

TU

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

D I P L O M A R B E I T

MASTER'S THESIS

Rheologische Modelle zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphalten

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Ronald Blab und
Dipl.-Ing. Karl Kappl

E 233 Institut für Straßenbau und Straßenerhaltung

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen
von

Bernhard Hofko

E610 0125488

Migazziplatz 7/14

1120 Wien

Wien, im November 2006

Vorwort

Die Prüfung von Asphalten und Bitumen auf materialtechnisch fundierten Grundlagen stellt ein junges Forschungsgebiet dar, vergleicht man es mit Verfahren zur Quantifizierung von Parametern anderer, industriell eingesetzter Stoffe. Lange Zeit war eine empirische Charakterisierung – etwa durch Erweichungspunkt Ring und Kugel, Brechpunkt nach Fraaß und Nadelpenetration – Stand der Technik.

Erst in den letzten Jahren haben so genannte Gebrauchverhaltensorientierte (GVO) Prüfverfahren in den Alltag der Materialprüfung Eingang gefunden und sind inzwischen zum Großteil in europäischen Normen geregelt. Durch diese Verfahren erhält man physikalisch fundierte, vergleichbare und damit auch naturwissenschaftlich anerkannte Parameter für Asphalte.

Ein weiterer Schritt ist die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Asphalten und Bitumen mit Hilfe rheologischer Modelle. Erste brauchbare Modelle lieferten Huet und Sayegh in den Sechzigerjahren des letzten Jahrhunderts, die seither weiterentwickelt und verfeinert wurden. So lassen sich zu einem bestimmten Modell Parameter für verschiedene Asphalte/Bitumen ableiten, die dann unter anderem zur numerischen Simulation mit Finite-Elemente-Methoden (FEM) verwendet werden können.

Diese Diplomarbeit fokussiert zunächst auf die Grundlagen viskoelastischer rheologischer Modelle, sowohl solche, die rein zeitlineare, als auch solche, die zeitlich nichtlinear viskose Systemelemente aufweisen. Außerdem wird der Vorgang der Parameteridentifikation mittels Datafitting, die Ableitung der Modellparameter aus Versuchsdaten also, anschaulich dargestellt und schließlich die Ergebnisse dieser Parameteridentifizierung für verschiedene Asphalte mit unterschiedlichen Bindemitteln und Gesteinsarten präsentiert und diskutiert.

Im Rahmen dieser Arbeit gilt mein besonderer Dank Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Ronald Blab, der mir durch zahlreiche, wertvolle Gespräche und Ideen, sowie finanzielle Unterstützung weit mehr als nur das Fundament dieser Diplomarbeit gelegt hat.

Zudem möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Karl Kappl herzlichen Dank aussprechen für die intensive Betreuung während der Arbeit und für kritische, stets fruchtbare Gespräche. Außerdem waren mir seine Kenntnisse der französischen Sprache eine große Hilfe beim Verständnis der Arbeiten von Huet und Sayegh.

Gleichzeitig waren mir auch Frau Dipl.-Ing. Elisabeth Hauser, Herr Dipl.-Ing. Markus Spiegel und Herr Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. Michael Wistuba wertvolle

Begleiter, deren Ideen und Anregungen meinen Weg durch diese Arbeit oft ebnen konnten. Dafür gebührt Ihnen mein aufrichtiger Dank.

Außerdem darf an dieser Stelle das Team des Christian-Doppler-Labors des Instituts für Straßenbau und -erhaltung der TU-Wien nicht unerwähnt bleiben. Das angenehme Arbeitsklima war fruchtbarer Nährboden, auf dem diese Arbeit gedeihen konnte.

Nicht in Worte zu fassender Dank gebührt meinen Eltern, Herta und Otto Hofko, deren Förderung und unermessliche Unterstützung mich über all die Jahre durch die Ausbildung, durch Höhen und Tiefen getragen haben und ohne die ich heute nicht der Mensch wäre, der ich sein darf. Dasselbe gilt für meine Geschwister, Silvia und Michael; sie alle sind mir unschätzbar wertvolle Begleiter am Weg. Daher soll diese Arbeit meiner Familie gewidmet sein.

Bernhard Hofko – Wien, im November 2006

Abstract

Numerical simulation of the mechanical behaviour of industrially relevant materials gains more and more importance in road material engineering. To optimize time and financial efforts for conventional material testing is one reason why the emphasis of research is put on this subject. Furthermore the significance of computer-assisted, numerical simulation lies in the deeper knowledge of the mechanical behaviour and the possibility to control and change this behaviour which leads to modified materials, designed to meet the particular needs under specific boundary conditions.

One main objective of this thesis is to summarise and thus to give a detailed overview of rheological models used to describe the material behaviour of hot mix asphalt (HMA). The mathematical backgrounds from some basic material models like Maxwell's or Kelvin-Voigt's are given first, continued by advanced rheological systems including parabolic dashpots like Huet's model and Sayegh's extension of it. The first part of the thesis deals with the static (relaxation modulus and creep compliance) and dynamic (complex modulus and complex compliance) parameters of time-linear models and models including parabolic dashpots. The second part describes the procedure of parameter-identification by datafitting, shows the results for various asphalt mixes including graphical presentation with Cole-Cole- and Black-space and gives an interpretation of the results. Conclusively spread sheets are developed that facilitate half-automated parameter-identification for all discussed rheological models from fundamental material tests.

INHALTSVERZEICHNIS

I.	EINLEITUNG	6
II.	GRUNDLAGEN DER RHEOLOGIE	7
II.1	GESCHICHTLICHER ABRISS	7
II.1.1	Die Zeit vor 1929	7
II.1.2	Rheologische Forschung nach 1929	9
II.2	BEGRIFFSBESTIMMUNG	11
II.2.1	Konstitutive Beziehungen.....	11
II.2.2	Relaxationsmodul und Kriechnachgiebigkeit.....	12
II.2.3	Elastizität	12
II.2.4	Plastizität	13
II.2.5	Viskosität.....	13
II.2.6	Viskoelastizität	14
II.2.7	Parallel- und Serienschaltung	16
II.3	GRUNDELEMENTE RHEOLOGISCHER MODELLE	16
II.3.1	Elastische Verformungsanteile – lineare Feder	17
II.3.2	Linearviskose Verformungsanteile – Newton'scher Dämpfer	17
II.3.3	Nichtlinearviskose Verformungsanteile – parabolischer Dämpfer	18
II.3.4	Plastische Verformungsanteile – St.-Venant-Element.....	19
II.4	LINEARE RHEOLOGISCHE MODELLE.....	19
II.4.1	Maxwell-Modell	20
II.4.2	Kelvin-Voigt-Modell.....	24
II.4.3	Burgers-Modell	28
II.4.4	Verallgemeinertes, parallel geschaltetes Maxwell-Modell	37
II.5	DARSTELLUNGSVARIANTEN DER KONSTITUTIVEN BEZIEHUNGEN	39
II.5.1	Darstellung mit Hilfe von Differentialoperatoren.....	39
II.5.2	Darstellung mit Hilfe von Integralen.....	41
II.5.3	Zusammenhang zwischen Kriechen und Relaxation	43
II.6	VERHALTEN VON LINEAR VISKOELASTISCHEM MATERIAL UNTER ZYKLISCH-DYNAMISCHER BEANSPRUCHUNG	44
II.6.1	Der komplexe Modul und die komplexe Nachgiebigkeit.....	44
II.6.2	Komplexer Modul und komplexe Nachgiebigkeit einiger viskoelastischer Modelle	49
II.6.3	Zusammenfassende Darstellung der Kennwerte zeitlinearer Modelle.....	57
II.6.4	Zusammenhang zwischen dem Relaxationsmodul und dem komplexen Modul	58
II.6.5	Einfluss der Temperatur – TTSP.....	60
II.7	MODELLE MIT PARABOLISCHEN ELEMENTEN	62
II.7.1	Power-law-Modell.....	62
II.7.2	Huet-Modell	70
II.7.3	Huet-Sayegh-Modell	75
II.7.4	2S2P1D-Modell.....	79
III.	PARAMETERIDENTIFIKATION MITTELS DATAFITTING	83
III.1	DER STEIFIGKEITSVERSUCH	83

III.2	HINTERGRUND DES DATAFITTINGS UND DER PARAMETERIDENTIFIKATION	85
III.3	MATERIALIEN.....	88
III.4	AUSWERTUNG, ERGEBNISSE, INTERPRETATION	89
III.4.1	<i>Vergleich der Prüfverfahren.....</i>	<i>94</i>
III.4.2	<i>Vergleich unterschiedlicher Bindemittel bei gleicher Sieblinie.....</i>	<i>95</i>
IV.	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....	100
V.	LITERATURVERZEICHNIS	102

APPENDIX A: MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

APPENDIX B: PRÜFBERICHTE – PARAMETERIDENTIFIKATION

I. Einleitung

Innerhalb der Materialwissenschaften hat die numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von Stoffen, insbesondere von solchen, die industriell verwertet werden, hohen Stellenwert. Die Möglichkeit Zeit- und Finanzmitteleinsatz zu minimieren, indem man anstatt aufwendiger konventioneller Materialprüfungen, virtuelle, rechnerunterstützte numerische Simulationen z.B. mit Hilfe von Finite-Elemente-Methoden (FEM)-Programmen durchführt, ist jedoch bei weitem nicht der einzige Grund für die Forschung auf diesem Gebiet. Vielmehr geht es darum, durch die Modellierung von realen Stoffen das Detailwissen über das Verhalten dieser Materialien bei mechanischer Beanspruchung zu erhöhen und in weiteren Schritten die Möglichkeit zu schaffen, dieses für einen bestimmten Anwendungszweck mit sehr spezifischen Randbedingungen dahingehend zu optimieren, dass die spezifischen Anforderungen bestmöglich erfüllt werden.

Dieses Niveau ist etwa im Bereich der Kunststoffsynthetisierung schon erreicht, indem Polymerverbindungen auf die Herstellungs- und Anwendungsumgebung abgestimmt werden. Im Falle von Asphaltmischungen, wie sie im Straßenbau eingesetzt werden, liegt ein komplexerer Fall vor. Einerseits ist der Aufbau von Bitumen inhomogen und nicht vollständig bekannt, andererseits liegt ein Dreiphasensystem mit Gestein als Trag- und Bitumen als Bindekomponente vor. Bei technischen Asphalten bilden Hohlräume ausgenommen bei Gussasphalten die dritte Phase. Daraus resultiert ein sehr komplexes Materialverhalten, dessen wissenschaftliche Beschreibung erst Anfang der Sechzigerjahre des 20. Jahrhunderts durch Huet und Sayegh begonnen wurde. Nun liegen Modelle vor, die das Verhalten bei statischer und zyklisch-dynamischer Beanspruchung befriedigend beschreiben können.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zunächst detailliert die rheologischen Modelle von den Grundlagen bei Maxwell und Kelvin-Voigt bis zu den komplex aufgebauten Systemen, die ein und zwei parabolische Dämpfer enthalten, zu beschreiben und vor allem die mathematische Nachvollziehbarkeit zu gewährleisten; dazu sei auch auf Appendix A „Mathematische Grundlagen“ verwiesen. Es wird sowohl auf die Kennwerte, die aus statischen Versuchen ermittelt werden, als auch auf die Kennwerte, die aus zyklisch-dynamischen Versuchen abgeleitet werden, eingegangen und charakteristische Verhaltensweisen werden anhand zahlreicher Grafiken erläutert. Darauf aufbauend folgt ein Kapitel, in dem die Grundlagen der Parameteridentifikation mit Hilfe von Datafitting näher gebracht und dieses Verfahren bei verschiedenen getesteten Asphaltmischungen angewendet wird. Damit werden Modellparameter für die Mischgutsorten erhalten, die in einem weiteren Schritt einer Interpretation unterzogen werden.

II. Grundlagen der Rheologie

Die Rheologie (von griech. *rhei*: fließen, *logos*: Lehre) ist ein Teilgebiet der Mechanik, das sich mit dem Verformungs- und Fließverhalten von Materie beschäftigt. Überschneidungen mit der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, sowie teilweise der Strömungslehre sind vor diesem Hintergrund verständlich.

Inhalt der Rheologie ist es also, die Verformungseigenschaften von Stoffen, das heißt deren elastische, plastische und viskose Merkmale zu beschreiben. Dabei ist zu beachten, dass ideale Stoffe, rheologische Modelle der Realität, meist nur ein oder zwei dieser Verformungsanteile besitzen. Diese Näherung ist für jeweils beschränkte Anwendungsgebiete und Randbedingungen brauchbar und zielführend; dennoch darf dabei nicht vergessen werden, dass alle realen Stoffe, wenn auch in unterschiedlichem Maße, sämtliche rheologische Eigenschaften aufweisen. Welche Verformungsart in welchem Umfang in einem Material wirkt, wird im Wesentlichen durch die Materialstruktur auf atomarer und molekularer Ebene festgelegt.

Die ingenieurmäßig wohl treffendste Charakterisierung der Rheologie besteht in der Formulierung, dass sich diese Disziplin mit den konstitutiven Beziehungen (zwischen Spannungen und Verzerrungen) auseinandersetzt. [Mang/Hofstetter (2000)]

II.1 Geschichtlicher Abriss

II.1.1 Die Zeit vor 1929

Die Definition von Rheologie würde dieser Disziplin ein sehr weites Gebiet zur Verfügung stellen, liegt der Inhalt doch in der Beschreibung des Fließverhaltens jeglicher Form von Materie. Das Hauptinteresse der Rheologen verlagerte sich aber im Verlauf der Forschungsgeschichte eindeutig hin zu industriell relevanten Materialien, deren Verhalten zwischen dem von idealen Feststoffen und Flüssigkeiten zu liegen kommt. Im nun Folgenden sowie zur Übersicht in Tabelle 1 dargestellt, sollen einige Meilensteine vor der formalen Gründung der Rheologie als naturwissenschaftliche Disziplin aufgezeigt werden.

Ausgehend vom ideal starren Körper, dessen einzig relevante Eigenschaft die Masse darstellt und der Grundlage der allgemeinen Mechanik ist, über Hookes und Boyles Arbeiten Ende des 17. Jh., deren Kern das Aufstellen des linearen Federgesetzes war und damit Grundlage der idealelastischen Materialgesetze, deren erste Formulierung Cauchy aufstellte, bis zu den reibungsfreien Flüssigkeiten, mit denen sich als erster Pascal und später auch Bernoulli und Euler auseinandersetzten, sowie den Newton'schen Flüssigkeiten – hier sind

Newton, Navier und Stokes als wichtige Vertreter zu nennen – spannt sich der Bogen der frühen Beschäftigung mit idealen Stoffen.

Stoff-/Modellgruppe		Zeitraum	Vertreter
Ideale Stoffe	Starre Körper	Antike	Archimedes (~ 250 v. Ch.), Newton (1687)
	Idealelastische Feststoffe	17. Jh.	Boyle (1660), Hooke (1678), Young (1807), Cauchy (1827)
	Reibungsfreie Flüssigkeiten	18. Jh.	Pascal (1663), Bernoulli (1738), Euler (1755)
	Newton'sche Flüssigkeiten	frühes 19. Jh.	Newton (1687), Navier (1823), Stokes (1845), Hagen (1839), Poiseuille (1841), Weidemann (1856)
Lineare Viskoelastizität		Mitte 19. Jh.	Weber (1835), Kohlrausch (1863), Wiechert (1893), Maxwell (1867), Boltzmann (1878), Poynting & Thomson (1902)
Verallgemeinerte Newton'sche Flüssigkeiten		spätes 19. Jh. – frühes 20. Jh.	Schwedoff (1890), Trouton & Andrews (1904), Hatchek (1913), Bingham (1922), Ostwald (1925), de Waele (1923), Herschel & Bulkley (1926)
Nichtlineare Viskoelastizität ¹		frühes 20. Jh.	Poynting (1913), Zaremba (1903), Jaumann (1905), Hencky (1929)
Beschreibung industriell wichtiger Stoffe	Suspensionen	frühes 20. Jh.	Einstein (1906), Jeffrey (1922)
	Polymere		Schonbein (1847), Baekeland (1909), Staudinger (1920), Carothers (1929)
	Dehnviskosität		Barus (1893), Trouton (1906), Fano (1908), Tamman & Jenckel (1930)
Gründung der Disziplin „Rheologie“		1929	Bingham, Reiner et al.

Tabelle 1: Bedeutende rheologische Erkenntnisse vor 1929 [Doraiswamy (2002)]

Es gibt jedoch auch Aufzeichnung aus der Antike, die belegen, dass ägyptische Gelehrte schon Korrekturmaßnahmen an Wasseruhren durchführten um die veränderliche Viskosität des Wassers mit der Temperatur zu berücksichtigen. Insofern liegen die Anfänge des empirischen Zweigs der Rheologie – wie so vieler anderer Wissenschaften – weit in der Antike.

Erste Beschäftigung mit der Viskoelastizität geschah vor dem Hintergrund des Kriechens und der Relaxation von Metallen noch Jahrzehnte bevor die synthetische Herstellung von Polymeren begann. So beschäftigte sich Weber Mitte des 19. Jh. mit der Spannungsrelaxation von Seidenfäden; Maxwell schließlich stellte einige Jahre später seine empirische Differenzialgleichung (DG) auf, bei der die Schubspannungen mit der Verzerrung und einer exponentiell verlaufenden Relaxation in Beziehung gesetzt werden. Außerdem von fundamentaler Bedeutung nicht nur für die lineare Viskoelastizität ist das von Boltzmann Ende des 19. Jh. aufgestellte Superpositionsprinzip. Das nach Maxwell benannte, einfache rheologische Modell mit Feder und Dämpfer wurde erst Anfang des 20. Jh. von Poynting und Thomson entwickelt.

Auch die nichtlineare¹ Viskoelastizität war Inhalt von Forschungsarbeit schon vor 1929. So beschäftigte sich Poynting empirisch damit, Zaremba erweiterte die lineare Viskoelastizitätstheorie auf den nichtlinearen Bereich. Ebenso beschäftigten sich

¹ Der Begriff der Nichtlinearität versteht sich in dieser Arbeit wenn nicht anders vermerkt stets in Bezug auf die Zeit. Es geht somit nicht um strukturelle Nichtlinearität, etwa um die Abhängigkeit einer Kriechnachgiebigkeit von der Belastung. Für zeitliche Nichtlinearität ist das Boltzmann'sche Superpositionsprinzip im Gegensatz zu struktureller Nichtlinearität anwendbar.

Jaumann und Hencky mit dem Themenkreis und brachten ähnliche Erweiterungen wie Zaremba.

Als eine der wenigen wissenschaftlichen Disziplinen lässt sich für die Rheologie ein exaktes Datum der Gründung angeben: der 29. April 1929. Zwar wurde schon 1924 ein Symposium über Plastizität abgehalten, bei dem auch Abhandlungen über die Viskosität auf der Tagesordnung standen, jedoch erst beim dritten Symposium der gleichen Art fällte man die Entscheidung eine ständige Organisation für die zu behandelnden Belange einzuführen. Am entscheidenden Treffen Ende April 1929 nahmen unter anderem Bingham, Herschel, Ostwald, Prandtl und Reiner teil. Den Namen Rheologie brachten Bingham und Reiner unter Berufung auf Heraklits „ $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$ “ – alles fließt – auf. [Doraiswamy (2002)]

II.1.2 Rheologische Forschung nach 1929

Tabelle 2 gibt einen Überblick über wichtige Betätigungsfelder und Entwicklungen auf dem Gebiet der Rheologie seit ihrer Gründung.

Im Bereich der Darstellung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen entwickelte sich in den Fünfzigerjahren des vorigen Jahrhunderts einerseits die Beschreibung mittels Differentialoperatoren, wobei hier vor allem Arbeiten von Oldroyd und Truesdell zu nennen sind; andererseits entstand zeitlich etwas später die Darstellung mittels Integralen. Geprägt wurde diese integrale Art der Formulierung von Green und Rivlin, sowie Coleman und Noll. Verfeinerungen dieser Beziehungen bzw. deren Ausweitung auf komplexe Polymere bis hin zur Berücksichtigung der molekularen Struktur folgten und sind noch aktuelles Forschungsgebiet.

Am Feld der Weiterentwicklung des rheologischen Versuchswesens und der rheologischen Beschreibung wurden vor allem zyklisch-dynamische Versuche vorangetrieben. So beschäftigten sich in den Dreißigerjahren Schotfield und Blair mit den viskosen Eigenschaften des Backteiges unter Zuhilfenahme von zyklisch-dynamischen Tests mit kleinen Verzerrungen. Im Zusammenhang damit wurden auch die dynamischen oder komplexen Kennwerte, also komplexer Modul und komplexe Kriechnachgiebigkeit formuliert. Von Bedeutung – auch für diese Arbeit – ist die Entwicklung der Zeit-Temperatursuperposition (TTSP) als Erweiterung des Boltzmann'schen Prinzips auf Grundlage der Arbeit von Williams und Ferry. Weitere Schwerpunkte im Versuchswesen waren zahlreiche Phänomene im Zusammenhang mit Viskosität, wie Thixotropie, instabiles Fließverhalten, aber auch optische Studien.

Betätigungsfeld		Entscheidende Arbeiten
Konstitutive Beziehungen	Differentielle Darstellung	Oldroyd (1950), Truesdell (1952), Rivlin & Ericksen (1955), Giesekus (1962), White-Metzner (1963)
	Integrale Darstellung	Green & Rivlin (1957), Coleman & Noll (1961)
	Modelle für vernetzte Polymere	Green & Tobolsky (1964), Lodge (1956), Yamamoto (1956), Kaye (1962) – Bernstein et al. (1963)
	Kriechtheorien	Edwards (1967), DeGennes (1971), Doy & Edwards (1978, 1986)
	Modelle auf molekularer Ebene	Kuhn (1934), Rouse (1953), Zimm (1956), Kirkwood (1967), Bird et al. (1987)
Fortschritte im Versuchswesen und in der rheologischen Beschreibung	Fließen bei Schubspannung, schlupffreie Randbedingungen	Eisenschitz et al. (1929), Mooney (1931, 1936), Schotfield & Blair (1930), Pearson & Petrie (1968), Graessley (1977), Ramamurthy (1986)
	Normalspannungen und Effekte im Zusammenhang mit Rotation	Lander (1945), Weissenberg (1947), Markowitz (1957), Philippoff (1957), Ginn & Metzner (1969), Binnington & Boger (1985)
	Studien zu dynamischem Verhalten	Eisenschitz Philippoff (1933), Schotfield & Scott Blair (1932), Leaderman (1943), Cox-Merz (1958), Doraiswamy et al. (1991)
	Thixotropie	Freundlich & Bircumshaw (1926), Cheng & Evans (1965), Mewis (1979), Barnes (1997)
	Instabiles Fließen	Nason (1945), Tordella (1958), Petrie & Denn (1976), Bousfield et al. (1986)
	Widerstandsreduktion in turbulenten Strömungen	Toms (1949), Agoston et al. (1954), Hershey & Zakin (1967), Seyer & Metzner (1967)
	Optische Versuche – Doppelbrechung	Adams et al. (1965), Carothers & Hill (1932), Hermans & Platzek (1939), Janeschitz-Kriegl (1983), Fuller (1985)
	Zeit-Temperatursuperposition (TTSP)	Williams et al. (1955), Ferry (1970)
Weiterentwicklung von Stoffen	Dehnungsverhalten	Merrington (1943), Treolar (1944), Ballman (1965), Cogswell (1969), Metzner (1968), Meissner (1969), Dealy et al. (1976), Spearot & Metzner (1972), Laun & Munstedt (1978), Sridhar & Gupta (1985)
	LCPs – flüssigkeitskristalline Polymere	Leslie (1968)-Ericksen (1961), Doi (1981), Wissbrun (1985), Doraiswamy & Metzner (1986), Marrucci & Greco (1992)
	Verbundwerkstoffe	Taylor (1934), Krieger-Dougherty (1959), Rumscheidt & Mason (1961), Leal (1975), Batchelor (1977), Flogar & Trucker (1984), Heller & Kuntamukkula (1987), Khan & Armstrong (1986), Acrivos & Shaqfeh (1988), Mewis et al. (1989), Dennis et al. (2001)
Rechnerunterstützte Rheologie	elektro- und magnetrheologische Flüssigkeiten	Winslow (1949), Parthasarathy & Klingenberg (1996)
	Kontinuumssimulation	Turner et al. (1956), Gottlieb & Orzag (1977), Cruse & Risso (1968), Yoo & Jospeh (1985), Beris et al. (1987), Walters & Tanner (1992), Crochet & Walters (1993)
	dynamische Simulation auf molekularer Ebene	Adler & Wainright (1957), Ashurst & Hoover (1975), Evans & Morriss (1988), Davis & Todd (1998)

Tabelle 2: Forschungsgebiete der Rheologie seit 1929 [Doraiswamy (2002)]

Hand in Hand weiterentwickelt wurden sowohl neue Werkstoffe, wie LCPs (flüssigkeitskristalline Polymere), Verbundwerkstoffe oder elektrorheologische Flüssigkeiten, wie auch die mathematische Beschreibung des Verhaltens dieser Materialien. Die Anfänge der Beschäftigung mit anisotropen Flüssigkeiten liegen schon in den 1920er Jahren, wobei die mathematische Formulierung erst Ende der 60er Jahre durch Leslie und Ericksen ausgereift vorlag. Auch für faserverstärkte Kunststoffe, sowie elektro- und magnetrheologische Stoffe, die

seit den 1950er Jahren entwickelt wurden, besteht noch ein weites Feld, das zur Erforschung lädt.

Schließlich sind die verschiedenen rechnergestützten Simulationsverfahren seit etwa 1960 zu nennen; seien es die Finite Differenzen Methode (FDM) oder als nachfolgende Technologie die Finite Elemente Methode (FEM). Sie stützen sich auf Ergebnisse der Rheologie – vor allem auf die konstitutiven Beziehungen, die die Schnittstelle zwischen Einwirkungen und Antwort des Stoffes darstellen. Seit Ende der 1970er Jahre wird auch die Simulation auf molekulare Ebene verfolgt. Auf Basis der Arbeiten von Ashurst und Hoover, Evans und Morriss und Davis und Todd gilt dies als viel versprechende Sparte. Inhalt dieser Simulationsverfahren ist die Übertragung der mikroskopischen Struktur von Polymeren auf deren makroskopische, rheologische Eigenschaften. [Doraiswamy (2002)]

Ausgehend von der Antike war die Rheologie stets bemüht, praktische Probleme zu lösen. Gleichzeitig hat die Komplexität der unterschiedlichen Sachverhalte viele namhafte Wissenschaftler aus anderen Naturwissenschaften, vor allem der Mathematik und Physik, angezogen. Dies hat unter anderem dazu beigetragen, dass sich die Rheologie zu einem Zweig der Naturwissenschaft entwickelte, der sich durch sein großes Spektrum an Forschungsgebieten und sein Spannungsfeld der Praxisorientierung einerseits und komplexen Modell- und Theorieentwicklung andererseits auszeichnet.

II.2 Begriffsbestimmung

Für die folgende Abhandlung sollen einige rheologische Begriffe eindeutig definiert werden, um größtmögliche Verständlichkeit der Arbeit zu gewährleisten.

Sind bei Diagrammen keine Einheiten für die Parameter und die Achsen angegeben, so dient die Darstellung einem relativen Vergleich mit Hilfe von Parametervariation, bei dem es nicht um absolute Zahlenwerte geht, sondern eine Studie, die den Einfluss einzelner Parameter darstellt.

II.2.1 Konstitutive Beziehungen

Bei Festkörpern, die durch externe Kräfte oder Verformungen belastet werden, müssen sowohl Spannungen, als auch Verzerrungen in jedem Punkt des Körpers drei grundlegende Bedingungen erfüllen. Dies sind einerseits das Gleichgewicht zwischen äußerer Belastung und inneren Schnittgrößen und die kinematischen Gleichungen – die Beziehung zwischen Verschiebung und Verzerrung –, sowie andererseits die konstitutiven Beziehungen. Die ersten beiden Bedingungen gelten unabhängig von der Art des Materials, während die dritte materialabhängig ist und das mechanische Verhalten eines Stoffes beschreibt.

Die konstitutiven Beziehungen, auch Werkstoffgleichungen genannt, stellen das Bindeglied zwischen Verzerrungen und Spannungen dar. In der allgemeinen Formulierung für elastisches Material lauten die Beziehungen:

$$E_{ij} = G(S_{ik}) \quad \text{II.1}$$

In dieser Gleichung stellen E_{ij} den Green'schen Verzerrungstensor und S_{kl} den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor dar. Nähere Ausführungen dazu finden sich zum Beispiel in [Mang/Hofstetter (2000)].

Das Bindeglied zwischen Spannungen und Verzerrungen wird z. B. durch entsprechende rheologische Modelle dargestellt.

II.2.2 Relaxationsmodul und Kriechnachgiebigkeit

Die konstitutiven Beziehungen verbinden, wie oben genannt, Spannungen und Verzerrungen. Wird eine konstante Verzerrung $\varepsilon^{(0)}$ vorausgesetzt, so stellt sich die Beziehung im einaxialen Fall wie folgt dar:

$$\sigma(t) = R(t)\varepsilon^{(0)} \quad \text{II.2}$$

$R(t)$ wird in dieser Formel als Relaxationsmodul bezeichnet und kann für beliebige rheologische Modelle – analytisch oder numerisch – berechnet werden. So ist der Relaxationsmodul für eine Hooke'sche Feder einfach ihr E-Modul.

Setzt man eine konstante Spannung $\sigma^{(0)}$ voraus, kann man die konstitutiven Beziehungen im Fall einaxialer Betrachtung so formulieren:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)} \quad \text{II.3}$$

$J(t)$ stellt die Kriechnachgiebigkeit dar. Im Fall der linearen Feder wäre die Kriechnachgiebigkeit der Reziprokwert des E-Moduls. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.2.3 Elastizität

Elastizität ist die Werkstoffeigenschaft einer einwirkenden Kraft einen Widerstand entgegenzusetzen und nach Entlastung wieder – vollständig – in die Ausgangsform zurückzukehren. Die mechanische Energie, die beim Aufbringen der Belastung aufgewendet wird, wird dabei in (reversible) Verformungsenergie umgewandelt; bei einer Entlastung wird diese Energie wieder frei gesetzt, indem die Teilchen an ihren Ursprung zurückkehren. Spannungen und Dehnungen weisen, liegt lineare Elastizität vor, eine lineare Abhängigkeit auf. Erst bei Überschreiten der Elastizitätsgrenze wird ein Werkstück bleibend verformt und kann seine ursprüngliche Form nach Entlastung nicht wieder einnehmen (plastisches Verhalten). Viele Stoffe weisen bei ausreichend geringen Spannungen ein elastisches, oft auch lineares Verhalten auf; als Beispiel sei hier Stahl genannt.

II.2.4 Plastizität

Plastizität ist die Eigenschaft von festen Stoffen, sich unter Belastung zu verformen und diese Form auch nach Entlastung beizubehalten. Meist setzt plastisches Verhalten jedoch erst nach Überschreiten einer kritischen Schwellspannung ein. Darunter verhält sich der Stoff elastisch bzw. viskoelastisch.

II.2.5 Viskosität

Aus dem lateinischen Ausdruck für die Mistel (*viscum*), aus deren Beeren zäher Leim hergestellt wurde, leitet sich der Name für dieses Materialverhalten ab.

Viskosität ist ein Maß für die Zähigkeit eines Stoffes. Je viskoser sich ein Stoff verhält, desto weniger fließfähig, desto dickflüssiger ist er. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der inneren Reibung eines Stoffes. Beim Fließen gleiten übereinander liegende, „verzahnte“ Molekülschichten aneinander vorbei, wobei zur Überwindung der Bindung dieser Schichten eine gewisse Kraft notwendig ist. Zur Veranschaulichung dieses Effektes dient das Zwei-Platten-Modell:

a) Zwei-Platten-Modell

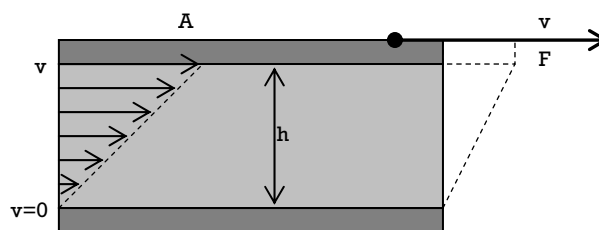


Abb. 1: Skizze zum Zwei-Platten-Modell

Folgender Versuchsaufbau ist vorgegeben: Die obere Platte mit der Fläche A [m²] wird durch die Kraft F [N] mit der Geschwindigkeit v [m/s] bewegt. Die untere Platte soll unverschieblich bleiben. Zwischen diesen beiden Platten, die den Abstand h [m] aufweisen, wird die Substanz, die an beiden Platten haften soll, geschert. Damit stellt sich bei strukturlinearer Viskosität eine lineare Geschwindigkeitsverteilung ein. Aus diesem Modell können einige Größen abgeleitet werden:

- Scherspannung: $\tau = \frac{F}{A}$ [N / m² = Pa]
- Schergefälle, Scherrate, Schergeschwindigkeit: $\dot{\gamma} = \frac{dv}{dh}$ [$\frac{1}{s}$]
- Viskosität, dynamisch: $\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$ [$\frac{Ns}{m^2} = Pa \cdot s$]
- Viskosität, kinematisch: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ [m² / s]

Ein Stoff hat demnach die Viskosität von $1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, wenn bei einer Kontaktfläche von 1 m^2 und einem Abstand der Flächen von 1 m eine Kraft von 1 N aufgebracht werden muss, um die beiden Flächen mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s gegeneinander verschieben zu können. Die Viskosität einiger Stoffe ist in Tabelle 3 angegeben:

Substanz (Temperatur) ohne Angabe bei $T = 20^\circ\text{C}$	η [$\text{mPa}\cdot\text{s}$]
Luft	0,018
Wasser (0°C)	1,790
Wasser (20°C)	1,000
Wasser (40°C)	0,650
Motoröl	100 – 500
Bitumen	$10^5 - 10^8$

Tabelle 3: Viskositätswerte ausgewählter Stoffe [Schramm (1994)]

Viskose Verformungen sind dadurch gekennzeichnet, dass sie beim Aufbringen einer Belastung zeitabhängig anwachsen. Dies ist auch der wesentliche Unterschied zum plastischen Verhalten, wo sich – wird eine gewisse Schwellspannung überschritten – sofort, ohne zeitliche Verzögerung, eine irreversible Verformung einstellt. [Schramm (1994)]

b) Newton'sche Flüssigkeit – Strukturlineare Viskosität

Ist die Viskosität η unabhängig von der Scherspannung τ , so wird ein solcher Stoff als Newton'sches Fluid bezeichnet. Für derartige Stoffe stellt sich im Zwei-Platten-Modell ein lineares Geschwindigkeitsprofil ein und es gelten oben dargestellte Beziehungen.

c) Nichtnewton'sche Flüssigkeit – Strukturnichtlineare Viskosität

Bleibt die Viskosität bei Änderung der einwirkenden Scherkräfte nicht konstant, so spricht man von einem nichtnewton'schen Fluid. Hierbei unterscheidet man strukturviskose und dilatante Stoffe; erstere weisen eine sinkende Viskosität, letztere eine steigende Viskosität bei steigender Scherspannung auf.

II.2.6 Viskoelastizität

Viskoelastizität kennzeichnet ein unter anderem von Spannung, Zeit, Temperatur und Belastungsfrequenz abhängiges Verformungsverhalten von Stoffen. Wie der Name schon indiziert, sind solche Stoffe von teilweise elastischem und viskosem Verhalten geprägt. Der spontanelastische Anteil ist zeitunabhängig und wirkt sich bei Belastungsänderung direkt aus, während der viskoelastische Verzerrungsanteil eine Zeitabhängigkeit aufweist.

Entlastet man einen Körper aus viskoelastischem Material, so geht der elastische Anteil der Dehnung sofort zurück, der viskose Anteil je nach Stoffart zeitverzögert oder er bleibt als irreversible Verformung bestehen. Die Viskoelastizität wird also verwendet, um Materialien zu charakterisieren, die bei konstanter Spannung zunehmende Verformung erleiden (Kriechen = Retardation) und bei konstanter Verformung einen Spannungsabfall zeigen (Relaxation) – siehe dazu auch Abb. 2.

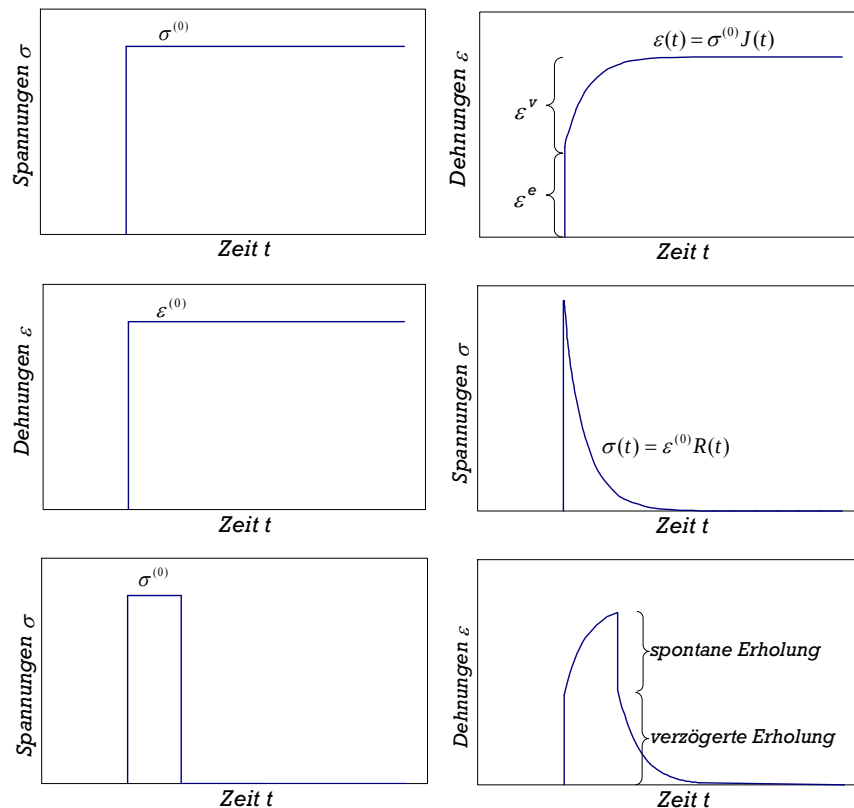


Abb. 2: Häufige Phänomene bei viskoelastischen Materialien: v.o.n.u. Kriechen, Relaxation, Kriechen und Rückkriechen

Dies bedeutet, dass der Spannungs- und Verzerrungszustand eines Probekörpers nicht mehr eindeutig definiert ist, wenn allein der Belastungszustand zu einem Zeitpunkt t bekannt ist. Zusätzlich muss ein Zeitparameter eingeführt werden, der die Belastungsgeschichte und damit den Spannungs- und Verzerrungsverlauf kennzeichnet.

Viele Stoffe weisen im niedrigen Spannungsbereich ein lineares oder annähernd lineares Verhalten auf, während bei höheren Spannungen nichtlineares Verhalten dominiert. Die linearen Theorien führen zu Spannungs-Verzerrungs-Zeitbeziehungen, die mit begrenztem mathematischen Aufwand zu lösen sind. Bei hohen Spannungen jedoch und auch bei Stoffen, die schon bei niedrigen Belastungen nichtlineares Verhalten zeigen, müssen komplexere, nichtlineare Modelle und Beziehungen aufgestellt werden, die zum Teil keine analytische Lösung mehr zulassen. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.2.7 Parallel- und Serienschaltung

Wie auch in der Elektrotechnik können die Elemente von rheologischen Modellen parallel oder in Serie geschaltet sein. Bei der Parallelschaltung werden die Elemente auf parallel verlaufenden Strängen angeordnet. Das einfachste parallelgeschaltete Modell der Rheologie wird durch den Kelvin-Voigt'schen Körper beschrieben. Zwei wesentliche Bedingungen kennzeichnen die Parallelschaltung. Einerseits ergibt sich die Gesamtspannung σ im Modell aus der Summe der Einzelspannungen σ_i , also

$$\sigma = \sum \sigma_i \quad \text{II.4}$$

Andererseits zeigen alle Elemente dieselbe Verzerrung ε :

$$\varepsilon_i = \varepsilon \quad \text{II.5}$$

Gleichzeitig summieren sich die Moduli der einzelnen Elemente zum Gesamtrelaxationsmodul R auf.

$$R = \sum R_i \quad \text{II.6}$$

Für die Reihen- oder Serienschaltung gilt, dass alle Elemente hintereinander angeordnet sind. Die Einzeldehnungen ε_i summieren sich zur Gesamtdehnung ε auf, während die Spannung in allen Elementen denselben Wert annimmt.

$$\sigma_i = \sigma \quad \text{II.7}$$

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i \quad \text{II.8}$$

Der Maxwell'sche Körper stellt hierbei das einfachste in Serie geschaltete Modell dar. Die gesamte Kriechnachgiebigkeit J eines solchen Systems kann einfach durch Summe der Einzelkriechnachgiebigkeit der Elemente berechnet werden.

$$J = \sum J_i \quad \text{II.9}$$

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.3 Grundelemente rheologischer Modelle

Um nun in die rheologische Modellierung einsteigen zu können, werden noch Elemente benötigt, die die verschiedenen Arten des Verformungsverhaltens darstellen: Repräsentanten für elastisches, linear und nichtlinear viskoses, sowie plastisches Verhalten – siehe Abb. 3.

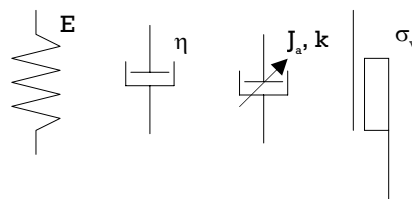


Abb. 3: Symbole für Feder, linearen Dämpfer, parabolischen Dämpfer & St.-Venant-Element

II.3.1 Elastische Verformungsanteile – lineare Feder

In der Rheologie werden die elastischen Deformationsanteile durch eine Hooke'sche Feder modelliert. Die charakteristische Größe dabei ist der Elastizitätsmodul E , der als Proportionalitätsfaktor die Spannungen σ mit den Dehnungen ε verbindet.

$$\sigma^e = E^e \varepsilon^{(0)}$$

II.10

Je steifer die Feder ist, desto geringer ist die Dehnung bei gleicher Spannung. Dies bedeutet, was auch in Abb. 4 ersichtlich ist, dass der E-Modul eines linearelastischen Materials umso höher ist, je steifer sich der Stoff gestaltet. Im Bereich von hinreichend kleinen Verformungen wird für viele Stoffe ein solches Materialverhalten angenommen. Die Dehnung bleibt konstant, solange die Spannung einen konstanten Wert aufweist und geht ohne zeitliche Verzögerung bei Wegnahme der Belastung auf Null zurück. Damit ist eine Hauptcharakteristik der Feder erkennbar – die Reversibilität.

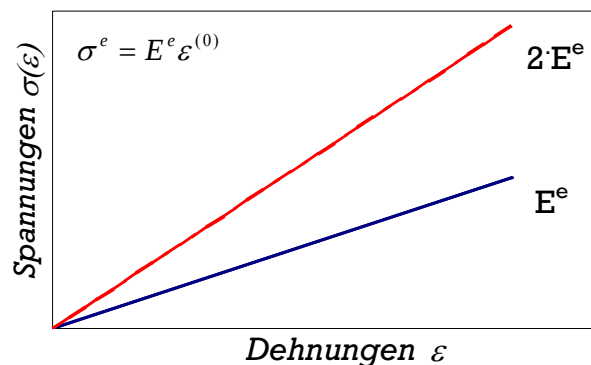


Abb. 4: σ - ε -Diagramm einer Hooke'schen Feder für verschiedene Elastizitätsmoduli

II.3.2 Linearviskose Verformungsanteile – Newton'scher Dämpfer

Das zeitabhängige, linearviskose Verformungsverhalten wird durch den Newton'schen Dämpfer beschrieben. Wesentliche Größe bei diesem Grundelement ist die dynamische Viskosität η . Sie stellt einen Zusammenhang zwischen Spannung σ und Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ dar.

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon} = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

II.11

Da das System einen linearen Dämpfer darstellt, ist η eine Konstante und unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit bzw. der Zeit. Das Element verformt sich bei konstanter Spannung mit konstanter Geschwindigkeit, wie in Abb. 5 ersichtlich. Wird eine bestimmte Verformung plötzlich zu einem Zeitpunkt t aufgebracht, so nimmt die Spannung einen unendlich großen Wert an und geht sofort wieder auf Null zurück. Mathematisch gesehen wird diese plötzliche

Verzerrung mit Hilfe der Dirac'schen Deltafunktion $\delta(t)$ beschrieben. Diese 1927 von Paul A. M. Dirac (1902 – 1984) eingeführte Funktion hat unter anderem die Eigenschaft, dass sie den Wert Null annimmt, wenn $t \neq 0$ ist und einen unendlichen Wert für $t = 0$. Damit ergibt sich die Spannung zufolge einer plötzlich aufgetragenen Verzerrung $\varepsilon^{(0)}$ zu:

$$\sigma(t) = \eta \varepsilon_0 \delta(t) \quad \text{II.12}$$

Da unendlich große Werte für die Spannung in der Realität nicht möglich sind, ist es auch nicht möglich einem Dämpfer eine infinitesimale Verformung ohne zeitliche Verzögerung aufzuzwingen. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

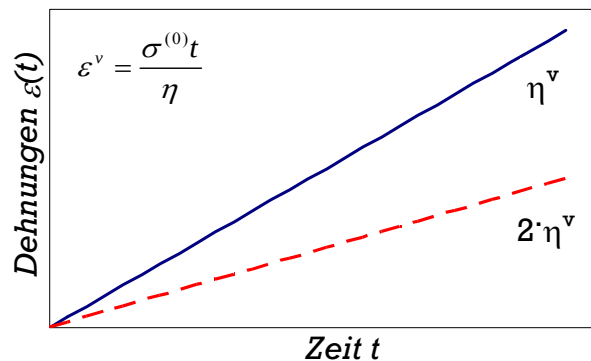


Abb. 5: ε - t -Diagramm eines Newton'schen Dämpfers für verschiedene Viskositäten

II.3.3 Nichtlinearviskose Verformungsanteile – parabolischer Dämpfer

Im Gegensatz zum linearen Dämpfer, dessen Kriechnachgiebigkeit durch

$$J_{lin}(t) = \frac{t}{\eta} \quad \text{II.13}$$

beschrieben wird, lautet die allgemeine Formel der Kriechnachgiebigkeit eines parabolischen Dämpfers

$$J_{par}(t) = J_a \left(\frac{t}{\tau} \right)^k \quad \text{II.14}$$

wobei k einen dimensionslosen, materialbezogenen Parameter, J_a [1/MPa] die Kriechnachgiebigkeit bei $t = \tau$ und τ [sec] die charakteristische Zeit des viskosen Verhaltens darstellt. τ dient als Faktor zur Kalibrierung beim TTSP. Zum Zeitpunkt $t = \tau$ nimmt J_{par} den Wert J_a an, davor und danach lässt sich durch den Faktor k bestimmen, ob sich ein unter- oder überlineares Verhalten einstellt. Nimmt k einen Wert kleiner als 1 an, so verhält sich der Dämpfer unterlinear, ist $k = 1$, so ist II.14 eine lineare Funktion und der Dämpfer entspricht einem linearen System; bei Werten über 1 ergibt sich überlineares Verhalten. Ersichtlich ist die Änderung der Kriechnachgiebigkeit bei Variation von k und τ in Abb. 6. Darin wird auch der Einfluss von τ auf den Verlauf der Kriechnachgiebigkeit erkennbar:

Bei konstantem Wert des Exponenten k , führen kleinere Werte von τ zu einer stärkeren Steigung. [Blab et al. (2006)]

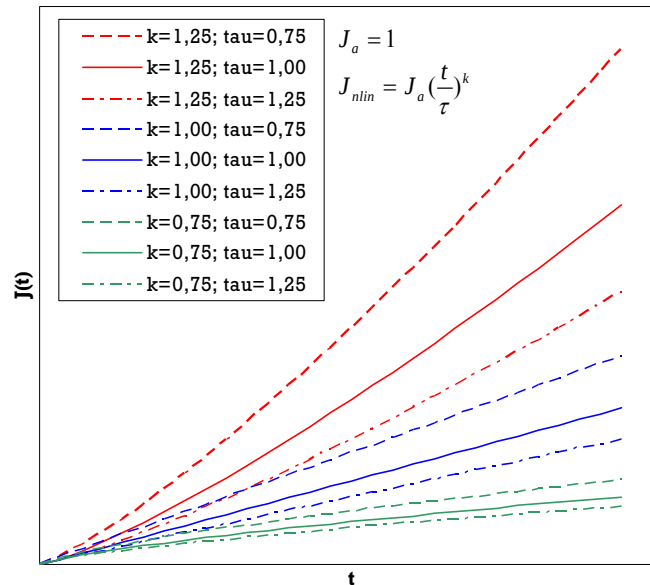


Abb. 6: Kriechnachgiebigkeiten eines nichtlinearen Dämpfers für verschiedene Werte von k und τ

II.3.4 Plastische Verformungsanteile – St.-Venant-Element

Plastisches Stoffverhalten wird in der Rheologie durch ein so genanntes St.-Venant-Element charakterisiert. Eine Verformung stellt sich erst nach dem Erreichen einer kritischen Schwellspannung σ_v ein.

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma < \sigma_v \\ \varepsilon^p & \text{für } \sigma > \sigma_v \end{cases} \quad \text{II.15}$$

Die Verzerrung ε^p ist irreversibel. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.4 Lineare rheologische Modelle

Die oben beschriebenen Grundelemente zeigen die einzelnen, idealisierten Verformungsarten bei mechanischer Beanspruchung. Um der Realität jedoch näher kommen zu können, werden die Elemente mit Hilfe von Kopplungsvorschriften zu Modellkörpern kombiniert. Diese Kopplungsarten sind die beschriebene Serien- bzw. Parallelschaltung.

Wichtige Voraussetzung für die mathematische Behandlung der rheologischen Modelle stellen noch zwei Bedingungen dar, die gelten, wenn die Stetigkeit der Materialgesetze vorausgesetzt wird.

Einerseits gilt

$$\dot{\varepsilon} = \sum \dot{\varepsilon}_i \quad (\text{Parallelschaltung}) \quad \text{II.16}$$

andererseits

$$\dot{\sigma} = \sum \dot{\sigma}_i \quad (\text{Serienschaltung}) \quad \text{II.17}$$

Im nun Folgenden sollen lineare rheologische Modelle behandelt werden. Systeme also, bei denen die einzelnen Elemente linearen Werkstoffgesetzen gehorchen. Zunächst werden die grundlegenden Modelle, also das Maxwell'sche und das Kelvin-Voigt'sche behandelt, danach eine Kombination dieser beiden, das Burgers-Modell. Zum Abschluss dieses Kapitels wird auch noch kurz auf das verallgemeinerte Maxwell-Modell eingegangen. Um größtmögliche Nachvollziehbarkeit zu gewährleisten, wird auch die mathematische Behandlung detailliert durchgeführt. Jedoch liegen mathematische Grundlagen, um auch der Übersichtlichkeit Rechnung zu tragen in Anhängen, auf die an gegebener Stelle hingewiesen wird.

II.4.1 Maxwell-Modell

Das Maxwell'sche Modell (benannt nach J. C. Maxwell [1831 – 1879]) besteht aus einem linearem Feder-Dämpfer-System, das in Serie geschaltet ist. Dieser Anordnung liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich die Verzerrung ε zu einem Zeitpunkt t aus der Summe des elastischen Anteils ε^e und des viskosen Anteils ε^v zusammensetzt:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad \text{II.18}$$

Außerdem gilt hier, dass $\sigma^e = \sigma^v = \sigma$. Die konstitutive Beziehung der Feder wird beschrieben durch das Hooke'sche Federmodell. Damit ist

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad \text{II.19}$$

Für den viskosen Anteil gilt:

$$\dot{\varepsilon}^v = \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{II.20}$$

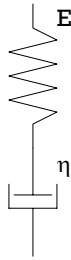
Unter Berücksichtigung von II.16 gilt:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \quad \text{II.21}$$

Dies führt unter Berücksichtigung von II.19 und II.20, wobei $E = \text{konst.}$ vorausgesetzt wird, zu

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{II.22}$$

Diese DG ist die mathematische Beschreibung des Materialverhaltens eines viskoelastischen Stoffes nach Maxwell – ein Schema des Modells ist in Abb. 7 abgebildet.

**Abb. 7: Maxwell-Körper**

Im nun Folgenden wird die Kriechkurve für eine konstante Spannung $\sigma = \sigma^{(0)}$ bestimmt, die während $0 \leq t < t_1$ wirkt. Da $\sigma^{(0)} = \text{konst}$ ist die Ableitung $\dot{\sigma} = 0$. Damit folgt aus der Integration über II.22

$$\varepsilon = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta} t + c \quad \text{II.23}$$

Für das Intervall $0 \leq t < t_1$ kann die Integrationskonstante c durch die Anfangsbedingung bestimmt werden:

$$\varepsilon(t=0) = \frac{\sigma^{(0)}}{E} = \varepsilon^e \quad \text{II.24}$$

Durch diese Gleichung wird beschrieben, dass die unmittelbare Dehnung identisch ist mit der elastischen Dehnung. Die Integrationskonstante c ist daher $\sigma^{(0)}/E$, und die Kriechkurve im Bereich $0 \leq t < t_1$ lautet:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta} t + \frac{\sigma^{(0)}}{E} \quad (0 \leq t < t_1) \quad \text{II.25}$$

Eine andere Form der Darstellung obiger Formel lautet

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma^{(0)} \quad \text{II.26}$$

wobei

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \quad \text{II.27}$$

Die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ besteht im Maxwell'schen Modell aus zwei Anteilen, nämlich dem

- zeitunabhängigen, elastischen Anteil $1/E$ und dem
- zeitabhängigen Anteil $C(t) = (1/\eta)t$. $C(t)$ ist die so genannte Kriechfunktion.

