TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Modelle der New Keynesian School unter besonderer Berücksichtigung der Geldpolitik

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Franz X. Hof

durch

Lukas Mayr

Zaunerweg 5/27
4020 Linz

Datum

Unterschrift

Ich danke Prof. Franz X. Hof für die intensive Betreuung meiner Diplomarbeit und meiner Familie für die Unterstützung während des gesamten Studiums.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Modelle der New Keynesian School unter besonderer Berücksichtigung der Geldpolitik

1 Einleitung

Die Entwicklung der Wirtschaftstheorie im Laufe des 20. Jahrhunderts zog zahlreiche Veränderungen für die Anforderungen an die Geldpolitik nach sich. In den ersten drei Jahrzehnten des abgelaufenen Jahrhunderts war die Volkswirtschaftslehre von der klassischen Theorie und einem starken Glauben an die Selbstregulierungsfähigkeit der Märkte geprägt. Nach dieser Theorie war Geldpolitik neutral, d.h. sie hatte keinen Einfluss auf realwirtschaftliche Größen. Eine zentrale Annahme, welche zu dieser Schlussfolgerung führte, war die der vollkommen flexiblen Preise auf vollständigen Konkurrenzmärkten.

Die große Depression der dreißiger Jahre führte zum Aufstieg des Keynesianismus, der von einer inhärenten Instabilität des marktwirtschaftlichen Systems ausging. Wellen des Pessimismus und Optimismus würden zu Konjunkturschwankungen führen. Keynesianer betonten dabei die Möglichkeit von Unterbeschäftigungsgleichgewichten, von welchen aus die Volkswirtschaft aufgrund nach unten rigider Löhne und Preise nur sehr langsam zum Vollbeschäftigungsgleichgewicht zurückkehren würde. Konjunkturzyklen sollten daher durch antizyklische Wirtschaftspolitik bekämpft werden. Obwohl fiskalpolitischen Maßnahmen im Keynesianismus eine höhere Wirkungskraft zugeschrieben werden als geldpolitischen, sollte expansive bzw. restriktive Geldpolitik in Rezessionen bzw. Boomphasen unterstützend wirken.

Im Gegensatz zu den Keynesianern vertrat der Monetarismus die Ansicht, dass Konjunkturzyklen auf Schwankungen der Geldmenge zurückzuführen seien. Als Beleg dafür nannten Milton Friedman und Anna Schwartz in „*A Monetary History of the United States, 1867-196*0" die massive Verringerung des Geldangebots während der Weltwirtschaftskrise. Die optimale geldpolitische Strategie sei daher die Verstetigung des Geldmengenwachstums.

Der in der Empirie beobachtete *trade-off* zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation (Phillips-Kurve) führte in den sechziger Jahren insbesondere in den USA zu einer Politik, mit der man sich eine niedrigere Arbeitslosenrate durch eine höhere Inflation „erkaufen" wollte. Sowohl die Steuersenkungen unter Kennedy bzw. Johnson als auch die mit dem Beginn des Vietnamkriegs verbundene Zunahme der Rüstungsausgaben resultierten in einer Erhöhung der gesamtwirtschaftlichen Nachfrage und steigerten den inflationären Druck. Ende der sechziger Jahre kritisierten Friedman und der Keynesianer Edmund Phelps unabhängig voneinander die Phillips-Kurve, da nur dann ein permanenter negativer Zusammenhang zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit bestünde, wenn sich die Wirtschaftssubjekte dauerhaft täuschen ließen. In monetaristischen Modellen wurde häufig das Konzept der adaptiven Erwartungen verwendet, nach welchem die Wirtschaftssubjekte bei einer Unter- bzw. Überschätzung der aktuellen Inflationsrate ihre Inflationserwartungen für die nächste Periode nach oben bzw. nach unten revidieren. Die um Erwartungen erweiterte Phillips-Kurve führte in Verbindung mit adaptiven Erwartungen dazu, dass Geldpolitik kurzfristig nicht neutral ist, der *trade-off* zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation langfristig aber verloren geht. Das in den siebziger Jahren in vielen Ländern aufgetretene und durch die beiden Ölpreisschocks ausgelöste bzw. verstärkte Phänomen der Stagflation, d.h. der simultan hohen Arbeitslosen- und Inflationsraten, sollte Friedman und Phelps Recht geben.

In den siebziger Jahren veränderten die Arbeiten von Robert Lucas die makroökonomische Theorie nachhaltig und die Neue Klassische Schule (*New Classical School*) wurde begründet. Insbesondere führte Lucas das in den frühen sechziger Jahren im Rahmen der Mikroökonomie entwickelte Konzept der rationalen Erwartungen in die makroökonomische Analyse ein: Im Gegensatz zum Konzept der adaptiven Erwartungen bilden Wirtschaftssubjekte ihre Erwartungen auf Basis sämtlicher zur Verfügung stehenden Informationen und begehen dabei keine systematischen Fehler. Die Politikineffektivitätshypothese verschärfte die Kritik von Friedman und Phelps weiter. Diese Hypothese besagt, dass systematische Geldpolitik weder lang- noch kurzfristige reale Effekte hat, wenn Wirtschaftssubjekte ihre Erwartungen rational bilden und die Zentralbank keinen Informationsvorsprung gegenüber dem privaten Sektor hat. Mit systematischer Geldpolitik ist eine Politik gemeint, die entweder einer angekündigten Regel oder einem Muster folgt, das private Wirtschaftssubjekte erkennen können. Geldpolitische Veränderungen hätten demnach nur dann einen Einfluss auf realwirtschaftliche Größen, wenn sie vom privaten Sektor nicht antizipiert würden. Die 1976 formulierte Lucas Kritik besagt, dass Abschätzungen von längerfristigen Auswirkungen wirtschaftspolitischer „Regimewechsel" anhand von Prognosemodellen, in denen die Erwartungen der privaten Wirtschaftssubjekte entweder nicht explizit berücksichtigt oder anhand von Prognoseformeln mit politikinvarianten Koeffizienten beschrieben werden, zu massiven Fehlprognosen führen können, selbst wenn sich die Modelle in der Vergangenheit exzellent bewährt haben. Diese Kritik führte dazu, dass die rigorose Mikrofundierung zu einem zentralen Bestandteil der modernen Makroökonomie wurde. In den achziger Jahren entstand innerhalb der Neuen Klassischen Schule die *Real-Business-Cycle* Theorie, welche das Auftreten von Konjunkturzyklen allein auf reale Schocks zurückführte und dem monetären Sektor jegliche Bedeutung für realwirtschaftliche Variablen absprach.

Der Widerspruch zwischen Theorie und Empirie führte schließlich zum *New Keynesianism*[1], der in der Literatur manchmal auch als *New Neoclassical Synthesis* bezeichnet wird. Modelle dieser Schule verwenden grundsätzlich die dynamische stochastische allgemeine Gleichgewichtsstruktur der *Real-Business-Cycle* Theorie. Anstatt der in den Modellen der *Real-Business-Cycle* Theorie angenommenen vollständigen Konkurrenzmärkte unterstellen neokeynesianische Modelle (in der Folge auch NK-Modelle genannt) monopolistische Konkurrenz. Außerdem wird die Annahme der Preis- und/oder Lohnrigiditäten getroffen,

[1] Es gibt einen signifikanten Unterschied zwischen dem *New Keynesianism* und dem *Post Keynesianism*. In der wissenschaftlichen Literatur ist die Zuordnung der *Neo Keynesians* nicht eindeutig. So verwendet z.B. Caravale (1987) die Begriffe *Neo-* und *Post* Keynesians synonym, während Goodhart (2007) die Begriffe *Neo-* und *New Keynesians* synonym verwendet. Die Diplomarbeit beschränkt sich auf Modelle der *New Keynesian School* und verwendet, wie in der deutschen wissenschaftlichen Literatur üblich, die Begriffe *New Keynesianism* und „Neokeynesianismus" synonym (siehe z.B. Blanchard und Illing (2009)).

wodurch Geldpolitik auf kurze Sicht nicht neutral ist, sondern Auswirkungen auf reale makroökonomische Größen hat. NK-Modelle stellten bis zum Ausbruch der aktuellen Wirtschaftskrise das allgemein verwendete Rahmenwerk der Geldtheorie dar. Durch die Finanzmarktkrise wurde aber ein Bewusstsein für die Notwendigkeit der expliziten Berücksichtigung zusätzlicher Elemente, wie z.B. des Bankensektors, geschaffen, welche bis vor kurzem in den Standardmodellen weitestgehend ignoriert wurden. In der aktuellen Literatur werden verschiedenste Ansätze zur Modifikation der Standardmodelle diskutiert. Häufig wird kritisiert, dass im Zuge der Finanzkrise neben der in den Modellen hauptsächlich verwendeten Zinssteuerung neue geldpolitische Instrumente eingeführt wurden. Aus heutiger Sicht lässt sich schwer einschätzen, welche Modellmodifikationen sich durchsetzen werden. Nichtsdestotrotz erfordert das Verständnis aktueller Erweiterungen die genaue Kenntnis der Standardmodelle, welche in dieser Diplomarbeit vorgestellt werden.

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil stehen die verbale Beschreibung der Modelle und die ökonomische Interpretation der Gleichungen im Vordergrund, im zweiten Teil erfolgt die detaillierte mathematische Ableitung dieser Gleichungen. Anhand von Standardmodellen werden die Grundannahmen erklärt, die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet und die realwirtschaftlichen Auswirkungen verschiedener geldpolitischer Strategien dargestellt. Dabei wird in Kapitel 2 das Modell mit monopolistischer Konkurrenz auf dem Gütermarkt und rigiden Preisen vorgestellt. In Kapitel 3 werden die Auswirkungen verschiedener geldpolitischer Strategien diskutiert. In Kapitel 4 wird ein Modell um Lohnrigiditäten und monopolistische Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt erweitert. Den Abschluss des ersten Teils stellt eine Kritik der vorgestellten Modelle dar (Kapitel 5), wobei insbesondere auf die aktuelle Finanzmarktkrise Bezug genommen wird.

Ziel der exakten mathematischen Ableitung der Gleichungen im zweiten Teil der Arbeit ist es, den Leserinnen und Lesern einerseits ein tieferes Verständnis für die Stärken und Schwächen der vorgestellten Modelle zu vermitteln und sie andererseits mit Techniken vertraut zu machen, welche auch bei Modellmodifikationen hilfreich sein können. Da das Standardmodell aus drei bzw. vier einfachen Gleichungen besteht, kann auf den ersten Blick der Eindruck entstehen, dass es sich um ein relativ simples Modell handelt. Die Komplexität des Modells kann erst erfasst werden, wenn man auch die Ableitung der Modellgleichungen kennt. Vor dem Hintergrund der aktuellen Finanzmarktkrise, durch welche offenkundig wurde, dass NK-Modelle einer Modifikation bzw. Erweiterung bedürfen, ist es erforderlich, zunächst die Standardmodelle samt deren Implikationen in ihrer Tiefe zu verstehen. Dieses Verständnis soll durch die Diplomarbeit einem breiten Leserkreis erleichtert werden.

2 Ein Standard NK-Modell mit monopolistischer Konkurrenz auf dem Gütermarkt und rigiden Preisen

Zentrale Annahmen neokeynesianischer Modelle sind die monopolistische Konkurrenz sowie Preis- und/oder Lohnrigiditäten. Diese Annahmen haben zur Folge, dass Geldpolitik zumindest auf kurze Sicht nicht neutral ist, sondern Auswirkungen auf reale makroökonomische Größen hat. Die Modellgleichungen werden durch ln-lineare Approximationen in einem *steady state* beschrieben, der durch eine stabile, niedrige Inflation gekennzeichnet ist. Häufig wird dabei ein *steady state* verwendet, in dem gar keine Inflation herrscht, das Preisniveau also konstant ist. Die Aussagekraft von NK-Modellen ist daher umso schlechter, je höher die Inflations- bzw. Deflationsrate ist.

Zunächst wird ein Standardmodell vorgestellt. Die Modellbeschreibung orientiert sich dabei stark an Gali (2008). In diesem Modell wird zunächst nur von Preisrigiditäten ausgegangen. Löhne werden vorerst als flexibel angenommen. Die genauen Ableitungen der Gleichungen werden in den Abschnitten 6.1 bis 6.3 beschrieben.

2.1 Haushalte

Bei der Beschreibung des Haushaltssektors wird zunächst das Optimierungsproblem in kompakter Form dargestellt. Anschließend werden die einzelnen Gleichungen des Problems samt deren Variablen erklärt und es erfolgt die Ableitung der Optimalitätsbedingungen. Dabei werden in diesem Abschnitt nur die wesentlichen Gleichungen vorgestellt. Für die detaillierte Herleitung der Bedingungen sei auf Abschnitt 6.1 verwiesen.

Der repräsentative Haushalt löst folgendes Optimierungsproblem:

$$\max E_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(C_{t+k}, N_{t+k}) \tag{1}$$

$$s.t. \qquad C_{t+k} = \left(\int_0^1 C_{t+k}(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \geq 0 \tag{2}$$

$$s.t. \qquad \int_0^1 P_{t+k}(i) C_{t+k}(i) di + Q_{t+k} B_{t+k} \leq B_{t+k-1} + W_{t+k} N_{t+k} + T_{t+k} \tag{3}$$

$$s.t. \qquad \lim_{T\to\infty} E_t \left\{ B_T \right\} \geq 0, \tag{4}$$

wobei sowohl Gleichung (2) als auch Gleichung (3) für alle $k = 0, 1, 2, ...$ gelten müssen. Gleichung (1) bringt zum Ausdruck, dass der Haushalt seinen erwarteten Nutzen über die Zeit maximiert. Der Periodennutzen wird in jeder Periode $t + k$ durch Konsum C_{t+k} und durch Freizeit $L_{t+k} \in [0, 1]$ generiert. Die maximal zur Verfügung stehende Zeit wird auf 1 normiert. Da in jeder Periode eine eins-zu-eins-Beziehung zwischen der Wahl der Freizeit und jener der Arbeitszeit N_{t+k} herrscht ($N_{t+k} = 1 - L_{t+k}$), ist es zweckmäßig, nur eine der beiden Variablen in das Optimierungsproblem aufzunehmen. Das zweite Argument der Nutzenfunktion U ist daher die Arbeitszeit N_{t+k}, auf die Variable L wird in der Folge verzichtet. Der Haushalt diskontiert zukünftigen Nutzen mit einer konstanten Rate ab. Der entsprechende Zeitpräferenzfaktor ist $\beta \in (0,1)$. Die Nutzenfunktion hat folgende Eigenschaften: Der Grenznutzen des Konsums ist positiv und nicht steigend

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} \leq 0 \tag{5}$$

und es gelten die Inada-Bedingungen

$$\lim_{C \to 0} \frac{\partial U}{\partial C} = \infty, \qquad \lim_{C \to \infty} \frac{\partial U}{\partial C} = 0. \tag{6}$$

Arbeit generiert entweder Disnutzen oder hat keinen Einfluss auf den Nutzen. Der Grenznutzen der Freizeit ist nicht negativ und nicht steigend. Bei der gewählten Darstellung bedeutet dies, dass die partiellen Ableitungen bezüglich N folgende Eigenschaften haben:

$$\frac{\partial U}{\partial N} \leq 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial N^2} \leq 0 \tag{7}$$

Auch hier gelten die Inada-Bedingungen:

$$\lim_{N \to 0} \frac{\partial U}{\partial N} = 0, \qquad \lim_{N \to 1} \frac{\partial U}{\partial N} = -\infty \tag{8}$$

Durch die Inada-Bedingungen (6) und (8) wird sichergestellt, dass für das Optimierungsproblem nur innere Lösungen in Frage kommen. Es ist für den Haushalt also keinesfalls optimal, in einer Periode gar nichts zu konsumieren. Analog dazu ist es nicht optimal, gar nicht zu arbeiten bzw. völlig auf Freizeit zu verzichten.

Ein Charakteristikum von NK-Modellen ist die monopolistische Konkurrenz. Aufgrund der Heterogenität der Güter besitzen Firmen eine gewisse Marktmacht und Haushalte erzielen ihren Nutzen nicht durch den Konsum eines einzelnen Gutes, sondern durch den Konsum einer Kombination verschiedener Güter. Die Menge aller Firmen wird im Modell durch das Einheitsintervall $[0,1]$ beschrieben, wobei jede Firma genau einen Punkt dieses Intervalls darstellt. Es wird angenommen, dass jede Firma $i \in [0,1]$ genau das Gut $i \in [0,1]$ erzeugt, wodurch auch die Menge aller Güter durch das Einheitsintervall beschrieben wird. Das erste Argument der Nutzenfunktion, C_t, ist die kontinuierliche Form des Dixit-Stiglitz Aggregats:

$$C_t := \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \qquad \varepsilon > 1 \tag{9}$$

Dabei ist $C_t(i)$ der Konsum von Gut i in Periode t. Durch Definition des Konsumindex (9) herrscht eine konstante Substitutionselastizität ε zwischen den Gütern.

Gleichung (3) beschreibt die Budgetbeschränkungen der Haushalte. Neben dem Konsum der einzelnen Güter und der Arbeitszeit wählt der Haushalt die Anzahl der Nullkuponanleihen B_t, die ihm nach einer Periode je eine Geldeinheit auszahlen. Der Preis dieser Bonds wird mit Q_t bezeichnet, der Preis des i-ten Gutes mit $P_t(i)$. Weiters beschreibt W_t den Nominallohn und T_t jenes Einkommen der Haushalte, das von der Wahl von N_t und B_t unabhängig ist. Dieses Pauschaleinkommen kann zum Beispiel als Anteil an den Profiten der Firmen interpretiert werden, welche annahmegemäß zur Gänze ausgeschüttet werden. Die Solvenzbedingung (4) bringt zum Ausdruck, dass der Haushalt langfristig keine Schulden machen darf.

Der Haushalt entscheidet also, wieviel er in jeder Periode arbeitet, wieviel von seinem Nettoperiodeneinkommen aus Zinsen sowie Arbeits- und Pauschaleinkommen er in Bonds anlegt (ein negativer Wert von B_t würde einer Kreditaufnahme entsprechen) und wie er das restliche Einkommen auf die einzelnen Konsumgüter verteilt.

Das Optimierungsproblem (1) bis (4) lässt sich in zwei Stufen zerlegen: Zunächst folgt durch Lösen des Ausgabenminimierungsproblems für einen festen Wert von C_t, dass eine optimale Allokation der Konsumausgaben die folgenden Nachfragefunktionen impliziert:

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t \qquad i \in [0,1] \tag{10}$$

Dabei ist der Preisindex P_t definiert als

$$P_t := \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{11}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (10) in Gleichung (3) erhält man die vereinfachte Budgetbeschränkung

$$P_{t+k}C_{t+k} + Q_{t+k}B_{t+k} \leq B_{t+k-1} + W_{t+k}N_{t+k} + T_{t+k}. \tag{12}$$

Löst man nun das Optimierungsproblem (1) bis (4) mit Gleichung (12) anstelle von Gleichung (3), so ergeben sich für den Haushalt die Optimalitätsbedingungen

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t} \tag{13}$$

und

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{14}$$

Bedingung (13) bedeutet, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum dem Reallohn entspricht. Gleichung (14) beschreibt die intertemporale Euler-Gleichung. In weiterer Folge unterstellt das Modell eine additiv separable isoelastische Nutzenfunktion in beiden Argumenten:

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \tag{15}$$

Die Parameter σ und φ sind dabei strikt größer als Null. Bei dieser Spezifikation werden die Optimalitätsbedingungen (13) und (14) zu

$$C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} = \frac{W_t}{P_t} \tag{16}$$

und

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{17}$$

Die Bruttoinflationsrate ist durch

$$\Pi_{t+1} := \frac{P_{t+1}}{P_t}$$

gegeben. Sofern nicht anders definiert, gilt in der gesamten Diplomarbeit die Konvention, dass Kleinbuchstaben die natürlichen Logarithmen der jeweiligen Variablen bezeichnen. Für die Optimalitätsbedingungen (16) und (17) ergeben sich somit die ln-linearen Darstellungen

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t \tag{18}$$

und

$$c_t = E_t\left\{c_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right), \tag{19}$$

wobei

$$\rho := \frac{1-\beta}{\beta}$$

die Zeitpräferenzrate bezeichnet. Außerdem unterstellt Gali (2008) folgende ln-lineare reale Geldnachfragefunktion:[2]

$$m_t - p_t = y_t - \eta i_t \tag{20}$$

Dabei bezeichnet M_t die nominelle Geldmenge und $\eta \geq 0$ die Semi-Zinselastizität der Geldnachfrage.

2.2 Firmen

Nach den Optimalitätsbedingungen der Haushalte werden nun jene der Unternehmen abgeleitet. Alle Firmen haben dieselbe Technologie zur Verfügung. Ihre Produktionsfunktion ist

$$Y_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha} \qquad i \in [0,1]\,. \tag{21}$$

Der Faktor A_t beschreibt das in Periode t vorhandene Technologieniveau. Der einzige Produktionsfaktor, der explizit berücksichtigt wird, ist die Arbeitszeit N_t. In diesem Zusammenhang wird von nicht steigenden Skalenerträgen, also $\alpha \in [0,1)$, ausgegangen. Durch Gleichung (10) ist die Nachfragefunktion für das i-te Gut gegeben.

Es wird nun angenommen, dass jede Firma ihren Preis mit Wahrscheinlichkeit $\theta \in (0,1)$ in einer Periode nicht verändern kann. Aufgrund des Gesetzes der großen Zahl gilt daher, dass in jeder Periode $1-\theta$ Prozent der Firmen ihren

[2] Diese ad-hoc Annahme erscheint auf den ersten Blick willkürlich und nicht mikrofundiert. Walsh (2003) leitet aus der Nutzenfunktion

$$U\left(C_{t+k}, N_{t+k}, M_{t+k}\right) = E_t\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \chi\frac{N_{t+k}^{1+\varphi}}{1+\varphi} + \frac{\gamma}{1-b}\left(\frac{M_{t+k}}{P_{t+k}}\right)^{1-b}\right]\right\}$$

zusätzlich zu den anderen beiden Optimalitätsbedingungen die Bedingung $m_t - p_t = \frac{1}{b}\left(\sigma y_t - i_t\right)$ ab. Durch die Parameterwahl $b = \sigma = \frac{1}{\eta}$ bzw. $\chi = 1$ würde die von Gali unterstellte ad-hoc Bedingung aus dem Nutzenmaximierungsproblem mit Geld in der Nutzenfunktion resultieren. Es ist denkbar, dass Gali auf die Einführung dieser zusätzlichen Elemente verzichten wollte, da sie keine qualitativen Veränderungen in den Ergebnissen liefern, das Problem aber verkomplizieren.

Preis reoptimieren. Die Anzahl der Perioden, die es dauert bis eine Firma den Preis verändern darf, ist eine Zufallsvariable, welche einer negativen Binomialverteilung mit den Parametern 1 und $1-\theta$ unterliegt. Ihr Erwartungswert und somit die durchschnittliche Zeitspanne, in der eine Firma den Preis nicht neu optimiert, beträgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\theta^{j-1}(1-\theta) = \frac{1}{1-\theta}$$

Perioden. Dieses Modell der gestaffelten Preissetzung ist die zeitdiskrete Form des von Calvo (1983) vorgestellten Modells. Ein häufiger Kritikpunkt dieses Ansatzes ist, dass er jeglicher Mikrofundierung entbehrt, d.h. θ nicht endogen bestimmt wird, sondern als Strukturparameter betrachtet wird. Auf diesen Aspekt wird in Abschnitt 5.1 eingegangen.

Sei P_t^* der optimale Preis, den jene Firmen setzen, die in Periode t ihren Preis verändern dürfen. Dann folgt aus der Definition des Preisindex (11), dass das gesamtwirtschaftliche Preisniveau durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$P_t = \left[\theta\left(P_{t-1}\right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta)\left(P_t^*\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Die Bruttoinflationsrate Π_t lässt sich dann durch die Gleichung

$$\Pi_t^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\varepsilon} \tag{22}$$

beschreiben. Die wesentlichen Ergebnisse des Modells gelten approximativ in der Umgebung eines *steady state*, der sich durch ein konstantes Preisniveau, also $\Pi_t = 1$, auszeichnet. Sofern nicht näher spezifiziert, ist mit dem *steady state* in der Folge immer dieser Zustand der Volkswirtschaft gemeint. Aufgrund von Gleichung (22) gilt hier $P_t^* = P_{t-1}$. Auch Firmen, die ihren Preis verändern könnten, lassen ihn in diesem Fall gleich. Aus der ln-linearen Darstellung von Gleichung (22) erhält man in der Nähe des *steady state* folgende Approximation:

$$\pi_t = p_t - p_{t-1} \simeq (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1}) \tag{23}$$

Das Profitmaximierungsproblem des Unternehmens lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t\left\{Q_{t,t+k}\left(P_t^* Y_{t+k|t} - \Psi_{t+k}(Y_{t+k|t})\right)\right\} \tag{24}$$

$$s.t. \qquad Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\varepsilon} C_{t+k} \qquad k = 0,1,2,... \tag{25}$$

Dabei stellt

$$Q_{t,t+k} := \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}} \tag{26}$$

den stochastischen Diskontfaktor für die in Periode $t+k$ erzielten Gewinne dar. $\Psi_t(\cdot)$ ist die Kostenfunktion, $Y_{t+k|t}$ ist die Nachfrage in Periode $t+k$, sofern die Firma den Preis zuletzt in Periode t neu optimiert hat. In Abschnitt 6.2.2 wird gezeigt, dass die notwendige Bedingung erster Ordnung durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t\left\{Q_{t,t+k} Y_{t+k|t}\left(P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right)\right)\right\} = 0 \tag{27}$$

gegeben ist. In der Folge werden mit

$$\psi_{t+k|t} := \Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right)$$

die der Produktion $Y_{t+k|t}$ entsprechenden nominellen Grenzkosten und mit

$$\mathcal{M} := \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

der Bruttoaufschlagsfaktor *(gross markup)* bezeichnet. Die Optimalitätsbedingung erster Ordnung kann also dargestellt werden als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(P_t^* - \mathcal{M}\psi_{t+k|t} \right) \right\} = 0 \tag{28}$$

Da durch die Vernachlässigung der Preisrigiditäten anschaulicher wird, wie sich der Parameter ε auf das Preissetzungsverhalten der Firmen auswirkt, wird in der folgenden Überlegung kurz von flexiblen Preisen (d.h. $\theta = 0$) ausgegangen: In diesem Grenzfall ergibt sich der optimale Preis durch Multiplikation der Grenzkosten mit dem *gross markup*:

$$P_t^* = \mathcal{M}\psi_{t|t} = \frac{1}{1 - (1/\varepsilon)} \psi_{t|t} \tag{29}$$

Da $\varepsilon > 1$ ist, kann der Preis hier nie unter die Grenzkosten fallen. Im Grenzfall der vollkommenen Konkurrenz auf den Gütermärkten entspricht der Preis den Grenzkosten ($\lim_{\varepsilon \to \infty} P_t^* = \psi_{t|t}$). Würde eine Firma einen Preis setzen, der über den Grenzkosten liegt, so würden Haushalte aufgrund der perfekten Substituierbarkeit der Güter bei anderen Anbietern einkaufen. Je kleiner ε ist, desto höher ist der Preisaufschlag der Firmen, da Haushalte die Gütern schlechter substituieren können und Unternehmen dadurch eine größere Marktmacht besitzen.

Definiert man die realen Grenzkosten durch

$$MC_{t+k|t} := \frac{\psi_{t+k|t}}{P_{t+k}}, \tag{30}$$

so ist Gleichung (28) äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} - \mathcal{M} MC_{t+k|t} \Pi_{t-1,t+k} \right) \right\} = 0. \tag{31}$$

Im *steady state* gilt

$$\Pi_{t-1,t+k} := \frac{P_{t+k}}{P_{t-1}} = \frac{P_t^*}{P_{t-1}} = 1,$$

wodurch auch $P_t^* = P_{t+k}$ gelten muss. In diesem Zustand, in dem alle Firmen den gleichen Preis setzen, müssen sie auch gleichviel produzieren, da alle dasselbe Optimierungsproblem lösen und sich ansonsten eine Firma nicht optimal verhalten würde. Somit sind Output und Grenzkosten im *steady state* konstant:

$$\begin{aligned} Y_{t+k|t} &= Y \\ MC_{t+k|t} &= MC \end{aligned}$$

Da auch der Konsum konstant ist, folgt aus Gleichung (26)

$$Q_{t,t+k} = \beta^k.$$

Aus den Gleichungen (29) und (30) folgt außerdem

$$MC = \frac{1}{\mathcal{M}}. \tag{32}$$

In Abschnitt 6.2.2 wird gezeigt, dass eine ln-lineare Approximation von Gleichung (31) im *steady state* durch

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k|t} + (p_{t+k} - p_{t-1})\right\} \tag{33}$$

gegeben ist, wobei

$$\widehat{mc}_{t+k|t} := mc_{t+k|t} - mc$$

die Abweichung der (logarithmierten) realen Grenzkosten vom Wert im steady state in Periode $t+k$ beschreibt. Unter Berücksichtigung der Definition

$$\mu := \ln \mathcal{M}$$

sowie von Gleichung (32), erhält man eine Darstellung von Gleichung (33), bei welcher der optimale Preis positiv vom *markup* sowie von den gegenwärtigen und in der Zukunft erwarteten Preisen und realen Grenzkosten abhängt:

$$p_t^* = \mu + (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{mc_{t+k|t} + p_{t+k}\right\} \tag{34}$$

Die für Periode $t+k$ erwarteten logarithmierten realen Grenzkosten und Preise werden mit dem Faktor $(1-\beta\theta)(\beta\theta)^k$ multipliziert. Diese Eigenschaft der in k geometrisch fallenden Gewichte resultiert einerseits aus der Zeitpräferenz, andererseits aus der mit wachsendem k abnehmenden Wahrscheinlichkeit, dass der Preis, den eine Firma in Periode t setzt, bis zur Periode $t+k$ nicht verändert werden darf.

