



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Offsetflächen und CAS-Visualisierung

Ausgeführt am
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Paukowitsch

durch
Manuela Büger

Kubingasse 12
3710 Glaubendorf

Mai 2010

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die mich im Laufe meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Bedanken möchte ich mich bei Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Paukowitsch für die Betreuung dieser Diplomarbeit. Er ist mir jederzeit für Fragen und Auskünfte zur Verfügung gestanden und hat mich mit seiner unkomplizierten Arbeitsweise sehr unterstützt.

Ich danke allen meinen StudienkollegInnen, die das Studium für mich zu einem ganz besonderen Lebensabschnitt gemacht haben. Ganz besonders bedanke ich mich bei Viki, Cathi und Kathi mit denen ich viele schöne Stunden verbringen durfte, mit denen so manche Übungen, Vorlesungen und Prüfungsvorbereitungen unterhaltsamer wurden. Ich hoffe, dass unser Kontakt auch in Zukunft bestehen bleibt.

Auch meiner „alten“ Schulfreundin Julie möchte ich Danke sagen, die mir mit ihren Emails aus Spanien immer wieder Mut und Ausdauer zugesprochen hat und mich auf ihre eigene Art versucht hat zu motivieren, es ist ihr gelungen.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinem Lebensgefährten und zukünftigem Mann Christoph für seine Unterstützung jeglicher Art, sein Verständnis und seine Geduld mit meinen Launen während des gesamten Studiums und speziell in den letzten Wochen. Er ist in allen Lebenslagen eine wichtige Stütze für mich.

Meinem Sohn Jonas danke ich, weil er es durch seine fröhliche Art immer wieder schafft mich aufzumuntern und mir Kraft gibt, meine Ziele zu erreichen.

Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern Ruth und Karl, die mir durch ihre Erziehung, Wertschätzung und Unterstützung den Weg zu diesem Studium ermöglicht haben. Sie haben immer ein offenes Ohr für mich und ohne ihre zahlreichen Babysitterstunden und -tage hätte ich mein Studium in dieser Zeit nicht beenden können. DANKE!

Inhalt

1	Vorwort.....	1
2	Differentialgeometrische Grundbegriffe.....	3
2.1	Ebene Kurven.....	3
2.1.1	Tangente	4
2.1.2	Evolute	6
2.1.3	Offset einer ebenen Kurve.....	13
2.2	Raumkurven	15
2.2.1	Tangente	15
2.2.2	Schmiegeebene	16
2.2.3	Krümmungskreis	17
2.2.4	Frenet-Begleitbasis	19
2.3	Flächen	20
2.3.1	Parameterdarstellung.....	20
2.3.2	Flächenkurven, Flächentangente, Tangentialebenen.....	21
2.3.3	Offset einer Fläche.....	22
3	Störungen der Regularität von Offsets.....	24
3.1	Störungen der Regularität in der Ebene.....	24
3.1.1	Diskussion der Störungen der Regularität von Offsetkurven am Beispiel der Ellipse.....	24
3.2	Störungen der Regularität im Raum	26
3.2.1	Reihenentwicklung nach Taylor	27
3.2.2	Berührung zweier Kurven bzw. Flächen in einem Punkt	32
3.2.3	Visualisierung der Näherungsfläche	32
3.2.4	Oskulatur	36
4	Offsets von ebenen Kurven	46

4.1	Offset des Kreises	46
4.2	Offset der Ellipse.....	47
4.3	Offset der Parabel.....	50
4.4	Offset der Hyperbel	51
4.5	Offset der logarithmischen Spirale.....	53
4.6	Offsets von ebenen Polygonen	53
5	Offsets von Flächen im Raum	55
5.1	Offsets von Drehflächen.....	55
5.1.1	Kugel.....	56
5.1.2	Torus.....	58
5.1.3	Drehquadriken.....	65
5.2	Offsets von torsalen Regelflächen.....	78
5.2.1	Zylinderflächen.....	79
5.2.2	Kegelflächen.....	83
5.2.3	Tangentenflächen einer Raumkurve.....	84
5.3	Offsets von Schraubflächen	90
5.3.1	Kreisschraubflächen.....	91
5.3.2	Schraubrohrfläche.....	95
	Literaturverzeichnis	98
	Abbildungsverzeichnis	99

1 Vorwort

In der CAD-Modellierung von Objekten werden oft Flächenmodelle verwendet, diese weisen der zweidimensionalen Oberfläche natürlich keine dritte Raumkoordinate zu. In den Anwendungen, etwa Maschinenbau, Architektur, usw., spielt jedoch die Materialstärke von Bauteilen eine wichtige Rolle. Um diese zu berücksichtigen stehen in CAD-Systemen die sogenannten „Offset-Operationen“ zur Verfügung. Hierbei kann es zu Selbstschnitten kommen, was bei Anwendungen natürlich möglichst vermieden werden soll. Außerdem wirkt dann ein Objekt schon in der Modellierung realistischer.