Zum Zeitpunkt t_1 wird der Körper entlastet, was bedeutet, dass für $t_1 < t \leq \infty$ $\sigma = 0$ und damit gleichermaßen $\dot{\sigma} = 0$ ist. Geht man wiederum von II.22 aus, so ist unter Berücksichtigung oben genannter Randbedingungen klar, dass $\varepsilon(t) = C$ sein muss. Die elastische Dehnung $\sigma^{(0)}/E$ geht sofort bei Entlastung zum Zeitpunkt $t = t_1$ zurück; damit muss die Dehnung zu diesem Zeitpunkt dem viskosen Anteil $(\sigma^{(0)}/\eta)t_1$ entsprechen, und die Integrationskonstante ergibt sich zu $C = (\sigma^{(0)}/\eta)t_1$. Daraus resultiert für $t_1 < t \leq \infty$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta} t_1 \quad (t_1 < t \leq \infty)$$

II.28

Das Kriechverhalten des Maxwell'schen Modells wird demnach durch die beiden Gleichungen II.25 und II.28 beschrieben; die Kriechkurve mit Variation des E-Moduls und der Viskosität ist außerdem in Abb. 8 ersichtlich. Deutlich erkennbar die sofortige Dehnung zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgrund der Feder und danach der lineare Anstieg der Verzerrung, die durch den Dämpfer verursacht wird.

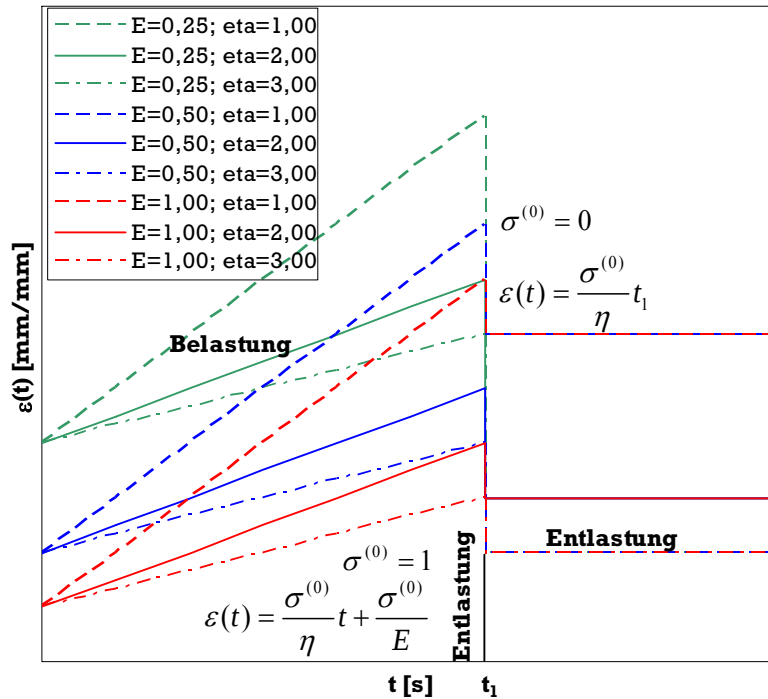


Abb. 8: Kriech- und Rückkriechverhalten des Maxwell-Modells für verschiedene Werte von E und η

Zwei Schwächen dieses sehr einfachen Modells sind ebenso erkennbar – einerseits ist dies die konstante Kriechgeschwindigkeit im Bereich $0 \leq t < t_1$, andererseits die konstante Verzerrung bei $t_1 < t \leq \infty$. Hier sei noch angemerkt, dass das fehlende verzögerte Rückkriechen nicht nur eine Schwäche des Maxwell-Modells ist, sondern alle rein in Serie geschalteten Modelle betrifft.

Um das Relaxationsverhalten zu beschreiben, wird eine konstante Dehnung $\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)}$ vorausgesetzt. Daraus folgt, dass $\dot{\varepsilon} = 0$ ist. Formt man II.22 nach σ um und berücksichtigt oben genannte Voraussetzungen, so ergibt sich:

$$\dot{\sigma} + \sigma \frac{E}{\eta} = 0 \quad \text{II.29}$$

Bei Gleichung II.29 handelt es sich um eine homogene lineare DG 1. Ordnung. Gelöst werden solche DGen zum Beispiel durch Trennung der Variablen, wie hier angewendet. Für eine intensivere Beschäftigung mit den mathematischen

Hintergründen kann ein beliebiges Lehrbuch der Mathematik dienlich sein, so zum Beispiel [Bartsch (2001)].

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sigma \frac{E}{\eta} \quad \text{II.30}$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = - \int \frac{E}{\eta} dt \quad \text{II.31}$$

$$\ln|\sigma(t)| = -\frac{E}{\eta}t + C \quad \text{II.32}$$

$$\sigma(t) = e^{\frac{E}{\eta}t+C} = e^{\frac{E}{\eta}t} e^C = C_1 e^{\frac{E}{\eta}t} \quad \text{II.33}$$

Die Integrationskonstante C_1 folgt aus der Anfangsbedingung, dass $\sigma(t=0) = \sigma^{(0)} = E\varepsilon^{(0)}$ zu $C_1 = E\varepsilon^{(0)}$. Damit ergibt sich aus II.33

$$\sigma(t) = E\varepsilon^{(0)} e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad \text{II.34}$$

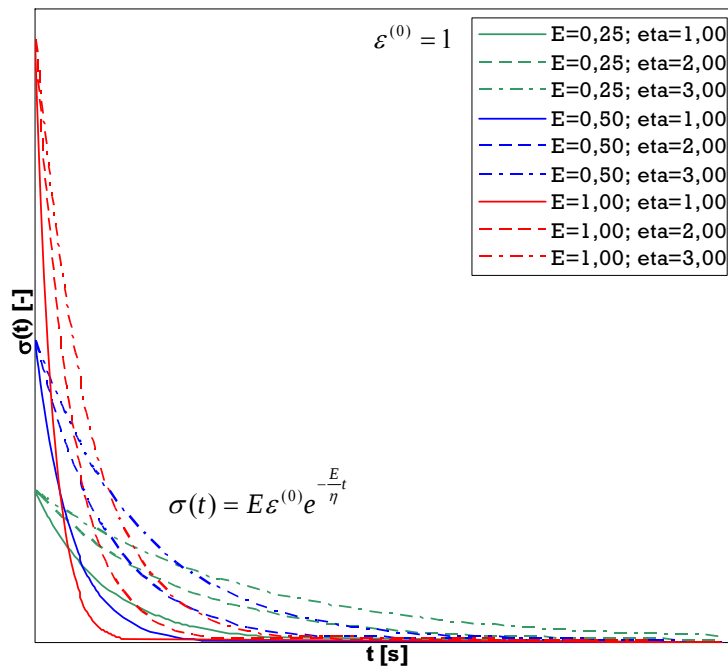


Abb. 9: Relaxationsverhalten des Maxwell-Modells für verschiedene Werte von E und η

Die zu Formel II.34 zugehörige Relaxationskurve ist in Abb. 9 dargestellt. Wiederum werden die E-Moduli und Viskositäten variiert. Dabei wird ersichtlich, dass der E-Modul verantwortlich zeichnet für die Anfangsspannung zum Zeitpunkt $t=0$; je steifer die Feder, je höher also der E-Modul, desto höher auch die Anfangsspannung. Die Viskosität des Dämpfers bestimmt den Verlauf der Relaxation. Je viskoser dieser reagiert, desto langsamer schreitet der Spannungsabbau voran. In der Tatsache, dass die Spannung beim Maxwell'schen Körper asymptotisch gegen Null geht, liegt eine weitere Schwäche dieses Modells. Viele Stoffe zeigen ein Relaxationsverhalten, bei dem die Spannung einen von Null verschiedenen Wert anstrebt.

II.34 kann auch in der Form

$$\sigma(t) = R(t)\varepsilon^{(0)} \quad \text{II.35}$$

mit dem Relaxationsmodul

$$R(t) = Ee^{-\frac{E}{\eta}t} \quad \text{II.36}$$

formuliert werden. [Mang/Hofstetter (2000)]

II.4.2 Kelvin-Voigt-Modell

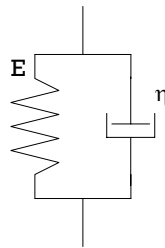


Abb. 10: Kelvin-Voigt-Körper

Das nach W. T. Kelvin (1824 – 1907) und W. Voigt (1850 – 1919) benannte rheologische Modell besteht – wie das Maxwell-Modell – aus zwei Grundelementen, einer linear elastischen Feder und einem linear viskosen Dämpfer, die hier jedoch parallel angeordnet sind. Damit ergeben sich die beiden folgenden Bedingungen

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad \text{II.37}$$

und

$$\varepsilon^e = \varepsilon^v = \varepsilon \quad \text{II.38}$$

Zudem gelten II.10 und II.11. Setzt man diese beiden Grundgleichungen für Feder und Dämpfer in II.37 ein, so erhält man nach Trennung der Variablen

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{II.39}$$

Diese DG stellt die mathematische Beschreibung für das zeitabhängige Materialverhalten eines Kelvin-Voigt'schen Körpers dar. Im nun Folgenden wird die Kriechkurve für $0 \leq t < t_1$ mit $\sigma = \sigma^{(0)} = \text{konst}$ unter Voraussetzung, dass $E = \text{konst}$ und $\eta = \text{konst}$ sind, durch Lösung von II.39 hergeleitet.

Die etwas anders formulierte Gleichung II.39

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \frac{E}{\eta} = \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{II.40}$$

zeigt, dass es sich hierbei um eine inhomogene, lineare DG handelt, die die allgemeine Lösung $y = y_h + y_p$ nach sich zieht. Hierbei ist y_h die allgemeine Lösung der homogenen DG und y_p die partikuläre Lösung der inhomogenen DG. Die mathematischen Hintergründe zur Behandlung solcher DGen finden sich im Appendix A.

Bei II.40 handelt es sich um den Sonderfall einer inhomogenen linearen DG, sie besitzt konstante Koeffizienten. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung der homogenen DG

$$\varepsilon_h = C e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad \text{II.41}$$

Nun wird der Term $z(t)$ eingeführt, somit lautet der Lösungsansatz für die partikuläre Lösung

$$\varepsilon = z(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad \text{II.42}$$

und durch Ableitung nach t

$$\varepsilon' = z'(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} + z(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} \left(-\frac{E}{\eta}\right) \quad \text{II.43}$$

Setzt man diese Gleichungen II.42 und II.43 in II.39 ein, so erhält man

$$z'(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} + z(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} \left(-\frac{E}{\eta}\right) + z(t) e^{-\frac{E}{\eta} t} \frac{E}{\eta} = \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{II.44}$$

Es eliminieren sich die beiden Ausdrücke vor dem Gleichheitszeichen, damit verbleibt nach Umformung

$$z'(t) = \frac{\sigma}{\eta} e^{\frac{E}{\eta} t} \quad \text{II.45}$$

Integriert man obige Gleichung über t , so erhält man für $z(t)$

$$z(t) = \frac{\sigma}{E} e^{\frac{E}{\eta} t} + C_1 \quad \text{II.46}$$

Nun setzt man $z(t)$ in II.42 ein, womit sich folgende Bestimmung für $\varepsilon(t)$ ergibt:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E} e^{\frac{E}{\eta} t} + C_1\right) e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad \text{II.47}$$

bzw. nach Umformung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + C_1 e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad \text{II.48}$$

Die Integrationskonstante C_1 lässt sich durch die Anfangsbedingung $\varepsilon(t=0) = 0$ bestimmen. Damit folgt durch Einsetzen dieser Bedingung in II.48, dass für $0 \leq t < t_1$ $C_1 = -\sigma^{(0)}/E$ ist, und damit folgende Lösung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}\right) \quad (0 \leq t < t_1) \quad \text{II.49}$$

Aus II.49 ist ersichtlich, dass die Dehnung ε asymptotisch gegen die elastische Dehnung $\varepsilon^e = \sigma^{(0)}/E$ strebt. Mit Hilfe der Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ lässt sich $\varepsilon(t)$ wie folgt darstellen

$$\varepsilon(t) = \sigma^{(0)} J(t) \quad \text{II.50}$$

mit

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t})$$

II.51

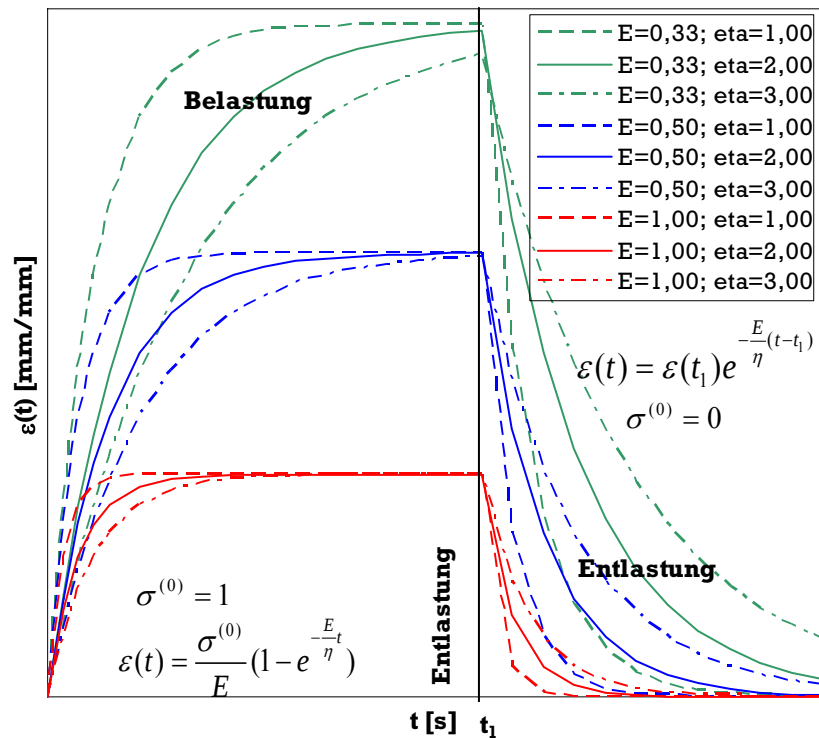


Abb. 11: Kriech- und Rückkriechverhalten eines Kelvin-Voigt'schen Körpers für verschiedene Werte von E und η

Für den Zeitraum $t_1 < t \leq \infty$ soll nun $\sigma = 0$ sein. Daher folgt aus II.40 für ε

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad \text{II.52}$$

Obige Gleichung stellt eine homogene lineare DG 1. Ordnung dar, die durch Trennung der Variablen lösbar ist.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = 0 \quad \text{II.53}$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left(-\frac{\eta}{E} \right) = dt \quad \text{Trennung der Variablen} \quad \text{II.54}$$

$$\ln \left| \varepsilon \right| \left(-\frac{\eta}{E} \right) + C = t \quad \text{Integration über } t \quad \text{II.55}$$

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{E}{\eta} t} C_1 \quad \text{Erweitern mit e-Funktion} \quad \text{II.56}$$

Da in diesem Modell eine parallele Anordnung vorliegt, ergibt sich bei Entlastung zum Zeitpunkt $t = t_1$ keine sofortige Abnahme der Dehnung. Damit erhält man für $\varepsilon(t_1)$ nach II.56, dass sie gleich der Dehnung laut II.49 sein muss, womit die Bedingung für die Integrationskonstante C_1 folgendermaßen definiert ist

$$C_1 = \varepsilon(t_1) e^{\frac{E}{\eta} t_1} \quad \text{II.57}$$

mit

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma^{(0)}}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t_1}) \quad \text{II.58}$$

Wird II.57 in II.56 eingesetzt, so ergibt sich für $t_1 < t \leq \infty$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_1) e^{-\frac{E}{\eta} (t-t_1)} \quad (t_1 < t \leq \infty) \quad \text{II.59}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die Dehnung bei Belastungsentfernung asymptotisch gegen Null strebt; dies ist eine von drei grundlegenden Schwächen des Systems, die auch in Abb. 11 erkennbar sind:

- Fehlen einer sofortigen Dehnung bei Aufbringung einer Belastung
- Fehlen einer sofortigen Abnahme der Dehnung bei Entlastung
- stark verzögertes, asymptotisches Streben der Dehnung in Richtung der elastischen Dehnung

Zudem kann man der Abbildung entnehmen, dass hohe Steifigkeit und niedrige Viskosität der Annäherung der elastischen Dehnung beim Kriechvorgang, sowie dem rascheren Rückkriechen förderlich sind. So erreicht das im Beispiel steifste, niedrigstviskose System ($E = 1,00$; $\eta = 1,00$) nach etwa 5 Zeiteinheiten schon 99,0 % der elastischen Dehnung, während das Extrem am anderen Ende ($E = 0,33$; $\eta = 3,00$) mehr als 41 Zeiteinheiten, also achtmal länger braucht.

Außerdem ist das Kelvin-Voigt'sche Modell – sowie alle ausschließlich parallel geschalteten Modelle – nicht geeignet zur Beschreibung des Relaxationsverhaltens eines Stoffes, da sich bei konstanter Dehnung eine konstante Spannung σ hält und die Relaxationsfunktion $R(t)$ ebenfalls eine Konstante darstellt. [Mang/Hofstetter (2000)]

Zusammenfassend lassen sich zu den beiden Grundmodellen einige Aussagen zum Verhalten und zur Verwendbarkeit reiner parallel bzw. seriell geschalteter Systeme treffen. Während bei Parallelschaltung das Relaxationsverhalten wegen der vorhandenen e-Funktion realitätsnahe beschrieben werden kann, ist dies bei Serienschaltung nicht möglich. Auf der anderen Seite zeigt sich beim Kriechphänomen ein gespiegeltes Bild – die Reihenschaltung vermag hier durch exponentielles Verhalten die Realität recht gut anzunähern, während das parallel geschaltete System nur eine lineare Kriechkurve aufweist und auch nur ein sehr beschränktes Rückkriechverhalten beschreiben kann. Um nun die Vorteile beider Systeme vereinen zu können, besteht eine Möglichkeit Kelvin-Voigt und Maxwell in einem Modell zu verbinden, wie dies auf serielle Weise beim in der Folge behandelten Burgers-Körper erfolgt.

II.4.3 Burgers-Modell

Benannt nach dem niederländischen Physiker J. M. Burgers (1895 – 1981) besteht dieses Modell aus vier Elementen bzw. einer in Serie geschalteten Kombination eines Maxwell- und eines Kelvin-Voigt-Körpers (siehe Abb. 12).

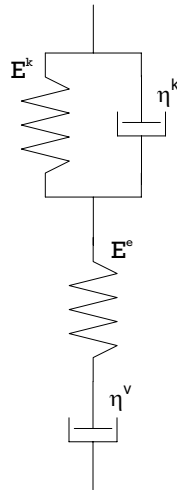


Abb. 12: Burgers-Körper

Zur Bestimmung der konstitutiven Beziehungen dieses Modells wird es als aus drei Elementen bestehend betrachtet, die in Serie geschaltet sind. Es sind dies eine Hooke'sche Feder, ein linearviskoser Dämpfer und ein Kelvin-Voigt'scher Körper. Die Gesamtverformung zum Zeitpunkt t ergibt sich als Summe der drei Elemente:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v + \varepsilon^k \quad \text{II.60}$$

wobei hierin ε^e für die elastischen, ε^v für die viskosen und ε^k für die aus dem kelvinschen Modell stammenden Verformungsanteile stehen.

Außerdem gelten für die linearelastische Feder bzw. den linearviskosen Dämpfer folgende Zusammenhänge

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E^e} \quad \text{II.61}$$

$$\dot{\varepsilon}^v = \frac{\sigma}{\eta^v} \quad \text{II.62}$$

und für das Kelvin-Modell laut II.39

$$\dot{\varepsilon}^k + \frac{E^k}{\eta^k} \varepsilon^k = \frac{\sigma}{\eta^k} \quad \text{II.63}$$

Da es sich bei den einzelnen Anteilen hier zum ersten Mal selbst teilweise um DG handelt, muss ein neuer Lösungsweg eingeschlagen werden. Der hier und im Weiteren verwendete Ansatz bezieht sich auf die Laplace-Transformation und ihrer Inversen. Erläuterungen dazu finden sich im Appendix A: Mathematische Grundlagen.

Grundsätzlich stellt $\varepsilon(t)$ die reelle und $\hat{\varepsilon}(s)$ die transformierte, komplexe Funktion dar. Um die Transformation durchführen zu können, ist es zunächst notwendig Anfangsbedingungen zu formulieren. Sowohl der viskose, als auch der kelvinsche Verformungsanteil nehmen zum Zeitpunkt der Lastaufbringung ($t = 0$) den Wert Null an, also

$$\varepsilon^v(t=0) = \varepsilon^k(t=0) = 0 \quad \text{II.64}$$

Es ergibt sich II.60 zu

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^v + \hat{\varepsilon}^k \quad \text{II.65}$$

mit

$$\hat{\varepsilon}^e = \frac{\hat{\sigma}}{E^e} \quad \text{II.66}$$

und laut II.62 und II.63 unter Berücksichtigung der Zeile 1 von Tabelle 9 (Appendix A) die beiden nächststehenden Formeln

$$s\hat{\varepsilon}^v - \underbrace{\varepsilon^v(0)}_{=0} = \frac{\hat{\sigma}}{\eta^v} \rightarrow \hat{\varepsilon}^v = \frac{\hat{\sigma}}{\eta^v s} \quad \text{II.67}$$

$$(s + \frac{E^k}{\eta^k})\hat{\varepsilon}^k - \underbrace{\varepsilon^k(0)}_{=0} = \frac{\hat{\sigma}}{\eta^k} \rightarrow \hat{\varepsilon}^k = \frac{\hat{\sigma}}{\eta^k} \frac{1}{s + \frac{E^k}{\eta^k}} \quad \text{II.68}$$

Setzt man die Gleichungen II.66, II.67 und II.68 in II.65 ein, so ergibt sich

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\sigma}}{E^e} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta^v s} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta^k (s + \frac{E^k}{\eta^k})} \quad \text{II.69}$$

Im Folgenden wird daraus durch Erweiterung mit $\frac{\eta^k \eta^v}{E^k} s(s + \frac{E^k}{\eta^k})$ und Umformung aus obiger Formel

$$\frac{\eta^k \eta^v}{E^k} s(s + \frac{E^k}{\eta^k}) \hat{\varepsilon} = \frac{\eta^k \eta^v}{E^k E^e} s(s + \frac{E^k}{\eta^k}) \hat{\sigma} + \frac{\eta^k}{E^k} (s + \frac{E^k}{\eta^k}) \hat{\sigma} + \frac{\eta^v}{E^k} s \hat{\sigma} \quad \text{II.70}$$

$$\frac{\eta^k \eta^v}{E^k} s^2 \hat{\varepsilon} + \frac{\cancel{\eta^k} \eta^v \cancel{E^k}}{\cancel{E^k} \cancel{\eta^k}} s \hat{\varepsilon} = \frac{\eta^k \eta^v}{E^k E^e} s^2 \hat{\sigma} + \frac{\cancel{\eta^k} \eta^v \cancel{E^k}}{\cancel{E^k} E^e \cancel{\eta^k}} s \hat{\sigma} + \frac{\eta^k}{E^k} s \hat{\sigma} + \frac{\cancel{\eta^k} \cancel{E^k}}{\cancel{E^k} \cancel{\eta^k}} \hat{\sigma} + \frac{\eta^v}{E^k} s \hat{\sigma} \quad \text{II.71}$$

$$\eta^v s \hat{\varepsilon} + \frac{\eta^v \eta^k}{E^k} s^2 \hat{\varepsilon} = \hat{\sigma} + (\frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}) s \hat{\sigma} + \frac{\eta^k \eta^v}{E^e E^k} s^2 \hat{\sigma} \quad \text{II.72}$$

Unter Berücksichtigung der Regeln aus Tabelle 9 wird obige Formel nun rücktransformiert und somit ergibt sich

$$\eta^v \dot{\varepsilon} + \frac{\eta^k \eta^v}{E^k} \ddot{\varepsilon} = \sigma + (\frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}) \dot{\sigma} + \frac{\eta^k \eta^v}{E^e E^k} \ddot{\sigma} \quad \text{II.73}$$

Dies stellt die DG der mathematischen Beschreibung für das zeitabhängige Materialverhalten eines Burgers-Körpers dar. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

Nun wird die Kriechkurve für den Zeitraum $0 \leq t < t_1$, in dem eine konstante Spannung $\sigma = \sigma^{(0)}$ herrscht, bestimmt. Als Voraussetzung gilt, dass alle E-Moduli und Viskositäten Konstanten darstellen und daher zeitunabhängig sind.

Bei Gleichung II.73 handelt es sich um eine DG 2. Ordnung mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\varepsilon(t=0) = \varepsilon^e = \frac{\sigma^{(0)}}{E^e} \quad \text{II.74}$$

$$\varepsilon^v(t=0) = \varepsilon^k(t=0) = 0 \quad \text{II.75}$$

$$\dot{\varepsilon}(t=0) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^k} \quad (\text{Serienschaltung}) \quad \text{II.76}$$

Zur Lösung der DG wird wiederum die Laplace-Transformation eingesetzt. Unter Zuhilfenahme von II.74 und II.76, sowie der Korrespondenzbeziehungen aus Tabelle 9 entstehen folgende Analogien:

$$\dot{\varepsilon} \rightarrow s\hat{\varepsilon} - \frac{\sigma^{(0)}}{E^e} \quad \text{II.77}$$

$$\ddot{\varepsilon} \rightarrow s^2\hat{\varepsilon} - s\frac{\sigma^{(0)}}{E^e} - \left(\frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^k}\right) \quad \text{II.78}$$

Da $\sigma = \sigma^{(0)} = \text{konst.}$, ergeben sich die erste und zweite Ableitung von σ zu Null. Setzt man nun die beiden obigen Transformationen in die DG des Burgers-Modell (II.73) ein und transformiert man auch die linke Seite der Gleichung, so erhält man die unten abgebildete algebraische „Ersatzgleichung“.

$$\eta^v(s\hat{\varepsilon} - \frac{\sigma^{(0)}}{E^e}) + \frac{\eta^v\eta^k}{E^k}(s^2\hat{\varepsilon} - s\frac{\sigma^{(0)}}{E^e} - \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} - \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^k}) = \frac{\sigma^{(0)}}{s} \quad \text{II.79}$$

Nun wird nach den Variablen ε , σ und gleichzeitig nach ansteigenden Potenzen von s sortiert

$$\hat{\varepsilon}(\eta^v s + \frac{\eta^v\eta^k}{E^k} s^2) - \sigma^{(0)}(\frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}) - \sigma^{(0)}s\frac{\eta^v\eta^k}{E^e E^k} = \frac{\sigma^{(0)}}{s} \quad \text{II.80}$$

und im Weiteren nach der Transformierten ε aufgelöst:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} = & \sigma^{(0)} \underbrace{\frac{1}{\eta^v s^2 + \frac{\eta^v\eta^k}{E^k} s^3}}_{a(s)} + \sigma^{(0)} \underbrace{\frac{1}{E^e s + \frac{\eta^k E^e}{E^k} s^2}}_{b(s)} + \sigma^{(0)} \underbrace{\frac{1}{E^k s + \frac{\eta^k E^k}{E^k} s^2}}_{c(s)} + \sigma^{(0)} \underbrace{\frac{\eta^k}{E^k \eta^v s + \eta^v \eta^k s^2}}_{d(s)} + \\ & + \sigma^{(0)} \underbrace{\frac{\eta^k}{E^e E^k + E^e \eta^k s}}_{e(s)} \end{aligned} \quad \text{II.81}$$

Nach dem Additionssatz können nun die einzelnen Terme $a(s)$ bis $e(s)$ unabhängig voneinander rücktransformiert werden, was im Folgenden durchgeführt wird.

$$a(s) = \frac{1}{\eta^v} \frac{1}{s^2(1 + \frac{\eta^k}{E^k} s)} = \frac{1}{\eta^v} \frac{1}{\frac{\eta^k}{E^k}} \frac{1}{s^2(\frac{E^k}{\eta^k} + s)} \rightarrow a(t) = \frac{E^k}{\eta^v \eta^k} \left(\frac{t \eta^k}{E^k} - \frac{\eta^{k2}}{E^{k2}} [1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}] \right) \quad \text{II.82}$$

$$a(t) = \frac{1}{\eta^v} t - \frac{\eta^k}{\eta^v E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t})$$

$$b(s) = \frac{1}{E^e s + \frac{\eta^k E^e}{E^k} s^2} = \frac{1}{E^e} \frac{1}{s(1 + \frac{\eta^k}{E^k} s)} = \frac{1}{E^e} \frac{1}{\frac{\eta^k}{E^k}} \frac{1}{s(\frac{E^k}{\eta^k} + s)} = \frac{1}{E^e} \frac{\frac{\eta^k}{E^k}}{\frac{\eta^k}{E^k}} \frac{\frac{E^k}{\eta^k}}{s(\frac{E^k}{\eta^k} + s)} \rightarrow \quad \text{II.83}$$

$$\rightarrow b(t) = \frac{1}{E^e} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t})$$

$$c(s) = \frac{1}{E^k s + \frac{\eta^k E^k}{E^k} s^2} = \text{analog } b(s) \rightarrow \quad \text{II.84}$$

$$\rightarrow c(t) = \frac{1}{E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t})$$

$$d(s) = \frac{1}{\eta^v} \frac{\eta^k}{E^k} \frac{1}{s(1 + \frac{\eta^k}{E^k} s)} = \frac{1}{\eta^v} \frac{\eta^k}{E^k} \frac{1}{\underbrace{\frac{\eta^k}{E^k}}_{=1}} \frac{1}{s(\frac{E^k}{\eta^k} + s)} = \frac{1}{\eta^v} \frac{\eta^k}{E^k} \frac{\frac{E^k}{\eta^k}}{s(\frac{E^k}{\eta^k} + s)} \rightarrow \quad \text{II.85}$$

$$\rightarrow d(t) = \frac{\eta^k}{\eta^v E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t})$$

$$e(s) = \frac{\eta^k}{E^e E^k + E^e \eta^k s} = \frac{\eta^k}{E^k E^e} \frac{1}{1 + \frac{\eta^k}{E^k} s} = \frac{\eta^k}{E^k E^e} \frac{1}{\underbrace{\frac{\eta^k}{E^k}}_{=\frac{1}{E^e}}} \frac{1}{\frac{E^k}{\eta^k} + s} \rightarrow \quad \text{II.86}$$

$$\rightarrow e(t) = \frac{1}{E^e} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}$$

Damit ergibt sich durch vollständige Rücktransformation folgende Gleichung

$$\varepsilon(t) = \sigma^{(0)} [a(t) + b(t) + c(t) + d(t) + e(t)] \quad \text{II.87}$$

bzw. nach Einsetzen der Terme

$$\varepsilon(t) = \sigma^{(0)} \left[\frac{1}{\eta^v} t - \frac{\eta^k}{\eta^v E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) + \frac{1}{E^e} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) + \frac{1}{E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) + \frac{\eta^k}{\eta^v E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) + \frac{1}{E^e} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t} \right] \quad \text{II.88}$$

Durch Kürzen der sich neutralisierenden Terme ergibt sich schließlich nach Umformulierung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{E^e} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) \quad (0 \leq t < t_1) \quad \text{II.89}$$

Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, dass sich die Gesamtverzerrung aus der Summe der elastischen, viskosen und kelvin'schen Anteile ergibt. Dies wurde auch schon ganz zu Beginn der Herleitung in Gleichung II.60 als Bedingung für die Serienschaltung erkannt. Die Lösung hätte also unter Berücksichtigung der vorangegangenen Modelle rasch ohne Aufstellen und Lösen einer DG gefunden werden können. Die oben dargestellte Herleitung mit Hilfe der Laplace-Transformation dient großteils der Nachvollziehbarkeit und Anschauung, denn mit jeder gängigen Mathematik-Software ist die DG ohne nennenswerten Zeitaufwand unter Angabe der Anfangsbedingungen lösbar.

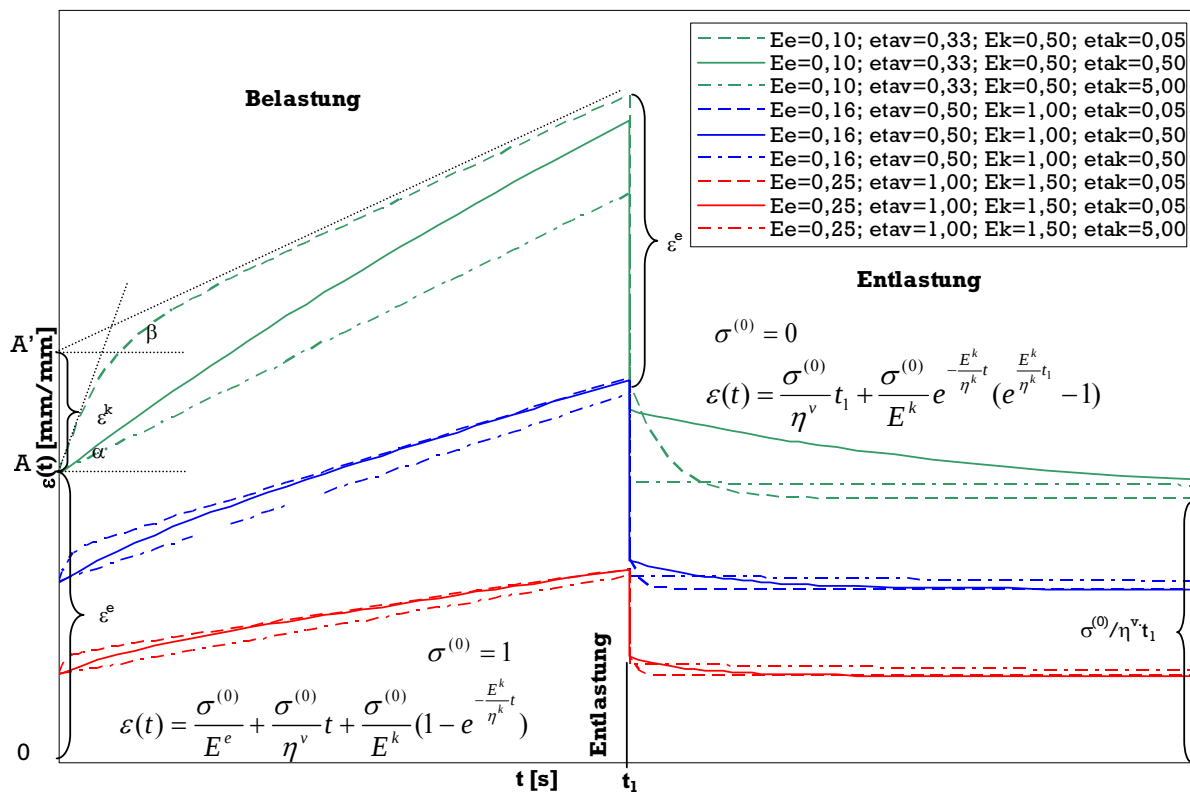


Abb. 13: Kriech- und Rückkriechverhalten eines Burgers'schen Körpers für verschiedene Werte von E^e , η^v , E^k und η^k

Abb. 13 zeigt das Kriech- und Rückkriechverhalten eines Burgers'schen Körpers. Hierbei wurde für die Einwirkung $\sigma^{(0)}$ der Wert 1 angenommen. Die vier

Modellparameter werden variiert, um ihren Einfluss auf das Verformungsverhalten bestimmen zu können.

- Die Federsteifigkeit E^e ist verantwortlich für die sofortige Verzerrung ε^e zum Zeitpunkt $t = 0$. Je höher die Steifigkeit, desto geringer die Anfangsverformung
- Die Viskosität des Dämpfers η^v gibt die Steigung der Tangente zum Zeitpunkt $t = \infty$ an. Diese lineare Funktion kann auch zur Beschreibung des Kriechverhaltens verwendet werden, wenn der Kelvin-Voigt'sche Körper ausreichend nahe an seiner maximalen Dehnung angelangt ist. Je viskoser, je zäher bzw. träger der Dämpfer sich darstellt, desto flacher verläuft die Gerade, desto langsamer steigen die Verformungen an.
- Der E-Modul der Feder im Kelvin-Voigt-Körper E^k bestimmt wie groß die maximale Dehnung des Kelvin-Voigt'schen Elements sein kann. In Abb. 13 kann dies als Abstand zwischen der sofortigen Verformung und dem Schnittpunkt der Tangente an die Unendlichkeit auf der y-Achse gedeutet werden. Je höher die Steifigkeit, desto geringer ist wiederum die mögliche Dehnung.
- Der Dämpfer im Kelvin-Voigt-Körper schließlich zeichnet verantwortlich für die anfängliche Krümmung der Dehnungskurve. Je niedriger die Viskosität ist, desto stärker krümmt sich die Kurve, desto rascher nähert sich die Kurve einer linearen Funktion an.

Betrachtet man nun Abb. 13 und leitet man II.89 einmal nach t ab, so ergibt sich die Kriechrate bzw. die Steigung der Kurve.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} - \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t} \left(-\frac{E^k}{\eta^k}\right) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^k} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t} \quad \text{II.90}$$

Die Kriechrate startet also bei $t = 0$ mit einem Wert von

$$\dot{\varepsilon}(t=0) = \left(\frac{1}{\eta^v} + \frac{1}{\eta^k}\right) \sigma^{(0)} = \tan \alpha \quad \text{II.91}$$

und nähert sich bei $t \rightarrow \infty$ dem Wert

$$\dot{\varepsilon}(t=\infty) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} = \tan \beta \quad \text{II.92}$$

an.

Zudem ist aus Abb. 13 ersichtlich, dass die Strecke $OA = \sigma^{(0)}/E^e$ darstellt und die Strecke $AA' = \sigma^{(0)}/E^k$. Damit können theoretisch alle Modellparameter (η^v , η^k , E^e , E^k) durch Versuche respektive deren Auswertung ermittelt werden. Dies gelingt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass sich ein Material unter konstanter Belastung zumindest annähernd wie ein Burgers-Körper verhält.

Wie schon bei der Beschäftigung mit den vorangegangenen Modellen soll nun auch das Kriechverhalten für den Zeitraum $t_1 < t \leq \infty$ bei Wegnahme der Belastung untersucht werden.

Es wird also zum Zeitpunkt t_1 ausgehend von der bisher wirkenden Belastung $\sigma = \sigma^{(0)}$ eine Spannung $\sigma = -\sigma^{(0)}$ aufgebracht; damit wirkt in Summe keine Spannung mehr im Körper. Da das Superpositionsprinzip gültig ist, kann II.89 mit dem neuen Belastungszustand überlagert werden. Es ergibt sich

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{E^e} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}) - \left[\frac{\sigma^{(0)}}{E^e} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} (t - t_1) + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} (1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} (t - t_1)}) \right] \quad \text{II.93}$$

und nach Umformung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t_1 + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t} (e^{\frac{E^k}{\eta^k} t_1} - 1) \quad (t_1 < t \leq \infty) \quad \text{II.94}$$

Auch das Rückkriechverhalten ist in Abb. 13 dargestellt: Bei diesem Vorgang geht der elastische Anteil der Feder ε^e sofort zurück, danach klingt die Geschwindigkeit des Kriechens immer weiter ab und die Verzerrung nähert bei $t \rightarrow \infty$ der Deformation des Dämpfers (η^v) zum Zeitpunkt der Entlastung $t = t_1$

$$\varepsilon(t = \infty) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t_1 \quad \text{II.95}$$

an. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

Neben dem Kriechverhalten ist für viskoelastische Stoffe das Relaxationsverhalten eine zweite wichtige Eigenschaft. Diese soll im nun Folgenden für das Burgers-Modell beschrieben werden.

Als Ausgangsgleichung dient die DG zur mathematischen Beschreibung des Modells (II.73). Es wird eine Verzerrung so aufgebracht, dass sie zum Zeitpunkt $t = 0+$ den Wert $\varepsilon^{(0)}$ annimmt. Daher wird die Verzerrung folgendermaßen beschreiben

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)} H(t) \quad \text{II.96}$$

wobei $H(t)$ die Heaviside'sche Sprungfunktion darstellt. $H(t-a)$ charakterisiert eine Funktion, die den Wert 0 für alle $t \leq a$ und den Wert 1 für alle $t > a$ annimmt. Die erste Ableitung der Heaviside'schen Funktion ist die Dirac'sche Funktion $\delta(t)$. Daraus resultiert

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{(0)} \delta(t) \quad \text{II.97}$$

sowie

$$\ddot{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{(0)} \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{II.98}$$

Unter Berücksichtigung von II.97 und II.98, sowie einiger Ersatzausdrücke für die Terme ergibt sich II.73 zu

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \varepsilon^{(0)} \delta(t) + q_2 \varepsilon^{(0)} \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{II.99}$$

wobei

$$p_1 = \frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}, \quad p_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^e E^k}, \quad q_1 = \eta^v, \quad q_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^k}.$$

Wendet man auf die obige Gleichung die Laplace-Transformation an, so ergibt sich folgendes Bild

$$\hat{\sigma} + p_1 s \hat{\sigma} + p_2 s^2 \hat{\sigma} = q_1 \varepsilon^{(0)} + q_2 \varepsilon^{(0)} s \quad \text{II.100}$$

und nach der Formulierung nach σ

$$\hat{\sigma} = \frac{\varepsilon^{(0)}(q_1 + q_2 s)}{1 + p_1 s + p_2 s^2} \quad \text{II.101}$$

Zum Lösen bzw. zur Rücktransformation muss der Nenner soweit aufgeteilt werden, dass nach den in Tabelle 9 genannten Regeln eine inverse Transformation möglich wird. Dazu bedient man sich der Partialbruchzerlegung. Zunächst werden die Nullstellen für den Zähler von II.101 gesucht, denn es gilt für die Nullstellen x_i :

$$a + bx + x^2 = (x - x_1)(x - x_2)$$

Aus dem Nenner von II.101

$$\frac{1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} s + s^2 = 0 \quad \text{II.102}$$

folgen die beiden Nullstellen

$$s_{1/2} = -\frac{p_1}{2p_2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4p_2^2} - \frac{1}{p_2}} = -\frac{p_1}{2p_2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2 - 4p_2}{4p_2^2}} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2p_2} \quad \text{II.103}$$

Nun wird noch eine Abkürzung eingeführt

$$A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$$

womit sich die Nullstellen $-r_1$ und $-r_2$ zu

$$r_1 = \frac{p_1 - A}{2p_2}, \quad r_2 = \frac{p_1 + A}{2p_2}$$

ergeben. In weiterer Folge wird die Gleichheit der beiden Nenner herangezogen um folgende Beziehung herzustellen

$$\frac{1}{p_2} \frac{\varepsilon^{(0)}(q_1 + q_2 s)}{\frac{1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} s + s^2} = \frac{B}{(s + r_1)} + \frac{C}{(s + r_2)} \quad \text{II.104}$$

Die rechte Seite der Gleichung kann auch anders dargestellt werden:

$$\frac{B(s + r_2) + C(s + r_1)}{(s + r_1)(s + r_2)} \quad \text{II.105}$$

Durch den Koeffizientenvergleich der Zähler zwischen der linken Seite von II.104 und obiger Gleichung gewinnt man ein Gleichungssystem, mit dem B und C eruiert werden können.

$$B + C = \frac{\varepsilon^{(0)} q_2}{p_2}$$

$$r_2 B + r_1 C = \frac{\varepsilon^{(0)} q_1}{p_2}$$

II.106

Durch Lösen des obigen Systems erhält man für die beiden Unbekannten

$$B = \frac{\varepsilon^{(0)} q_2 r_1 - q_1}{p_2 r_1 - r_2}, \quad C = \frac{\varepsilon^{(0)} q_1 - q_2 r_2}{p_2 r_1 - r_2}$$

B und C werden nun in die rechte Seite von II.104 eingesetzt, womit sich

$$\frac{\varepsilon^{(0)} q_1 - q_2 r_1}{p_2 r_2 - r_1} \frac{1}{s + r_1} - \frac{\varepsilon^{(0)} q_1 - q_2 r_1}{p_2 r_2 - r_1} \frac{1}{s + r_2} = \hat{\sigma}$$

II.107

ergibt. Unter Berücksichtigung, dass $1/(r_2 - r_1) = p_2/A$, stellt sich die mathematische Beschreibung der Relaxation für einen Burgers-Körper nach Rücktransformation so dar:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon^{(0)}}{A} [(q_1 - q_2 r_1) e^{-r_1 t} - (q_1 - q_2 r_2) e^{-r_2 t}]$$

II.108

wobei folgende Abkürzungen

$$q_1 = \eta^v, \quad q_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^k}, \quad r_1 = \frac{p_1 - A}{2p_2}, \quad p_1 = \frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}, \quad A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2},$$

$$p_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^e E^k}, \quad r_2 = \frac{p_1 + A}{2p_2}$$

in II.108 enthalten sind. [Findley, Lai, Onaran (1989)]

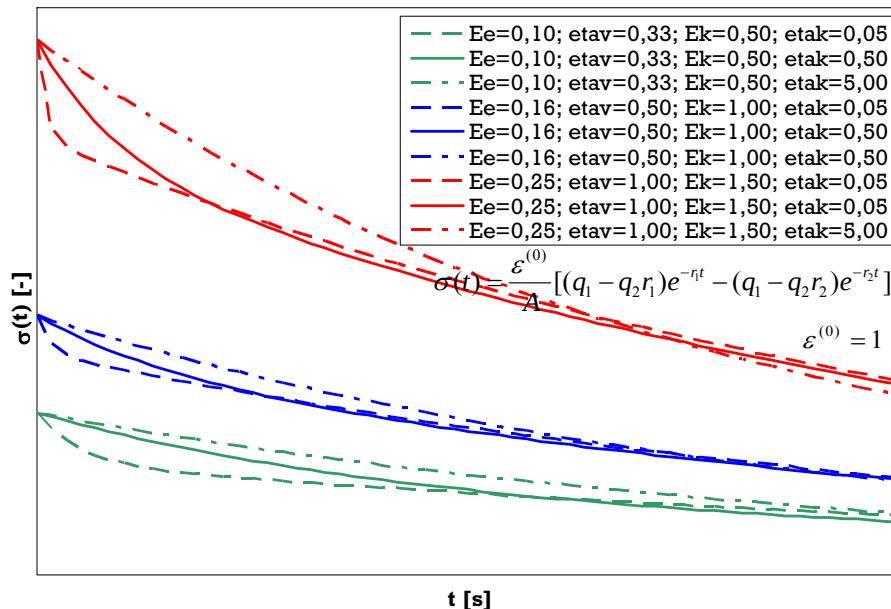


Abb. 14: Relaxationsverhalten des Burgers-Modells für verschiedene Werte von E^e , η^v , E^k und η^k

Abb. 14 zeigt den Verlauf der Relaxation für das hier behandelte Modell. Angenommen wird eine konstant gehaltene Dehnung $\varepsilon^{(0)}$ von 1. Eine klare

Aussage kann über den Einfluss der Federsteifigkeit E^e getroffen werden. Je höher diese Steifigkeit ist, desto höher ist auch die Spannung σ zum Zeitpunkt $t = 0$. Die anderen drei Parameter beeinflussen den Krümmungsverlauf der Kurve. Jedoch ist aufgrund der Komplexität der Relaxationsformel eine kurze, einfache Beschreibung des Einflussbereichs einzelner Parameter nicht mehr möglich. Zu erkennen ist auch, dass durch die höhere Anzahl an Elementen im Modell eine feiner abgestimmte Modellierung und damit bessere Annäherung an die Realität möglich ist.

II.4.4 Verallgemeinertes, parallel geschaltetes Maxwell-Modell

Ein weiterer gangbarer Weg mehr Parameter zur Verfügung zu haben, um ein Modell dem realen Werkstoffverhalten besser anzupassen, ist die Verallgemeinerung von einfachen Modellen. Das bedeutet, dass beliebig viele Kelvin-Voigt'sche oder Maxwell'sche Körper in Serie oder parallel verbunden werden. Hier sei dies am Beispiel des verallgemeinert parallel geschalteten Maxwell-Modells illustriert.

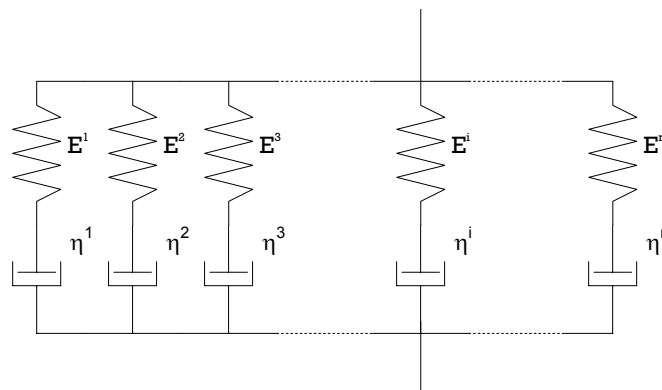


Abb. 15: Verallgemeinertes Maxwell-Modell

Eine beliebige Anzahl einzelner Maxwell-Körper wird durch parallele Schaltung verbunden. Dadurch werden sowohl eine sofortig elastische Antwort, als auch verzögerte Elastizität, Relaxation mit unterschiedlichen Relaxationszeiten und viskoses Fließen beschrieben. Wie schon oben bei der Behandlung mit dem Maxwell'schen Modell gezeigt, lautet die DG zur mathematischen Beschreibung des Materialverhaltens für ein Element i des generalisierten Modells:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} \quad \text{II.109}$$

Es eignet sich dieses Modell sehr gut in jenen Fällen, in denen die Verformungsgeschichte bekannt ist und die Relaxation beschrieben werden soll, da hier ein großes Spektrum an unterschiedlichen Relaxationszeiten möglich ist. Für parallel geschaltete Elemente gilt, dass die Gesamtspannung identisch ist mit der Summe der Spannungen der einzelnen Elemente. Unter Zuhilfenahme dieses Prinzips ergibt sich daher für das generalisierte Maxwell-Modell

$$\sigma(t) = \varepsilon^{(0)} \sum_{i=0}^n E_i e^{-\frac{t}{t_i^R}}$$

II.110

wobei hier mit t_i^R die Relaxationszeit des Elements i , also η_i/E_i bezeichnet wird und der Summenterm nach $\varepsilon^{(0)}$ gleichzeitig den Relaxationsmodul $R(t)$ angibt.

Ein Beispiel eines solchen verallgemeinerten Maxwell-Modells zeigt Abb. 16. In diesem Fall sind die Relaxationsverläufe dreier verschiedener Konfigurationen mit je drei Maxwell-Elementen dargestellt. Im ersten Fall, der grün dargestellt ist, besitzt das System im Verhältnis zu den Dämpfern recht steife Federn, was zu einer hohen Anfangsspannung verbunden mit einem sehr raschen Spannungsabbau führt. Die rote Linie stellt den gegenteiligen Fall dar, also weiche Federn mit hochviskosen Dämpfern. Dadurch liegt die Spannung zum Zeitpunkt $t=0$ bei einem niedrigen Wert, jedoch dauert auch der Relaxationsvorgang sehr lange. Blau dargestellt ein „gemischtes System“. Einerseits mit einer harten Feder, aber auch ein hochviskoser Dämpfer ist implementiert. Hier zeigen sich hohe Anfangsspannungen und ein langsames Abklingen dieser Spannung aufgrund des Dämpfers mit hoher Viskosität.

Es lassen sich also beliebige Relaxationskurven mit diesen generalisierten Modellen bilden. Dabei gilt, dass, je höher die Anzahl der Elemente, desto besser die Möglichkeit sich der Realität anzunähern, wobei die Komplexität der Handhabung, vor allem bei dynamischen Werkstoffkennwerten, die im späteren Verlauf noch behandelt werden, progressiv zunimmt.