2.3 Gleichgewicht

In einem gesamtwirtschaftlichen Gleichgewicht sind die Gütermärkte geräumt. Somit gilt für alle $i \in [0,1]$ und für alle t

$$Y_t(i) = C_t(i). \tag{35}$$

Ähnlich dem Konsumgüterindex C_t lässt sich der gesamte Output der Volkswirtschaft definieren als

$$Y_t := \left(\int_0^1 Y_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

woraus

$$Y_t = C_t \qquad t = 0, 1, 2, ...$$

folgt. Wegen Gleichung (19) gilt im Gleichgewicht die Bedingung

$$y_t = E_t\left\{y_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right).$$

Neben den Gütermärkten sind im Gleichgewicht auch die Arbeitsmärkte geräumt, d.h. das aggregierte Arbeitsangebot der Haushalte entspricht der aggregierten Arbeitsnachfrage der Firmen:

$$N_t = \int_0^1 N_t(i)di$$

Aus der Produktionsfunktion (21) folgt

$$N_t = \int_0^1 \left(\frac{Y_t(i)}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} di$$

Aus den Nachfragefunktionen (10) und den Markträumungsbedingungen (35) auf den Gütermärkten folgt

$$\begin{aligned} N_t &= \int_0^1 \left(\frac{\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} di \\ &= \left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \end{aligned}$$

In logarithmierten Größen ausgedrückt, gilt

$$(1-\alpha)\, n_t = y_t - a_t + d_t, \tag{36}$$

wobei

$$d_t := (1-\alpha)\ln \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \tag{37}$$

ein Maß für die Streuung der Preise und somit der Produktionsniveaus der einzelnen Firmen ist. In Abschnitt 6.3.1 wird gezeigt, dass d_t bis zu einer Taylor-Approximation erster Ordnung in der Nähe des *steady state* gleich Null ist. Gleichung (36) ist daher approximativ gegeben durch

$$y_t = a_t + (1-\alpha)\, n_t. \tag{38}$$

Die Grenzproduktivität der Arbeit ist gegeben durch

$$MPN_{t+k|t} := \frac{\partial Y_{t+k|t}}{\partial N_{t+k|t}} = (1-\alpha)\, A_{t+k} N_{t+k|t}^{-\alpha}. \tag{39}$$

In Abschnitt 6.3.2 wird folgender Zusammenhang mit den realen Grenzkosten $MC_{t+k|t}$ abgeleitet:

$$MC_{t+k|t} = \frac{W_{t+k}}{P_{t+k} MPN_{t+k|t}} \tag{40}$$

Durch Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die Gleichungen (39) und (40) erhält man

$$mpn_{t+k|t} = \left(a_{t+k} - \alpha n_{t+k|t}\right) + \ln(1-\alpha) \tag{41}$$

und

$$mc_{t+k|t} = (w_{t+k} - p_{t+k}) - mpn_{t+k|t}. \tag{42}$$

Einsetzen von Gleichung (41) in Gleichung (42) führt zu

$$mc_{t+k|t} = (w_{t+k} - p_{t+k}) - \left(a_{t+k} - \alpha n_{t+k|t}\right) - \ln(1-\alpha) \tag{43}$$

Aufgrund von Gleichung (38) gilt

$$n_{t+k|t} = \frac{y_{t+k|t} - a_{t+k}}{1-\alpha} \tag{44}$$

Einsetzen in Gleichung (43) führt zu

$$\begin{aligned} mc_{t+k|t} &= (w_{t+k} - p_{t+k}) - \left(a_{t+k} - \alpha \frac{y_{t+k|t} - a_{t+k}}{1-\alpha}\right) - \ln(1-\alpha) \\ &= (w_{t+k} - p_{t+k}) - \frac{1}{1-\alpha}\left(a_{t+k} - \alpha y_{t+k|t}\right) - \ln(1-\alpha). \end{aligned}$$

Die durchschnittlichen realen Grenzkosten der Volkswirtschaft sind analog zu Gleichung (42) definiert durch

$$\begin{aligned} mc_{t+k} &= (w_{t+k} - p_{t+k}) - mpn_{t+k} \\ &= (w_{t+k} - p_{t+k}) - \frac{1}{1-\alpha}(a_{t+k} - \alpha y_{t+k}) - \ln(1-\alpha). \end{aligned} \tag{45}$$

Daher kann man die Grenzkosten einer Firma, welche den Preis zuletzt in Periode t optimiert hat, angeben als Summe der Durchschnittsgrenzkosten der Volkswirtschaft und einem Term, der die Abweichung des Produktionsniveaus der Firma von der Durchschnittsproduktion der Volkswirtschaft ausdrückt. Die Gewichtung dieses Terms hängt von der Gestalt der Produktionsfunktion, d.h. dem Parameter α, ab:

$$mc_{t+k|t} = mc_{t+k} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(y_{t+k|t} - y_{t+k}\right) \tag{46}$$

Aus der ln-linearen Darstellung der Nachfragefunktionen (10) folgt

$$c_{t+k}(i) = -\varepsilon\,(p_{t+k}(i) - p_{t+k}) + c_{t+k} \qquad i \in [0,1]\,,\ k = 0,1,2,... \tag{47}$$

Da im Gleichgewicht die Markträumungsbedingung $c_{t+k} = y_{t+k}$ erfüllt ist und für jede Firma i, die zuletzt in Periode t den Preis verändert hat, die Gleichungen

$$p_{t+k}(i) = p_t^*$$

und

$$c_{t+k}(i) = y_{t+k|t}$$

gelten, folgt aus Gleichung (47)

$$y_{t+k|t} - y_{t+k} = -\varepsilon\,(p_t^* - p_{t+k})$$

und somit aus Gleichung (46)

$$mc_{t+k|t} = mc_{t+k} - \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}(p_t^* - p_{t+k}). \tag{48}$$

Bei konstanten Skalenerträgen ($\alpha = 0$) gilt also $mc_{t+k|t} = mc_{t+k}$, da das Grenzprodukt der Arbeit und somit auch die Grenzkosten in diesem Fall für jede Firma, unabhängig von deren Produktionsniveau, gleich sind.

In Abschnitt 6.3.3 wird gezeigt, dass man durch Einsetzen von Gleichung (48) in Gleichung (33) sowie unter Verwendung der Definitionen

$$\widehat{mc}_{t+k} := mc_{t+k} - mc$$

und

$$\Theta := \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon} \leq 1$$

folgende Gleichung erhält:

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{ \Theta\widehat{mc}_{t+k} + p_{t+k} - p_{t-1} \right\} \tag{49}$$

Gleichung (49) lässt sich umformen zu

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\,\Theta \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{ \widehat{mc}_{t+k} \right\} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{ \pi_{t+k} \right\} \tag{50}$$

In Abschnitt 6.3.3 wird gezeigt, dass Gleichung (50) eine Lösung der folgenden Differenzengleichung ist:

$$p_t^* - p_{t-1} = \beta\theta E_t \left\{ p_{t+1}^* - p_t \right\} + (1-\beta\theta)\,\Theta\widehat{mc}_t + \pi_t \tag{51}$$

Durch Kombination der Gleichungen (23) und (51) sowie durch Definition von

$$\lambda := \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta}\Theta > 0, \tag{52}$$

erhält man

$$\pi_t = \beta E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} + \lambda\widehat{mc}_t. \tag{53}$$

Die Vorwärtslösung ist gegeben durch

$$\pi_t = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t \left\{ \widehat{mc}_{t+k} \right\} \tag{54}$$

Eine Erhöhung der aktuellen oder der für eine zukünftige Periode erwarteten durchschnittlichen Grenzkosten wirkt sich ceteris paribus positiv auf die Inflationsrate der aktuellen Periode aus. Dies folgt aus dem Profitmaximierungsproblem der Firmen. Haben sich die (erwarteten) Grenzkosten, seit der letzten Preisanpassung erhöht (dies kann im Fall konstanter Skalenerträgen nur aufgrund einer Verschlechterung der Technologie A geschehen), so ist es für die Firma optimal, weniger zu produzieren und den Preis anzuheben.

In Abschnitt 6.3.3 wird gezeigt, dass

$$mc_t = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha} \right) y_t - \frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t - \ln(1-\alpha) \tag{55}$$

sowie

$$\widehat{mc}_t = mc_t - mc = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha} \right) (y_t - y_t^n) \tag{56}$$

gilt. Dabei beschreibt y_t^n den einem Gleichgewicht bei flexiblen Preisen entsprechenden Output. In der Literatur wird er oft als natürlicher oder potentieller Output bezeichnet. In Abschnitt 6.3.3 wird gezeigt, dass y_t^n durch

$$y_t^n = \psi_{ya}^n a_t + \vartheta_y^n \tag{57}$$

gegeben ist, wobei die Parameter ϑ_y^n und ψ_{ya}^n definiert sind als

$$\vartheta_y^n := -\frac{(1-\alpha)(\mu - \ln(1-\alpha))}{\sigma(1-\alpha) + \varphi + \alpha} > 0$$

und

$$\psi_{ya}^n := \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha) + \varphi + \alpha}.$$

Definiert man außerdem

$$\widetilde{y}_t := y_t - y_t^n \tag{58}$$

als den *output gap* und

$$\kappa := \lambda\left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right),$$

so erhält man aus (53) die *New Keynesian Phillips Curve*:

$$\pi_t = \beta E_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa\widetilde{y}_t \tag{59}$$

Aus der intertemporalen Euler-Gleichung (19) und der Markträumungsbedingung folgt

$$y_t = E_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho). \tag{60}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (58) kann Gleichung (60) auch dargestellt werden als

$$\widetilde{y}_t = E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho - \sigma E_t\left\{\Delta y_{t+1}^n\right\}\right) \tag{61}$$

Der natürliche Zinssatz ist definiert als

$$r_t^n := \rho + \sigma E_t\left\{\Delta y_{t+1}^n\right\}. \tag{62}$$

Einsetzen von Gleichung (57) liefert folgende alternative Darstellung:

$$r_t^n := \rho + \sigma\psi_{ya}^n E_t\{\Delta a_{t+1}\} \tag{63}$$

Das Technologieniveau A ist in diesem Modell die einzige Variable, die einen Einfluss auf den natürlichen Zinssatz hat. Aus den Gleichungen (61) und (62) erhält man

$$\widetilde{y}_t = E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n). \tag{64}$$

Gleichung (64) wird auch als dynamische IS-Gleichung oder DIS bezeichnet. In Abschnitt 6.3.3 wird gezeigt, dass man unter der Definition des Realzinssatzes r_t als

$$r_t := i_t - E_t\{\pi_{t+1}\},$$

und unter der Annahme, dass der Output langfristig gegen sein natürliches Niveau strebt, also

$$\lim_{k \to \infty} E_t \{\widetilde{y}_{t+k}\} = 0$$

gilt, folgende Vorwärtslösung erhält:

$$\widetilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} E_t \left\{ r_{t+k} - r_{t+k}^n \right\} \tag{65}$$

Die Abweichung des aktuellen Outputs von seinem natürlichen Niveau ist also proportional zur Summe der aktuellen und erwarteten Abweichungen der Realzinssätze vom natürlichen Zinssatz.

Sämtliche bisher vorgestellten Konzepte waren politikunabhängig. Die zentralen Gleichungen des oben beschriebenen Modells sind die dynamische IS-Gleichung (64) und die *New Keynesian Phillips Curve* (59), wobei der potentielle Output y_t^n und der natürliche Zinssatz r_t^n exogenen Faktoren unterliegen, welche nicht durch Geldpolitik beeinflusst werden können. Die *New Keynesian Phillips Curve* bestimmt die Inflationsrate gegeben einen Pfad des *output gap*. Die DIS-Gleichung bestimmt den *output gap* gegeben einen Pfad des natürlichen Zinssatzes und des Realzinssatzes. Da Preise in NK-Modellen nicht vollkommen flexibel sind, kann letzterer kurzfristig von der Zentralbank beeinflusst werden. In NK-Modellen hat Geldpolitik daher nicht nur Auswirkungen auf nominelle Größen wie die Inflation, sondern auch auf reale Größen wie den Output. Um die Auswirkungen alternativer geldpolitischer Strategien analysieren zu können, muss das Modell durch die Spezifikation einer Zins- oder Geldmengenregel geschlossen werden. Im folgenden Kapitel werden verschiedene geldpolitische Strategien und deren Konsequenzen auf die verschiedenen makroökonomischen Variablen beschrieben. Die Darstellungen orientieren sich dabei weiterhin an Gali (2008).

3 Auswirkungen der Geldpolitik im Standardmodell

In diesem Kapitel wird zunächst dargestellt, wie sich makroökonomische Variablen nach dem Auftreten von Schocks im Zeitverlauf entwickeln, wenn eine Taylor-Zinsregel verfolgt wird. Anschließend werden die Bedingungen vorgestellt, die erfüllt sein müssen, damit Produktion und Konsum der einzelnen Güter effizient sind und die Gründe erläutert, aus welchen die Volkswirtschaft ohne politische Maßnahmen nicht gegen dieses wohlfahrtsmaximierende Gleichgewicht strebt. Es wird dargestellt durch welche Politik man dieses Gleichgewicht replizieren kann und warum diese Politik in der Praxis nicht umsetzbar ist.

3.1 Dynamische Entwicklung makroökonomischer Variablen nach Schocks unter einer Taylor-Zinsregel

Der Zweck dieses Abschnittes ist es, die dynamische Entwicklung makroökonomischer Variablen nach dem Auftreten exogener Schocks zu veranschaulichen. Dabei wird angenommen, dass die Zentralbank in Periode t den Nominalzins in Abhängigkeit der beobachteten Inflationsrate π_t und des aktuellen *output gap* $\widetilde{y}_t$ setzt:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t \tag{66}$$

Die Koeffizienten ϕ_π und ϕ_y sind nicht-negativ, Der Term v_t bezeichnet den unsystematischen Teil der Zinsregel. In Abschnitt 7.1 wird gezeigt, dass man durch Kombination der Gleichungen (59), (64) und (66) folgendes System von Differenzengleichungen erhält:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} \\ E_t\{\pi_{t+1}\} \end{bmatrix} + \mathbf{B}\left(\widehat{r}_t^n - v_t\right) \tag{67}$$

Dabei ist $\widehat{r}_t^n$ definiert als die Abweichung des natürlichen Zinssatzes von der Zeitpräferenzrate

$$\widehat{r}_t^n := r_t^n - \rho$$

und Ω als

$$\Omega := \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}.$$

Die beiden Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{B}$ sind definiert als

$$\mathbf{A}_1 := \Omega \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right) \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{B} := \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}.$$

Blanchard und Kahn (1980) haben gezeigt, dass die Lösung eines Systems der Gestalt (67) genau dann eindeutig ist, wenn die Anzahl der Eigenwerte von $\mathbf{A}_1$ mit Betrag kleiner als eins gleich der Anzahl der nicht prädeterminierten Variablen ist. Da die beiden Variablen $\widetilde{y}_t$ und π_t in Periode t nicht prädeterminiert sind, müssen also beide Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises liegen, um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten. In Abschnitt 7.2 wird gezeigt, dass dies genau dann erfüllt ist, wenn die Bedingung

$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1-\beta\right)\phi_y > 0$$

gilt. Eine Interpretation dieser Bedingung folgt in Abschnitt 3.4.1.

Als nächstes wird untersucht wie sich die Gleichgewichtspfade bei verschiedenen Schocks verändern, wenn die Zentralbank sich bei der Zinssetzung nach Gleichung (66) verhält.

3.1.1 Auswirkungen eines geldpolitischen Schocks

In der Folge wird davon ausgegangen, dass die exogene Variable ν_t aus Gleichung (66) einem AR(1) Prozess folgt:

$$\nu_t = \rho_v \nu_{t-1} + \varepsilon_t^\nu$$

wobei $\rho \in [0, 1)$ ist. Aufgrund dieser Annahme gilt

$$E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} = \rho_v \widetilde{y}_t \tag{68}$$

und

$$E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} = \rho_v \pi_t. \tag{69}$$

Eine positive (negative) Realisierung von ε_t^ν würde für gegebene Werte von π_t und $\widetilde{y}_t$ zu höheren (niedrigeren) Zinsen als durchschnittlich führen und kann somit als restriktive (expansive) Abweichung vom systematischen Teil der Zinsregel interpretiert werden.

Da ein monetärer Schock keinen Einfluss auf den natürlichen Zinssatz hat, wird in der Folge o.B.d.A. von $\widehat{r}_t^n = 0$ ausgegangen. In Abschnitt 7.3 wird mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten gezeigt, dass die Lösungen des Modells durch

$$\widetilde{y}_t = -\left(1-\beta\rho_v\right)\Lambda_\nu v_t \tag{70}$$

und

$$\pi_t = -\kappa\Lambda_\nu v_t \tag{71}$$

gegeben sind. Dabei ist Λ_ν definiert als

$$\Lambda_\nu := \frac{1}{\left(1-\beta\rho_v\right)\left[\sigma\left(1-\rho_v\right)+\phi_y\right]+\kappa\left(\phi_\pi-\rho_v\right)}.$$

Außerdem wird in Abschnitt 7.2 gezeigt, dass, sofern Bedingung (93) gilt, $\Lambda_\nu > 0$ ist und daher eine eine Erhöhung des Zinssatzes zu einer Verringerung des *output gap* und zu einer geringeren Inflation führt.

Die Abweichung des Realzinssatzes von seinem Wert im *steady state*

$$\widehat{r}_t := r_t - r_t^n$$

wird nun als Funktion von v_t dargestellt. Aus Gleichung (64) folgt

$$\widetilde{y}_t = E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(r_t - r_t^n\right).$$

Dies kann man aufgrund der Gleichungen (68) und (70) umformen zu

$$\sigma\left(1-\beta\rho_{v}\right)\Lambda_{\nu}v_{t}=\sigma\left(1-\beta\rho_{v}\right)\Lambda_{\nu}\rho_{v}v_{t}+\widehat{r}_{t},$$

woraus sich

$$\widehat{r}_{t}=\sigma\left(1-\rho_{v}\right)\left(1-\beta\rho_{v}\right)\Lambda_{\nu}v_{t} \tag{72}$$

ergibt. Bei einem exogenen Anstieg des Nominalzinssatzes steigt $\widehat{r}_t$ also, vorausgesetzt Bedingung (93) ist erfüllt. Im *steady state* ist der Realzins gleich dem Nominalzins (beide sind gleich dem natürlichen Zinssatz r_t^n), wodurch man die Abweichung des Nominalzinssatzes von seinem Wert im *steady state* schreiben kann als

$$\widehat{i}_{t}=i_{t}-r_{t}^{n}=\widehat{r}_{t}+E_{t}\left\{\pi_{t+1}\right\}=\sigma\left(1-\rho_{v}\right)\left(1-\beta\rho_{v}\right)\Lambda_{\nu}v_{t}+E_{t}\left\{\pi_{t+1}\right\}.$$

Unter Verwendung der Gleichungen (69) und (71) erhält man

$$\widehat{i}_{t}=\left[\sigma\left(1-\rho_{v}\right)\left(1-\beta\rho_{v}\right)-\kappa\rho_{\nu}\right]\Lambda_{\nu}v_{t}.$$

Das Vorzeichen von $\widehat{i}_t$ ist nicht eindeutig. Der direkte Effekt eines höheren Wertes von v_t wirkt sich positiv auf i_t aus, andererseits führt ein höheres v_t aber zu niedrigeren Werten von π_t und $\widetilde{y}_t$, was sich negativ auf i_t auswirkt. Für große Werte von ρ_v, also eine hohe Persistenz des geldpolitischen Schocks, fällt der Nominalzinssatz, da dann der indirekte Effekt den direkten überwiegt.

Abschließend wird aus der Geldnachfragefunktion (20) abgeleitet, wie sich das Geldangebot verändern muss, um den gewünschten Effekt auf die Zinsen zu erzielen:

$$\begin{aligned}\frac{dm_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} &= \frac{dp_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}+\frac{dy_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}-\eta\frac{di_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= -\Lambda_{\nu}\left[\left(1-\beta\rho_{v}\right)\left(1+\sigma\eta\left(1-\rho_{v}\right)\right)+\kappa\left(1-\eta\rho_{v}\right)\right]\end{aligned} \tag{73}$$

Eine detaillierte Ableitung dieser Gleichung findet man in Abschnitt 7.5. Die Vorzeichen der ersten beiden Ableitungen, $\frac{dp_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}$ und $\frac{dy_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}$, sind negativ, das Vorzeichen der dritten Ableitung kann positiv oder negativ sein. Daher ist auch das Vorzeichen $\frac{dm_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}$ nicht eindeutig. Aufgrund von Gleichung (73) impliziert $\frac{di_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}>0$ aber in jedem Fall eine Verringerung der Geldmenge.

Gali (2008) hat das Modell mit folgenden Parametern kalibriert, wobei die Periodendauer ein Quartal beträgt.

β	σ	φ	α	ε	η	θ	ϕ_π	ϕ_y	ρ_v
$0,99$	1	1	$1/3$	6	4	$2/3$	$1,5$	$0,125$	$0,5$

Die folgende Grafik (Quelle: Gali (2008), S. 53) zeigt die erwarteten Werte von *output gap*, Inflation, Nominalzinssatz, Realzinssatz, Geldmengenwachstum und dem nichtsystematischen Anteil der Zinsregel, v_t, bei einer Realisierung von $\varepsilon_t^{\nu}=0,25$. Die Inflationsrate und die beiden Zinssätze wurden auf Jahresbasis angegeben, d.h. mit 4 multipliziert.

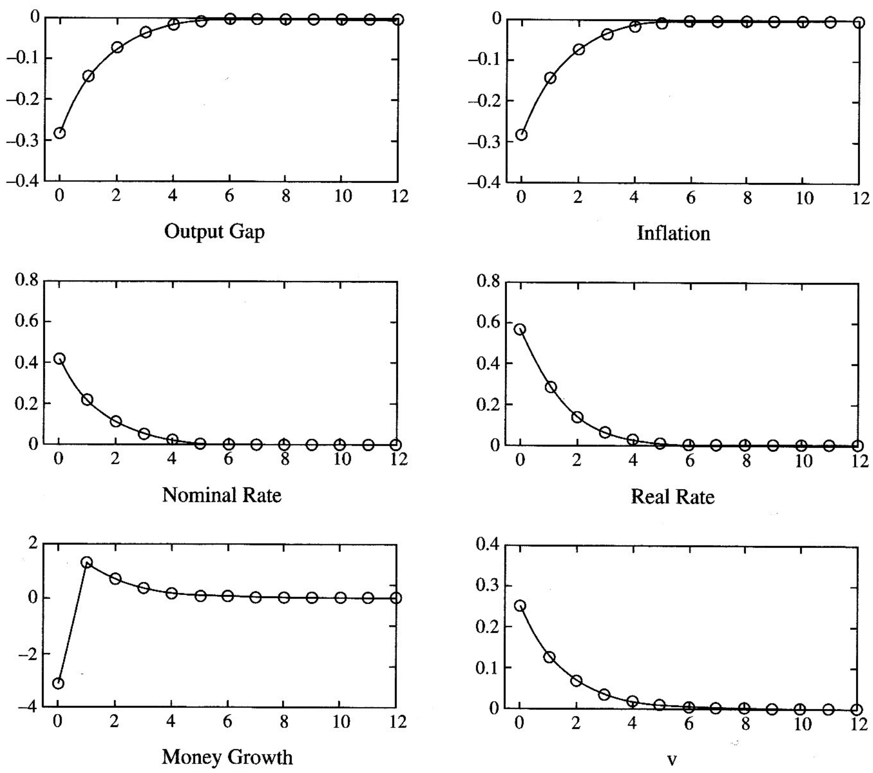

Abbildung 1: Auswirkungen eines geldpolitischen Schocks

Geht man davon aus, dass sich die Volkswirtschaft vor dem Auftreten des Schocks im *steady state* befand, so führt der restriktive geldpolitische Schock zu einem negativen *output gap* und zu einer Deflation. Die Persistenz des Schocks ist gering genug, sodass der Nominalzins steigt. Aufgrund des höheren Nominalzinssatzes und der für die nächste Periode erwarteten negativen Inflationsrate steigt der Realzinssatz stärker als der Nominalzinssatz. Wie oben abgeleitet, führt eine aufgrund des geldpolitischen Schocks hervorgerufene Erhöhung des Nominalzinssatzes zu einer Verringerung der Geldmenge. Das erwartete Geldmengenwachstum für die Perioden nach dem Auftreten des Schocks ist positiv, da bei dieser Kalibrierung der erwartete Anstieg des Outputs und das erwartete Sinken des Nominalzinssatzes den Effekt der erwarteten negativen Inflation überwiegen.

3.1.2 Auswirkungen eines Technologieschocks

Um die Auswirkungen eines Technologieschocks analysieren zu können, muss zuerst ein Prozess unterstellt werden, nach welchem sich das Technologieniveau entwickelt. In diesem Abschnitt wird von einem AR(1) Prozess ausgegangen:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a$$

Dabei ist $\rho_a \in [0,1]$ und $\{\varepsilon_t^a\}$ ist weißes Rauschen. Durch Gleichung (63) wurde der natürliche Zinssatz als Funktion des Technologieniveaus definiert:

$$r_t^n := \rho + \sigma\psi_{ya}^n E_t \{\Delta a_{t+1}\}$$

Die Abweichung des natürlichen Zinssatzes von seinem Wert im steady state lässt sich daher wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned}\widehat{r}_t^n &= r_t^n - \rho \\ &= \sigma\psi_{ya}^n E_t \{\Delta a_{t+1}\} \\ &= \sigma\psi_{ya}^n E_t \left\{\rho_a a_t + \varepsilon_{t+1}^a - a_t\right\} \\ &= -\sigma\psi_{ya}^n (1-\rho_a)\, a_t \end{aligned} \tag{74}$$

Um geldpolitische Schocks auszuschließen, wird der unsystematische Teil ν_t in der Zinsregel (66) gleich Null gesetzt. Analog zu oben erhält man durch Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_t &= (1-\beta\rho_a)\,\Lambda_a \widehat{r}_t^n \\ \pi_t &= \kappa\Lambda_a \widehat{r}_t^n\end{aligned}$$

wobei

$$\Lambda_a := \frac{1}{(1-\beta\rho_a)\left[\sigma(1-\rho_a)+\phi_y\right]+\kappa(\phi_\pi-\rho_a)} > 0$$

ist. Aufgrund von Gleichung (74) erhält man

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_t &= -\sigma\psi_{ya}^n (1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)\,\Lambda_a a_t \\ \pi_t &= -\sigma\psi_{ya}^n (1-\rho_a)\,\kappa\Lambda_a a_t.\end{aligned}$$

Sofern $\rho_a < 1$ ist, wirkt sich ein Technologieschock also negativ auf den *output gap* und die Inflation aus. Bei $\rho_a = 1$ nehmen beide Variablen den Wert Null an. Ein negativer Wert des *output gap* bedeutet, dass die Volkswirtschaft weniger als den potentiellen Output produziert. Je kleiner die Persistenz ρ_a des Schocks ist, desto größer ist diese Differenz zwischen natürlichem und produziertem Output. Aufgrund von Gleichung (57) ist der Gleichgewichtswert der Produktion durch

$$\begin{aligned}y_t &= y_t^n + \widetilde{y}_t \\ &= \psi_{ya}^n a_t + \vartheta_y^n - \sigma\psi_{ya}^n (1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)\,\Lambda_a a_t \\ &= \psi_{ya}^n \left[1-\sigma(1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)\,\Lambda_a\right] a_t + \vartheta_y^n.\end{aligned}$$

gegeben. Der Gleichgewichtswert der Beschäftigung ist wegen Gleichung (38) durch

$$\begin{aligned}n_t &= \frac{y_t - a_t}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\psi_{ya}^n - 1\right) - \sigma\psi_{ya}^n (1-\rho_a)(1-\beta\rho_a)\,\Lambda_a\right] a_t + \frac{\vartheta_y^n}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

gegeben. Das Vorzeichen des Effekts eines Technologieschocks auf Output und Beschäftigung ist nicht eindeutig und hängt von den Parametern ab.