Wann genau es bei welchen Objekten an Offsetkurven zu Spitzen bzw. an Offsetflächen zu Selbstschnitten kommen kann, wird in dieser Arbeit behandelt. Dazu werden im Kapitel 2 zuerst die wichtigsten differentialgeometrischen Grundbegriffe, welche für die weiteren Erklärungen notwendig sind, aufgeführt und erläutert. Im Kapitel 3 widme ich mich dann den Störungen der Regularität von Offsets, wobei ich für den ebenen Fall das Beispiel der Ellipse gewählt habe. Im Weiteren wird dann die Situation im Raum behandelt. Die folgenden zwei Kapitel sind vollständig Beispielen gewidmet. In Kapitel 4 werden zunächst Beispiele der Ebene angeführt, wobei hier speziell auf Kegelschnitte eingegangen wird. Abschließend führe ich in Kapitel 5 eine Reihe von Beispielen von Offsetflächen an. Ausgewählt habe ich dafür Drehflächen, torsale Regelflächen und Schraubflächen.

Die Berechnungen der Offsetkurven und -flächen sowie deren Visualisierung habe ich mit dem Programm Maple13 ausgeführt. Im Anhang an diese Arbeit findet sich eine CD mit allen Dateien zu den Beispielen im mws-Format. Gelegentlich stammen mehrere Bilder aus einer mws-Datei. Die Beschriftung der Dateien ist an die Kapitelnummerierung angelehnt, z.B. findet sich die „Abbildung 54: Ringtorus“ aus dem Kapitel „5.1.2 Torus“ in der Datei „5_1_2_torus.mws“. Alle Dateien wurden ohne numerische und graphische Ergebnisse gespeichert. Die Figuren können beim Durchlauf der Maple-Datei jederzeit sichtbar gemacht werden.

Am Ende der Arbeit sind ein Literatur- sowie ein Abbildungsverzeichnis angefügt. Alle differentialgeometrischen Begriffe und Lehrsätze dieser Arbeit finden sich an unterschiedlichen Stellen in den genannten Büchern des Literaturverzeichnisses.

Die Arbeit richtet sich an geometrisch interessierte Leser, welche mit den differentialgeometrischen Grundbegriffen vertraut sein sollten.

2 Differentialgeometrische Grundbegriffe

2.1 Ebene Kurven

Ein Punkt der Ebene E wird durch seine Koordinaten $X = (x_1, x_2)$ in einem ebenen kartesischen x_1x_2 -Koordinatensystem definiert. Eine Kurve $c(t)$ besitzt die Parameterdarstellung

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$$

Für ihre Koordinatenfunktionen c_i wird angenommen, dass diese hinreichend oft differenzierbar sind

$$c_i: t \in \mathbb{R} \mapsto c_i(t) \in \mathbb{R}, i = 1, 2$$

Im Folgenden werden stets Kurven in parametrisierter Form vorausgesetzt, analog werden wir stets parametrisierte Flächen zu Grunde legen.

Polarkoordinaten

Im x_1x_2 -Koordinatensystem mit Ursprung O kann eine ebene Kurve auch mit Hilfe ihrer Polarkoordinaten angegeben werden. Dazu werden der Radius r und der Drehwinkel φ zwischen positiver x_1 -Achse und der Verbindung OP angegeben

$$r = d(OP)$$

$$\varphi = \angle(x_1\text{-Achse}, OP)$$

Um von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten oder umgekehrt umzurechnen, verwendet man folgende bekannte Formeln

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

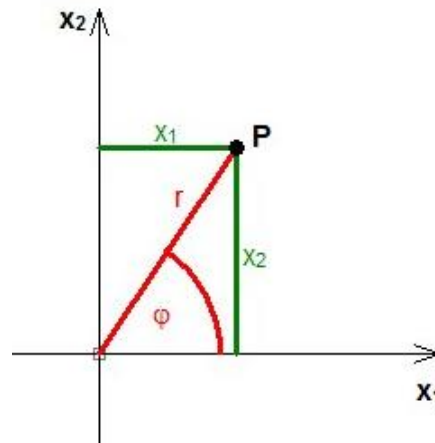


Abbildung 1: Polarkoordinaten, kartesische Koordinaten

Da r und φ Funktionen in t sind, ergibt sich daraus die Parameterdarstellung der Kurve in Polarkoordinaten

$$c(t) = (r(t), \varphi(t))$$

2.1.1 Tangente

Betrachtet werden ein fester Punkt $P = c(t_0)$ der Kurve $c(t)$, $t \in I$ und ein „nahegelegener laufender“ Kurvenpunkt $Q = c(t)$, das heißt: t liegt in einer ε -Umgebung $(- \varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ von t . Die Verbindung $s(t) = PQ$ ist eine Sehne der Kurve. Man lässt nun t gegen t_0 laufen

$$s_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} s(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} PQ$$