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

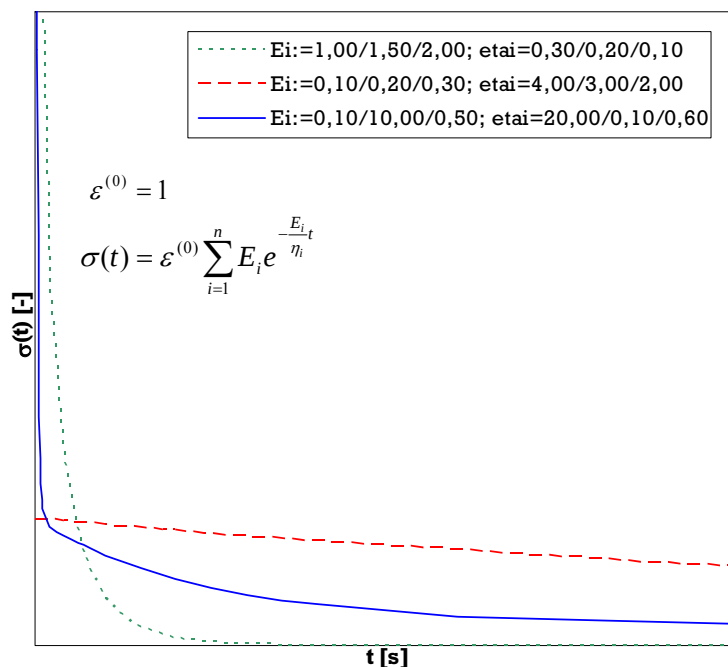


Abb. 16: Relaxationsverhalten eines verallgemeinerten Maxwell-Modells mit drei Maxwell'schen Körpern mit verschiedenen Konfigurationen

II.5 Darstellungsvarianten der konstitutiven Beziehungen

II.5.1 Darstellung mit Hilfe von Differentialoperatoren

Die konstitutiven Beziehungen eines Materials, das einem linearen Werkstoffgesetz gehorcht, können für einfache Spannungszustände, so zum Beispiel einaxiale Beanspruchung oder reine Schubbeanspruchung, durch eine lineare Funktion von σ , ε und deren Ableitungen nach der Zeit dargestellt werden. Allgemein formuliert bedeutet dies:

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots; \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots) = 0 \quad \text{II.111}$$

oder in anderer Schreibweise

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad \text{II.112}$$

wobei P und Q hierin lineare Differentialoperatoren darstellen. Diese haben die Form

$$P = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad Q = \sum_{i=0}^m q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

Somit lautet II.112, die differentielle Darstellung der konstitutiven Beziehungen, ausformuliert:

$$P\sigma = p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + \dots + p_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + \dots + q_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m} = Q\varepsilon \quad \text{II.113}$$

In dieser Formel stellen p_i und q_i Materialkonstanten dar. Ohne Berücksichtigung von Anfangs- oder Randbedingungen, lautet die Laplace-Transformation für obige Gleichung

$$\hat{P}(s)\hat{\sigma}(s) = (p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n)\hat{\sigma}(s) = \hat{Q}(s)\hat{\varepsilon}(s) = (q_0 + q_1s + \dots + q_ms^m)\hat{\varepsilon}(s) \quad \text{II.114}$$

was nun die Umformung zu

$$\frac{\hat{Q}(s)}{\hat{P}(s)} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \quad \text{II.115}$$

zulässt.

Mit einer jeweils bestimmten Kombination von Termen können also idealisierte Materialmodelle mathematisch beschrieben werden. Betrachtet man zum Beispiel die Hooke'sche Feder, so ist aus der DG zur mathematischen Beschreibung des Materialverhaltens, nämlich $\sigma = E\varepsilon$, ersichtlich, dass

$$P = 1, Q = E, p_0 = 1, q_0 = E$$

Zur Darstellung des Maxwell'schen Modells benötigt man schon drei Koeffizienten. Die DG $\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$ zeigt folgende Differentialoperatoren und

Koeffizienten:

$$P = 1 + \frac{\eta}{E} \frac{\partial}{\partial t}, \quad Q = \eta \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{\eta}{E}, \quad q_1 = \eta$$

Aus der Beschäftigung mit den einfachen, von nicht hoher Komplexität gekennzeichneten Materialmodellen (Maxwell, Kelvin-Voigt) ist bekannt, dass das wirkliche Verhalten eines viskoelastischen Materials durch diese nicht genau (genug) beschrieben werden kann. Aus der Darstellung mit Differentialoperatoren wird dies augenscheinlich. Denn es beinhalten die mathematischen Darstellungen der einfachen Modelle höchstens Terme, die einmal nach der Zeit abgeleitet sind. Damit kann nur die Steigung der Kurve, nicht aber die Krümmung, die durch die zweite Ableitung repräsentiert wird, verändert werden. Die Wahl von nur drei Koeffizienten greift eindeutig zu kurz.

Das Burgers-Modell, das die Wirklichkeit besser abbildet, besitzt in der differentiellen Darstellung schon fünf Koeffizienten. Es ist einsichtig, dass, je höher die Anzahl der Koeffizienten, je komplexer also das Modell ist, desto besser eine Annäherung an die Realität möglich ist.

Die hier behandelte Darstellung ermöglicht eine einfache Berechnung der Werkstoffkennwerte, die bei zyklisch-dynamischer Belastung gelten, sofern die Koeffizienten bekannt sind. In weiter Folge werden diese Kennwerte der Einfachheit halber als komplexe oder dynamische Kennwerte bezeichnet.

Es wird jedoch bei zunehmender Anzahl an Koeffizienten immer schwieriger, teilweise unmöglich, diese analytisch zu bestimmen.

Es gibt eine weitere Methode für den Umgang mit der Darstellung mit Differentialoperatoren. Setzt man in II.114 $p_0 = 1$, was die Allgemeingültigkeit nicht vermindert, so ergibt sich nach Umformung

$$\hat{\varepsilon}(s) = \left[\frac{q_0 + q_1 s + \dots + q_m s^m}{1 + p_1 s + \dots + p_n s^n} \right] \hat{\sigma}(s) \quad \text{II.116}$$

beziehungsweise nach der allgemeinen Anwendung der Partialbruchzerlegung, die schon weiter oben beschrieben wurde

$$\hat{\varepsilon}(s) = \left[\sum_{i=1}^c \frac{\alpha_i}{\beta_i + s} \right] \hat{\sigma}(s) = \sum_{i=1}^c A_i(s) \hat{\sigma}(s) \quad \text{II.117}$$

Nun führt man die inverse Laplace-Transformation durch, wobei sich laut Transformationstabelle

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^c A_i(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi \quad \text{II.118}$$

ergibt. Die Inverstransformation von $A_i(s)$ lautet

$$A_i(t - \xi) = \alpha_i e^{-\beta_i(t - \xi)} \quad \text{II.119}$$

t stellt die Zeit dar und ξ die Zeit vor t . Im Allgemeinen sind α_i und β_i experimentell einfacher zu bestimmen, als die Koeffizienten p_i und q_i .

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.5.2 Darstellung mit Hilfe von Integralen

Analog zur Darstellung mit Hilfe von Differentialoperatoren ist es auch möglich die Spannungs-Verzerrungsbeziehung durch Integrale zu beschreiben. Diese Form bietet einige Vorteile: Einerseits besteht im Vergleich zur differentiellen Darstellung die Möglichkeit, die tatsächlich gemessenen viskoelastischen Eigenschaften eines Materials in die Berechnung einfließen zu lassen. Außerdem können durch einfache Erweiterungen Effekte, die durch Alterung und unterschiedliche Temperaturen entstehen, beschrieben werden.

Über die Erläuterung des Boltzmann'schen Superpositionsprinzips führt der Weg zur Darstellung der konstitutiven Beziehungen mit Hilfe von Integralen.

Wird zum Zeitpunkt $t = \xi_1$ eine konstante Spannung $\sigma^{(1)}$ aufgebracht, so lautet die daraus folgende Verzerrung laut II.3

$$\varepsilon(t) = \sigma^{(1)} J(t - \xi_1) \quad \text{II.120}$$

Wenn der Wert von $\sigma^{(1)}$ gleich dem Wert $\sigma^{(0)}$ ist, so wird die Verzerrung die gleiche Größe annehmen, mit dem Unterschied, dass die Verzerrung um ξ_1 versetzt auftritt.

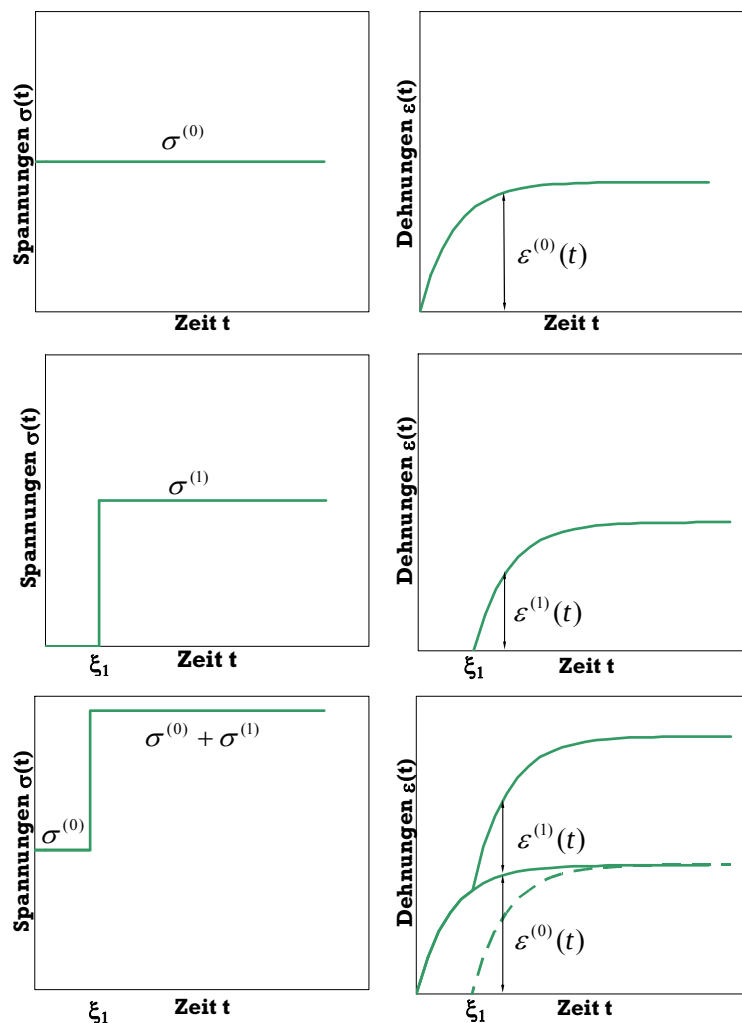


Abb. 17: Boltzmann'sches Superpositionsprinzip

Wird zunächst die Spannung $\sigma^{(0)}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgebracht und danach bei $t = \xi_1$ die Spannung $\sigma^{(1)}$, so ergibt sich die Verzerrung zu jedem Zeitpunkt $t \geq \xi_1$ als Summe der Verzerrungen aus den beiden Spannungen zu diesem Zeitpunkt, jedoch so berechnet, als würden beide Spannungen getrennt voneinander, für sich wirken. In Abb. 17 ist eine grafische Darstellung des Prinzips angeführt.

Es kann allgemeiner für beliebig viele Spannungsschritte $\Delta\sigma^{(i)}$ folgendes formuliert werden

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^r \varepsilon^{(i)}(t - \xi_i) = \sum_{i=1}^r \Delta\sigma^{(i)} J(t - \xi_i) \quad \text{II.121}$$

Geht die Anzahl der Spannungsschritte gegen unendlich, so wird aus der Summe ein Integral, aus den finiten Δ -Schritten ein Differential.

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \xi) d[\sigma(\xi)] \quad \text{II.122}$$

Man kann den Ausdruck $d[\sigma(\xi)]$ durch $\frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} d\xi$ ersetzen, womit die Zeit ξ zur unabhängigen Variablen wird. Damit lautet also die Darstellung mit Hilfe von Integralen für die Verzerrung $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \xi) \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} d\xi \quad \text{II.123}$$

Oft tritt der Fall ein, dass die Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ einen zeitunabhängigen, elastischen Term J_0 und eine zeitabhängige Kriechfunktion $\varphi(t)$ enthält. Damit kann II.123 umformuliert werden und lautet

$$\varepsilon(t) = J_0 \sigma(t) + \int_0^t \varphi(t - \xi) \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} d\xi \quad \text{II.124}$$

Völlig analog zur gerade durchgeführten Herleitung kann bei der integralen Darstellung der Spannung in Abhängigkeit von der Verzerrung vorgegangen werden. Es müssen lediglich die Variablen σ und ε , $J(t)$ und $R(t)$ vertauscht werden. Das jeweilige Analogon zu II.123 und II.124 lautet daher

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \xi) \frac{\partial\varepsilon(\xi)}{\partial\xi} d\xi \quad \text{II.125}$$

und

$$\sigma(t) = R_0 \varepsilon(t) + \int_0^t \psi(t - \xi) \frac{\partial\varepsilon(\xi)}{\partial\xi} d\xi \quad \text{II.126}$$

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.5.3 Zusammenhang zwischen Kriechen und Relaxation

Da Kriechen und Relaxation zwei Spielarten der Viskoelastizität darstellen, muss eine Beziehung zwischen den beiden Phänomenen vorhanden sein. Dies bedeutet auch, dass, ist eine der beiden Funktionen $R(t)$ bzw. $J(t)$ bekannt, die jeweils andere aus der bekannten herleitbar ist. Wendet man auf II.123 und II.125 die Laplace-Transformation an, so ergeben sich – und dies ist der bekannte Vorteil dieser Operation – zwei algebraische Gleichungen:

$$\hat{\varepsilon}(s) = s\hat{J}(s)\hat{\sigma}(s) \quad \text{II.127}$$

$$\hat{\sigma}(s) = s\hat{R}(s)\hat{\varepsilon}(s) \quad \text{II.128}$$

Durch Gleichsetzen der beiden oben dargestellten Formeln zeigen sich folgende Beziehungen zwischen Kriechnachgiebigkeit und Relaxationsmodul

$$s\hat{R}(s) = \frac{1}{s\hat{J}(s)} \quad \text{II.129}$$

$$\hat{J}(s)\hat{R}(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{II.130}$$

Wendet man auf Gleichung II.130 nun die inverse Laplace-Transformation an, so gelangt man zu folgendem Ergebnis

$$\int_0^t J(t-\xi)R(\xi)d\xi = t \quad \text{II.131}$$

$$\int_0^t R(t-\xi)J(\xi)d\xi = t \quad \text{II.132}$$

Diese beiden Gleichungen definieren demnach die Beziehung zwischen der Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ und dem Relaxationsmodul $R(t)$ für ein sich linear verhaltendes Material.

Unter Verwendung der Grenzwertsätze, die bei der Laplace-Transformation gelten, kann gezeigt werden, dass

$$J(0)R(0) = 1 \quad \text{II.133}$$

und

$$J(\infty)R(\infty) = 1 \quad \text{II.134}$$

$R(0)$ und $J(0)$ stehen für den Relaxationsmodul bzw. die Kriechnachgiebigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, während $R(\infty)$ und $J(\infty)$ für die langfristigen Werkstoffeigenschaften stehen. Zwischen diesen beiden Extremen gelten II.131 und II.132. Über den Umweg der Laplace-Transformation kann also für eine bekannte Kriechnachgiebigkeit der Relaxationsmodul bestimmt werden; naturgemäß gilt dies auch für den umgekehrten Fall. Jedoch sei noch hinzugefügt, dass nur für einfache Formen der Kriechnachgiebigkeit oder des Relaxationsmoduls eine analytische Lösung über die Laplace-Transformation möglich ist.

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.6 Verhalten von linear viskoelastischem Material unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung

Die bisherige Behandlung des Themas Viskoelastizität spannte den Bogen über die Darstellung des mechanischen Verhaltens von zeitlinear viskoelastischem Material durch konstitutive Beziehungen unter konstanter Belastung. Mit Hilfe von Kriech- oder Relaxationsversuchen werden die notwendigen Daten erhalten um diese Werkstoffgleichungen entweder über den Weg der Differentialoperatoren oder durch integrale Darstellung zu eruieren.

Es existieren jedoch in der Praxis zahlreiche Belastungsfälle, in denen die Belastungsdauer bedeutend kürzer ist, als bei den oben genannten Versuchen. Dies können entweder Belastungen sein, die schlagartig wirken, oder solche, die in Form einer Schwingung auf den Körper einwirken. Für die Analyse beider Belastungsfälle sind zyklisch-dynamische Versuche notwendig, bei denen die Last meist in Form von sinusförmigen Schwingungen aufgebracht wird. Dabei ergeben sich im Unterschied zu statischen Versuchen veränderte, so genannte komplexe oder dynamische Module und Nachgiebigkeiten, die im Folgenden diskutiert werden.

II.6.1 Der komplexe Modul und die komplexe Nachgiebigkeit

Gegeben sei eine externe Kraft, die mit konstanter Amplitude und bestimmter Frequenz auf einen viskoelastischen Probekörper einwirkt. Die schwingende Belastung kann damit durch $F = F^{(0)} \cos \omega t$ ausgedrückt werden. Dabei drückt F_0 die Amplitude und ω die Kreisfrequenz der Belastung aus. Diese äußere Kraft führt im Probekörper zu einer Spannung

$$\sigma = \sigma^{(0)} \cos \omega t \quad \text{II.135}$$

Hier stellt $\sigma^{(0)}$ die Amplitude und ω die Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingung dar. Mit $T = 2\pi/\omega$ wird die Periode der Schwingung bezeichnet. Außerdem haben Kreisfrequenz ω und Frequenz f [Hz] folgenden Zusammenhang:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{II.136}$$

Bekanntlich gilt im komplexen Zahlenraum:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad \text{II.137}$$

Wird der reelle Teil obiger Gleichung verwendet, so kann II.135 auch wie folgt ausgedrückt werden

$$\sigma = \sigma^{(0)} e^{i\omega t} \quad \text{II.138}$$

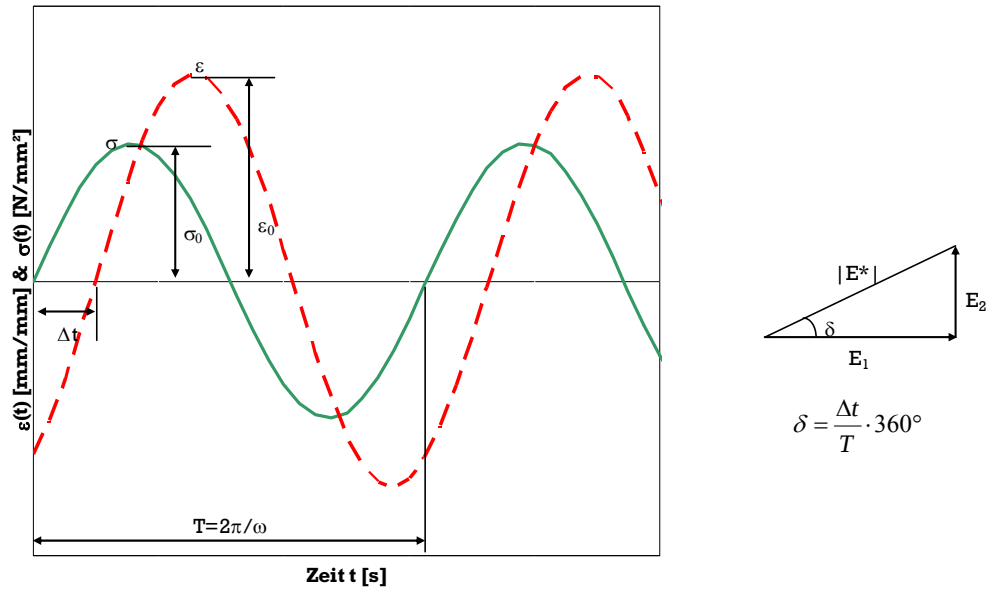


Abb. 18: sinüsformig schwingende Belastung σ , Verzerrungsantwort ε und Phasenwinkel δ

Besitzt nun der Probekörper linear viskoelastische Eigenschaften und wirkt eine schwingende Belastung auf ihn ein, so wird die Reaktion eine sinüsformig schwingende Verzerrung sein. Die Frequenz, die dabei auftritt ist dieselbe, jedoch um einen Phasenwinkel δ verschoben. Damit ergibt sich die Verzerrung zu

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} \cos(\omega t - \delta) \quad \text{II.139}$$

bzw. ausgedrückt im imaginären Zahlenraum

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} e^{i(\omega t - \delta)} \quad \text{II.140}$$

$\varepsilon^{(0)}$ beschreibt in dieser Formel die Verzerrungsamplitude. Der Phasenwinkel δ wird auch als Verlustwinkel beschrieben, der durch die innere Reibung des Materials hervorgerufen wird. Grafisch dargestellt ist der Sachverhalt in Abb. 18. Um im Folgenden die Beziehung zwischen σ und ε für linear viskoelastisches Material herzuleiten, kann Gleichung II.140 auch so formuliert werden:

$$\varepsilon = (\varepsilon^{(0)} e^{-i\delta}) e^{i\omega t} = \varepsilon^* e^{i\omega t} \quad \text{II.141}$$

Dabei kann man ε^* als komplexe Verzerrungsamplitude ansehen. Mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen lautet ε^*

$$\varepsilon^* = \varepsilon^{(0)} e^{-i\delta} = \varepsilon^{(0)} (\cos \delta - i \sin \delta) \quad \text{II.142}$$

Werden nun II.138 und II.141 in II.113 – dies ist die Darstellung der konstitutiven Beziehungen mit Hilfe von Differentialoperatoren – eingesetzt, so ergibt sich folgende Gleichung

$$[p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \dots] \sigma^{(0)} e^{i\omega t} = [q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \dots] \varepsilon^* e^{i\omega t} \quad \text{II.143}$$

oder umgeformt

$$\frac{\varepsilon^*}{\sigma^{(0)}} = J^*(\omega) = \frac{p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \dots}{q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \dots} \quad \text{II.144}$$

J^* ist – analog zur Kriechnachgiebigkeit aus den quasistatischen Versuchen – als komplexe oder dynamische Nachgiebigkeit definiert. Sie ist – anders als die

statische Kriechnachgiebigkeit – von der Kreisfrequenz der Schwingung ω abhängig.

Ähnlich verläuft die Herleitung des komplexen Moduls, wenn eine sinusförmig schwingende Verzerrung als Belastung auf den Probekörper einwirkt. Die Schwingung hat folgende Form:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} \quad \text{II.145}$$

Der Probekörper reagiert auf diese aufgezwungene Verzerrung durch Aufbau einer Spannung, die mit derselben Kreisfrequenz, jedoch wieder um einen Phasenwinkel δ verschoben, schwingt.

$$\sigma(t) = \sigma^{(0)} e^{i(\omega t + \delta)} \quad \text{II.146}$$

bzw.

$$\sigma(t) = \sigma^* e^{i\omega t} \quad \text{II.147}$$

Als Amplitude des komplexen Spannungsanteils ist hier analog zu oben σ^* definiert. Zur Bestimmung des komplexen Moduls setzt man II.145 und II.147 in II.113 ein und formt um. Damit erhält man

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^{(0)}} = E^*(\omega) = \frac{q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \dots}{p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \dots} \quad \text{II.148}$$

E^* stellt den komplexen oder dynamischen Modul dar und ist wie die komplexe Nachgiebigkeit eine Funktion von ω . Es ist wie bei jeder komplexen Zahl möglich, den komplexen Modul in einen reellen und einen imaginären Teil zu trennen. Dazu wird σ^* in obiger Gleichung durch den äquivalenten Ausdruck $\sigma^{(0)} e^{i\delta}$ ersetzt. Damit ergibt sich

$$E^* = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} e^{i\delta} = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} (\cos \delta + i \sin \delta) = E_1 + iE_2 = |E^*| e^{i\delta} \quad \text{II.149}$$

Der erste Term auf der rechten Seite schwingt phasengleich mit der Verzerrung und stellt gleichzeitig auch den reellen Teil des komplexen Moduls dar. Er wird als Speichermodul bezeichnet.

$$E_1 = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} \cos \delta \quad \text{II.150}$$

Der zweite Term rechts ist der imaginäre Teil des dynamischen Moduls; eine andere Bezeichnung für ihn ist Verlustmodul.

$$E_2 = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} \sin \delta \quad \text{II.151}$$

Abb. 18 zeigt auf der rechten Seite die grafische Interpretation dieses Sachverhalts.

Mit Hilfe der beiden Anteile des dynamischen Moduls, kann die Spannungs-Verzerrungsbeziehung auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma = (E_1 + iE_2) \varepsilon \quad \text{II.152}$$

Außerdem gilt

$$\tan \delta = \frac{E_2}{E_1} \quad \text{II.153}$$

Der Betrag des komplexen Modul ergibt sich zu

$$|E^*| = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2} = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} \quad \text{II.154}$$

Völlig analog geht die Herleitung der Speicher- und Verlustnachgiebigkeit vonstatten. Es gilt:

$$J^* = \frac{\varepsilon^*}{\sigma^{(0)}} = \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\right) e^{-i\delta} = \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\right) (\cos \delta - i \sin \delta) = J_1 - iJ_2 = |J^*| e^{-i\delta} \quad \text{II.155}$$

Wiederum ist J_1 der Speicher- und J_2 der Verlustanteil der komplexen Nachgiebigkeit. Der Betrag von J^* lautet:

$$|J^*| = (J_1^2 + J_2^2)^{1/2} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}} \quad \text{II.156}$$

Und auch hier seien die Beziehungen zwischen J_1 , J_2 und δ dargestellt.

$$\tan \delta = \frac{J_2}{J_1} \quad \text{II.157}$$

$$J_1 = |J^*| \cos \delta = |J^*| (1 + \tan^2 \delta)^{-1/2} \quad \text{II.158}$$

$$J_2 = |J^*| \sin \delta = |J^*| \tan \delta (1 + \tan^2 \delta)^{-1/2} \quad \text{II.159}$$

Betrachtet man die beiden Gleichungen II.144 und II.148 näher, so ist erkennbar, dass J^* und E^* reziprok sind. Damit gilt

$$J^* E^* = 1 \quad \text{II.160}$$

Wichtige Zusammenhänge zwischen den beiden komplexen Werkstoffkenngrößen liefern die Vergleiche von II.154 mit II.156 und II.153 mit II.157, nämlich

$$|J^*| = \frac{1}{|E^*|} \quad \text{II.161}$$

und

$$\tan \delta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{J_2}{J_1} \quad \text{II.162}$$

Außerdem gelten unter Berücksichtigung von II.158 bzw. II.159, sowie II.153 und II.161 die direkten Zusammenhänge zwischen den Anteilen der komplexen Werkstoffkenngrößen

$$J_1 = \frac{1}{|E^*|} \cos \delta = \frac{E_1}{E_1^2 + E_2^2} \quad \text{II.163}$$

$$J_2 = \frac{1}{|E^*|} \sin \delta = \frac{E_2}{E_1^2 + E_2^2} \quad \text{II.164}$$

bzw. analog für Speicher- und Verlustmodul

$$E_1 = \frac{1}{|J^*|} \cos \delta = \frac{J_1}{J_1^2 + J_2^2} \quad \text{II.165}$$

$$E_2 = \frac{1}{|J^*|} \sin \delta = \frac{J_2}{J_1^2 + J_2^2} \quad \text{II.166}$$

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

Während es bei quasistatischen Kriech- und Relaxationsversuchen üblich ist, die Zeit t als Variable zu setzen, wird bei zyklischen Versuchen die Kreisfrequenz ω oder die Frequenz f verwendet.

In Abb. 19 sind als Anschauungsbeispiel sowohl die komplexe Nachgiebigkeit J^* , als auch der Verlust- und Speicheranteil, sowie der Phasenwinkel δ in Abhängigkeit der Frequenz f [Hz] für einen Kelvin-Voigt'schen Körper unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung dargestellt. Die Feder soll eine Steifigkeit von 0,50, der Dämpfer eine Viskosität von 1,00 aufweisen. Für sehr kleine Frequenzen bis etwa 0,02 Hz, was einer Schwingungsdauer von 50 sec entspricht, kann von einer Verlustnachgiebigkeit $J_2 = 0$ ausgegangen werden. In diesem Bereich entspricht der Betrag der dynamischen Nachgiebigkeit dem Wert der statischen Kriechnachgiebigkeit $1/E$. Im anderen Extrem, nämlich bei sehr hohen Frequenzen über 1000 Hz bzw. einer Schwingungsdauer von 1/1000 sec geht die komplexe Nachgiebigkeit gegen Null, sowohl Verlust- also auch Speicheranteil nehmen den Wert Null an. Die Phasenverschiebung hingegen erreicht mit 90° den maximal möglichen Wert. Das System verhält sich wie ein Starrkörper, es tritt keine Verformung mehr als Antwort auf die Spannung auf.

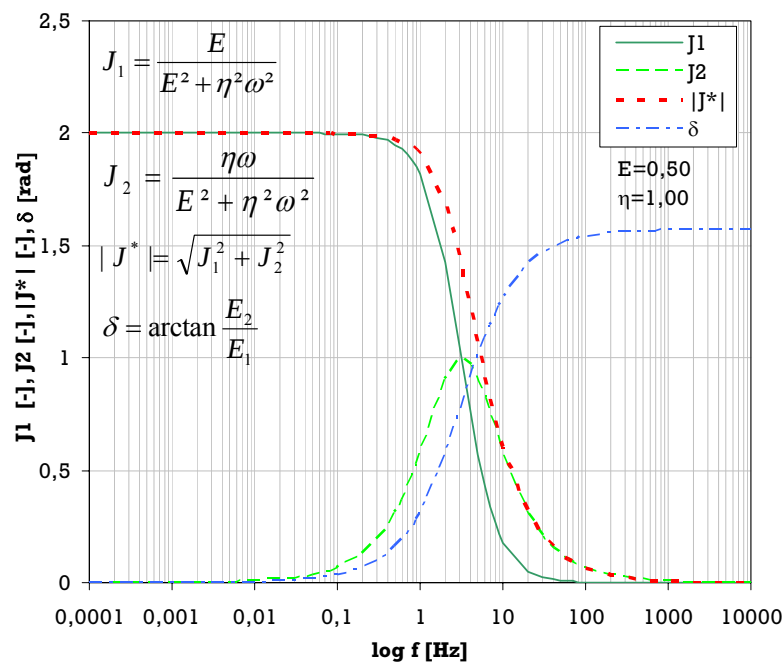


Abb. 19: Kelvin-Voigt'scher Körper unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung

Im Übergangsbereich, dessen Frequenzspektrum beim Kelvin-Voigt'schen Körper vom Verhältnis η/E abhängt, verändert sich das Materialverhalten. Die

komplexe Nachgiebigkeit sinkt rapide ab, das System wird steifer, der Phasenwinkel nimmt zu und der Speicheranteil der Nachgiebigkeit geht gegen Null. In einem gewissen Frequenzbereich erreicht die Verlustnachgiebigkeit ein Maximum, hier bei etwa 6 Hz; danach fällt sie wieder ab gegen Null.

Für zwei Frequenzen, 10^{-4} und 6 Hz, sind in Abb. 20 die Spannungs- und Verzerrungsverläufe in Abhängigkeit der Zeit aufgetragen. Links ist das Verhalten bei sehr niedrigen Frequenzen ablesbar. Der Phasenwinkel ist vernachlässigbar klein und die Verzerrung entspricht der Verzerrung bei statischen Versuchen. Im Fall, der rechts dargestellt ist, zeigt sich der Einfluss von zyklisch-dynamischer Beanspruchung.

Ein Phasenwinkel von etwa 62° tritt auf, gleichzeitig sinkt die Verzerrungsamplitude ab, was ein Anzeichen für den Anstieg der Systemsteifigkeit ist.

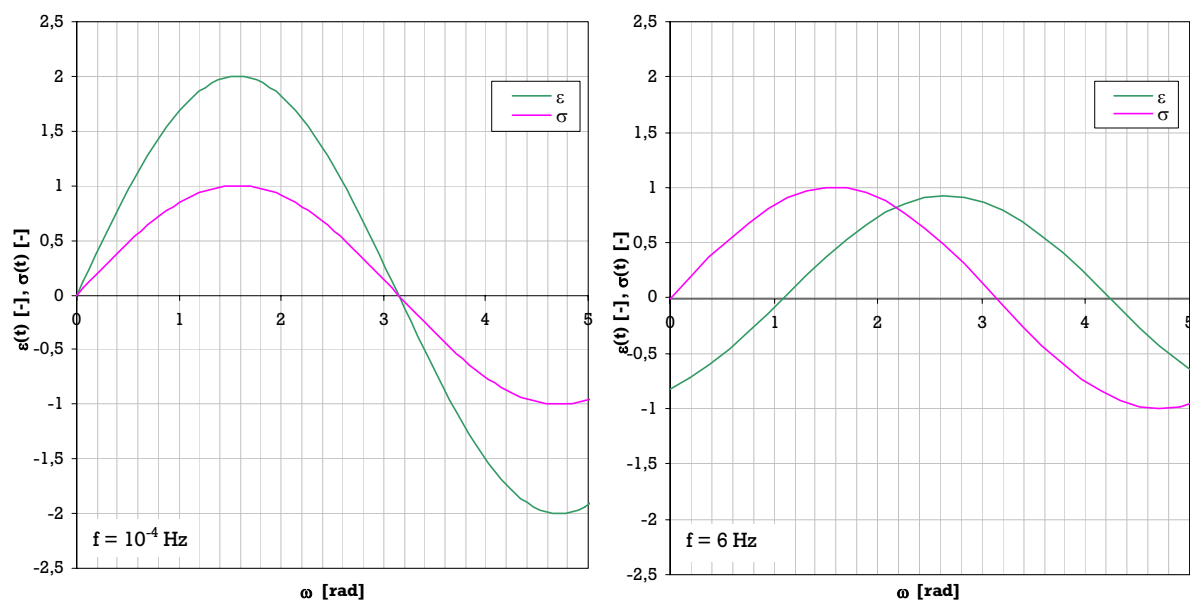


Abb. 20: Spannungs-, Verformungsverlauf eines Kelvin-Voigt'schen Körpers unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung mit $E = 0,50$, $\eta = 1,00$ und $\sigma^0 = 1,00$. Links: Frequenz $f = 10^{-4}$ Hz; rechts: $f = 6,00$ Hz

II.6.2 Komplexer Modul und komplexe Nachgiebigkeit einiger viskoelastischer Modelle

a) Maxwell'sches Modell

II.22 zeigt die Spannungs-Verzerrungsbeziehung eines Maxwell'schen Körpers, die umgeformt wie folgt lautet:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad \text{II.167}$$

Setzt man nun in diese Gleichung II.145 und II.147 ein, so erhält man folgende Beziehung

$$\sigma^* \left(1 + \frac{i\omega\eta}{E}\right) = i\omega\varepsilon^{(0)}\eta \quad \text{II.168}$$

Berücksichtigt man nun II.148, so kann man den komplexen Modul E^* berechnen, was zu folgendem Ergebnis führt:

$$E^* = \frac{i\omega\eta}{1 + \frac{i\omega\eta}{E}} \quad \text{II.169}$$

Nach den Regeln der Division komplexer Zahlen, nachzulesen etwa bei [Bartsch (2001)], kann man den Bruch in den reellen und imaginären Teil trennen. Damit stellt sich E^* als

$$E^* = \frac{\frac{\eta^2\omega^2}{E}}{1 + \frac{\eta^2\omega^2}{E^2}} + i \frac{\frac{\eta\omega}{E}}{1 + \frac{\eta^2\omega^2}{E^2}} \quad \text{II.170}$$

dar. Der erste Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens spiegelt den Speichermodul E_1 wider, der zweite den Verlustmodul E_2 . Durch Berechnung des Betrags des komplexen Moduls lässt sich das Verhältnis der beiden Amplituden $\sigma^{(0)}/\varepsilon^{(0)}$ bestimmen.

$$|E^*| = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} = \frac{\omega\eta}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}}} \quad \text{II.171}$$

Der Phasenwinkel δ ergibt sich aus der Division von E_2 und E_1 :

$$\tan \delta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{E}{\omega\eta} \quad \text{II.172}$$

Abb. 21 zeigt eine Reihe von Darstellungen, die das Verständnis des Verhaltens eines Maxwell'schen Materials schärfen sollen. Links angeordnet sind Diagramme, die mit der komplexen Kriechnachgiebigkeit zusammenhängen, rechts zu sehen jene mit einem Zusammenhang mit dem dynamischen Modul.

Betrachtet man zunächst das erste Diagramm links oben – es zeigt die komplexe Nachgiebigkeit, sowie deren Speicher- und Verlustanteil und den Phasenwinkel in Abhängigkeit der Frequenz [Hz] – ist erkennbar, dass im Bereich niedriger Frequenzen J_2 gegen ∞ strebt, J_1 den konstanten Wert $1/E$ annimmt und damit auch $|J^*|$ gegen ∞ geht. Im hohen Frequenzbereich, wo der Dämpfer durch seine Trägheit als starres Element agiert, geht der Verlustanteil gegen 0, während $|J^*|$ den Wert des Speicheranteils $1/E$ annimmt. Das System reagiert als reine Feder. Gleichzeitig nimmt der Phasenwinkel von 90° bei niedrigen Frequenzen auf 0° bei hohen Frequenzen ab.

Der Übergangsbereich wird im Wesentlichen durch das Verhältnis η/E beeinflusst. Je größer dieser Wert ist, das heißt, je größer die Viskosität im Verhältnis zur Federsteifigkeit, desto niedriger ist der Frequenzbereich, in dem sich das Systemverhalten ändert.

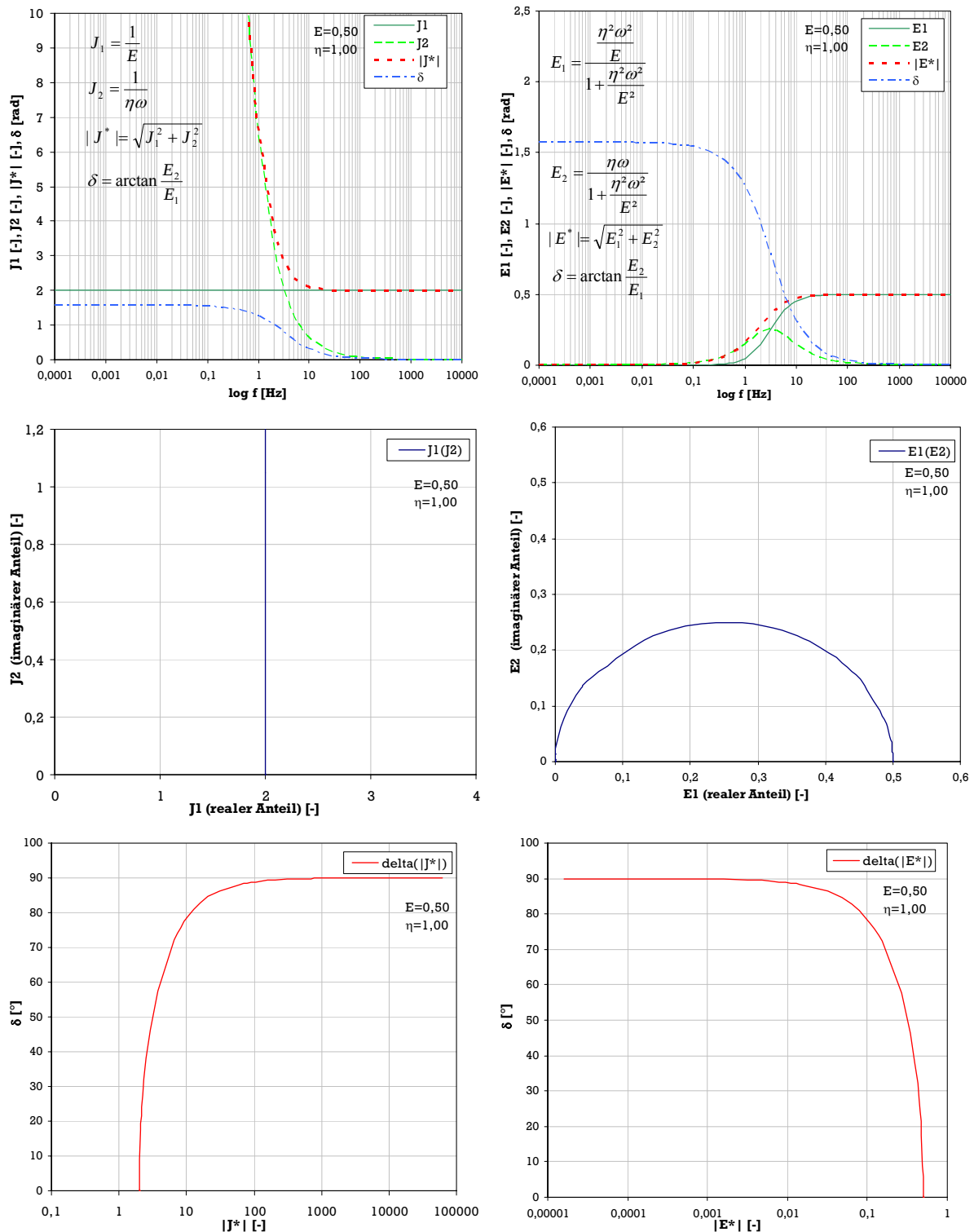


Abb. 21: Maxwell-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E = 0.50$; $\eta = 1.00$

Rechts oben in Abb. 21 sind die komplexen Modulwerte, sowie der Phasenwinkel in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Zunächst bewegen sich sowohl Verlust-, als auch Speichermodul bei kleinen Frequenzen im Bereich sehr niedriger Werte, während im hohen Frequenzbereich der Speicheranteil gegen den Wert E strebt und E_2 wiederum den Wert Null annimmt. Lediglich im Übergangsbereich

erreicht E_2 ein Maximum, und zwar bei der Frequenz $f = 2\pi \cdot (E/\eta)$. Wo der Bereich der Verhaltensänderung zu liegen kommt, hängt wiederum mit dem Verhältnis η/E zusammen.

Bei niedrigen Frequenzen, wo der Energieverlust – repräsentiert durch den Phasenwinkel δ – sehr hoch ist, reagiert der Maxwell-Körper ähnlich einer Flüssigkeit, es kommt zum Fließen. Bei hohen Frequenzen geht die Energiedissipation gegen Null.

Rechts in der Mitte in Abb. 21 zeigt ein Diagramm den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2 , das nach den Gebrüdern Cole benannte Cole-Cole-Diagramm. Es beschreibt bei Materialien, die sich wie ein Maxwell-Körper verhalten, einen Halbkreis mit Radius $E/2$. Die analoge Darstellung $J_2(J_1)$ bildet hier (Mitte links in Abb. 21) eine Senkrechte bei einem x-Wert von $1/E$.

Ganz unten schließlich findet sich der Phasenwinkel in Abhängigkeit des Betrags der komplexen Kennwerte. Die rechte Abbildung bezeichnet man hierbei als Black-Diagramm. Ohne Berücksichtigung von sehr niedrigen Viskositäten des Dämpfers kann davon ausgegangen werden, dass der Phasenwinkel zu Null wird, wenn $|J^*|$ bzw. $|E^*|$ den Wert $1/E$ annehmen.

b) Kelvin-Voigt'sches Modell

Die Vorgehensweise zum Isolieren des dynamischen Moduls aus der Formelvielfalt geschieht analog zu oben beschriebenem Maxwell-Modell. Zunächst geht man von der Spannungs-Verzerrungsbeziehung dieses Modells laut II.39 aus und erhält

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad \text{II.173}$$

Das Verhältnis $\sigma^*/\varepsilon^{(0)}$, also der dynamische Modul ergibt sich zu

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^{(0)}} = \frac{\sigma^{(0)}}{\varepsilon^{(0)}} e^{i\delta} = E + i\omega\eta = E^* \quad \text{II.174}$$

Aus dieser Formel sind als erster Term auf der rechten Seite der Speichermodul E_1 und als zweiter Term der Verlustmodul E_2 abzulesen. Der Betrag des komplexen Moduls ergibt sich zu

$$|E^*| = \sqrt{E^2 + \omega^2\eta^2} \quad \text{II.175}$$

und der Energieverlust zeigt sich als Verhältnis von E_2/E_1

$$\tan \delta = \frac{\eta}{E} \omega \quad \text{II.176}$$

Abb. 22 zeigt, dass Kelvin-Voigt und Maxwell exakt gegensinnige Modelle im Bereich der zyklischen Beanspruchung darstellen. Daher kann die Interpretation der Diagramme hier rasch erfolgen. Links oben sind wiederum die komplexen Kriechnachgiebigkeiten in Abhängigkeit der Frequenz ersichtlich. Bei kleinen Frequenzen verhält sich das System elastisch, der Verlustwert nimmt den Wert Null an. Bei hohen Frequenzen wird das System immer steifer, der Verlustwinkel

geht gegen 90° und aufgrund der Trägheit des Dämpfers treten keine Verformungen mehr auf. Im Übergangsbereich, dessen Lage vom Verhältnis η/E abhängt, ändert sich das Systemverhalten. Je kleiner der Wert η/E , desto weiter im niedrigen Frequenzbereich liegt der Übergang. Das lokale Maximum des Verlustanteils J_2 liegt bei $f = 2\pi \cdot (E/\eta)$ und beträgt $1/2 \cdot 1/E$.

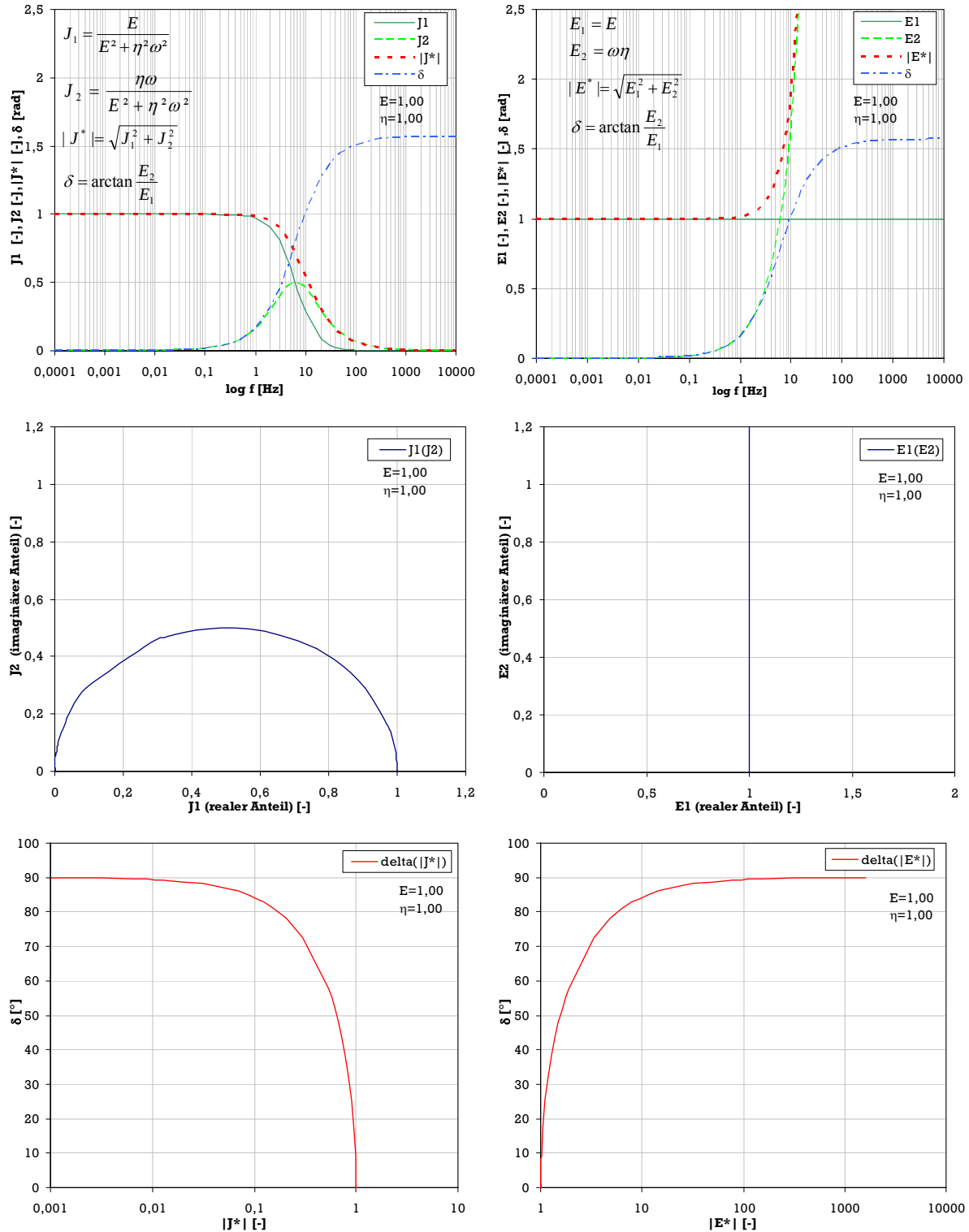


Abb. 22: Kelvin-Voigt-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E = 1.00$; $\eta = 1.00$

Das Cole-Cole-Diagramm zeigt eine Senkrechte an der Stelle $x = E$, das Pendant für die Kriechanteile einen Halbkreis mit Radius $0,5 \cdot 1/E$. Das Black-Diagramm macht ersichtlich, dass der Verlustwinkel bei $|J^*| = E$ bzw. $|E^*| = 1/E$ verschwindet.

c) Burgers'sche Modell

Bekanntlich kann die konstitutive Beziehung dieses Modells wie folgt formuliert werden:

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} \quad \text{II.177}$$

wobei

$$p_1 = \frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}, \quad p_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^e E^k}, \quad q_1 = \eta^v, \quad q_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^k} \quad \text{II.178}$$

Setzt man II.145 und II.147 für ε und σ ein, so ergibt sich

$$\sigma^* (1 + p_1 i\omega - p_2 \omega^2) = \varepsilon^{(0)} (q_1 i\omega + q_2 \omega^2) \quad \text{II.179}$$

Berücksichtigt man nun, dass der komplexe Modul aus der Division $\sigma^*/\varepsilon^{(0)}$ resultiert, so erhält man nach Umformung und Berücksichtigung der Regeln für die Grundrechnungsarten mit komplexen Zahlen

$$E^* = \frac{[p_1 q_1 \omega^2 - q_2 \omega^2 (1 - p_2 \omega^2)] + i[p_1 q_2 \omega^2 + q_1 (1 - p_2 \omega^2)]\omega}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} \quad \text{II.180}$$

Auf die Darstellung weiterer dynamischer Kennwerte, also $|E^*|$, E_1 , E_2 , δ , $|J^*|$, J_1 und J_2 wird an dieser Stelle verzichtet. Die einzelnen Materialkennwerte stören aufgrund der Länge der Formen die Übersichtlichkeit. Werden sie benötigt, so kann man unter Zuhilfenahme eines mathematischen Software-Pakets den Real- und Imaginärteil des komplexen Moduls errechnen. Daraus lassen sich auch der Verlustwinkel und die Kennwerte, die mit der komplexen Nachgiebigkeit zusammenhängen einfach ableiten.

Den Einfluss der einzelnen Modellparameter auf das mechanische Verhalten zu isolieren, würde an dieser Stelle zu weit führen, da es sich durchwegs um Funktionen mit Potenzen vierter Ordnung handelt. Daher sind in Abb. 23 und Abb. 24 zwei Diagrammgruppen wie schon bei Maxwell und Kelvin-Voigt dargestellt, mit jeweils unterschiedlichen Parametern. Erkennbar ist, dass sich ein Burgers'scher Körper bei hohen Frequenzen wie ein steifer, elastischer Festkörper verhält. Sinkt die Frequenz, steigt der Verlustwinkel sehr rasch an, und so stellt sich im niederfrequenten Bereich ein Fließzustand ein. Zusätzlich sinken im mittleren Frequenzspektrum, wobei der genaue Bereich von der Wahl der Parameter abhängt, der Phasenwinkel und somit auch der Verlustmodul ab. Die Stärke des lokalen Minimums steht in Beziehung zum Verhältnis η^k/η^v . Je kleiner die Viskosität des Dämpfers im Kelvinsystem, desto ausgeprägter ist der lokale Abfall des Verlustwinkels.

