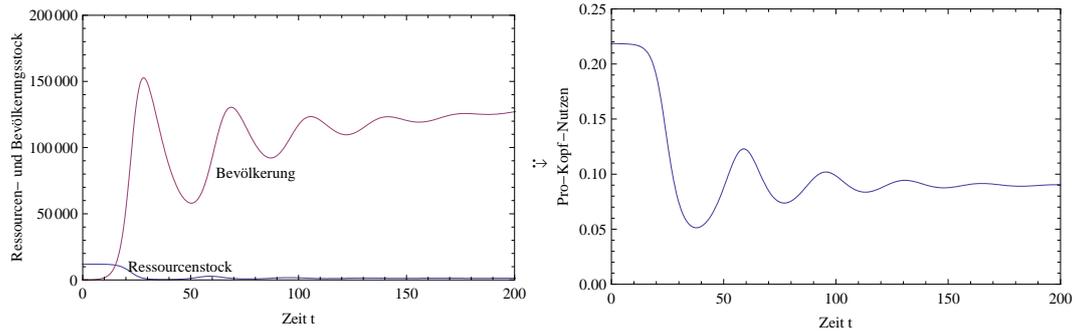


Abbildung 4.10.: Entwicklung über die Zeit einer moderaten Fertilitätsrate und einem logarithmischen technologischen Fortschritt in der Ressourcenwachstumsrate.

Soziale Wohlfahrt

In den einzelnen Szenarien wird versucht die soziale Wohlfahrt zu messen. Laut Nicholson [14] gibt es kein allgemein akzeptiertes Maß dafür. Hier wird der Pro-Kopf-Nutzen des repräsentativen Agenten als Maßstab gewählt. Die auf den vorangegangenen Seiten in den Abbildungen (4.2), (4.3), (4.5)-(4.8) und (4.10) rechts dargestellten Graphiken entsprechen jeweils diesen Pro-Kopf-Nutzenfunktionen. Eine Betrachtung der Ergebnisse macht deutlich, dass es kein einziges Szenario gibt, in dem der Pro-Kopf-Nutzen stetig steigt, sondern immer Fluktuationen auftreten.

Anmerkungen und Kritik

Kritisch anzumerken ist hier, dass die Autoren von einem logarithmischen und exponentiellen Wachstum in verschiedenen Bereichen des Modells ausgehen und ihr Ergebnisse vergleichen. Auf die Frage, ob die postulierten Funktionen plausibel sind, wird nicht eingegangen. Wie sie auf die einzelnen Parameterwerte der Funktionen gekommen sind, wird ebenso nicht erklärt. Grundlegend zeigen die Ergebnisse, dass ein technischer Fortschritt das Resultat langfristig auch verschlechtern kann, bzw. die Fluktuationen und somit das Aufstieg- und Fall- Szenario verschärft. Grund dafür ist meist eine zu schnell entstehende Überbevölkerung und ein Ressourcenstock, der diesem Druck nicht standhalten kann. Im Fall des technischen Fortschritts in der Ernte kommt es zu einer schnellen Ausbeutung der Ressource. In den obigen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass ein logarithmischer Fortschritt in den einzelnen Technologien gedämpftere Ergebnisse liefert als ein Exponentieller. Dies ist auf das sehr schnelle Wachstum bei exponentiellem Fortschritt zurückzuführen.

Die Autoren wollen noch eine Verbindung zu Modellen von Entwicklungsländern herstellen, betonen aber, dass ihr Modell dafür zu einfach konstruiert ist, da beispielsweise die Auswirkung von technischem Fortschritt im M-Sektor, Reformen in den Eigentumsrechten, Handel und demographischer Übergang fehlen.

4.2. Ein bevölkerungsabhängiger technischer Fortschritt

Dalton, Coats und Asrabadi verwenden in Ihrem Paper **Renewable resources, property-rights regimes and endogenous growth** [7] eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion, die vom Arbeitsinput, der Technologiewachstumsrate und einem konstanten Level der natürlichen Ressource abhängig ist. Sie führen einen endogenen, mit der Bevölkerung in Beziehung stehenden, technologischen Fortschritt ein, wobei hier wie im vorangegangenen Modell zwischen der Technologie in der Ernte und der Wachstumsrate der erneuerbaren Ressource unterschieden wird. Außerdem wird versucht eine notwendige Bedingung für nachhaltiges ökonomisches Wachstum herzuleiten.

4.2.1. Modellbeschreibung

Ausgangspunkt dieser Modellentwicklung ist eine Abänderung der Produktionsfunktion. Anstelle von $M^p = L_M$ betrachtet man zunächst folgende Funktion:

$$M_t = (L_t^m)^\gamma (A_t X)^{1-\gamma}. \quad (4.20)$$

Hier handelt es sich um eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen, die von Galor und Weil [8] verwendet wurde. M_t ist der Output im M-Sektor, welcher von einem nicht konstanten Level an Arbeitsinput L_t^m , der Technologiewachstumsrate A_t und einem konstanten Level X einer natürlichen Ressource - hier der vorhandenen Menge an Land - abhängig ist. Um diesen Ansatz an die Osterinseln anzupassen, wird das Land durch die erneuerbare Ressource substituiert. Das heißt, dass nun der Output des M-Sektors auch von der Ernte H^m , welche als Input verwendet wird, abhängig ist. Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgende Nutzenfunktion:

$$u = (h^c)^\beta (m(h^m))^{1-\beta} \quad (4.21)$$

Der Nutzen ist abhängig von der Ernte, die konsumiert wird h^c , und dem aggregierten anderen Gut, wobei die natürliche Ressource h^m als Input verwendet wird. Die gesamte Ernte eines repräsentativen Individuums ergibt sich somit durch $h = h^c + h^m$.

Die Nutzenmaximierung eines repräsentativen Agenten unter der Budgetrestriktion $p^c h + p^m m = w$ ergibt dieselbe Produktionsfunktion von H wie im Brander/Taylor-Modell, daher gilt: (Mathematische Herleitung siehe Kapitel 2 und Appendix C.1)

$$H^c = \alpha \beta L S. \quad (4.22)$$

Im M-Sektor ist die Nachfrageseite gegeben durch $M = \frac{w(1-\beta)L}{p^m}$. Auf der Angebotsseite werden zwei Gruppen von Arbeitern gebildet; die erste ist für die Ernte der Ressource (Ernte der Inputs) zuständig, wobei die Ernte von der zweiten Gruppe weiterverarbeitet wird. Die Arbeiter erhalten für ihre Arbeit denselben Lohn w . Im M-Sektor ist das Verhältnis zwischen Arbeitern, die direkt

in der Produktion und jenen, die in der Ernte für den Input der Produktion arbeiten, aufgrund der gegebenen Cobb-Douglas Produktionsfunktion durch $\gamma : (1 - \gamma)$ gegeben.

$\gamma(1 - \beta)L$ ersetzt somit L_t^m , wobei der neue Term den Arbeitern entspricht, die in der Produktion tätig sind. Das heißt $\gamma(1 - \beta)$ beschreibt den Anteil der Arbeiter, die in der direkten Produktion im M-Sektor beschäftigt sind. Während $(1 - \gamma)(1 - \beta)$ für den Anteil der Arbeiter steht, der in der Ernte der erneuerbaren Ressource, die als Input in der Produktion verwendet wird, tätig ist. $(1 - \gamma)(1 - \beta)\alpha LS$ ersetzt somit $A_t X$ und entspricht der Ernte der erneuerbaren Ressource, die als Input für den M-Sektor verwendet wird. Einsetzen in die Produktionsfunktion (4.20) ergibt folgende Gleichung:

$$M = (\gamma(1 - \beta)L)^\gamma ((1 - \gamma)(1 - \beta)\alpha LS)^{1-\gamma}. \quad (4.23)$$

Es gibt in diesem Modell drei verschiedene Arbeitsmärkte mit folgender Arbeitsaufteilung:

- $L^c = \beta L$ sind für die Ernte im H-Sektor, also für den direkten Konsum der Ressource,
- $L^{mh} = \gamma(1 - \beta)L$ für die Produktion im M-Sektor und
- $L^{mm} = (1 - \gamma)(1 - \beta)L$ für die Ernte, welche in der Produktion im M-Sektor als Input verwendet wird, zuständig.

Die Ernte der erneuerbaren Ressource im M-Sektor ist daher gegeben durch:

$$H^m = (1 - \gamma)(1 - \beta)\alpha LS \quad (4.24)$$

Aus $H = H^c + H^m$ und den Gleichungen (2.1) und (2.12) ergeben sich die Dynamiken von S und L :

$$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - [(\beta + (1 - \gamma)(1 - \beta))LS\alpha] \quad (4.25)$$

$$\dot{L} = L(b - d + S\alpha\beta\phi). \quad (4.26)$$

Die Bevölkerungsdynamik und die Wachstumsfunktion in der Ressourcendynamik bleiben unverändert. Nur die Erntefunktion H wird mit um Term $(1 - \gamma)(1 - \beta)LS\alpha$, welcher die nun zusätzlich auftretende Ernte im M-Sektor beschreibt, erweitert.

Technologischer Fortschritt in r und α

In diesem Paper wird ein technologischer Fortschritt in der Erntetechnologie α und der Ressourcenwachstumsrate r eingeführt. Kuznets [11] und Simon [18], Vertreter der modernen Wachstumstheorie, schreiben in ihren Arbeiten, dass jedes Individuum die gleiche Chance auf technologische Entwicklung hat und die Größe der Bevölkerung die Quantität der Innovationen bestimmt. Dieser Idee folgend, gehen die Autoren davon aus, dass ein technologischer Fortschritt direkt von der Bevölkerung bzw. vom Bevölkerungswachstum abhängig ist (d.h. $r = f(L)$, $\alpha = g(L)$). Weiters sagen sie, dass nur ein positives Bevölkerungswachstum zu technologischem Fortschritt führen kann:

$$\frac{d\alpha}{dL}, \frac{dr}{dL} > 0 \text{ wenn } \dot{L} > 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{d\alpha}{dL}, \frac{dr}{dL} = 0 \text{ wenn } \dot{L} \leq 0. \quad (4.28)$$

Die Autoren unterscheiden zwischen starken und schwachen Institutionen, wobei eine starke Institution den zukünftigen Ertrag sichern will, also einen Fortschritt in der Ressourcenkonservierungstechnologie unterstützt:

$$r_t = r_{t-1} \left(1 + \delta_r \lambda \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \right). \quad (4.29)$$

Der Parameter δ_r misst, wie Institutionen den Effekt von generellen technologischen Veränderungen auf die Ressourcenkonservierungstechnologie beeinflussen, während λ den Einfluss von Bevölkerungswachstum auf die technologische Entwicklung ermittelt.