Falls die Grenzlage s_0 von $s(t)$ existiert, so ist sie die Tangente s_0 im Punkt P an die Kurve c .

Der 1.Ableitungsvektor

$$\frac{dc}{dt}(t_0) = \dot{c}(t_0) = (\dot{c}_1(t_0), \dot{c}_2(t_0)), \quad \dot{c}_i(t_0) = \frac{dc_i}{dt}(t_0)$$

gibt im Falle $\dot{c}(t_0) \neq (0,0)$ die Richtung der Tangente s_0 an.

Die Parameterdarstellung der Tangente s_0 in P lautet daher

$$x(\lambda) = c(t_0) + \lambda \dot{c}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Wird der Kurvenparameter t als Zeit interpretiert, so ist durch $\dot{c}(t_0)$ der Geschwindigkeitsvektor des in der Kurve „laufenden“ Punktes gegeben, und sein Betrag ist seine Geschwindigkeit $v(t_0)$

$$v(t_0) = \|\dot{c}(t_0)\|$$

Kurvennormale

Die Kurvennormale $n(t_0)$ von $c(t)$, $t \in I$ im Punkt $P = c(t_0)$ liegt orthogonal zur Kurventangente, daher gilt

$$\dot{c}(t_0) \cdot n(t_0) = 0$$

Für ebene Kurven lautet ein Richtungsvektor der Kurvennormalen daher

$$(-\dot{c}_2(t), \dot{c}_1(t))$$

In Abhängigkeit vom Ableitungsvektor kann folgende Unterscheidung von Kurvenpunkten getroffen werden:

- Regulärer Kurvenpunkt: $\dot{c}(t_0) \neq (0,0)$

Die Tangente approximiert den Kurvenverlauf „um“ den Punkt $c(t_0)$.

- Singulärer Kurvenpunkt: $\dot{c}(t_0) = (0,0)$

Es gibt keine einheitliche Aussage über den Kurvenverlauf in der Umgebung von $c(t_0)$.

Beispiele für Kurven mit einem singulären Punkt

Neilsche Parabel (t^2, t^3) : Hier „sieht“ man die Singularität im Ursprung $O = (0,0)$.

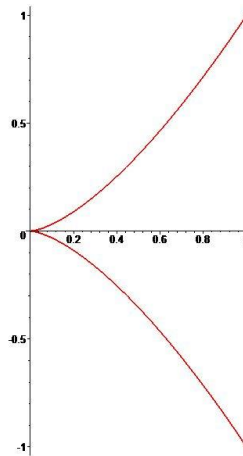


Abbildung 2: Neilsche Parabel

Die Neilsche Parabel hat im Ursprung $O = (0,0)$ einen singulären Punkt.

„Unzweckmäßig“ parametrisierte Gerade (t, t^3) : Hier „sieht“ man die Singularität im Ursprung „nicht“.

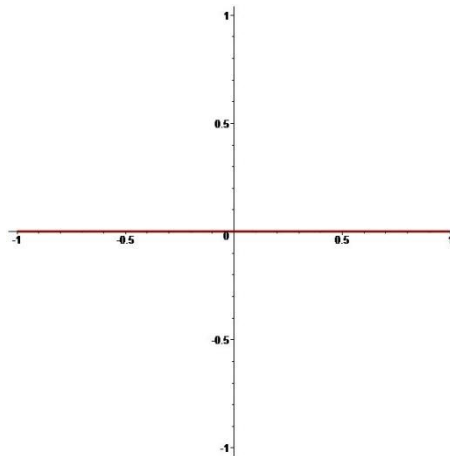


Abbildung 3: x_1 -Achse

2.1.2 Evolute

Geht man von einer Kurve $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ aus, so legt der Normalvektor $n(t_0) = (-\dot{c}_2(t_0), \dot{c}_1(t_0))$ die Kurvennormale im Punkt $c(t_0)$ fest. Die Gleichung der Kurvennormalen im laufenden Punkt $c(t)$ lautet deshalb