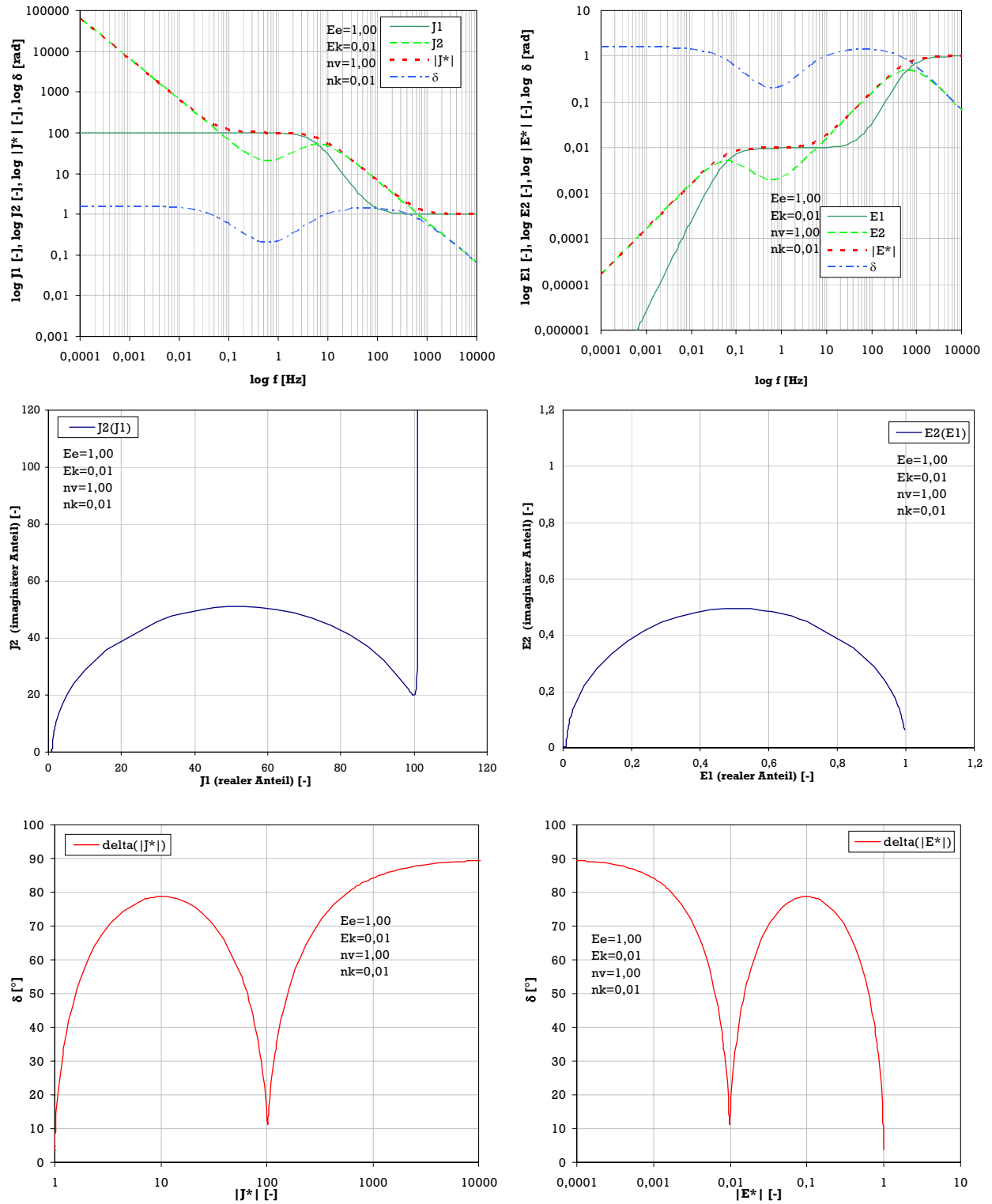


Abb. 23: Burgers-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E^e = 1.00$; $E^k = 0.01$; $\eta^v = 1.00$; $\eta^k = 0.01$

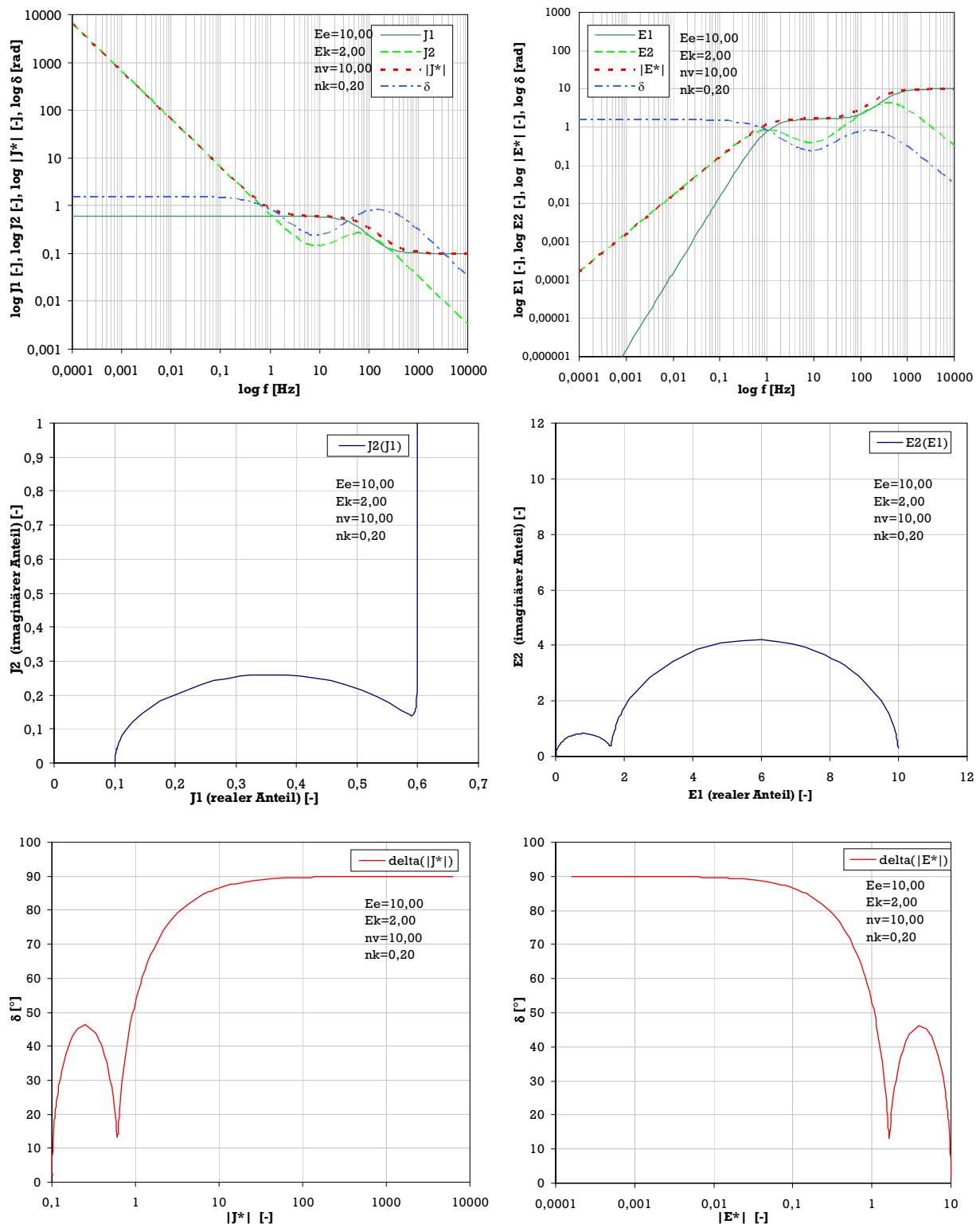


Abb. 24: Burgers-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E^e = 10,00$; $E^k = 2,00$; $\eta^v = 10,00$; $\eta^k = 0,20$

Aus den halbkreisförmigen Zusammenhängen zwischen dem Verlust- und Speicheranteil bei Maxwell und Kelvin-Voigt im Cole-Cole-Diagramm, sind nun zwei sich schneidende Halbkreise geworden (erkennbar in Abb. 24), was aus der seriellen Addition zweier Einzelmodelle folgt. Wie ausgeprägt sich die beiden

Halbkreise voneinander abtrennen hängt vom Verhältnis der Viskositäten der beiden Dämpfer ab, das Verhältnis der Radien vom Verhältnis der beiden E-Moduli.

Bei der Beziehung des Verlustwinkels zum komplexen Modul bzw. zur komplexen Nachgiebigkeit ist ein lokaler Einbruch beim Anstieg des Phasenwinkels zu bemerken. Die Lage dieses Minimums ist wiederum vom Verhältnis der Federsteifigkeiten abhängig.

II.6.3 Zusammenfassende Darstellung der Kennwerte zeitlinearer Modelle

Tabelle 4 und Tabelle 5 zeigen eine Zusammenstellung aller relevanten Kennwerte der bisher behandelten rheologischen Modelle. Tabelle 4 enthält die DG des Modells und die Parameter zur differentiellen Darstellung. Sämtliche Kennwerte, sowohl statische, als auch dynamische, finden sich in Tabelle 5, wobei für das Burgers-Modell $|E^*(\omega)|$, $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$, $|J^*(\omega)|$, $J_1(\omega)$, $J_2(\omega)$ und δ nicht explizit angegeben sind. Aufgrund der Länge der Formeln, trägt eine Darstellung dieser Werte nicht zur Übersichtlichkeit bei. Benötigt man diese Kennwerte, so geht man von $E(\omega)$ bzw. $J(\omega)$ aus und lässt sich den Real- und Imaginärteil mit Hilfe eines mathematischen Software-Pakets ausgeben. Mit diesen Werten lassen sich auch die anderen Parameter durch einfache, algebraische Operationen berechnen.

Kennwert	Feder	Dämpfer	Maxwell	Kelvin-Voigt	Burgers
DG	$\sigma = E\varepsilon$	$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma + \frac{\eta}{E}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$	$\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon}$
P	1	1	$1 + \frac{\eta}{E}\frac{\partial}{\partial t}$	1	$1 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
p_0	1	1	1	1	1
p_1	0	0	$\frac{\eta}{E}$	0	$\frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}$
p_2	0	0	0	0	$\frac{\eta^v\eta^k}{E^eE^k}$
Q	E	$\eta\frac{\partial}{\partial t}$	$\eta\frac{\partial}{\partial t}$	$E + \eta\frac{\partial}{\partial t}$	$q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
q_0	E	0	0	E	0
q_1	0	η	η	η	η^v
q_2	0	0	0	0	$\frac{\eta^v\eta^k}{E^k}$

Tabelle 4: Zusammenfassung wichtiger Parameter für zeitlich lineare Modelle

Kennwert	Feder	Dämpfer	Maxwell	Kelvin-Voigt	Burgers ²
$J(t)$	$\frac{1}{E}$	$\frac{t}{\eta}$	$\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$	$\frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$	$\frac{1}{E^e} + \frac{1}{\eta^v}t + \frac{1}{E^k}(1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k}t})$
$R(t)$	E	$\eta\delta(t)$	$Ee^{-\frac{E}{\eta}t}$	$E + \eta\delta(t)$	$\frac{(q_1 - q_2r_1)e^{-r_1t}}{A} - \frac{(q_1 - q_2r_2)e^{-r_2t}}{A}$ (2)
$E^*(\omega)$	E	$i\omega\eta$	$\frac{i\omega\eta}{1 + \frac{\eta^2\omega^2}{E^2}}$	$E + i\omega\eta$	$\frac{[p_1q_1\omega^2 - q_2\omega^2(1 - p_2\omega^2)]}{p_1^2\omega^2 + (1 - p_2\omega^2)^2} + \frac{i[p_1q_2\omega^2 + q_1(1 - p_2\omega^2)]\omega}{p_1^2\omega^2 + (1 - p_2\omega^2)^2}$ (2)
$ E^*(\omega) $	E	$\omega\eta$	$\frac{\omega\eta}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}}}$	$\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}$	$\sqrt{E_1^2 + E_2^2}$
$E_1(\omega)$	E	0	$\frac{\frac{\eta^2\omega^2}{E}}{1 + \frac{\eta^2\omega^2}{E^2}}$	E	$\text{Re}(E^*)$
$E_2(\omega)$	0	$\omega\eta$	$\frac{\eta\omega}{1 + \frac{\eta^2\omega^2}{E^2}}$	$\eta\omega$	$\text{Im}(E^*)$
$J^*(\omega)$	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{i\omega\eta}$	$\frac{1}{E} - i\frac{1}{\eta\omega}$	$\frac{1}{E + i\omega\eta}$	$\frac{1}{E^*}$
$ J^*(\omega) $	$\frac{1}{E}$	$\frac{1}{\omega\eta}$	$\frac{1}{\omega\eta\sqrt{1 + \frac{\omega^2\eta^2}{E^2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{E^2 + \eta^2\omega^2}}$	$\frac{1}{ E^* }$
$J_1(\omega)$	$\frac{1}{E}$	0	$\frac{1}{E}$	$\frac{E}{E^2 + \eta^2\omega^2}$	$\text{Re}(J^*)$
$J_2(\omega)$	0	$\frac{1}{\omega\eta}$	$\frac{1}{\omega\eta}$	$\frac{\eta\omega}{E^2 + \eta^2\omega^2}$	$\text{Im}(J^*)$
δ	0°	90°	$\frac{E}{\omega\eta}$	$\frac{\eta\omega}{E}$	$\frac{E_2}{E_1}$

Tabelle 5: Zusammenfassung wichtiger Modellkennwerte für zeitlich lineare Modelle

II.6.4 Zusammenhang zwischen dem Relaxationsmodul und dem komplexen Modul

Schon weiter oben wurde gezeigt, dass die Kenntnis des Entspannungsmodul oder der Kriechnachgiebigkeit eines linear viskoelastischen Materials ausreicht, um dessen Verhalten zu beschreiben. Sind also Spannung und Verzerrung bei zyklisch-dynamischer Belastung laut II.145, II.146 oder II.147 bekannt, so sollten der komplexe Modul E^* und daraus E_1 , E_2 , $\tan\delta$ und $|E^*|$ bei bekanntem Relaxationsmodul ableitbar sein. Ebenso ist es auch im umgekehrten Fall, also die Bestimmung von R aus E^* .

² Es gilt: $A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$, $r_1 = \frac{p_1 - A}{2p_2}$, $r_2 = \frac{p_1 + A}{2p_2}$

Die vollständige Herleitung dieser Beziehungen ist ein mathematisch aufwändiger Prozess, der auf Operationen wie die Fourier-Transformation, Fourier-Integrale und Randintegrale zurückgreift. Die gesamte Prozedur hier nachzuvollziehen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, daher sei der interessierte Leser auf [Gross (1953)] verwiesen.

Die Spannungs-Verzerrungs-Zeitbeziehung für eine nichtkonstante Verzerrungsgeschichte lautet wie in II.125 dargestellt

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\xi) \frac{\partial \varepsilon(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad \text{II.181}$$

Hier wurde nur die untere Grenze für die Integration auf $-\infty$ gesetzt. Das geschieht, damit sich zum Zeitpunkt $t=0$ ein stabiler Schwingungszustand eingestellt hat. Nun ersetzt man die Integrationsvariable ξ durch $\xi' = t-\xi$ und erhält dadurch

$$\sigma(t) = -\int_0^{\infty} R(\xi') \frac{\partial \varepsilon(t-\xi')}{\partial \xi'} d\xi' \quad \text{II.182}$$

Durch dieses Ersetzen der Integrationsvariablen ändern sich die Integrationsgrenzen: Für $\xi = -\infty$ ergibt sich ξ' zu ∞ , für $\xi = t$ ist $\xi' = 0$. Da man obere und untere Integrationsgrenze vertauscht hat, ergibt sich vor dem Integral ein Minuszeichen. Um die sinusförmig schwingende Belastung zu berücksichtigen, setzt man eine zyklisch wirkende Verzerrung

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} = \varepsilon^{(0)} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad \text{II.183}$$

bzw.

$$\varepsilon(t-\xi') = \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} e^{-i\omega \xi'} = \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} (\cos \omega \xi' - i \sin \omega \xi') \quad \text{II.184}$$

in II.182 ein, und erhält dafür nach erfolgter, partieller Ableitung von ε nach ξ'

$$\sigma(\xi') = \varepsilon^{(0)} \omega e^{i\omega t} \int_0^{\infty} R(\xi') (\sin \omega \xi' + i \cos \omega \xi') d\xi' \quad \text{II.185}$$

In dieser Gleichung stellt $\sigma(\xi')$ die Antwort des Körpers auf eine Belastung in Form einer schwingenden Verzerrung $\varepsilon^{(0)} e^{i\omega t}$ dar. Diese Spannung ist laut II.147 gleichwertig mit folgendem Ausdruck

$$\sigma(t) = \sigma^* e^{i\omega t} \quad \text{II.186}$$

bzw.

$$\sigma(t) = E^* \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} \quad \text{II.187}$$

Setzt man nun die exponentielle Darstellung von II.184 und II.186 in II.182 ein, so erhält man dadurch

$$e^{i\omega t} E^* \varepsilon^{(0)} = -\int_0^{\infty} R(\xi') \varepsilon^{(0)} e^{i\omega t} (-i\omega) e^{-i\omega \xi'} d\xi' \quad \text{II.188}$$

Kürzt man den Ausdruck $\varepsilon^{(0)} e^{i\omega t}$ auf beiden Seiten und formt um, ergibt sich

$$E^*(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} R(\xi') e^{-i\omega \xi'} d\xi' = (i\omega) L[R(\xi')]_{s=i\omega} \quad \text{II.189}$$

Die zuletzt dargestellte Gleichung ist eine Form der Darstellung der Beziehung zwischen dem komplexen Modul $E^*(\omega)$ und dem Relaxationsmodul $R(t)$, wobei hier wiederum die Laplace-Transformation zur Anwendung kommt.

Eine andere Form der Darstellung erhält man, wenn man die trigonometrische Form von II.184 verwendet, II.185 also mit II.187 gleichsetzt. Nach dem Kürzen von $\varepsilon^{(0)} e^{i\omega t}$, zeigt sich folgende Gleichung

$$E^*(\omega) = \omega \int_0^\infty R(\xi') \sin \omega \xi' d\xi' + i \omega \int_0^\infty R(\xi') \cos \omega \xi' d\xi' \quad \text{II.190}$$

Aus dieser Formel lassen sich der reelle und imaginäre Teil des dynamischen Moduls ablesen; sie stellen sich wie folgt dar

$$E_1(\omega) = \omega \int_0^\infty R(\xi') \sin \omega \xi' d\xi' \quad \text{II.191}$$

$$E_2(\omega) = \omega \int_0^\infty R(\xi') \cos \omega \xi' d\xi' \quad \text{II.192}$$

Wendet man auf diese Fourier-Transformierten³ die inverse Fourier-Transformation an, so kann man den Entspannungsmodul aus den Komponenten des dynamischen Moduls wie folgt berechnen

$$R(\xi') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_1(\omega)}{\omega} \sin \omega \xi' d\omega \quad \text{II.193}$$

$$R(\xi') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_2(\omega)}{\omega} \cos \omega \xi' d\omega \quad \text{II.194}$$

Analog zu dieser Herleitung kann auch die Herleitung der Beziehung zwischen Kriechnachgiebigkeit und komplexer Nachgiebigkeit durchgeführt werden.

[Findley, Lai, Onaran (1989)]

II.6.5 Einfluss der Temperatur – TTSP

Bisher wurde der Einfluss der Temperatur auf die konstitutiven Beziehungen vernachlässigt. Grundsätzlich ist es möglich, den Temperatureinfluss dadurch in die Analyse mit einzubeziehen, indem sowohl Kriechnachgiebigkeit, als auch Relaxationsmodul Funktionen nicht nur der Zeit t , sondern auch der Temperatur T darstellen. Also

$$R = R(t, T) \quad \text{II.195}$$

Diese unbekannte Funktion kann theoretisch durch eine angemessenen Anzahl von Versuchen bei verschiedenen Temperaturen bestimmt werden. Jedoch entsteht hier rasch das Problem, dass eine sehr hohe Anzahl an Versuchen notwendig ist, bzw. wird die Analyse dieser Tests bei thermomechanisch instationären Problemen hochkomplex.

Jedoch gibt es für eine bestimmte Gruppe von Materialien einen zweiten gangbaren Weg. Theorie und praktische Experimente zeigen, dass Zeit und

³Analog zur Laplace-Transformation bildet die Fourier-Transformation den Zeitbereich auf den Frequenzbereich ab.

Temperatur durch einen einzigen, kombinierten Parameter mit Hilfe des Zeit-Temperatur-Superpositionsprinzips (TTSP) repräsentiert werden können.

$$R(T, t) = R(T_0, \zeta) \quad \text{II.196}$$

$$\zeta = \frac{t}{a_T(T)} \quad \text{II.197}$$

t stellt die tatsächlich gemessene Zeit dar, T die Temperatur und ζ die reduzierte Zeit. Dieser Parameter stellt eine Funktion von t , dem Temperaturverschiebungsfaktor $a_T(T)$ und der Referenztemperatur T_0 dar. Das TTSP besagt, dass eine Änderung der Temperatur das zeitabhängige Materialverhalten genauso beeinflusst, wie eine Dehnung oder Stauchung der tatsächlichen Versuchszeit für Temperaturen oberhalb bzw. unterhalb der Referenztemperatur. In anderen Worten verhält sich ein Material, das diese Eigenschaft aufweist, bei hohen Temperaturen und hohen Verzerrungsraten ähnlich, wie bei niedrigen Temperaturen und niedrigen Verzerrungsraten.

Derartige Materialien bezeichnet man als thermorheologisch einfach im Gegensatz zu thermorheologisch komplexen Stoffen, für die dieses Prinzip nicht gilt. Für die Berechnung des Faktors zur Temperaturverschiebung gibt es mehrere Ansätze. Ein weit verbreitetes Modell haben Williams, Landel und Ferry aufgestellt:

$$\log a_T(t) \equiv \log \frac{t}{\zeta} = \frac{-k_1(T - T_0)}{k_2 + (T - T_0)} \quad \text{II.198}$$

In der so genannten WLF-Gleichung stellen k_1 und k_2 Materialkonstanten dar, T_0 die Referenztemperatur. Eine weitere Möglichkeit den Verschiebungsfaktor zu bestimmen ist ein Analogon zur Arrheniusgleichung. Die folgende Gleichung gilt vor allem für niedrigere Temperaturen bzw. steife Materialien. Sie dient ursprünglich zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit.

$$\log a_T = \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad \text{II.199}$$

E_a sei in dieser Gleichung die Aktivierungsenergie und R die Gaskonstante. T beschreibt die Versuchstemperatur, T_0 die Referenztemperatur.

Für instationäre Temperaturbedingungen, bei jenen Versuchen also, bei denen sich die Temperatur mit der Zeit ändert, haben Morland und Lee folgende Formel für die reduzierte Zeit eingeführt

$$\zeta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_T[T(t')]} \quad \text{II.200}$$

Der große Vorteil in der Praxis liegt bei thermorheologisch simplen Materialien darin, dass für eine bestimmte Referenztemperatur T_0 eine Aussage über das Langzeitverhalten getroffen werden kann, ohne dass dafür lange, aufwendige Versuche notwendig sind. Denn beim TTSP ist der einzige Unterschied zwischen

Versuchsergebnissen bei verschiedenen Temperaturen der Zeitmaßstab. Durch eine horizontale Verschiebung (mithilfe des Faktors a_T) kann also aus n Einzelkurven für n Temperaturen T_i , eine Kurve für die Referenztemperatur T_0 über ein großes Frequenzspektrum hinweg erstellt werden. Eine solche Kurve wird dann als „master curve“ bezeichnet.

Ein weiteres Anwendungsgebiet besteht in der Möglichkeit Materialkennwerte für Temperaturen zu erhalten, für die keine Messwerte vorhanden sind. Auch hier legt man nach Bestimmung einer Referenztemperatur T_0 die einzelnen Kurven für die Temperaturen T_i so hintereinander, sodass sich eine einzige master curve ergibt. Danach wird aus den Verschiebungen für die bekannten Temperaturen allgemein der Faktor a_T – etwa nach WLF oder Arrhenius – bestimmt. Daraus lassen sich nun die gewünschten Materialkennwerte für beliebige Temperaturen ableiten. [Findley, Lai, Onaran (1989)], [Heck et al. (1998)]

II.7 Modelle mit parabolischen Elementen

Ein Problem bei allen Modellen mit ausschließlich zeitlinearen Elementen ist, dass im Cole-Cole-Diagramm die Tangenten an die Endpunkte der Kurve immer senkrecht stehen, was dem tatsächlichen Verhalten vieler Materialien nicht entspricht. Durch das Einschalten eines nichtlinearen Dämpfers gelingt es, den Winkel der Tangente mit der realen Achse zu verändern.

Die im nun Folgenden behandelten Modelle umfassen das Power-law-Modell, das Huet- und das Huet-Sayegh-Modell, sowie das 2S2P1D-Modell, wobei die Komplexität in dieser Reihenfolge ansteigt.

II.7.1 Power-law-Modell

Der Name dieses Modells, Power-law (Potenzgesetz), leitet sich von eben diesem Gesetz ab, das in vielen Bereichen der Natur- aber auch Sozialwissenschaften Gültigkeit besitzt. Allgemein formuliert stellt es folgende Funktion dar

$$f(x) = ax^k \quad \text{II.201}$$

a beschreibt die Proportionalitätskonstante, k die konstante Potenz. Wendet man auf oben dargestellte Gleichung den Logarithmus an, so erhält man eine lineare Gleichung der Form

$$\log y = k \log x + \log a \quad \text{II.202}$$

Der Modellkörper kann als Erweiterung des Maxwell'schen Modells gesehen werden. Er besteht aus einer linearen Feder, die als Kennwert die Federkonstante E aufweist und einem parabolischen Dämpfer mit den Kennwerten J_a , τ und k (siehe Abb. 25). Beide Elemente sind in Serie geschaltet. Sieht man sich die in

II.14 dargestellte nichtlineare Kriechnachgiebigkeit an, so wird verständlich, warum das Modell nach dem Power-law benannt ist.

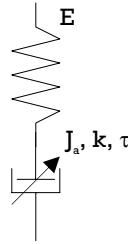


Abb. 25: Power-law-Modell

Da eine Serienschaltung vorliegt, ergibt sich die Verzerrung ε als Summe der Verzerrungen der einzelnen Elemente ε_i und die Kriechnachgiebigkeit J des Systems summiert sich aus Einzelkriechnachgiebigkeiten J_i auf. Für eine konstante Spannung $\sigma^{(0)}$ bildet sich die Verzerrung $\varepsilon(t)$ wie folgt

$$J(t) = J^e + J^{par}(t) = \frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau} \right)^k \quad \text{II.203}$$

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma^{(0)} = \left[\frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau} \right)^k \right] \sigma^{(0)} \quad \text{II.204}$$

Wird nun zu einem Zeitpunkt t_1 die Belastung $\sigma^{(0)}$ weggenommen, so kann das Rückkriechen durch logische Betrachtung des Systems erhalten werden. Die Gesamtverformung zum Zeitpunkt t_1 vor Wegnahme der Belastung lautet

$$\varepsilon(t_1) = \left[\frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t_1}{\tau} \right)^k \right] \sigma^{(0)} \quad \text{II.205}$$

Geht die Spannung auf Null zurück, so nimmt gleichzeitig der elastische Anteil der Verzerrung den Wert Null an, die Verformung des parabolischen Dämpfers bleibt bestehen, damit lautet die Rückkriechfunktion

$$\varepsilon(t) = J_a \left(\frac{t_1}{\tau} \right)^k \sigma^{(0)} = \text{konst.} \quad \text{für } t_1 \leq t \leq \infty \quad \text{II.206}$$

Das Kriechverhalten des Power-law-Modells ist durch die Gleichungen II.204 und II.206 gekennzeichnet. Im Vergleich zum herkömmlichen Maxwell-Modell zeigt sich der entscheidende Vorteil, dass die Kriechgeschwindigkeit je nach realem Materialverhalten durch die zusätzlichen Parameter des parabolischen Dämpfers angepasst werden kann und nicht mehr zwangsweise linear verläuft. Dem gegenüber steht – und hier ändert sich nichts im Vergleich zu Maxwell – der konstant bleibende Verzerrungsanteil nach Wegnahme einer Belastung. Zur Beschreibung des Rückkriechens eignet sich also auch dieses Modell nur sehr eingeschränkt. Die grafische Darstellung des Kriechverhaltens eines Power-law-Körpers kann man mit der Erweiterung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ noch ein sofortelastischer Anteil hinzuzufügen ist der Abb. 6 entnehmen. Dort ist zwar das Rückkriechen nicht eingetragen, jedoch sieht auch dieser Vorgang denkbar einfach aus. Wie bei Maxwell bleibt nach der spontanen, elastischen

Rückverformung ein konstanter Verzerrungsanteil laut II.206 bestehen. [Blab et al. (2006)]

Es soll nun das Relaxationsverhalten, das Verhalten der Spannungsabnahme bei konstanter Verzerrung eines Power-law-Körpers mit unendlich steifer Feder beschrieben werden. Dieses System entspricht einem parabolischen Dämpfer. Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens benötigt man das Pendant zur Kriechnachgiebigkeit, den Relaxationsmodul $R(t)$. Laut II.130 gibt es einen Zusammenhang im Laplace'schen Transformationsraum. Umgeformt lautet demnach die Beziehung

$$\hat{R}(s) = \frac{1}{\hat{J}(s)} \frac{1}{s^2} \quad \text{II.207}$$

Um den Relaxationsmodul berechnen zu können, wird zunächst die Laplace-Transformation von $J(t)$ durchgeführt.

$$J(t) = \underbrace{J_a \left(\frac{1}{\tau}\right)^k}_{=B} (t)^k \rightarrow \hat{J}(s) = B \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \quad \text{II.208}$$

Mit $\Gamma(k+1)$ wird die Gammafunktion beschrieben. Sie versteht sich als erweiterte Fakultätsfunktion ($n!$) auf die positiven reellen Zahlen. Berechnet werden kann die Gammafunktion für beliebige Werte mit Hilfe einer mathematischen Software bzw. auch mit zeitgemäßen Taschenrechnern.

Nun wird der transformierte Teil von II.208 in II.207 eingesetzt, damit ergibt sich

$$\hat{R}(s) = \frac{1}{B} \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{s^2} \quad \text{II.209}$$

Beide Seiten werden mit $\Gamma(1-k)$ multipliziert

$$\hat{R}(s)\Gamma(1-k) = \frac{1}{B} \frac{1}{\Gamma(1+k)} \frac{\Gamma(1-k)}{s^{1-k}} \quad \text{II.210}$$

und die inverse Transformation unter Berücksichtigung der Transformationsregeln aus Tabelle 9 durchgeführt.

$$R(t)\Gamma(1-k) = \frac{1}{B} \frac{1}{\Gamma(1+k)} t^{-k} \quad \text{II.211}$$

Schließlich ergibt sich $R(t)$ unter Wiedereinsetzen von B

$$R(t) = \frac{1}{J_a} \frac{\tau^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)} t^{-k} \quad \text{II.212}$$

Betrachtet man den Ausdruck links von t^{-k} als Konstante, so ergibt sich eine Funktion der Form A/x^k . Die Spannungsrelaxation für eine konstant gehaltene Anfangsverzerrung $\varepsilon^{(0)}$ ergibt sich somit zu

$$\sigma(t) = R(t)\varepsilon^{(0)} = \left(\frac{1}{J_a} \frac{\tau^k}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)} t^{-k} \right) \varepsilon^{(0)} \quad \text{II.213}$$

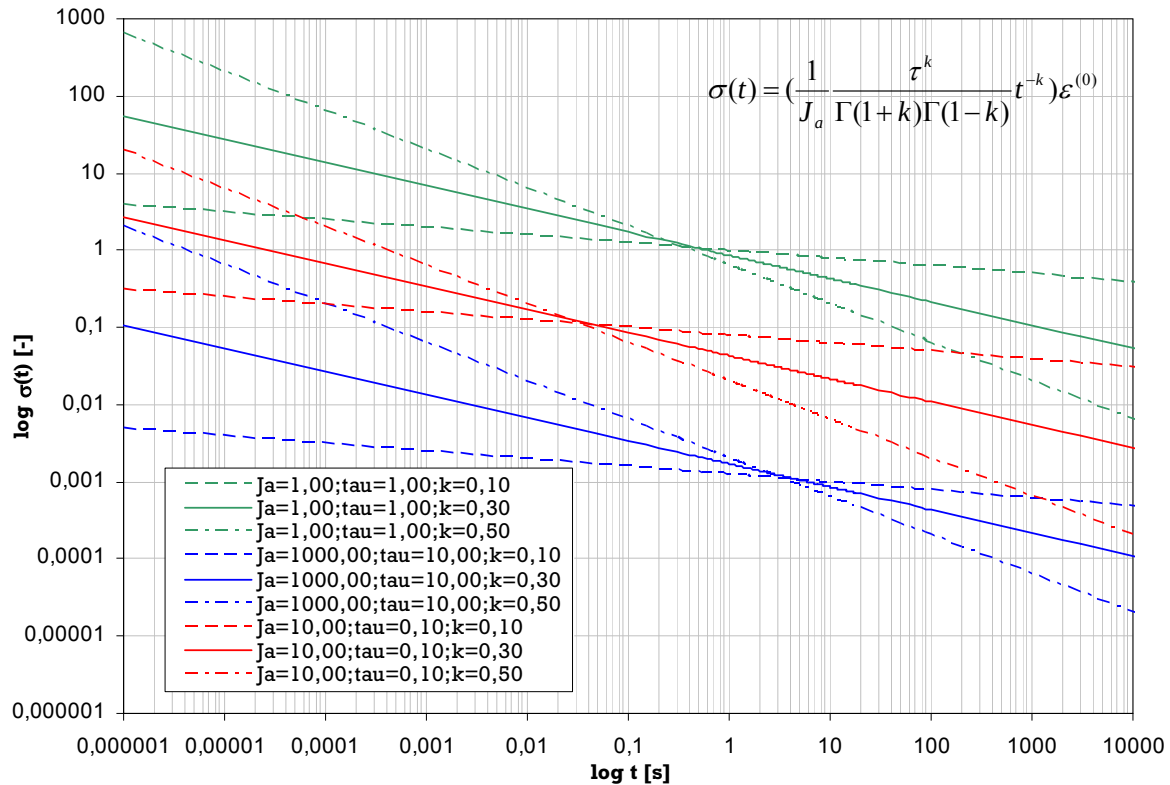


Abb. 26: Relaxationsverhalten des Power-law-Modells im doppellogarithmischen Maßstab für verschiedene Wert von J_a , τ und k

Abb. 26 zeigt das Relaxationsverhalten eines Power-law-Modells im doppellogarithmischen Maßstab für verschiedene Werte von J_a , τ und k . Das Verhältnis von J_a/τ gibt die Höhe des Spannungsniveaus im Modellkörper an. Je größer dieser Wert ist, desto höher sind gleicher Belastung und gleichem Wert für die Potenz k die Spannungen. Der Faktor k gibt die Geschwindigkeit des Spannungsabbaus vor. Je höher dieser Wert ist, desto rascher klingen die Spannungen ab.

a) Komplexe Materialkennwerte des Power-law-Modells

Um nun die komplexen Kennwerte eines Materials, das sich nach dem Power-law verhält, zu erhalten, wird hier das Analogon von II.189 für die Kriechnachgiebigkeit angewandt – es lautet:

$$J^*(\omega) = i\omega \int_0^\infty J(\xi') e^{-i\omega \xi'} d\xi' = (i\omega) L[J(\xi')]_{s=i\omega} \quad \text{II.214}$$

Die komplexe Kriechnachgiebigkeit kann somit durch die Laplace-Transformation der statischen Kriechnachgiebigkeit gefunden werden, wobei die Transformationsvariable nun nicht mehr s sondern $i\omega$ lautet. Detaillierte Informationen dazu sind bei [Findley, Lai, Onaran (1989)] nachzulesen. Die Transformation von II.203 führt zu

$$\hat{J}(i\omega) = \frac{1}{E^e} \frac{1}{i\omega} + J_a \tau^{-k} \frac{\Gamma(k+1)}{(i\omega)^{k+1}} \quad \text{II.215}$$

Um daraus J^* zu ermitteln muss noch mit $(i\omega)$ erweitert werden, womit sich die komplexe Kriechnachgiebigkeit für das Power-law-Modell zu

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) (i\omega)^{-k} \quad \text{II.216}$$

ergibt. Nun teilt man nach den Regeln der komplexen Zahlenlehre die Zahl J^* in den realen und imaginären Anteil auf, wobei gilt:

$$i^{-k} = \cos \frac{k\pi}{2} - i \sin \frac{k\pi}{2} \quad \text{II.217}$$

Es ergeben sich daher J_1 und J_2 zu

$$J_1 = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} \quad \text{II.218}$$

$$J_2 = J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} \quad \text{II.219}$$

Da zur Arbeit im rheologischen Modell nur die Beträge der Materialkennwerte von Bedeutung sind, wurde für J_2 in obiger Formel auch nur dieser angegeben. Setzt man τ und $k=1$, so erhält man einen linearen Dämpfer und damit das Maxwell'sche Modell. Es müssen demnach auch die Kennwerte der beiden System übereinstimmen, was durch Einsetzen einfach zu beweisen ist, wobei zu berücksichtigen ist, dass $\Gamma(2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$ ist.

Aus der Quadratsumme kann der Betrag von J^* errechnet werden

$$|J^*| = \frac{\sqrt{J_a^2 \tau^{-2k} \Gamma(k+1)^2 (E^e)^2 \omega^{-2k} + 2 J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) E^e \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + 1}}{E^e} \quad \text{II.220}$$

und der Phasenwinkel aus dem Verhältnis J_2/J_1

$$\delta = \arctan\left(\frac{J_a \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Gamma(k+1) \tau^{-k} E^e \omega^{-k}}{1 + J_a \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Gamma(k+1) \tau^{-k} E^e \omega^{-k}}\right) \quad \text{II.221}$$

Aus diesen Kennwerten lassen sich durch einfache Operationen der komplexe Modul und dessen Speicher- und Verlustanteil berechnen. Zunächst gilt, dass sowohl E^* und J^* , als auch $|E^*|$ und $|J^*|$ zueinander reziprok sind. Zudem erhält man aus II.165 und II.166 E_1 und E_2 aus J_1 und J_2 :

$$E_1 = \frac{\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}}{\left(\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}\right)^2 + J_a^2 \tau^{-2k} \Gamma(1+k)^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2} \omega^{-2k}} \quad \text{II.222}$$

$$E_2 = \frac{J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k}}{\left(\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}\right)^2 + J_a^2 \tau^{-2k} \Gamma(1+k)^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2} \omega^{-2k}} \quad \text{II.223}$$

[Blab et al. (2006)]

Abb. 27 und Abb. 28 zeigen die schon gewohnten Abhandlungen für die komplexen Materialkennwerte in Form von Diagrammen. Variiert wird nur der Faktor k , da er entscheidenden Einfluss auf den nichtlinearen Dämpfer besitzt. Im Vergleich zum herkömmlichen Maxwell-Modell (siehe Abb. 21) sinkt bei kleinen Werten für k der Phasenwinkel für niedrige Frequenzen ab. Beim linearen Maxwell-Modell liegt dieser anfangs bei 90° , im Fall von Abb. 28, wo $k = 0,50$ bei nur mehr 45° . Zur Erinnerung sei hier noch einmal erwähnt, dass sich durch k -Werte, die kleiner als 1 sind, die Kriechnachgiebigkeit degressiv entwickelt. Weiters ist erkennbar, dass sich der Übergangsbereich, in dem sich das Materialverhalten entscheidend verändert, stark vergrößert, je geringer der Exponent k wird. Gleichzeitig sinkt auch das lokale Maximum des komplexen Verlustmoduls. An der Endsteifigkeit – ausgedrückt durch $|E^*|$ – bei hohen Frequenzen ändert sich nichts. Geht die Frequenz gegen unendlich, so geht $|E^*|$ gegen den Wert E° .

Im Vergleich zum linearen Modell stellt der Zusammenhang zwischen J_1 und J_2 keine Senkrechte mehr dar, sondern vielmehr eine lineare Funktion, die die x-Achse bei $1/E^\circ$ schneidet und eine Steigung von $\tan(k)$ aufweist. Je kleiner also der Exponent, desto geringer ist der Energieverlust, da der reale Anteil bei gleich bleibendem Imaginäranteil J_2 größer wird. Im Cole-Cole-Diagramm stellt sich nun eine allgemeine Kurve ein, mehrere Parameter entscheiden über die Form. Abhängig von k ist die Krümmung bei den Schnittpunkten mit der x-Achse. Diese kommen bei 0 und E° zu liegen. Außerdem kann der Stich in Abhängigkeit von k und E° wie in Abb. 27 beschrieben gewählt werden. Je geringer der Exponent k , desto flacher stellt sich auch das Kreissegment im Cole-Cole-Diagramm dar.

Im Black-Diagramm zeigt sich ebenfalls, dass der Verlustwinkel nicht mehr bis 90° ansteigt und damit Energie nicht mehr zur Gänze dissipiert wird. Auch hier gilt, dass der Verlustwinkel bei kleineren k -Werten sinkt.

Deutlich wird durch die graphische Behandlung der komplexen Werte, dass durch den parabolischen Dämpfer wertvolle Einflussmöglichkeiten gegeben werden. So kann der frequenzabhängige Übergangsbereich zwischen weichem, fließendem Materialverhalten im unteren und steifem Verhalten im oberen Frequenzbereich gedehnt oder gestaucht werden und nicht nur der Stich, sondern auch die Anfangssteigung der Kurve im Cole-Cole-Diagramm beeinflusst werden. Zudem ist der Verlustwinkel bei kleinen Frequenzen nicht mehr 90° .

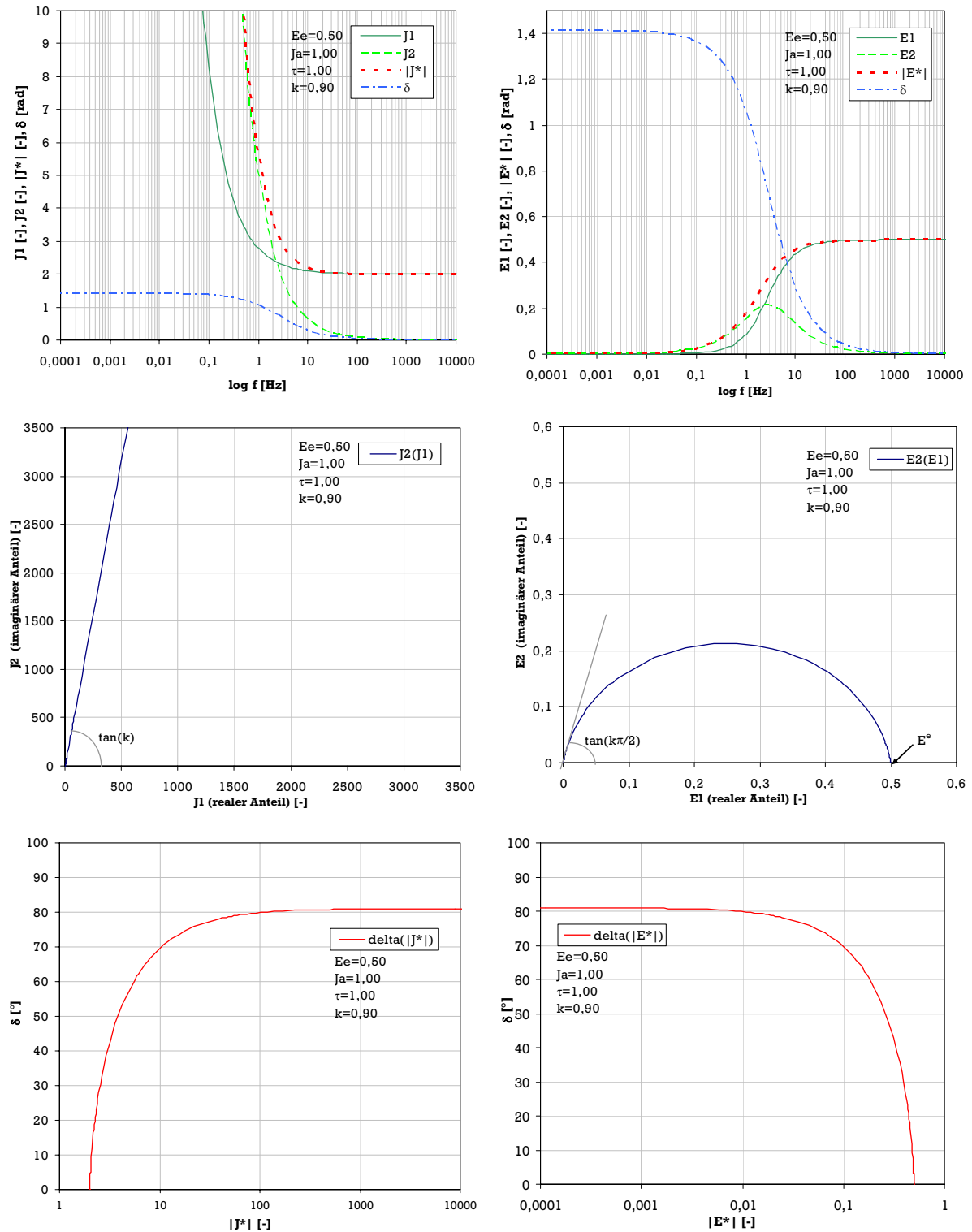


Abb. 27: Power-law-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E^e = 0,50$; $J_a = 1,00$; $\tau = 1,00$; $k = 0,90$

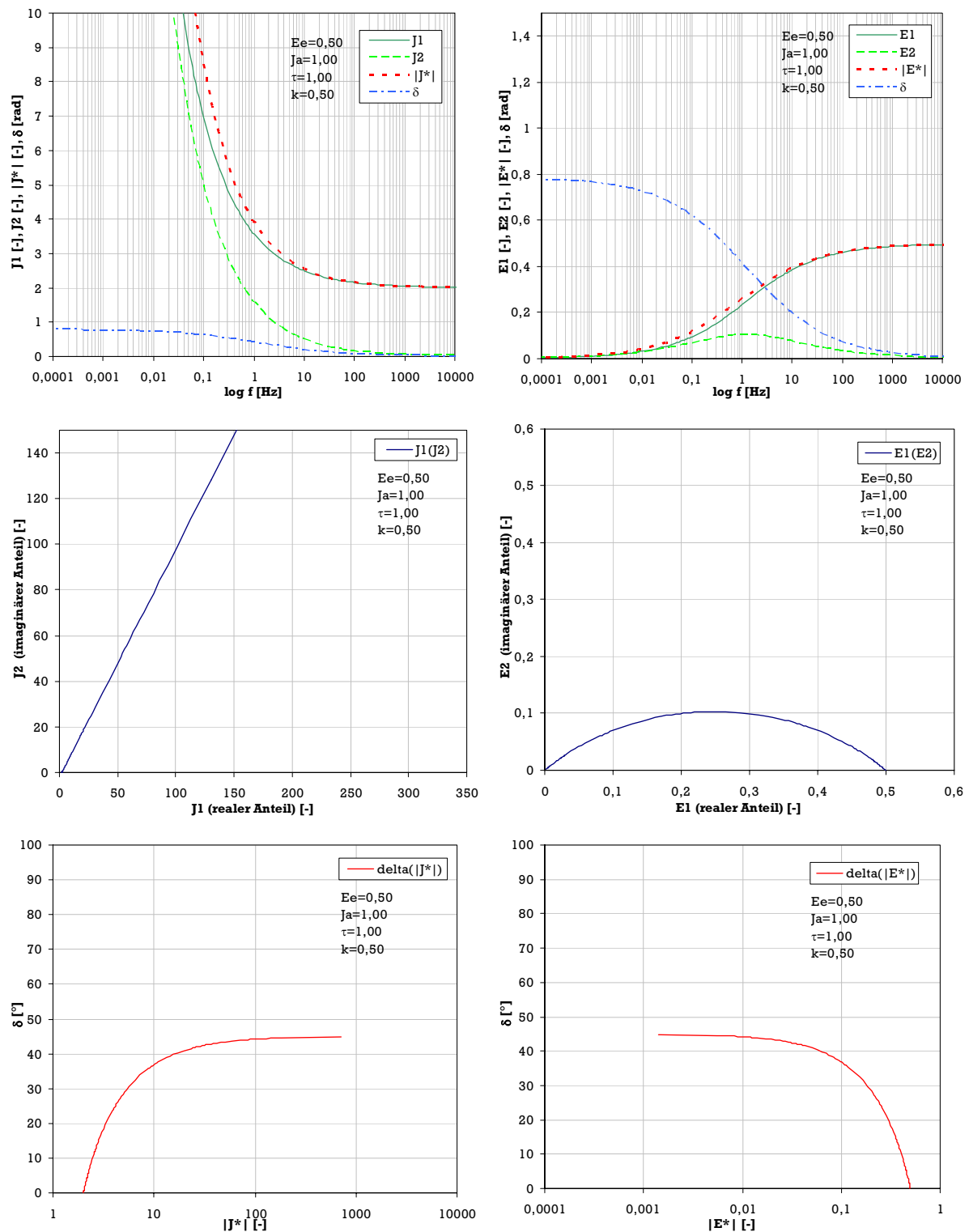


Abb. 28: Power-law-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E^e = 0,50$; $J_a = 1,00$; $\tau = 1,00$; $k = 0,50$

II.7.2 Huet-Modell

Fügt man dem Power-law-Modell einen weiteren parabolischen Dämpfer in Serie hinzu, so erhält man das Huet-Modell (Abb. 29). Es wurde 1963 von C. Huet im Rahmen einer Dissertation an der Faculté des Sciences de l'Université de Paris entwickelt – siehe dazu [Huet (1963)].

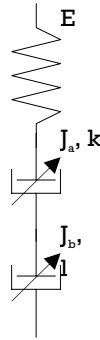


Abb. 29: Huet-Modell

Da auch bei diesem Modell reine Serienschaltung vorliegt, kann die Kriechnachgiebigkeit des Systems aus den Einzelkriechnachgiebigkeiten berechnet werden.

Es ergibt sich

$$J(t) = J^e + J^{par1}(t) + J^{par2}(t) = \frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t}{\tau}\right)^l \quad \text{II.224}$$

wobei bei Huet $0 < k < l < 1$ gilt. Bringt man nun auf einen Huet-Körper eine konstante Spannung $\sigma^{(0)}$ auf, so lassen sich die zeitabhängigen Verzerrungen wie folgt berechnen:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)} = \left[\frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t}{\tau}\right)^l \right] \sigma^{(0)} \quad \text{II.225}$$

Entfernt man zum Zeitpunkt t_1 die Belastung, so ergibt sich die Gesamtverformung zum Zeitpunkt t_1 unmittelbar vor Entfernung der Belastung zu

$$\varepsilon(t_1) = \left[\frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^l \right] \sigma^{(0)} \quad \text{II.226}$$

Ist die Belastung nicht mehr vorhanden, so geht auch sofort der elastische Verformungsanteil der Feder auf Null zurück. Die Verzerrungen der parabolischen Dämpfer bleiben erhalten. Damit lautet die mathematische Beschreibung des Rückkriechens

$$\varepsilon(t) = \left[J_a \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^l \right] \sigma^{(0)} = \text{konst} \quad \text{für } t_1 \leq t \leq \infty \quad \text{II.227}$$

Durch die beiden Formeln II.225 und II.227 wird demnach das Kriechverhalten des Huet'schen Körpers beschrieben. Der Vorteil des zweiten Dämpfers liegt darin, das Kriechen unter Belastung noch genauer an die Realität anpassen zu können. Wegen der seriellen Schaltung besteht das Rückkriechen aber wiederum nur aus dem sofortigen Rückgang der elastischen Verformungsanteile der Feder,

wodurch sich hier keine Verbesserung in der Modellierung im Vergleich zum Maxwell- oder Power-law-Modell zeigt.

Das Relaxationsverhalten eines Huet'schen Körpers ist in Abb. 31 dargestellt. Um jedoch den Einfluss der Parameter zu verstehen, ist die Beschäftigung mit Abb. 30 hilfreich. Zu sehen sind darin zwei Potenzfunktionen (blau und grün), die im doppellogarithmischen Maßstab naturgemäß eine Gerade bilden. Zusätzlich ist orange eine Konstante C abgebildet. Die Funktionen entsprechen den Anteilen der parabolischen Dämpfer, die Konstante der Feder. Die Summe lässt erkennen, wo der Vorteil des zweiten Dämpfers liegt. Anders als beim Power-law-Modell, wo nur eine Potenzfunktion und Konstante vorhanden sind, und die Steigung im doppellogarithmischen Maßstab sich nur einmal ändern kann, ist es bei Huet möglich drei unterschiedliche, logarithmische Kriechraten zu entwickeln.

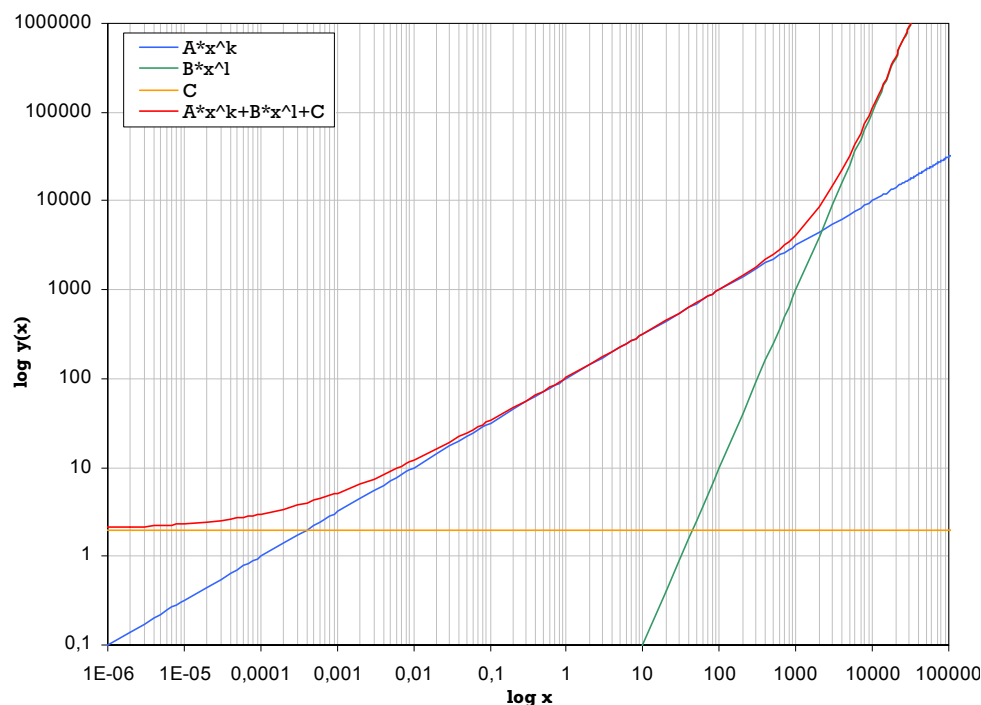


Abb. 30: Zur Erläuterung des Verhaltens des Huet'schen Modells

Abb. 31 zeigt Kriechkurven für verschiedene Werte der nichtlinearen Dämpfer. Mit Hilfe von Abb. 30 wird deutlich, dass der Ausgangspunkt der Verzerrung stets der elastische Anteil $1/E^e$ sein wird. Die Grundkriechnachgiebigkeiten J_a und J_b geben nur den Schnittpunkt der Kriechkurve des jeweiligen Dämpfers mit der y-Achse an. Je größer die Nachgiebigkeit, desto weiter links liegt die Kurve, desto früher nimmt sie Einfluss auf das Kriechverhalten. Die Werte k und l geben die Steigung der jeweiligen Kriechkurve an. Je kleiner die Potenz, desto geringer fällt die Steigung aus, desto langsamer erhöht sich also die Kriechnachgiebigkeit des Dämpfers.

Daraus ist zu schließen, dass man durch geeignete Parameterwahl beeinflussen kann, ab wann ein Dämpfer Einfluss auf das Kriechverhalten nimmt und wie groß dieser Einfluss sein soll.