Eine schwache Institution setzt sich für einen Fortschritt der Ressourcenerntetechnologie ein. Sie kann den gegenwärtigen Nutzen zwar vergrößern, langfristig führt sie jedoch zur Allmende-problematik (siehe auch Kapitel 3) und somit zu einer nicht nachhaltigen Erntepolitik:

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} \left(1 + \delta_\alpha \lambda \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \right). \quad (4.30)$$

δ_α misst, wie Institutionen den Effekt von generellen technologischen Veränderungen auf die Ressourcenerntetechnologie beeinflussen.

Die Autoren endogenisieren das Sättigungsniveau, welches von nun an von der Wachstumsrate r abhängig ist, wobei dieses so gewählt wurde, dass $\frac{dK_t}{dr_t} > 0$ gilt, und somit das Sättigungsniveau mit steigender Wachstumsrate r zunimmt.

4.2.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Aufgrund des diskret definierten technischen Fortschritts musste ich, um Simulationen durchführen zu können, das dynamische System diskretisieren. Man kann nun die oben erklärten Institutionen vergleichen. Für γ wählen die Autoren einen Wert von 0.5. Von allen Arbeiten L , sind $(1 - \beta)L$ im M-Sektor beschäftigt und von diesen ist nun die Hälfte in der Produktion des M-Sektors, die andere Hälfte in der Ernte für die Inputs der Produktion tätig.

Abbildung (4.11) zeigt das Ergebnis für $\lambda = 2$ und $\delta_r, \delta_\alpha = 0.05$. In diesem Fall verschlimmert technologischer Fortschritt das Aufstieg- und Fall- Szenario. Da δ_r und δ_α denselben Wert haben, beeinflussen die Institutionen die Konservierungs- und Erntetechnologie gleich stark. Die Abbildungen (4.13) und (4.12) zeigt die zugehörigen Entwicklungen der Gleichungen (4.30) und (4.29), wobei sowohl die Ernte- also auch die Konservierungstechnologie nur bei wachsender Bevölkerung zunimmt.

Ein Beispiel für eine starke Institution ist folgendes: $\lambda = 2$ und $\delta_r = 0.1, \delta_\alpha = 0$. Hier wird nur der Fortschritt der Konservierungstechnologie unterstützt und die Erntetechnologie bleibt konstant bei 0.00001. Somit unterstützt die Institution nicht die gegenwärtige Ernte, sondern nur den zukünftigen Ertrag der Ressource. Die zeitliche Entwicklung in Abbildung (4.14) und der zugehörige Orbit in (4.15) weisen eine sehr schnelle Konvergenz gegen das Gleichgewicht auf. Die Bevölkerung steigt auf ein Maximum von 12000 an und pendelt sich rasch auf einem Wert

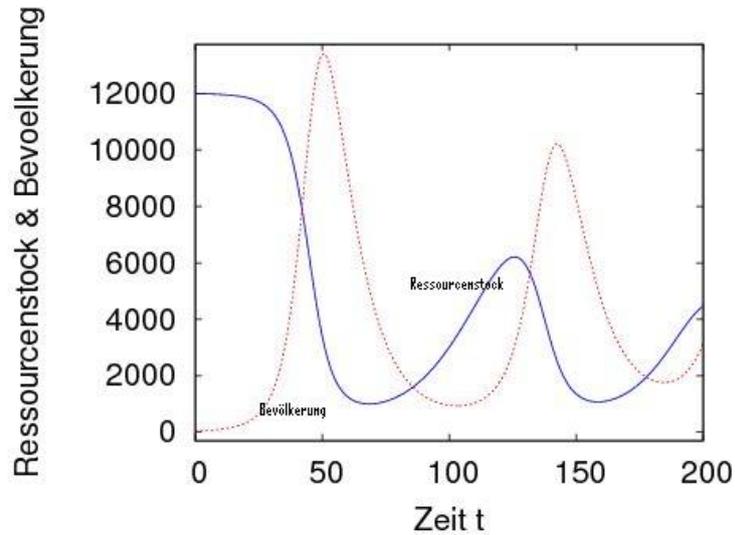


Abbildung 4.11.: Entwicklung über die Zeit für $\lambda = 2$ und $\delta_r, \delta_\alpha = 0.05$.

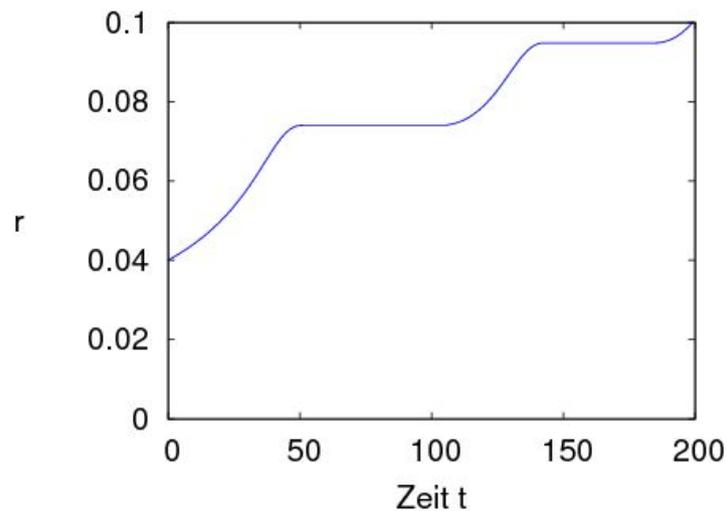


Abbildung 4.12.: Die Entwicklung von r .

um 11000 ein. Der Ressourcenstock sinkt auf die Hälfte des Sättigungsniveaus und bleibt dann konstant. Die Institution setzt sich nur für die Sicherung und Erhöhung des zukünftigen Ertrages ein. $\delta_\alpha = 0$ bedeutet, dass kein Bedürfnis da ist, die gegenwärtige Ernte zu erhöhen. Diese Parametrisierung führt zum selben Verhalten der Individuen, wie bei der institutionellen Adaptierung durch Eigentumsrechte in Kapitel 3.1. Die Institution bestärkt mit dieser Parametrisierung die Bevölkerung mit der gegenwärtigen Ernte der Ressource sparsam umzugehen und den zukünft-

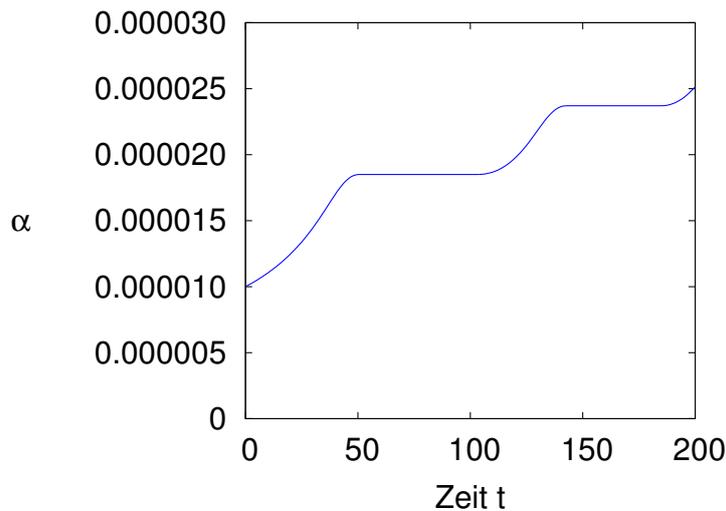


Abbildung 4.13.: Die Entwicklung von α .

tigen Ressourcenstock zu berücksichtigen.

Das andere Extrem ist $\lambda = 2$ und $\delta_r = 0$, $\delta_\alpha = 0.1$, siehe Abbildung (4.16). In diesem Fall wird nur in die Erntetechnologie, nicht jedoch in die Erhaltungstechnologie investiert. Dadurch wird die gegenwärtigen Ernte vergrößern. Es handelt sich daher um eine schwache Institution. Diese Politik erhöht zwar den gegenwärtigen Nutzen, führt jedoch nach kürzester Zeit zur Allmende-problematik (*Tragedy of the commons*). Wie bei der institutionellen Adaptierung durch Güter im Gemeineigentum in Kapitel 3.1 wird die Bevölkerung bestärkt die momentane Erntemenge zu vergrößern, um den gegenwärtigen Nutzen zu erhöhen. Die Bevölkerung wächst zunächst sehr stark an. Sie erntet nicht vorausschauend bis der Ressourcenstock nahezu ausgelöscht ist und stirbt kurze Zeit später aus, da Ressourcenknappheit zu einem Rückgang der Bevölkerung führt. Der Ressourcenstock beginnt erst nach 150 Dekaden sich wieder zu erholen.

Nachhaltiges ökonomisches Wachstum

Tietenberg unterscheidet in seinem Buch „Environmental and Natural Resource Economics“ [22] zwischen schwacher und starker Nachhaltigkeit. Grundlegend gilt die Idee, dass eine Generation solange nach einem besseren Wohlstand streben kann, solange sie dadurch nicht das Wohl der zukünftigen Generationen verringert. Der Unterschied zwischen schwacher und starker Nachhaltigkeit ist nun jener, dass erstere einen zumindest gleichbleibenden gesamten Kapitalstock, der sich aus natürlichem und physischem Kapital zusammen setzt, fordert. Das bedeutet, dass es eine Substituierbarkeit zwischen den einzelnen Komponenten des Gesamtkapitals gibt. Das natürliche Kapital darf also zurückgehen, solange ein Anstieg im physischen Kapital dies ausgleichen. Diese Substituierbarkeit ist bei starken Nachhaltigkeit nicht gegeben, da der Bestand des Naturkapital mit der Zeit nicht sinken darf. Diese beiden Ansätze sind nicht eins

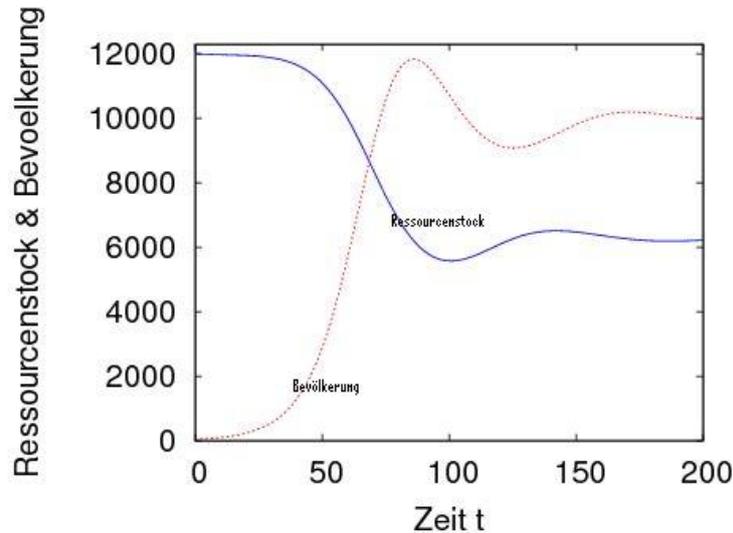


Abbildung 4.14.: Entwicklung über die Zeit für $\lambda = 2$ und $\delta_r = 0.1, \delta_\alpha = 0$.

zu eins auf das obige Modell übertragbar, da natürliches und physisches Kapital nicht direkt im Modell eingebunden sind. Außerdem kann man eine starken Nachhaltigkeit bei einer Cobb-Douglas-Nutzenfunktion nicht modellieren, da ein Tradeoff der beiden Gütern h und m existiert und diese substituierbar sind.