Die folgende Grafik wurde wieder aus Gali (2008) übernommen (S. 55). Die Kalibrierung erfolgte mit denselben Parametern wie zuvor, zusätzlich wurden $\rho_a = 0,9$ und $a_t = 1$ gesetzt.[3]

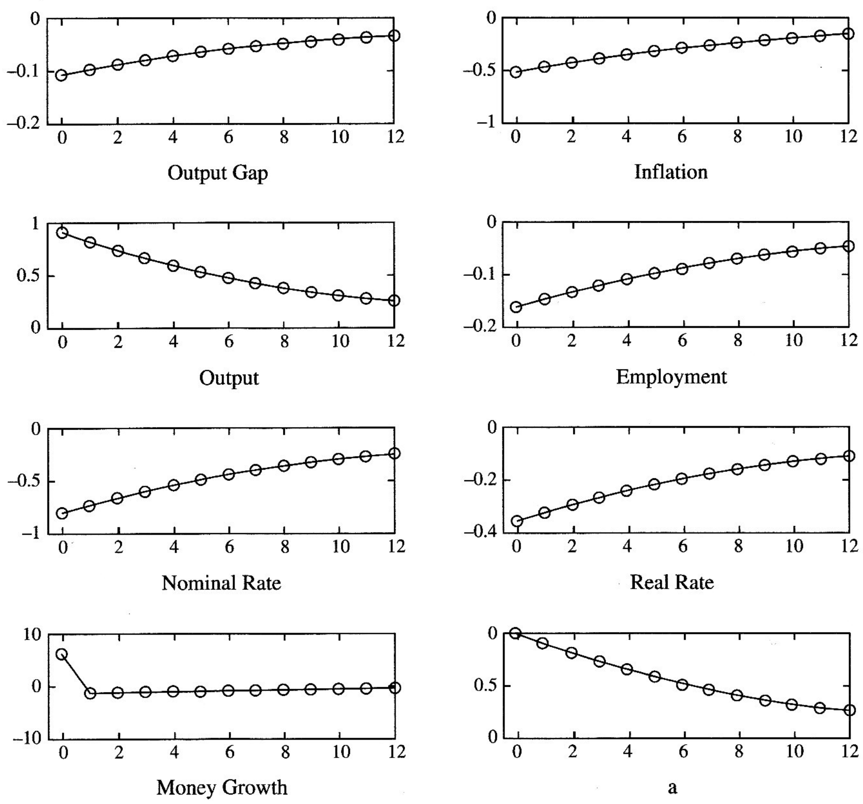

Abbildung 2: Auswirkungen eines Technologieschocks

Setzt man wieder vorraus, dass sich die Volkswirtschaft vor dem Auftreten des Schocks im *steady state* befand, dann führt ein positiver Technologieschock, wie oben beschrieben, zu einem negativen *output gap* und einer Deflation. Die Zentralbank senkt den Nominalzinssatz stark genug, sodass auch der Realzins fällt. Bei der vorliegenden Kalibrierung steigt der Gesamtoutput, während die Beschäftigung sinkt.

3.2 Effiziente Allokation von Arbeitszeit und Konsum

Im Gegensatz zu Abschnitt 2, in welchem Haushalte und Firmen unabhängig von einander die nutzen- bzw. profitmaximierenden Entscheidungen getroffen haben, wird in diesem Abschnitt von einem sozialen Planer ausgegangen, dessen

[3] Bei der Abbildung rechts unten („a") muss die obere Null auf der vertikalen Achse durch Eins ersetzt werden

Ziel es ist, die Gesamtwohlfahrt des repräsentativen Haushalts zu maximieren. In jeder Periode t hat er dabei folgendes Optimierungsproblem zu lösen:

$$\max U(C_t, N_t) \tag{75}$$

$$s.t. \qquad C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{76}$$

$$s.t. \qquad C_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha} \qquad i \in [0,1] \tag{77}$$

$$s.t. \qquad N_t = \int_0^1 N_t(i) di \tag{78}$$

Gleichung (75) bringt zum Ausdruck, dass es das Ziel ist, den Nutzen für den repräsentativen Haushalt in jeder Periode zu maximieren. Gleichung (76) entspricht dem durch Gleichung (9) definierten Konsumindex. Da die Volkswirtschaft im betrachteten Modell geschlossen ist und von Investitionen abstrahiert wird, d.h. Kapital nicht explizit in die Produktionsfunktion eingeht, muss der Konsum in jeder Periode genau der Produktion dieser Periode entsprechen. Dies wird durch Gleichung (77) zum Ausdruck gebracht. Gleichung (78) beschreibt die zweite Ressourcenbeschränkung: Die vom sozialen Planer den Firmen im Durchschnitt zugeteilte Arbeitszeit muss der Arbeitszeit des repräsentativen Haushalts entsprechen. Dieses Problem führt zu den folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$C_t(i) = C_t \qquad i \in [0,1] \tag{79}$$

$$N_t(i) = N_t \qquad i \in [0,1] \tag{80}$$

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = MPN_t \tag{81}$$

Dabei ist

$$MPN_t := (1-\alpha) A_t N_t^{-\alpha} \tag{82}$$

die durchschnittliche Grenzproduktivität der Arbeit. In Abschnitt 7.6 werden diese Optimalitätsbedingungen für den Fall einer endlichen Anzahl von Firmen abgeleitet.

Die Gleichungen (79) und (80) bringen zum Ausdruck, dass im Optimum von jedem Gut gleichviel produziert bzw. konsumiert wird. Die folgende Überlegung könnte für das Verständnis der Lösung dienlich sein: Aufgrund der Definition des Konsumindex (9) herrscht zwischen den Gütern eine konstante Substitutionselastizität ε. Für einen festen Wert von C_t ist es daher optimal, wenn der soziale Planer dem repräsentativen Haushalt gleichviel von jedem Konsumgut zuteilt. Aufgrund der für jedes Gut identischen Produktionsfunktion und der angenommenen nicht steigenden Skalenerträge ist sichergestellt, dass auch die Ressourcenbeschränkungen nichts an dieser optimalen Allokation ändern.

Es wurde beschrieben, warum es aus Sicht des sozialen Planers optimal ist, wenn der repräsentative Haushalt für die Produktion jedes einzelnen Gutes gleichviel Arbeitszeit aufwendet und gleichviel von jedem Gut konsumiert. Wieviel er insgesamt im Optimum arbeitet bzw. konsumiert, wird durch die Optimalitätsbedingung (81) ausgedrückt. Um den Nutzen des repräsentativen Haushaltes zu maximieren, muss die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum der durchschnittlichen Grenzproduktivität der Arbeit entsprechen.

Aufgrund der Gleichungen (79) und (80) ist letztere im Optimum gleichzeitig die individuelle Grenzproduktivität der Arbeit für jedes einzelne Gut. Im wohlfahrtsmaximierenden Optimum gilt Bedingung (81), weil es aus gesamtwirtschaftlicher Sicht optimal ist, wenn der Haushalt seine Arbeitszeit solange ausdehnt, solange der zusätzliche Nutzen, der aus dem Konsum des durch zusätzliche Arbeitszeit produzierten Outputs generiert wird, den Disnutzen dieser zusätzlichen Arbeitszeit überwiegt.

3.3 Gründe der Suboptimalität

Das in Abschnitt 2 beschriebene Modell beinhaltet zwei Charakteristika, durch welche die Allokation bei einer Dezentralisierung der Entscheidungen verzerrt wird. Dies ist einerseits die Annahme der monopolistischen Konkurrenz und andererseits die Annahme der gestaffelten Preissetzung. Diese beiden Beeinträchtigungen der effizienten Allokation werden nun getrennt voneinander beleuchtet.

3.3.1 Die aus der monopolistischen Konkurrenz resultierende Verzerrung

Da die Güter im Modell nicht perfekt substituierbar sind, besitzen Firmen eine gewisse Marktmacht, wodurch sie einen Preis über den Grenzkosten verlangen können. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu Modellen, in welchen von Märkten ausgegangen wird, auf denen vollkommene Konkurrenz herrscht. Um die Wechselwirkungen, welche zwischen der Annahme der monopolistischer Konkurrenz und jener der gestaffelten Preissetzung herrscht, auszuschalten und die Implikationen der monopolistischen Konkurrenz für sich zu betrachten, werden die Preise hier als flexibel angenommen. Für diesen Fall wurde in Abschnitt 2.2 gezeigt, dass die Firma den Preis

$$P_t = \mathcal{M}\psi_t$$

wählt, wobei $\mathcal{M} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$ den Bruttoaufschlagsfaktor und ψ_t die nominellen Grenzkosten bezeichnet. Aufgrund der Annahme der flexiblen Preise und der identischen Profitmaximierungsprobleme der Firmen setzten alle Unternehmen denselben optimalen Preis. Die nominellen Grenzkosten sind durch

$$\psi_t = \frac{W_t}{MPN_t}$$

gegeben. Diesbezüglich sei auf Abschnitt 6.3.2 verwiesen. In Abschnitt 2.1 wurde die Optimalitätsbedingung

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t}$$

vorgestellt. Aus den letzten drei Gleichungen erhält man

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t} = \frac{MPN_t}{\mathcal{M}} < MPN_t \tag{83}$$

Die Bedingung (81) ist also verletzt. Beschäftigung und Output liegen unter ihrem wohlfahrtsmaximierenden Niveau. Der Grund dafür liegt darin, dass die

Grenzproduktivität der Arbeit aufgrund der angenommenen nicht steigenden Skalenerträge fallend (oder zumindest nicht steigend) in N_t ist, während die Grenzrate der Substitution, unter der Voraussetzung, dass Freizeit und Konsum normale Güter sind, steigend in N_t ist.

Diese Ineffizienz kann durch eine Politik eliminiert werden, durch welche der Arbeitsinput subventioniert wird. Die Subventionsrate sei τ, die Finanzierung erfolgt über Pauschalsteuern, welche das Pauschaleinkommen der Haushalte T_t verringern. Dann sind die neuen nominellen Grenzkosten des Unternehmens durch

$$\psi_t = (1-\tau)\frac{W_t}{MPN_t} \tag{84}$$

und der neue optimale Preis durch

$$P_t = \mathcal{M}\frac{(1-\tau)W_t}{MPN_t}$$

gegeben. Gleichung (83) wird zu

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{MPN_t}{\mathcal{M}(1-\tau)}.$$

Das Wohlfahrtsmaximum wird erreicht, wenn

$$\mathcal{M}(1-\tau) = 1 \tag{85}$$

gilt oder äquivalent die Subventionsrate gleich $1/\varepsilon$ gesetzt wird.

3.3.2 Die aus der gestaffelten Preissetzung resultierende Verzerrung

Um auch die Auswirkungen der gestaffelten Preissetzung isoliert von jenen der monopolistischen Konkurrenz betrachten zu können, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass die oben beschriebene Subventionspolitik in Kraft ist. Die Annahme der gestaffelten Preissetzung führt aus zwei Gründen zu einer Verzerrung der Allokation.

Da Firmen ihren Preis nicht laufend anpassen können, ist der durchschnittliche *markup* der Volkswirtschaft $\mathcal{M}_t$, d.h. das Verhältnis zwischen Durchschnittspreis und durchschnittlichen nominellen Grenzkosten, nicht gleich dem konstanten *markup* unter flexiblen Preisen $\mathcal{M}$. Er verändert sich beim Auftreten von Schocks. Aufgrund von Gleichung (84) gilt

$$\mathcal{M}_t = \frac{P_t}{(1-\tau)W_t/MPN_t}.$$

Unter Berücksichtigung der durch Gleichung (85) beschriebenen Subventionspolitik ist dies äquivalent zu

$$\mathcal{M}_t = \frac{P_t\mathcal{M}}{W_t/MPN_t}.$$

Daher gilt

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t} = MPN_t\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_t}, \tag{86}$$

wodurch Bedingung (81) immer dann verletzt ist, wenn der durchschnittliche *markup* der Volkswirtschaft nicht mit jenem, der unter flexiblen Preisen von den Firmen verlangt wird, übereinstimmt. Ist der durchschnittliche *markup* größer (kleiner) als $\mathcal{M}$, dann liegt die Beschäftigung also unter (über) ihrem optimalen Niveau.

Der zweite Grund, aus dem das Modell der gestaffelten Preissetzung zu einer Verzerrung der Allokation führt, ist jener, dass der Preis zweier verschiedener Güter $i, j \in [0, 1]$ im Allgemeinen, nicht übereinstimmt. Aus der optimalen Allokation der Konsumausgaben der Haushalte (siehe Abschnitt 6.1.1) folgt, dass Haushalte unterschiedlich viel von diesen beiden Gütern konsumieren, obwohl es zu keinen Veränderungen in den Präferenzen gekommen ist. $P_t(i) \neq P_t(j)$ führt also dazu, dass sowohl $C_t(i) \neq C_t(j)$, als auch $N_t(i) \neq N_t(j)$ gilt, wodurch die Effizienzbedingungen (79) und (80) verletzt sind. Eine Voraussetzung für das Wohlfahrtsmaximum ist also, dass die *markups* für alle Firmen identisch und über die Zeit konstant gleich dem *markup* unter flexiblen Preisen sind.

Als nächstes wird beschrieben, durch welche Politik die effiziente Allokation repliziert werden kann und welche Probleme bei der Implementierung dieser Politik auftreten.

3.4 Optimale Geldpolitik

In diesem Abschnitt wird weiterhin davon ausgegangen, dass die in Abschnitt 3.3.1 beschrieben Subventionspolitik in Kraft ist. Außerdem wird angenommen, dass zu Beginn alle Preise gleich sind, d.h.

$$P_{-1}(i) = P_{-1} \qquad i \in [0, 1]$$

gilt. Das Wohlfahrtsmaximum kann dann dadurch erreicht werden, indem die Grenzkosten auf einem Niveau stabilisiert werden, bei welchem der *markup* genau seinem Wert unter flexiblen Preisen $\mathcal{M}$ entspricht, gegeben den vorhandenen Preisen. In diesem Fall haben Firmen keinen Anreiz, ihren Preis zu verändern und für alle $t = 0, 1, 2, ...$ gilt $P_t^* = P_{t-1} = P_t$. Dadurch wird die Verzerrung der unterschiedlichen relativen Preise eliminiert und die Produktion entspricht ihrem Niveau unter flexiblen Preisen y_t^n, welches aufgrund der Subventionspolitik effizient ist. Es gilt daher für alle $t = 0, 1, 2, ...$

$$\widetilde{y}_t = 0.$$

Aufgrund der *New Keynesian Phillips Curve* (59) gilt außerdem

$$\pi_t = 0,$$

die Inflationsrate ist also gleich Null. Weiters impliziert die dynamische IS-Gleichung

$$i_t = r_t^n.$$

Der Nominalzinssatz entspricht also dem natürlichen Zinssatz. Diese Gleichungen beschreiben zwei zentrale Eigenschaften der optimalen Politik.

Zum Einen ist die Stabilisierung der Produktionsmenge an sich nicht erstrebenswert, diese sollte hingegen stets gleich dem natürlichen Output y_t^n sein. Dieser Potentialoutput kann aufgrund von Technologieschocks schwanken.

Außerdem sollte beachtet werden, dass Preisstabilität per se kein Ziel ist. Sie tritt aber als Nebenprodukt der wohlfahrtsmaximierenden Politik auf. Die einzige Möglichkeit, die in Abschnitt 3.2 beschriebene effiziente Allokation zu erzielen, ist, dass der aktuelle Preis aller Firmen genau jenem Preis entspricht, den Firmen setzen würden, wenn keine Rigiditäten herrschen würden. Somit haben auch Firmen, welche in der betrachteten Periode ihren Preis reoptimieren könnten, keinen Anreiz diesen Preis zu ändern.

3.4.1 Optimale Zinsregeln

In diesem Abschnitt werden drei Zinsregeln diskutiert, durch welche die effiziente Allokation repliziert wird. Es wird gezeigt, dass bei der ersten Regel multiple Gleichgewichte auftreten. Unter dieser Regel ist $\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ zwar eine Lösung, es können aber auch weitere, suboptimale Gleichgewichtslösungen auftreten. Bei den anderen beiden hingegen ist die effiziente Allokation unter gewissen Vorraussetzungen die einzige Lösung.

Die in Abschnitt 2 abgeleiteten zentralen Gleichungen sind die dynamische IS-Gleichung (64)

$$\widetilde{y}_t = E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - r_t^n\right) \tag{87}$$

und die *New Keynesian Phillips Curve* (59)

$$\pi_t = \beta E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \kappa \widetilde{y}_t. \tag{88}$$

Das Modell wird nun durch drei verschiedene Zinsregeln geschlossen.

Eine exogene Zinsregel:

$$i_t = r_t^n \tag{89}$$

Der Nominalzins wird also immer gleich dem natürlichen Zinssatz gesetzt. Oben wurde gezeigt, dass diese Gleichung im Wohlfahrtsmaximum erfüllt ist. Sie erscheint daher als plausibler Kandidat für eine Zinsregel, welche die effiziente Allokation herrstellen soll. Durch Einsetzen von Gleichung (89) in Gleichung (87) sowie von Gleichung (87) in Gleichung (88) erhält man unter Verwendung der Definition

$$\mathbf{A}_0 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ \kappa & \beta + \frac{\kappa}{\sigma} \end{bmatrix}$$

folgendes lineares Differenzengleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \end{bmatrix} \tag{90}$$

$\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ ist eine Lösung dieses Systems, aber nicht die einzige. Gemäß Blanchard und Kahn (1980) müssten beide Eigenwerte von $\mathbf{A}_0$ innerhalb des Einheitskreises liegen, um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten. In Abschnitt 7.7 wird gezeigt, dass ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}_0$ größer als 1 ist. Es existieren daher multiple Gleichgewichtslösungen, wodurch bei Implementierung der Zinsregel (89) nicht sichergestellt ist, dass das gewünschte Resultat $\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ eintritt.

Aus diesem Grund wird die Zinsregel (89) durch nun durch eine Regel ersetzt, mit der auf die endogenen Variablen π_t und $\widetilde{y}_t$ reagiert wird.

Eine Zinsregel mit endogenen Komponenten:

$$i_t = r_t^n + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t \tag{91}$$

Dabei erfassen die nicht-negativen Koeffizienten ϕ_π und ϕ_y die Stärke, mit der die Zentralbank auf Abweichungen der Inflation bzw. des *output gap* von Null reagiert. Durch die Gleichungen (87), (88) und (91) wird unter Berücksichtigung der Definitionen

$$\Omega := \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}$$

und

$$\mathbf{A}_1 := \Omega \begin{bmatrix} \sigma & 1-\beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right) \end{bmatrix}$$

wird folgendes Differenzengleichungssystem bestimmt:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \end{bmatrix} \tag{92}$$

Die Herleitung dieses Systems erfolgt in Abschnitt 7.8. In Abschnitt 7.2 wird gezeigt, dass hier $\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ die einzige Lösung des Systems ist, wenn die Bedingung

$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + (1-\beta)\,\phi_y > 0 \tag{93}$$

erfüllt ist, da dann beide Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises liegen.

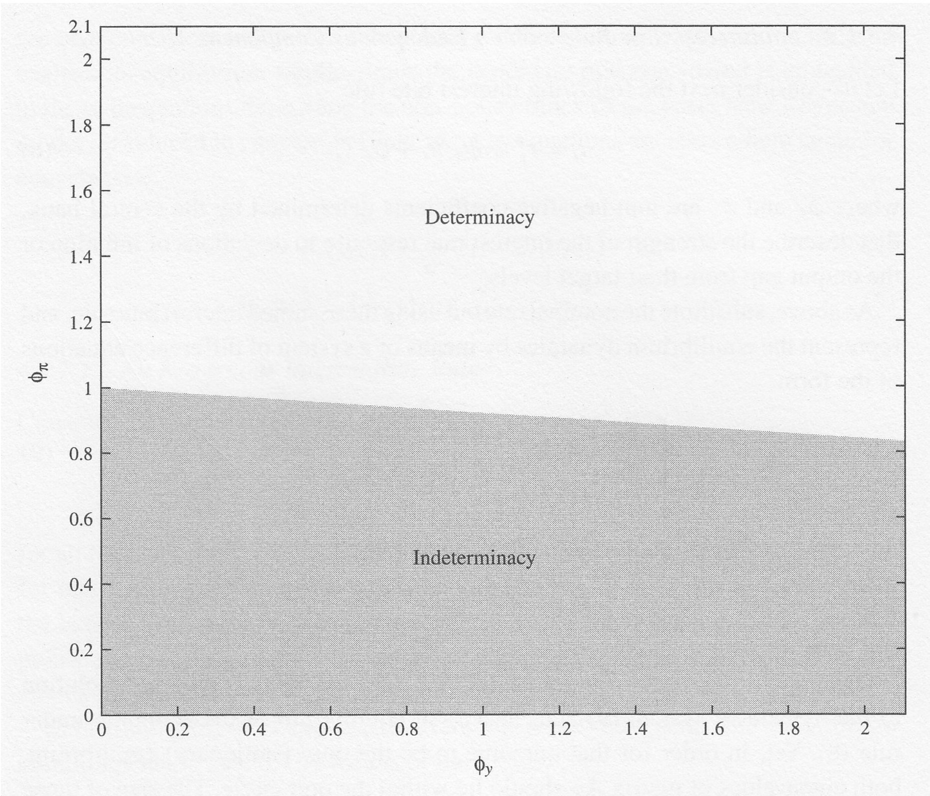

Abbildung 3: Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit der Lösung

Das bedeutet also, dass die Zentralbank bei Abweichungen der Inflation bzw. des *output gap* von Null hinreichend stark reagieren muss, um die Eindeutigkeit der gewünschten Lösung sicherzustellen.

Obige Grafik (Quelle: Gali (2008), S. 78) zeigt jene Kombinationen der Koeffizienten ϕ_π und ϕ_y, für welche die Lösung eindeutig bzw. nicht eindeutig ist. Obwohl bei Erfüllung der Bedingung (93) die Lösung für den Zinssatz bei Implementierung der Regel (91) mit der Zinsregel (89) übereinstimmt, ist die Lösung $\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ unter der Zinsregel (91) eindeutig, nicht aber unter der Zinsregel (89). Im Folgenden soll eine ökonomische Interpretation dieses paradoxen Ergebnisses gegeben werden.

Geht man davon aus, dass eine permanente Erhöhung der Inflationsrate im Ausmaß von $d\pi$ auftritt, dann gilt aufgrund der *New Keynesian Phillips Curve* (88) für die Veränderung des *output gap*

$$d\widetilde{y} = \frac{d\pi\,(1-\beta)}{\kappa}.$$

Eine permanente Erhöhung der Inflationsrate um einen Prozentpunkt führt also zu einer Erhöhung des *output gap* um $(1-\beta)/\kappa$ Prozentpunkte. Daraus folgt durch Einsetzen in die Zinsregel (91)

$$di = \left(\phi_\pi + \frac{(1-\beta)}{\kappa}\phi_y\right) d\pi. \tag{94}$$

Die Eindeutigkeitsbedingung (93) ist äquivalent zu

$$\phi_\pi + \frac{(1-\beta)}{\kappa}\phi_y > 1. \tag{95}$$

Die Gleichungen (94) und (95) stellen das sogenannte Taylor-Prinzip dar: Bei einer permanenten Erhöhung der Inflationsrate um einen Prozentpunkt muss der Nominalzins um mehr als einen Prozentpunkt erhöht werden, sodass der Realzins steigt.

Bullard und Mitra (2002) erklären, warum die Implementierung der Zinsregel (91) bei Erfüllung des Taylor-Prinzips dazu führt, dass private Wirtschaftssubjekte, welche sich anfangs nicht rational verhalten, zum Gleichgewicht unter rationalen Erwartungen geleitet werden und welche Auswirkungen auf Inflation und *output gap* resultieren würden, wenn das Taylor-Prinzip nicht erfüllt wäre.

> A deviation of the private sector expected inflation from the rational expectations (RE) value leads to an increase in the real interest rate when the Taylor principle is satisfied. This reduces the output gap through [(87)] which in turn reduces inflation through [(88)]. Such a policy, therefore, succeeds in guiding initially non-rational private sector expectations towards the RE value. On the other hand, if the policy rule does not satisfy this principle, a deviation of private sector expected inflation from the RE value leads to a decrease in the real interest rate which increases the output gap through [(87)] and increases inflation through [(88)]. Over time this leads to upward revisions of both expected inflation and expected output gap. The interest rate rule is unable to offset this tendency and the economy moves further away from the rational expectations equilibrium. (S. 1116f)

Es wird nun eine letzte Zinsregel vorgestellt, welche die Lösung $\widetilde{y}_t = \pi_t = 0$ liefert.

Eine vorausschauende Zinsregel:

$$i_t = r_t^n + \phi_\pi E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \phi_y E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} \tag{96}$$

Bei dieser Regel reagiert die Zentralbank nicht auf beobachtete Werte von π_t und $\widetilde{y}_t$, sondern auf die für die nächste Periode erwarteten Werte dieser Variablen. Unter dieser Regel kann die Gleichgewichtsdynamik durch das System

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \end{bmatrix}$$

beschrieben werden, wobei die Matrix $\mathbf{A}_2$ durch

$$\mathbf{A}_2 := \begin{bmatrix} 1 - \frac{\phi_y}{\sigma} & -\frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ \kappa\left(1 - \frac{\phi_y}{\sigma}\right) & \beta - \kappa\frac{\phi_\pi}{\sigma} \end{bmatrix}$$

definiert ist. Um die Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen, müssen wieder beide Eigenwerte von $\mathbf{A}_2$ innerhalb des Einheitskreises liegen. In diesem Fall müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1 - \beta\right)\phi_y > 0$$
$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1 + \beta\right)\phi_y < 2\sigma\left(1 + \beta\right)$$

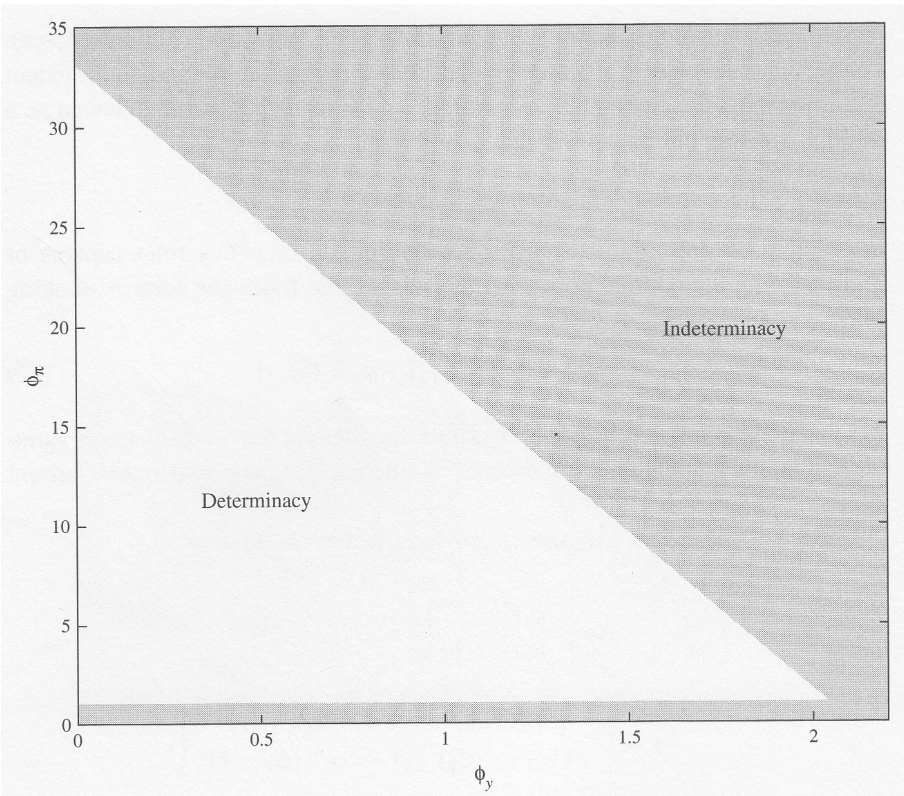

Abbildung 4: Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit der Lösung

In obiger Grafik (Quelle: Gali (2008), S. 80) werden die Bereiche im (ϕ_π, ϕ_y)-Raum dargestellt, für welche die Lösung eindeutig bzw. nicht eindeutig ist.

In diesem Fall darf die Zentralbank also weder zu schwach noch zu stark auf Veränderungen in Inflation und/oder *output gap* reagieren. Jene Bereiche, in welchen eine Überreaktion der Zentralbank zur Unbestimmtheit der Lösung führt, würden sehr viel höhere Werte der Koeffizienten ϕ_π und/oder ϕ_y implizieren als in der Empirie beobachtbar.