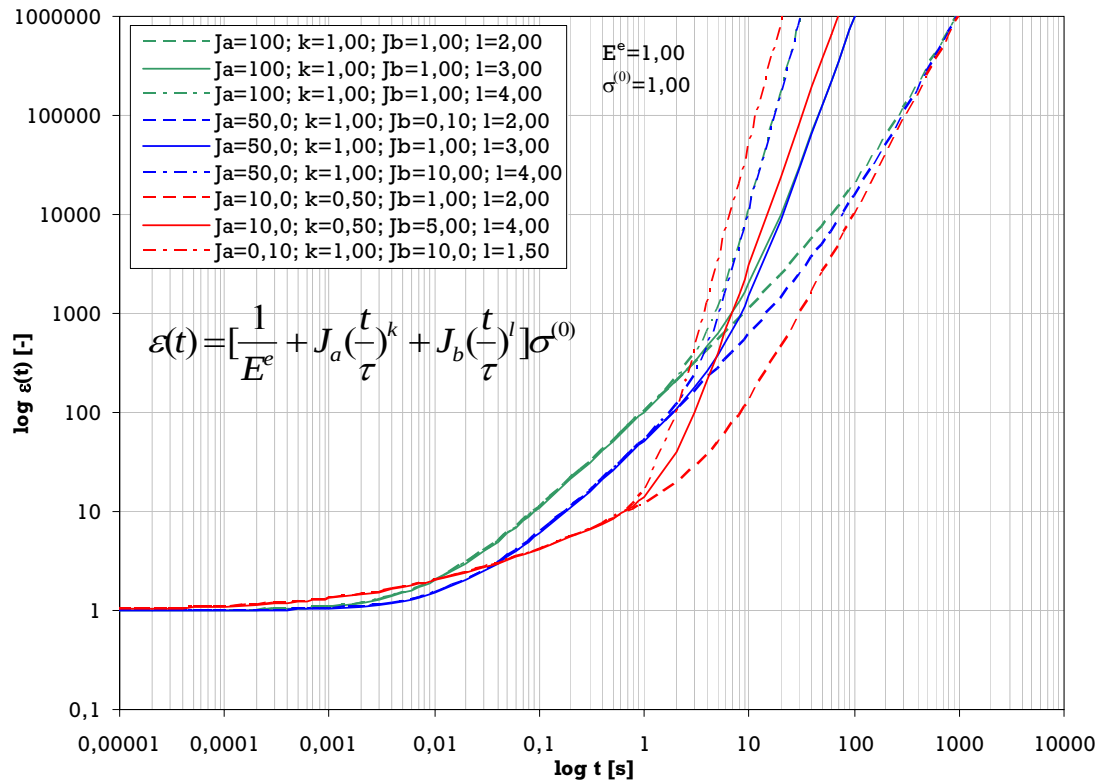


Abb. 31: Relaxationsverhalten eines Huet'schen Körpers für verschiedene Werte von J_a , k , J_b und l im doppellogarithmischen Maßstab

In puncto Rückkriechen gilt dasselbe wie bei allen in Serie geschalteten Modellen. Nach dem sofortigen Rückgang der elastischen Anteile zum Zeitpunkt der Entlastung, bleiben die Verformungsanteile der Dämpfer über die Zeit konstant.

Um das Relaxationsverhalten eines Materials, das sich nach Huets Modell verhält, beschreiben zu können, würde die Bestimmung des Relaxationsmoduls notwendig sein, was auf analytischem Wege nicht mehr möglich ist. Da in weiterer Folge die statischen Kennwerte im Gegensatz zu den dynamischen nicht mehr benötigt werden, wird an dieser Stelle auf eine numerische Annäherung an den Relaxationsmodul verzichtet um die Übersichtlichkeit und den Umfang der Arbeit nicht zu beeinträchtigen.

a) Komplexe Materialkennwerte des Huet-Modells

Da es sich beim Huet'schen Modell um eine reine Serienschaltung handelt, kann die gesamte komplexe Kriechnachgiebigkeit durch Summe der Einzelnachgiebigkeiten erhalten werden. Durch Addition eines weiteren parabolischen Dämpfers an das Power-law-Modell ergibt sich die Erweiterung von II.216

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1)(i\omega)^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(l+1)(i\omega)^{-l} \quad \text{II.228}$$

Daraus lassen sich wieder aufwändiger per Hand unter Berücksichtigung der Regeln für das Operieren mit komplexen Zahlen bzw. rascher unter Zuhilfenahme eines mathematischen Software-Pakets der reale und imaginäre Anteil herausfiltern. Sie ergeben sich zu

$$J_1 = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} \quad \text{II.229}$$

$$J_2 = J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} \quad \text{II.230}$$

E^* erhält man aus dem Reziprokwert von J^* , E_1 und E_2 aus $J_1/(J_1^2 + J_2^2)$ und $J_2/(J_1^2 + J_2^2)$:

$$E^*(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1)(i\omega)^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(l+1)(i\omega)^{-l}} \quad \text{II.231}$$

$$E_1 = \frac{\frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l}}{N} \quad \text{II.232}$$

$$E_2 = \frac{J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l}}{N} \quad \text{II.233}$$

wobei der Nenner N sich als

$$N = \left(\frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l}\right)^2 + \left(J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l}\right)^2 \quad \text{II.234}$$

gestaltet. [Huet (1963)], [Blab et al. (2006)]

Der Übersichtlichkeit halber sind in Annex J von [Blab et al. (2006)] die komplexen Kennwerte auch mit folgenden Abkürzungen formuliert worden.

$$J_1 = b \quad \text{II.235}$$

$$J_2 = c \quad \text{II.236}$$

Damit ergeben sich die weiteren Werte zu

$$J^*(\omega) = b - ic \quad \text{II.237}$$

$$E^*(\omega) = \frac{1}{b - ic} \quad \text{II.238}$$

$$E_1 = \frac{b}{b^2 + c^2} \quad \text{II.239}$$

$$E_2 = \frac{c}{b^2 + c^2} \quad \text{II.240}$$

In Abb. 32 sind die sechs Diagramme zur Erläuterung der komplexen Kennwerte für das Huet-Modell dargestellt. Einerseits wird ersichtlich, dass – wie auch schon bei der statischen Kriechnachgiebigkeit gesehen – durch den zusätzlichen Dämpfer zwei Krümmungsänderungen der komplexen Werkstoffkennwerte in Abhängigkeit der Frequenz möglich sind. Bei sehr niedrigen Frequenzen stellen

sich sehr niedrige Steifigkeitswerte ein, das Material beginnt zu fließen, während bei hohen Frequenzwerten der komplexe Modul gegen den E-Modul der Feder geht, weil die beiden Dämpfer durch ihre Trägheit zu starren Körpern werden.

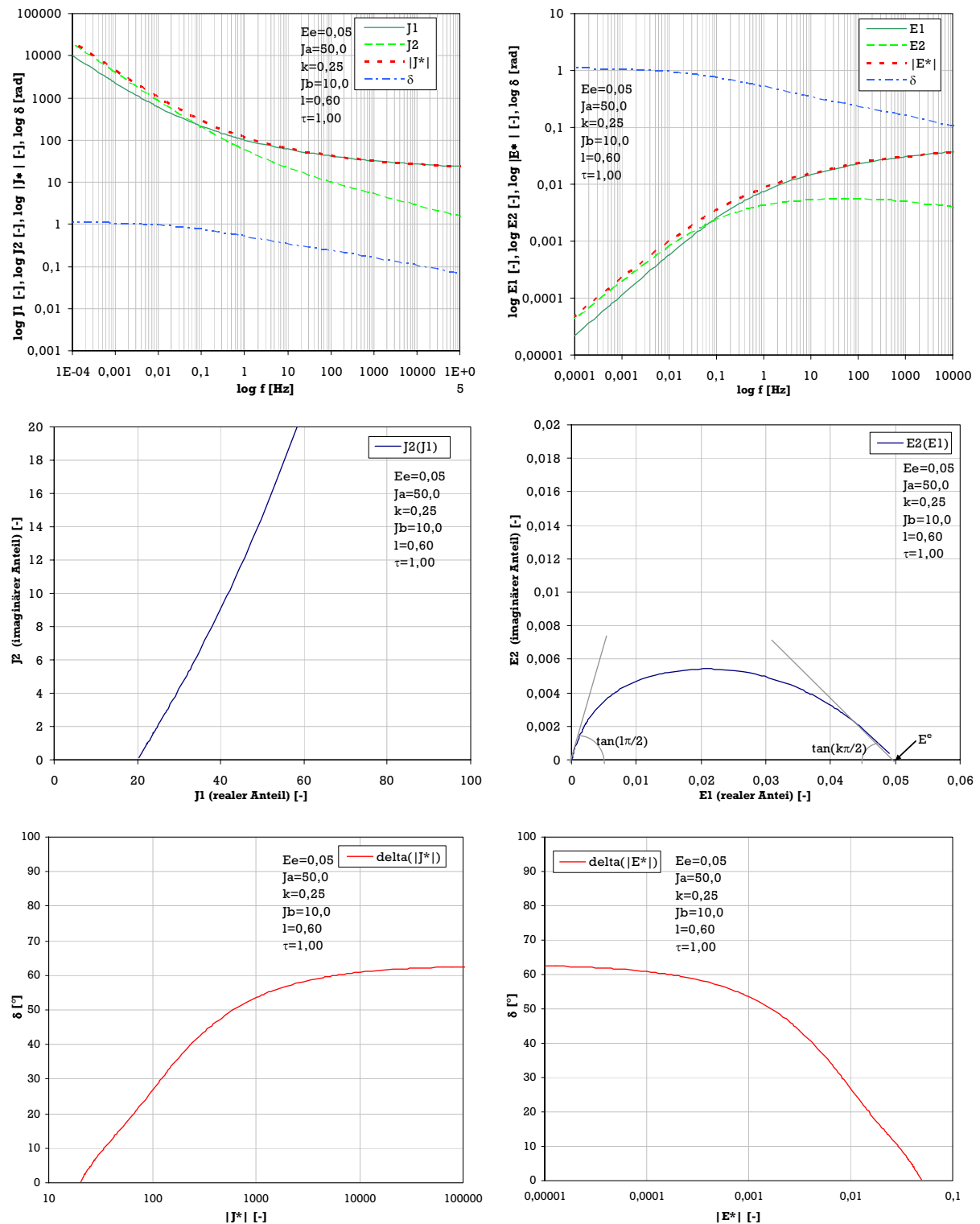


Abb. 32: Huet-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E^e = 0,05$; $J_a = 50,00$; $k = 0,25$; $J_b = 10,0$; $l = 0,60$; $\tau = 1,00$

Zudem ist besonderes Augenmerk auf das Cole-Cole-Diagramm zu legen, da dort der weitere Vorteil des Huet'schen Modells liegt. Die Tangenten an die Endpunkten der Kurve haben nicht wie beim Power-law-Modell gleiche Steigung, sondern erhalten ihre Steigungswerte aus den Potenzen der beiden parabolischen Dämpfer. Im J_1 - J_2 -Diagramm zeigt sich dieser Umstand darin, dass die Gerade bei Power-law jetzt eine Krümmung aufweist, wobei die Tangente an den Anfangspunkt der Kurve ihre Steigung durch den Wert k und die Tangentensteigung an die Gerade, die an die Anfangskrümmung anschließt, von l beeinflusst wird.

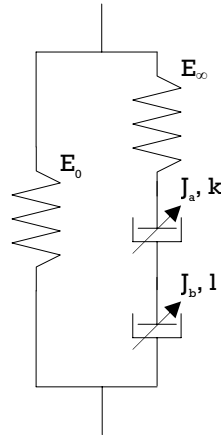
Huet entwickelte sein Modell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Bitumen unter zyklisch-dynamischer Belastung. Gleichzeitig kann man das Verformungsverhalten von Asphalten mit dem vorliegenden Modell beschreiben, jedoch nur bei ausreichend tiefen Temperaturen.

II.7.3 Huet-Sayegh-Modell

Das nun schon oft zitierte Problem mit allen seriellen, zeitlich linear wie nichtlinearen Modellen, dass keine adäquate Beschreibung des Rückkriechens möglich ist, führte auch im Bereich der Modelle mit parabolischen Dämpfern dazu parallelgeschaltete Systeme zu entwickeln. Mit dem Huet'schen Modell lässt sich das mechanische Verhalten von Werkstoffen, wie etwa Bitumen auch im zyklisch-dynamischen Bereich über ein weites Spektrum der Temperatur und der Frequenz gut beschreiben. Für Festkörper mit Bitumen als Bindemittel, hier sei als Beispiel Asphalt angeführt, ist eine ausreichend befriedigende Modellierung vor allem bei niedrigen Frequenzen und hohen Temperaturen nicht immer gegeben. Dies liegt vor allem daran, dass beim Huet'sche Modell bei diesen Bedingungen der komplexe Modul Richtung Null geht, während aus Versuchen bekannt ist, dass er sich z.B. bei Asphalten einem von Null verschiedenen Wert E_0 annähert.

Unter diesem Aspekt entwickelte G. Sayegh in seiner Dissertation ([Sayegh (1965)]) zwei Jahre nach Huet – 1965 – ein erweitertes, parallelgeschaltetes, bi-parabolisches Modell, das Huet-Sayegh-Modell, das häufig zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Asphalten bei zyklischer Beanspruchung herangezogen wird. Abb. 33 zeigt ein Schema der Sayegh'schen Erweiterung. Für den Sonderfall, dass $E_0 = 0$, sind die Modelle Huets und Sayeghs identisch.

Eine analytische Herleitung der Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ ist aufgrund der Parallelschaltung nicht mehr möglich und soll hier nicht auf numerischem Weg durchgeführt werden, da in der weiteren Abhandlung die statischen Beiwerte nicht von Bedeutung sind und ein Zuviel an Theorie nicht zu an dieser Stelle unnötigem Ballast werden soll.

**Abb. 33: Huet-Sayegh-Modell**

a) *Komplexe Materialkennwerte des Huet-Sayegh-Modells*

Ausgehend von der Formel zur Bestimmung von E^* des Huet'schen Körpers, kann man, da es sich beim aktuell behandelten Modell um eine Parallelschaltung handelt auf denkbar einfache Weise zum komplexen Modul des erweiterten Modells gelangen. Man addiert dazu den schon bekannten Anteil des in Abb. 33 rechten Strangs mit dem komplexen Modul des linken Strangs, der aus einer einzelnen Feder besteht und damit dem E-Modul E_0 entspricht. Es ergibt sich somit

$$E_{hs}^*(\omega) = E_0 + E_{hu}^* = E_0 + \frac{1}{\frac{1}{E_\infty} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1)(i\omega)^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(l+1)(i\omega)^{-l}} \quad \text{II.241}$$

Den realen, elastischen Anteil E_1 des komplexen Moduls erhält man durch Hinzufügen des realen Anteils der Feder, was deren E-Modul entspricht. Der Verlustanteil bleibt im Vergleich zu Huet unverändert.

$$E_1 = E_0 + \frac{\frac{1}{E_\infty} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos(\frac{k\pi}{2}) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos(\frac{l\pi}{2}) \omega^{-l}}{N} \quad \text{II.242}$$

$$E_2 = \frac{J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin(\frac{k\pi}{2}) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin(\frac{l\pi}{2}) \omega^{-l}}{N} \quad \text{II.243}$$

[Sayegh (1965)]

Führt man nun die Abkürzung $a = E_0$ ein – $J_{1,huet} = b$ und $J_{2,huet} = c$ wie schon bei Huet – so ergeben sich in der übersichtlichen Schreibweise folgende Gleichungen

$$E_{hs}^*(\omega) = a + \frac{1}{b - ic} \quad \text{II.244}$$

$$E_1 = a + \frac{b}{b^2 + c^2} \quad \text{II.245}$$

$$E_2 = \frac{c}{b^2 + c^2} \quad \text{II.246}$$

Der Betrag der komplexen Zahl E^* führt nach Umformungen zu folgendem Ergebnis

$$|E^*| = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ac + 1}{b^2 + c^2}} \quad \text{II.247}$$

Aus dem Kehrwert des komplexen Moduls ergibt sich J^* , wobei die rechte Seite der untenstehenden Gleichung schon dermaßen umgeformt ist, dass realer und imaginärer Anteil abgelesen werden können.

$$J_{hs}^*(\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{b - ic}} = \frac{ab^2 + b + c^2a - ic}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ab + 1} \quad \text{II.248}$$

Daraus erhält man wiederum die Beträge des Speicher- und Verlustanteils

$$J_1 = \frac{ab^2 + b + c^2a}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ab + 1} \quad \text{II.249}$$

$$J_2 = \frac{c}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ab + 1} \quad \text{II.250}$$

und schlussendlich den Betrag von J^* als Reziprokwert von $|E^*|$

$$|J^*| = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ac + 1}} \quad \text{II.251}$$

Die entscheidenden Unterschiede zwischen diesem und dem Huet-Modell erkennt man am besten in Abb. 34. Rechts oben ist der Zusammenhang zwischen $|E^*|$, E_1 , E_2 , δ und der Frequenz im doppellogarithmischen Maßstab dargestellt. Geht die Frequenz gegen ∞ , so geht der komplexe Modul gegen $E_\infty + E_0$. Anders jedoch als bei Huet ist auch im niedrigen Frequenzbereich durch die zusätzliche Feder eine von Null verschiedene Steifigkeit vorhanden, der komplexe Modul nimmt den Wert E_0 an. Dadurch erreicht auch der Phasenwinkel nicht bei niedrigen Frequenzen das Maximum, sondern im mittleren Frequenzbereich.

Im Cole-Cole-Diagramm verschiebt sich die Kurve nach rechts um den Wert E_0 ; somit ist eine weitere Einflussgröße gegeben. Auch das Black-Diagramm verändert sich durch die Parallelschaltung einer Feder: Im Bereich niedriger Module, also bei hohen Temperaturen und kleinen Frequenzen geht der Verlustwinkel gegen Null und nimmt nicht wie bei Huet ein Maximum an.

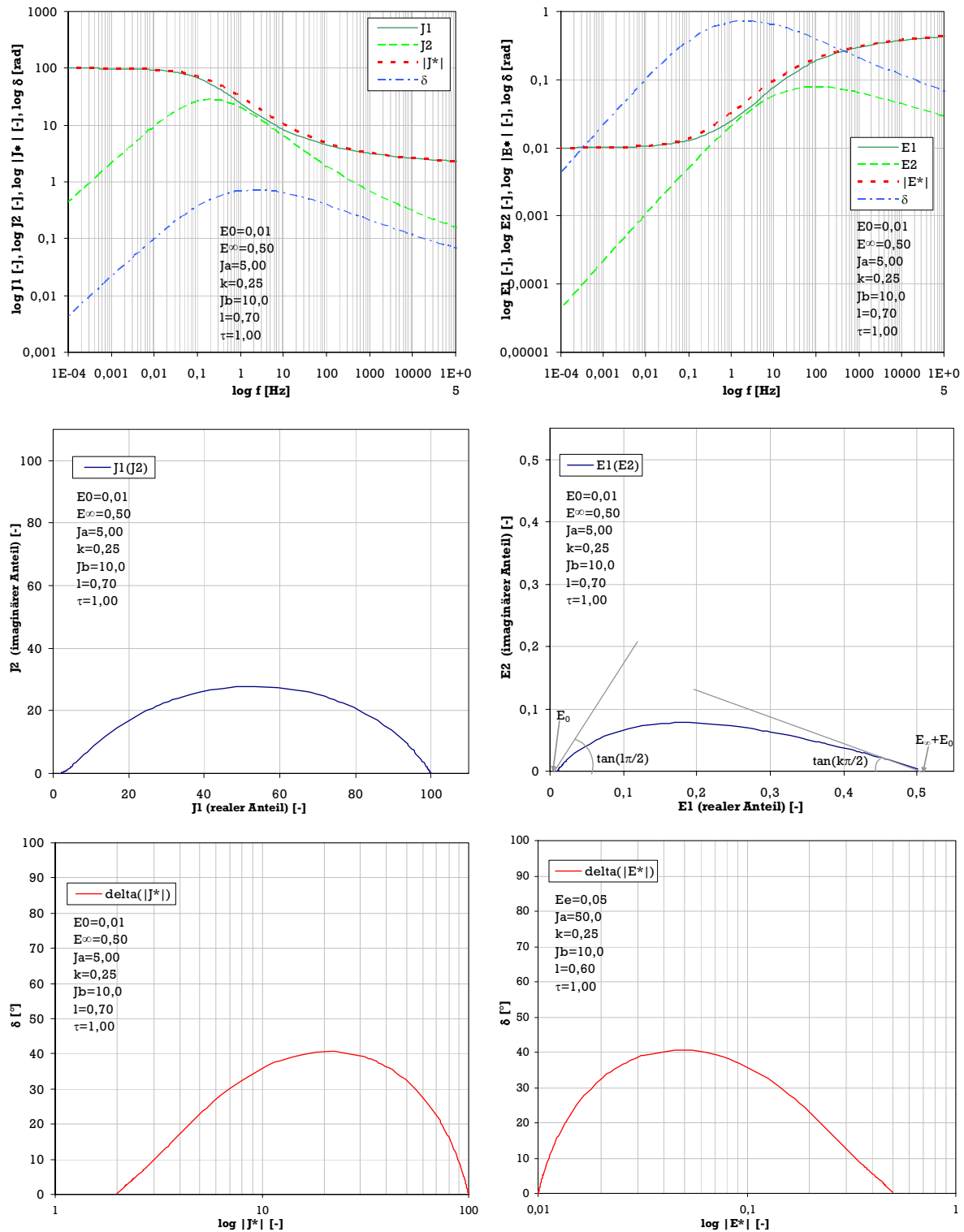


Abb. 34: Huet-Sayegh-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E_0 = 0,05$; $E_\infty = 0,50$; $J_a = 5,00$; $k = 0,25$; $J_b = 10,0$; $l = 0,70$; $\tau = 1,00$

II.7.4 2S2P1D-Modell

Erstmals im Jahr 2003 in [Olard, Di Benedetto (2003)] wurde das so genannte 2S2P1D-Modell, entwickelt von F. Olard und H. Di Benedetto, dargestellt. Es ist eine zusätzliche Erweiterung des Huet-Sayegh'schen Systems, wobei dem Ast mit den parabolischen Dämpfern ein weiterer linearer Dämpfer hinzugefügt wurde. Der Name leitet sich von der englischen Bezeichnung der Konfiguration ab – 2 springs, 2 parabolic dashpots, 1 dashpot. Abb. 35 zeigt eine schematische Darstellung des Modells.

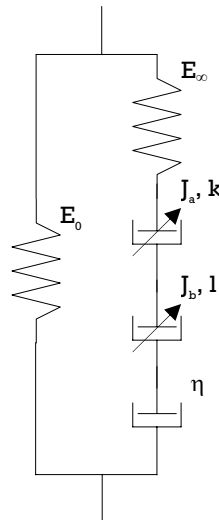


Abb. 35: 2S2P1D-Modell

Der Grund für die Weiterentwicklung und die Implementierung eines zusätzlichen Parameters für den linearen Dämpfer liegt in der Tatsache, dass die Autoren ein sowohl für Asphaltmischungen als auch Bitumen gültiges viskoelastisches System entwickeln wollten. Das Huet-Sayegh-Modell liefert zwar gute Übereinstimmung mit dem mechanischen Verhalten von Asphalten, jedoch ist es nicht befriedigend einsetzbar bei Bitumen.

In ihrer Arbeit legen die Autoren dar, dass sich Asphalte und zugehörige Bindemittel in ihrem Verhalten nur in den beiden Moduli der Federn (E_0 , E_∞) unterscheiden, wenn das von ihnen entwickelte Modell Anwendung findet.

Wie schon bei Huet-Sayegh ist die analytische Herleitung der statischen Kriechnachgiebigkeit $J(t)$ aufgrund der Parallelschaltung nicht mehr möglich. Auf die Erläuterung einer numerischen Annäherung soll an dieser Stelle verzichtet werden.

a) Komplexe Materialkennwerte des 2S2P1D-Modells

Zunächst werden ausgehend vom realen und imaginären Anteil der komplexen Nachgiebigkeit des Huet'schen Modells (II.229, II.230) diese Teile der Nachgiebigkeit für den rechten Ast in Abb. 35 berechnet. Damit ergibt sich für ein $J^*(\omega)$ des linearen Dämpfers von $1/(i\omega\eta)$

$$J_{1,re} = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} \quad \text{II.252}$$

$$J_{2,re} = J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} + \frac{1}{\omega\eta} \quad \text{II.253}$$

bzw. in der übersichtlichen Schreibweise ($J_{1,huet} = b, J_{2,huet} = c$)

$$J_{1,re} = b \quad \text{II.254}$$

$$J_{2,re} = c + \frac{1}{\omega\eta} \quad \text{II.255}$$

Daraus lässt sich die komplexe Nachgiebigkeit des rechten Astes als

$$J_{re}^* = b + i\left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right) \quad \text{II.256}$$

ableiten. Aus dem Reziprokwert von II.256 und der Hinzufügung des komplexen Moduls des linken Strangs, der aus einer Feder besteht und damit dem E-Modul $E_0 = a$ entspricht, ergibt sich der komplexe Modul des vorliegenden Modells zu

$$E^*(\omega) = a + \frac{1}{b + i\left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right)} \quad \text{II.257}$$

Die beiden Anteile des Moduls erhält man zu

$$E_1 = a + \frac{b}{b^2 + \left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right)^2} \quad \text{II.258}$$

$$E_2 = \frac{c + \frac{1}{\omega\eta}}{b^2 + \left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right)^2} \quad \text{II.259}$$

Bildet man die Quadratsumme aus den beiden obigen Gleichungen, so entspricht dies dem Betrag des komplexen Moduls

$$|E^*| = \sqrt{\left(a + \frac{b}{b^2 + \left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{c + \frac{1}{\omega\eta}}{b^2 + \left(c + \frac{1}{\omega\eta}\right)^2}\right)^2} \quad \text{II.260}$$

Aus dem Reziprokwert von II.257 kann die komplexe Nachgiebigkeit und daraus der reale und imaginäre Anteil berechnet werden.

Die gewohnte Abb. 36 zeigt das Verhältnis einiger Parameter zueinander, wobei die Konfiguration des Modells dem in der Abhandlung über das Huet-Sayegh-Modell gleicht, bis auf den zusätzlichen Dämpfer mit der Viskosität $\eta = 0,10$.

Der wesentliche Unterschied zu Huet-Sayegh zeigt sich erst bei kleinen Werten für die Viskosität des linearen Dämpfers. Bei zu großer Viskosität wird dieser so träge, dass kein Einfluss mehr auf das Systemverhalten sichtbar ist. Je kleiner der Parameter des linearen Dämpfers wird, desto weiter in den hohen Frequenzbereich verschiebt sich die Änderung des Materialverhaltens.

Gleichzeitig verengt sich dieser Übergangsbereich, und die Maxima der Verlustanteile steigen an. Erkennbar ist dieser Effekt in den oberen Diagrammen der Abb. 36. Außerdem steigt auch das Maximum des Phasenwinkels an.

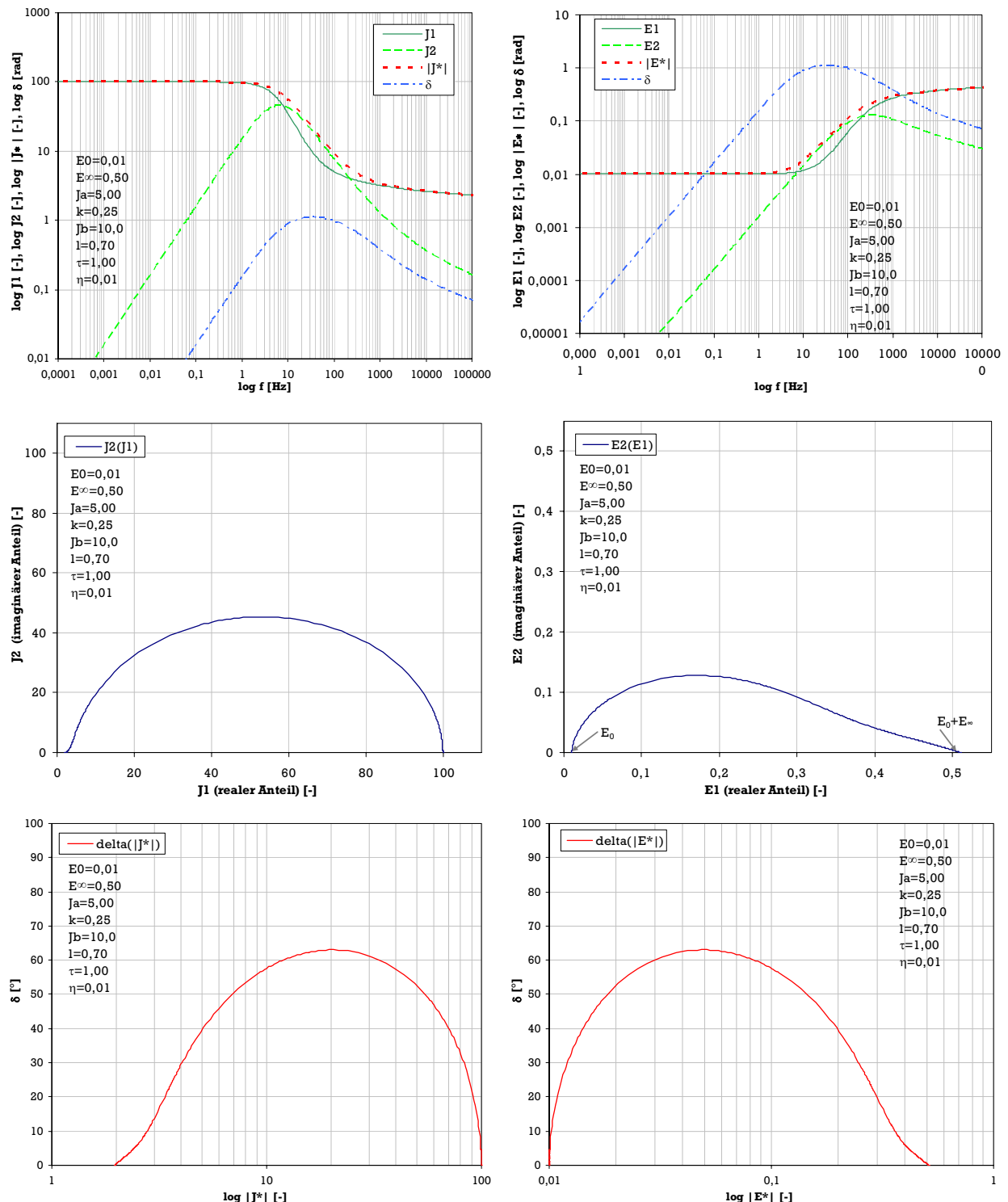


Abb. 36: 2S2P1D-Modell: Komplexe Kennwerte in Abhängigkeit der Frequenz, sowie Verlustanteil zu Speicheranteil und Phasenwinkel zum Betrag der komplexen Kennwerte für $E_0 = 0,05$; $E_\infty = 0,50$; $J_a = 5,00$; $k = 0,25$; $J_b = 10,0$; $l = 0,70$; $\tau = 1,00$; $\eta = 0,01$

Im Cole-Cole-Diagramm kommt eine zusätzliche Möglichkeit zur Beeinflussung der Kurvensteigung hinzu. Am linken Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse

beim x -Wert E_0 liegt wegen des Dämpfers eine Steigung von 90° vor, die, je größer η , desto schneller in den ursprünglichen Kurvenverlauf des Huet-Sayegh-Modells übergeht. Zudem steigt das Maximum der Kurve an, die Verlustanteile und damit die Energiedissipation werden größer. Im Black-Diagramm zeigt sich ebenfalls im linken Schnittpunkt der Kurve mit der x -Achse ein Steigungswinkel von 90° , der Verlustwinkel wird insgesamt größer, was mit der vorangehenden Aussage der erhöhten Energieverluste übereinstimmt.

III. Parameteridentifikation mittels Datafitting

Wie schon weiter oben angeführt, kann das mechanische Verhalten verschiedener, realer Stoffe für jeweils eingeschränkte Randbedingungen in bestimmten rheologischen Modellen abgebildet werden. Führt man an einem Material zyklische Versuche bei unterschiedlichen Temperaturen über ein Spektrum an Frequenzen durch und berechnet über die erfassten Messwerte den Speicher- und Verlustmodul, so kann man zunächst aus diesen Daten durch Anwendung von II.165 und II.166 den Betrag des komplexen Moduls und den Phasenwinkel bestimmen, sowie die gewonnenen Werte in einem Cole-Cole- und einem Black-Diagramm darstellen.

Nun ist es möglich durch Variation der Modellparameter Kurven des gewählten Modells an die aus den Versuchen gewonnenen Daten zu approximieren, wodurch eine analytische Beschreibung des mechanischen Verhaltens möglich wird. Dieser Vorgang – die Parameteridentifizierung durch Datafitting – ist Inhalt des folgenden Kapitels.

III.1 Der Steifigkeitsversuch

Die im CD-Labor des Instituts für Straßenbau und -erhaltung der TU-Wien durchgeführten und der Parameteridentifikation unterzogenen Versuche an Asphaltprobekörpern halten sich an die Bestimmungen der [ON EN 12967-26 (2004)]. Diese Norm beschreibt Verfahren zur Ermittlung der Steifigkeit von Asphalten durch verschiedene Prüfungen, bei denen eine sinusförmige Belastung auf Probekörper mit unterschiedlichen Geometrien und Auflagerungsformen aufgebracht wird.

Die Verfahren sind weggesteuert, wobei die Amplitude so festgelegt werden muss, dass während des Tests keine Schädigung am Probekörper auftritt. Laut [ON EN 12967-26 (2004)] ist davon auszugehen, dass, liegen die erzwungenen Dehnungen unter einem Wert von 50 Mikrostrain ($= 50 \cdot 10^{-6}$ m/m), keine Ermüdungserscheinungen schlagend werden.

Der Frequenzbereich lag bei den Untersuchungen des CD-Labors zwischen 0,1 und 40,0 Hz, wobei acht bis zehn Frequenzen (0,1; 1,0; 2,0; 5,0; 8,0; 10,0; 20,0; 30,0; 40,0 Hz) bei vier bzw. fünf Temperaturen durchlaufen wurden. Die Versuche fanden bei Temperaturen zwischen -10,0 und +25,0 °C statt, wobei zwischen zwei Prüftemperaturen jeweils 10 K Differenz eingehalten wurde. Zum Abschluss jeder Frequenzmessserie wurden noch einmal Daten bei 0,1 Hz Belastungsfrequenz aufgezeichnet, um erkennen zu können, ob der Probekörper während des Versuchs geschädigt wurde.

Durch die aufgezeichneten Messgrößen, nämlich die Kraft F , die Verschiebung z und den Phasenwinkel φ bzw. δ können über Masse- und Formfaktoren nach [ON EN 12967-26 (2004)] berechnet werden, für den jeweiligen Versuchstyp der Speicher- und Verlustmodul ermittelt werden.

Zur Anwendung kamen im Labor die Vierpunkt-Biegeprüfung an prismatischen Probekörpern (4PB-PR, Anhang B), die direkte Zug- und Druckprüfung an zylindrischen Probekörpern (DTC-CY, Anhang D), die direkte Zugprüfung an zylindrischen Probekörpern (DT-CY, Anhang E) und die direkte Druckprüfung an zylindrischen Probekörpern (DC-CY). Die ersten drei genannten Prüfmethoden finden sich in den jeweils in Klammern angeführten Anhängen der [ON EN 12967-26 (2004)], während die direkte Druckprüfung durch eine laborinterne Arbeitsanweisung geregelt wird. Eine Übersicht der Steifigkeitsversuche laut ON EN 12697-26 bieten Abb. 37 und Abb. 38.

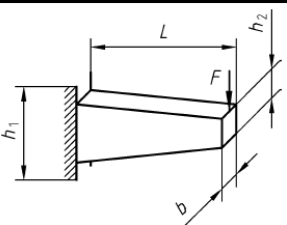
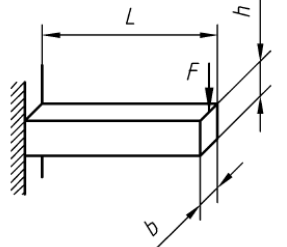
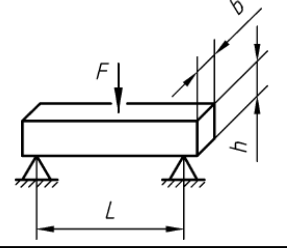
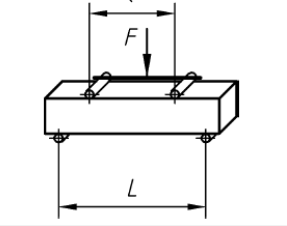
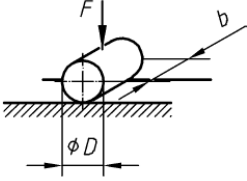
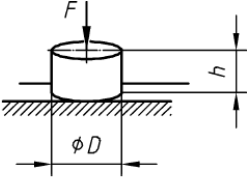
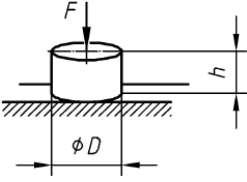
Belastungsart		Formfaktor, γ L^{-1}	Massefaktor, μ
2PB-TR		$\frac{12L^3}{b(h_1 - h_2)^3} \left[\left(2 - \frac{h_2}{2h_1} \right) \frac{h_2}{h_1} - \frac{3}{2} - \ln \frac{h_2}{h_1} \right]$	$0,135 M + m^a$
2PB-PR		$\frac{4L^3}{b h^3}$	$\frac{M}{4} + m$
3PB-PR		$\frac{24L^3}{\pi^4 b h^3} \approx \frac{L^3}{4b h^3}$	$\frac{M + m}{2}$
4PB-PR		$\frac{L^2 A}{b h^3} \left(\frac{3}{4} - \frac{A^2}{L^2} \right) b$	$R(X) \left(\frac{M}{\pi^4} + \frac{m}{R(A)} \right)^b$

Abb. 37: Übersicht der Steifigkeitsversuche laut ON EN 12697-26; Teil 1 [ON EN 12967-26 (2004)]

Belastungsart		Formfaktor, γ L^{-1}	Massefaktor, μ
IT-CY		$\frac{1}{b} \times (v + 0,27)$	—
DTC-CY		$\frac{4h}{\pi D^2}$	$\frac{M}{2} + m$
DT-CY DT-PR		1	0
a Für übliche Probekörpermaße. b $R(X) = \frac{12L}{A} \times \left[\frac{1}{(3XL - 3X^2/L^2 - A^2/L^2)} \right]$, wobei gilt: $A = \frac{L-l}{2}$; X = Koordinate, bei der die Auslenkung gemessen wird.			

**Abb. 38: Übersicht der Steifigkeitsversuche laut ON EN 12697-26; Teil 2
[ON EN 12967-26 (2004)]**

III.2 Hintergrund des Datafittings und der Parameteridentifikation

Zur besseren Anschauung sei hier ein fiktives Modell angenommen, an dem die theoretischen Hintergründe des Datafittings erklärt werden. Das Modell habe die charakteristische Gleichung

$$y(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad \text{III.1}$$

Nun erhält man aus Versuchen, die man mit einem Material durchführt, von dem angenommen wird, dass es sich nach diesem Modell verhält, eine bestimmte Anzahl an Messpunkten, die in Abb. 39 als rote Kreuze dargestellt sind. Man wählt für den Regressionsansatz sinnvolle Anfangswerte, im Beispiel sind dies $A = 1,500$, $B = 3,000$, $C = 0,100$ und $D = 0,500$ (in Abb. 39 als schwarze Kurve zu sehen).

Deutlich erkennbar in Abb. 39 und Tabelle 6 ist, dass bei nicht passenden Regressionsparametern die Messdaten nicht mit dem Modellverhalten übereinstimmen. Es ergibt sich von jedem Messpunkt i eine Abweichung zur Modellkurve, die in Abb. 39 und Tabelle 6 mit Δy_i benannt ist. Der normierte Abstand für einen Punkt i lautet daher

$$\Delta y_{\text{norm},i} = \frac{\sqrt{(y_{\text{mess},i} - y_{\text{mod}})^2}}{y_{\text{mod}}} \quad \text{III.2}$$

Durch Quadrierung und Wurzelziehen erreicht man eine Ausschaltung von Vorzeichen, womit sich positive und negative Differenzen nicht ausgleichen können. $\Delta y_{\text{norm},i}$ stellt die relative Abweichung eines Messpunkts von der Modellkurve dar. Multipliziert man $\Delta y_{\text{norm},i}$ mit 100, so erhält man die prozentuelle Abweichung.

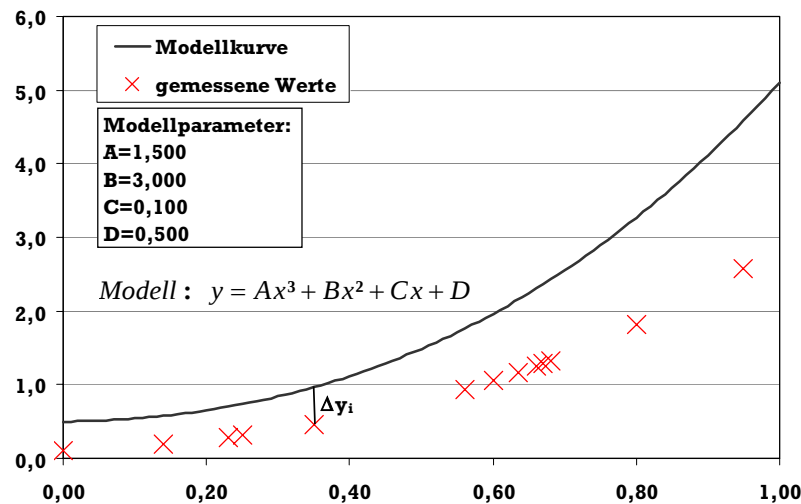


Abb. 39: Situation vor dem Datafitting

Situation vor dem Datafitting					
x_{mess}	y_{mess}	y_{mod}	Δy_i	$\Delta y_{\text{norm},i}$	
0,00	0,100	0,500	-0,400	0,800	
0,14	0,196	0,577	-0,381	0,661	
0,23	0,289	0,700	-0,410	0,586	
0,25	0,314	0,736	-0,422	0,573	
0,35	0,464	0,967	-0,503	0,520	
0,56	0,937	1,760	-0,823	0,467	
0,60	1,056	1,964	-0,908	0,462	
0,64	1,171	2,163	-0,992	0,458	
0,66	1,253	2,304	-1,051	0,456	
0,67	1,288	2,365	-1,077	0,455	
0,68	1,324	2,427	-1,103	0,454	
0,80	1,809	3,268	-1,459	0,446	
0,95	2,573	4,589	-2,015	0,439	
$S_y = \sum \Delta y_{\text{norm},i}$					6,780
$S_y = (\sum \Delta y_{\text{norm},i})/n$					0,522
mittlere prozentuelle Abweichung					52,2%

Tabelle 6: Mess- und Modellwerte, sowie Abweichung zwischen Messdaten und Modell vor dem Datafitting

Summiert man diese einzelnen Abstände $\Delta y_{\text{norm},i}$ über die n Messpunkte auf, so erhält man die Summe der normierten Abweichungen in y -Richtung aller Punkte.

$$S_y = \sum_{i=0}^n \Delta y_{\text{norm},i}$$

III.3

Diese Summe dividiert man durch die Anzahl der Messpunkte ($=n$). Damit erreicht man eine Unabhängigkeit von der Anzahl an Datenpunkten und Datafits mit unterschiedlich vielen Messpunkten werden untereinander vergleichbar.

$$\overline{S_y} = \frac{S_y}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta y_{\text{norm},i}}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{(y_{\text{mess},i} - y_{\text{mod}})^2}}{y_{\text{mod}}}}{n}$$

III.4

Dieser Wert stellt die mittlere, relative Abweichung der Messpunkte von der Modellkurve dar. Ein Wert von 0 bedeutet, dass Messung und Modell ohne Abweichung übereinstimmen, ein Wert von 1 bedeutet, dass die Messdaten im Mittel zu 100 % von der Modellkurve abweichen. Die mittlere, relative Abweichung stellt damit ein Gütekriterium dar, wie gut das Modell die Realität annähert – je kleiner der Wert von $\overline{S_y}$, desto besser die Näherung. In Tabelle 6 sind alle Abstandswerte, sowie auch die prozentuelle, mittlere Abweichung (in diesem Beispiel 52,2 %) vor dem Datafitting angegeben.

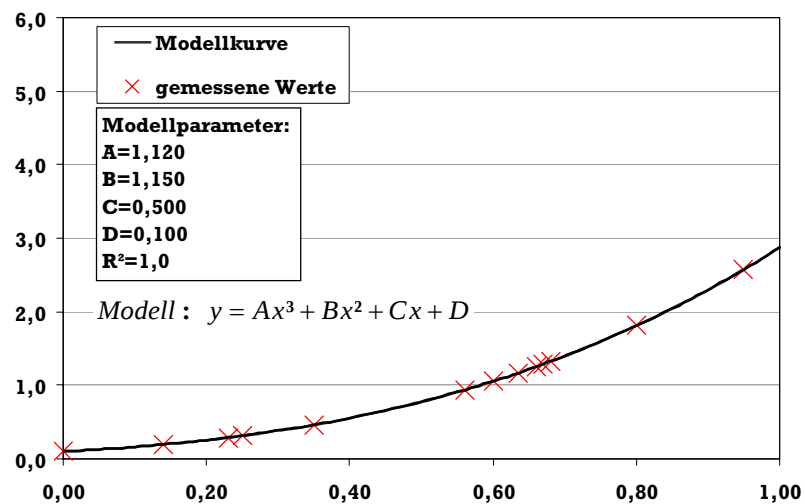


Abb. 40: Situation nach erfolgreichem Datafitting

Situation nach erfolgreichem Datafitting					
x_{mess}	y_{mess}	y_{mod}	Δy_i	$\Delta y_{\text{norm},i}$	
0,00	0,100	0,100	0,000	0,000	
0,14	0,196	0,196	0,000	0,000	
0,23	0,289	0,290	0,000	0,000	
0,25	0,314	0,314	0,000	0,000	
0,35	0,464	0,464	0,000	0,000	
0,56	0,937	0,937	0,000	0,000	
0,60	1,056	1,056	0,000	0,000	
0,64	1,171	1,171	0,000	0,000	
0,66	1,253	1,253	0,000	0,000	
0,67	1,288	1,288	0,000	0,000	
0,68	1,324	1,324	0,000	0,000	
0,80	1,809	1,810	0,000	0,000	
0,95	2,573	2,573	0,000	0,000	
$S_y = \sum \Delta y_{\text{norm},i}$					0,000
$S_y = (\sum \Delta y_{\text{norm},i})/n$					0,000
mittlere prozentuelle Abweichung					0,0%

Tabelle 7: Mess- und Modellwerte, sowie Abweichung zwischen Messdaten und Modell vor dem Datafitting

Um Modellparameter bestmöglich auf die Messdaten abzustimmen, muss die mittlere, relative Abweichung $\overline{S_y}$ ein Minimum annehmen. Dazu wird ein Näherungsverfahren angewendet. Von einem günstig, das heißt schon in der Nähe der Lösung gewählten Startwert werden durch Iteration immer bessere Näherungen ermittelt. Als Beispiel sei hier das Newton'sche Näherungsverfahren genannt. Detaillierte Informationen dazu finden sich bei [Bartsch (2001)]. Der Abschluss des Näherungsverfahrens ist stets eine Abbruchbedingung. Dies kann entweder bedeuten, dass die Näherung beendet ist, wenn die vorgegebene maximale Abweichung unterschritten wird oder die Änderung der Abweichung von einem Iterationsschritt zum nächsten einen vorgegebenen Wert unterschreitet.

In jedem Fall kann durch die Einführung der mittleren, relativen Abweichung eine Grenzbedingung angegeben werden, bei deren Überschreitung das Modell nicht mehr zur Beschreibung der Messung verwendet wird, weil die Abweichung zu groß ist und damit der Regressionsansatz die Realität nicht genau genug abbildet.

In Abb. 40 ist die erhaltene, optimierte Modellkurve mit den entsprechenden Parametern dargestellt. Tabelle 7 zeigt die Mess- und Modellwerte, sowie die Abstände – absolut und relativ – wie auch die mittlere, relative und prozentuelle Abweichung. Im Beispiel tritt der selten Fall ein, dass das Modell die Messdaten perfekt abbildet – die prozentuelle Abweichung beträgt 0,00 %.

In analoger Weise kam dieses Verfahren bei der Auswertung von unterschiedlichen Steifigkeitsversuchen an verschiedenen Asphaltarten mit unterschiedlichen Bindemitteln und Gesteinsarten zur Anwendung. Dabei wurde mit drei rheologischen Modellen gearbeitet. Das Power-Law, das Huet'sche und das Huet-Sayegh'sche Modell wurden zur Parameteridentifikation eingesetzt, wobei beim Power-Law Modell drei, beim Huet'schen fünf und beim Huet-Sayegh'schen sechs Parameter variierbar und somit voneinander unabhängig sind. Mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Parameter steigt einerseits die Möglichkeit der Feinabstimmung zwischen Modell und Realität, andererseits naturgemäß auch die Rechenzeit zur Minimierung der mittleren, relativen Abweichung im Cole-Cole- und im Black-Diagramm.

III.3 Materialien

Tabelle 8 zeigt einen Überblick über die Materialien, für die Modellparameter identifiziert wurden. Bei allen Versuchsdaten handelt es sich um Ergebnisse aus Steifigkeitstests, die am CD-Labor des Instituts für Straßenbau und -erhaltung der TU Wien durchgeführt wurden.

Die Asphalte aus dem Projekt 0521I stellen bituminöse Tragschichten mit zwei verschiedenen Bindemitteln dar, die mit zwei unterschiedlichen Steifigkeitstests geprüft wurden.

Asphalt	Bindemittel	Prüfart	Projekt
BT22	50/70	DTC_CY	0521I
BT22HS	50/90S	DTC_CY	0521I
BT22	50/70	4PBB	0521I
BT22HS	50/90S	4PBB	0521I
BT32	30/50	4PBB	0615E
pmAB11	50/90S	4PBB	0615E
SMA11	50/90S	DTC_CY	0621I
AB-4C	M1	DT_CY	0605I
AB-4C	M1	DC_CY	0605I
AB-4C	M1	DTC_CY	0605I
AB-4C	M2	DT_CY	0605I
AB-4C	M2	DC_CY	0605I
AB-4C	M2	DTC_CY	0605I
AB-4C	M2	4PBB	0605I
SMA11	Bitupol C	DTC_CY	0527E
SMA11	Starfalt	DTC_CY	0527E
SMA11	Villabit	DTC_CY	0527E
SMA11	Zalaplast I	DTC_CY	0527E
SMA8	Bitupol B	DTC_CY	0619E
SMA11	Polyplast	DTC_CY	0619E
SMA11	Zalaplast II	DTC_CY	0619E

Tabelle 8: Verwendete Materialien

Im Projekt 0615E finden sich je eine Trag- und eine Deckschicht getestet am 4-Punkt-Biegebalken. Eine weitere Deckschicht (SMA11) aus dem Projekt 0621I ist ebenfalls dem Datafitting unterzogen worden. Die bisher genannten Asphalttypen sind allesamt in Österreich typisch eingesetzte Materialien. An zwei Deckschichten, die im belgischen Straßennetz Verwendung finden (AB-4C), wurden im Projekt 0605I eine Reihe unterschiedlicher Steifigkeitsprüfungen durchgeführt. Mit diesen Daten kann ein Vergleich der unterschiedlichen Methoden gezogen werden. Außerdem wurden aus den Projekten 0527E und 0619E Steifigkeitsversuche, die an slowenischen Deckschichtmaterialien durchgeführt wurden, ausgewertet und Parameter identifiziert.

III.4 Auswertung, Ergebnisse, Interpretation

Grundsätzlich finden sich alle Prüfberichte im Appendix B: Prüfberichte – Parameteridentifikation. Zur Anschauung sei an dieser Stelle für die Deckschicht SMA11 – Zalaplast II der Prüfbericht mit einigen Erläuterungen abgebildet.

	TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY	Labor des Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung Technische Universität Wien Gußhausstraße 28/E233 1040 WIEN Tel.: +43-1-58801-23301 Fax: +43-1-58801-23399
Prüfbericht: Parameteridentifikation		F534-2 Seite 1 von 2
Auftraggeber Datum Projekt Projektleiter Sachbearbeiter Norm Datenfile Name	IGMAT 22.08.2006 0619E_IGMAT_II Spiegl, Wistuba Hofko — 0619E SMA11_Zaloplast II 4 STFGes_DF.PI 060822	
Maschinen- & Probedaten		
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung	
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)	
Mischgutsorte:	SMA11 - Zaloplast II Nr.4	
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.: EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8 (Verfahren B)	

Abb. 41: Prüfbericht – Parameteridentifikation, Seite 1, obere Seitenhälfte

Abb. 41 zeigt den oberen Teil der ersten Seite des insgesamt zweiseitigen Prüfberichts. Er enthält allgemeine Projektdaten, wie Auftraggeber, Datum der Auswertung, interner Projektcode, sowie Daten zum zugrunde liegenden Steifigkeitsversuch mit Verweisen auf gültige Normen und Angaben über Prüfmaschine und Mischgutsorte. Im unteren Teil dieses Blattes, das in Abb. 42 dargestellt ist, sind zunächst die Mittelwerte der Versuchsdaten abgebildet. Angegeben sind die Versuchstemperatur und der komplexe Modul, sowie der Phasenwinkel zur jeweiligen Prüffrequenz. Aus den beiden letztgenannten Werten können auf einfache Weise auch alle anderen komplexen Parameter wie Speicher- und Verlustanteil berechnet werden.