Die Autoren versuchen trotzdem eine notwendige Bedingung zu finden, die an das Konzept von Tietenberg angelehnt ist.

$$\dot{S} \geq 0 \quad (4.31)$$

$$\Leftrightarrow r_t S_t \left(1 - \frac{S_t}{K_t}\right) - (H_t^m + H_t^c) \geq 0 \quad \forall t \quad (4.32)$$

Was bedeutet das nun? In jeder Periode muss gelten, dass die Ernte kleiner ist als die nachgewachsene natürliche Ressource. eine Verbesserung der Ressourcenkonservierungstechnologie und/oder Ernterestriktionen unterstützen nachhaltiges Wachstum.

Dieses oben genannte nachhaltige Wachstum ist aber nicht immer erreichbar und wünschenswert, da die Ernte der Ressource für eine Entwicklung der Gesellschaft notwendig ist. Ein Beispiel dafür sind die ersten Besiedler der Insel, welche den Ressourcenstock auf dem Sättigungsniveau von 12000 vorgefunden haben. Für eine wirtschaftliche Entwicklung war eine Verringerung dieses Stocks, also $\dot{S} < 0$, unumgänglich.

Daher versuchen die Autoren eine Nachhaltigkeitsbedingung, die sowohl den Ressourcenstock

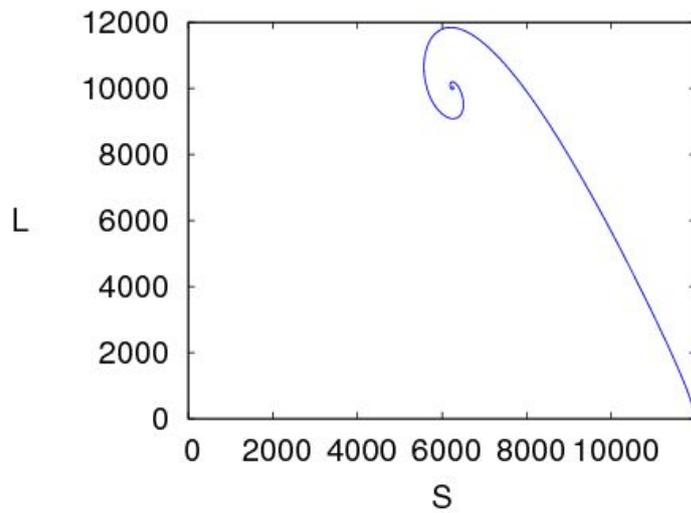


Abbildung 4.15.: Phasenportrait für $\lambda = 2$ und $\delta_r = 0.1, \delta_\alpha = 0$.

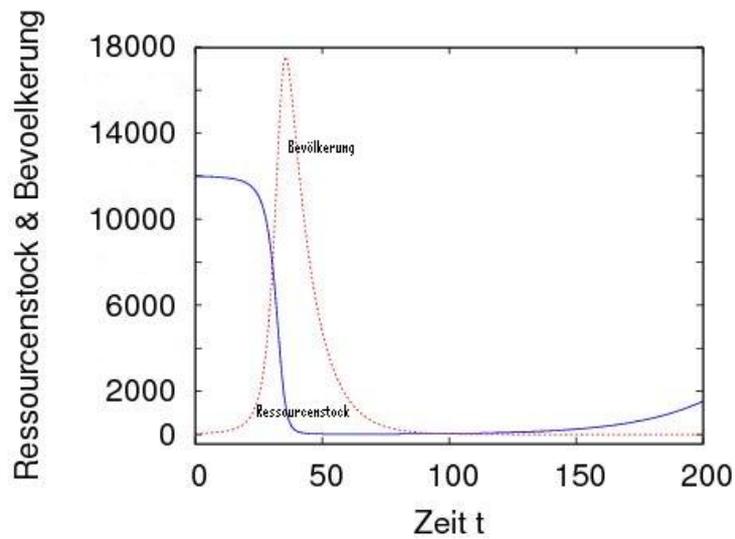


Abbildung 4.16.: Entwicklung über die Zeit für $\lambda = 2$ und $\delta_r = 0, \delta_\alpha = 0.1$.

schützt als auch den Einfluss, den eine Nutzung der natürlichen Ressourcen auf das Wachstum hat, zu modellieren.

$$\frac{dS}{dt} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt}\right)}{i} \geq 0 \quad \forall t \quad (4.33)$$

δ misst den Einfluss einer institutioneller Veränderung auf die Erntetechnologie und i ist die Dis-

kontrate für das zukünftige Vermögen. Der Einfluss der Diskontrate ist in jeder Periode gleich und daher ist der Konsum heute durch den Konsum von morgen substituierbar. Es wird für nachhaltiges Wachstum nicht nur der heutige Konsum, welcher zu $\dot{S} < 0$ führen kann, sondern auch der durch den Konsum entstehende Fortschritt in der Gesellschaft bewertet. Ein gegenwärtiges negatives Wachstum von S kann, wenn dadurch ein Fortschritt in der Konservierungstechnologie entsteht, zu einem langfristig höheren Ressourcenstock führen. Dieser Ansatz scheint mir plausibler zu sein, da nun auch die Entwicklung der Gesellschaft und die Nutzung der Ressource beachtet wird. Anzumerken ist hier, dass δ im Modell einen Parameter darstellt und zur Umsetzung dieser Nachhaltigkeitsbedingung eine Modellierung von δ notwendig wäre.

4.3. Technischer Fortschritt anhand einer ceteris paribus Erhöhung

S. D'Alessandro erweitert in seinem Paper „Non-linear dynamics of population and natural resources: The emergence of different patterns of development“ [5] das Brander/Taylor-Modell, indem er das aggregierte Gut M durch ein spezielles - nämlich Getreide - ersetzt. Anstelle des logarithmischen Wachstums verwendet er die kritische Depensationswachstumsfunktion in der Ressourcendynamik. Die Bevölkerungsdynamik ist in folgendem Modell von beiden konsumierten Gütern - Getreide M und Holz H - abhängig, wobei M und H anhand von Kalorienniveaus verglichen werden. Ein technischer Fortschritt wird zwar anhand einer ceteris paribus Erhöhung von einzelnen Parametern untersucht, jedoch wird mehr Wert auf die Herleitung des neuen Modells gelegt.

4.3.1. Modellbeschreibung

Der Autor ersetzt in seinem Modell das aggregierte andere Gut M durch ein spezielles, nämlich Getreide. Einerseits betrachtet er den Wald als erneuerbare Ressource, andererseits das Land als unerschöpfliche und für die Produktion von Holz und Getreide notwendige Ressource. Der Wald entspricht dem H-Sektor und wie im Brander/Taylor-Modell - Gleichung (2.4) - wird eine Schäfer-Ernte-Produktionsfunktion auf der Angebotsseite angenommen.

$$H^P = \alpha S L_H \quad (4.34)$$

Neu ist, dass eine fixe Größe an Land existiert, die für die Produktion von Getreide verwendet wird. Diese neu eingeführte Ressource wird wie folgt produziert:

$$M^P = \lambda L_M^\delta. \quad (4.35)$$

Wobei L_M die Arbeiter in diesem Sektor sind, und λ dem Landfertilitätsindex entspricht, der angibt wie fruchtbar das Land ist. $\delta \in (0, 1)$ ergibt in diesem Sektor abnehmende Skalenerträge (decreasing returns to scale). Im Gegensatz dazu weist die Schäfer-Ernte Produktionsfunktion konstante Skalenerträge (constant returns to scale) auf. Alle Arbeiter, unabhängig vom Sektor, leisten dieselbe Arbeit und bekommen denselben Lohn w in Getreide ausbezahlt. M wird wieder als Numeraire verwendet und hat somit den Preis $p_M = 1$. Somit gilt:

$$M^P = w L_M \quad (4.36)$$

$$p_H H^P = w L_H \quad (4.37)$$

Damit die beiden Ressourcen vergleichbar werden, ist p_H der Preis von Holz ausgedrückt in Getreide. Das Einsetzen in die Produktionsfunktionen und Umformen ergibt folgende Darstellung:

$$w = \lambda L_M^{\delta-1} \quad (4.38)$$

$$p_H = \frac{w}{\alpha S}. \quad (4.39)$$

p_H stimmt mit Gleichung (2.5) überein. Die Cobb-Douglas Nutzenfunktion eines repräsentativen Agenten wird aus dem Brander/Taylor-Modell übernommen (Siehe Gleichung (2.7) und (2.8)). Somit ergibt die Nutzenmaximierung wieder folgende Nachfrageseiten:

$$H^D = \frac{w\beta L}{p_H} \quad (4.40)$$

$$M^D = w(1-\beta)L. \quad (4.41)$$

Nun können die kurzfristigen Gleichgewichte ($H^D = H^P$ und $M^D = M^P$) bestimmt werden. Aus (4.35), (4.38) und (4.41) erhält man zunächst die optimale Menge an Arbeitskräften im M-Sektor.

$$\Rightarrow (1-\beta)wL = \lambda L_M^\delta \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow (1-\beta)\lambda L_M^{\delta-1}L = \lambda L_M^\delta \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow L_M = (1-\beta)L \quad (4.44)$$

Das Gleichgewicht von H entspricht jenem aus dem Brander/Taylor-Modell (siehe Gleichung (2.10)).