3.4.2 Schwierigkeiten in der praktischen Umsetzung der optimalen Geldpolitik

In der Theorie führt die Zinsregel (91) zur effizienten Allokation, in welcher die Bedingungen (79) bis (81) erfüllt sind, in der Praxis lässt sie sich aber nur schwer umsetzen. Die Zentralbank müsste dann nämlich den natürlichen Zinssatz beobachten können und dies würde voraussetzen, dass sie die wahren Parameter des Modells kennt und auftretende Schocks sofort identifizieren kann. Da man den natürlichen Output ebenfalls nicht beobachten kann, kennt die Zentralbank auch den in die Zinsregel einfließenden *output gap* $\widetilde{y}_t$ nicht. Dieses Problem könnte man ausschalten, indem man den zweiten Koeffizienten der Regel ϕ_y gleich Null setzt. Die Eindeutigkeit des Gleichgewichts wäre dann noch immer gewährleistet, wenn der andere Koeffizient die Bedingung

$$\phi_\pi > 1$$

erfüllt, die Anpassung des Nominalzins also stärker als die Inflation ausfällt.

3.5 Die Wohlfahrtsverluste bei der Implementierung einer Taylor-Zinsregel mit beobachtbaren Variablen

Die oben beschriebenen Probleme haben dazu geführt, dass in der Literatur zahlreiche einfachere Regeln diskutiert wurden, welche von der Zentralbank auch umsetzbar sind. Eine wichtige Anforderung an solche Regeln ist, dass das Steuerungsinstrument (d.h. der Zinssatz oder die Geldmenge) ausschließlich eine Funktion von beobachtbaren Variablen ist.

Die Beurteilung der Qualität solcher einfacher Regeln erfolgt über die Messung der Wohlfahrtsverluste, welche im Vergleich zur effizienten Allokation auftreten. Der Periodennutzenverlust des repräsentativen Haushalts ist dabei durch

$$U(C_t, N_t) - U(C^{eff}, N^{eff})$$

gegeben, wobei C^{eff} und N^{eff} die Werte bezeichnen, welche Konsum und Freizeit in der wohlfahrtsmaximierenden Allokation annehmen. Es wird weiterhin angenommen, dass die oben beschriebene Subventionspolitik in Kraft ist, sodass die *steady state*- Werte von Konsum und Arbeit genau den Werten C^{eff} und N^{eff} entsprechen. Gemäß Gali (2008) ist eine Approximation zweiter Ordnung der Wohlfahrtsverslustfunktion im *steady state* durch

$$W = \frac{1}{2} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\left(\sigma + \frac{\varphi + \alpha}{1 - \alpha} \right) \widetilde{y}_t^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \pi_t^2 \right] \tag{97}$$

gegeben. Da die Erwartungswerte für *output gap* und Inflation im *steady state* gleich Null sind, lässt sich die entsprechende Periodenverlustfunktion für eine als Funktion der Varianzen dieser Variablen ausdrücken:

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)Var\left(\widetilde{y}_t\right) + \frac{\varepsilon}{\lambda}Var\left(\pi_t\right)\right]$$

Das relative Gewicht von Schwankungen im *output gap* ist steigend in den Parametern σ, φ und α. Der Grund dafür liegt darin, dass größere Werte dieser Parameter bei einer gegebenen Abweichung des tatsächlichen Outputs vom Potentialoutput, den Unterschied zwischen Grenzrate der Substitution und Grenzproduktivität der Arbeit vergrößern. Dieser Unterschied ist ein Maß für die Ineffizienz der Volkswirtschaft. Aus den folgenden Gründen ist das Gewicht von Schwankungen der Inflation steigend in den Parametern ε und θ: Bei einer gegebenen Streuung der Preise führt eine höhere Substitutionselastizität ε dazu, dass der Konsum zwischen den einzelnen Güter stärker variiert, wodurch die optimale Allokation, nach welcher der Konsum aller Güter gleich ist, stärker beeinträchtigt wird. Ein höherer Wert von θ (bzw. ein geringerer Wert von λ) führt bei einer gegebenen Abweichung der Inflation von ihrem Wert im *steady state* dazu, dass die Preise und dementsprechend der Konsum der einzelnen Güter stärker streuen, wodurch die tatsächliche Allokation ebenfalls stärker verzerrt wird.

Im Folgenden werden die durch die Funktion (97) gegebenen Wohlfahrtsverluste bei Implementierung der Taylor-Zinsregel

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widehat{y}_t \tag{98}$$

für verschiedene (nicht negative) Werte der Koeffizienten ϕ_π und ϕ_y dargestellt. Dabei ist

$$\widehat{y}_t = y_t - y$$

und y bezeichnet den Trendoutput. Die Zinsregel (98) lässt sich auch analog zu Regel (66) aus Abschnitt 3.1

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t$$

schreiben, wobei der unsystematische Teil der Zinsregel hier durch $v_t := \phi_y \widehat{y}_t^n = \phi_y \left(y_t^n - y\right)$ gegeben ist. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.1 entspricht v_t nun nicht mehr einem exogenen geldpolitischen Schock, sondern einem endogenen Schock, welcher proportional zur Abweichung des natürlichen Outputs vom Trendoutput ist und dessen Varianz steigend in ϕ_y ist. Die Gleichgewichtsdynamik wird durch das System

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \end{bmatrix} + \mathbf{B}\left(\widehat{r}_t^n - v_t\right)$$

beschrieben, wobei die Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{B}$ wie in Abschnitt 3.1 definiert sind. In der folgenden Tabelle (Quelle: Gali (2008), S. 83) werden die Standardabweichungen von *output gap* und Inflation sowie die daraus resultierenden Wohlfahrtsverluste angegeben. Letztere sind als prozentuelle Abweichungen des Konsums von seinem Wert im *steady state* angegeben.

ϕ_π	$1,5$	$1,5$	5	$1,5$
ϕ_y	$0,125$	0	0	1
$\sqrt{Var\left(\widetilde{y}_t\right)}$	$0,55$	$0,28$	$0,04$	$1,40$
$\sqrt{Var\left(\pi_t\right)}$	$2,60$	$1,33$	$0,21$	$6,55$
Wohlfahrtsverlust	$0,30$	$0,08$	$0,002$	$1,92$

Die in der linken Spalte dargestellte Zinsregel ist laut Gali (2008) eine gute Approximation für die Zinspolitik der *Federal Reserve* während der Greenspan Ära. In der zweiten und dritten Spalte wird lediglich auf die Inflation, nicht aber auf Abweichungen des Outputs von seinem Trendwert reagiert. Diese ausschließliche Verfolgung des Inflationsziels liefert unter den getroffenen Annahmen die besten Ergebnisse. Je aggressiver dabei das Inflationsziel verfolgt wird, desto geringer die Wohlfahrtsverluste. Wird dem Ziel der Stabilisierung des Outputs wie bei der in der vierten Spalte dargestellten Zinsregel eine hohe Bedeutung zugemessen, so führt dies relativ zu den anderen Regeln zu größeren Wohlfahrtsverlusten.

Eine Stabilisierung des Outputs führt bei einer Veränderung des natürlichen Outputs zu einer betragsmäßigen Erhöhung des *output gap*. Ein historisches Beispiel dafür, warum die Verfolgung der Stabilisierung des Outputs um seinen Trend zu Wohlfahrtsverlusten führen kann, sind die siebziger Jahre. Der durch die beiden Ölpreisschocks verringerte Trendoutput wurde zum damaligen Zeitpunkt falsch eingeschätzt, wodurch man von einer Unterauslastung der Volkswirtschaft ausging. Die daraus resultierenden zu lockere Geldpolitik hat zu hohen Inflationsraten geführt (siehe „The Economist" vom 26. September 2002). Erst in den achziger Jahren wurde in den USA unter Notenbankchef Volcker bzw. in Großbritannien unter der Regierung Thatcher eine restriktive Geldpolitik durchgeführt, was eine Senkung der Inflation zur Folge hatte.

4 Erweiterung des Standardmodells um monopolistische Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt und Lohnrigiditäten

In den vorhergehenden Abschnitten herrschte auf dem Arbeitsmarkt vollkommene Konkurrenz und die Löhne waren vollkommen flexibel. Erceg, Henderson und Levin (2000) betonen, dass es keine schlüssige Rechtfertigung gibt, warum in den Modellen Preise rigide, Löhne aber flexibel sind:

> ...[W]e believe that both wages and prices are sticky in actual economies, and that the relative price of labor plays an important role in generating a non-trivial policy tradeoff. Our position is consistent with the long history of analyses (dating back at least to Keynes (1935(sic!)) in which nominal wage inertia plays a significant role in generating aggregate fluctuations. In contrast, recent contributions have emphasized sticky prices rather then sticky wages, at least in part because state-contingent employment contracts can, in principle, prevent any missallocation of labour due to nominal wage contracts [...]. However, one can also imagine state-contingent output contracts which ensure that sticky prices have no allocative effects; such state-contingent contracts are neither more or less plausible than the analogous employment contracts. Hence, it seems reasonable to assume that both wage and price contracts have significant allocative effects, at least until further guidance is provided by empirical research. (S. 306)

In diesem Abschnitt werden Lohnrigiditäten und monopolistische Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt eingeführt. Auch die Menge der Haushalte wird nun durch das Intervall $[0, 1]$ beschrieben. Jeder Haushalt ist auf einen Arbeitstyp spezialisiert und Firmen können diese verschiedenen Arbeitstypen nicht perfekt substituieren. Dadurch besitzt jeder Haushalt $j \in [0, 1]$ eine gewisse Marktmacht. Die Löhne werden nun von den einzelnen Haushalten gesetzt, wobei analog zur Preissetzung der Firmen eine gestaffelte Lohnsetzung gemäß Calvo (1983) angenommen wird. Äquivalent dazu kann man auch annehmen, dass durch das Intervall $[0, 1]$ ein Kontinuum von Gewerkschaften beschrieben wird, wobei jede Gewerkschaft eine Menge von Haushalten bzw. Arbeitern repräsentiert, welche im gleichen Arbeitstyp spezialisiert ist, und diese Gewerkschaften im Namen ihrer Mitglieder die Löhne setzen.

Eine zentrale vereinfachende Annahme, welche diesem Modell zugrunde liegt, ist die der *complete markets*. Diese wird in Abschnitt 4.2 näher ausgeführt.

4.1 Firmen

Zunächst wird das Profitmaximierungsproblem der Firmen vorgestellt. Die oben beschriebenen Annahmen implizieren, dass in der Produktionsfunktion (21) der Firma $i \in [0, 1]$

$$Y_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha}$$

die Variable $N_t(i)$ nun als Index von Arbeitsleistungen zu verstehen ist. Dieser ist ähnlich wie der Konsumindex definiert:

$$N_t(i) := \left(\int_0^1 N_t(i,j)^{1-\frac{1}{\varepsilon_w}} dj \right)^{\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}} \tag{99}$$

Dabei bezeichnet $N_t(i,j)$ die Arbeitszeit, welche der Haushalt j bei Firma i beschäftigt ist. Die einzelnen Arbeitstypen sind keine perfekten Substitute, die Substitutionselastizität ist durch ε_w gegeben. Der Lohn, den Haushalt j bzw. dessen Gewerkschaft verlangt, wird mit $W_t(j)$ bezeichnet. Analog zum Ausgabenminimierungsproblem der Haushalte, das in Abschnitt 6.1.1 diskutiert wird, folgt aus dem Kostenminimierungsproblem der Firmen, dass die Nachfrage der Firma i nach Arbeitstyp j durch

$$N_t(i,j) = \left(\frac{W_t(j)}{W_t} \right)^{-\varepsilon_w} N_t(i) \tag{100}$$

gegeben ist, wobei der Lohnindex W_t analog zum Preisindex (11) definiert ist:

$$W_t := \left(\int_0^1 W_t(j)^{1-\varepsilon_w} dj \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon_w}} \tag{101}$$

Unter Verwendung der beiden Indices W_t und $N_t(i)$ können die Lohnkosten durch

$$\int_0^1 W_t(j) N_t(i,j) dj = W_t N_t(i)$$

beschrieben werden.

Die optimale Allokation der Ausgaben für die einzelnen Arbeitskräfte führt also dazu, dass das Profitmaximierungsproblem der Firmen, welche den Preis in Periode t neu festlegen können, jenem aus Abschnitt 2.2 entspricht. Aus Gründen der Übersicht wird es hier noch einmal dargestellt:

$$\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_p^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left(P_t^* Y_{t+k|t} - \Psi_{t+k}(Y_{t+k|t}) \right) \right\}$$

$$s.t. \qquad Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon_p} C_{t+k} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Dabei bezeichnet

$$Q_{t,t+k} := \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}}$$

wieder den stochastischen Diskontfaktor. Den Parametern θ und ε wurde der Index p hinzugefügt. Die Variablen und Funktionen sind gleich definiert wie in Abschnitt 2.2. In Abschnitt 2.3 wurde für die Inflation die Gleichung (53)

$$\pi_t = \beta E_t \{\pi_{t+1}\} + \lambda_p \widehat{mc}_t, \tag{102}$$

abgeleitet, wobei λ_p und $\widehat{mc}_t$ durch

$$\lambda_p := \frac{(1-\theta_p)(1-\beta\theta_p)}{\theta_p} \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon_p}$$

und

$$\widehat{mc}_t := mc_t - mc$$

definiert waren. Unter Verwendung der logarithmierten *markups* anstelle der Grenzkosten

$$\begin{aligned} \mu_t^p &= -mc_t \\ \mu^p &= -mc \end{aligned}$$

sowie der Definition der Abweichung des durchschnittlichen *markup* vom Wert im *steady state*,

$$\widehat{\mu}_t^p := \mu_t^p - \mu^p, \tag{103}$$

wird Gleichung (102) zu

$$\pi_t^p = \beta E_t \left\{\pi_{t+1}^p\right\} - \lambda_p \widehat{\mu}_t^p. \tag{104}$$

Ist der durchschnittliche *markup* also unter seinem Wert im *steady state*, so setzen jene Firmen, welche den Preis in Periode t verändern können, diesen im Durchschnitt höher als zuvor und generieren dadurch eine positive Inflationsrate.

4.2 Haushalte

Das in Abschnitt 2.2 vorgestellte (und in Abschnitt 5.1 kritisierte) Calvo Pricing gilt nun auch für die Löhne der Haushalte. In jeder Periode kann ein Haushalt mit Wahrscheinlichkeit $1 - \theta_w$ seinen Lohn verändern. Haushalte, welche den Lohn in Periode t neu setzen, lösen folgendes Optimierungsproblem:

$$\max_{W_t^*} E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k \, U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) \right\} \tag{105}$$

$$s.t. \qquad N_{t+k|t} = \left(\frac{W_t^*}{W_{t+k}}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k}, \tag{106}$$

$$P_{t+k}C_{t+k|t} + E_{t+k}\left\{Q_{t+k,t+k+1}D_{t+k+1|t}\right\} \leq D_{t+k|t} + W_t^* N_{t+k|t} - T_{t+k}, \tag{107}$$

wobei die Nebenbedingungen (106) und (107) für alle $k = 0, 1, 2, ...$ erfüllt sein müssen. Die Variablen $C_{t+k|t}$ und $N_{t+k|t}$ bezeichnen den Konsum bzw. das Arbeitsangebot in Periode $t + k$ von einem Haushalt, der zuletzt in Periode t seinen Lohn reoptimiert hat. Die aggregierte Beschäftigung in Periode $t + k$ ist durch

$$N_{t+k} := \int_0^1 N_{t+k}(i)di$$

definiert. In der Budgetbeschränkung (107) wurden die Nullkuponanleihen B_{t+k-1} (siehe Gleichung (12) aus Abschnitt 2) durch das Wertpapierportfolio $D_{t+k|t}$ ersetzt. Dieses liefert nach einer Periode nicht mehr eine fixe Auszahlung, sondern eine stochastische von $D_{t+k+1|t}$ Geldeinheiten. Der Term $E_{t+k}\left\{Q_{t+k,t+k+1}D_{t+k+1|t}\right\}$ ist Marktwert des Portfolios, das in Periode $t+k$ gekauft wird. Würde es sich wie in Kapitel 2 um Nullkuponanleihen handeln, welche nach einer Periode eine Geldeinheit auszahlen, dann würde sich aufgrund des unterschiedlichen Arbeitseinkommens der einzelnen Haushalte die rechte Seite der Budgetbeschränkung (107), also die in Periode $t+k$ zur Verfügung stehenden Ressourcen, von Haushalt zu Haushalt unterscheiden. Demnach könnten Haushalte mit einem höheren Einkommen mehr konsumieren als Haushalte mit einem geringeren Einkommen. Um diesem Umstand vorzubeugen, wird die in der Einleitung angesprochene Annahme der vollständigen Wertpapiermärkte eingeführt. Die Wertpapierportfolios der einzelnen Haushalte sind so ausgestaltet, dass ihr Marktwert die Unterschiede in den Arbeitseinkommen genau aufwiegt, d.h. für alle $l \in \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., k-2, k-1\}$ gilt

$$D_{t+k|t+l} + W_{t+l}^* N_{t+k|t+l} = D_{t+k|t} + W_t^* N_{t+k|t}.$$

Für dieses „*risk sharing*" gibt es eine alternative Modellierung, bei welcher angenommen wird, dass jeder Haushalt alle verschiedenen Arbeitstypen anbietet und in jeder Periode für $1-\theta_w$ Prozent dieser Arbeitstypen den Lohn reoptimiert. Die Annahme der *complete markets* würde unter dieser Modellierung nicht benötigt werden.

In Abschnitt 8.1 wird gezeigt, dass die Optimalitätsbedingung erster Ordnung des Optimierungsproblems (105) bis (107) durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t \left\{ N_{t+k|t} \left[\frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \frac{W_t^*}{P_{t+k}} + \frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}} \mathcal{M}_w \right] \right\} = 0 \tag{108}$$

gegeben ist, wobei

$$\mathcal{M}_w := \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}$$

den Bruttoaufschlagsfaktor für den Lohn bezeichnet. Bezeichnet man die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum mit

$$MRS_{t+k|t} := -\frac{\frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}}}{\frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}}},$$

so kann man Gleichung (108) auch in der folgenden Form darstellen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t \left\{ N_{t+k|t} \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \left[\frac{W_t^*}{P_{t+k}} - \mathcal{M}_w MRS_{t+k|t} \right] \right\} = 0 \tag{109}$$

Geht man von vollständig flexiblen Löhnen, d.h. $\theta_w = 0$, aus, erhält man die Optimalitätsbedingung

$$\frac{W_t^*}{P_t} = \frac{W_t}{P_t} = \mathcal{M}_w MRS_{t|t} \tag{110}$$

für alle t. Im Fall flexibler Löhne entspricht im Optimum der Reallohn der Grenzrate der Substitution multipliziert mit dem Bruttoaufschlagsfaktor für den Lohn. Eine ln-lineare Approximation von Gleichung (109) im *steady state* ist gegeben durch

$$w_t^* = \mu^w + (1-\beta\theta_w) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t \left\{ mrs_{t+k|t} + p_{t+k} \right\} \tag{111}$$

mit $\mu^w := \ln \mathcal{M}_w$. Diese Darstellung wird in Abschnitt 8.1 hergeleitet. Der optimale Lohn hängt also positiv von den erwarteten zukünftigen Preisen ab, da Haushalte an der Kaufkraft ihres Nominallohns interessiert sind. Eine höhere Grenzrate der Substitution impliziert ein größeres Verhältnis von Disnutzen aus Arbeit und Nutzen aus Konsum. Bei gegebenen erwarteten zukünftigen Preisen gilt daher auch, dass höhere erwartete Werte von $mrs_{t+k|t}$ die Bereitschaft der Haushalte, zu Gunsten von mehr Freizeit auf Konsum zu verzichten, erhöht und dementsprechend auch den optimalen Lohn erhöht. Aufgrund der Annahme der *complete markets* gilt

$$C_{t+k|t} = C_{t+k} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Wie in den Abschnitten zuvor wird auch hier von einer additiv separablen isoelastischen Nutzenfunktion

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

ausgegangen. Dadurch ist die logarithmierte Grenzrate der Substitution für einen Hauhalt, der zuletzt in Periode t seinen Lohn verändert hat durch

$$mrs_{t+k|t} = \sigma c_{t+k} + \varphi n_{t+k|t}$$

gegeben. Definiert man die durchschnittliche Grenzrate der Substitution als

$$mrs_{t+k} := \sigma c_{t+k} + \varphi n_{t+k}, \tag{112}$$

so kann der Zusammenhang zwischen der individuellen und der durchschnittlichen Grenzrate der Substitution folgendermaßen dargestellt werden:

$$mrs_{t+k|t} = mrs_{t+k} + \varphi \left(n_{t+k|t} - n_{t+k} \right)$$

Wegen Gleichung (106) gilt außerdem

$$mrs_{t+k|t} = mrs_{t+k} + \varepsilon_w \varphi \left(w_t^* - w_{t+k} \right),$$

woraus

$$w_t^* = \frac{1-\beta\theta_w}{1+\varepsilon_w\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t \left\{ \mu^w + mrs_{t+k} + \varepsilon_w \varphi w_{t+k} + p_{t+k} \right\} \tag{113}$$

folgt. Definiert man den logarithmierten durchschnittlichen (Lohn-) *markup* der Volkswirtschaft in Periode t als

$$\mu_t^w := (w_t - p_t) - mrs_t$$

sowie dessen Abweichung von seinem Wert im *steady state* als

$$\widehat{\mu}_t^w := \mu_t^w - \mu^w, \tag{114}$$

so erhält man durch Einsetzen in Gleichung (113)

$$w_t^* = \frac{1-\beta\theta_w}{1+\varepsilon_w\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t \left\{ (1+\varepsilon_w\varphi) w_{t+k} - \widehat{\mu}_{t+k}^w \right\}. \tag{115}$$

Gleichung (115) ist eine Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$w_t^* = \beta\theta_w E_t\left\{w_{t+1}^*\right\} + (1-\beta\theta_w)\left(w_t - \frac{1}{1+\varepsilon_w\varphi}\widehat{\mu}_t^w\right) \tag{116}$$

Die Entwicklung des aggregierten Lohnniveaus funktioniert analog zu jener des aggregierten Preisniveaus und wird daher nicht erneut vorgestellt. Eine ln-lineare Approximation der Preisinflation ist durch Gleichung (23) gegeben. Aus Symmetriegründen gilt daher für die Lohninflation

$$\pi_t^w := w_t - w_{t-1} \simeq (1-\theta_w)(w_t^* - w_{t-1}). \tag{117}$$

Kombiniert man die Gleichungen (116) und (117), so erhält man

$$\pi_t^w = \beta E_t\left\{\pi_{t+1}^w\right\} - \lambda_w\widehat{\mu}_t^w, \tag{118}$$

wobei λ_w wie folgt definiert ist:

$$\lambda_w := \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{\theta_w(1+\varepsilon_w\varphi)}$$

Die ökonomische Interpretation von Gleichung (118) ist analog zu der von Gleichung (104): Ist der durchschnittliche *markup* unter seinem Wert im *steady state*, dann heben jene Haushalte, welche den Lohn verändern können, diesen im Durchschnitt an und generieren dadurch eine positive Lohninflationsrate.

Im Vergleich zu dem in Abschnitt 2 diskutierten Modell mit flexiblen Löhnen und vollständiger Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt wird die Optimalitätsbedingung (18)

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t$$

nun durch Gleichung (118) ersetzt. Da sich die Löhne nicht sofort anpassen können, entspricht der Reallohn im Allgemeinen nicht der Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum. Die intertemporale Euler-Gleichung (19) hingegen bleibt unverändert:

$$c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}^p\right\} - \rho\right) \tag{119}$$

4.3 Gleichgewicht

In diesem Abschnitt entspricht das natürliche Produktionsniveau y_t^n jenem Output, der unter flexiblen Preisen und flexiblen Löhnen produziert wird. Außerdem wird der reale *wage gap* definiert als

$$\widetilde{\omega}_t := \omega_t - \omega_t^n, \tag{120}$$

wobei

$$\omega_t := w_t - p_t \tag{121}$$

den Reallohn bezeichnet und ω_t^n den natürlichen Reallohn, also jenen Lohn, welcher herrschen würde, wenn es keine Rigiditäten gäbe. Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, würden im Fall flexibler Preise und Löhne alle Firmen ihren Preis zum Zeitpunkt t nach folgender Gleichung setzen:

$$P_t = \mathcal{M}_p\frac{W_t}{MPN_t}$$

Ausgedrückt in logarithmierten Größen lässt sich diese Gleichung umformen zu

$$\begin{aligned} \omega_t^n &= mpn_t - \mu^p \\ &= \ln(1-\alpha) + (y_t^n - n_t^n) - \mu^p. \end{aligned} \tag{122}$$

In Abschnitt 8.2 wird gezeigt, dass die Abweichungen der *markups* von ihren Werten im *steady state* durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\widehat{\mu}_t^p = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\widetilde{y}_t - \widetilde{\omega}_t \tag{123}$$

$$\widehat{\mu}_t^w = \widetilde{\omega}_t - \left(\sigma + \frac{\varphi}{1-\alpha}\right)\widetilde{y}_t \tag{124}$$

Einsetzen in die Gleichungen (104) bzw. (118) liefert

$$\pi_t^p = \beta E_t\left\{\pi_{t+1}^p\right\} + \kappa_p\widetilde{y}_t + \lambda_p\widetilde{\omega}_t \tag{125}$$

bzw.

$$\pi_t^w = \beta E_t\left\{\pi_{t+1}^w\right\} + \kappa_w\widetilde{y}_t - \lambda_w\widetilde{\omega}_t, \tag{126}$$

wobei κ_p und κ_w als

$$\kappa_p := \frac{\alpha\lambda_p}{1-\alpha}$$

und

$$\kappa_w := \lambda_w\left(\sigma + \frac{\varphi}{1-\alpha}\right)$$

definiert sind.

Aufgrund der Gleichungen (120) und (121) gilt außerdem folgende Differenzengleichung:

$$\widetilde{\omega}_t = \widetilde{\omega}_{t-1} + \pi_t^w - \pi_t^p - \Delta\omega_t^n \tag{127}$$

Aus Gleichung (119) und der Markträumungsbedingung auf dem Gütermarkt erhält man die dynamische IS-Gleichung

$$y_t = E_t\left\{y_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}^p\right\} - \rho\right), \tag{128}$$

welche der Gleichung (64) aus Abschnitt 2.3 entspricht.

4.4 Geldpolitik

4.4.1 Dynamische Entwicklung makroökonomischer Variablen nach einem geldpolitischen Schock

Es wird nun eine Zinsregel definiert, welche auch die Lohninflation miteinbezieht, und die aus einem exogenen Schock resultierenden Zeitpfade von ausgewählten makroökonomischen Variablen werden für verschiedene Parameterkombinationen von θ_p und θ_w dargestellt.

Die Zinsregel entspricht der Regel (66) aus Abschnitt 3.1 mit einem zusätzlichen Term, welcher der Lohninflation Rechnung trägt:

$$i_t = \rho + \phi_p\pi_t^p + \phi_w\pi_t^w + \phi_y\widetilde{y}_t + v_t \tag{129}$$

Setzt man Gleichung (129) in die dynamische IS-Gleichung (128) ein, so erhält man aus dieser und den Gleichungen (125), (126) und (127) folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}_{w,0} \begin{bmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t^p \\ \pi_t^w \\ \widetilde{\omega}_{t-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{w,1} \begin{bmatrix} E_t\left\{y_{t+1}\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}^p\right\} \\ E_t\left\{\pi_{t+1}^w\right\} \\ \widetilde{\omega}_t \end{bmatrix} + \mathbf{B}_w \begin{bmatrix} \widehat{r}_t^n - v_t \\ \Delta\omega_t^n \end{bmatrix} \tag{130}$$

Die Matrizen $\mathbf{A}_{w,0}$, $\mathbf{A}_{w,1}$ und $\mathbf{B}_w$ sind dabei wie folgt definiert:

$$\mathbf{A}_{w,0} := \begin{bmatrix} \sigma + \phi_y & \phi_p & \phi_w & 0 \\ -\kappa_p & 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{w,1} := \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \lambda_p \\ 0 & 0 & \beta & -\lambda_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_w := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

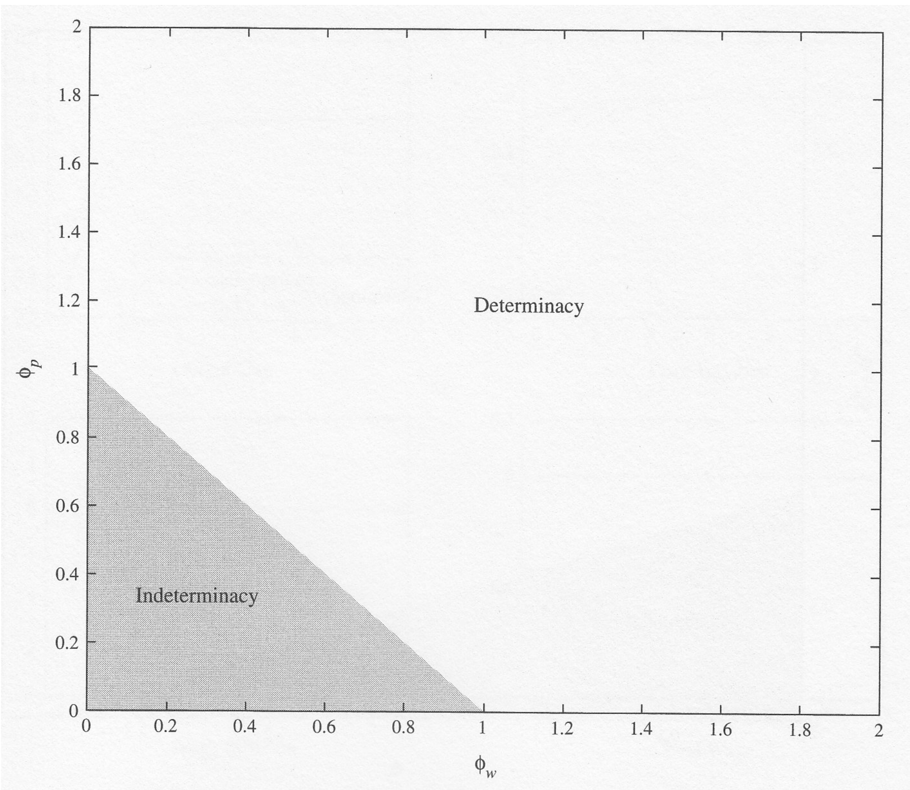

Abbildung 5: Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit der Lösung bei $\phi_y = 0$

Auf der linken Seite des Gleichungssystems (130) gibt es drei nicht prädeterminierte Variablen ($\widetilde{y}_t$, π_t^p und π_t^w) und eine prädeterminierte ($\widetilde{\omega}_{t-1}$).