Darunter schließlich sind die Modellparameter der für das Datafitting verwendeten Systeme angegeben. Es sind dies das Power-law-, das Huet- und das Huet-Sayegh-Modell. Zusätzlich ist durch die mittlere Abweichung ein Kennwert angegeben, der zeigt, wie

Auf der zweiten Seite des Berichts sind im oberen Bereich noch einmal alle Daten, die schon auf Seite 1 oben abgebildet sind, dargestellt. Darunter, wie in Abb. 43 zu sehen, sind die Cole-Cole- und Black-Diagramme für die drei verwendeten Modelle gezeigt. Die farbigen Datenpunkte stellen die Mittelwerte der Versuchsergebnisse dar, wobei jede Farbe eine eigene Temperatur repräsentiert. Die Modellkurve ist schwarz dargestellt.

Prüfergebnisse								
Mittelwerte der Versuchsdaten								
T [°C] = -15,1		T [°C] = -10,1			T [°C] = 5,1		T [°C] = 20,4	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
19337	6,2	15953	8,2	0,1	7678	15,2	2038	27,5
22130	4,9	18787	6,6	1,0	10713	12,3	3748	23,8
22991	4,5	19712	6,2	2,0	11712	11,4	4432	22,6
23953	4,2	20860	5,5	5,0	13012	10,4	5457	20,9
24349	3,8	21546	5,1	10,0	13825	9,8	6302	20,0
24927	3,6	21878	4,9	15,0	14640	9,3	6843	18,8
25149	3,4	22167	4,7	20,0	15007	9,1	7196	18,2
25468	3,2	22401	4,6	30,0	15464	8,7	7732	17,4
25773	3,0	22769	4,5	40,0	15769	8,6	8064	17,1
Parameter								
Power-Law		Huet		Huet-Sayegh				
				E ₀ [MPa]	16			
E [MPa]	29071	E [MPa]	33755	E _{inf} [MPa]	33754			
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000457	J _a [1/MPa]	0,000457			
k [-]	0,244	k [-]	0,142	k [-]	0,142			
		J _b [1/MPa]	0,0097	J _b [1/MPa]	0,0097			
		l [-]	0,406	l [-]	0,406			
mittlere Abweichung [%]		mittlere Abweichung [%]		mittlere Abweichung [%]				
13,62%		2,41%		2,43%				

Abb. 42: Prüfbericht – Parameteridentifikation, Seite 1, untere Seitenhälfte

Um die Auswertung der Diagramme besser zu verstehen, sind in Abb. 44 zwei schematische Cole-Cole-Diagramme dargestellt. Diese beiden Fälle stellen Extrema dar, zwischen denen das reale Verhalten von Asphalten zu liegen kommt. Im linken, ansteigenden Ast der Kurve liegt das mechanische Verhalten bei höheren Temperaturen; erkennbar ist dies auch in Abb. 43, wobei hierbei die orangefarbenen Datenpunkte aus den höchsten Versuchstemperaturen resultieren. Dabei sind wiederum die Punkte am Beginn der Kurve mit kleinen komplexen Moduli und daher geringen Steifigkeiten den niedrigen Prüffrequenzen zugeordnet. Am rechten, absteigenden Ast der Modellkurve findet sich das Materialverhalten im Tieftemperaturbereich; in Abb. 43 entspricht dies den grünen Datenpunkten.

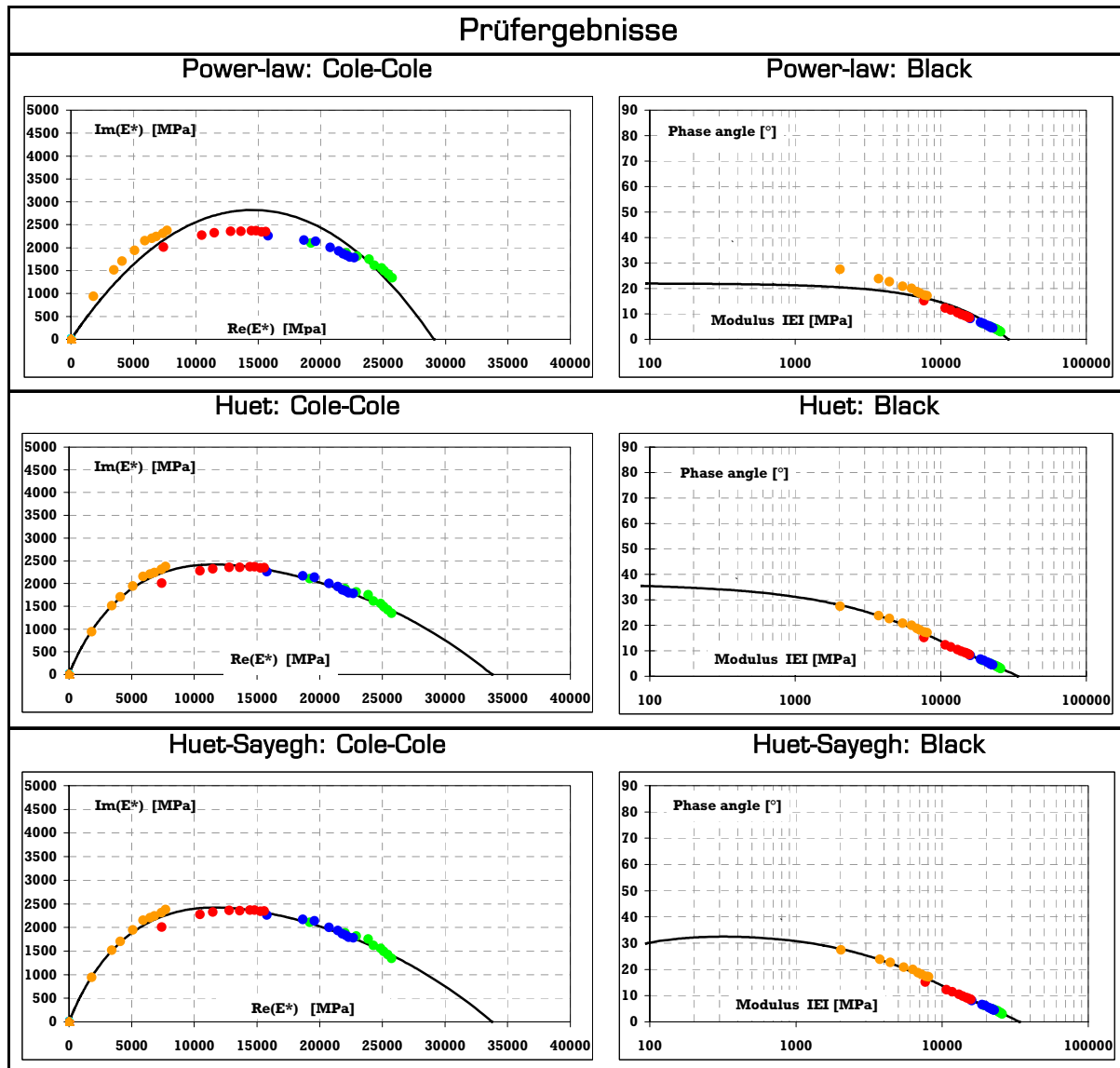


Abb. 43: Prüfbericht – Parameteridentifikation, Seite 2, untere Seitenhälfte

Verständlich wird die temperaturabhängige Lage der Daten dadurch, dass die Länge des Vektors vom Nullpunkt des Cole-Cole-Diagramms zu einem Datenpunkt den Betrag des komplexen Moduls und somit die Steifigkeit angibt; in Abb. 44 sind die Beträge anhand der Länge der Vektoren erkennbar. Die Neigung der Vektoren zur x-Achse geben den Verlustwinkel δ an. Je weiter entfernt ein Punkt vom Nullpunkt des Diagramms liegt, desto höher ist die Steifigkeit bei der zugehörigen Prüfsituation. Je steiler ein Vektor, desto höher auch die Verluste. Verhält sich ein Material so, wie die rote Kurve in Abb. 44 zeigt, so liegt im hohen Temperaturbereich stark viskoses Verhalten (mit großen Verformungen) vor, während auch im Tieftemperaturbereich noch relativ große Nachgiebigkeitsreserven vorhanden sind. Die grüne Kurve stellt eine Asphaltmischung dar, die auch bei hohen Temperaturen geringe Viskositäts- und damit bleibende Verformungsanteile aufweist. Dafür zeichnet sich ein solches Material auch durch Sprödigkeit im tiefen Temperaturbereich aus.

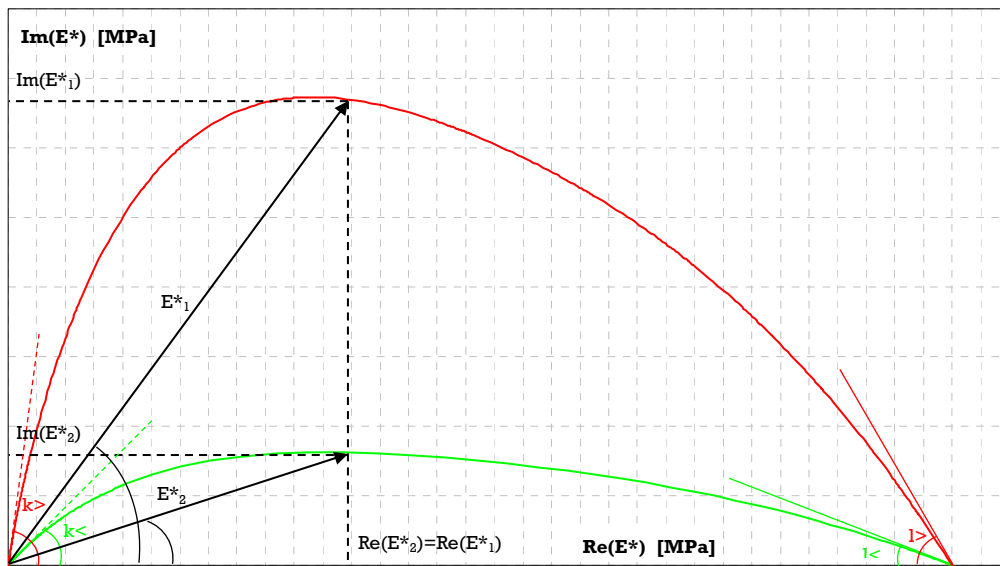


Abb. 44: Schematisches Cole-Cole-Diagramm

Verschiebt sich der rechte Schnittpunkt mit der x-Achse, der E_{∞} -Wert also, nach links, so wird das System bei tiefen Temperaturen weicher – der umgekehrte Fall tritt ein, wenn sich der Schnittpunkt nach rechts verlagert.

Ein optimales Material für alle Anforderungen lässt sich für das Dreiphasensystem Asphalt nicht angeben. Für ausreichend elastisches Verhalten bei tiefen Temperaturen, was die Anfälligkeit für Risse und andere Schäden aufgrund von Sprödigkeit verkleinert, ist das Modellverhalten der roten Kurve günstig. Dafür ist die Verformungsanfälligkeit bei höheren Temperaturen im Bereich über 25 °C für dieses Modell erhöht, was sich negativ auf das Gebrauchsverhalten auswirkt. Daher ist für diesen Temperaturbereich die grüne Modellkurve besser geeignet, da die bleibenden Verformungen bei hohen Temperaturen geringer ausfallen, als im Fall der roten Kurve.

Umgelegt auf die Parameter bedeutet dies, dass für das Tieftemperaturverhalten große k - und l -Werte, für das Hochtemperaturverhalten kleine Werte dieser Parameter günstig sind.

Zur Verwendung des Power-law-Modells seien hier noch einige grundsätzliche Angaben gemacht. Wie auf den Prüfberichten ersichtlich, ist die Übereinstimmung des Modells mit den Daten nur mäßig. Es liegt daran, dass auch hier die mittleren, relativen Abweichungen minimiert wurden. Tatsächlich wird in der Praxis dieses Modell jedoch häufig dazu eingesetzt, das Materialverhalten für einen gewissen Temperatur-Frequenzbereich abzudecken. So kann man etwa die Steigung der Kurve so wählen, dass sie die Messdaten im Anfangsbereich sehr gut approximiert und damit das Hochtemperaturverhalten abbildet. Genauso ist der umgekehrte Fall möglich, durch Parameterwahl das Tieftemperaturverhalten abzubilden. Eine Anpassung der Kurve an einen größeren Temperaturbereich ist jedoch nicht möglich. Daher wird in den folgenden Abhandlungen auch nicht

explizit auf das Power-law-Modell, sondern nur auf das Huet- und das Huet-Sayegh-Modell eingegangen.

III.4.1 Vergleich der Prüfverfahren

Im Projekt 0605I wurden an zwei belgischen Asphaltarten, wobei die Sieblinie einem in Österreich verwendeten AB11 entspricht, unterschiedliche Steifigkeitstest durchgeführt. Es kamen die direkte Zugprüfung (DT-CY), die direkte Druckprüfung (DC-CY), die direkte Zug-Druckprüfung (DTC-CY) und die Prüfung am 4-Punktbiegebalken (4PBB-PR) zum Einsatz.

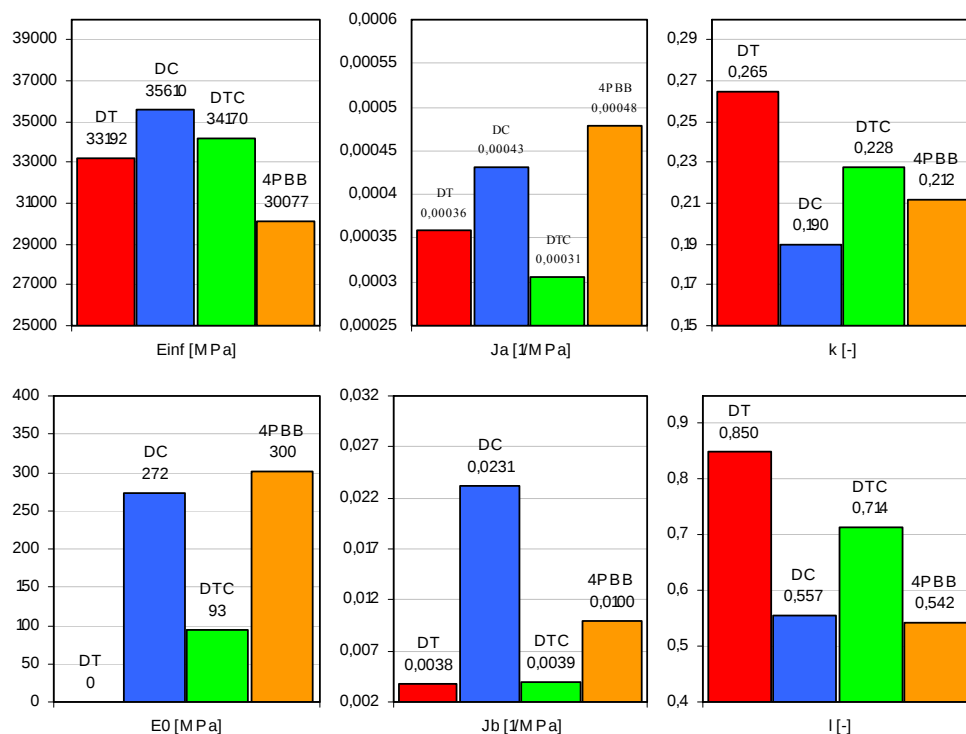


Abb. 45: Huet-Sayegh-Parameter für AB-4C M2 bei Auswertung unterschiedlicher Prüfmethoden

Die einzelnen Huet-Sayegh-Parameter für die unterschiedlichen Prüfverfahren sind in graphischer Form in Abb. 45 dargestellt; außerdem sind in Abb. 46 die Cole-Cole-Diagramme für die vier Prüfverfahren zu sehen. Wirft man einen genaueren Blick auf die E_{∞} -Werte, die gleichzeitig den Glasmodul bei tiefen Temperaturen und hohen Frequenzen repräsentieren, so ist eine Schwankungsbreite von 5534 MPa bzw. 18,4 % erkennbar. Den höchsten Wert, die größte Steifigkeit also erhält man aus dem direkten Druckversuch, das Minimum kann dem Analogon im Zugbereich, dem direkten Zugversuch zugeordnet werden, lässt man den 4-Punktbiegebalken außer Acht, dessen Ergebnisse nur indirekt mit den drei anderen vergleichbar sind. Für eine direkte Vergleichbarkeit sind zu große Unterschiede in der Geometrie und der Lage des Probekörpers in der Prüfmaschine, sowie in der Belastungsart vorhanden. Damit

zeigen die Ergebnisse das Verhalten des Asphalts bei unterschiedlichen Belastungsarten (Zug, Druck, Zug/Druck, Biegung) sehr gut.

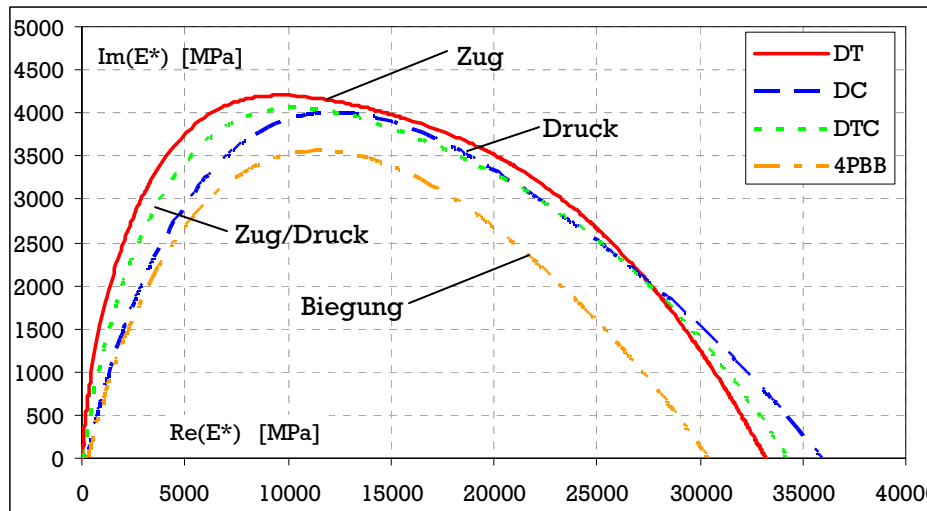


Abb. 46: Cole-Cole-Diagramme (Huet-Sayegh) für AB-4C M2 bei Auswertung unterschiedlicher Prüfmethoden

Auch im Fall der Koeffizienten der beiden parabolischen Dämpfer k und l zeigt sich der Unterschied der Versuchstypen in den Ergebnissen. Während das Cole-Cole-Diagramm beim direkten Zugversuch 0,265 und 0,850 für k und l aufweist, was dem jeweiligen Parametermaximum entspricht, liegt das Minimum beim direkten Druckversuch mit 0,190 bzw. 0,557. Im direkten Zugversuch reagieren Asphalte einerseits weicher, gleichzeitig sind die viskosen Verformungsanteile und damit die Verlustwinkel höher als im Druckbereich. Der auf Biegung beanspruchte Prüfkörper im 4-PBB-Versuch weist zwar ein noch weicherer Verhalten auf, die viskosen Anteile sind jedoch niedriger als bei allen anderen Versuchstypen. Da der Einfluss von J_a und J_b auf die Kurvenentwicklung nicht klar interpretierbar ist, seien diese Parameter in diesem Kapitel, in dem es um Ergebnisinterpretation geht auch nicht weiter behandelt.

Aus den Ergebnissen der unterschiedlichen Versuchstypen lässt sich klar erkennen, dass bei der Verwendung von Parametern für computerunterstützte Modellierungen Rücksicht auf die Versuchsart, die Datengrundlage der Parameteridentifizierung war, genommen werden muss. In Abstimmung mit den Randbedingungen der Modellierung – etwa ob Zug-, Druck oder Biegebeanspruchung simuliert werden soll – müssen auch die dazugehörigen Parameter des richtigen Versuchstypus verwendet werden.

III.4.2 Vergleich unterschiedlicher Bindemittel bei gleicher Sieblinie

Im Folgenden werden eine Trag- und eine Deckschicht mit jeweils gleicher Sieblinie, jedoch unterschiedlichem Bindemittel einem Vergleich unterzogen. Es können hier demnach Aussagen über den Einfluss von Bindemitteln auf

Modellparameter gewonnen werden. Alle Probekörper wurden mit dem direkten Zug-Druckversuch getestet.

a) *Bituminöse Tragschicht BT22*

Probekörper aus Tragschichtmaterial BT22 wurden einerseits mit einem Bitumen 50/70, andererseits als hochstandfeste Tragschicht mit polymermodifiziertem Bindemittel 50/90S hergestellt und Steifigkeitsversuche durchgeführt. Die Ergebnisse der daraus resultierenden Parameteridentifikation sind in Abb. 47 und Abb. 48 zu sehen.

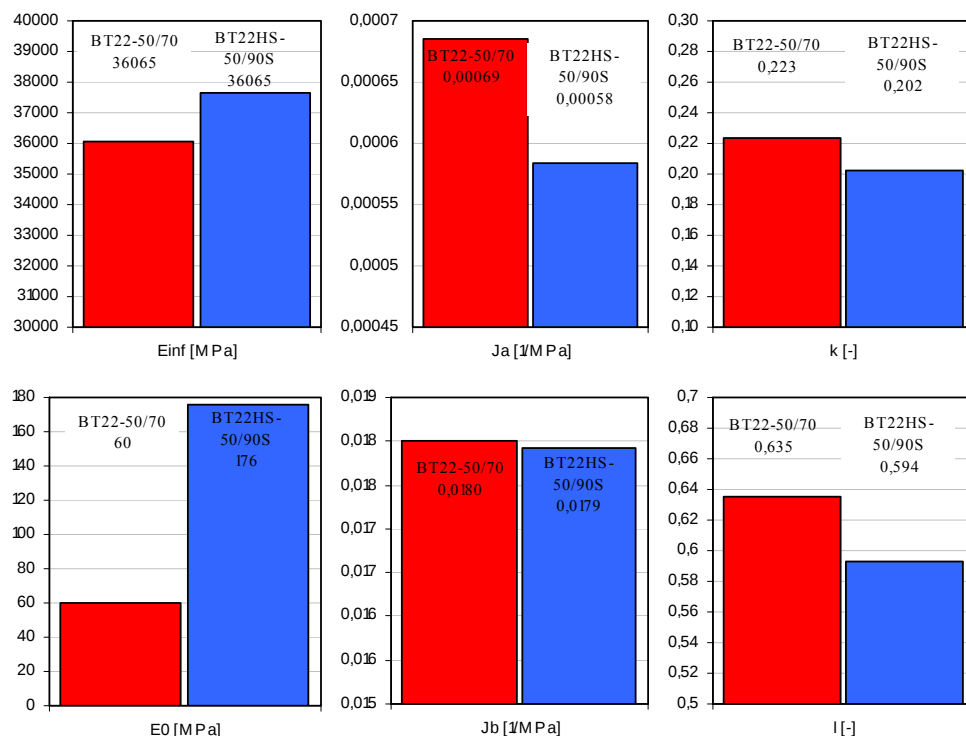


Abb. 47: Huet-Sayegh-Parameter für BT22-50/70 (rot) und BT22HS-50/90S (blau)

Beginnend wiederum mit dem komplexen E-Modul für hohe Frequenzen und tiefe Temperaturen E_∞ ist erkennbar, dass die hochstandfeste Tragschicht mit polymermodifiziertem Bindemittel erwartungs- und wunschgemäß höhere Steifigkeiten liefert. Das Ausgangsbitumen des polymermodifizierten Bindemittels ist weicher (70/100) als das hier im Vergleich verwendete (50/70); durch die Beimengung von Polymeren erhöht sich die Steifigkeit signifikant. Der Unterschied liegt bei 1584 MPa bzw. relativ gesehen bei 4,4 %. Außerdem weist die hochstandfeste Schicht größere E-Module auch im Bereich hoher Temperaturen und niedriger Frequenzen auf. Hier besitzt die Mischung mit konventionellem Bitumen einen E_0 -Wert von 60 MPa, beim modifizierten Bitumen erreicht man beinahe den 3-fachen Wert von 176 MPa.

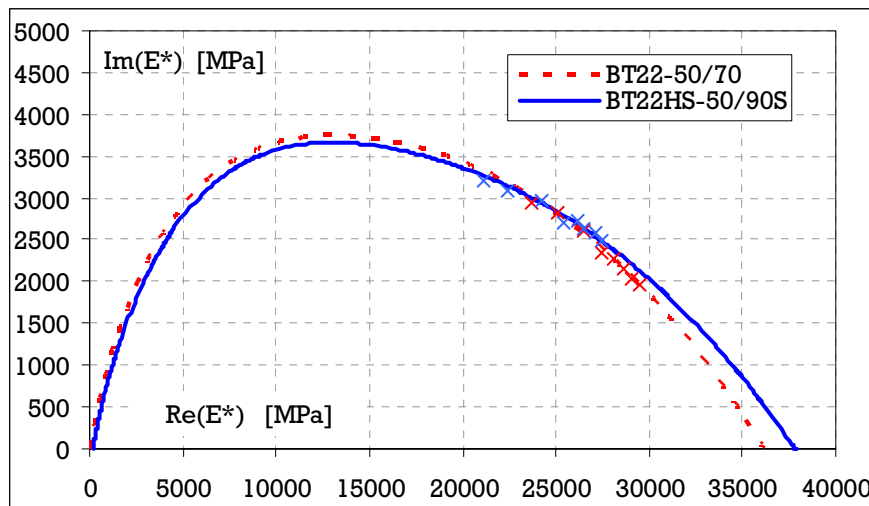


Abb. 48: Cole-Cole-Diagramm (Huet-Sayegh) für BT22-50/70 (rot) und BT22HS-50/90S (blau)

Ansonsten scheinen beide Materialien recht ähnliches Verhalten aufzuweisen. Auch im Tieftemperaturverhalten gibt es keine Unterschiede, die bei alleiniger Betrachtung des Cole-Cole-Diagramms auffallen. Aus diesem Grund sind in Abb. 48 auch die Versuchsergebnisse aus den Steifigkeitstests bei -10 °C eingetragen. Die Datenpunkte sind als Kreuze in der Farbe des jeweiligen Materials dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass beim modifizierten Bindemittel bei gleicher Temperatur die Materialsteifigkeit niedriger ist, als bei konventionellem Bitumen. Erst mit dieser zusätzlichen Information ist eine seriöse Aussage möglich, nämlich, dass die hochstandfeste Tragschicht ein günstigeres Tieftemperaturverhalten besitzt, als die konventionelle, da bei erstgenannter einerseits geringere Steifigkeiten, andererseits höhere viskose Anteile zur Aufnahme von Temperaturspannungen vorhanden sind.

Aus dieser Erkenntnis folgt, dass nur durch einen zusätzlichen Faktor, der die Temperaturabhängigkeit des Materialverhaltens berücksichtigt, sinnvolle Aussagen und Einsatz der Parameter möglich sind. Dieser Temperaturparameter τ kann durch weiter oben in der Arbeit erwähnte TTSP ermittelt werden.

b) Bituminöse Deckschicht SMA11

Auch an einer typischen Deckschicht – dem SMA11 – wurden vergleichende Steifigkeitsversuche durchgeführt. Dabei kamen jedoch keine in Österreich verwendeten Bitumen zum Einsatz, sondern Produkte, die in Slowenien verwendet werden.

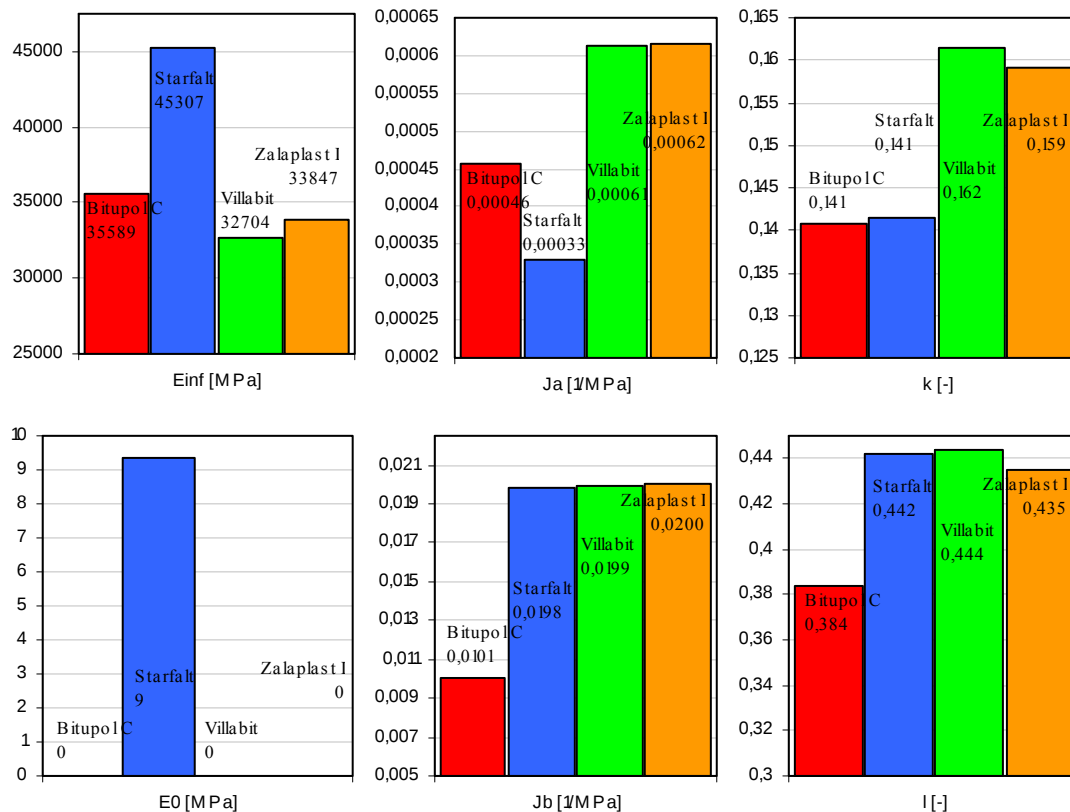


Abb. 49: Huet-Sayegh-Parameter für SMA11-Bitupol C, -Starfalt, -Villabit und -Zaloplast

Abb. 49 und Abb. 50 zeigen wiederum einerseits die Huet-Sayegh-Parameter für die verschiedenen Materialien, andererseits die Cole-Cole-Diagramme, ebenfalls für das Huet-Sayegh'sche Modell.

Auffallend ist zunächst die Endsteifigkeit bei Einsatz von Starfalt; ein Wert von über 45000 MPa lässt auf eine große Steifigkeit schließen und liegt etwa 30 % über dem Durchschnitt der anderen drei Bindemittel. Aufgrund der ähnlichen Steigungswerte k und l von Starfalt in Vergleich zu den anderen Materialien, steigen jedoch auch die viskosen Anteile bei diesem Bindemittel auf ein Maximum. Der Grund für das Fehlen der Anfangssteifigkeiten E_0 liegt darin, dass zur Festlegung dieses Parameters Steifigkeitsversuche bei noch höheren Temperaturen als im Versuchsprogramm vorgesehen, notwendig gewesen wären. Daher liegen keine Datenpunkte im entsprechenden Bereich des Black-Diagramms zur Bestimmung von E_0 vor.

Ansonsten lassen sich zwischen den drei Bindemitteln Bitupol C, Villabit und Zaloplast I keine wesentlichen Unterschiede feststellen, was sich auch in der Ähnlichkeit der Kurven im Cole-Cole-Diagramm zeigt.

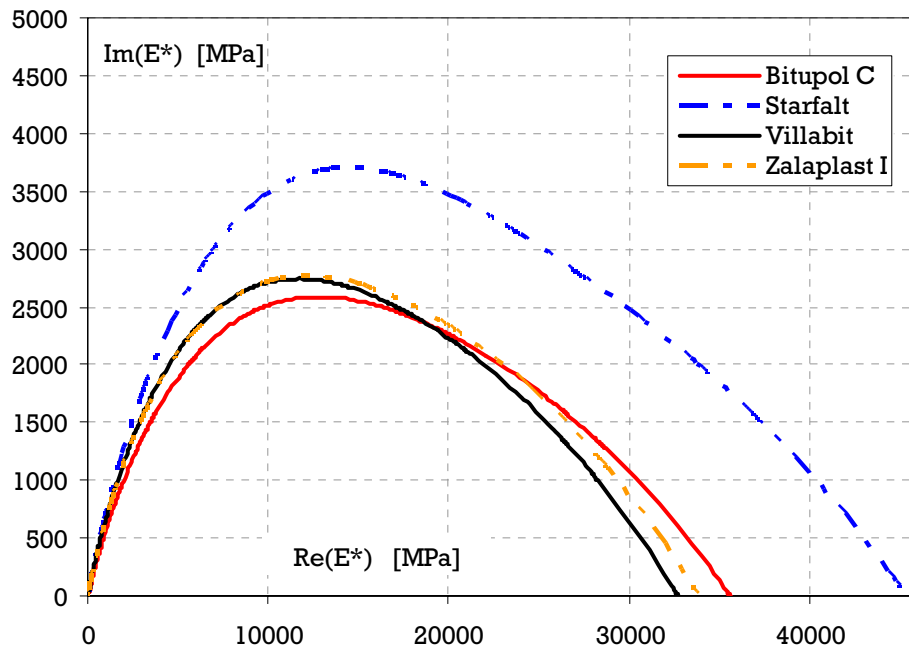


Abb. 50: Cole-Cole-Diagramm (Huet-Sayegh) für SMA11-Bitupol C, -Starfalt, -Villabit und -Zalaplast I

IV. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat sich zunächst sehr intensiv mit der Theorie von rheologischen Modellen auseinander gesetzt, um den Leser Schritt für Schritt von den Basismodellen (Maxwell, Kelvin-Voigt) über komplexere Systeme mit mehr als zwei zeitlinearen Elementen (Burgers) bis hin zu den Modellen, die auch parabolische Dämpfer besitzen, zu leiten und die mathematischen Grundlagen, die zum Verständnis notwendig sind, darzulegen. Gleichzeitig wurde das statische und zyklisch-dynamische Verhalten der Systeme – sofern analytisch herleitbar – auf graphische Weise anschaulich gemacht und der Einfluss wichtiger Modellparameter bestimmt.

Obwohl der Fokus der Arbeit auf der Modellierung von Asphaltmischungen lag, wurde der theoretische Teil dennoch sehr allgemein gehalten, da nur so ausgehend vom in der Arbeit abgebildeten Wissen ein Herleiten beliebiger Modelle möglich ist. Zur noch umfassenderen Auseinandersetzung mit der zugrunde liegenden Theorie sei der Leser vor allem auf [Mang/Hofstetter (2000)] im Bereich der Grundlagen der Festigkeitslehre, [Gross (1953)] und [Findley, Lai, Onaran (1989)] zu rheologischen Modellen, [Huet (1963)] zu seinem von ihm entwickelten Modell und [Sayegh (1965)], wenn es um die Erweiterung auf das Huet-Sayegh'sche System geht, verwiesen.

Außerdem konnte gezeigt werden, dass eine Verfeinerung von rheologischen Modellen, die die Systeme meist komplexer macht und mehr Parameter zur Bestimmung fordert, die Grenze des Notwendigen leicht überschreitet. Kann man das Argument Sayeghs zur Erweiterung des Huet'schen Modells noch verstehen – er erreicht durch Implementierung eines zweiten Astes mit einer linear elastischen Feder eine bessere Beschreibbarkeit des Materialverhaltens im Hochtemperaturbereich – so ist die Erweiterung von H. Di Benedetto, die im Überblick in dieser Arbeit vorgestellt und im Detail in [Olard, Di Benedetto (2003)] beschrieben wird, zumindest hinterfragenswert. Eine Abwägung zwischen verbesserter Approximation an das mechanische Verhalten und Parameterhäufung, die zu immer weiter ansteigendem Aufwand bei deren Identifikation, sowie zu physikalisch schwerer interpretierbaren Parametern führt, scheint notwendig. Umso mehr, als der Gewinn an Genauigkeit in Vergleich zu oben genannten Nachteilen als marginal zu bezeichnen ist.

Insofern – und dies spiegelt die persönliche Meinung des Verfassers wider – sollte, wo immer möglich, zunächst versucht werden mit einfachen Modellen das Verhalten anzunähern. Erst wenn das Power-Law-Modell sichtlich versagt, sollte der Schritt zu Huet getan werden, und erst wenn dieses System nicht mehr ausreichend genau beschreibt, die Sayegh'sche Erweiterung bemüht werden.

Grundsätzlich kann diese Arbeit, wie fast jede wissenschaftliche Publikation, als Zwischenbericht gesehen werden. Ausgehend von hier wird in nächster Zukunft

vor allem die Einarbeitung der Zeit-Temperatursuperposition (TTSP) in die Auswertung von Steifigkeitsversuchen vorangetrieben werden, da – wie schon im Kapitel zur Ergebnisinterpretation angemerkt – nur so ein sinnvoller Einsatz der Parameter zur weiteren Verwendung möglich ist, und auch nur so der Vergleich von unterschiedlichen Materialien seriös durchführbar scheint.

Zudem war die Datenbasis bei Fertigstellung der Arbeit im CD-Labor des Instituts für Straßenbau und -erhaltung der TU-Wien noch relativ bescheiden. In den kommenden Monaten werden systematisch Steifigkeitsversuche an verschiedenen Asphaltarten mit unterschiedlichen Bindemitteln und Gesteinsarten durchgeführt werden. Damit stehen einem umfassenderen Vergleich der Materialien aufgrund von Parameteridentifikation Tür und Tor offen.

In Verbindung damit steht naturgemäß der nächste Schritt. Ein Grund für die Bestimmung von Modellparametern liegt darin, dass damit FE-Simulationen durchgeführt werden können. Auch diese computerunterstützte Methode der Materialwissenschaft wird Inhalt zukünftiger Forschungsarbeit sein.

V. Literaturverzeichnis

- A [Mang/Hofstetter (2000)]** H. Mang, G. Hofstetter: *Festigkeitslehre*, Springer-Verlag, Wien, 2000.
- B [Bartsch (2001)]** H.-J. Bartsch: *Taschenbuch mathematischer Formeln*, Carl Hanser Verlag, München, 2001
- C [Gross (1953)]** B. Gross: *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*, Hermann & Co., Paris, 1953
- D [Blab et al. (2006)]** R. Blab, K. Kappl, R. Lackner, L. Aigner: *SAMARIS – Permanent Deformation of bituminous bound Materials in flexible Pavements*, SAM-05-D28, Competitive and Sustainable Growth (GROWTH) Programme (EU Commission), 2006
- E [Olard, Di Benedetto (2003)]** F. Olard, H. Di Benedetto: *General „2S2P1D“ Model and Relation between the linear viscoelastic Behaviours of bituminous Binders and Mixes*, Road Materials & Pavement Design. Volume 4 – No. 2/2003, 2003
- F [Findley, Lai, Onaran (1989)]** W. N. Findley, J. S. Lai, K. Onaran: *Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic Materials*, Dover Publications Inc., New York, 1989
- G [Schramm (1994)]** G. Schramm: *A practical Approach to Rheology and Rheometry*, Gebrüder Haake GmbH, Karlsruhe, 1994
- H [Flügge (1967)]** W. Flügge: *Viscoelasticity*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, 1967
- I [Doraiswamy (2002)]** D. Doraiswamy: *The Origins of Rheology: A short historical Excursion*, DuPont iTechnologies, Wilmington, 2000
- J [Heck et al. (1998)]** J. V. Heck, J. M. Piau, J. C. Gramsamer, J. P. Kerzreho, H. Odeon: *Thermo-visco-elastic Modelling of Pavements behaviour and Comparison with experimental Data form LCPC Test Track*, 5th International Conference on the Bearing Capacity of Roads and Airfields, Trondheim, 1998
- K [Neifar, Di Benedetto (2001)]** M. Neifar, H. Di Benedetto: *Thermo-viscoplastic Law for bituminous Mixes*, Road Materials & Pavement Design. Volume 2 – No. 1/2001, 2001
- L [Olard et al. (2003)]** F. Olard, H. Di Benedetto, B. Eckmann, J.-P. Triquigneaux: *Linear viscoelastic Properties of bituminous Binders and Mixtures at low and intermediate Temperatures*, Road Materials & Pavement Design. Volume 4 – No. 1/2003, 2003
- M [Meinhard (1999)]** H. Meinhard: *Rheologische Untersuchungen zu Härteeindruckexperimenten im Nanometerbereich*, Dissertation an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenburg, Halle/Saale, 1999
- N [Francken (1995)]** L. Francken: *Die Rheologie von Bitumen und bitumenhaltigen Bindemitteln*, Bitumen 4/95, 1995
- O [Pronk (2005)]** A. C. Pronk: *The Huet-Sayegh Model; a simple and excellent rheological Model for Master Curves of asphaltic Mixes*, Asphalt Concrete: Simulation, Modelling and experimental Characterization, Baton Rouge, 2005
- P [Olard (2003)]** F. Olard: *Comportement thermomécanique des enrobés*

- bitumineux à basses températures*, Dissertation am Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, 2003
- Q [Nowacki (1965)]** W. Nowacki : *Theorie des Kriechens, lineare Viskoelastizität*, Franz Deuticke Verlag, Wien, 1965
- R [Huet (1963)]** C. Huet: *Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés*, Dissertation an der Faculté des Sciences de l'université de Paris, Paris, 1963
- S [Sayegh (1965)]** G. Sayegh: *Variation des modules de quelques bitumes purs et bétons bitumineux*, Dissertation an der Faculté des Sciences de l'université de Paris, Paris, 1965
- T [ON EN 12967-26 (2004)]** Österreichisches Normungsinstitut: *ÖNORM EN 12697-26, Asphalt – Prüfverfahren für Heiasphalt, Teil 26 : Steifigkeit*, Österreichisches Normungsinstitut, Wien, 2004
- U [AA 002 (2005)]** CD-Labor, ISTU, TU-Wien: *Arbeitsanweisung für das Ankleben von Klemmen*, Labor des Instituts für Straßenbau und Straßenerhaltung, Wien, 2005
- V [AA 003 (2005)]** CD-Labor, ISTU, TU-Wien: *Arbeitsanweisung zu Steifigkeits- und Ermüdungsversuchen am Vier-Punkt-Biegebalken (4PBB)*, Labor des Instituts für Straßenbau und Straßenerhaltung, Wien, 2005

Appendix A: Mathematische Grundlagen

Lösung einer inhomogenen linearen DG mittels Variation der Konstanten

Die allgemeine Form einer inhomogenen linearen DG 1. Ordnung lautet

$$y' + p(x)y = s(x) \quad 0.1$$

wobei $s(x)$ als Störfunktion bezeichnet wird. Die Lösung einer solchen DG lässt sich allgemein als

$$y = y_h + y_p \quad 0.2$$

formulieren. Hier stellt y_h die allgemeine Lösung der homogenen DG dar und y_p die partikuläre Lösung der inhomogenen DG. Zum Auffinden dieser Lösungen sind mehrere Wege entwickelt worden, die hier dargestellt wird als „Lösungsweg mittels Integration durch Variation der Konstanten“ bezeichnet.

Dabei wird zunächst die homogene DG gelöst und damit die allgemeine Lösung y_h erhalten. Diese erreicht man etwa durch Trennung der Variablen mit anschließender Integration. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung benötigt man zunächst folgenden Ansatz:

$$y = z(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad 0.3$$

Durch Ableitung von 0.3 ergibt sich

$$y' = z'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + z(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) \quad 0.4$$

Durch Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die Ausgangsgleichung 0.1, Formulierung nach z' (vorhandene z -Terme fallen stets weg) und Integration erhält man eine Gleichung $z(x)$, die wiederum in 0.3 eingesetzt werden kann. Damit ist $y(x)$ bis auf einen unbekannten Koeffizienten C bestimmt. C kann durch Formulieren einer Anfangs- oder Randbedingung eruiert werden.

Für den Sonderfall, dass es sich um eine inhomogene lineare DG 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y' - \lambda \cdot y = s(x) \quad 0.5$$

handelt, in der also $\lambda = -p(x)$ ist, lautet die allgemeine Lösung y_h

$$y_h = C \cdot e^{\lambda x} \quad 0.6$$

[Bartsch (2001)]

Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation, benannt nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827) und deren Inversion sind effiziente Verfahren zur Lösung von DGen. Allgemein formuliert bildet die Laplace-Transformation eine reellwertige Originalfunktion auf eine komplexwertige Bildfunktion ab. Die Tatsache, dass Differentiation und Integration im reellen Originalbereich einfachen algebraischen Operationen im Bildbereich entsprechen, die Algebraisierung also, ist Grundlage folgender Vorteile:

- gewöhnliche DG im Originalbereich entsprechen algebraischen Gleichungen im Bildbereich
- partielle Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variablen im Originalbereich entsprechen partiellen (bzw. gewöhnlichen) DG mit $(n-1)$ unabhängigen Variablen im Bildbereich
- DG-Systeme im Originalbereich entsprechen algebraischen Gleichungssystemen im Bildbereich

Das Anwendungsschema der Laplace-Transformation stellt sich wie in folgendem Bild dar:

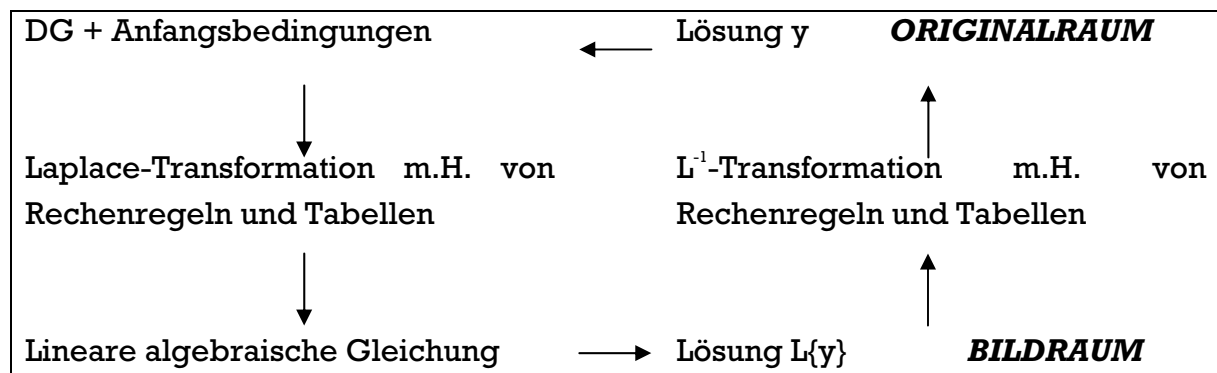


Abb. 51: Schema zur Anwendung der Laplace-Transformation

Die formale Definition für die Laplace-Transformation gestaltet sich wie folgt:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad 0.7$$

wobei s aus dem komplexen Zahlenraum entstammt. Die Funktion $F(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$. Diese Operation ist auch umkehrbar, d.h. aus der Laplace-Transformierten lässt sich die Funktion $f(t)$ bestimmen.

Für die Existenz von $F(s)$ gibt es zwei wichtige Kriterien:

- $f(t)$ muss stückweise stetig sein
- $|f(t)| \leq Me^{at}$ für zwei Konstanten M und a

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so existiert für alle $s > a$ die Funktion $F(s)$. Nähere Ausführungen dazu und zu den folgenden Erläuterungen bezüglich der Laplace-Transformation würden in diesem Rahmen zu weit führen. Für eine

intensivere Auseinandersetzung mit der Materie ist ein beliebiges Kompendium der Mathematik wie etwa [Bartsch (2001)] empfehlenswert.

Die Laplace-Transformation unterliegt einigen wichtigen Eigenschaften, die hier nur der Vollständigkeit halber aufgelistet sind. Unter anderem gelten für die beschriebene Methode die Linearität, der Additionssatz und die Superposition. Zudem existieren ein Dämpfungssatz, ein Ähnlichkeits- und Differentiationssatz, sowie zahlreiche weitere Eigenschaften.

Zwei wichtige Charakteristika, die mit Hilfe von Grenzwertsätzen ausgedrückt werden, seien hier noch angeführt, da sie im Verlauf der Arbeit Anwendung finden. Es gilt folgendes:

- $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{f}(s)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{f}(s)$

Da die Laplace-Transformation zwei Funktionsräume aufeinander abbildet, existieren für die Übersetzung zwischen den beiden Räumen so genannten Korrespondenztabelle – siehe dazu Tabelle 9.