$$H = \alpha\beta LS \quad (4.45)$$

Gleichungen (4.38) und (4.44) ergeben den optimalen Lohn, und damit lässt sich M bestimmen:

$$\Rightarrow w = \lambda(1-\beta)^{\delta-1}L^{\delta-1} \quad (4.46)$$

$$\text{aus } M = (1-\beta)wL \Rightarrow M = \lambda(1-\beta)^\delta L^\delta. \quad (4.47)$$

Auch die Dynamiken des Ressourcenstocks und der Bevölkerung werden erweitert. Grundsätzlich gilt für die Ressourcendynamik wieder die Gleichung (2.1), jedoch wird die bis jetzt verwendete Wachstumsfunktion (2.2) durch die kritische Depensationswachstumsfunktion (*Critical depensation growth function*) ersetzt, siehe Abbildung (4.17).

$$G(S) = r\left(\frac{S}{\underline{K}} - 1\right)\left(1 - \frac{S}{\underline{K}}\right)S \quad (4.48)$$

Fällt der Stock unter die Schranke \underline{K} , ergibt dies ein negatives Wachstum; G kann also ohne menschlichen Einfluss negativ werden. Ein Unterschreiten der Schwelle \underline{K} führt also zu einem negativen Wachstum, was anschließend ohne Einfluss von außen die Ausrottung der Ressource bewirkt. Im Gegensatz zur logistischen Wachstumsfunktion (Gleichung (2.2)) wird hier das Maximum nicht bei $\frac{\underline{K}}{2}$, also bei der Hälfte des Sättigungsniveaus angenommen. Der maximal nachhaltig erzielbare Ertrag (*Maximum sustainable yield*, Abkürzung: MSY) wird in diesem Fall an einem höheren Niveau von S angenommen. Der MSY gibt an, welches Niveau der Ressourcenstock haben muss, um maximales Wachstum zu erzielen. Es gibt ökologische Studien, die das Verhalten der kritischen Depensationswachstumsfunktion bei Menschen und der Fertilitätsrate beobachtet haben. Diese Funktion wird in Modellen im Zusammenhang mit Räuber und Beute oder anderen Umweltgefahren verwendet. In unserem Fall ist die Gefahr die Ausrottung der

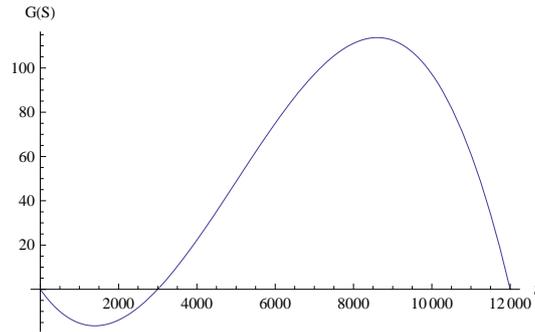


Abbildung 4.17.: Kritische Dependenzwachstumsfunktion für $K = 12000$ und $\hat{K} = 3000$.

Ressource. Mit zunehmenden Ressourcenstock fällt die Gefahr die Schwelle zu unterschreiten immer weniger ins Gewicht.

$$\Rightarrow \dot{S} = r\left(\frac{S}{K} - 1\right)\left(1 - \frac{S}{K}\right)S - LS\alpha\beta \quad (4.49)$$

Die ursprüngliche malthusianische Bevölkerungsdynamik (2.13) wird ebenfalls erweitert. Der Bevölkerungsstock, bzw. genauer gesagt die Fertilitätsrate, ist nun von beiden konsumierten Gütern - Wald und Getreide - abhängig. Da nun zwei Güter konsumiert werden, muss, um sie vergleichen zu können, eine gemeinsame Einheit, nämlich Kalorien pro Einheit Gut, gefunden werden. Die Bevölkerung kann nur wachsen, wenn die zu sich genommene Kalorienmenge eines repräsentativen Konsumenten größer ist, als ein bestimmtes natürliches Kalorienniveau. Diese Schranke entspricht dem Mindestumsatz an Kalorien eines Arbeiters, um überleben zu können. Die Dynamik der Bevölkerung ist wie folgt gegeben:

$$\Rightarrow \dot{L} = (\gamma m + \phi h - \sigma)L, \quad (4.50)$$

wobei $\gamma m + \phi h$ den konsumierten Pro-Kopf-Kalorien von Getreide und Holz und σ dem natürlichen Pro-Kopf-Kalorienniveau entspricht. Die Differenz der beiden multipliziert mit der gesamten Bevölkerung ergibt in diesem Modell die Dynamik der Bevölkerung. Aus $\bar{\phi} := \frac{\phi}{\gamma}$ und $\bar{\sigma} := \frac{\sigma}{\gamma}$ folgt:

$$\dot{L} = \gamma(m + \bar{\phi}h - \bar{\sigma})L \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow \dot{L} = \gamma(\lambda(1 - \beta)^\delta L^{\delta-1} + \bar{\phi}\alpha\beta S - \bar{\sigma})L \quad (4.52)$$

4.3.2. Langfristige Bevölkerungs- und Ressourcenentwicklung

Im Gegensatz zum Brander/Taylor-Modell und allen anderen Erweiterungen wird in diesem Modell die kritische Dependenzwachstumsfunktion anstelle der logarithmischen verwendet. In allen bisherigen Erweiterungen ergeben sich zwei möglichen Randgleichgewichte, nämlich $(0,0)$ und $(K,0)$. Es war somit entweder die Auslöschung der beiden Stocks oder eine Auslöschung der Bevölkerung und eine Konvergenz des Ressourcenstocks zum Sättigungsniveau

als Randlösung möglich. Hier ergeben sich durch Null-Setzen von \dot{S} oder \dot{L} zunächst folgende Gleichgewichte:

- $(S, L) = (0, 0)$
- $(S, L) = (\underline{K}, 0)$
- $(S, L) = (K, 0)$
- $(S, L) = (0, \left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\bar{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\delta}})$

Die Beweisskizze in Abbildung (4.18) soll veranschaulichen, dass für positive Startwerte von L die ersten drei Gleichgewichte in diesem Modell nicht erreicht werden können. Die Isokline teilt den Raum in zwei Bereiche. Im unteren Bereich gilt $\dot{L} > 0$, im oberen $\dot{L} < 0$. Die eingezeichneten Pfeile veranschaulichen die Entwicklung der Bevölkerung über die Zeit. Für keinen positiven Startwert L ist somit eine Konvergenz gegen 0 möglich. Das bedeutet, dass die einzige stabile Randlösung diesem Gleichgewicht entspricht. Der Ressourcenstock H wird ausgelöscht aber die Bevölkerung kann sich vom vorhandenen Getreide M ernähren und überleben.

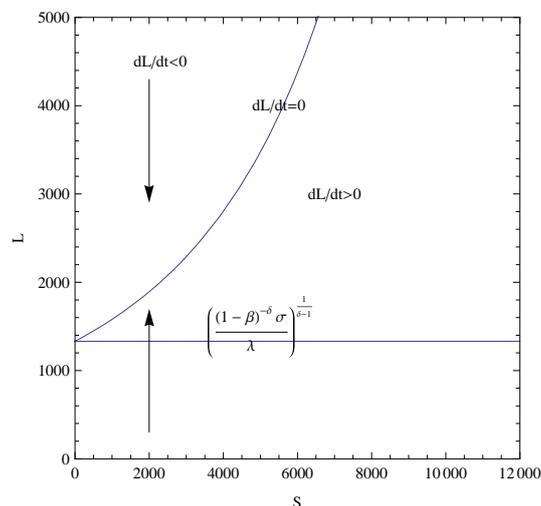


Abbildung 4.18.: Beweisskizze für Randlösungen

Für eine innere Lösung muss Folgendes gelten:

$$S_0 := r\left(\frac{S}{\underline{K}} - 1\right)\left(1 - \frac{S}{K}\right) - L\alpha\beta = 0 \quad (4.53)$$

$$L_0 := (\lambda(1-\beta)^\delta L^{\delta-1} + \bar{\phi}\alpha\beta S - \bar{\sigma}) = 0. \quad (4.54)$$

Wobei S_0 die Isokline der natürlichen Ressource darstellt und L_0 jene der Bevölkerung. Im Gegensatz zum Brander/Taylor-Modell sind diese Isoklinen nicht linear. Es werden nun 2 Fälle

α	0.00001	λ	20
δ	0.7	β	0.3
r	0.025	\underline{K}	700
K	12000	γ	0.1
$\bar{\phi}$	3	$\bar{\sigma}$	1.8
$S(0)$	12000	$L(0)$	200

Tabelle 4.1.: Parametrisierung

betrachtet; einerseits jener ohne Schnittpunkt der Isoklinien, andererseits der Fall in dem es zwei Schnittpunkte gibt.

Kein Schnittpunkt der beiden Isoklinien

Die genaue Parametrisierung ist in der Tabelle 4.1 ersichtlich. Die Isoklinien schneiden sich in diesem Fall nicht. Das bedeutet eine Konvergenz des Ressourcenstocks und der Bevölkerung gegen die Randlösung $(S, L) = (0, \left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\bar{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\delta}})$, siehe Abbildung (4.19).

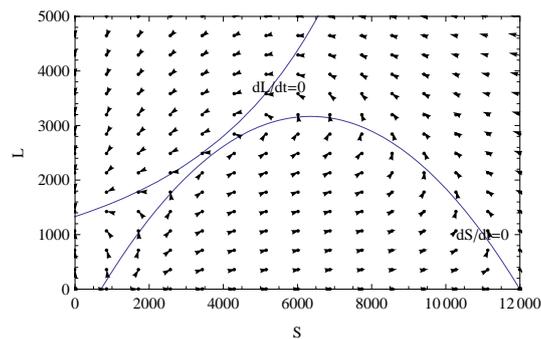


Abbildung 4.19.: Isoklinien für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1 und das dazugehörige Vektorfeld; kein Auftreten eines inneren Gleichgewichts

Das zugehörige Phasenportrait (4.20) und der Verlauf über die Zeit (4.21) zeigen diese Konvergenz deutlich. Der Ressourcenstock fällt von Beginn an sehr stark und ist nach ca. 100 Dekaden bereits völlig ausgelöscht. Die Bevölkerung steigt die ersten 50 Dekaden, nimmt dann ein Maximum von ca. 4000 an und pendelt sich weitere 50 Dekaden später auf ihrem Gleichgewicht ein. Abbildung (4.20) zeigt, dass $\dot{S} > 0$ unterhalb, $\dot{S} < 0$ oberhalb der S-Isokline, $\dot{L} > 0$ unterhalb und $\dot{L} < 0$ oberhalb der L-Isokline gilt.