Die Eindeutigkeit der Lösung ist daher genau dann gewährleistet, wenn drei Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}_w := \mathbf{A}_{w,0}^{-1}\mathbf{A}_{w,1}$ innerhalb und einer außerhalb des Einheitskreises liegen. Obige Abbildung (Quelle: Gali (2008), S. 129) zeigt, dass unter der Annahme $\phi_y = 0$ die Lösung des Systems (130) genau dann eindeutig ist, wenn

$$\phi_p + \phi_w > 1$$

ist.

Sofern die Zentralbank nicht auf den *output gap* reagiert, muss eine Veränderung des beliebig gewichteten Durchschnitts aus Preis- und Lohninflation also durch die Veränderung des Nominalzinssatzes überkompensiert werden, um die Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen. Dies entspricht dem in Abschnitt 3.4.1 vorgestellten Taylor-Prinzip, wobei die Notenbank nun nicht nur auf die Preisinflation, sondern auch auf die Lohninflation reagieren kann.

Reagiert die Zentralbank auch auf den *output gap*, so kann die Summe $\phi_p+\phi_w$ auch kleiner als Eins sein, ohne die Eindeutigkeit der Lösung zu beeinträchtigen. Je höher dabei der Koeffizient ϕ_y gewählt wird, desto größer ist der Bereich im Parameterraum (ϕ_p, ϕ_w), für welchen die Lösung eindeutig bleibt. Dies wird in folgender Abbildung (Quelle: Gali (2008), S. 130) dargestellt.

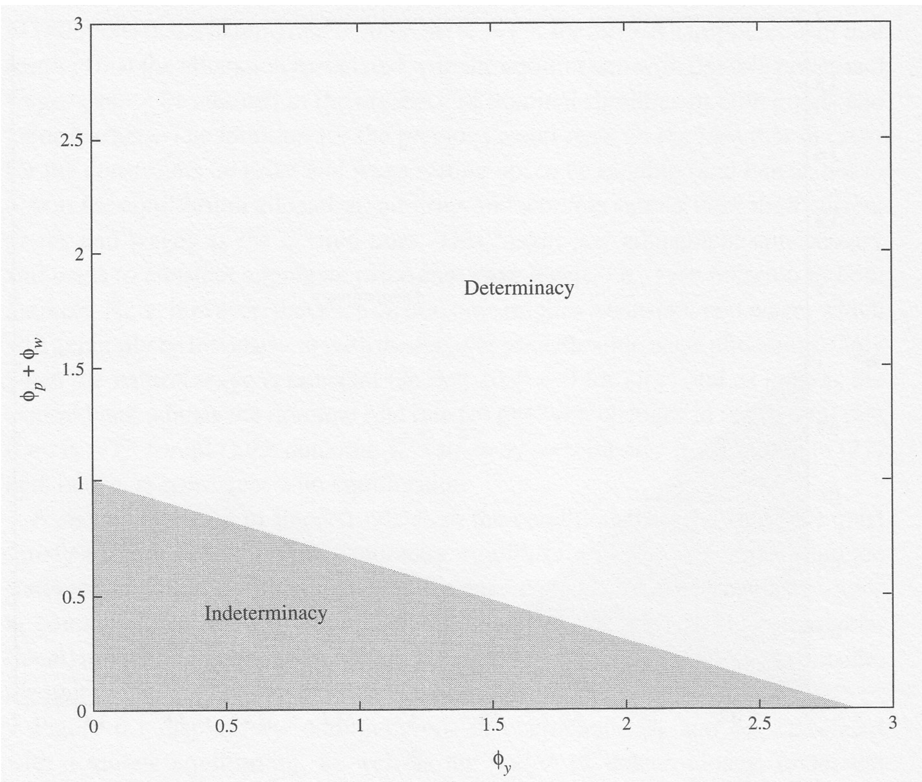

Abbildung 6: Eindeutigkeit und Nichteindeutigkeit der Lösung bei $\phi_y \geq 0$

Nachdem die Frage der Eindeutigkeit der Lösung geklärt ist, werden nun die Auswirkungen eines geldpolitischen Schocks auf die Variablen *output gap*, Preis- und Lohninflation sowie Reallohn analysiert. Bei der folgenden Grafik (Quelle: Gali (2008), S. 131) wurde wie in Abschnitt 3.1.1 von einem AR(1) Prozess mit der Persistenz $\rho_v = 0,5$ für den unsystematischen Term ν_t der Zinsregel ausgegangen. Die Kalibrierung erfolgte für drei verschiedene Parameterkombinationen von θ_p und θ_w. Jene mit $\theta_p = 2/3$ und $\theta_w = 0$ entspricht dem in Abschnitt 3.1.1 untersuchten Fall rigider Preise und flexibler Löhne, in der zweiten mit $\theta_p = 0$ und $\theta_w = 3/4$ werden Preise als flexibel angenommen, während Löhne im Durchschnitt $\frac{1}{1-3/4} = 4$ Quartale bzw. ein Jahr nicht reoptimiert werden. In der dritten Kalibrierung werden durch die Wahl von $\theta_p = 2/3$ und $\theta_w = 3/4$ sowohl Preise also auch Löhne als rigide angenommen. Die Koeffizienten der Zinsregel wurden mit $\phi_p = 1,5$ und $\phi_w = \phi_y = 0$ kalibriert .

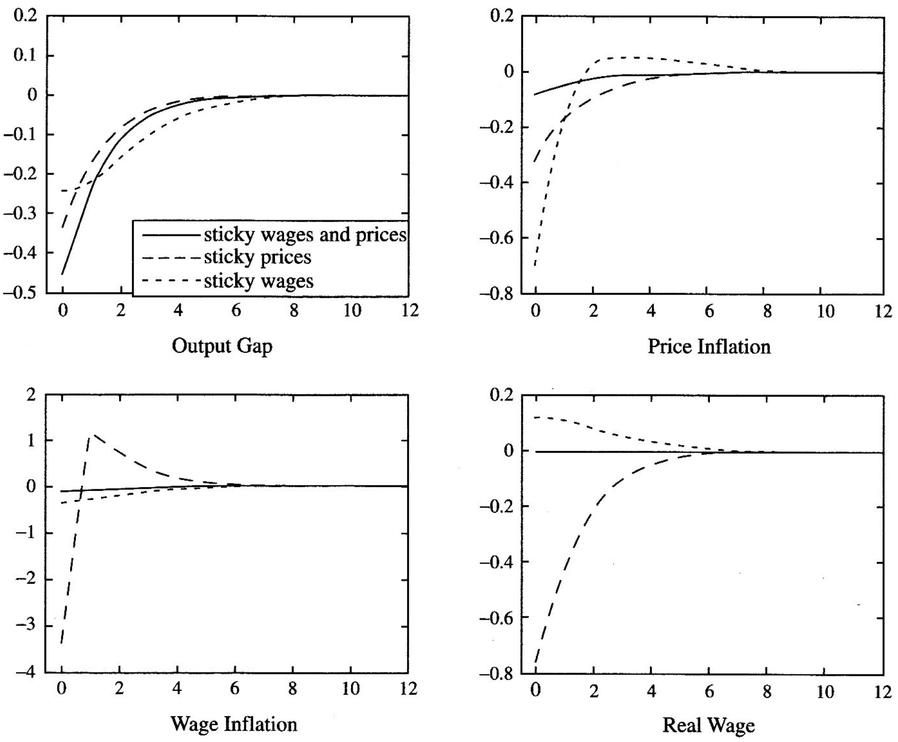

Abbildung 7: Auswirkungen eines geldpolitischen Schocks

Die durch den restriktiven geldpolitischen Schock herbeigeführte Erhöhung des Nominalzinssatzes führt dazu, dass Haushalte einen Anreiz haben, zu Gunsten von höherem zukünftigen Konsum auf aktuellen Konsum zu verzichten. Die Abbildung zeigt, dass bei den drei verschiedenen Kalibrierungen signifikante Unterschiede in Lohn- und Preisinflation sowie Reallohn auftreten. Diese Unterschiede werden nun ökonomisch interpretiert.

Zuerst wird der in Abschnitt 2 beschriebene Fall rigider Preise und flexibler Löhne betrachtet: Die Verringerung der Güternachfrage führt sowohl zu einem

Sinken der Preise, als auch zu einer Verringerung der Arbeitsnachfrage und somit zu einem Sinken der Löhne. Das dramatische Sinken des Reallohns ist zum Teil darauf zurückzuführen, dass nur ein Teil der Firmen den Preis reoptimieren kann während alle Löhne fallen. Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, führt der Schock zu einer Unterauslastung, d.h. zu einem negativen *output gap*.

Bei flexiblen Preisen und rigiden Löhnen können dieselben Argumente angewendet werden. Die mit der Verringerung der wirtschaftlichen Aktivität einhergehende Verringerung der Preise und Löhne führt in diesem Fall aber insgesamt zu einem Steigen des Reallohns, da nur ein Teil der Haushalte seine Löhne anpassen kann, während alle Firmen den Preis in gleichem Ausmaß verringern.

Sind sowohl Preise als auch Löhne rigide, so ist sowohl die Reaktion des aggregierten Preis- als auch die des Lohnniveaus am geringsten, wodurch sich der Reallohn kaum verändert. Bei rigiden Preisen wird die Verringerung des aggregierten Preisniveaus abgeschwächt, wenn die Annahme flexibler Löhne durch die rigider Löhne ersetzt wird. Der Grund dafür liegt darin, dass das Lohnniveau bei flexiblen Löhnen stärker sinkt als bei rigiden, wodurch im Fall flexibler Löhne die Lohnkosten für die Firmen geringer sind. Da der optimale Preis positiv von den Grenzkosten abhängt, senken jene Firmen, welche den Preis reoptimieren können, diesen daher bei rigiden Löhnen nicht so stark wie unter flexiblen Löhnen.

In der Abbildung „Price Inflation" liegt die durchgezogene Linie zu Beginn über der strichlierten und diese wiederum über der punktierten, während diese Reihenfolge in der Abbildung „Output Gap" vertauscht ist. Dies ist eine Folge der in der Zinsregel gewählten Koeffizienten $\phi_p = 1,5$ und $\phi_w = \phi_y = 0$. Bei dieser Kalibrierung reagiert die Zentralbank lediglich auf die Preisinflation, während Lohninflation und *output gap* keinen unmittelbaren Einfluss auf den Nominalzins haben. Eine geringere Preisinflation führt zu einem geringeren Nominalzins, woraus aus der dynamischen IS-Kurve ein größerer *output gap* folgt. Da im Fall rigider Löhne und Preise die Auswirkungen auf das Preisniveau am geringsten sind, reagiert die Zentralbank nur sehr schwach auf den Schock. Dies führt dazu, dass sehr viel weniger produziert wird als der Potentialoutput (durchgezogene Linie).

4.4.2 Optimale Geldpolitik

Herrschen nominelle Preis- und Lohnrigiditäten, so kann die Allokation, welche unter flexiblen Preisen und Löhnen herrschen würde, auch bei Kenntnis des natürlichen Zinssatzes nicht durch Geldpolitik erreicht werden. Um diese effiziente Allokation zu erzeugen, müsste die Geldpolitik die Lösung $\widetilde{y}_t = \pi_t^p = \pi_t^w = 0$ generieren können. Alle Firmen und Haushalte würden dann den gleichen Preis bzw. Lohn setzen und diese Preise und Löhne als optimal ansehen, sodass auch jene Wirtschaftssubjekte, welche die Möglichkeit einer Änderung hätten, keinen Anreiz haben, eine solche vorzunehmen. In diesem Fall wäre also sowohl die Preis- als auch die Lohninflation gleich Null und der Reallohn konstant. Bei einer (z.B. durch einen Technologieschock ausgelösten) Veränderung des natürlichen Reallohns ω_t^n würden sich flexible Preise und Löhne aber sofort an diesen anpassen. In Abschnitt 3.4 führte die Politik der Aufrechterhaltung des Preisniveaus deshalb zum Gleichgewicht, welches auch unter flexiblen Preisen herrschen würde, weil sich die flexiblen Löhne bei einem Schock so anpassen konnten, dass der natürliche Reallohn erreicht wurde. Im vorliegenden Fall würde die Aufrechterhaltung konstanter Löhne und Preise zwar dazu führen, dass die Arbeitsnachfrage nach jedem einzelnen Arbeitstyp gleich ist und die Güternachfrage nach jedem Produkt gleich ist, allerdings würde die gesamtwirtschaftliche Produktion nicht dem natürlichen Output entsprechen. Daher haben sowohl Firmen als auch Haushalte einen Anreiz ihren Lohn bzw. Preis zu ändern. Da dies aufgrund der angenommenen Rigiditäten aber nicht für alle möglich ist, ist die Arbeitsnachfrage nach den einzelnen Arbeitstypen und die Güternachfrage nach den einzelnen Produkten unterschiedlich hoch. Wie in Abschnitt 3.2 für den Fall der Güter gezeigt, ist das Wohlfahrtsoptimum aber nur dann gegeben, wenn die Nachfrage nach jedem Produkt (und auch nach jedem Arbeitstyp) gleich ist.

Sind Preise und Löhne rigide, lässt sich die Wohlfahrtsfunktion gemäß Gali (2008) folgendermaßen durch eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung darstellen:

$$W = \frac{1}{2} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\left(\sigma + \frac{\varphi + \alpha}{1-\alpha} \right) \widetilde{y}_t^2 + \frac{\varepsilon_p}{\lambda_p} \left(\pi_t^p \right)^2 + \frac{\varepsilon_w (1-\alpha)}{\lambda_w} \left(\pi_t^w \right)^2 \right] + t.i.p.,$$

wobei $t.i.p$ einen Term darstellt, der von der Politik unabhängig ist. Ignoriert man diesen, so lässt sich der Wohlfahrtsverlust einer Periode darstellen als Linearkombination der Varianzen von *output gap*, Preisinflation und Lohninflation:

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\sigma + \frac{\varphi + \alpha}{1-\alpha} \right) Var \left(\widetilde{y}_t \right) + \frac{\varepsilon}{\lambda} Var \left(\pi_t^p \right) + \frac{\varepsilon_w (1-\alpha)}{\lambda_w} Var \left(\pi_t^w \right) \right]$$

Wie oben beschrieben ist die effiziente Allokation, in welcher $\widetilde{y}_t = \pi_t^p = \pi_t^w = 0$ für alle t gilt, nicht durch Geldpolitik erreichbar. Die optimale Geldpolitik zeichnet sich in diesem Modell daher durch die bestmögliche Balance bei der Stabilisierung dieser drei Variablen aus. Gali (2008) kommt zu dem Schluss, dass eine Politik, die aggressiv auf einen gewichteten Durchschnitt aus Preis- und Lohninflation reagiert, am erstrebenswertesten ist, wobei die geeignete Wahl der Gewichte eine große Herausforderung darstellt.

5 Kritik

Zu den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Modellen gibt es zahlreiche Erweiterungen. In der Diplomarbeit wird von einer geschlossenen Volkswirtschaft ausgegangen. Die globalisierten Güter- und Finanzmärkte erfordern auch die Berücksichtigung von Modellen der offenen Volkswirtschaft und deren Implikationen für die Geldpolitik. Des Weiteren wird in der Arbeit von Investitionen abstrahiert. Kapital kommt nicht explizit in der Produktionsfunktion vor. Unterschiede im Kapitalstock der einzelnen Firmen führen aber zu Unterschieden in deren Grenzkosten und dazu, dass nicht alle Firmen den gleichen Preis setzen wollen, wie dies im Standardmodell der Fall ist. Außerdem ist von perfekten Kapitalmärkten ausgegangen worden.

Um die Argumentation für die Leserinnen und Leser nachvollziehbar zu machen, bezieht sich die folgende Kritik auf die in der Diplomarbeit vorgestellten Modelle.

5.1 Mangelnde Mikrofundierung nomineller Rigiditäten

Woodford (2003) geht ausführlich darauf ein, warum die Häufigkeit der Preisanpassungen bzw. die Verzögerungen, welche sich zwischen Preissetzung und Wirksamwerden des Preises ergeben, nicht endogenisiert werden. Im Folgenden wird eine Passage aus den Seiten 141f. zitiert, in der er damit argumentiert, dass sich die Analyse geldpolitischer Strategien in NK-Modellen auf Situationen beschränkt, in welchen die Inflation sehr gering ist, bzw. dass die verwendeten Approximationen ohnehin nur in solchen Situationen akkurat sind. Im Gegensatz zu hochinflationären Zuständen sei die Mikrofundierung rigider Preise hier von untergeordneter Bedeutung.

> While I give detailed attention to the consequences of assumed delays in the adjustment of prices and/or wages, I do not attempt to say anything about the underlying *reasons* for these delays. My assumptions about the frequency with which firms adjust their prices or the time lag that may be involved between the decision about a price and the time that the new price takes effect are treated as structural features of the environment in which firms sell their products [...].
>
> [...] if one wished to analyze the consequences of highly inflationary polices, one would surely *not* want to treat as given the frequency of price adjustment [...]. [I]t is known that practices adjust in all of these respects (and for reasons that are easy to understand) in economies that suffer from sustained high inflation. But my interest in the present study is in the identification of better monetary policies within the class of policies under which inflation is never very great. In fact, I make extensive use of approximations that are expected to be accurate only for the analysis of policies of that kind. [...] For these purpose, treating the delays involved in price and wage adjustment as structural may not be a bad approximation.
>
> [...] One may wish to add endogenization of the timing of price and wage adjustments to the list of refinements that one would like to incorporate into an eventual, truly accurate model. It is not clear, however, that this particular one should be placed too high in the

list of refinements when ranked in terms of their likely quantitative importance for the analysis of monetary policy.

Aufgrund seiner Einfachheit hat sich das in Kapitel 2 verwendete Calvo-Pricing, obwohl nicht mikrofundiert, als Standard in NK-Modellen etabliert. Diesbezüglich schreibt Woodford (2003, S.177):

> These [...] assumptions are plainly unrealistic, but they are very convenient in simplifying the analysis of equilibrium inflation dynamics, as they greatly reduce the size of the state space required to characterize those dynamics.

Nach der Analyse einiger empirischer Studien schreibt er weiter (S.185f):

> These results provide persuasive evidence for price stickiness of at least roughly the sort implied by the Calvo pricing model. The degree to which the model fits U.S. inflation dynamics is perhaps surprising, given that the assumption of a fixed probability of price change for all suppliers has been chosen for analytical convenience rather than out of any belief that it ought to be realistic. Probably this reflects the fact that [...] the details of the distribution of intervals between price changes does not matter much for the evolution of the aggregate price index, but only the average rate at which prices are revised. But the fit of the model *does* clearly depend upon the existence of staggered price changes of the kind assumed by Calvo.

Gemäß Woodford (2003) lässt sich der Preissetzungsansatz von Calvo also einerseits leicht in das Modell einbauen, andererseits ist er mit der Empirie in Einklang. Obwohl Woodford die Mikrofundierung der Preisrigiditäten nicht als zentral für die Analyse geldpolitischer Maßnahmen in NK-Modellen ansieht, wird in der Folge dennoch darauf eingegangen.

Für das Phänomen rigider Preise gibt es verschiedene Erklärungsansätze. Einer davon ist das Konzept der sogenannten *menu costs*, d.h. von Kosten, welche dem Unternehmen durch die Preisanpassung entstehen. Diese Kosten können z. B. aus dem Drucken neuer Preisschilder oder Kataloge resultieren. Eine Firma verändert ihren Preis demnach nur dann, wenn die durch die Preisänderung generierten zusätzlichen Profite die aufgrund der Anpassung erlittenen Kosten übersteigen. Mankiw (1985) zeigt im Rahmen eines linearen, statischen Modells mit einer monopolistischen Firma, welche Auswirkungen kleine *menu costs* auf die Gesamtwohlfahrt haben können. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Unternehmen seinen Preis eine Periode im Voraus gesetzt hat und dann nach Beobachtung der Nachfragekurve entscheidet, ob es den Preis auf das neue optimale Niveau anpasst. Das Modell liefert ein asymmetrisches Ergebnis: Ist die Nachfrage höher als erwartet, so ist der Effekt auf die Gesamtwohlfahrt nicht eindeutig. Sie kann steigen oder maximal um die *menu costs* sinken. Ist die Nachfrage hingegen geringer als erwartet, so führt dies zu einem eindeutigen Wohlfahrtsverlust, der die *menu costs* auch übersteigen kann.

Akerlof und Yellen (1985) führen das Konzept der *near rationality* ein. Firmen, die ihre Preise nicht ständig neu optimieren, handeln zwar suboptimal, aber die Verluste, welche daraus für sie entstehen, sind sehr klein bzw. von zweiter Ordnung.[4] Im Gegensatz zur Firmenebene können Veränderungen des Geldangebots aber signifikante Veränderungen bzw. Veränderungen erster Ordnung in gesamtwirtschaftlichen Variablen wie Output und Beschäftigung bewirken.

Ball und Romer (1990) kritisieren, dass kleine Preisänderungskosten bzw. kleine Abweichungen vom optimalen Verhalten allein im Prinzip zwar große nominelle Rigiditäten bewirken können, dies aber nur für unplausible Parameterwerte zutreffend ist. In Kombination mit realen Rigiditäten hingegen können daraus sehr wohl signifikante nominelle Rigiditäten resultieren. Hohe (geringe) reale Rigidität liegt in der Sprechweise der *New Keynesians* dann vor, wenn sich Veränderungen der Nachfrage kaum (stark) auf den profitmaximierenden Wert des *real price*, d.h. des relativen Preises $P(i)/P$, auswirken. Das Ausmaß an nomineller Rigidität, welches aus *menu costs* (oder durch Abweichen von vollständiger Rationalität) entsteht, steigt mit dem Ausmaß an realer Rigidität.

5.2 Die Abwesenheit des Bankensektors

In den Standardmodellen der *New Keynesian School* wird von Finanzintermediären abstrahiert. Haushalte sind in ihrer Liquidität nicht beschränkt und können beliebig hohe Schulden aufnehmen. Die Transversalitätsbedingung (4) stellt die Solvenz der Haushalte sicher. Aufgrund dieser Annahmen ist in den Modellen die explizite Berücksichtigung von Geld nicht erforderlich, gibt es in jeder Periode nur einen einzigen Zinssatz und kann sich Geldpolitik auf Steuerung des Zinssatzes beschränken. In der Realität hängt die Liquidität der Haushalte davon ab, inwieweit Geschäftsbanken bereit sind, ihnen Kredite zu gewähren und die Entscheidungen der Haushalte davon, welche Konditionen auf Einlagen und Kredite ihnen von den Geschäftsbanken auferlegt werden. Dabei kann es zu signifikanten Unterschieden zwischen den Leitzinsen der Zentralbanken und den Zinsen, welche Geschäftsbanken an ihre Kunden weitergeben, kommen.

In Rezessionen werden die Leitzinsen meist gesenkt, gleichzeitig steigt aber die Risikoaversion der Geschäftsbanken, welche die Risikoprämien erhöhen. Der Effekt auf die Zinsen, welche die privaten Wirtschaftssubjekte für ihre Kredite zahlen bzw. für ihre Einlagen erhalten, ist daher nicht eindeutig. Eine Zinssenkung der Zentralbank muss daher nicht zwingenderweise stimulierend auf den privaten Konsum wirken. Umgekehrt werden die offiziellen Zinssätze in Boomphasen meist erhöht, während die Risikoprämien fallen, wodurch auch hier der Effekt auf die für die privaten Wirtschaftssubjekte relevanten Zinsen nicht eindeutig ist. Der Transmissionsmechanismus der Geldpolitik hängt daher in einem starken Ausmaß vom Verhalten der Geschäftsbanken ab. Durch das Ausklammern des Finanzsektors werden in NK-Modellen zentrale Aspekte der Geldpolitik nicht betrachtet.

Goodhart (2007) spricht sich dafür aus, neben der Zinssteuerung auch Geldmengenaggregate bei der Implementierung von Geldpolitik zu beachten. Dabei sei insbesondere die Kreditvergabe der Banken von zentralem Interesse, da von dieser abhängt, inwieweit Haushalte bei ihren Konsumausgaben auf ihr aktuelles Einkommen beschränkt sind:

[4] In Blanchard und Kiyotaki (1987, S.655) wird das Konzept folgendermaßen charakterisiert: „Akerlof and Yellen assume *near rationality* that is equivalent to rationality subject to second-order costs of taking decisions."

> [T]he degree to which the current income, plus liquid asset, constraint bears on current expenditures depends to a considerable extent on the willingness of, and the terms on which, banks will lend to the private sector. This is a key reason why I believe that the rate of growth of bank lending to the private sector is as, or a more, important monetary aggregate than broad money by itself (S. 12).

Zusammenfassend schreibt er, dass die korrekte Interpretation von Veränderungen von Geldmengenaggregaten, zwar eine große Herausforderung darstelle, welche aber angenommen werden sollte:

> [...] [E]vidence on how the economy is coping with [income constraints and risk and uncertainty] can be given by examining the growth rate of money and credit aggregates. In my view anyone who believes that default, risk aversion and income constraints matter, [...] *ought* to concern themselves with the messages emanating from the monetary aggregates. To be sure such messages are often garbled by noise, especially from short-run demand shocks, so that such interpretation will be an art. Nevertheless it is an art worth attempting. (S. 13f)

5.3 Die Schwächen der Standardmodelle in Krisenzeiten

NK-Modelle verwenden in der Regel ln-lineare Approximationen in einem durch eine stabile, niedrige Inflation gekennzeichneten *steady state*. Daher lassen diese Modelle keine Rückschlüsse auf eine angemessene Geldpolitik in Währungsgebieten zu, in welchen sich die Inflationsrate signifikant von Null unterscheidet. Ob geldtheoretische Modelle einen Anspruch daran stellen sollten, dass ihre Aussagekraft in hyperinflationären Episoden bestehen bleibt, darf bezweifelt werden. An Hyperinflation leidende Staaten sind meist durch eine politische Instabilität gekennzeichnet, welche z.B. aus Kriegen oder gesellschaftlichen Umbruchsituationen resultiert. Eine allgemein gültige mathematische Formulierung solcher Situationen ist nicht möglich. Zwischen Situationen mit stabilem Preisniveau und Hyperinflationen gibt es dennoch Bereiche, in welchen eine aussageräftige mathematische Modellierung wünschenswert wäre.

Die Standardmodelle, welche aus der dynamischen IS-Kurve, der *New Keynesian Phillips Curve* und einer Taylor-Zinsregel bestehen, weisen weitere Schwächen auf, die nicht zuletzt durch die aktuelle Finanzmarktkrise offenkundig wurden. Goodhart (2007) bezeichnet sie als „Schönwettermodelle", deren Brauchbarkeit in wirtschaftlichen Krisenzeiten verloren gehe:

> [...] [T]his three equation model only work (sic!) satisfactorily during relatively calm periods of stable economic developments, a 'fair weather' model. The zero bound to nominal interest rates suggests that this model may have limited usefulness during periods of deflationary pressures. Moreover, during turbulent periods, whether of severe deflation or inflation, expectations will not be anchored, will differ quite markedly from person to person, and be subject to potentially sharp revision. Under these circumstances one cannot assess what real rates of interest may be, so growth rates of the monetary aggregates may well be a better guide to the effects of monetary policy

> on the economy to either nominal, or an estimate of real, interest rates. (S. 4)

Die aktuelle Finanzkrise war von Unterauslastung der Kapazitäten und zweitweise sogar von Deflation geprägt. Die *Federal Funds Rate*, der Leitzins der USA, hat die Untergrenze von Null bereits erreicht. Ein anderes Beispiel für die bindende Zinsuntergrenze von Null ist Japan zwischen den Jahren 1999 und 2006. In diesen Situationen würde einer Taylor-Zinsregel einem negativen Nominalzinssatz entsprechen. Daraus wird deutlich, dass Goodharts Argument, nach welchem NK-Modelle in Zeiten deflationären Drucks nicht mehr anwendbar sind, nicht nur theoretischer Natur ist.