#	Originalfunktion f(t)	Bildfunktion F(s)
1	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
2	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	a	$\frac{a}{s}$
5	t	$\frac{1}{s^2}$
6	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
7	$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
8	$\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi$	$\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
9	$t^k \text{ für } k > -1$	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$ ⁴

Tabelle 9: Korrespondenztabelle zur Laplace-Transformation

[Bartsch (2001)]

⁴ Mit $\Gamma(x)$ wird die Gammafunktion beschrieben. Sie versteht sich als erweiterte Fakultätsfunktion ($n!$) auf die positiven reellen Zahlen. Sie ist definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Appendix B: Prüfberichte – Parameteridentifikation



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	22.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22_50_70_H_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060822

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	BT22-50/70-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2470,4	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -10,0		T [°C] = 0,0			T [°C] = 10,5		T [°C] = 20,1	
E*	ϕ	E*	ϕ	f	E*	ϕ	E*	ϕ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
19418	10,0	10293	19,5	0,1	3565	35,3	786	45,3
23906	7,1	15598	13,9	1,0	7463	25,3	2317	41,6
25202	6,4	17060	12,5	2,0	8861	22,7	3115	38,8
26662	5,6	19062	10,6	5,0	10898	19,6	4457	34,5
27559	4,9	20532	9,5	10,0	12353	17,3	5659	30,8
28239	4,6	21111	9,1	15,0	13430	16,1	6438	28,9
28678	4,3	21601	8,8	20,0	14006	15,4	6969	27,8
29151	4,0	22239	8,5	30,0	14811	14,8	7763	25,9
29557	3,8	22644	8,3	40,0	15208	14,1	8292	25,3

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	60
E [MPa]	32273	E [MPa]	36072	E _{inf} [MPa]	36065
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000676	J _a [1/MPa]	0,000685
k [-]	0,368	k [-]	0,222	k [-]	0,223
		J _b [1/MPa]	0,0178	J _b [1/MPa]	0,0180
		l [-]	0,633	l [-]	0,635



Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

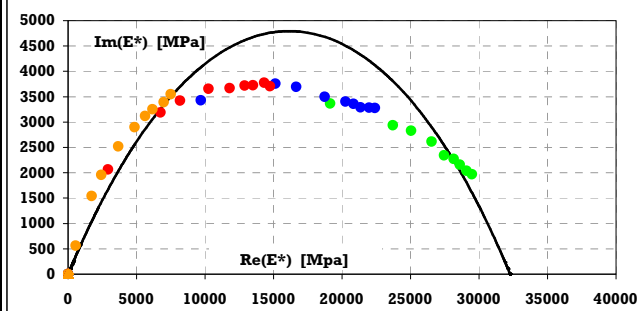
Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	22.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22_50_70_H_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060822

Maschinen- & Probedaten

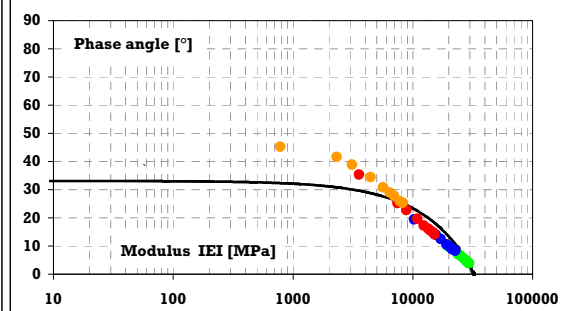
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	BT22-50/70-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2470,4	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

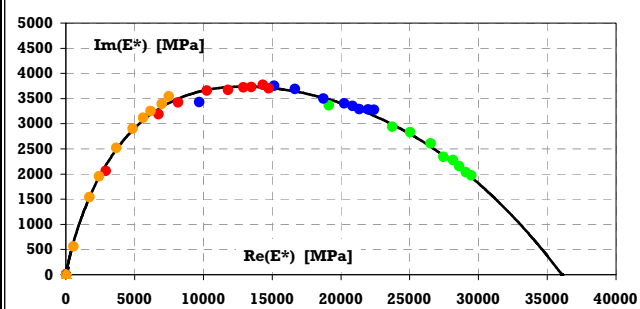
Power-law: Cole-Cole



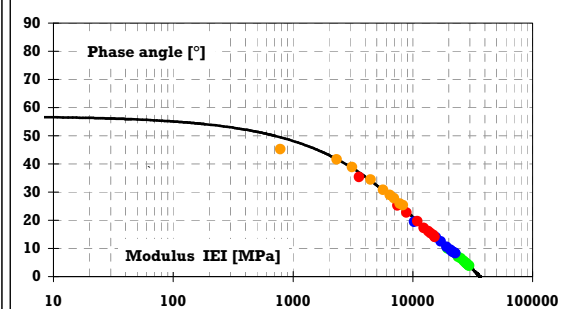
Power-law: Black



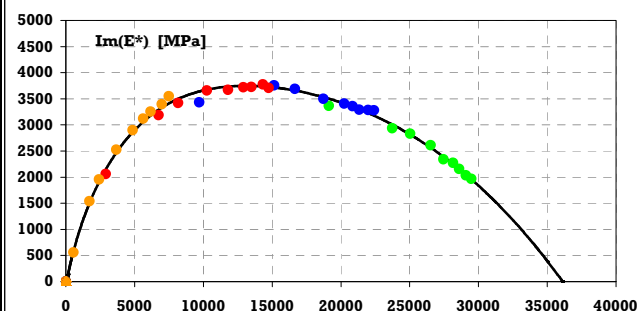
Huet: Cole-Cole



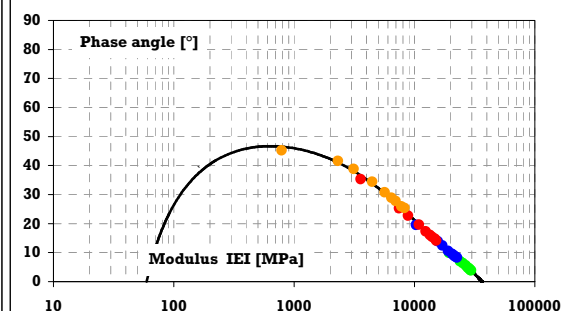
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	22.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22HS 50 90S H DTC CY STFGes_DF_PI_060822

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	BT22HS-50/90S-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2480,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -10,3		T [°C] = -0,4			T [°C] = 10,4		T [°C] = 20,3	
E*	ϕ	E*	ϕ	f	E*	ϕ	E*	ϕ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
16664	11,6	8389	20,3	0,1	2853	32,3	813	37,9
21329	8,7	12833	15,6	1,0	5653	27,5	1909	37,2
22653	7,9	14319	14,3	2,0	6796	25,8	2465	36,3
24405	7,0	16243	12,8	5,0	8507	23,2	3428	34,4
25515	6,1	17603	11,6	10,0	9838	21,4	4341	32,8
26349	6,0	18613	10,9	15,0	10805	20,1	4954	31,5
26662	5,7	19130	10,5	20,0	11427	19,4	5382	30,5
27241	5,4	19932	10,0	30,0	12227	18,3	6055	29,4
27526	5,2	20446	9,9	40,0	12739	17,8	6485	28,5

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	176
E [MPa]	31372	E [MPa]	38173	E _{inf} [MPa]	37649
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000590	J _a [1/MPa]	0,000584
k [-]	0,361	k [-]	0,198	k [-]	0,202
		J _b [1/MPa]	0,0182	J _b [1/MPa]	0,0179
		l [-]	0,566	l [-]	0,594



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

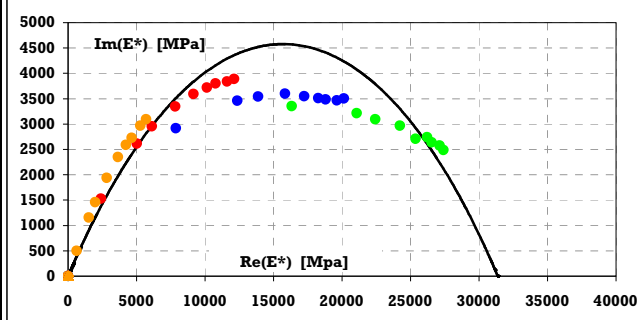
Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	22.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22HS 50 90S H DTC CY STFGes_DF_PI_060822

Maschinen- & Probedaten

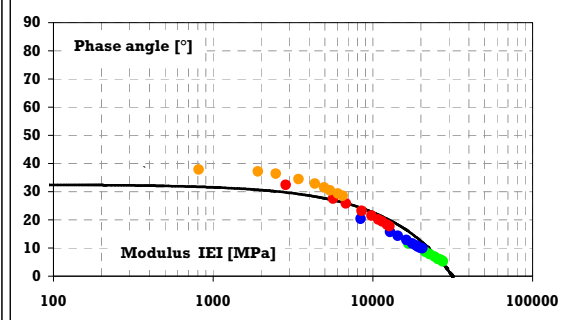
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	BT22HS-50/90S-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2480,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

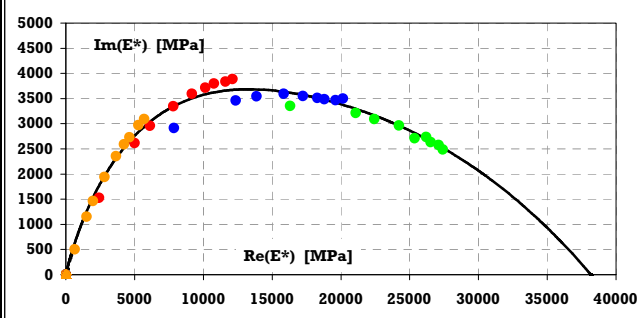
Power-law: Cole-Cole



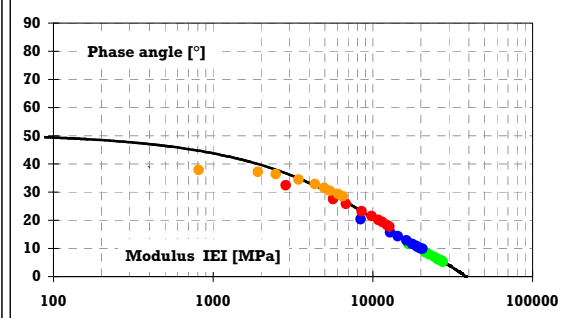
Power-law: Black



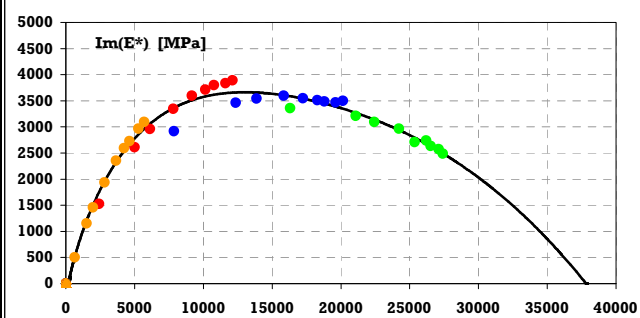
Huet: Cole-Cole



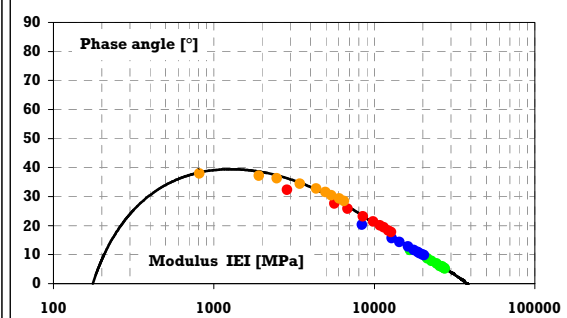
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	10.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22_50_70_H_4PBB_STFGes_DF_PI_060810.xls

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	BT22-50/70-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2501,7	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -10,3		T [°C] = 0,0			T [°C] = 10,4		T [°C] = 20,0	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
18750	9,3	10413	18,9	0,1	3661	32,4	1299	33,6
22673	6,4	15240	12,8	1,0	7445	24,6	3032	34,2
23683	5,7	16638	11,3	2,0	8834	22,0	3894	32,8
24903	4,9	18415	9,7	5,0	10765	18,8	5313	29,9
25444	4,5	19263	8,9	8,0	11753	17,4	6132	28,2
25687	4,3	19652	8,6	10,0	12184	16,7	6529	27,3
26020	4,0	20260	8,0	15,0	12987	15,6	7260	25,9
26115	3,8	20575	7,7	20,0	13452	15,0	7731	25,1
26354	3,8	20989	7,4	30,0	14119	14,2	8502	24,3
26507	3,5	21282	7,0	40,0	14414	13,8	8809	23,3

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	111
E [MPa]	29610	E [MPa]	33989	E _{inf} [MPa]	33754
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000463	J _a [1/MPa]	0,000463
k [-]	0,338	k [-]	0,181	k [-]	0,183
		J _b [1/MPa]	0,0205	J _b [1/MPa]	0,0205
		l [-]	0,525	l [-]	0,528



Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

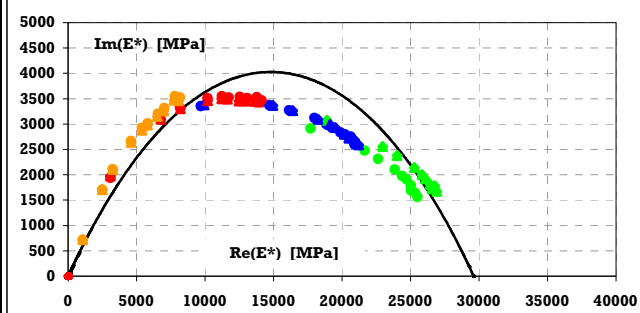
Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	10.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22_50_70_H_STFGes_DF_PI_060810.xls

Maschinen- & Probedaten

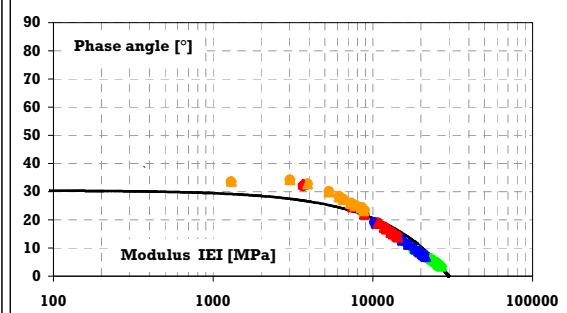
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26		
Mischgutsorte:	BT22-50/70-H		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2501,7	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

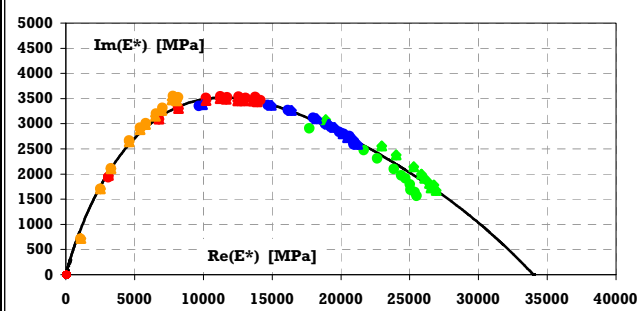
Power-law: Cole-Cole



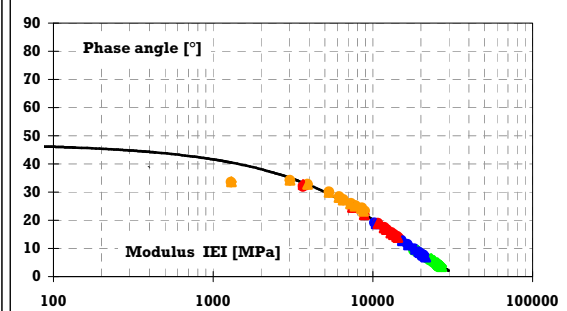
Power-law: Black



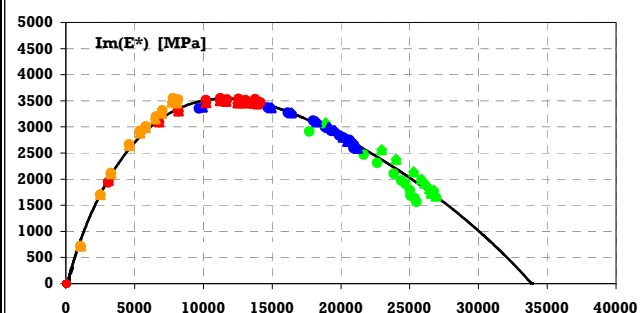
Huet: Cole-Cole



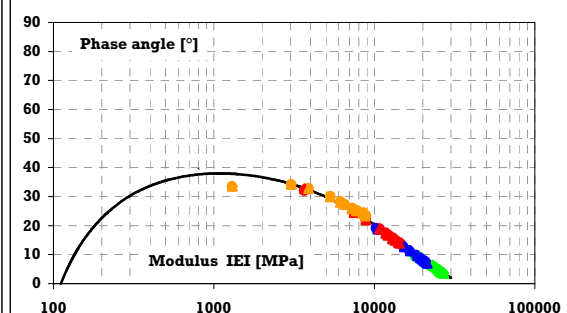
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	10.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22HS 50 90S H 4PBB STFGes DF PI 060810.xls

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	BT22HS-50/90S		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2503,2	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -10,1		T [°C] = 0,1			T [°C] = 10,4		T [°C] = 20,1	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
13808	12,6	6787	21,1	0,1	2253	29,9	1159	26,1
17891	9,4	10568	17,0	1,0	4339	27,6	2071	28,8
19087	8,6	11856	15,7	2,0	5228	26,2	2509	29,1
20603	7,6	13645	14,0	5,0	6608	24,0	3269	29,0
21337	7,1	14560	13,1	8,0	7374	22,7	3735	28,7
21666	6,8	14971	12,7	10,0	7765	22,0	3966	28,5
22176	6,4	15710	12,0	15,0	8416	21,0	4426	28,1
22432	6,1	16145	11,6	20,0	8861	20,4	4741	28,0
22931	5,8	16874	10,9	30,0	9627	19,2	5365	26,9
23345	5,4	17217	10,4	40,0	9847	19,4	5629	26,5

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	100
E [MPa]	27624	E [MPa]	32551	E _{inf} [MPa]	32549
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000577	J _a [1/MPa]	0,000577
k [-]	0,336	k [-]	0,180	k [-]	0,180
		J _b [1/MPa]	0,0179	J _b [1/MPa]	0,0178
		l [-]	0,433	l [-]	0,433



Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

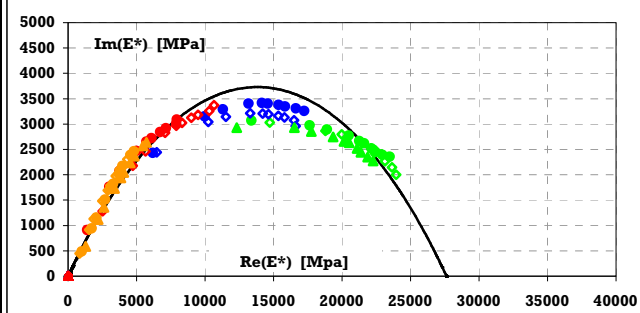
Auftraggeber	CD-Labor - Ind. Partner
Datum	10.08.2006
Projekt	0521I_CDLabGVO
Projektleiter	Wistuba, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0521I_BT22HS 50 90S H 4PBB STFGes DF PI 060810.xls

Maschinen- & Probedaten

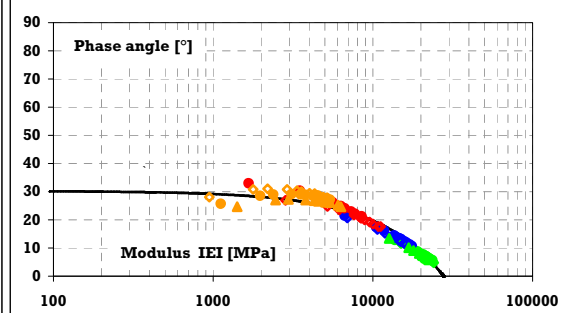
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	BT22HS-50/90S		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2503,2	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

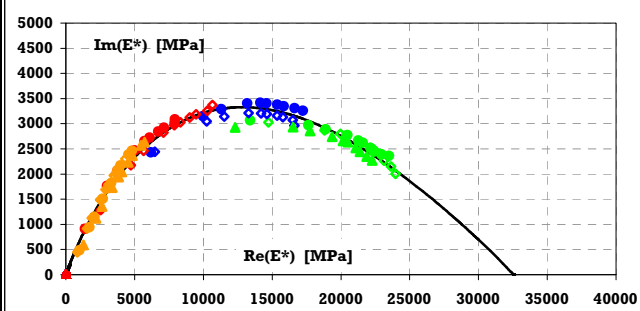
Power-law: Cole-Cole



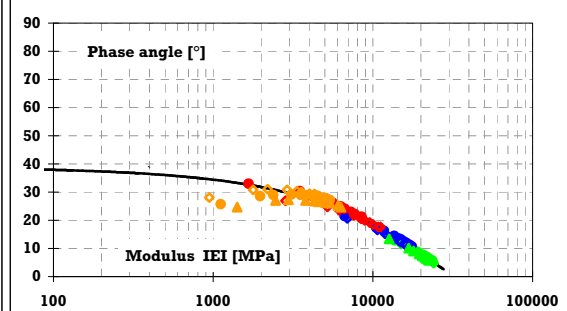
Power-law: Black



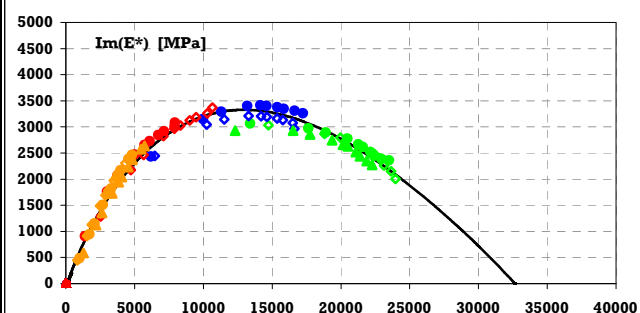
Huet: Cole-Cole



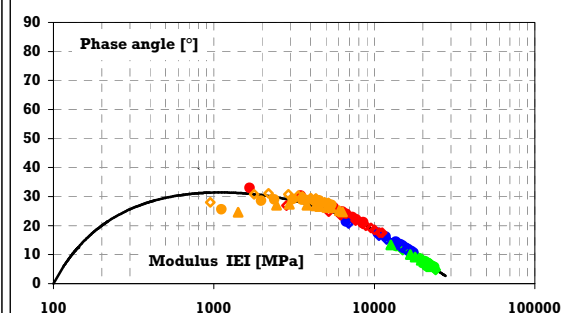
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Vialit
Datum	11.08.2006
Projekt	0615E_Mikrobelag_Vialit
Projektleiter	Hauser, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0615E_BT32HS_30_50_KH_4PBB_STFGes_DF_PI_060811

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	BT32-30/50-KH		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2410,7	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -9,8		T [°C] = -0,1			T [°C] = 10,3		T [°C] = 20,0	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
17215	6,9	12258	11,6	0,1	6584	18,4	2976	24,8
19846	5,3	15524	8,9	1,0	9768	14,6	5041	21,6
20571	4,9	16481	8,2	2,0	10800	13,5	5825	20,5
21468	4,4	17723	7,4	5,0	12178	12,3	6982	18,9
21864	4,0	18340	7,0	8,0	12865	11,6	7599	18,0
22068	3,9	18608	6,7	10,0	13177	11,2	7895	17,6
22386	3,7	19048	6,5	15,0	13724	10,9	8428	16,9
22479	3,6	19303	6,3	20,0	14068	10,6	8767	16,6
22714	3,7	19817	6,0	30,0	14715	10,2	9414	16,0
22831	3,6	19871	5,9	40,0	14866	10,0	9593	15,6

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	10
E [MPa]	26209	E [MPa]	29013	E _{inf} [MPa]	28919
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000554	J _a [1/MPa]	0,000553
k [-]	0,257	k [-]	0,156	k [-]	0,156
		J _b [1/MPa]	0,0170	J _b [1/MPa]	0,0170
		l [-]	0,389	l [-]	0,391



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

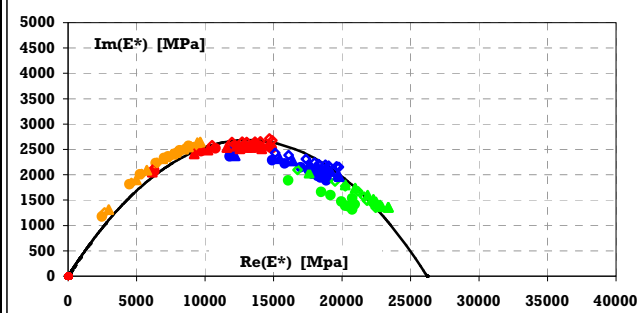
Auftraggeber	Vialit
Datum	11.08.2006
Projekt	0615E_Mikrobelag_Vialit
Projektleiter	Hauser, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0615E_BT32HS_30_50_KH_4PBB_STFGes_DF_PI_060811

Maschinen- & Probedaten

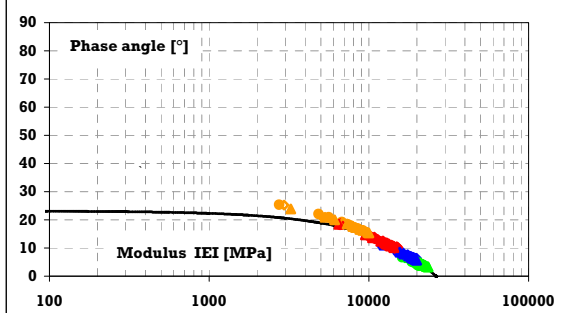
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	BT32-30/50-KH		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2410,7	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

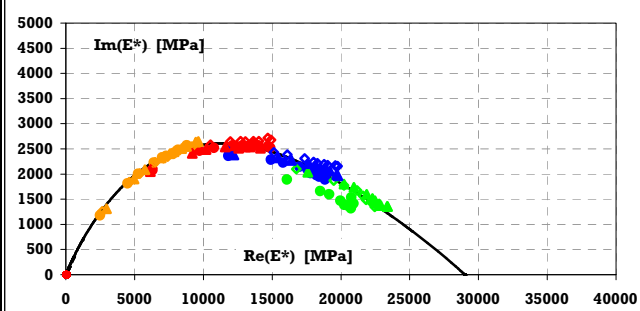
Power-law: Cole-Cole



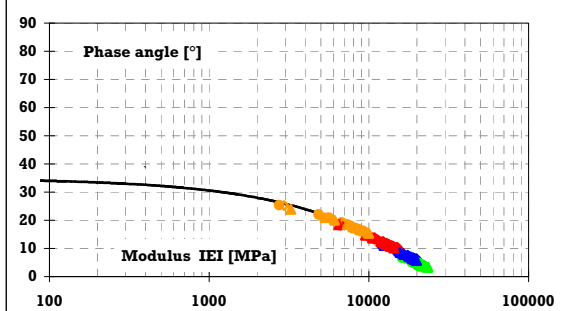
Power-law: Black



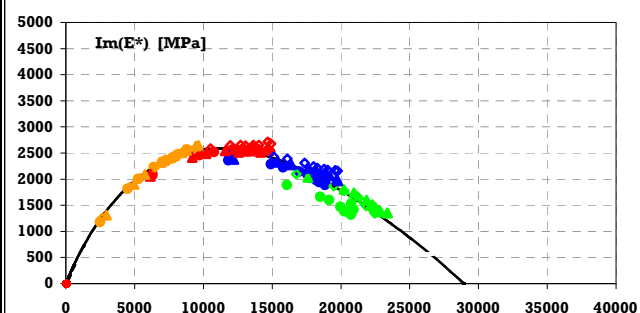
Huet: Cole-Cole



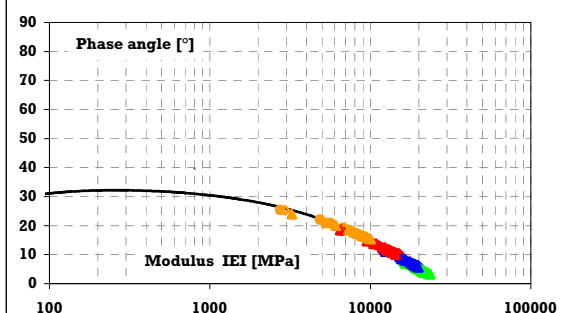
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Vialit
Datum	11.08.2006
Projekt	0615E_Mikrobelag_Vialit
Projektleiter	Hauser, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0615E_pmAB11_50_90S_LD_4PBB_STFGes_DF_PI_060811

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	pmAB11-50/90S-LD		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	3083,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -9,7		T [°C] = -0,4			T [°C] = 10,0		T [°C] = 20,3	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
14905	12,9	6999	21,0	0,1	3017	24,1	1216	23,2
19621	9,9	11116	17,5	1,0	5285	24,0	2128	27,2
21033	9,1	12559	16,3	2,0	6260	23,3	2578	28,0
22855	8,1	14577	14,6	5,0	7775	22,0	3343	28,5
23740	7,6	15624	13,8	8,0	8633	21,2	3843	28,3
24155	7,4	16110	13,4	10,0	9056	20,7	4085	28,2
24824	7,0	16988	12,7	15,0	9825	20,0	4566	28,0
25215	6,8	17553	12,3	20,0	10336	19,6	4897	28,2
25845	6,6	18463	11,6	30,0	11239	18,4	5579	27,5
25963	6,4	18800	11,4	40,0	11631	18,1	5859	27,1

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	104
E [MPa]	32441	E [MPa]	43138	E _{inf} [MPa]	42866
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000329	J _a [1/MPa]	0,000327
k [-]	0,316	k [-]	0,129	k [-]	0,130
		J _b [1/MPa]	0,0404	J _b [1/MPa]	0,0402
		l [-]	0,386	l [-]	0,402

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

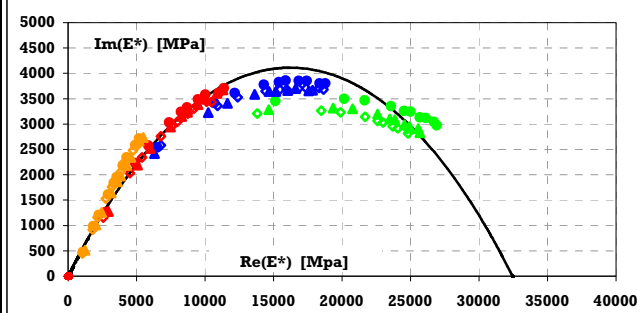
Auftraggeber	Vialit
Datum	11.08.2006
Projekt	0615E_Mikrobelag_Vialit
Projektleiter	Hauser, Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0615E_pmAB11_50_90S_LD_4PBB_STFGes_DF_PI_060811

Maschinen- & Probedaten

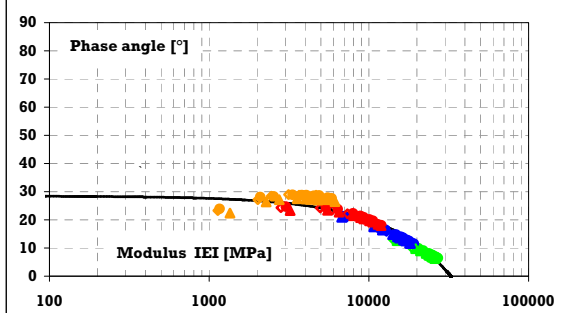
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	pmAB11-50/90S-LD		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	3083,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

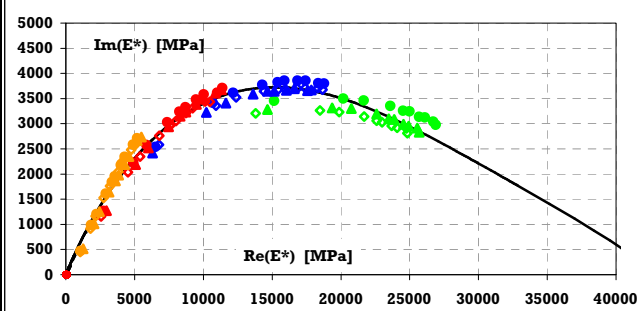
Power-law: Cole-Cole



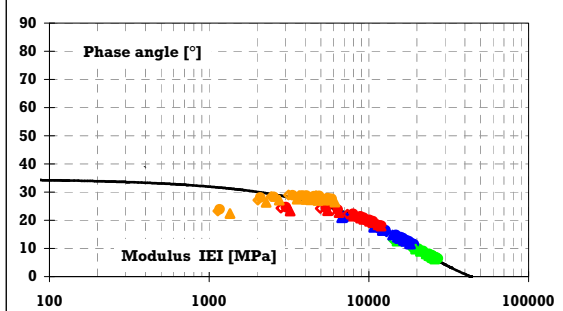
Power-law: Black



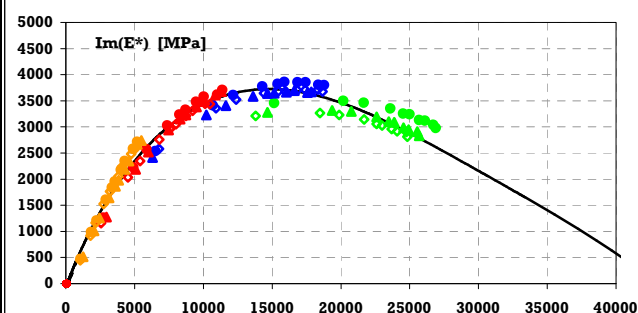
Huet: Cole-Cole



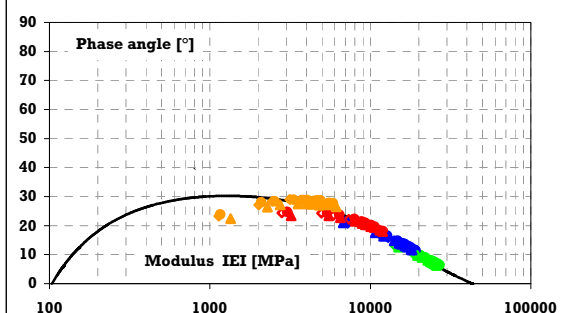
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	INTERN
Datum	29.08.2006
Projekt	0621I_Tieftemperatur
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0621I_SMA11_50_90S_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060829

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-50/90S-D		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2453,2 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -9,6		T [°C] = 0,4		T [°C] = 10,6		T [°C] = 20,3		T [°C] = -14,9	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	12451	12,6	5592	23,0	1774	35,5	491	39,7	16339	9,2
1,0	16358	9,5	9157	17,4	3919	29,1	1288	39,6	19987	7,1
2,0	17552	8,8	10364	15,9	4800	26,9	1708	38,2	21025	6,5
5,0	19035	7,8	12015	14,0	6148	24,0	2456	35,7	22273	5,7
10,0	19936	7,1	13181	13,0	7288	22,8	3153	34,4	23122	5,0
15,0	20705	6,8	13946	12,0	7952	20,7	3619	32,1	23710	4,9
20,0	21078	6,6	14428	11,7	8446	19,8	3977	31,1	24018	4,6
30,0	21515	6,4	14984	11,4	9129	18,7	4495	29,5	24410	4,4
40,0	21864	6,4	15422	10,9	9600	18,2	4872	28,8	24596	4,3

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	20
E [MPa]	27329	E [MPa]	36173	E _{inf} [MPa]	36141
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000371	J _a [1/MPa]	0,000371
k [-]	0,350	k [-]	0,151	k [-]	0,151
		J _b [1/MPa]	0,0158	J _b [1/MPa]	0,0160
		l [-]	0,504	l [-]	0,504

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

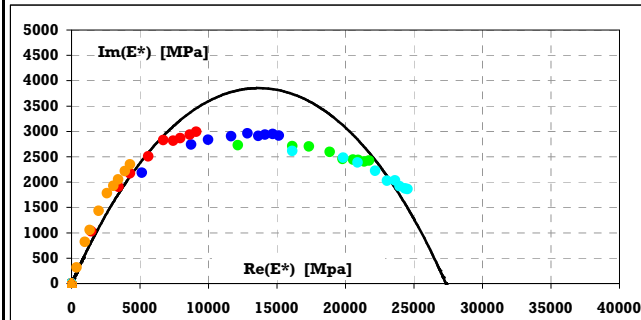
Auftraggeber	INTERN
Datum	29.08.2006
Projekt	0621I_Tieftemperatur
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0621I_SMA11_50_90S_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060829

Maschinen- & Probedaten

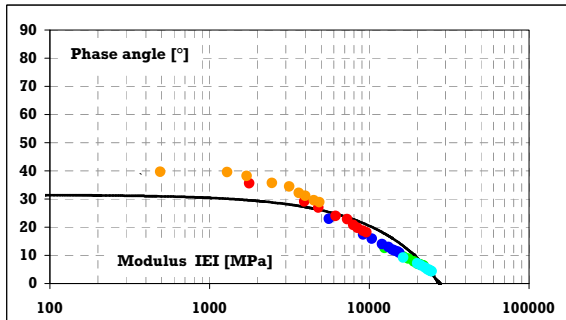
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-50/90S-D		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2453,2 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

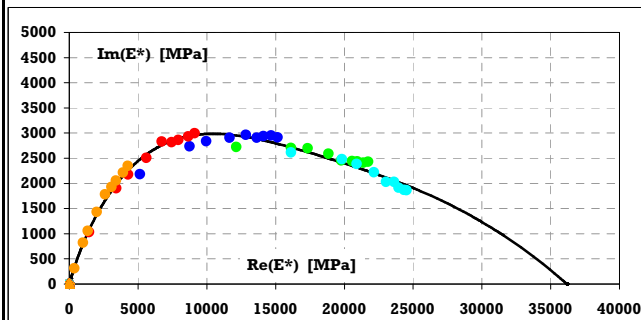
Power-law: Cole-Cole



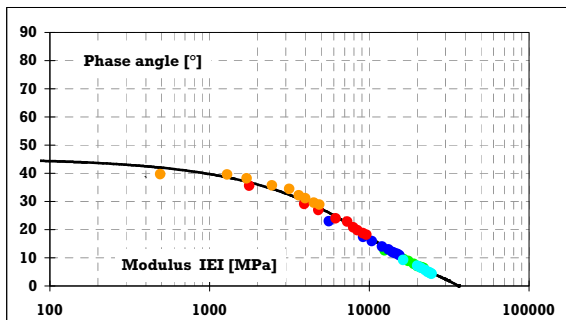
Power-law: Black



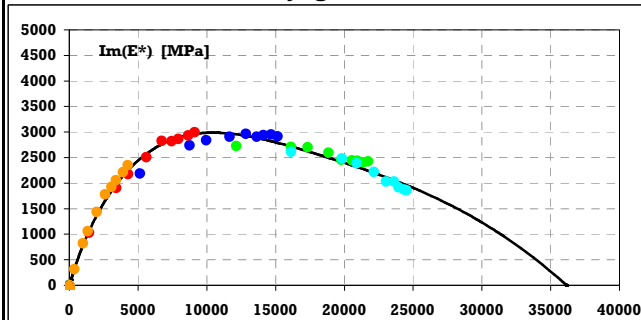
Huet: Cole-Cole



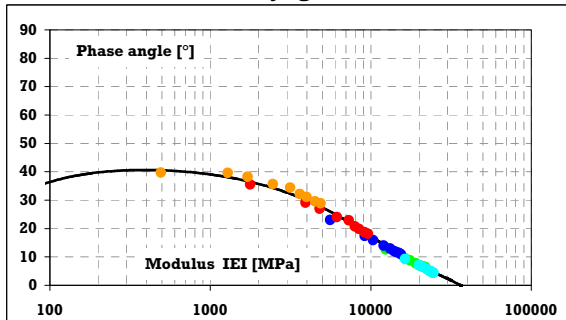
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M1_DT_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DT-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DT)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -5,1		T [°C] = 5,4		T [°C] = 15,2		T [°C] = 25,7		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	18837	11,2	9557	26,3	3313	50,8	609	69,2		
1,0	23423	7,6	14450	16,7	6830	29,1	2011	54,9		
2,0	24635	6,8	15971	14,8	8205	25,4	2702	46,7		
5,0	26294	6,0	18147	12,0	10142	21,5	3839	40,8		
10,0	28227	5,4	19814	10,1	11772	18,3	4589	35,3		
15,0	28041	5,0	20498	10,2	12747	17,7	5610	32,8		
20,0	28223	4,6	21173	9,5	13444	17,2	6163	30,8		
30,0	28502	4,2	21830	8,8	14220	16,4	6973	28,5		
40,0	28790	4,3	22065	8,7	14749	15,2	7547	30,0		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	0
E [MPa]	30725	E [MPa]	34933	E _{inf} [MPa]	34933
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000753	J _a [1/MPa]	0,000753
k [-]	0,501	k [-]	0,262	k [-]	0,262
		J _b [1/MPa]	0,0196	J _b [1/MPa]	0,0196
		l [-]	0,849	l [-]	0,849

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

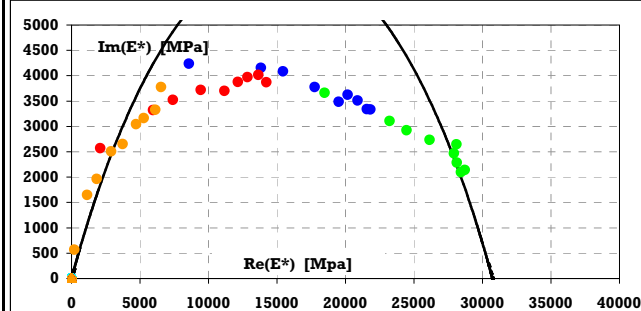
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	O605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	O605I_M1_DT_CY_STFGes_DF_PI_O60817

Maschinen- & Probedaten

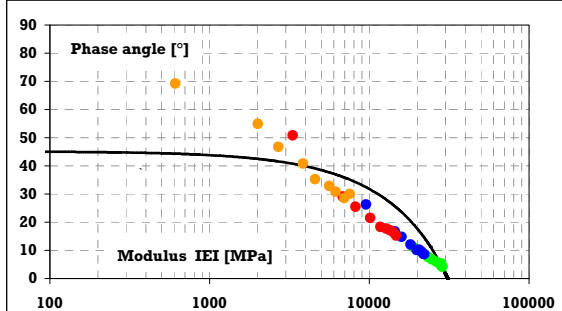
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DT-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DT)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

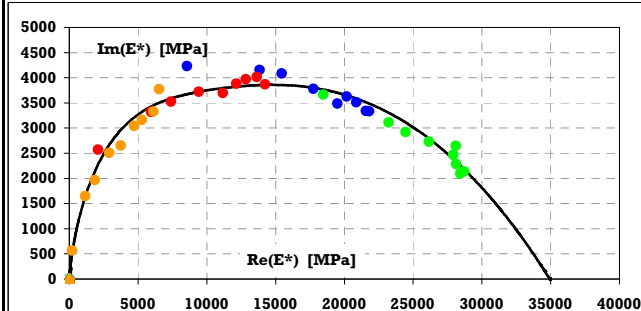
Power-law: Cole-Cole



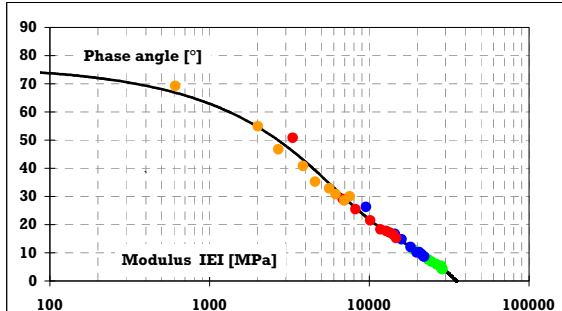
Power-law: Black



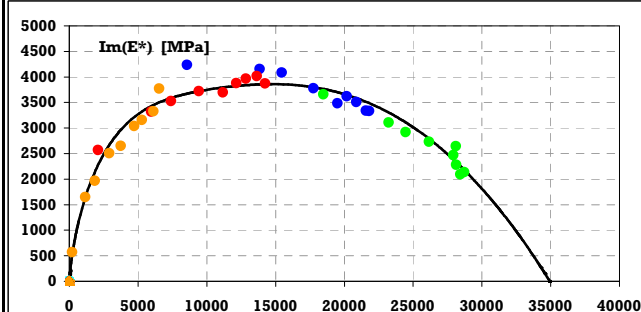
Huet: Cole-Cole



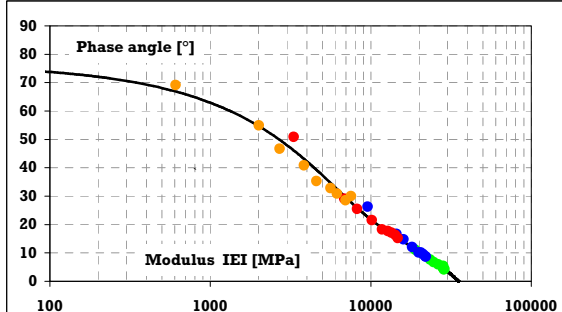
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M1_DC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -4,9		T [°C] = 5,2		T [°C] = 15,3		T [°C] = 25,5		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	18473	10,7	8791	20,9	3085	29,5	1055	27,8		
1,0	23513	7,5	14721	14,6	7274	24,1	2807	30,5		
2,0	24719	6,8	16440	13,1	8813	21,9	3657	30,1		
5,0	26274	5,7	18616	11,2	10989	19,1	5036	28,6		
10,0	26774	5,1	19774	10,0	12472	17,1	6239	26,4		
15,0	27844	4,8	21032	9,3	13561	16,3	7138	25,9		
20,0	28205	4,5	21531	8,9	14311	15,7	7717	24,8		
30,0	28560	4,4	22195	8,7	15080	14,8	8539	24,1		
40,0	28913	4,5	22678	7,9	15716	14,8	9114	22,9		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	171
E [MPa]	32792	E [MPa]	37362	E _{inf} [MPa]	37399
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000478	J _a [1/MPa]	0,000450
k [-]	0,322	k [-]	0,176	k [-]	0,172
		J _b [1/MPa]	0,0204	J _b [1/MPa]	0,0200
		l [-]	0,453	l [-]	0,450

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

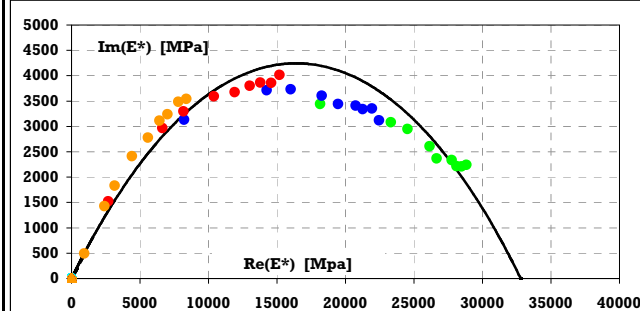
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M1_DC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

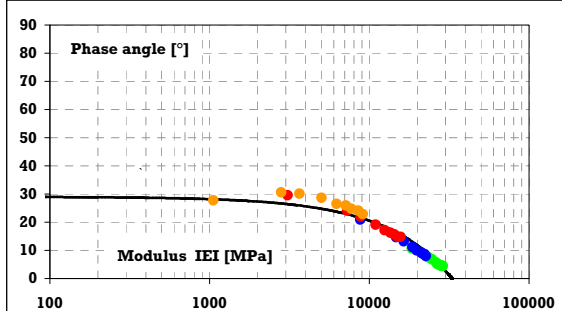
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

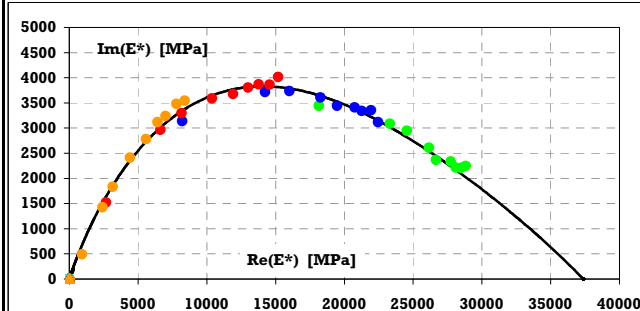
Power-law: Cole-Cole



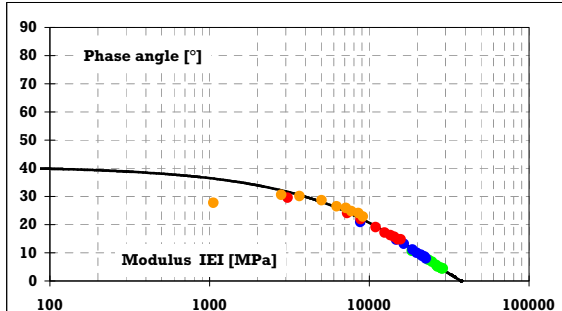
Power-law: Black



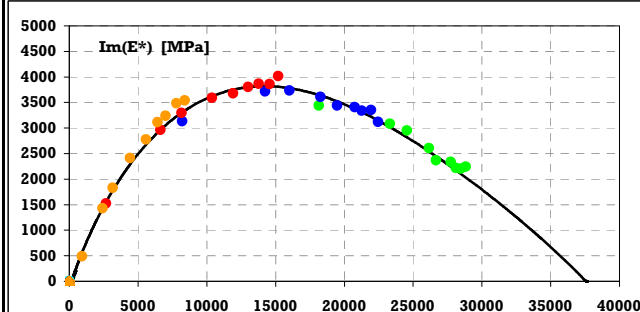
Huet: Cole-Cole



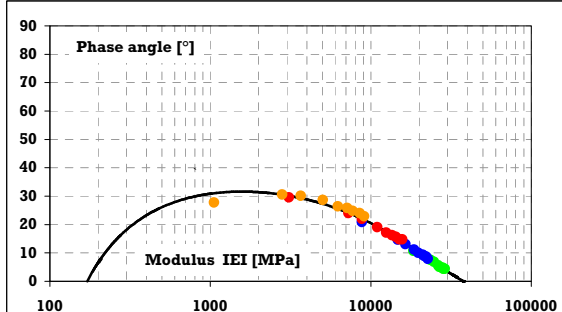
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M1_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DTC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -4,8		T [°C] = 5,0		T [°C] = 15,2		T [°C] = 25,2		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	18757	10,8	9128	23,1	2748	40,4	585	49,4		
1,0	23480	7,5	14522	15,5	6593	29,7	1928	46,2		
2,0	24757	6,7	16169	13,6	8067	26,4	2698	43,3		
5,0	26345	5,7	18332	11,6	10247	22,4	4047	38,7		
10,0	27235	5,0	19722	10,8	11774	19,1	5235	35,2		
15,0	27873	4,7	20704	9,5	12917	18,1	6126	32,5		
20,0	28236	4,4	21273	9,1	13590	17,4	6736	31,2		
30,0	28576	4,3	21959	8,4	14522	16,0	7613	29,0		
40,0	28730	4,2	22347	8,9	14999	15,6	8188	27,3		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	64
E [MPa]	31336	E [MPa]	35628	E _{inf} [MPa]	35325
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000517	J _a [1/MPa]	0,000597
k [-]	0,408	k [-]	0,225	k [-]	0,234
		J _b [1/MPa]	0,0128	J _b [1/MPa]	0,0154
		l [-]	0,641	l [-]	0,683

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

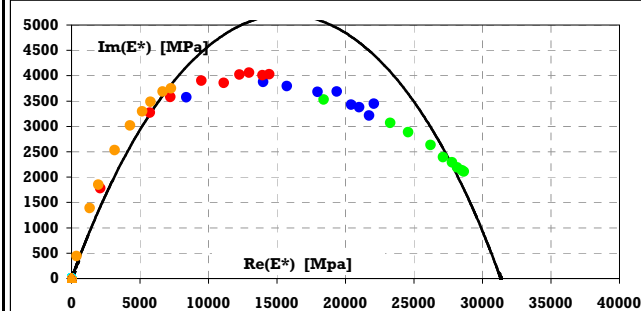
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Stefigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M1_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

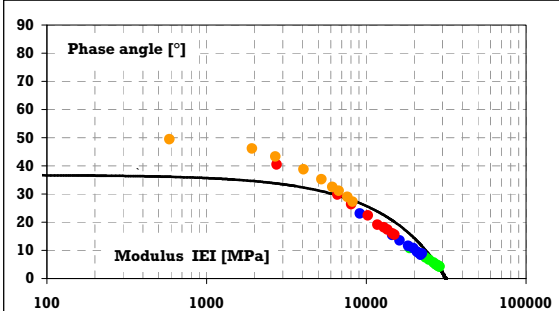
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M1 (DTC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2382,1 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

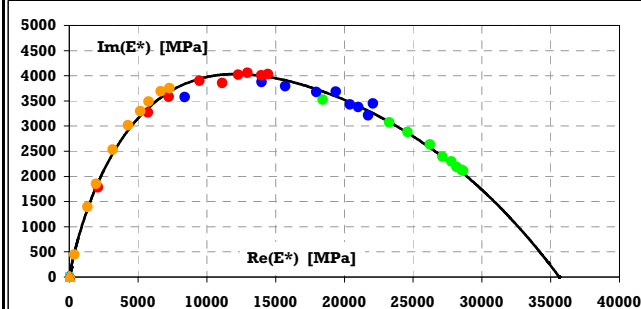
Power-law: Cole-Cole



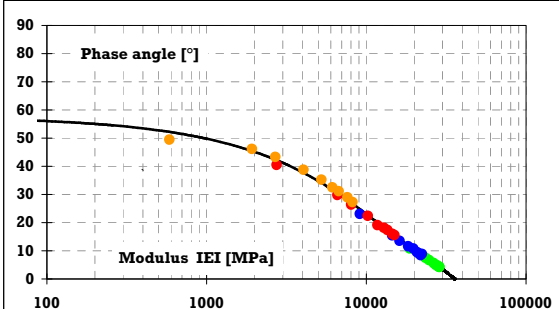
Power-law: Black



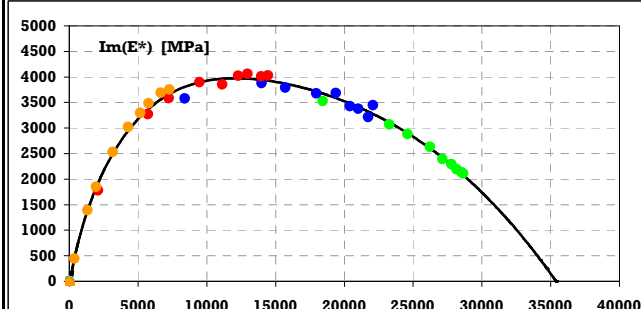
Huet: Cole-Cole



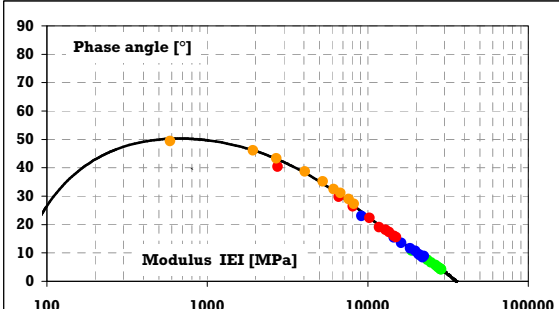
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DT_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DT-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DT)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -5,0		T [°C] = 5,4		T [°C] = 15,5		T [°C] = 25,5		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	19871	10,2	10409	28,1	3056	74,3	302	82,7		
1,0	23973	6,7	15115	15,5	6902	34,4	1308	67,1		
2,0	25073	5,8	16621	13,4	8272	28,8	2050	57,3		
5,0	26439	4,9	18681	11,3	10244	23,4	3273	48,3		
10,0	27443	4,4	20065	9,9	11636	21,1	4885	40,7		
15,0	27617	3,7	21017	9,0	12555	18,8	5391	39,0		
20,0	28095	3,5	21482	8,5	15993	16,4	6402	34,1		
30,0	28292	3,4	21962	8,0	16749	14,0	6961	30,7		
40,0	28209	3,9	22195	8,3	19604	12,1	6020	18,3		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	0
E [MPa]	28803	E [MPa]	33192	E _{inf} [MPa]	33192
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000360	J _a [1/MPa]	0,000360
k [-]	0,794	k [-]	0,265	k [-]	0,265
		J _b [1/MPa]	0,0038	J _b [1/MPa]	0,0038
		l [-]	0,850	l [-]	0,850

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

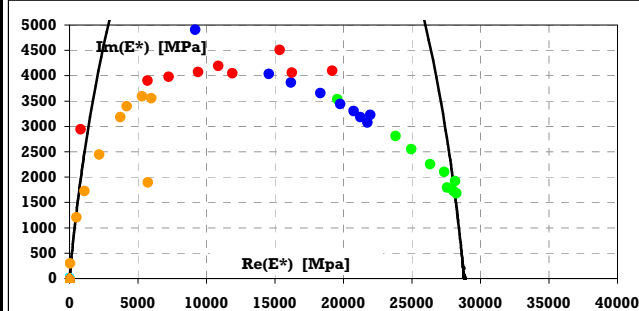
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DT_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

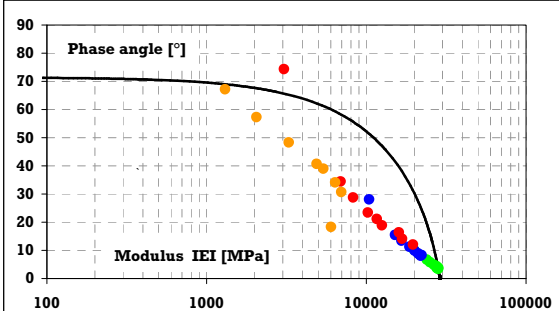
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DT-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DT)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