Die Steady-State Lösung ist in diesem Fall gegeben durch

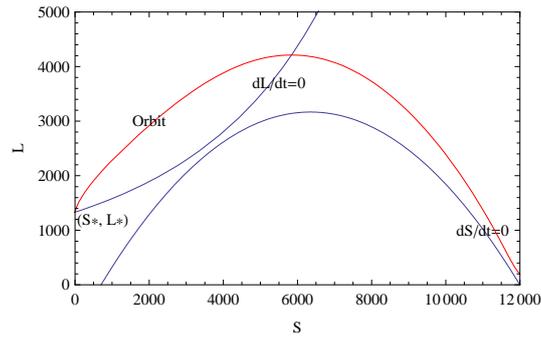


Abbildung 4.20.: Phasendiagramm für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1

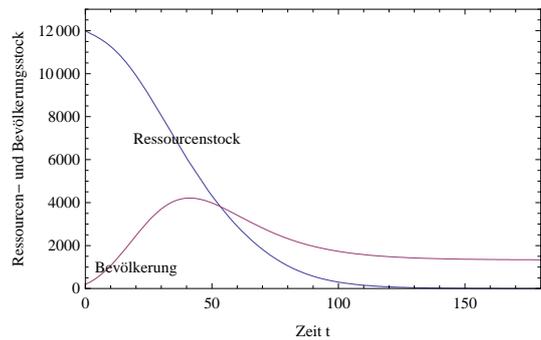


Abbildung 4.21.: Verlauf über die Zeit für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1

$$(S, L) = (0, 1331.74). \quad (4.55)$$

Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick etwas unrealistisch. Wie kann die Bevölkerung trotz ausgerottetem Ressourcenstock S überleben? Betrachtet man die Bevölkerungsdynamik (4.52) noch einmal genauer, erkennt man, dass aus $c \geq \bar{\sigma} \Rightarrow \dot{L} \geq 0$. Die Bevölkerung kann somit alleine mit Getreide überleben. Dies ist ein großer Unterschied zu den anderen Modellen, da in diesen die Ausrottung der Ressource S das Aussterben der Bevölkerung impliziert.

Schnitt der Isoklinen ergibt 2 Schnittpunkte

Bei Gültigkeit der Gleichungen (4.53) und (4.54) schneiden sich die Isoklinen zweimal. Somit ergeben zusätzlich zum Randgleichgewicht $(S, L) = (0, \left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\bar{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\delta}})$ zwei weitere innere Gleichgewichte, siehe Abbildung (4.22).

Um diesen Fall zu untersuchen, werden folgende Parameterwerte verändert:

λ	12.95	$\bar{\sigma}$	1.4
-----------	-------	----------------	-----

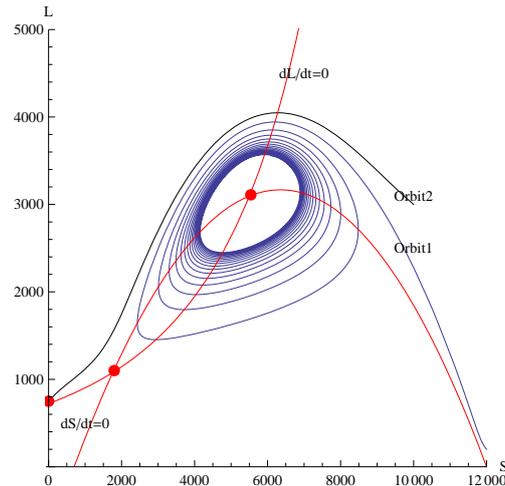


Abbildung 4.22.: Phasendiagramm für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1 und $\lambda = 12.95$ und $\bar{\sigma} = 1.4$

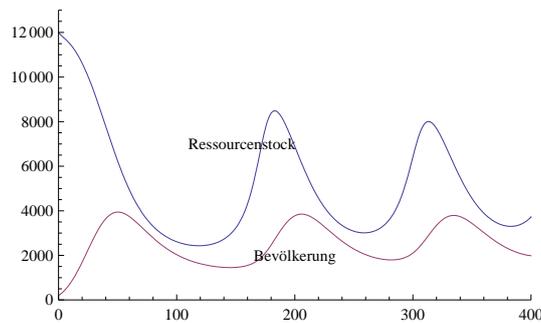


Abbildung 4.23.: Verlauf über die Zeit für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1 und $\lambda = 12.95$ und $\bar{\sigma} = 1.4$

Diese Parametrisierung führt zu einem Grenzyklus, der in Abbildung (4.22) durch Orbit1 dargestellt ist. Die Bevölkerung schwankt zwischen 2500 und 3500, der Ressourcenstock zwischen 4000 und 7000. Die Verringerung von λ steht für eine geringere Fruchtbarkeit des Landes. Auch das Verhältnis zwischen natürlichem Pro-Kopf-Kalorienniveau zu Kalorien pro Einheit Getreide $\bar{\sigma}$ wird hier verringert. Mit $\bar{L} = \left(\frac{\lambda(1-\beta)^\delta}{\bar{\sigma}} \right)^{\frac{1}{1-\delta}}$ hat die Untersuchung des globalen Verhaltens des Systems bereits ergeben, dass $(S, L) = (0, \bar{L})$ lokal stabil ist. Betrachtet man das Phasendiagramm und den Orbit2, erkennt man die Konvergenz gegen das Randgleichgewicht $(0, \bar{L})$. Dieser Orbit2 wurde durch Änderung der Startwerte erzeugt und soll verdeutlichen, dass eine plötzliche Störung oder ein kleiner Schock in der Gesellschaft ausreichen kann, um ein anderes Konvergenzverhalten - nämlich eines gegen das zweite lokal stabile Gleichgewicht - zu erzeugen.

Als nächstes werden Auswirkungen kleiner Änderungen in technologischen, kulturellen oder klimatischen Annahmen untersucht, die sehr stark das Ergebnis beeinflussen. So führt zum Beispiel - ausgehend von Tabelle 4.1 - alleine die Veränderung $\lambda = 18.5$ anstelle des Grenzyklus (Abbildung (4.22)), zu einer Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht (Abbildung (4.24)).

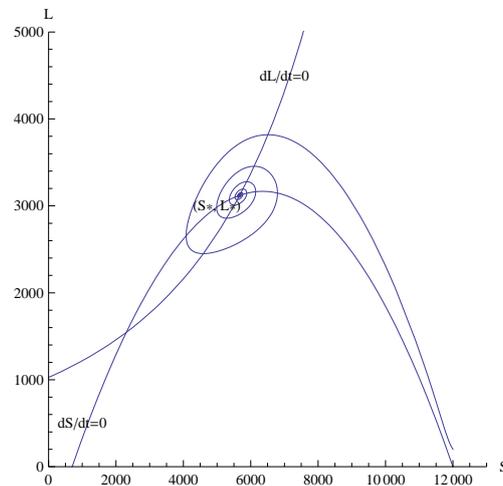


Abbildung 4.24.: Phasendiagramm für die Parametrisierung aus Tabelle 4.1 und $\lambda = 18.5$

Technologischer Fortschritt

Der Autor führt einen technologischen Fortschritt ein, indem er einen der drei Technologieparameter α , λ und δ erhöht. Eine Erhöhung des Erntetechnologieparameters α beeinflusst sowohl die Dynamik von S als auch jene von L ; eine Erhöhung von λ und δ wirkt sich hingegen nur auf die Bevölkerung aus. Das Ergebnis einer Erhöhung von α ist in Abbildung (4.25) gegeben. Das Tripel (S_1 , L_1 , Orbit1) zeigt den Schnitt der Isoklinen und den zugehörigen Orbit, wobei die Parametrisierung mit Ausnahme von $\lambda = 18.5$ und $\alpha = 0.00009$ von Tabelle 4.1 übernommen wurde. Das Tripel (S_2 , L_2 , Orbit2) zeigt das Ergebnis eines technischen Fortschritts, welcher mit einer Erhöhung von $\alpha = 0.00012$ ceteris paribus erzeugt wird. Die beiden Isoklinen verschieben sich nach unten. Während das erste Tripel eine rasche Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht aufweist, führt das zweite, zu der nicht nachhaltigen Randlösung $(0, \bar{L})$, bei der der gesamte Ressourcenstock ausgeschöpft wird.

Um die Auswirkung einer Erhöhung von λ zu veranschaulichen, kann man die Abbildungen (4.19) und (4.24) betrachten; im ersten Fall gilt $\lambda = 20$, im zweiten $\lambda = 18.5$. Die Erhöhung verschiebt die L -Isokline nach oben, was dazu führt, dass es statt zwei Schnittpunkten keinen mehr gibt, und anstelle der Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht eine Konvergenz gegen die Randlösung $(0, \bar{L})$ auftritt. Wie beim Erntetechnologiefortschritt führt diese Erhöhung aufgrund der Ausrottung des Ressourcenstocks zu einem nicht nachhaltigen Ergebnis. Dasselbe

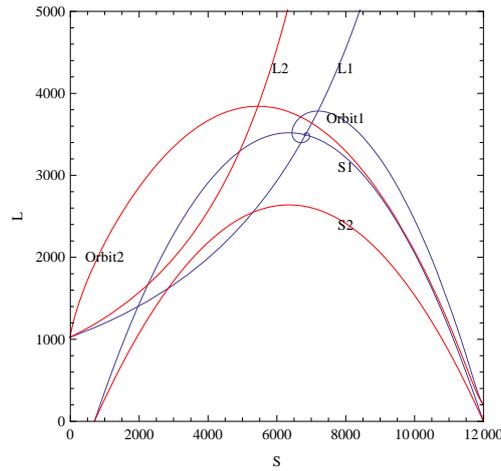


Abbildung 4.25.: Phasendiagramm des technologischen Fortschritts in α ; Erhöhung von $\alpha = 0,00009$ auf $\alpha = 0,00012$.

Ergebnis liefert eine Erhöhung von δ , siehe Abbildung (4.26). Es verschiebt sich nur die L-Isokline nach oben, was wieder dazu führt, dass statt zwei Schnittpunkten keiner mehr gegeben ist, und anstelle der Konvergenz gegen das innere Gleichgewicht eine Konvergenz gegen die Randlösung $(0, \bar{L})$ auftritt.