Sowohl die *Fed*, für welche eine expansive Politik mittels Zinssenkung nicht mehr möglich war, als auch andere Zentralbanken wie die EZB oder die *Bank of Japan* haben im Lauf der jüngsten Wirtschaftskrise andere geldpolitische Instrumente eingeführt, welche in den Standardmodellen bisher nicht vorgekommen sind. So führten die *Fed* und die *Bank of Japan* mittels Ankauf sogenannter *Commercial Paper* unmittelbare Unternehmensfinanzierung durch und übernahmen dadurch teilweise die Rolle eines Finanzintermediärs.

Die Hauptaufgabe der Zentralbanken während der Wirtschaftskrise war es aber, die Stabilität der Finanzmärkte wieder herzustellen. Durch die Unsicherheit der Marktteilnehmer sowohl hinsichtlich der Liquidität der Geschäftspartner als auch hinsichtlich des eigenen zukünftigen Liquiditätsbedarfs war der Geldmarkt von ungewöhnlich großen Spannungen geprägt. Der Rückgang der Geldmarktaktivität hatte unmittelbare Auswirkungen auf die Kreditvergabe an die privaten Wirtschaftssubjekte und somit auf die Realwirtschaft. Um das Vertrauen der Geldmarktteilnehmer wieder herzustellen, führten die Zentralbanken zahlreiche liquiditätszuführende Maßnahmen ein. So ging das Eurosystem bei seinen Offenmarktgeschäften von den bisher durchgeführten Zinstender mit Mindestbietungssatz zu Mengentender mit voller Zuteilung über. Außerdem weiteten alle großen Zentralbanken den Rahmen der notenbankfähigen Sicherheiten sowohl hinsichtlich Bonität als auch hinsichtlich Art aus. Diese Maßnahmen erleichterten es den Geschäftsbanken, ihre Liquiditätsnachfrage vollständig zu befriedigen. Die koordinierte Zusammenarbeit der großen Zentralbanken versorgte die Kreditinstitute außerdem mit Fremdwährungsliquidität. Darüber hinaus erhöhten die Notenbanken Anzahl und Häufigkeit von längerfristigen Refinanzierungsgeschäften und führten teilweise sogar neue Refinanzierungsgeschäfte mit längeren Laufzeiten ein, wodurch das Vertrauen in die längerfristige Zahlungsfähigkeit der Geschäftsbanken gestärkt wurde.

Die aktuelle Wirtschaftskrise hat einerseits gezeigt, dass die realwirtschaftlichen Auswirkungen der Geldpolitik zu einem großen Teil vom Verhalten der Finanzintermediäre abhängen und durch die Vernachlässigung des Bankensektors in den Modellen wesentliche Elemente des Transmissionsmechanismus nicht abgebildet werden, andererseits, dass der geldpolitische Handlungsspielraum der Zentralbanken sich nicht auf die Zinssetzung beschränkt, sondern weitere Instrumente umfasst, durch welche die realwirtschaftlichen Konsequenzen der Finanzkrise zum Teil abgefedert werden konnten.

Teil II
Mathematische Ableitung der Modellgleichungen

Im zweiten Teil der Diplomarbeit erfolgt die detaillierte mathematische Ableitung der Modellgleichungen. In der wissenschaftlichen Literatur werden, allein schon aus Platzgründen, die meisten der nachfolgenden Herleitungen vorausgesetzt. Für Expertinnen und Experten auf dem Gebiet der Geldtheorie mag dies gerechtfertigt sein, diese Arbeit wendet sich aber an einen breiteren Leserkreis und die folgenden Erläuterungen sollen es den Leserinnen und Lesern erleichtern, in Zukunft Arbeiten über NK-Modelle zu beurteilen und zu einem tieferen Verständnis für die Mikrofundierung der Modellspezifikationen beitragen. Der Großteil der nachfolgenden mathematischen Ableitungen findet in einer Vielzahl von NK-Modellen Anwendung. Den an Modellen der *New Keynesian School* interessierten Leserinnen und Lesern kann dieser Abschnitt daher als Nachschlagewerk dienen und auch deren Verständnis neuer Modelle beschleunigen.

Kapitel 6 bezieht sich auf die in Kapitel 2 vorgestellten Modellgleichungen, Kapitel 7 auf jene aus Kapitel 3 und Kapitel 8 auf jene aus Kapitel 4.

6 Ableitung der politikunabhängigen Modellgleichungen

6.1 Optimalitätsbedingungen der Haushalte

Die folgenden mathematischen Erläuterungen beziehen sich auf den Abschnitt 2.1. Das durch die Gleichungen (1) bis (4) beschriebene Nutzenmaximierungsproblem der Haushalte lässt sich in zwei Schritte zerlegen:

1. Das Ausgabenminimierungsproblem unter der Annahme eines gegebenen Wertes von C_t.
2. Die optimale Wahl des Konsumaggregats C_t, der Arbeitszeit N_t und der Bonds B_t.

6.1.1 Optimale Allokation der Konsumausgaben

In seiner ursprünglichen Form geht das Dixit-Stiglitz Modell von einer endlichen Anzahl N von Firmen aus. Um das vorliegende Problem unter der Annahme eines Kontinuums an Gütern zu lösen, sind Methoden der Variationsrechnung notwendig, welche das Problem aus mathematischer Sicht erschweren, jedoch zu keinen anderen ökonomischen Schlussfolgerungen führen. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird daher in diesem Abschnitt von einer endlichen Anzahl von Firmen ausgegangen, in den anderen Teilen der Diplomarbeit aber das in der neueren Literatur übliche Kontinuum verwendet.

Die Allokation der einzelnen Konsumgüter ist dann optimal, wenn C_t unter den vorgegebenen Konsumausgaben maximal ist. Dieses Optimierungsproblem ist äquivalent zum dualen Ausgabenminimierungsproblem. Durch geeignete Wahl von $\{C_t(1), \ldots, C_t(N)\}$ sollen also die Ausgaben für Konsumgüter minimiert werden:

$$\min \sum_{i=1}^{N} P_t(i) C_t(i) \tag{131}$$

Der Konsumindex muss dabei mindestens ein vorgegebenes Niveau C_t erreichen:

$$s.t. \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \geq C_t, \qquad \varepsilon > 1, C_t > 0 \tag{132}$$

Außerdem muss die Nebenbedingung erfüllt sein, dass der Konsum jedes Gutes nicht negativ ist

$$s.t. \qquad C_t(i) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{133}$$

und es wird unterstellt, dass alle Preise strikt positiv sind

$$P_t(i) > 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{134}$$

Die Lagrangefunktion hat dann die Form:

$$L = \sum_{i=1}^{N} P_t(i) C_t(i) + \lambda_t \left[C_t - \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right] \tag{135}$$

Die notwendigen Kuhn-Tucker Bedingungen, welche bei der vorliegenden Spezifikation auch hinreichend sind, haben für alle $j = 1, \ldots, N$ die folgende Form:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t(j)} = P_t(j) - \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} C_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{136}$$

$$C_t(j) \frac{\partial L}{\partial C_t(j)} = C_t(j) \left[P_t(j) - \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} C_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right] = 0 \tag{137}$$

$$C_t(j) \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = C_t - \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \leq 0 \tag{138}$$

$$\lambda_t \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \lambda_t \left[C_t - \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right] = 0 \tag{139}$$

$$\lambda_t \geq 0 \tag{140}$$

Aus $\lambda_t = 0$ würde aufgrund von (137)

$$C_t(j) P_t(j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

und daher aufgrund von (134) auch

$$C_t(j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N$$

folgen. In diesem Fall wäre aber (138), d.h. die Nebenbedingung des Ausgabenminimierungsproblems verletzt. Daher muss

$$\lambda_t > 0 \tag{141}$$

gelten. Dies impliziert in Verbindung mit (139), dass die Nebenbedingung des Ausgabenminimierungsproblems im Optimum in Gleichheitsform erfüllt ist:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = C_t \tag{142}$$

Randlösungen können aus folgendem Grund ausgeschlossen werden: Sei $C_t(j) = 0$. Dann wäre aufgrund von $\lambda_t > 0$ die Bedingung (136) verletzt. Daher liegt eine innere Lösung vor, wodurch für alle Konsumgüterpaare $j, k = 1, \ldots, N$ gilt:

$$\frac{P_t(j)}{P_t(k)} = \frac{\lambda_t \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} C_t(j)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\lambda_t \left(\sum_{i=1}^{N} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} C_t(k)^{-\frac{1}{\varepsilon}}} = \left(\frac{C_t(j)}{C_t(k)}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \tag{143}$$

Aus (143) folgt:

$$C_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t(k)}\right)^{-\varepsilon} C_t(k), \qquad j, k = 1, \ldots, N \tag{144}$$

Unter Verwendung von (144) erhält man

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{N} C_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} &= \left(\sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{P_t(j)}{P_t(k)}\right)^{-\varepsilon} C_t(k)\right]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} P_t(j)^{1-\varepsilon} P_t(k)^{-(1-\varepsilon)} C_t(k)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
&= P_t(k)^{\varepsilon} C_t(k) \left(\sum_{j=1}^{N} P_t(j)^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{N} C_t(j)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \left(\frac{P_t\,(k)}{P_t}\right)^{\varepsilon} C_t\,(k)\,, \tag{145}$$

wobei der Preisindex P_t durch

$$P_t := \left(\sum_{j=1}^{N} P_t(j)^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)} \tag{146}$$

definiert ist. Setzt man (145) in die Nebenbedingung in Gleichheitsform (142) ein, erhält man die folgende Lösung für $C_t(k)$:

$$C_t(k) = \left(\frac{P_t(k)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t \tag{147}$$

Aus (147) und (144) folgt:

$$C_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t, \qquad j = 1, \ldots, N \tag{148}$$

Bei diesen Lösungen handelt es sich um bedingte Nachfragefunktionen gegeben C_t. Unter Berücksichtigung von

$$\sum_{j=1}^{N} P_t(j)^{1-\varepsilon} = P_t^{1-\varepsilon}$$

erhält man nun das folgende Ergebnis für die Wertfunktion (*value function*) des Ausgabenminimierungsproblems, welche als Ausgabenfunktion (*expenditure function*) bezeichnet wird:

$$\sum_{j=1}^{N} P_t(j)C_t(j) = \sum_{j=1}^{N} P_t(j) \left(\frac{P_t(j)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t = P_t^{\varepsilon} C_t \sum_{j=1}^{N} P_t(j)^{1-\varepsilon} = P_t C_t \tag{149}$$

Um einen aggregierten Konsum in Höhe von C_t genießen zu können, muss der Haushalt mindestens $P_t C_t$ Geldeinheiten ausgeben. Für $C_t = 1$ sind diese Ausgaben durch P_t gegeben. In der Literatur wird daher P_t häufig als die Mindestausgaben für $C_t = 1$ definiert (siehe z.B. Obstfeld und Rogoff (1996)).

6.1.2 Optimale Wahl der Variablen C_t, N_t und B_t

Die Wahl des Konsums C_t, der Arbeitszeit N_t und der Anzahl der Anleihen B_t kann aufgrund der Spezifikation des Konsumindex C_t isoliert von der Verteilung der Konsumausgaben auf die einzelnen Güter betrachtet werden. Verhält sich der Haushalt also dahingehend optimal, dass sich seine Nachfrage für zwei beliebige Güter $j, k \in [0, 1]$ durch die in Abschnitt 6.1.1 für den diskreten Fall abgeleitete Gleichung

$$C_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t(k)}\right)^{-\varepsilon} C_t(k)$$

beschreiben lässt, so reduziert sich das Problem (1) bis (4) zu

$$\max E_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(C_{t+k}, N_{t+k}), \tag{150}$$

$$s.t. \qquad P_{t+k}C_{t+k} + Q_{t+k}B_{t+k} \leq B_{t+k-1} + W_{t+k}N_{t+k} + T_{t+k} \tag{151}$$

und

$$s.t. \qquad \lim_{T\to\infty} E_t \{B_T\} \geq 0, \tag{152}$$

wobei Gleichung (151) für alle $k = 0, 1, 2, ...$ gelten muss und nur mehr der durch Gleichung (2) definierte aggregierte Konsum C_t für die Lösung des Problems relevant ist. Es werden drei Methoden zur Lösung dieses Problems vorgestellt:

Substitutionsmethode: Aufgrund der Inada-Bedingungen (6) und (8) muss die Nebenbedingung (151) im Optimum in Gleichheitsform erfüllt sein. Umformen führt zu

$$N_{t+k} = \frac{P_{t+k}C_{t+k} + Q_{t+k}B_{t+k} - B_{t+k-1} - T_{t+k}}{W_{t+k}}. \tag{153}$$

Einsetzen von Gleichung (153) in die Zielfunktion (150) führt zu folgender Zielfunktion:

$$f := E_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U \left(C_{t+k}, \frac{P_{t+k}C_{t+k} + Q_{t+k}B_{t+k} - B_{t+k-1} - T_{t+k}}{W_{t+k}} \right)$$

Diese Funktion soll maximiert werden. Der Haushalt wählt in Periode t Werte für C_t und B_t. Für C_{t+k} bzw. B_{t+k} mit $k \geq 1$ kann er lediglich *contingency plans* erstellen. Dies bedeutet, dass C_{t+k} bzw. B_{t+k} Funktionen von Variablen sind, welche in der zum Zeitpunkt $t+k$ zur Verfügung stehenden Informationsmenge enthalten sind.

Die Optimalitätsbedingungen sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial C_t} = \frac{\partial U}{\partial C_t} + \frac{\partial U}{\partial N_t}\frac{P_t}{W_t} = 0 \tag{154}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial B_t} = E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial N_t}\frac{Q_t}{W_t} - \beta \frac{\partial U}{\partial N_{t+1}}\frac{1}{W_{t+1}} \right\} = 0. \tag{155}$$

Aus Gleichung (154) erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = -\frac{\partial U}{\partial N_t}\frac{P_t}{W_t}$$

bzw.

$$\frac{\partial U}{\partial N_t} = -\frac{\partial U}{\partial C_t}\frac{W_t}{P_t}. \tag{156}$$

Es gilt daher die Optimalitätsbedingung (13) aus Abschnitt 2.1:

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t}$$

Aus Gleichung (155) folgt

$$E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial N_t}\frac{Q_t}{W_t} - \beta \frac{\partial U}{\partial N_{t+1}}\frac{1}{W_{t+1}} \right\} = 0.$$

Setzt man für $\frac{\partial U}{\partial N_t}$ und $E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial N_{t+1}} \right\}$ Gleichung (156) ein, erhält man

$$E_t \left\{ -\frac{\partial U}{\partial C_t}\frac{W_t}{P_t}\frac{Q_t}{W_t} + \beta \frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}\frac{W_{t+1}}{P_{t+1}}\frac{1}{W_{t+1}} \right\} = 0.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{\partial U}{\partial C_t}\frac{Q_t}{P_t} = \beta E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}\frac{1}{P_{t+1}} \right\},$$

woraus schließlich die zweite Optimalitätsbedingung (14) folgt:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}}\frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}$$

Lagrange-Ansatz: Die Lagrangefunktion des Problems ist

$$\begin{aligned} L &= E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(C_t, N_t) \right\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{t+k} \left[P_{t+k}C_{t+k} + Q_{t+k}B_{t+k} - B_{t+k-1} - W_{t+k}N_{t+k} - T_{t+k} \right] \end{aligned}$$

Die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen sind durch

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} - \lambda_t P_t = 0 \tag{157}$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_t} = \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial N_t} + \lambda_t W_t = 0 \tag{158}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_t} = \lambda_{t+1} - \lambda_t Q_t = 0 \tag{159}$$

$$\lambda_t \left[P_t C_t + Q_t B_t - B_{t-1} - W_t N_t - T_t \right] = 0 \tag{160}$$

$$\lambda_{t+k} \geq 0 \qquad k = \{0, 1\} \tag{161}$$

gegeben. Aus den Gleichungen (157) und (158) folgt

$$\lambda_t = \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t}\frac{1}{P_t} = -\frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial N_t}\frac{1}{W_t}.$$

Daraus erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial C_t}\frac{1}{P_t} + \frac{\partial U}{\partial N_t}\frac{1}{W_t} = 0. \tag{162}$$

Gleichung (162) ist also erfüllt, wenn

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t} \tag{163}$$

gilt.

Die zweite Optimalitätsbedingung wird aus den Gleichungen (157) und (159) abgeleitet. Wir sind nun an der optimalen Aufteilung des aktuellen Konsums und des Konsums in der nächsten Periode ($k = 1$) interessiert. Aus Gleichung (157) folgt

$$\lambda_t = \frac{\frac{\partial U}{\partial C_t}}{P_t}$$

Einsetzen in Gleichung (159) liefert die Bedingung

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}}\frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{164}$$

Methode der ökonomischen Überlegung: Im Optimum muss die Budgetbeschränkung (151) als Gleichung erfüllt sein. Ceteris paribus muss bei einer Veränderung der Werte für Konsum und Arbeit also stets

$$P_t dC_t = W_t dN_t$$

gelten, d.h. zusätzlicher Konsum müsste durch zusätzliches Lohneinkommen finanziert werden bzw. kann sich der Haushalt zusätzliche Freizeit nur durch entsprechenden Konsumverzicht leisten. Der Haushalt hat im Optimum keine Anreize etwas an seinem Verhalten zu ändern. D.h. der Nutzen, den er durch zusätzlichen, infinitesimalen Konsum generieren würde, entspricht jenem Nutzen, den er durch eine infinitesimale Verringerung der Arbeitszeit erreicht:

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} dC_t + \frac{\partial U}{\partial N_t} dN_t = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich die erste Optimalitätsbedingung ableiten:

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} \frac{W_t dN_t}{P_t} = -\frac{\partial U}{\partial N_t} dN_t$$

Dies ist äquivalent zu Gleichung (163):

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = \frac{W_t}{P_t}$$

Innerhalb einer Periode konsumiert der Haushalt also genau soviel, dass die Grenzrate der Substitution von Freizeit für Konsum genau dem Reallohn entspricht.

Durch Sparen bzw. Schuldenaufnahme (positives bzw. negatives B_t) kann der Haushalt seinen Konsum über die Zeit anders aufteilen als wenn er in jeder Periode genau sein Arbeitseinkommen konsumiert. Dabei muss sowohl die Budgetbeschränkung in Periode t, als auch jene in Periode $t+1$ erfüllt sein. Ceteris paribus müssen bei Veränderung der Werte C_t, C_{t+1} und B_t also stets die Bedingungen

$$dC_t = -\frac{1}{P_t} Q_t dB_t$$

und

$$dC_{t+1} = \frac{1}{P_{t+1}} dB_t$$

gelten. Setzt man für dB_t die erste Gleichung in die zweite ein, so folgt

$$dC_{t+1} = -\frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t. \tag{165}$$

Im Optimum muss der durch eine in Periode t generierte Nutzengewinn einer zusätzliche marginalen Konsumeinheit genau mit dem erwarteten korrespondierenden Nutzenverlust in Periode $t+1$ einhergehen (bzw. umgekehrt):

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} dC_t + \beta E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial C_{t+1}} dC_{t+1} \right\} = 0$$

Setzt man Gleichung (165) in diese Bedingung ein, so erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} dC_t = -\beta E_t \left\{ -\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}} \frac{P_t}{Q_t P_{t+1}} dC_t \right\}.$$

Dies ist äquivalent zu Gleichung (164):

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}$$

6.1.3 Optimalitätsbedingungen im Fall der Nutzenfunktion (15)

In den folgenden Überlegungen wird eine additiv separable in beiden Variablen isoelastische Nutzenfunktion unterstellt:

$$U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}$$

Aufgrund von

$$\frac{\partial U}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial N_t} = N_t^{\varphi}$$

werden die Optimalitätsbedingungen (13) und (14) dann zu

$$C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} = \frac{W_t}{P_t} \tag{166}$$

und

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\}. \tag{167}$$

Die ln-lineare Darstellung von Gleichung (166) ist

$$w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t.$$

Gleichung (167) lässt sich wie folgt umformen:

$$C_t^{\sigma} = \frac{Q_t}{\beta} E_t \left\{ C_{t+1}^{\sigma} \Pi_{t+1} \right\}$$

Eine ln-lineare Approximation dieser Gleichung ist durch

$$\sigma c_t = \ln Q_t - \ln \beta + E_t \left\{ \sigma c_{t+1} + \pi_{t+1} \right\}$$

gegeben. Da Q_t der Preis ist, den der Haushalt für risikolose Anlagen zahlen muss, um nach einer Periode eine Geldeinheit zu bekommen, ist Q_t der mit dem Zinssatz i_t diskontierte Gegenwartswert einer Geldeinheit in der nächsten Periode:

$$Q_t = \frac{1}{1+i_t}$$

Der natürliche Logarithmus von Q_t ist also $-\ln(1+i_t)$. In der Nähe von Null gilt (Taylor-Approximation erster Ordnung)

$$\ln(1+i_t) \simeq i_t.$$

Diese Approximation wird in der Folge verwendet. Ähnlich wird mit dem Zeitpräferenzfaktor β vorgegangen. Dieser lässt sich durch die Zeitpräferenzrate ρ schreiben als

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}.$$

Hier wird die Approximation

$$-\ln\beta \simeq \rho$$

verwendet. Durch diese Vereinfachungen lässt sich die Optimalitätsbedingung (167) nun folgendermaßen darstellen:

$$c_t = E_t\left\{c_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right)$$

6.2 Preissetzungsverhalten der Firmen

Die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Modellgleichungen werden nun mathematisch erläutert. Zunächst wird beschrieben, wie sich das aggregierte Preisniveau P_t entwickelt, anschließend wird das Preissetzungsverhalten der Firmen näher beleuchtet.

6.2.1 Entwicklung des aggregierten Preisniveaus

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, kann ein Anteil θ der Firmen den Preis in einer Periode nicht verändern. Sei nun $S(t) \subset [0,1]$ die Menge jener Firmen, die ihren Preis in Periode t nicht reoptimieren. Der durch Gleichung (11) definierte Preisindex

$$P_t := \left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon} di\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

lässt sich unter dieser Annahme umformen zu

$$P_t = \left[\int_{S(t)} P_{t-1}(i)^{1-\varepsilon} di + (1-\theta)\left(P_t^*\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{168}$$

P_t^* ist der neue optimale Preis für alle Firmen, die ihren Preis in Periode t verändern. Dieser muss für alle gleich sein, da alle Firmen das identische Optimierungsproblem lösen. Weiters gilt

$$\int_{S(t)} P_{t-1}(i)^{1-\varepsilon} di = \theta\left(P_{t-1}\right)^{1-\varepsilon},$$

wodurch sich Gleichung (168) zu

$$P_t = \left[\theta \left(P_{t-1}\right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta)\left(P_t^*\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

umformen lässt. Potenzieren der Gleichung mit $1-\varepsilon$ und dividieren durch P_{t-1} und führt zu

$$\frac{P_t^{1-\varepsilon}}{P_{t-1}} = \theta \left(P_{t-1}\right)^{-\varepsilon} + (1-\theta)\frac{\left(P_t^*\right)^{1-\varepsilon}}{P_{t-1}}$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\left(P_{t-1}\right)^{\varepsilon}$

$$\Pi_t^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\varepsilon}. \tag{169}$$

Im *steady state*, der durch ein stabiles Preisniveau gekennzeichnet ist ($\Pi_t = 1$), gilt daher $P_t^* = P_{t-1}$. Auch Firmen, die ihren Preis verändern könnten, lassen in diesem Fall den Preis gleich. Es erfolgt nun eine ln-lineare Approximation von Gleichung (169) im *steady state*. Wendet man auf beide Seiten der Gleichung den natürlichen Logarithmus an, so erhält man

$$(1-\varepsilon)\left(p_t - p_{t-1}\right) = \ln\left(\theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\varepsilon}\right)$$

bzw.

$$p_t - p_{t-1} = \frac{1}{1-\varepsilon}\ln\left[\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}\right]$$

Die Funktion $f(p_{t-1}, p_t^*)$ wird definiert als

$$f(p_{t-1}, p_t^*) := \frac{1}{1-\varepsilon}\ln\left(\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}\right)$$

Eine Taylor-Approximation erster Ordnung von $f(p_{t-1}, p_t^*)$ an der Stelle $(p_{t-1}, p_t^*) = (p_t, p_t)$ hat die Form

$$f(p_{t-1}, p_t^*) \simeq f(p_t, p_t) + \frac{\partial f(p_t, p_t)}{\partial p_{t-1}}(p_{t-1} - p_t) + \frac{\partial f(p_t, p_t)}{\partial p_t^*}(p_t^* - p_t) \tag{170}$$

Die partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(p_{t-1}, p_t^*)}{\partial p_{t-1}} &= \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1-\theta}{\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}(\varepsilon - 1) \\
&= -\frac{(1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}{\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(p_{t-1}, p_t^*)}{\partial p_t^*} &= \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1-\theta}{\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon) \\
&= \frac{(1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}{\theta + (1-\theta)e^{(p_t^* - p_{t-1})(1-\varepsilon)}}.
\end{aligned}$$

Wertet man die Funktion $f(p_{t-1}, p_t^*)$ sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung an der Stelle $(p_{t-1}, p_t^*) = (p_t, p_t)$ aus, so erhält man

$$\begin{aligned} f(p_t, p_t) &= 0 \\ \frac{\partial f(p_t, p_t)}{\partial p_{t-1}} &= \theta - 1 \\ \frac{\partial f(p_t, p_t)}{\partial p_t^*} &= 1 - \theta \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in Gleichung (170) führt zu

$$f(p_{t-1}, p_t^*) \simeq (\theta - 1)(p_{t-1} - p_t) + (1 - \theta)(p_t^* - p_t),$$

wodurch die ln-lineare Approximation von Gleichung (169) durch

$$\pi_t = p_t - p_{t-1} \simeq (1 - \theta)(p_t^* - p_{t-1})$$

gegeben ist.