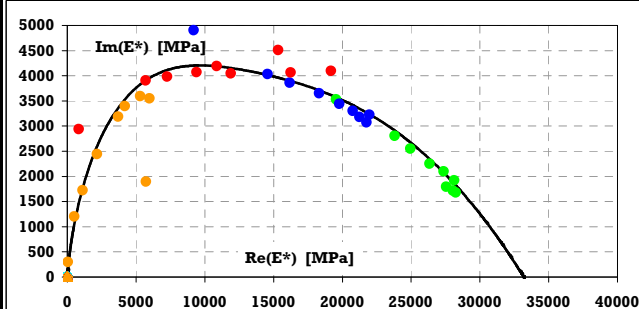
Power-law: Cole-Cole



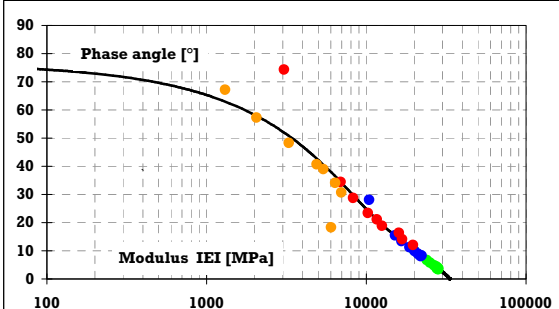
Power-law: Black



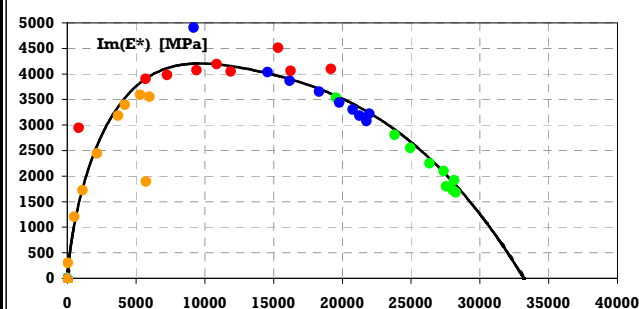
Huet: Cole-Cole



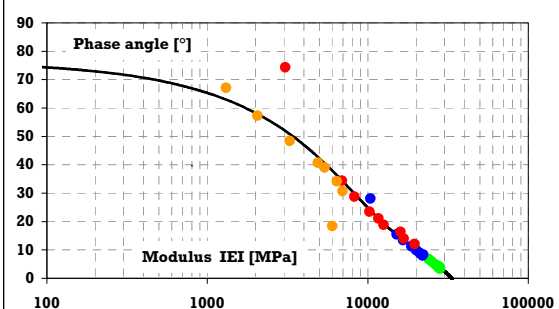
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -5,2		T [°C] = 5,4		T [°C] = 15,2		T [°C] = 25,6		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	19324	10,0	8857	20,8	2672	31,6	744	27,7		
1,0	24024	6,7	15131	14,2	7255	25,6	2021	36,3		
2,0	25231	6,0	16876	12,4	8938	23,0	2785	36,6		
5,0	26513	5,0	19048	10,5	11253	19,6	4175	34,9		
10,0	27015	4,4	20365	9,2	12642	17,7	5589	34,2		
15,0	28120	4,0	21212	8,7	14017	16,3	6283	31,6		
20,0	28065	3,8	21564	8,4	15351	15,2	7085	29,7		
30,0	28398	3,5	22533	8,1	15649	14,5	7994	28,2		
40,0	28780	3,8	22632	8,1	16034	14,4	8536	27,1		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	272
E [MPa]	31418	E [MPa]	35701	E _{inf} [MPa]	35610
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000485	J _a [1/MPa]	0,000430
k [-]	0,359	k [-]	0,190	k [-]	0,190
		J _b [1/MPa]	0,0199	J _b [1/MPa]	0,0231
		l [-]	0,499	l [-]	0,557

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

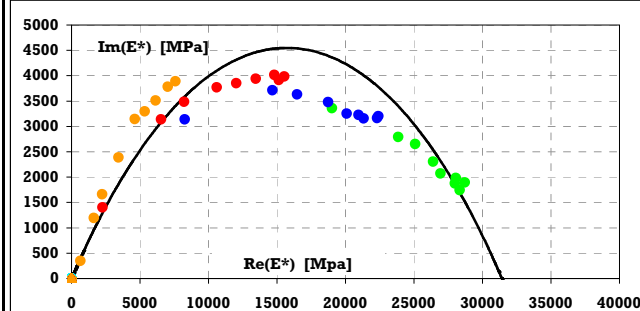
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Stefigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

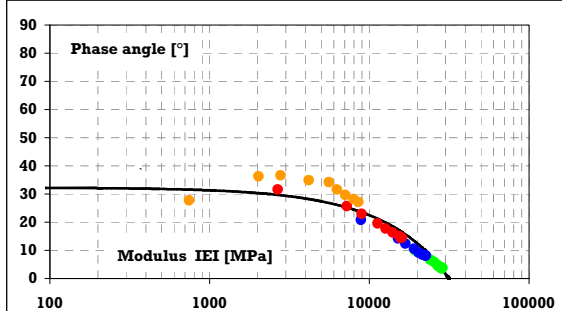
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

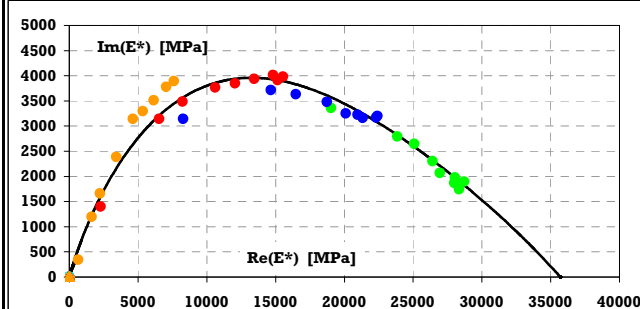
Power-law: Cole-Cole



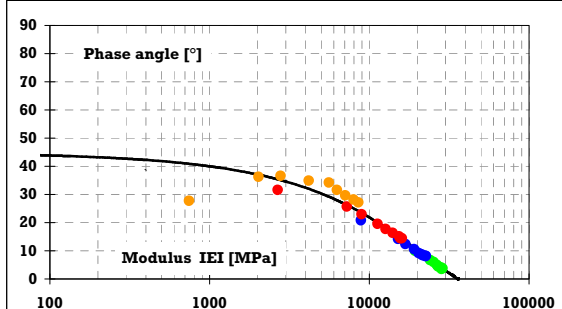
Power-law: Black



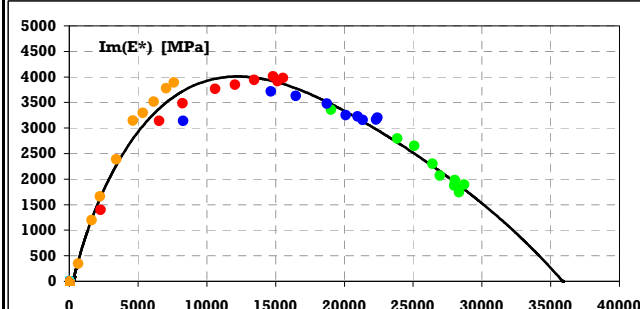
Huet: Cole-Cole



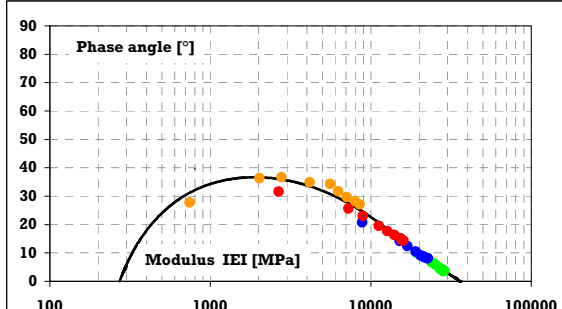
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DTC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -5,1		T [°C] = 5,3		T [°C] = 15,4		T [°C] = 25,5		T [°C] =	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	19191	10,3	9695	23,4	2522	46,9	404	45,5		
1,0	23639	6,8	15275	14,7	6724	31,5	1420	52,1		
2,0	24792	6,0	16906	12,9	8342	27,3	2107	49,8		
5,0	26180	5,0	18989	10,8	10578	22,4	3409	44,4		
10,0	26964	4,3	20546	8,9	12232	19,2	4674	39,2		
15,0	27527	4,0	21212	8,8	13327	17,8	5529	37,0		
20,0	27761	3,7	21715	8,3	13975	16,8	6146	34,7		
30,0	27935	3,8	22342	7,8	14902	15,3	7046	32,0		
40,0	28223	4,2	22580	7,7	15383	14,7	7643	30,4		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	93
E [MPa]	30214	E [MPa]	34041	E _{inf} [MPa]	34170
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000306	J _a [1/MPa]	0,000305
k [-]	0,440	k [-]	0,229	k [-]	0,228
		J _b [1/MPa]	0,0039	J _b [1/MPa]	0,0039
		l [-]	0,699	l [-]	0,714

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

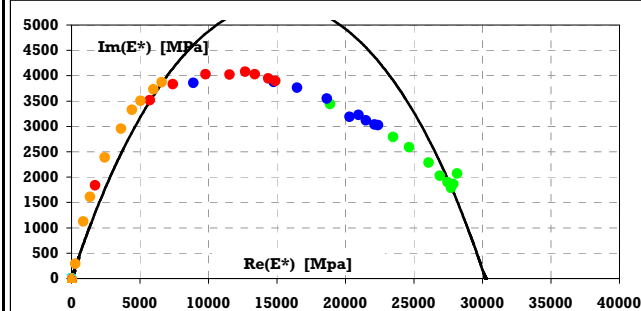
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Stefigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_DTC_CY_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

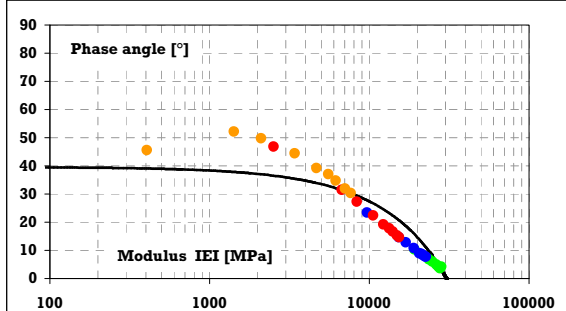
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (DTC)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

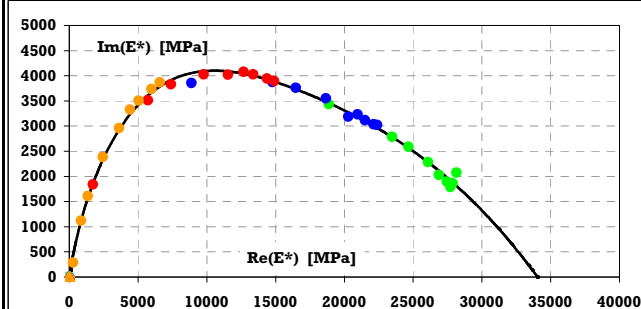
Power-law: Cole-Cole



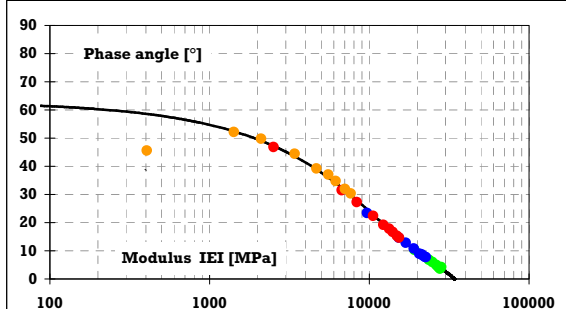
Power-law: Black



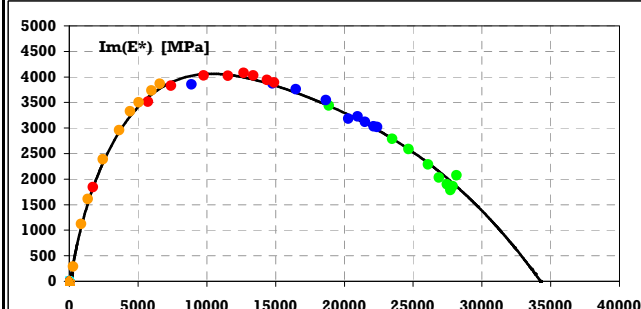
Huet: Cole-Cole



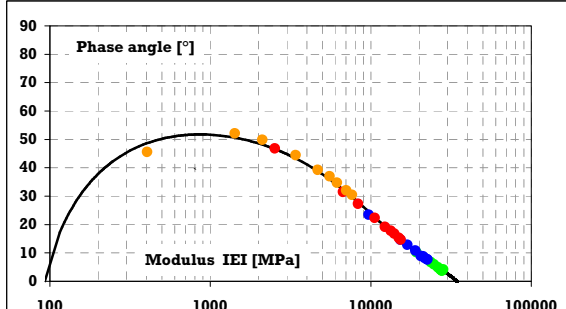
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Steifigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_4PBB_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (4PBB)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

	T [°C] = -15,3		T [°C] = -5,2		T [°C] = 5,6		T [°C] = 15,3		T [°C] = 25,5	
f	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
0,1	24911	4,0	17961	9,1	9973	19,6	3654	33,5	1099	30,4
1,0	26898	2,6	21569	6,0	14722	13,0	7579	24,9	2506	35,6
2,0	27360	2,3	22490	5,4	16102	11,5	9003	22,2	3279	34,9
5,0	27871	1,9	23587	4,5	17828	9,7	10977	18,8	4600	32,5
10,0	28150	1,6	24287	3,9	19023	8,6	12396	16,4	5798	29,8
20,0	28125	1,3	24639	3,4	19895	7,5	13625	14,3	6946	27,2
30,0	27917	1,6	24709	3,5	20264	7,4	14198	14,1	7688	26,5
40,0	27317	1,3	24252	3,2	20184	6,9	14320	13,2	7978	25,1

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	300
E [MPa]	29316	E [MPa]	30296	E _{inf} [MPa]	30077
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000480	J _a [1/MPa]	0,000478
k [-]	0,329	k [-]	0,211	k [-]	0,212
		J _b [1/MPa]	0,0100	J _b [1/MPa]	0,0100
		l [-]	0,538	l [-]	0,542

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

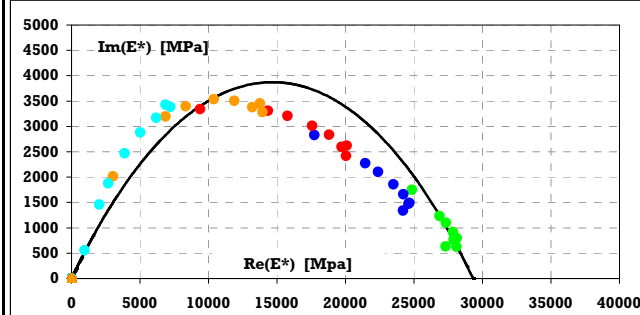
Auftraggeber	Intern
Datum	17.08.2006
Projekt	0605I_Vergleich_Stefigkeitsversuche
Projektleiter	Spiegl
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0605I_M2_4PBB_STFGes_DF_PI_060817

Maschinen- & Probedaten

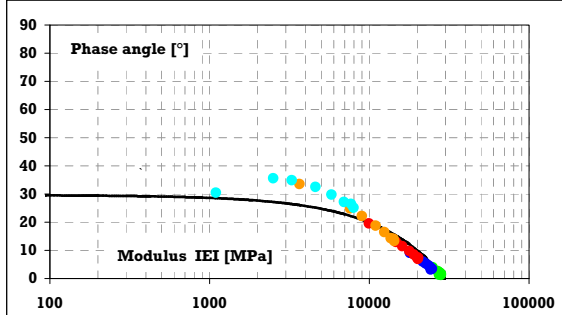
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (4PBB)		
Mischgutsorte:	AB-4C - M2 (4PBB)		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2376,5 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

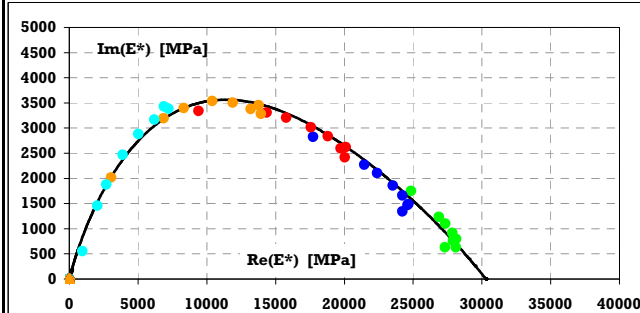
Power-law: Cole-Cole



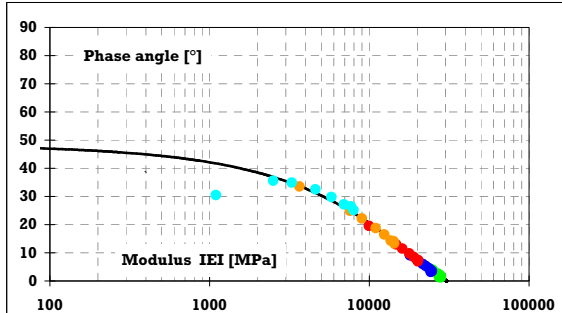
Power-law: Black



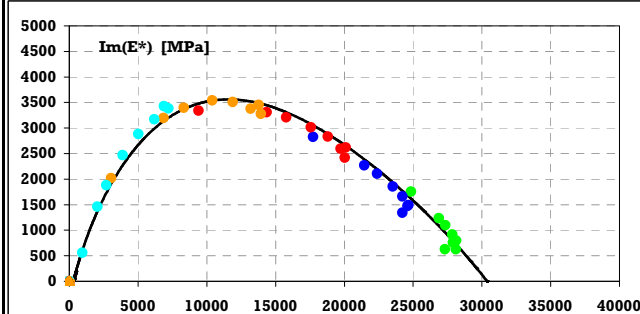
Huet: Cole-Cole



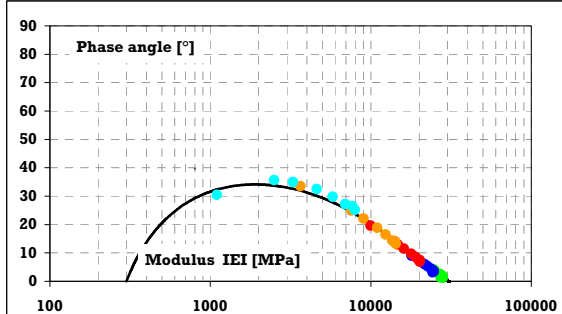
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_BitupolCI_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Bitupol C		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/r]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -15,1		T [°C] = -4,9			T [°C] = 5,8		T [°C] = 20,1		T [°C] =	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
20951	5,8	14726	9,1	0,1	8016	16,5	2400	26,6		
23725	4,5	18096	7,7	1,0	11402	12,7	4396	23,3		
24512	4,1	18890	7,1	2,0	12485	11,9	5165	22,1		
25468	3,7	20119	6,9	5,0	13953	10,8	6352	20,5		
25945	3,9	21086	6,8	10,0	15093	10,3	7315	19,0		
26450	3,0	21574	5,5	15,0	15697	9,3	7884	18,2		
26676	3,0	21877	5,7	20,0	16029	9,3	8335	17,8		
26950	2,9	22462	4,8	30,0	16548	8,8	8846	17,1		
27086	2,6	22429	5,9	40,0	16798	8,9	9237	16,7		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	0
E [MPa]	30321	E [MPa]	35589	E _{inf} [MPa]	35589
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000457	J _a [1/MPa]	0,000457
k [-]	0,247	k [-]	0,141	k [-]	0,141
		J _b [1/MPa]	0,0101	J _b [1/MPa]	0,0101
		l [-]	0,384	l [-]	0,384

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

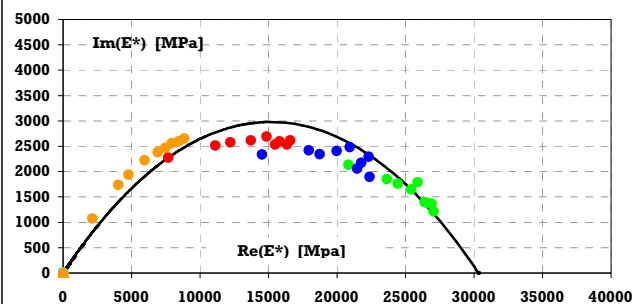
Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_BitupolCI_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

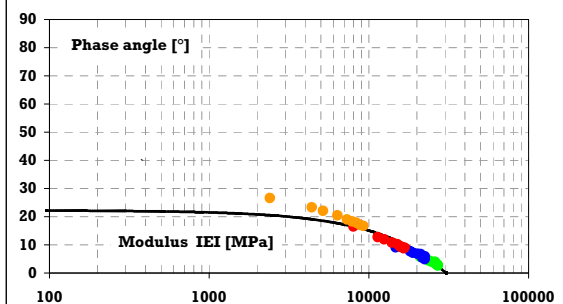
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Bitupol C		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	0,0 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

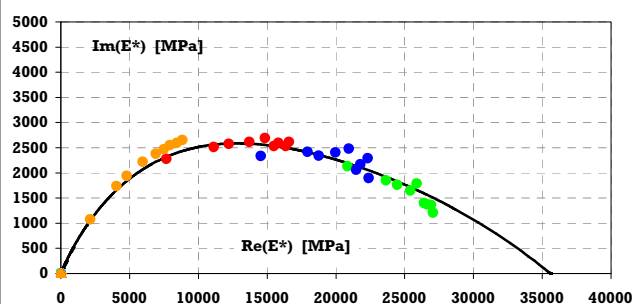
Power-law: Cole-Cole



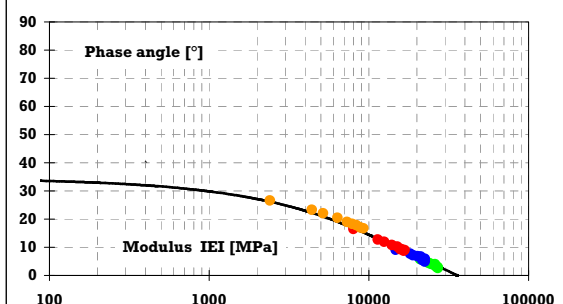
Power-law: Black



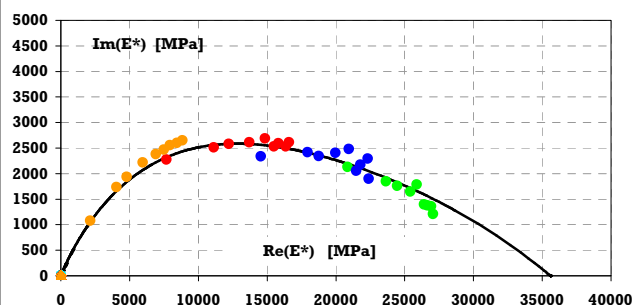
Huet: Cole-Cole



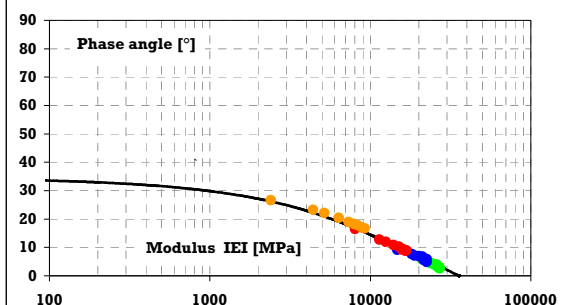
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_Starfalt_STFGes_DF_PL_060828

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Starfalt 50/90S		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/r]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -14,8		T [°C] = -9,5			T [°C] = 5,5		T [°C] = 20,0		T [°C] =	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
20861	9,0	15721	12,0	0,1	4505	26,6	959	33,1		
25308	6,9	20411	9,4	1,0	7926	21,5	2014	32,9		
26596	6,3	21777	8,6	2,0	9176	20,0	2532	32,2		
28160	5,7	23632	7,7	5,0	10999	18,2	3390	31,1		
29129	5,3	24997	7,1	10,0	12340	16,8	4182	29,8		
30018	4,9	25742	6,8	15,0	13302	16,0	4721	28,8		
30333	4,5	26197	6,4	20,0	13870	15,5	5107	28,5		
31000	4,4	26969	6,2	30,0	14720	15,0	5694	27,9		
31295	4,2	27343	6,0	40,0	15224	14,9	6101	27,5		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	9
E [MPa]	35206	E [MPa]	45463	E _{inf} [MPa]	45307
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000330	J _a [1/MPa]	0,000330
k [-]	0,320	k [-]	0,141	k [-]	0,141
		J _b [1/MPa]	0,0198	J _b [1/MPa]	0,0198
		l [-]	0,447	l [-]	0,442

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

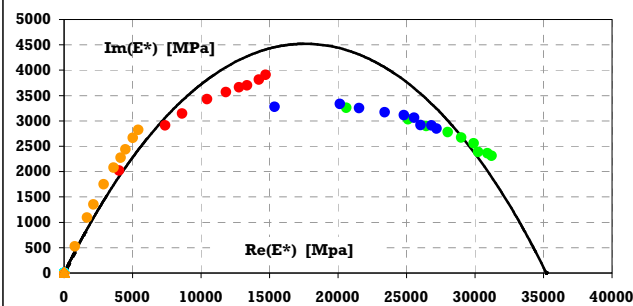
Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_Starfalt_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

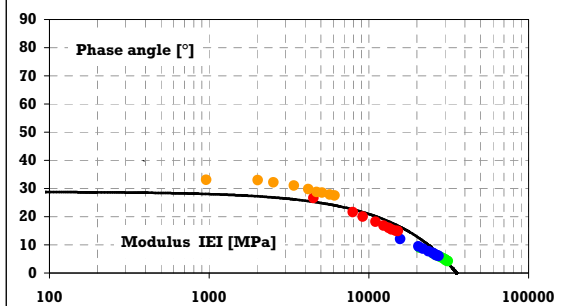
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Starfalt 50/90S		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

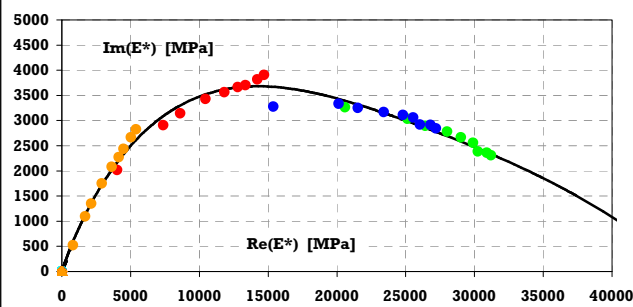
Power-law: Cole-Cole



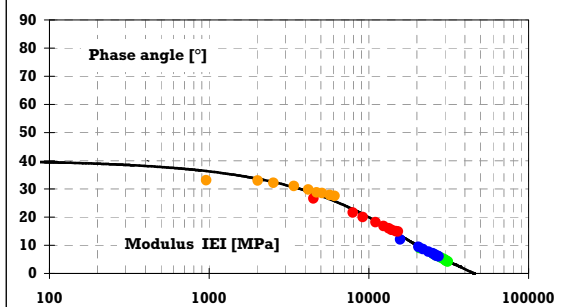
Power-law: Black



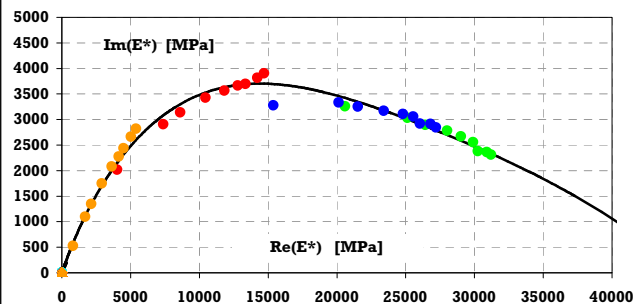
Huet: Cole-Cole



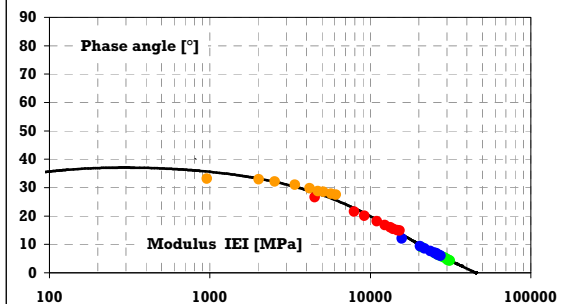
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_Villabit_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Villabit 65		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/r]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -15,5		T [°C] = -10,7			T [°C] = 5,2		T [°C] = 20,3		T [°C] =	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
18561	7,6	15534	9,5	0,1	5846	18,4	1184	32,9		
21618	5,8	18864	7,7	1,0	8814	15,6	2507	29,9		
22639	5,3	19862	7,2	2,0	9973	15,1	3071	28,8		
23259	4,5	21011	6,4	5,0	11635	13,6	4096	26,9		
24055	4,0	21821	5,5	10,0	12580	12,4	4896	24,9		
24514	3,8	22391	5,1	15,0	13205	12,0	5502	24,4		
24790	3,7	22936	4,6	20,0	13645	11,5	5864	23,3		
25140	3,7	23552	4,3	30,0	14384	10,9	6369	22,7		
25356	3,4	23780	4,1	40,0	14655	10,3	6694	21,7		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	0
E [MPa]	28244	E [MPa]	32704	E _{inf} [MPa]	32704
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000612	J _a [1/MPa]	0,000612
k [-]	0,293	k [-]	0,162	k [-]	0,162
		J _b [1/MPa]	0,0199	J _b [1/MPa]	0,0199
		l [-]	0,444	l [-]	0,444

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

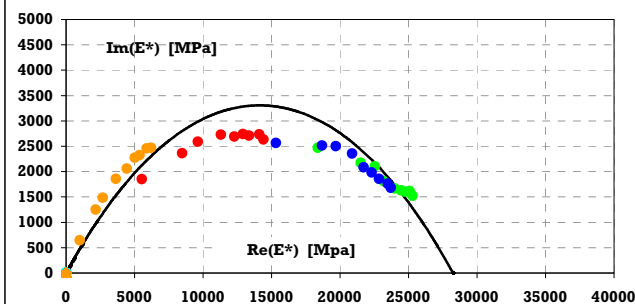
Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_Villabitt_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

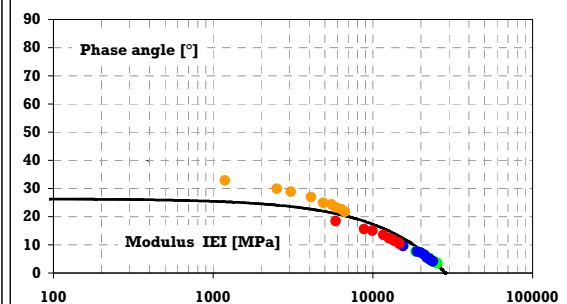
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Villabitt 65		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

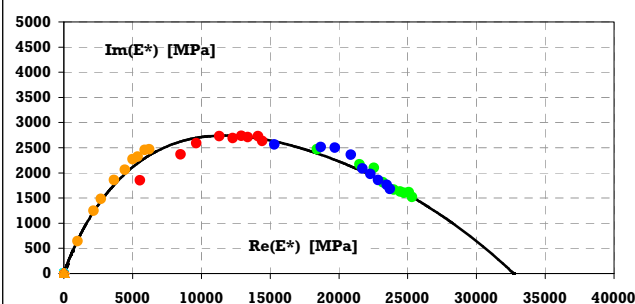
Power-law: Cole-Cole



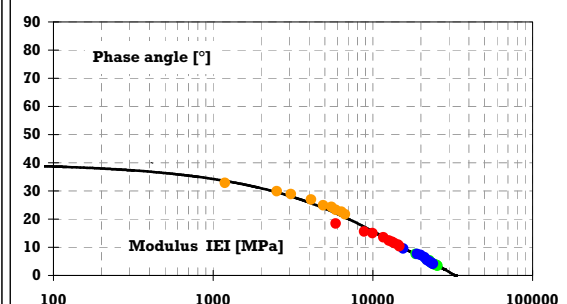
Power-law: Black



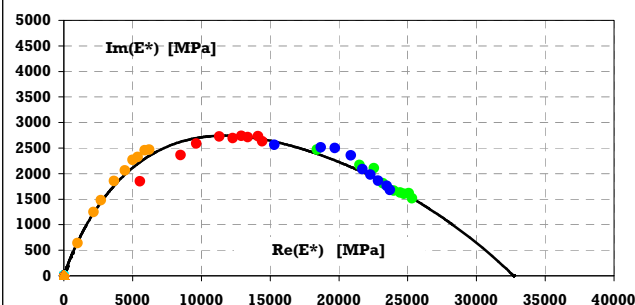
Huet: Cole-Cole



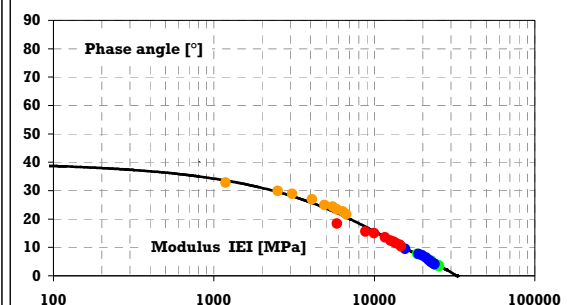
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	0527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0527E_SMA11_Zaloplastl_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Zaloplast I		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/r]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -14,7		T [°C] = -10,3			T [°C] = 5,1		T [°C] = 20,4		T [°C] =	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
19817	6,8	16807	8,4	0,1	6188	20,0	1326	31,7		
22926	5,0	20275	6,5	1,0	9679	15,9	2829	29,3		
23801	4,6	21221	6,1	2,0	10820	14,7	3506	28,4		
24802	4,1	22461	5,4	5,0	12398	13,1	4561	26,0		
25543	3,9	23314	5,0	10,0	13639	11,9	5715	24,7		
25842	3,5	23762	4,6	15,0	14235	11,5	6054	23,7		
26150	3,2	23997	4,4	20,0	14657	11,2	6421	23,0		
26359	3,2	24305	4,2	30,0	15216	10,5	6994	21,8		
26655	3,2	24596	4,1	40,0	15559	10,3	7327	20,3		

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	0
E [MPa]	29399	E [MPa]	33847	E _{inf} [MPa]	33847
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000617	J _a [1/MPa]	0,000617
k [-]	0,288	k [-]	0,159	k [-]	0,159
		J _b [1/MPa]	0,0200	J _b [1/MPa]	0,0200
		l [-]	0,435	l [-]	0,435

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

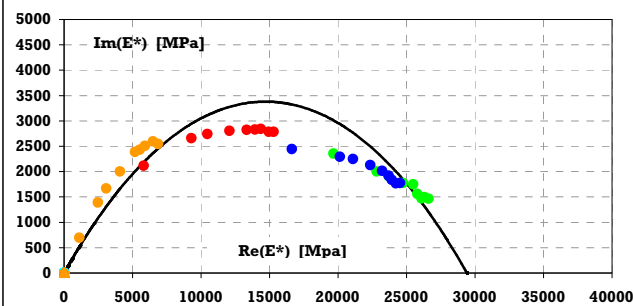
Auftraggeber	IGMAT
Datum	28.08.2006
Projekt	O527E_IGMAT_I
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	O527E_SMA11_Zalaplastl_STFGes_DF_PI_060828

Maschinen- & Probedaten

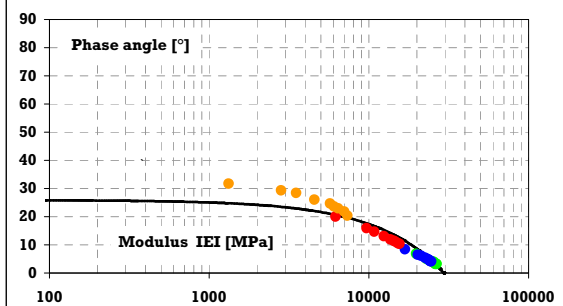
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11-Zalaplast I		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	(Verfahren B)		

Prüfergebnisse

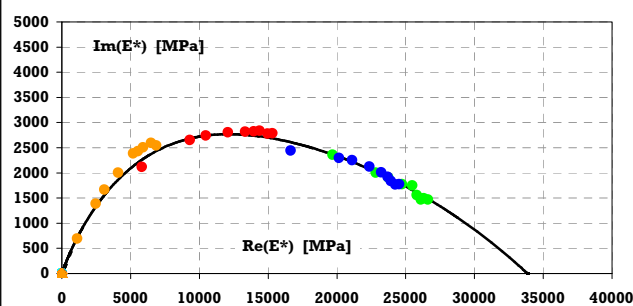
Power-law: Cole-Cole



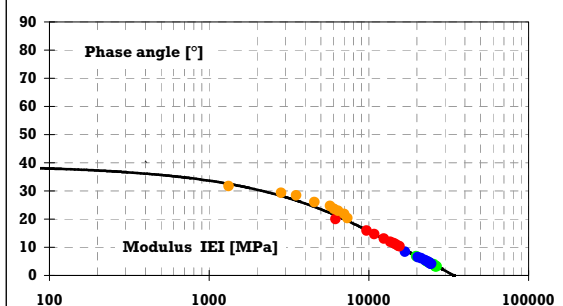
Power-law: Black



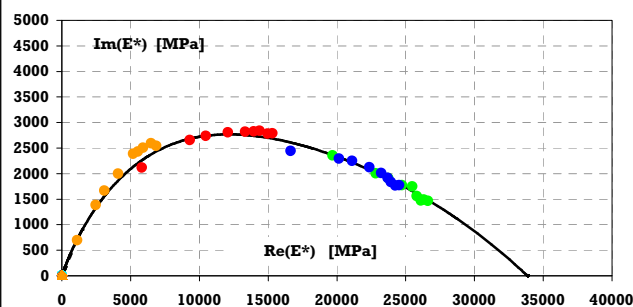
Huet: Cole-Cole



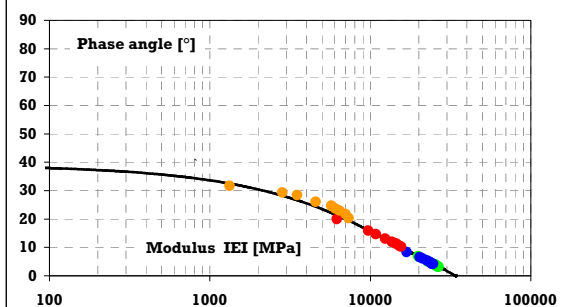
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA8 Bitupol B DTC CY STFGes_DF_PI 060825

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA8 - Bitupol B		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -15,0		T [°C] = -9,7			T [°C] = 5,3		T [°C] = 20,3	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
16421	7,1	14142	9,6	0,1	5349	20,1	1080	34,5
19179	5,5	17270	7,6	1,0	8305	15,8	2384	30,4
19922	5,0	18067	6,8	2,0	9290	14,8	2946	28,9
20853	4,5	19128	6,1	5,0	10656	13,2	3853	26,7
21336	4,0	19686	5,5	10,0	11685	12,2	4620	25,0
21865	3,7	20257	5,3	15,0	12259	11,7	5053	23,9
22101	3,6	20594	5,0	20,0	12648	11,4	5308	23,3
22273	3,4	20868	4,7	30,0	13212	11,0	5694	22,5
22491	3,2	21179	4,5	40,0	13471	10,9	5868	21,9

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	33
E [MPa]	24923	E [MPa]	28396	E _{inf} [MPa]	28933
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000513	J _a [1/MPa]	0,000443
k [-]	0,302	k [-]	0,174	k [-]	0,164
		J _b [1/MPa]	0,0073	J _b [1/MPa]	0,0084
		l [-]	0,454	l [-]	0,455



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

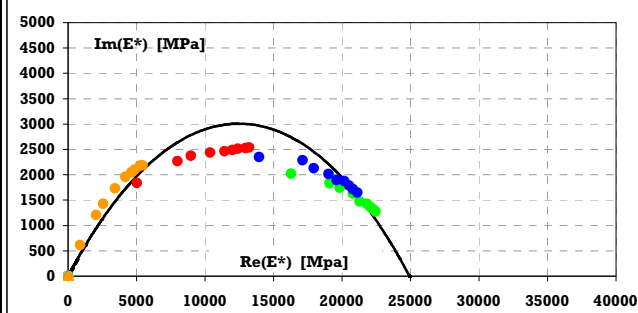
Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA8 Bitupol B DTC CY STFGes DF PI 060825

Maschinen- & Probedaten

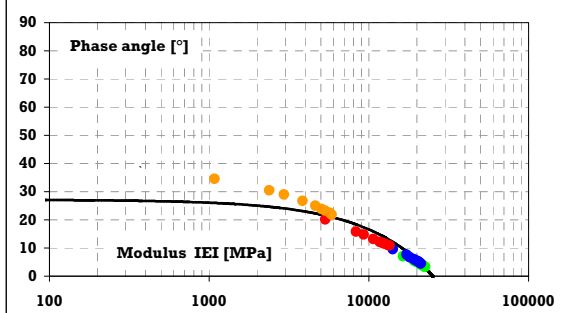
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA8 - Bitupol B		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

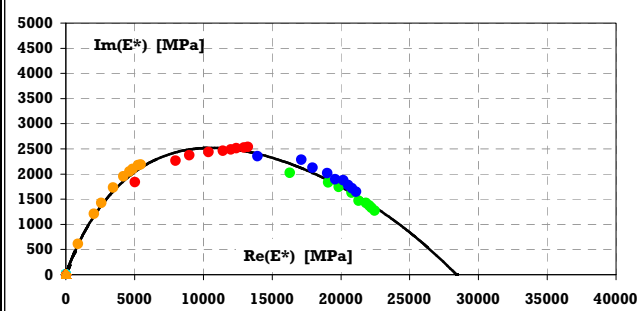
Power-law: Cole-Cole



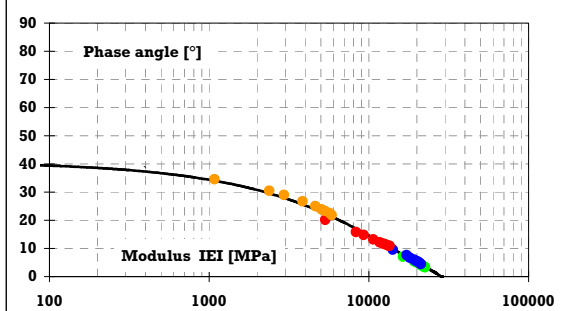
Power-law: Black



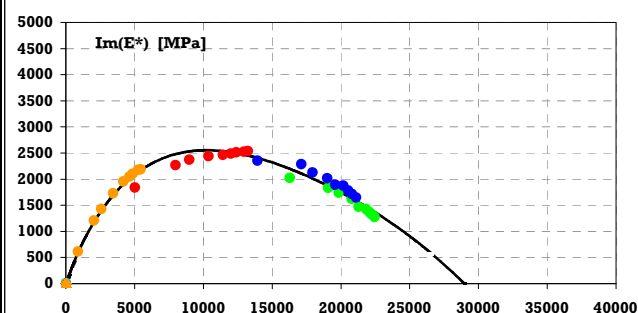
Huet: Cole-Cole



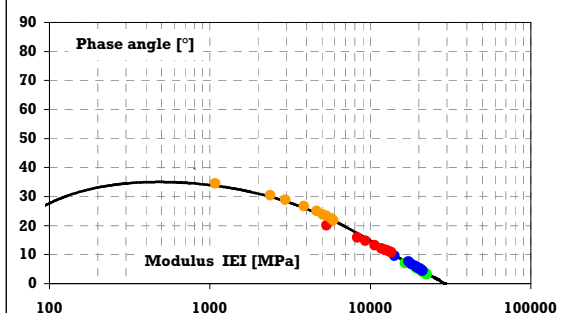
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA11_Polyplast A 1 DTC CY STFGes DF PI 060905

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11 - Polyplast A1		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m ³]	2444,8 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -14,8		T [°C] = -9,7			T [°C] = 5,3		T [°C] = 20,5	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
20645	6,1	17550	7,2	0,1	7951	15,5	2290	26,3
23553	4,9	20555	6,0	1,0	11021	12,4	3988	22,8
24350	4,5	21466	5,4	2,0	12003	11,6	4637	21,6
25361	4,2	22610	5,1	5,0	13377	10,7	5610	20,1
25994	3,9	23471	4,7	10,0	14434	10,3	6406	19,2
26439	3,7	23880	4,5	15,0	14965	9,7	6908	18,5
26723	3,6	24057	4,4	20,0	15375	9,4	7264	18,0
27045	3,4	24491	4,1	30,0	15977	9,0	7746	17,5
27184	3,3	24901	3,9	40,0	16257	9,0	8049	17,2

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	11
E [MPa]	31160	E [MPa]	36991	E _{inf} [MPa]	37288
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000474	J _a [1/MPa]	0,000392
k [-]	0,237	k [-]	0,136	k [-]	0,128
		J _b [1/MPa]	0,0100	J _b [1/MPa]	0,0105
		l [-]	0,392	l [-]	0,378



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

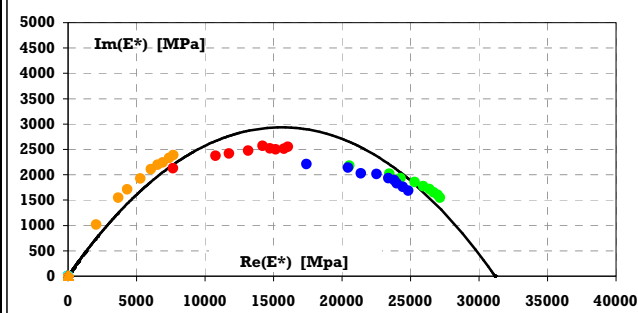
Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA11 Polyplast A 1 DTC CY STFGes DF PI 060905

Maschinen- & Probedaten

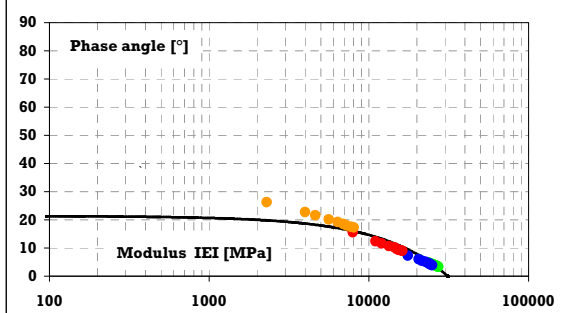
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11 - Polyplast A1		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

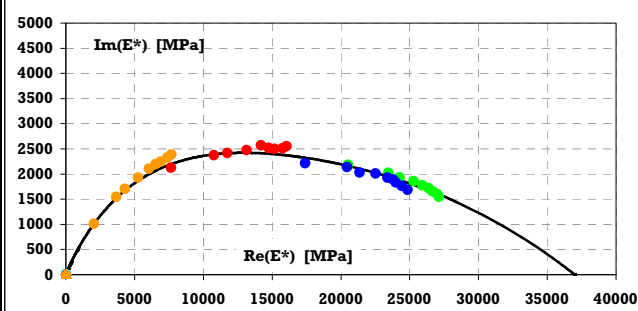
Power-law: Cole-Cole



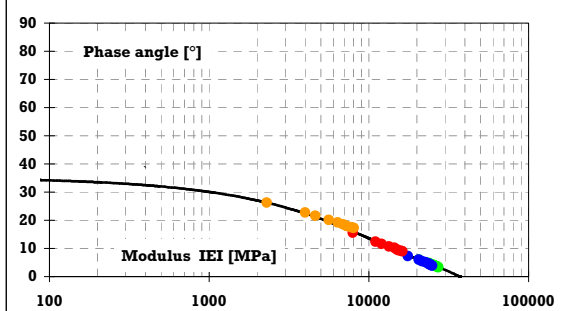
Power-law: Black



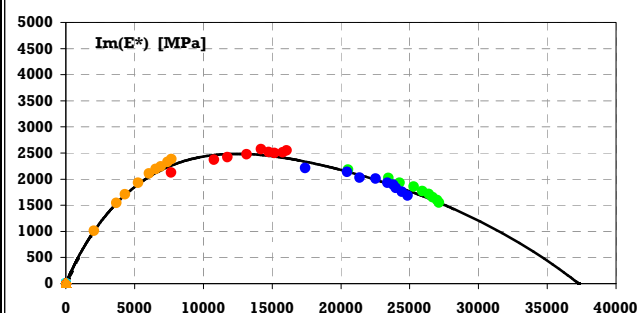
Huet: Cole-Cole



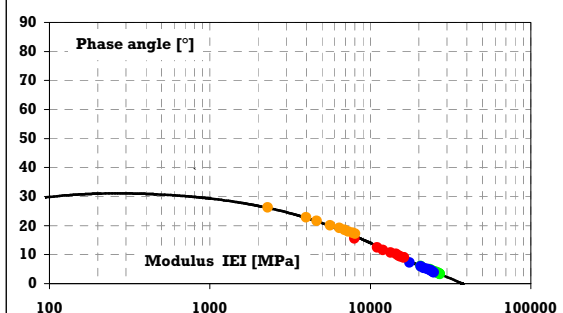
Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black





TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

Labor des
Instituts für Straßenbau & Straßenerhaltung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 28/E233
1040 WIEN
Tel.: +43-1-58801-23301
Fax: +43-1-58801-23399

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 1 von 2

Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA11_Zaloplast II 4 STFGes DF PI 060822

Maschinen- & Probedaten

Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11 - Zaloplast II Nr.4		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8 (Verfahren B)		

Prüfergebnisse

Mittelwerte der Versuchsdaten

T [°C] = -15,1		T [°C] = -10,1			T [°C] = 5,1		T [°C] = 20,4	
E*	φ	E*	φ	f	E*	φ	E*	φ
[MPa]	[°]	[MPa]	[°]	[Hz]	[MPa]	[°]	[MPa]	[°]
19337	6,2	15953	8,2	0,1	7678	15,2	2038	27,5
22130	4,9	18787	6,6	1,0	10713	12,3	3748	23,8
22991	4,5	19712	6,2	2,0	11712	11,4	4432	22,6
23953	4,2	20860	5,5	5,0	13012	10,4	5457	20,9
24349	3,8	21546	5,1	10,0	13825	9,8	6302	20,0
24927	3,6	21878	4,9	15,0	14640	9,3	6843	18,8
25149	3,4	22167	4,7	20,0	15007	9,1	7196	18,2
25468	3,2	22401	4,6	30,0	15464	8,7	7732	17,4
25773	3,0	22769	4,5	40,0	15769	8,6	8064	17,1

Parameter

Power-Law		Huet		Huet-Sayegh	
				E ₀ [MPa]	16
E [MPa]	29071	E [MPa]	33758	E _{inf} [MPa]	33742
J _a [1/MPa]	0,0100	J _a [1/MPa]	0,000457	J _a [1/MPa]	0,000457
k [-]	0,244	k [-]	0,142	k [-]	0,141
		J _b [1/MPa]	0,0097	J _b [1/MPa]	0,0097
		l [-]	0,406	l [-]	0,405

Prüfbericht: Parameteridentifikation

F534-2
Seite 2 von 2

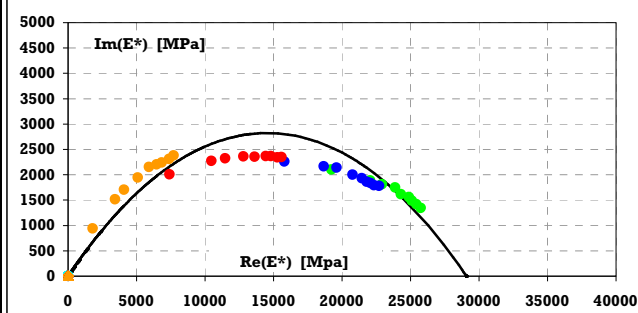
Auftraggeber	IGMAT
Datum	22.08.2006
Projekt	0619E_IGMAT_II
Projektleiter	Spiegl, Wistuba
Sachbearbeiter	Hofko
Norm	—
Datenfile Name	0619E SMA11 Zalaplast II 4 STFGes DF PI 060822

Maschinen- & Probedaten

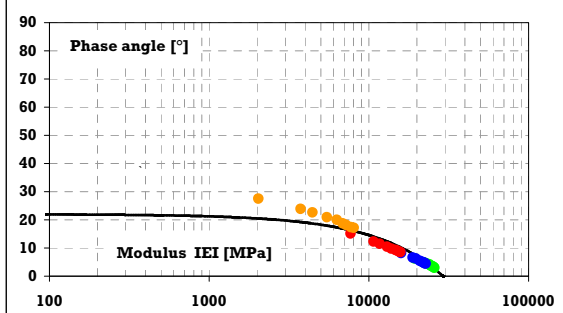
Prüfmaschine	LFV6350 Ermüdung		
Prüfverfahren	EN 12697-26 (DTC-CY)		
Mischgutsorte:	SMA11 - Zalaplast II Nr.4		
Herstellungsverfahren:	EN 12697-35	Verdichtungsverf.:	EN 12697-33
MW Raumdichte [kg/m³]	2444,8	(Verfahren B)	

Prüfergebnisse

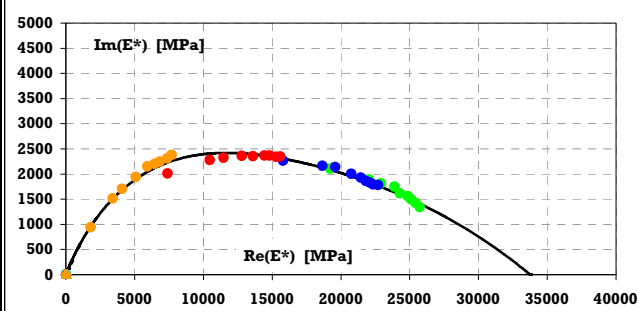
Power-law: Cole-Cole



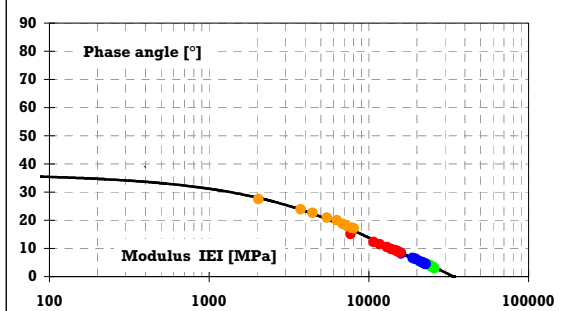
Power-law: Black



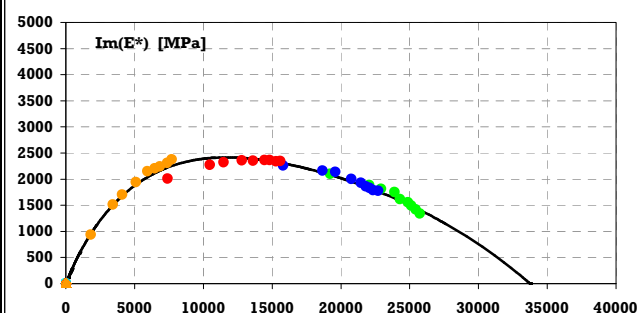
Huet: Cole-Cole



Huet: Black



Huet-Sayegh: Cole-Cole



Huet-Sayegh: Black