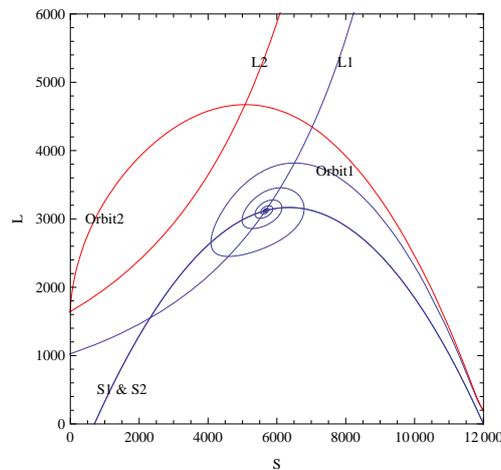


Abbildung 4.26.: Phasendiagramm eines technischen Fortschritts in δ ; Erhöhung von $\delta = 0,7$ auf $\delta = 0,72$

Zusammenfassend kann man nun sagen, dass bei jedem untersuchten technischen Fortschritt - also sowohl ein Fortschritt im H-Sektor durch α als auch ein Fortschritt im M-Sektor durch λ und δ - zu einer Konvergenz gegen die Randlösung $(0, \bar{L})$ führen kann.

4.4. Vergleich der Modelle

Nach den Erläuterungen der einzelnen Modelle folgt nun der Vergleich.

In Kapitel 4.1 wurde gezeigt, dass Reuveny und Decker bei der Herleitung ihrer Dynamiken bis auf den Fertilitätsindex x und die Gewichtungparameter θ und ψ das Brander/Taylor-Modell übernehmen. Es werden technische Fortschritte im Sättigungsniveau, in der Ernte- und der Wachstumsrate der natürlichen Ressource untersucht. Wobei zwei verschiedene Entwicklungen betrachtet werden: einerseits eine logarithmische, andererseits eine exponentielle (siehe Gleichungen (4.15) bis (4.19)). Die Parameter werden endogenisiert und sind nur von der Zeit t abhängig.

Der in Kapitel 4.2 dargestellte technische Fortschritt ist an die Idee der modernen Wachstumstheorie angelehnt. Es wird auf Simon [18] und Kuznets [11] verwiesen, die beide Vertreter der modernen Theorie sind. Der vom Bevölkerungswachstum abhängigen Fortschritt, wie von Dalton, Coats und Asrabadi eingeführt wurde, wird genauer erläutert (siehe Gleichungen (4.28), (4.29) und (4.30)). Nur bei positivem Bevölkerungswachstum kommt es zu einem Fortschritt in der Ernte- bzw. Wachstumsrate der Ressource.

Das Kapitel 4.3 behandelt nicht speziell den technischen Fortschritt, sondern konzentriert sich vor allem auf die Herleitung des neuen Modells. Die Auswirkung von der besseren Erntetechnologie α wird nur anhand von einer ceteris paribus Erhöhung des Parameters untersucht und nicht wie in den anderen beiden Kapiteln dynamisch erklärt. Das heißt, hier findet man eine Konstante, in den anderen beiden Kapiteln jedoch eine mit der Zeit monoton wachsende Technologie.

Ein weiterer Unterschied ist jener, dass in den Kapiteln 4.1 und 4.2 nicht genau auf die Gleichgewichte eingegangen wird, sondern vor allem die Entwicklung der ersten 200 Dekaden untersucht und als wichtig angesehen wird. Im Gegensatz dazu ist die globale Stabilität ein Schwerpunkt im Kapitel 4.3.

Folgende Annahmen wurden für α in den einzelnen Kapiteln getroffen:

Kapitel 2	$\alpha = 0.00001$
Kapitel 4.1	$\alpha = 0.00001e^{\frac{t}{20}}$ und $\alpha = 0.00001 + \ln\left(\frac{t}{500000} + 1\right)$
Kapitel 4.2	$\alpha_t = \alpha_{t-1} \left(1 + \delta_\alpha \lambda \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)\right)$ mit $\frac{d\alpha}{dL} > 0$ wenn $\dot{L} > 0$ und $\frac{d\alpha}{dL} = 0$ wenn $\dot{L} \leq 0$
Kapitel 4.3	ceteris paribus Erhöhung von α

Die Abbildungen (4.13) und (4.27) zeigen die graphische Darstellung obiger Tabelle. Folgende Annahmen wurden für r in den einzelnen Kapiteln getroffen:

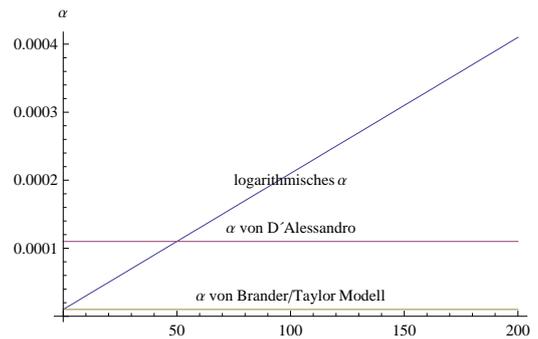


Abbildung 4.27.: Beispiel für Entwicklungen von α aus den Kapiteln 2, 4.1 und 4.2

Kapitel 2	$r = 0.04$
Kapitel 4.1	$r = 0.04 + 0.00155e^{\frac{t}{35}}$ und $r = 0.04 + 0.1 \ln(t + 1)$
Kapitel 4.2	$r_t = r_{t-1} \left(1 + \delta_r \lambda \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \right)$ mit $\frac{dr}{dL} > 0$ wenn $\dot{L} > 0$ und $\frac{dr}{dL} = 0$ wenn $\dot{L} \leq 0$
Kapitel 4.3	wird nicht untersucht

Steady-State Lösungen und technischer Fortschritt in der Erntetechnologie

Die Ergebnisse einer Verbesserung der Erntetechnologie sind nachvollziehbar, aber erschreckend. In allen drei Kapiteln führt dieser technischer Fortschritt zu Randlösungen. Einziger Unterschied ist, dass im Kapitel 4.1 die Bevölkerung, in den anderen beiden zuerst der Ressourcenstock ausgelöscht wird. In den Abbildungen (4.7) und (4.16) erkennt man, dass sich der Ressourcenstock nach Aussterben der Bevölkerung langsam wieder erholt. Somit kann eine Erhöhung der Erntetechnologie zu nicht nachhaltigem Verbrauch der Ressource führen. Je besser die Technologie ist, desto eher bewirkt eine hohe Ausbeutung der Ressource durch die Bevölkerung die Ausrottung der Ressource bzw. das Aussterben der Bevölkerung. Der Fortschritt erhöht die gegenwärtige Ernte und den Nutzen der einzelnen Individuen, achtet jedoch nicht auf eine langfristige Erhaltung der Ressource.

Steady-State Lösungen und technischer Fortschritt in der Wachstumsrate der natürlichen Ressource

In den Kapitel 4.1 und 4.2, in denen ein Fortschritt in r untersucht wird, konvergiert der Ressourcenstock immer gegen ein inneres Gleichgewicht. Im zweiten Modell pendelt sich auch die Bevölkerung rasch auf ihrer inneren langfristigen Lösung ein. Das exponentielle und das logarithmische Wachstum von r aus Kapitel 4.1 führt im Gegensatz dazu zu einer explodierenden Bevölkerung. Hier ist der technische Fortschritt so groß, dass die Bevölkerung bei gleich bleibendem Ressourcenstock nicht aufhört zu wachsen. In Kapitel 4.3 wird diese Möglichkeit eines technischen Fortschritts nicht untersucht.

Wachstumsfunktion der Ressource

Während in den ersten beiden Kapitel dieses Abschnittes die Wachstumsfunktion G (Gleichung (2.2)) aus dem Brander/Taylor-Modell übernommen wird, wird im Kapitel 4.3 die kritische Depensationswachstumsfunktion eingeführt, die im Gegensatz zur logistischen Funktion ab einem kritischen Niveau K negativ werden kann. Abbildung (4.28) verdeutlicht noch weitere Unterschiede. Der Unterschied des MSY wurde bereits genauer erläutert. Sichtbar wird nun auch, dass die kritische Depensationswachstumsfunktion mit den gewählten Parametern der einzelnen Kapitel viel stärker ansteigt. Der MSY wird bei dieser Funktion erst bei einem höheren Niveau des Ressourcenstocks angenommen als bei der logistischen.

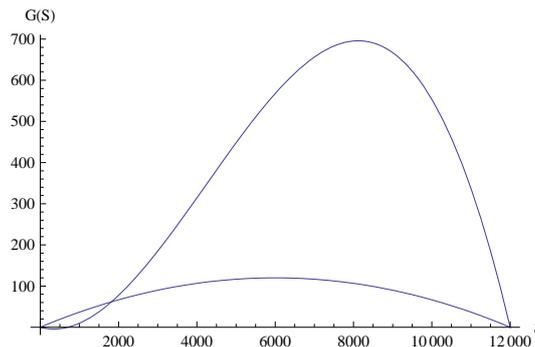


Abbildung 4.28.: kritische Depensations- und logistische Wachstumsfunktion

Arbeitsmarkt

Während in 4.1 die Arbeitssituation vom Brander/Taylor-Modell übernommen wird, entstehen in den anderen beiden Kapitel neue Arbeitssektoren. In 4.2 wird die Galor/Weil-Produktionsfunktion eingeführt, die einen dritten Arbeitssektor erzeugt. Hier werden auch für den M-Sektor die natürliche Ressource und somit auch Arbeitskräfte benötigt. Die gesamte Ernte entspricht nun der Summe der Ernten in den beiden Sektoren. In Kapitel 4.3 wird das Gut M aus dem M-Sektor nicht mehr nur als das „aggregierte andere Gut“ angenommen, sondern steht für Getreide, das durch Verwendung der neu eingeführten zweiten Ressource - das Land - produziert werden kann. Der H-Sektor steht wie in allen anderen Modellen für die erneuerbare, erschöpfbare Ressource. Das heißt in diesem Modell arbeiten die Menschen entweder in der Ernte des Waldes oder in der Produktion des Getreides.