6.2.2 Optimale Preissetzung

Jedes Unternehmen setzt seinen Preis P_t^* so, dass folgendes Optimierungsproblem gelöst wird:

$$\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left(P_t^* Y_{t+k|t} - \Psi_{t+k}(Y_{t+k|t}) \right) \right\} \tag{171}$$

$$s.t. \qquad Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} C_{t+k} \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{172}$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Zielfunktion und Differenzieren nach P_t^* liefert die Bedingung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left(P_t^* \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} C_{t+k} - \Psi_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right) \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left((1 - \varepsilon) \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} C_{t+k} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right) (-\varepsilon) \frac{\left(P_t^*\right)^{-\varepsilon-1}}{P_{t+k}^{-\varepsilon}} C_{t+k} \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left((1 - \varepsilon) Y_{t+k|t} - \Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right) (-\varepsilon) \frac{1}{P_t^*} Y_{t+k|t} \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon \Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right)}{P_t^*} \right) \right\} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \Psi'_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right) \right) \right\}$$

ist. Durch Definition von $\psi_{t+k|t}$ und $\mathcal{M}$ wie in Abschnitt 2.2 ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(P_t^* - \mathcal{M} \psi_{t+k|t} \right) \right\} = 0. \tag{173}$$

Im Folgenden wird Bedingung (173) im *steady state*, das sich durch stabiles Preisniveau auszeichnet, linearisiert. Aus Gründen der Einfachheit wird die Gleichung durch P_{t-1} dividiert und

$$MC_{t+k|t} := \frac{\psi_{t+k|t}}{P_{t+k}}$$

als die realen Grenzkosten in Periode $t+k$ unter der Bedingung, dass die letzte Preisoptimierung in Periode t stattfand, definiert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} - \mathcal{M} MC_{t+k|t} \Pi_{t-1,t+k} \right) \right\} = 0 \tag{174}$$

Um diese Bedingung zu linearisieren, wird zunächst eine Funktion f definiert, deren Variablen die logarithmierten Preise und Grenzkosten ($\ln MC_{t+k|t} = mc_{t+k|t}$) sowie der Logarithmus von $\mathcal{M}$ ($\ln \mathcal{M} = \mu$) sind:

$$\begin{aligned} & f\left(p_t^*, \mathbf{p_t^\infty}, \mathbf{mc_{t|t}^\infty}\right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(e^{p_t^* - p_{t-1}} - e^{\mu + mc_{t+k|t} + p_{t+k} - p_{t-1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{p_t^\infty}$ den unendlichdimensionalen Vektor der logarithmierten zukünftigen Preise und $\mathbf{mc_{t|t}^\infty}$ jenen der Grenzkosten:

$$\mathbf{p_t^\infty} = (p_t, p_{t+1}, p_{t+2}, ...)\,; \qquad \mathbf{mc_{t|t}^\infty} = \left(mc_t, mc_{t+1|t}, mc_{t+2|t}, ...\right)$$

Die Funktion f lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} & f\left(p_t^*, \mathbf{p_t^\infty}, \mathbf{mc_{t|t}^\infty}\right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k g_k\left(p_t^*, p_{t+k}, mc_{t+k|t}\right) h_k\left(p_t^*, p_{t+k}, mc_{t+k|t}\right) \end{aligned}$$

Wobei die Funktionen g_k und h_k durch

$$g_k\left(p_t^*, p_{t+k}, mc_{t+k|t}\right) := Q_{t,t+k} Y_{t+k|t}$$

und

$$h_k\left(p_t^*, p_{t+k}, mc_{t+k|t}\right) := e^{p_t^* - p_{t-1}} - e^{\mu + mc_{t+k|t} + p_{t+k} - p_{t-1}}$$

definiert sind. Die Werte im *steady state* sind

$$p_t^* = p_{t-1},$$

$$\mathbf{p_t^\infty} = (p_{t-1}, p_{t-1}, p_{t-1}, ...) =: \mathbf{p}$$

und

$$\mathbf{mc}^{\infty}_{\mathbf{t|t}} = (mc, mc, mc, ...) =: \mathbf{mc}.$$

Die Taylor-Approximation erster Ordnung von f ist dann

$$\begin{aligned} f\left(p_t^*, \mathbf{p}_\mathbf{t}^\infty, \mathbf{mc}_{\mathbf{t|t}}^\infty\right) \simeq\ & f\left(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc}\right) + \\ & + \left.\frac{\partial f}{\partial p_t^*}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} \left(p_t^* - p_{t-1}\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} \left(p_{t+k} - p_{t-1}\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{\partial f}{\partial mc_{t+k|t}}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} \left(mc_{t+k|t} - mc\right) \end{aligned} \tag{175}$$

Setzt man die *steady state* Werte in die Funktion f ein, so erhält man

$$f\left(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc}\right) = 0 \tag{176}$$

Die Ableitung nach p_t^*, ausgewertet im *steady state* lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial p_t^*}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} =\ & \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left.\frac{\partial g_k}{\partial p_t^*}\right|_{(p_{t-1}, p_{t-1}, mc)} h_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k g_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right) \left.\frac{\partial h}{\partial p_t^*}\right|_{(p_{t-1}, p_{t-1}, mc)} \end{aligned}$$

Da $h_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right)$ gleich Null ist, benötigt man die Ableitungen von g_k nicht. Somit ist nur die zweite Summe aus obiger Gleichung relevant. Die Funktion g_k ist ausgewertet im *steady state* gleich $\beta^k Y$. Die Ableitung von h_k nach p_t^* ausgewertet im *steady state* ist gleich 1, wodurch sich für die Ableitung von f nach p_t^* im *steady state*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p_t^*}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} = Y \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \tag{177}$$

ergibt. Für die Ableitungen nach p_{t+k} ist lediglich der k-te Summand aus Gleichung (175) relevant:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} =\ & \theta^k \left.\frac{\partial g_k}{\partial p_{t+k}}\right|_{(p_{t-1}, p_{t-1}, mc)} h_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right) + \\ & + \theta^k g_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right) \left.\frac{\partial h}{\partial p_{t+k}}\right|_{(p_{t-1}, p_{t-1}, mc)} \end{aligned}$$

Wiederum wird ausgenutzt, dass $h_k\left(p_{t-1}, p_{t-1}, mc\right)$ gleich Null ist und dass g_k im *steady state* gleich $\beta^k Y$ ist. Die Ableitung von h_k nach p_{t+k} ist ausgewertet im *steady state* gleich -1. Daraus ergibt sich

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(p_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mc})} = -Y \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \tag{178}$$

Die Ableitung nach den Grenzkosten lässt sich analog zu oben als

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial mc_{t+k|t}}\right|_{(p_{t-1},\mathbf{p}_{t-1},\mathbf{mc})} = {} & \theta^k \left.\frac{\partial g_k}{\partial mc_{t+k|t}}\right|_{(p_{t-1},p_{t-1},mc)} h_k\left(p_{t-1},p_{t-1},mc\right) + \\
& + \theta^k g_k\left(p_{t-1},p_{t-1},mc\right) \left.\frac{\partial h_k}{\partial mc_{t+k|t}}\right|_{(p_{t-1},p_{t-1},mc)}
\end{aligned}
$$

angeben. Unter Verwendung derselben Eigenschaften wie oben erhält man als Ergebnis, dass die Ableitung von h_k nach mc_{t+k} im *steady state* gleich -1 und

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial mc_{t+k|t}}\right|_{(p_{t-1},\mathbf{p},\mathbf{mc})} = -Y \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \tag{179}
$$

ist. Aus den Gleichungen (175) bis (179) erhält man schließlich unter Berücksichtigung des Erwartungswertes die ln-lineare Approximation von Gleichung (174):

$$
Y \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left(p_t^* - p_{t-1}\right) - Y \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t\left\{\left(mc_{t+k|t} - mc\right) + \left(p_{t+k} - p_{t-1}\right)\right\} = 0
$$

Division durch Y und Definition von

$$
\widehat{mc}_{t+k|t} := mc_{t+k|t} - mc
$$

liefert

$$
p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k|t} + \left(p_{t+k} - p_{t-1}\right)\right\}. \tag{180}
$$

Unter Verwendung der Tatsache, dass die logarithmierten Grenzkosten im *steady state* gleich $-\mu$ sind, lässt sich diese Gleichung zu

$$
\begin{aligned}
& p_t^* - p_{t-1} \\
= {} & (1-\beta\theta)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t\left\{mc_{t+k|t} + p_{t+k}\right\} + \mu \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k - p_{t-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k\right)
\end{aligned}
$$

umformen. Unter Berücksichtigung von

$$
(1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k = 1
$$

erhält man

$$
p_t^* = \mu + (1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t\left\{mc_{t+k|t} + p_{t+k}\right\}.
$$

6.3 Gleichgewichte

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen aus Abschnitt 2.3 abgeleitet.

6.3.1 Die Streuung der Preise

Im Folgenden wird die Approximation $d_t = 0$ hergeleitet. Aus Gleichung (11) folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{1-\varepsilon} di \\ &= \int_0^1 e^{(1-\varepsilon)(p_t(i)-p_t)} di = \int_0^1 f(p_t(i))\, di, \end{aligned}$$

wobei die Funktion $f(p_t(i))$ als

$$f(p_t(i)) := e^{(1-\varepsilon)(p_t(i)-p_t)}$$

definiert ist. Eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung von $f(p_t(i))$ im *steady state* $p_t(i) = p_t$ ist gegeben durch

$$f(p_t(i)) \simeq f(p_t) + \frac{\partial f(p_t)}{\partial p_t(i)}(p_t(i) - p_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(p_t)}{\partial (p_t(i))^2}(p_t(i) - p_t)^2 .$$

Die Auswertungen der Funktion f an der Stelle $p_t(i) = p_t$ bzw. jene ihrer ersten und zweiten Ableitung nach $p_t(i)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(p_t) &= 1 \\ \frac{\partial f(p_t)}{\partial p_t(i)} &= (1-\varepsilon) \\ \frac{\partial^2 f(p_t)}{\partial (p_t(i))^2} &= (1-\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

Daher erhält man

$$f(p_t(i)) \simeq 1 + (1-\varepsilon)(p_t(i) - p_t) + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}(p_t(i) - p_t)^2$$

Somit gilt

$$1 \simeq 1 + (1-\varepsilon)\int_0^1 (p_t(i) - p_t)\, di + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di$$

Umformen führt zu

$$p_t \simeq \int_0^1 p_t(i)\, di + \frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \tag{181}$$

Der erste Term

$$E_i\{p_t(i)\} := \int_0^1 p_t(i)\, di$$

entspricht dem Mittelwert (genauer: dem *cross-sectional mean*) aller logarithmierten Preise.

Analog zu oben (mit $-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$ anstelle von $1-\varepsilon$) lässt sich das Integral $\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di$ durch

$$\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)\, di + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2 \int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \tag{182}$$

approximieren. Aus Gleichung (181) folgt

$$\int_0^1 (p_t(i) - p_t)\, di \simeq -\frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di$$

Einsetzen in Gleichung (182) führt zu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \quad &\simeq \quad 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\alpha}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2 \int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \\ &= \quad 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)\end{aligned}$$

Der letzte Faktor lässt sich dabei zu

$$1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha+\alpha\varepsilon}{1-\alpha}$$

umformen. Durch Definition von Θ als

$$\Theta := \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}$$

erhält man

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \\ \simeq \quad & 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{\Theta}\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di\end{aligned} \tag{183}$$

Da eine Approximation zweiter Ordnung des letzten Integrals gemäß Gali (2008, S. 63) durch

$$\int_0^1 (p_t(i) - p_t)^2\, di \simeq \int_0^1 (p_t(i) - E_t\{p_t(i)\})^2\, di =: var_i\{p_t(i)\}$$

gegeben ist, lässt sich Gleichung (183) wiederum durch

$$\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{\Theta} var_i\{p_t(i)\}$$

approximieren. Aus der Definition d_t folgt

$$\begin{aligned} d_t &= (1-\alpha)\ln \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \\ &\simeq (1-\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)\frac{1}{\Theta} var_i\left\{p_t(i)\right\}\right) \end{aligned}$$

Für kleine x lässt sich $\ln(1+x)$ gut durch x approximieren (Taylor-Approximation erster Ordnung). Da sich diese Analyse auf die Umgebung des *steady state* bezieht, in dem die Inflation Null ist, sollten die Abweichungen der einzelnen Güterpreise von ihrem Mittelwert sehr klein sein. Die Approximation scheint also sinnvoll und es folgt

$$d_t \simeq \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\Theta} var_i\left\{p_t(i)\right\}.$$

Für eine Taylor-Approximation erster Ordnung gilt

$$\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\int_0^1 \left(p_t(i)-p_t\right) di$$

und

$$p_t \simeq \int_0^1 p_t(i)\, di$$

woraus

$$\begin{aligned} d_t &= (1-\alpha)\ln \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}} di \\ &\simeq (1-\alpha)\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\int_0^1 \left(p_t(i)-p_t\right) di\right) \\ &= (1-\alpha)\ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt. Bis zu einer Approximation erster Ordnung ist der Term d_t in der Nähe des *steady state* also gleich Null.

6.3.2 Zusammenhang zwischen Grenzkosten und Grenzproduktivität

Sei F die Produktionsfunktion:

$$Y_{t+k|t} = F(N_{t+k|t})$$

Dann gilt für die Arbeitszeit:

$$N_{t+k|t} = F^{-1}(Y_{t+k|t})$$

Für die Kosten K_{t+k} gilt

$$K_{t+k|t} = W_{t+k}N_{t+k|t} = WF^{-1}(Y_{t+k|t}).$$

Die nominellen Grenzkosten sind also gegeben durch

$$\frac{\partial K_{t+k|t}}{\partial Y_{t+k|t}} = W_{t+k}\frac{\partial F^{-1}}{\partial Y_{t+k|t}} = W_{t+k}\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial Y_{t+k|t}}} = \frac{W_{t+k}}{MPN_{t+k|t}}$$

und die realen durch

$$MC_{t+k|t} = \frac{W_{t+k}}{P_{t+k}MPN_{t+k|t}}. \tag{184}$$

6.3.3 Herleitung der Gleichungen (49) bis (57)

Herleitung von Gleichung (49): Einsetzen von Gleichung (48) in Gleichung (33) führt zu

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k} + \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}(p_{t+k}-p_t^*) + (p_{t+k}-p_{t-1})\right\}$$

Diese Gleichung lässt sich zu

$$\begin{aligned} & p_t^*\left(1+\frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}\right) - p_{t-1} \\ = \; & (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k} + p_{t+k}\left(1+\frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}\right) - p_{t-1}\right\} \end{aligned}$$

umformen, woraus wiederum

$$\begin{aligned} & p_t^* - p_{t-1}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}\right) \\ = \; & (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}\right) + p_{t+k}\right. \\ & \left. -p_{t-1}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}\right)\right\} \end{aligned}$$

folgt. Unter Verwendung der Definition

$$\Theta := \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\varepsilon}$$

erhält man

$$\begin{aligned} & p_t^* - p_{t-1}\Theta \\ = \; & (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k}\Theta + p_{t+k} - p_{t-1}\Theta\right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$p_t^* = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k}\Theta + p_{t+k}\right\}.$$

Durch Subtraktion von p_{t-1} erhält man Gleichung (49):

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+k} + p_{t+k} - p_{t-1}\right\}$$

Herleitung von Gleichung (50): Gleichung (49) lässt sich auch durch Inflationsraten $\pi_{t+k} = p_{t+k} - p_{t+k-1}$ anstatt durch Preise ausdrücken. Dies wird durch Umformung folgender Summe erreicht:

$$\begin{aligned}
& (1-\beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{p_{t+k} - p_{t-1}\} \\
= \; & (1-\beta\theta)(p_t - p_{t-1}) + (1-\beta\theta)\beta\theta E_t \{p_{t+1} - p_{t-1}\} \\
& + (1-\beta\theta)(\beta\theta)^2 E_t \{p_{t+2} - p_{t-1}\} + ... \\
= \; & \left[(p_t - p_{t-1}) + \beta\theta E_t \{p_{t+1} - p_{t-1}\} + (\beta\theta)^2 E_t \{p_{t+2} - p_{t-1}\} + ...\right] \\
& - \left[(p_{t-1} - p_{t-1}) + \beta\theta (p_t - p_{t-1}) + (\beta\theta)^2 E_t \{p_{t+1} - p_{t-1}\} + ...\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{p_{t+k} - p_{t-1}\} - \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{p_{t+k-1} - p_{t-1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{p_{t+k} - p_{t-1} - p_{t+k-1} + p_{t-1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{p_{t+k} - p_{t+k-1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\pi_{t+k}\}
\end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (49) führt also zu

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\Theta \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\widehat{mc}_{t+k}\} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\pi_{t+k}\} \tag{185}$$

Herleitung von Gleichung (51): Ersetzt man in Gleichung (185) t durch $t+1$, so erhält man

$$p_{t+1}^* - p_t = (1-\beta\theta)\Theta \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_{t+1} \{\widehat{mc}_{t+1+k}\} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_{t+1} \{\pi_{t+1+k}\}$$

Anwendung des Erwartungswertes E_t auf beide Seiten liefert

$$\begin{aligned}
& E_t \left\{p_{t+1}^* - p_t\right\} \\
= \; & (1-\beta\theta)\Theta \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\widehat{mc}_{t+1+k}\} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\pi_{t+1+k}\} \\
= \; & (1-\beta\theta)\Theta \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^{k-1} E_t \{\widehat{mc}_{t+k}\} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^{k-1} E_t \{\pi_{t+k}\} \\
= \; & \frac{1}{\beta\theta} \left[(1-\beta\theta)\Theta \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\widehat{mc}_{t+k}\} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \{\pi_{t+k}\}\right]
\end{aligned}$$

Wegen Gleichung (185) gilt

$$\begin{aligned}
& p_t^* - p_{t-1} - \beta\theta E_t \left\{p_{t+1}^* - p_t\right\} \\
= \quad & (1-\beta\theta)\,\Theta \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{\widehat{mc}_{t+k}\right\} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{\pi_{t+k}\right\} \\
& - (1-\beta\theta)\,\Theta \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{\widehat{mc}_{t+k}\right\} - \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left\{\pi_{t+k}\right\} \\
= \quad & (1-\beta\theta)\,\Theta E_t \left\{\widehat{mc}_t\right\} + \pi_t
\end{aligned}$$

Durch eine triviale Umformung erhält man Gleichung (51):

$$p_t^* - p_{t-1} = \beta\theta E_t \left\{p_{t+1}^* - p_t\right\} + (1-\beta\theta)\,\Theta \widehat{mc}_t + \pi_t$$

Herleitung von Gleichung (53): Die Gleichungen (51) und (23) lassen sich wie folgt kombinieren. Aus Gleichung (23) folgt

$$p_t^* = \frac{\pi_t}{1-\theta} + p_{t-1}$$

Einsetzen in Gleichung (51) führt zu

$$\frac{\pi_t}{1-\theta} = \beta\theta E_t \left\{\frac{\pi_{t+1}}{1-\theta}\right\} + (1-\beta\theta)\,\Theta \widehat{mc}_t + \pi_t,$$

woraus

$$\pi_t = \beta E_t \left\{\pi_{t+1}\right\} + \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta} \Theta \widehat{mc}_t$$

folgt. Definiert man

$$\lambda := \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta} \Theta,$$

so erhält man

$$\pi_t = \beta E_t \left\{\pi_{t+1}\right\} + \lambda \widehat{mc}_t$$

Herleitung von Gleichung (54): Gleichung (53) lässt sich wie folgt durch Vorwärtsrechnung lösen:

$$\pi_t = \beta E_t \left\{\beta E_{t+1} \left\{\pi_{t+2}\right\} + \lambda \widehat{mc}_{t+1}\right\} + \lambda \widehat{mc}_t$$

Aus dem *law of iterated projections* folgt

$$\pi_t = \beta^2 E_t \left\{\pi_{t+2}\right\} + \beta\lambda E_t \left\{\widehat{mc}_{t+1}\right\} + \lambda \widehat{mc}_t.$$

Führt man diesen Schritt $n-1$ mal durch, so erhält man

$$\pi_t = \beta^n E_t \left\{\pi_{t+n}\right\} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k E_t \left\{\widehat{mc}_{t+k}\right\}.$$

Da $\beta < 1$ ist, strebt unter der Annahme, dass die Inflation endlich bleibt, für $n \to \infty$ der erste Summand gegen Null und es bleibt

$$\pi_t = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t \left\{\widehat{mc}_{t+k}\right\}$$

Herleitung von Gleichung (55): Durch Gleichung (45) sind die Grenzkosten der Volkswirtschaft gegeben:

$$mc_t = (w_t - p_t) - mpn_t$$

Aus Gleichung (18) und dem logarithmierten Grenzprodukt der Arbeit folgt

$$\begin{aligned} mc_t &= (\sigma y_t + \varphi n_t) - (y_t - n_t) - \ln(1-\alpha) && (186) \\ &= \left(\sigma y_t + \varphi \frac{y_t - a_t}{1-\alpha}\right) - \left(y_t - \frac{y_t - a_t}{1-\alpha}\right) - \ln(1-\alpha) \\ &= y_t\left(\sigma + \frac{\varphi}{1-\alpha}\right) - a_t \frac{\varphi}{1-\alpha} - y_t\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) - a_t \frac{1}{1-\alpha} - \ln(1-\alpha) \\ &= \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right) y_t - \frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t - \ln(1-\alpha) \end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (56): Definiert man den natürlichen Output y_t^n als den Output, der unter flexiblen Preisen produziert wird, so erhält man in diesem Fall

$$mc = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right) y_t^n - \frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t - \ln(1-\alpha) \qquad (187)$$

Subtrahiert man nun diese Gleichung von Gleichung (186), so erhält man Gleichung (56):

$$\widehat{mc}_t = mc_t - mc = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)(y_t - y_t^n)$$

Herleitung von Gleichung (57): Aus Gleichung (187) sowie unter Verwendung von $mc = -\mu$ erhält man

$$\begin{aligned} y_t^n &= \left(\frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t + \ln(1-\alpha) - \mu\right) \frac{1-\alpha}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha} \\ &= \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha} a_t + \frac{(1-\alpha)(\ln(1-\alpha)-\mu)}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha} \end{aligned}$$

Definiert man

$$\vartheta_y^n := -\frac{(1-\alpha)(\mu - \ln(1-\alpha))}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha} > 0$$

und

$$\psi_{ya}^n := \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha},$$

so erhält man

$$y_t^n = \psi_{ya}^n a_t + \vartheta_y^n.$$

6.3.4 Vorwärtslösung der dynamischen IS-Gleichung

Im Folgenden wird Gleichung (65) abgeleitet. Aus Gleichung (64) und dem *law of iterated projections* folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_t &= E_t\left\{\widetilde{y}_{t+2} - \frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - \pi_{t+2} - r^n_{t+1}\right)\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - r^n_t\right) \\
&= E_t\left\{\widetilde{y}_{t+2}\right\} + \frac{1}{\sigma}\left(E_t\left\{\pi_{t+1} - i_t\right\} + E_t\left\{\pi_{t+2} - i_{t+1}\right\}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(E_t\left\{r^n_{t+1}\right\} + E_t\left\{r^n_t\right\}\right)
\end{aligned}$$

Führt man diesen Schritt n mal durch, so erhält man

$$\widetilde{y}_t = E_t\left\{\widetilde{y}_{t+n}\right\} + \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{n} E_t\left\{\pi_{t+k+1} - i_{t+k}\right\} + \sum_{k=0}^{n} E_t\left\{r^n_{t+k}\right\}$$

Unter Verwendung der Definition des Realzinssatzes

$$r_t := i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\}$$

erhält man

$$\widetilde{y}_t = E_t\left\{\widetilde{y}_{t+n}\right\} - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{k} E_t\left\{r_{t+k} - r^n_{t+k}\right\}$$

Unter der Annahme, dass der Output langfristig gegen sein natürliches Niveau strebt, also

$$\lim_{k\to\infty} E_t\left\{\widetilde{y}_{t+k}\right\} = 0$$

gilt, erhält man

$$\widetilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{k} E_t\left\{r_{t+k} - r^n_{t+k}\right\}.$$

7 Ableitung der politikabhängigen Modellgleichungungen

7.1 Herleitung des linearen Gleichungssystems (67)

Setzt man die Zinsregel

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t$$

in die dynamische IS-Kurve ein, so erhält man die Gleichung

$$\widetilde{y}_t = E_t \left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t + v_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - r_t^n\right)$$

Aus dieser Gleichung und der *New Keynesian Phillips Curve* kann unter Verwendung der Definition

$$\widehat{r}_t^n := r_t^n - \rho$$

das folgende Gleichungssystem abgeleitet werden:

$$\begin{pmatrix} \sigma + \phi_y & \phi_\pi \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} + E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \widehat{r}_t^n - v_t \\ \beta E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \end{pmatrix}$$

Löst man dieses System z.B. mit der Regel von Cramer, so erhält man die folgenden Lösungen:

$$\widetilde{y}_t = \frac{\sigma E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} + \left(1 - \phi_\pi \beta\right) E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \widehat{r}_t^n - v_t}{\sigma + \phi_y + \kappa \phi_\pi}$$

$$\pi_t = \frac{\sigma \kappa E_t\left\{\widetilde{y}_{t+1}\right\} + \left[\kappa + \beta\left(\sigma + \phi_y\right)\right] E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} + \kappa\left(\widehat{r}_t^n - v_t\right)}{\sigma + \phi_y + \kappa \phi_\pi}$$

Verwendet man die Definition

$$\Omega := \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa \phi_\pi},$$

so sieht man, dass diese Lösungen äquivalent zum linearen Gleichungssystem (67).

7.2 Die Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung unter den Zinsregeln (66) und (91)

Lemma 1 *Sei $\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1 - \beta\right)\phi_y \neq 0$. Dann ist unter den Zinsregeln (91) und (66) ein Gleichgewicht unter rationalen Erwartungen genau dann eindeutig wenn*

$$\kappa\left(\phi_\pi - 1\right) + \left(1 - \beta\right)\phi_y > 0 \tag{188}$$

gilt.

Beweis. Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}_1$ ist gegeben durch

$$p\left(\lambda\right) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

wobei

$$a_1 = -\frac{\sigma + \kappa + \beta\sigma + \beta\phi_y}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}$$

und

$$a_0 = \frac{\beta\sigma}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi}$$

sind. Nach dem Schurkriterium sind die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms genau dann im Einheitskreis, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} |a_0| &< 1 \\ |a_1| &< 1 + a_0 \end{aligned}$$

Die erste Bedingung impliziert

$$\beta\sigma < \sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi$$

und ist aufgrund der nicht negativen Koeffizienten und $\beta < 1$ erfüllt. Die zweite Bedingung impliziert

$$\kappa + \beta\phi_y < \phi_y + \kappa\phi_\pi \tag{189}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu Gleichung (188). Die Bedingung $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1 - \beta)\phi_y \neq 0$ schließt Eigenwerte auf dem Einheitskreis aus. ■

7.3 Die Gleichgewichtswerte von Inflation und Output Gap unter der Zinsregel (66)

Die Variablen $\widetilde{y}_t$ und π_t werden mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt. Es wird angenommen, dass sie die folgende Form haben.

$$\widetilde{y}_t = \psi_{yv} v_t,$$

$$\pi_t = \psi_{\pi v} v_t$$

Da für den Schock ν_t ein AR(1) Prozess angenommen wurde

$$v_t = \rho_v \nu_{t-1} + \varepsilon_t^v,$$

folgt für die für Periode $t = 1$ erwarteten Werte von *output gap* und Inflation

$$E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} = \psi_{yv}\rho_v v_t$$

und

$$E_t\{\pi_{t+1}\} = \psi_{\pi v}\rho_v v_t.$$

Einsetzen obiger Gleichungen für $\widetilde{y}_t$ und π_t in Gleichung (64) führt zu

$$\psi_{yv} v_t = \psi_{yv}\rho_v v_t - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \psi_{\pi v}\rho_v v_t - r_t^n\right).$$

In diese Gleichung wird wiederum die Zinsregel (66) eingesetzt:

$$\psi_{yv} v_t = \psi_{yv}\rho_v v_t - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi\psi_{\pi v} v_t + \phi_y\psi_{yv} v_t + v_t - \psi_{\pi v}\rho_v v_t - r_t^n\right)$$

Aufgrund der Definition

$$r_t^n := \rho + \sigma \psi_{ya}^n E_t \{\Delta a_{t+1}\}$$

folgt

$$r_t^n = \rho$$

und somit

$$\psi_{yv} = \psi_{yv}\rho_v - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi \psi_{\pi v} + \phi_y \psi_{yv} - \psi_{\pi v}\rho_v + 1\right).$$

Daraus erhält man den Koeffizienten ψ_{yv} in Abhängigkeit von $\psi_{\pi v}$:

$$\psi_{yv} = \frac{(\rho_v - \phi_\pi)\,\psi_{\pi v} - 1}{\sigma(1-\rho_v) + \phi_y}$$

Durch Einsetzen in die *New Keynesian Phillips Curve* (59) erhält man den Koeffizienten $\psi_{\pi v}$:

$$\psi_{\pi v} v_t = \beta \psi_{\pi v}\rho_v v_t + \kappa \frac{(\rho_v - \phi_\pi)\,\psi_{\pi v} - 1}{\sigma(1-\rho_v) + \phi_y}\nu_t$$

$$\psi_{\pi v} = \frac{-\kappa}{(1-\beta\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v) + \phi_y\right] + \kappa(\phi_\pi - \rho_v)}$$

Definiert man

$$\Lambda_\nu := \frac{1}{(1-\beta\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v) + \phi_y\right] + \kappa(\phi_\pi - \rho_v)},$$

so erhält man

$$\pi_t = -\kappa\Lambda_\nu v_t$$

Der Koeffizient $\psi_{\pi v}$ kann nun wieder oben eingesetzt werden, um den Koeffizienten ψ_{yv} zu erhalten:

$$\psi_{yv} = \frac{-(1-\beta\rho_v)}{(1-\beta\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v) + \phi_y\right] + \kappa(\phi_\pi - \rho_v)}$$

Daraus ergibt sich

$$\widetilde{y}_t = -(1-\beta\rho_v)\,\Lambda_\nu v_t.$$

7.4 Die Auswirkungen des geldpolitischen Schocks auf Inflation und Output Gap

Es wird nun gezeigt, dass Inflation und *output gap* negativ von v_t abhängen wenn Bedingung (93) erfüllt ist. Hierfür muss gezeigt werden, dass die Ungleichung

$$\Lambda_\nu := \frac{1}{(1-\beta\rho_v)\left[\sigma(1-\rho_v) + \phi_y\right] + \kappa(\phi_\pi - \rho_v)} > 0$$

erfüllt ist, wenn Gleichung

$$\kappa + \beta\phi_y < \phi_y + \kappa\phi_\pi \tag{190}$$

gilt. Λ_ν ist dann größer als Null, wenn der Nenner positiv ist. Dies ist äquivalent zu

$$\sigma(1-\rho_v)(1-\beta\rho_v) + \left[\phi_y + \kappa\phi_\pi - \left(\kappa + \beta\phi_y\right)\rho_v\right] > 0.$$

Der linke Summand ist in jedem Fall positiv und da $\rho_v \leq 1$ ist, ist bei Erfüllung der Bedingung (190) auch der rechte Summand positiv. Somit gilt $\Lambda_\nu > 0$.