Die Dynamiken \dot{S}

Kapitel 2	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta$
Kapitel 4.1	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - L^\theta S^\psi \alpha\beta^\theta$
Kapitel 4.2	$\dot{S} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha [(\beta + (1 - \gamma)(1 - \beta))]$
Kapitel 4.3	$\dot{S} = rS \left(\frac{S}{K} - 1\right) \left(1 - \frac{S}{K}\right) - LS\alpha\beta$

In dieser Auflistung sind die Unterschiede in den einzelnen Dynamiken des Ressourcenstocks und die Erweiterungen zum Brander/Taylor-Modell sehr gut zu erkennen. Im Kapitel 4.1 kommen die parametrischen Gewichtungen ψ und θ dazu, wobei die Parametrisierung $\psi, \theta = 1$ die im Brander/Taylor-Modell eingeführte Dynamik ergibt. Das Kapitel 4.2 beschäftigt sich mit dem zusätzlichen Anteil der Ernte $(1 - \gamma)(1 - \beta)$ aus dem M-Sektor. Im letzteren wird die logistische Wachstumsfunktion durch die kritische Depensationswachstumsfunktion ersetzt.

Die Dynamiken \dot{L}

Kapitel 2	$\dot{L} = L(b-d + S\alpha\beta\phi)$
Kapitel 4.1	$\dot{L} = L(b-d + \phi(S^\psi L^{\theta-1} \alpha\beta^\theta)^x)$
Kapitel 4.2	$\dot{L} = L(b-d + \phi S\alpha\beta)$
Kapitel 4.3	$\dot{L} = \gamma(\lambda(1 - \beta)^\delta L^{\delta-1} + \bar{\phi}\alpha\beta S - \bar{\sigma})L$

Im Kapitel 4.1 kommen wie bei der Ressourcendynamik die parametrischen Gewichtungen ψ und θ dazu, weiters wird in der Geburtenfunktion F ein Sensitivitätsparameter x eingeführt. Wobei ein größeres x einen größeren Einfluss des Pro-Kopf-Konsum auf die Geburtenfunktion bewirkt. Im Kapitel 4.2 ändert sich im Vergleich zum Brander/Taylor-Modell nichts. Einzig die Bevölkerungsdynamik aus Kapitel 4.3 weist Unterschiede auf. Aufgrund der neu eingeführten Ressource ist das Wachstum hier vom Kalorienverbrauch des repräsentativen Agenten abhängig.

5. Zusammenfassung

In der Diplomarbeit wurde ein dynamisches Modell der Interaktion von erneuerbaren Ressourcen und Bevölkerung auf der Osterinsel vorgestellt. Mit Hilfe dieses Räuber-Beute Modells wurde zunächst versucht die historische Entwicklung der Osterinsel zu erklären. Die Geschichte der wirtschaftlichen Entwicklung auf der südpazifischen Insel spiegelt besonders beeindruckend die Bedeutung von nachhaltiger Verwendung von erneuerbaren Ressourcen wider. Man geht heute davon aus, dass Bevölkerungswachstum zu einer hohen Ausbeutung der natürlichen Ressource geführt hat, und die Natur dadurch überbeansprucht wurde. Ohne vorhandene Ressource verringerte sich die Bevölkerung, und sie konnte ihre kulturellen Ausprägungen nicht aufrecht erhalten. Diese Entwicklung entspricht einem Aufstieg- und Fallszenario.

Mit dem in dieser Arbeit verwendeten Modell kann man diese Entwicklung von Ressource und Bevölkerung über die Zeit nachvollziehen. Außerdem wurde gezeigt, dass für das System Steady-States, also langfristige Gleichgewichte der Zustände, existieren.

Anschließend wird untersucht, ob die Einführung von Institutionen oder ein technischer Fortschritt diesem Aufstieg- und Fallszenario entgegenwirken kann. Es hat sich gezeigt, dass dies abhängig ist von der Art der Institution und des technischen Fortschritts. Die Resultate legen nahe, dass die Einführung von Eigentumsrechte auf die natürliche Ressource eine Dämpfung dieses Szenarios ergibt. Gegenteilig kann die Ressource, wenn sie als Gemeineigentum angesehen wird, ausgerottet werden und damit die Auslöschung der Bevölkerung bewirken.

Auch die Berücksichtigung eines technischen Fortschritts im Modell kann zu ähnlichen Resultaten führen. Bei einem Fortschritt in der Ressourcenwachstumsrate steht die Erhaltung des Ressourcenstocks im Mittelpunkt und das Aufstieg- und Fallszenario wird dadurch gedämpft. Eine Verbesserung der Erntetechnologie kann im schlimmsten Fall sogar zur Ausrottung der Ressource führen.

Dynamische Interaktion von erneuerbaren Ressourcen und Bevölkerung stellt heutzutage ein zentrales Element in den Wirtschaftswissenschaften dar. Diese Diplomarbeit gibt einen Einblick in diese Thematik und ermöglicht die Wichtigkeit einer sinnvollen Nutzung von erneuerbaren Ressourcen zu erkennen.

A. Geometrische Interpretation von Differentialgleichungen - das Phasenportrait

Die folgenden beiden Abschnitte A und B sollen einen Überblick der mathematischen Grundlagen geben und wurden aus den Arbeiten von Grass et al. [9] und Lorenz [12] zusammengefasst.

A.1. Trajektorie

t ist hier ein Parameter. Sei $x(\cdot)$ die Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (\text{A.1})$$

so bezeichnet man $x(\cdot)$ als *Trajektorie*. Hierbei handelt es sich um eine Lösungskurve, die durchlaufen wird, wenn t seinen Parameterbereich durchläuft.

Der Ableitungsvektor $\dot{x}(t)$ gibt dann in jedem Punkt der Kurve die lokale „Geschwindigkeit“ an.

Bemerkung: Die Lösung eines DGL-Systems kann also durch Elimination der Zeit als Lösungskurve (= Trajektorie) im Phasenraum dargestellt werden.

A.2. Orbit

Die geordnete Teilmenge

$$Or(x_0) := \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(0) = x_0, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

nennt man *Orbit durch x_0* .

Die graphische Darstellung aller Orbits ergibt den sogenannten **Phasenraum**.

Bemerkung: Ein Orbit ist die Projektion einer Trajektorie $x(\cdot)$ in den Phasenraum, während der zeitliche Ablauf erhalten bleibt; d.h. der Phasenraum ist jener Raum, in dem die Trajektorien liegen.

A.3. Vektorfeld, Fluss, dynamisches System

Ausgehend davon, dass man bei einer gegebenen autonomen Differentialgleichung jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnen kann, definiert der Bildraum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein *Vektorfeld*.

Dieses Vektorfeld generiert einen sogenannten *Fluss*

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

welcher einen Anfangszustand x_0 in einen Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^n$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ transformiert:

$$\varphi^t(x_0) := x(t).$$

Das Tripel

$$(f, \mathbb{R}^n, \varphi^t(\cdot))$$

wird dann auch das durch das Differentialgleichungssystem induzierte *dynamische System* genannt.

Bemerkung: $\varphi^t(\cdot)$ erfüllt

$$\frac{d\varphi^t(x_0)}{dt} = f(\varphi^t(x_0)), \quad \text{und} \quad \varphi^0(x_0) = x_0$$

Zusätzlich zwei weitere Eigenschaften des Flusses:

- $\varphi^0 = \mathbb{I}^{(n)}$ d.h. das System ändert seinen Zustand nicht unerwartet und der Fluss startet im Zeitpunkt 0 in der Anfangsposition x_0 .
- $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$ d.h. die Zustandsdynamik ändert sich nicht im Laufe der Zeit.

B. Charakterisierung der Eigenwerte

Gleichgewicht

Sei $(f, \mathbb{R}^n, \varphi'(\cdot))$ ein dynamisches System, welches von einer autonomen Differentialgleichung (A.1) erzeugt wird.

Ein Punkt \hat{x} ist ein *Gleichgewicht* - auch *Steady State* genannt - wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi^t(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Die Lösung $\hat{x}(\cdot) \equiv \hat{x}$ einer autonomen Differentialgleichung bezeichnet man somit auch als *gleichgewichtige Lösung*.

Es sei angemerkt, dass im Gleichgewicht keine Bewegung stattfindet:

$$f(\hat{x}) = 0.$$

Das heißt, befindet man sich im Gleichgewicht, verändert sich das System nicht mehr.

Isokline

Sei $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ mit $f = (f_1, f_2)'$ und $x = (x_1, x_2)'$ sei eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Isoklinen sind nun definiert durch:

$$N_{f_1(c)} = \{(x_1, x_2) : f_1(x_1, x_2) = c\},$$

(\dot{x}_1 -Isokline zum Wert c)

$$N_{f_2(c)} = \{(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) = c\},$$

(\dot{x}_2 -Isokline zum Wert c).

Für $c = 0$ bezeichnet man diese Isoklinen einfach als \dot{x}_1 -Isokline bzw. \dot{x}_2 -Isokline.

Im zwei-dimensionalen System lässt sich also das Gleichgewicht als Schnitt der beiden *Null-Isoklinen* bestimmen; d.h. $c = 0$.

B.1. Linearisierung

Um das lokale dynamische Verhalten in einer Umgebung eines Gleichgewichts zu untersuchen, betrachten wir:

$$\dot{y}(t) = f(x(t) + y(t)) - f(x(t)), \quad (\text{B.1})$$

wobei $y(t)$ die Ableitung von $x(t)$ zum Zeitpunkt t misst und (2.1) die über die Zeit entstehende Störung beschreibt. Gilt $y \equiv 0$, handelt es sich um den ungestörten Fall. Mithilfe der Taylorreihenentwicklung kann man Gleichung (2.1) linearisieren:

$$\dot{y}(t) = f_x(x(t))y(t) + o(y(t)). \quad (\text{B.2})$$

Lässt man nun $o(y(t))$ weg, erhält man die sogenannte *abweichende Gleichung* („*variational equation*“) der Lösung $x(\cdot)$:

$$\dot{y} = f_x(x(t))y.$$

Es handelt sich hier im Allgemeinen um ein lineares nichtautonomes System mit der Eigenschaft:

$$J(t) = f_x(x(t)). \quad (\text{B.3})$$

Wobei $J(\cdot)$ die Jakobimatrix von $f(\cdot)$ ist, die entlang der Trajektorie $x(\cdot)$ ausgewertet wird.

B.2. Charakterisierung der Eigenwerte eines linearen dynamischen Systems

Gegeben ist ein n -dimensionales zeitstetiges dynamisches System mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = Ax(t) + c, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.4})$$

wobei A einer $n \times n$ Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

und c einem n -dimensionalen Spaltenvektor entsprechen.