7.5 Die Veränderung der Geldnachfrage nach dem geldpolitischen Schock

Die Geldnachfragefunktion ist gegeben durch

$$m_t = p_t + y_t - \eta i_t,$$

die Ableitung nach ε_t^{ν} somit durch

$$\frac{dm_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} = \frac{dp_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} + \frac{dy_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} - \eta \frac{di_t}{d\varepsilon_t^{\nu}}.$$

Die drei zu bestimmenden Ableitungen werden einzeln durchgeführt: Die Ableitung des Preises ist gleich der Ableitung der Inflation, da die Ableitung des vergangenen Preises nach dem aktuellen Schock Null ist:

$$\begin{aligned} p_t &= p_{t-1} + \pi_t \\ \frac{dp_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} &= \frac{dp_{t-1}}{d\varepsilon_t^{\nu}} + \frac{d\pi_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= \frac{d\pi_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= -\kappa \Lambda_{\nu} \end{aligned}$$

Ähnlich kann bei der Ableitung des Outputs vorgegangen werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} &= \frac{d\widetilde{y}_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} + \frac{dy_t^n}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= \frac{d\widetilde{y}_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= -\left(1 - \beta \rho_v\right) \Lambda_{\nu} \end{aligned}$$

Die Ableitung des Zinssatzes erhält man nun aus Gleichung (66):

$$\begin{aligned} \frac{di_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} &= \phi_{\pi} \frac{d\pi_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} + \phi_y \frac{d\widetilde{y}_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} + \frac{d\nu_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} \\ &= -\kappa \phi_{\pi} \Lambda_{\nu} - \left(1 - \beta \rho_v\right) \phi_y \Lambda_{\nu} + 1 \end{aligned}$$

Aus diesen drei Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dm_t}{d\varepsilon_t^{\nu}} &= -\kappa \Lambda_{\nu} - \left(1 - \beta \rho_v\right) \Lambda_{\nu} + \eta \left(\kappa \phi_{\pi} \Lambda_{\nu} + \left(1 - \beta \rho_v\right) \phi_y \Lambda_{\nu} - 1\right) \\ &= -\Lambda_{\nu} \left(\kappa + 1 - \beta \rho_v - \eta \kappa \phi_{\pi} \Lambda_{\nu} - \eta \left(1 - \beta \rho_v\right) \phi_y + \frac{\eta}{\Lambda_{\nu}}\right) \\ &= -\Lambda_{\nu} \left[\left(1 - \beta \rho_v\right)\left(1 + \sigma \eta \left(1 - \rho_v\right)\right) + \kappa \left(1 - \eta \rho_v\right)\right] \end{aligned}$$

7.6 Optimierungsproblem des sozialen Planers

Im Folgenden wird das Optimierungsproblem (75) bis (78) gelöst. Aus denselben Gründen wie in Abschnitt 6.1.1 beschränkt sich die Lösung auf den Fall einer endlichen Anzahl von Firmen. Der wohlfahrtsmaximierende Planer löst folgendes Optimierungsproblem:

$$\max_{C_t, N_t} U(C_t, N_t) \tag{191}$$

$$s.t. \qquad C_t := \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{192}$$

$$s.t. \qquad C_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha} \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{193}$$

$$s.t. \qquad N_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N_t(i) \tag{194}$$

Gleichung (192) entspricht dem Dixit-Stiglitz Aggregat in der Notation von Blanchard und Kiyotaki (1987). Um Verwechslungen zu vermeiden wird die Anzahl der Firmen hier durch den Kleinbuchstaben n bezeichnet. Gleichung (194) beschreibt das Aggregat der Arbeitszeit. Setzt man Gleichung (193) in Gleichung (192) und diese wiederum in die Zielfunktion (191) ein und setzt man außerdem Gleichung (194) in die Zielfunktion ein, so erhält man das folgende äquivalente Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen:

$$\max_{\{N_t(i)\}_{i=1}^n} U \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(A_t N_t(i)^{1-\alpha} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N_t(i) \right)$$

Die Bedingungen erster Ordnung erhält man aus folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial N_t(i)} = \frac{\partial U}{\partial C_t} \frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} \frac{\partial C_t(i)}{\partial N_t(i)} + \frac{\partial U}{\partial N_t} \frac{\partial N_t}{\partial N_t(i)} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{195}$$

Es werden nun sämtliche Ableitungen bestimmt, welche in Gleichung (195) benötigt werden. Die Ableitung des Konsumindex nach dem Konsum eines Gutes ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} &= \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left(\sum_{i=1}^{n} (C_t(i))^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} (C_t(i))^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} (C_t(i))^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{n} C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} (C_t(i))^{-\frac{1}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Die Ableitung des Konsums eines Gutes nach der Arbeitszeit, welche für dieses Gut aufgewendet wird, ist

$$\frac{\partial C_t(i)}{\partial N_t(i)} = (1-\alpha) A_t N_t(i)^{-\alpha} =: MPN_t. \tag{196}$$

Die letzte Ableitung ist trivial:

$$\frac{\partial N_t}{\partial N_t(i)} = \frac{1}{n}$$

Einsetzen dieser Ableitungen in Gleichung (195) liefert

$$\frac{\partial U}{\partial N_t(i)} = \frac{\partial U}{\partial C_t} \frac{1}{n} C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} (C_t(i))^{-\frac{1}{\varepsilon}} (1-\alpha) A_t N_t(i)^{-\alpha} + \frac{\partial U}{\partial N_t} \frac{1}{n} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(C_t(i)\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} (1-\alpha) A_t N_t(i)^{-\alpha} \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{197}$$

Aufgrund von Gleichung (193) gilt

$$N_t(i)^{-\alpha} = \left(\frac{C_t(i)}{A_t}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

wodurch man Gleichung (197) als

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = C_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(C_t(i)\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{1}{\varepsilon}} (1-\alpha) A_t^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \qquad i = 1, 2, ..., n$$

schreiben kann. Diese Gleichung muss für alle $i = 1, 2, ..., n$ gelten. Dies ist nur dann möglich wenn $C_t(i)$ für alle $i = 1, 2, ..., n$ identisch ist, da alle anderen Variablen, nachdem die einzelnen Werte für $C_t(i)$ gewählt wurden, fest sind. Aus Gleichung (192) folgt daher

$$C_t = \left(\frac{1}{n} n C_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = C_t(i)$$

Diese Gleichung entspricht Gleichung (79) des stetigen Optimierungsproblems aus Abschnitt 3.2. Aus den Gleichungen (193) und (194) folgt unmittelbar, dass auch für die Arbeitszeit in den einzelnen Firmen

$$N_t(i) = N_t \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

also die mit Bedingung (80) korrespondierende Gleichung, gelten muss. Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse sowie der Gleichung (196) erhält man aus Gleichung (197)

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial N_t}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} = (1-\alpha) A_t N_t(i)^{-\alpha} = MPN_t,$$

also die mit Gleichung (81) korrespondierende Gleichung.

7.7 Auftreten multipler Gleichgewichte unter der Zinsregel (89)

Beweis. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\mathbf{A}_0 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ \kappa & \beta + \frac{\kappa}{\sigma} \end{bmatrix}$$

aus Abschnitt 3.4.1 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)(\beta + \frac{\kappa}{\sigma} - \lambda) - \frac{\kappa}{\sigma} \\ &= \lambda^2 - \lambda(1 + \beta + \frac{\kappa}{\sigma}) + \beta \end{aligned}$$

Durch die kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\beta+\frac{\kappa}{\sigma}}{2} \pm \frac{\sqrt{(1+\beta+\frac{\kappa}{\sigma})^2 - 4\beta}}{2}.$$

Zunächst wird gezeigt, dass die Eigenwerte reell sind. Hierfür muss

$$(1+\beta+\frac{\kappa}{\sigma})^2 - 4\beta > 0$$

erfüllt sein. Diese Ungleichung kann man zu

$$(1-\beta)^2 + 2\,(1+\beta)\,\frac{\kappa}{\sigma} + \left(\frac{\kappa}{\sigma}\right)^2 > 0$$

umformen. Alle drei Summanden der linken Seite sind positiv, wodurch die Ungleichung erfüllt ist.

Es wird nun gezeigt, dass einer dieser reellen Eigenwerte größer eins ist: Sei auf der x-Achse λ aufgetragen und auf der y-Achse $p(\lambda)$. Dann ist $p(\lambda)$ eine nach oben geöffnete Parabel, welche die Ordinate im Punkt β schneidet. Ihr Anstieg bei $\lambda = 0$ ist negativ. Der Scheitelpunkt der Parabel befindet sich daher im rechten unteren Quadranten des Koordinatensystems und die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind positiv. Es gilt $p(1) = -\frac{\kappa}{\sigma}$. Das bedeutet, dass eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms größer ist als eins, wodurch das Gleichungssystem (90) nicht eindeutig lösbar ist. ■

7.8 Herleitung des linearen Gleichungssystems (92)

Das lineare Differenzengleichungssystem (92) wird aus der dynamischen IS-Gleichung (87)

$$\widetilde{y}_t = E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n\right), \tag{198}$$

der *New Keynesian Phillips Curve* (88)

$$\pi_t = \beta E_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa \widetilde{y}_t \tag{199}$$

und der Zinsregel (91)

$$i_t = r_t^n + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t \tag{200}$$

abgeleitet. Setzt man Gleichung (200) in Gleichung (198) ein, so erhält man

$$\widetilde{y}_t = E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi \pi_t + \phi_y \widetilde{y}_t - E_t\{\pi_{t+1}\}\right).$$

Einsetzen von Gleichung (199) führt zu

$$\widetilde{y}_t = E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi\left(\beta E_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa \widetilde{y}_t\right) + \phi_y \widetilde{y}_t - E_t\{\pi_{t+1}\}\right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\widetilde{y}_t\left(\sigma + \phi_\pi \kappa + \phi_y\right) = \sigma E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\} + (1-\beta\phi_\pi)\,E_t\{\pi_{t+1}\}.$$

Unter der Definition

$$\Omega := \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi} \tag{201}$$

erhält man dadurch die erste Gleichung des Systems (92)

$$\widetilde{y}_t = \Omega \left[\sigma E_t \left\{ \widetilde{y}_{t+1} \right\} + \left(1 - \beta \phi_\pi \right) E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} \right]. \tag{202}$$

Setzt man nun Gleichung (202) in Gleichung (199) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (201) die zweite Gleichung von (92).

$$\begin{aligned} \pi_t &= \beta E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} \\ &\quad + \kappa \frac{1}{\sigma + \phi_y + \kappa \phi_\pi} \left[\sigma E_t \left\{ \widetilde{y}_{t+1} \right\} + \left(1 - \beta \phi_\pi \right) E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} \right], \end{aligned}$$

woraus

$$\pi_t = \Omega \left[\kappa \sigma E_t \left\{ \widetilde{y}_{t+1} \right\} + \left(\kappa + \beta \left(\sigma + \phi_y \right) \right) E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} \right] \tag{203}$$

folgt. Durch Definition von

$$\mathbf{A}_1 := \Omega \left[\begin{array}{cc} \sigma & 1 - \beta \phi_\pi \\ \sigma \kappa & \kappa + \beta \left(\sigma + \phi_y \right) \end{array} \right]$$

erhält man aus den Gleichungen (202) und (203) das lineare Gleichungssystem (92)

$$\left[\begin{array}{c} \widetilde{y}_t \\ \pi_t \end{array} \right] = \mathbf{A}_1 \left[\begin{array}{c} E_t \left\{ \widetilde{y}_{t+1} \right\} \\ E_t \left\{ \pi_{t+1} \right\} \end{array} \right].$$

8 Ableitung der Gleichungen bei Lohnrigiditäten und monopolistischer Konkurrenz auf dem Arbeitsmarkt

8.1 Die optimale Lohnsetzung

Im Folgenden wird das Nutzenmaximierungsproblem der Haushalte bei Lohnrigiditäten, (105) bis (107), gelöst:

$$\max_{W_t^*} E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) \right\} \tag{204}$$

$$s.t. \qquad N_{t+k|t} = \left(\frac{W_t^*}{W_{t+k}}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k} \tag{205}$$

$$P_{t+k}C_{t+k|t} + E_{t+k}\left\{Q_{t+k,t+k+1}D_{t+k+1|t}\right\} \leq D_{t+k|t} + W_t^* N_{t+k|t} - T_{t+k} \tag{206}$$

Aufgrund der Spezifikation der Nutzenfunktion ist die Nebenbedingung (206) im Optimum in Gleichheitsform erfüllt. Eine alternative Darstellung dieser Bedingung lautet daher:

$$\begin{aligned} C_{t+k|t} \quad = \quad & \frac{1}{P_{t+k}} \Big[D_{t+k|t} + W_t^* \left(W_t^*/W_{t+k}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k} - T_{t+k} \\ & \qquad - E_{t+k}\left\{Q_{t+k,t+k+1}D_{t+k+1|t}\right\}\Big] \end{aligned} \tag{207}$$

Die Bedingung erster Ordnung ist durch

$$\frac{\partial}{\partial W_t^*} E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) \right\} = 0$$

gegeben. Dies ist äquivalent zu

$$E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k \frac{\partial}{\partial W_t^*} U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) \right\} = 0 \tag{208}$$

Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial W_t^*} U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right)$ lässt sich folgendermaßen zusammensetzen:

$$\frac{\partial}{\partial W_t^*} U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) = \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \frac{\partial C_{t+k|t}}{\partial W_t^*} + \frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}} \frac{\partial N_{t+k|t}}{\partial W_t^*} \tag{209}$$

Die benötigten Ableitungen werden aus den Gleichungen (207) bzw. (205) bestimmt:

$$\frac{\partial C_{t+k|t}}{\partial W_t^*} = \frac{1}{P_{t+k}} (1-\varepsilon_w) \left(\frac{W_t^*}{W_{t+k}}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k} = \frac{1}{P_{t+k}} (1-\varepsilon_w) N_{t+k|t}$$

$$\frac{\partial N_{t+k|t}}{\partial W_t^*} = (-\varepsilon_w) \left(\frac{W_t^*}{W_{t+k}}\right)^{-\varepsilon_w} N_{t+k} \frac{1}{W_t^*} = (-\varepsilon_w) \frac{N_{t+k|t}}{W_t^*}$$

Einsetzen in die Gleichung (209) liefert

$$\frac{\partial}{\partial W_t^*} U\left(C_{t+k|t}, N_{t+k|t}\right) = \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \frac{1}{P_{t+k}} \left(1-\varepsilon_w\right) N_{t+k|t} - \frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}} \varepsilon_w \frac{N_{t+k|t}}{W_t^*}.$$

Setzt man diese Gleichung wiederum in Gleichung (208) ein, so erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k E_t \left\{ \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \frac{1}{P_{t+k}} \left(1-\varepsilon_w\right) N_{t+k|t} - \frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}} \varepsilon_w \frac{N_{t+k|t}}{W_t^*} \right\} = 0$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu Gleichung (108)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k E_t \left\{ N_{t+k|t} \left[\frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \frac{W_t^*}{P_{t+k}} + \frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}} \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1} \right] \right\} = 0. \qquad (210)$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen

$$\mathcal{M}_w := \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_w - 1}$$

und

$$MRS_{t+k|t} := -\frac{\frac{\partial U}{\partial N_{t+k|t}}}{\frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}}}$$

erhält man aus Gleichung (210) die Gleichung (109) aus Abschnitt 4.2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k E_t \left\{ N_{t+k|t} \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \left[\frac{W_t^*}{P_{t+k}} - \mathcal{M}_w MRS_{t+k|t} \right] \right\} = 0 \qquad (211)$$

Im Folgenden erfolgt eine ln-lineare Approximation von Gleichung (211) im *steady state*. Für diesen Zweck wird eine Funktion f folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} & f\left(w_t^*, \mathbf{p}_t^{\infty}, \mathbf{mrs}_{t|t}^{\infty}\right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k N_{t+k|t} \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}} \left[e^{w_t^* - p_{t+k}} - e^{\mu^w + mrs_{t+k|t}} \right] \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{p_t^{\infty}}$ und $\mathbf{mc_{t|t}^{\infty}}$ durch die folgenden unendlichdimensionalen Vektoren definiert sind:

$$\mathbf{p_t^{\infty}} = \left(p_t, p_{t+1}, p_{t+2}, ...\right); \qquad \mathbf{mrs_{t|t}^{\infty}} = \left(mrs_t, mrs_{t+1|t}, mrs_{t+2|t}, ...\right)$$

$$\begin{aligned} & f\left(w_t^*, \mathbf{p}_t^{\infty}, \mathbf{mrs}_{t|t}^{\infty}\right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k \left\{ g_k\left(w_t^*, p_{t+k}, mrs_{t+k|t}\right) h_k\left(w_t^*, p_{t+k}, mrs_{t+k|t}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$g_k\left(w_t^*, p_{t+k}, mrs_{t+k|t}\right) := N_{t+k|t} \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}}$$

$$h_k\left(w_t^*, p_{t+k}, mrs_{t+k|t}\right) := e^{w_t^* - p_{t+k}} - e^{\mu^w + mrs_{t+k|t}}$$

$$
\begin{aligned}
f\left(w_t^*, \mathbf{p}_t^\infty, \mathbf{mrs}_{t|t}^\infty\right) \quad \simeq \quad & f\left(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs}\right) + \qquad (212)\\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial w_t^*}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} \left(w_t^* - w_{t-1}\right) + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} \left(p_{t+k} - p_{t-1}\right) + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{\partial f}{\partial mrs_{t+k|t}}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} \left(mrs_{t+k|t} - mrs\right) \\
& f\left(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left.\frac{\partial f}{\partial w_t^*}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k \left\{ \left.\frac{\partial g_k}{\partial w_t^*}\right|_{(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs)} h_k\left(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs\right) \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k \left\{ g_k\left(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs\right) \left.\frac{\partial h_k}{\partial w_t^*}\right|_{(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs)} \right\}
\end{aligned}
$$

Da h_k im *steady state* gleich Null ist, benötigt man die Ableitung von g_k nicht und nur die zweite Summe ist relevant. Wegen Gleichung (205) gilt im *steady state* $N_{t+k|t} = N_{t-1}$, wodurch $g_k\left(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs\right)$ gleich $N_{t-1}\frac{\partial U}{\partial C_{t-1}}$ ist. Die Ableitung von h_k nach w_t^* ist ausgewertet im *steady state* gleich 1. Daraus erhält man

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial w_t^*}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k N_{t+k} \frac{\partial U}{\partial C_{t+k|t}}. \qquad (213)
$$

Für die Ableitung nach p_{t+k} gilt

$$
\begin{aligned}
& \left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} \\
= \quad & \left(\beta\theta_w\right)^k \left.\frac{\partial g_k}{\partial p_{t+k}}\right|_{(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs)} h_k\left(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs\right) \\
& + \left(\beta\theta_w\right)^k g_k\left(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs\right) \left.\frac{\partial h_k}{\partial p_{t+k}}\right|_{(w_{t-1}, p_{t-1}, mrs)}
\end{aligned}
$$

Mit dem gleichen Argument wie zuvor ist nur der zweite Summand von Bedeutung. Die Ableitung von h_k nach p_{t+k} ist ausgewertet im *steady state* gleich -1, woraus

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial p_{t+k}}\right|_{(w_{t-1}, \mathbf{p}, \mathbf{mrs})} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\theta_w\right)^k N_{t-1} \frac{\partial U}{\partial C_{t-1}} \qquad (214)
$$

folgt. Für die Ableitung nach der Grenzrate der Substitution gilt

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{\partial f}{\partial mrs_{t+k}}\right|_{(w_{t-1},\mathbf{p},\mathbf{mrs})} \\
= \; & (\beta\theta_w)^k \left.\frac{\partial g_k}{\partial mrs_{t+k|t}}\right|_{(w_{t-1},p_{t-1},mrs)} h_k(w_{t-1},p_{t-1},mrs) + \\
& + (\beta\theta_w)^k g_k(w_{t-1},p_{t-1},mrs) \left.\frac{\partial h_k}{\partial mrs_{t+k|t}}\right|_{(w_{t-1},p_{t-1},mrs)} .
\end{aligned}$$

Die Ableitung von h_k nach $mrs_{t+k|t}$ ist gleich -1. Also gilt

$$\left.\frac{\partial f}{\partial mrs_{t+k|t}}\right|_{(w_{t-1},\mathbf{p},\mathbf{mrs})} = -\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k N_{t-1}\frac{\partial U}{\partial C_{t-1}}. \tag{215}$$

Aus den Gleichungen (212) bis (215) folgt unter Berücksichtigung des Erwartungswertes die ln-lineare Approximation von Gleichung (211):

$$\begin{aligned}
0 \; = \; & \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t\left\{N_{t-1}\frac{\partial U}{\partial C_{t-1}}\left[(w_t^* - w_{t-1}) - (p_{t+k} - p_{t-1})\right.\right. \\
& \left.\left. - \left(mrs_{t+k|t} - mrs\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Multiplizieren dieser Gleichung mit der Konstante $N_{t-1}\frac{\partial U}{\partial C_{t-1}}$ führt zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k \left[E_t\left\{-mrs_{t+k|t} - p_{t+k}\right\} + w_t^* - w_{t-1} + p_{t-1} + mrs\right] = 0.$$

Da im *steady state*

$$\frac{W_{t-1}}{P_{t-1}} = \mathcal{M}_w MRS$$

und daher

$$w_{t-1} - p_{t-1} = \mu^w + mrs$$

gilt, folgt

$$w_t^*\frac{1}{1-\beta\theta_w} = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k \left[E_t\left\{mrs_{t+k|t} + p_{t+k}\right\} + \mu^w\right]$$

und daraus Gleichung (111):

$$w_t^* = \mu^w + (1-\beta\theta_w)\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta_w)^k E_t\left\{mrs_{t+k|t} + p_{t+k}\right\}$$

8.2 Herleitung der Gleichungen (118), (123) und (124)

Herleitung von Gleichung (118): Aus Gleichung (117) erhält man

$$w_t^* = \frac{w_t - \theta_w w_{t-1}}{1-\theta_w}.$$

Einsetzen in Gleichung (116) liefert

$$\frac{w_t - \theta_w w_{t-1}}{1-\theta_w} = \beta\theta_w E_t \left\{ \frac{w_{t+1} - \theta_w w_t}{1-\theta_w} \right\} + (1-\beta\theta_w) \left(w_t - \frac{1}{1+\varepsilon_w \varphi} \widehat{\mu}_t^w \right).$$

Umformen führt zu

$$\begin{aligned} w_t - \theta_w w_{t-1} &= \beta\theta_w E_t \{w_{t+1}\} - \beta\theta_w^2 w_t + (1-\theta_w)(1-\beta\theta_w) w_t \\ &\quad - \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{1+\varepsilon_w\varphi} \widehat{\mu}_t^w, \end{aligned}$$

woraus man

$$\theta_w (w_t - w_{t-1}) = \beta\theta_w E_t \{w_{t+1} - w_t\} - \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{1+\varepsilon_w\varphi} \widehat{\mu}_t^w$$

erhält. Definiert man nun

$$\lambda_w := \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{\theta_w (1+\varepsilon_w\varphi)}$$

und verwendet die Schreibweise der Lohninflation $\pi_t^w = w_t - w_{t-1}$, so erhält man Gleichung (118) aus Abschnitt 4.2:

$$(\pi_t^w) = \beta\theta_w E_t \left\{ \pi_{t+1}^w \right\} - \lambda_w \widehat{\mu}_t^w$$

Herleitung von Gleichung (123): Für den Preisaufschlag gilt

$$\mu_t^p = -mc_t$$

Wegen Gleichung (184) gilt für die Grenzkosten

$$mc_t = w_t - p_t - mpn_t,$$

woraus

$$\widehat{\mu}_t^p = \mu_t^p - \mu^p = mpn_t - \omega_t - \mu^p \tag{216}$$

folgt. Wegen Gleichung (122),

$$\omega_t^n = \ln(1-\alpha) + (y_t^n - n_t^n) - \mu^p,$$

und

$$\omega_t = \ln(1-\alpha) + (y_t - n_t) - \mu_t^p$$

gilt

$$\widetilde{\omega}_t = \omega_t - \omega_t^n = (y_t - n_t) - (y_t^n - n_t^n) - (\mu_t^p - \mu^p).$$

Daraus folgt

$$\widehat{\mu}_t^p = (\widetilde{y}_t - \widetilde{n}_t) - \widetilde{\omega}_t. \tag{217}$$

Außerdem gelten wegen der Produktionsfunktion die Gleichungen

$$y_t = a_t + (1-\alpha) n_t$$

und

$$y_t^n = a_t + (1-\alpha) n_t^n,$$

woraus

$$\widetilde{y}_t = (1-\alpha)\widetilde{n}_t \tag{218}$$

folgt. Aus den Gleichungen

$$n_t = \frac{y_t - a_t}{1-\alpha}$$

und

$$n_t^n = \frac{y_t^n - a_t}{1-\alpha}$$

folgt

$$\widetilde{n}_t = \frac{1}{1-\alpha}\widetilde{y}_t. \tag{219}$$

Einsetzen in Gleichung (218) führt zu

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_t - \widetilde{n}_t &= -\alpha\widetilde{n}_t \\ &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\widetilde{y}_t,\end{aligned}$$

woraus man schließlich durch Einsetzen in Gleichung (217) die Gleichung (123)

$$\widehat{\mu}_t^p = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\widetilde{y}_t - \widetilde{\omega}_t$$

erhält.

Herleitung von Gleichung (124): Aufgrund von Gleichung (110) gilt

$$\omega_t = w_t - p_t = \mu_t^w + mrs_t,$$

wodurch man die Abweichung des Lohnaufschlags von seinem Wert im steady state schreiben kann als

$$\widehat{\mu}_t^w = \mu_t^w - \mu^w = \omega_t - mrs_t - \mu^w.$$

Außerdem gelten aufgrund von Gleichung (112) und der Markträumungsbedingung $y_t = c_t$ die Gleichungen

$$mrs_t = \sigma y_t + \varphi n_t$$

und

$$mrs = \sigma y_t^n + \varphi n_t^n.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$mrs_t - mrs = \sigma\widetilde{y}_t + \varphi\widetilde{n}_t. \tag{220}$$

Aus den Gleichungen

$$\mu_t^w = \omega_t - mrs_t$$

und

$$\mu^w = \omega_t^n - mrs$$

folgt

$$\widehat{\mu}_t^w = \widetilde{\omega}_t - (mrs_t - mrs)\,.$$

Einsetzen von Gleichung (220) führt zu

$$\widehat{\mu}_t^w = \widetilde{\omega}_t - (\sigma\widetilde{y}_t + \varphi\widetilde{n}_t) \tag{221}$$

und wegen Gleichung (219) folgt Gleichung (124):

$$\widehat{\mu}_t^w = \widetilde{\omega}_t - \left(\sigma + \frac{\varphi}{1-\alpha}\right)\widetilde{y}_t$$

Literatur

[1] Akerlof, G. und J. Yellen (1985): „A Near-Rational Model of the Business Cycle with Wage and Price Inertia", *Quaterly Journal of Economics 100, 823-838*

[2] Ball, L. und D. Romer (1990): „Real Rigidities and the Non-Neutrality of Money", *Review of Economic Studies 57, 183-203*

[3] Blanchard, O. J. und G. Illing (2009): „Makroökonomie", *Pearson Studium*

[4] Blanchard, O. J. und C. M. Kahn (1980): „The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations", *Econometrica 48, 1305-1311*

[5] Blanchard , O. J. und N. Kiyotaki (1987): „Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand", *American Economic Review, 96, 1418-1448*

[6] Bullard, J. und K. Mitra (2002): „Learning about Monetary Policy Rules", *Journal of Monetary Economics 49, 1105-1129*

[7] Calvo, G. (1983): „Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework", *Journal of Monetary Economics 12, 383-398*

[8] Caravale, G. (1987): „The Neo-Keynesian School: Some Internal Controversies", *Atlantic Economic Journal 15, 1-15*

[9] Dixit, A. K. und J. E. Stiglitz (1977): „Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review 67, 297-308*

[10] Economist, The (2002): „Weapons of mass distraction", *26. September 2002*

[11] Erceg, C. J., D. W. Henderson und A. T. Levin (2000): „Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts", *Journal of Monetary Economics 46, 281-313*

[12] EZB (2009a): „Die Umsetzung der Geldpolitik seit August 2007", *in: Monatsbericht Juli 2009*

[13] EZB (2009b): „Die jüngsten Veränderungen in den Bilanzen des Eurosystems, des Federal Reserve System und der Bank of Japan", *in: Monatsbericht Oktober 2009*

[14] Friedman, M. und A. Schwartz (1963): „A Monetary History of the United States, 1867-1960", *Princeton University Press*

[15] Gali, J. (2008): „Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework", *Princeton University Press*

[16] Goodhart, C. (2007): „Whatever Became of the Monetary Aggregates?", *As adapted from the Preston Lecture in honour of Maurice, Lord Preston, delivered at Queen Mary Collage, London, on February 28, 2007 https://www.bankofengland.co.uk/publications/events/ccbs_ cornell2007/ paper_ 6goodhart.pdf; aufgerufen am 8. Februar 2010*

[17] Mankiw, G. (1985): „Small Menu Costs and Large Business Cycles: A Macroeconomic Model of Monopoly", *Quaterly Journal of Economics 100, 529-539*

[18] Obstfeld, M und K. Rogoff (1996): „Foundations of International Macroeconomics", *MIT Press*

[19] Romer, D. (2006): „Advanced Macroeconomics", *McGraw-Hill Higher Education*

[20] Walsh, C. E. (2003): „Monetary Theory and Policy", *MIT Press*

[21] Woodford, M. (2003): „Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy", *Princeton University Press*