B.2.1. Der 2-dimensionale Fall

Sei $n = 2$ und $c = 0$:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

Eine allgemeine Lösung für diesen Fall ist gegeben durch:

$$x(t) = c_1 E_1 e^{z_1 t} + c_2 E_2 e^{z_2 t}, \quad (\text{B.6})$$

wobei c_1 und c_2 konstant sind, und z_1, z_2 den Eigenwerten der Koeffizientenmatrix A , und E_1 sowie E_2 den dazugehörigen Eigenvektoren entsprechen. Das dynamische Verhalten des Systems

hängt von den Eigenwerten ab, d.h. von der Lösung der Gleichung $|A - zI|$, wobei I die 2-dimensionale Einheitsmatrix ist. Man bekommt also die Eigenwerte durch Lösen der folgenden Gleichung:

$$z^2 - (a_{11} + a_{22})z + (a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Die beiden Koeffizienten der quadratischen Gleichung entsprechen hier der Determinante und dem negativen Wert der Spur der Koeffizientenmatrix A . Somit gilt:

$$z_{1,2} = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4\det A}}{2} \quad (\text{B.8})$$

Im Wesentlichen werden 2 Fälle unterschieden, einer mit reellen und einer mit komplexen Eigenwerten.

B.2.2. Reelle Eigenwerte

Die Eigenwerte sind reell, wenn die Diskriminante größer oder gleich Null ist. Das heißt wenn gilt:

$$\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A \geq 0$$

$\det A > 0$:

Diese Bedingung impliziert, dass die beiden Eigenwerte dasselbe Vorzeichen haben.

- **Stabiler Knoten:** Wenn die Spur von A negativ ist, sind die beiden Eigenwerte auch negativ und die Trajektorien des Systems konvergieren monoton gegen einen endlichen Punkt (x_1^*, x_2^*) .
- **Instabiler Knoten:** Umgekehrt führt eine positive Spur zu zwei positiven Eigenwerten und die Trajektorien divergieren gegen $+\infty$ oder $-\infty$, siehe Abbildung (B.1).

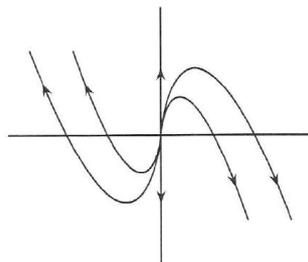


Abbildung B.1.: Instabiler Knoten [9],S.37.

detA < 0:

- **Sattelpunkt:** Eine negative Determinante und eine positive Diskriminante implizieren 2 reelle Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen. In diesem Fall bekommt man die sogenannte **Sattelpunktstabilität**. Das heißt die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten schneiden sich im Gleichgewicht und bilden Asymptoten für alle Trajektorien. Die Mannigfaltigkeiten nennt man auch „*Seperatrix*“, siehe Abbildung (B.2).

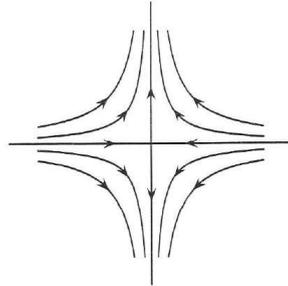


Abbildung B.2.: Sattelpunkt [9],S.37.

B.2.3. Komplexe Eigenwerte

- $\det A > 0$ und $\Delta < 0$ liefert zwei konjugiert komplexe Eigenwerte.
D.h.: $z_1 = \alpha + \beta i$ und $z_2 = \alpha - \beta i$, wobei $\alpha = \frac{\text{tr}A}{2}$ und $\beta = \sqrt{\det A - \frac{(\text{tr}A)^2}{4}}$
- **Stabiler Fokus:** $\text{Re}(z_i) < 0$ führt zu einer gedämpften Oszillation und einer Konvergenz gegen einen endlichen Wert.
- **Instabiler Fokus:** $\text{Re}(z_i) > 0$ führt zu einer mit der Zeit immer größer werdenden Amplitude und damit zu Divergenz, siehe Abbildung (B.3).

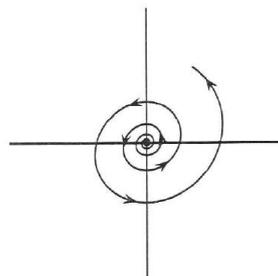


Abbildung B.3.: Instabiler Fokus [9],S.37.

- **Zentrum:** Bei $\text{Re}(z_i) = 0$ bleibt die Amplitude der Oszillation konstant und das System wird neutral stabil genannt, siehe Abbildung (B.4).

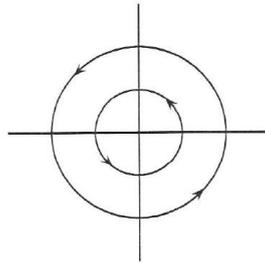


Abbildung B.4.: Neutrales Zentrum [9],S.37.

C. Berechnung der Nutzenmaximierung

C.1. Nutzenmaximierung von Kapitel 2

Für die Nutzenmaximierung bilden wir die dazugehörige Lagrangefunktion:

$$L \equiv h^\beta m^{1-\beta} + \lambda(ph + m - w). \quad (\text{C.1})$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h} \equiv \frac{\beta u}{h} + \lambda p = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{ph}{\beta} \\ \frac{\partial L}{\partial m} \equiv \frac{(1-\beta)u}{m} + \lambda = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{m}{1-\beta} \\ \text{aus } m = w - ph & \Rightarrow \frac{ph}{\beta} = \frac{w - ph}{1-\beta} \\ & \Rightarrow h = \frac{w\beta}{p} \\ & \Rightarrow m = (1-\beta)w. \end{aligned}$$

C.2. Nutzenmaximierung von Kapitel 3.2

Für die Nutzenmaximierung bilden wir die dazugehörige Lagrangefunktion:

$$L \equiv (h - h_{\min})^\beta m^{1-\beta} + \lambda(ph + m - w). \quad (\text{C.2})$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h} \equiv \frac{\beta u}{h - h_{\min}} + \lambda p = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{p(h - h_{\min})}{\beta} \\ \frac{\partial L}{\partial m} \equiv \frac{(1-\beta)u}{m} + \lambda = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{m}{1-\beta} \\ \text{aus } m = w - ph & \Rightarrow \frac{p(h - h_{\min})}{\beta} = \frac{w - ph}{1-\beta} \\ & \Rightarrow h = (1-\beta)h_{\min} + \frac{w\beta}{p} \\ & \Rightarrow m = (1-\beta)(w - ph_{\min}). \end{aligned}$$

C.3. Nutzenmaximierung von Kapitel 3.3

Für die Nutzenmaximierung bilden wir die dazugehörige Lagrangefunktion:

$$L \equiv (h - h_{min})^\beta m^{1-\beta} + \lambda((1+t)ph + m - 1 + T). \quad (C.3)$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial h} \equiv \frac{\beta u}{h - h_{min}} + \lambda(1+t)p = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{(1+t)p(h - h_{min})}{\beta} \\ \frac{\partial L}{\partial m} \equiv \frac{(1-\beta)u}{m} + \lambda = 0 & \Rightarrow \frac{u}{\lambda} = -\frac{m}{1-\beta} \\ \text{aus } m = w - ph & \Rightarrow \frac{(1+t)p(h - h_{min})}{\beta} = \frac{1 - ph}{1 - \beta} \\ & \Rightarrow h = \frac{\beta(1 - ph_{min})}{(1+t - \beta t)p} + h_{min} \\ & \Rightarrow m = \frac{(1 - ph_{min})(1 - \beta)(1+t)}{1+t + \beta t}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt für $m \geq 0$. $m = 0$ entspricht der Randlösung.

Literaturverzeichnis

- [1] J.M. Anderies. On modeling human behavior and institutions in simple ecological economic systems. *Ecological Economics*, 35:393–412, 2000.
- [2] S. Bowles. Endogenous preferences: The cultural consequences of markets and other economic institutions. *Journal von Economic Literature*, 36:75–111, 1998.
- [3] J.A. Brander and M.S. Taylor. The simple economics of easter island: A ricardo-malthus model of renewable resource use. *American Economic Review*, 88(1):119–138, 1998.
- [4] J. Cook. *Entdeckungsfahrten im Pazifik. Die Logbücher der Reisen 1768 - 1779*. Edition Erdmann, 2005.
- [5] S. D'Alessandro. Non linear dynamics of population and natural resources: The emergence of different patterns of development. *Ecological Economics*, 62:473–481, 2007.
- [6] T.R. Dalton and R.M. Coats. Could institutional reform have saved easter island? *Journal of Evolutionary Economics*, 10:489–505, 2000.
- [7] T.R. Dalton, R.M. Coats, and B.R. Asrabadi. Renewable resources, property-rights regimes and endogenous growth. *Ecological Economics*, 52:31–41, 2005.
- [8] O. Galor and D.N. Weil. Population technology and growth: from malthusian stagnation to the demographic transition and beyond. *American Economic Review*, 90:806–828, 2000.
- [9] D. Grass, J.P. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, and D.A. Behrens. *Optimal Control of Nonlinear Processes: With Applications in Drugs, Corruption and Terror*. Springerverlag, 2008.
- [10] G. Hardin. The tragedy of the commons. *Science*, 162:1243–1248, 1968.
- [11] S. Kuznets. *Population change and aggregate output. Demographic and Economic Change in Developed Countries*. Princeton University Press, 1960.
- [12] H.W. Lorenz. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 334*. Springerverlag, 1989.
- [13] T.R. Malthus. *Essay on the Principle of Population*. 1798.
- [14] W. Nicholson. *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. The Dryden Press, Fort Worth, TX, 1998.

- [15] D.C. North. *Institutions, institutional change, and economic performance*. Cambridge University Press, 1990.
- [16] J.C.V. Pezzey and J.M. Anderies. The effect of subsistence on collapse and institutional adaption in population-resource societies. *Journal of Development Economics*, 72:299–320, 2003.
- [17] R. Reuveny and C.S. Decker. Easter island: historical anecdote or warning for the future? *Ecological Economics*, 35:271–287, 2000.
- [18] J. Simon. *The Ultimate Resource*. Princeton University Press, 1981.
- [19] T. Sowell. *Race and culture*. Basic Book, 1994.
- [20] T. Sowell. *Migration and cultures: A world view*. Basic Book, 1996.
- [21] G. Steinmann. *Bevölkerungsentwicklung und technischer Fortschritt in: B. Felderer (ed.) Beiträge zur Bevölkerungsökonomie*. Duncker & Humblot, Berlin, 1986.
- [22] T. Tietenberg. *Sustainable development: defining the concept. Environmental and natural resource economics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.
- [23] D. Weil. *Economic Growth*. Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 2004.
- [24] O.E. Williamson. *The economic institutions of capitalism*. The Free Press, 1985.