$$(x - c(t)) \cdot \dot{c}(t) = 0$$

Durch Umformung

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = 0$$

erhält man folgende Gleichung der Kurvennormalen

$$x_1 \dot{c}_1(t) - c_1(t) \dot{c}_1(t) + x_2 \dot{c}_2(t) - c_2(t) \dot{c}_2(t) = 0$$

$$n_1(t)x_1 + n_2(t)x_2 + n_0(t) = 0$$

$$n_i(t) = c_i(t), n_0(t) = -c(t) \cdot \dot{c}(t)$$

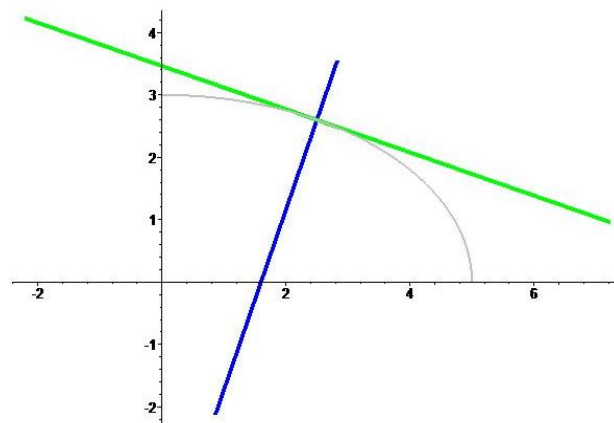


Abbildung 4: Kurvennormale und -tangente

In der obigen Figur, sowie in den folgenden ebenen Figuren, ist die Tangente in grün, und die Kurvennormale in blau dargestellt.

Die Kurvennormalen $n(t)$ der Kurve $c(t)$, $t \in I$ bestimmen eine einparametrische Geradenmenge und hüllen im Allgemeinen eine Kurve c^* ein, die Evolute der Kurve c , in der folgenden Figur fett dargestellt.

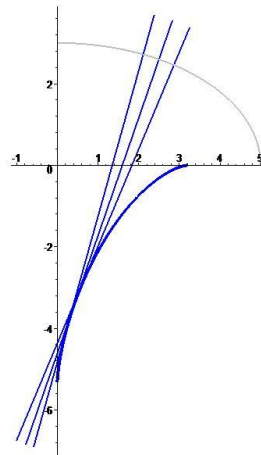


Abbildung 5: Kurvennormalen und Evolute

Die Evolute c^* einer Kurve c braucht nicht regulär zu sein, wie folgende Beispiele zeigen. Im Sonderfall eines Kreises c ist sie sogar punktförmig, denn die Kreisnormalen „hüllen“ den Kreismittelpunkt „ein“.

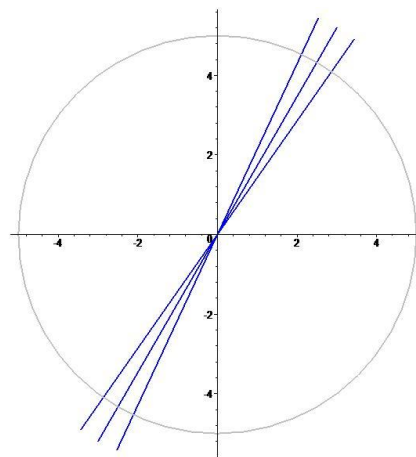


Abbildung 6: Normalen eines Kreises

Ist c eine Gerade, so sind alle Kurvennormalen zueinander parallel und es existiert keine Hüllkurve.

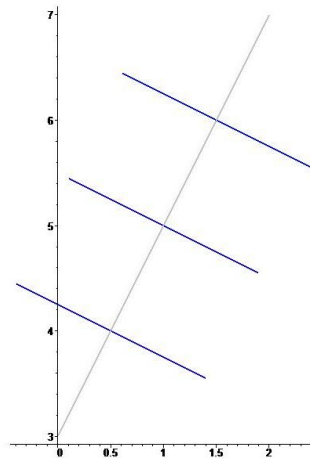


Abbildung 7: Normalen einer Geraden

Enthält eine Kurve Kreis- und/oder Geradenstücke, so ist die Evolutenbildung in diesen Bereichen nicht regulär.

Im Folgenden wird die Existenz der ersten und zweiten Ableitung der Kurve c vorausgesetzt.

Die Evolute c^* einer ebenen Kurve c ist definiert als Einhüllende aller Kurvennormalen, und sie ist auch die Menge der Krümmungsmitten von c , wie die folgende Diskussion zeigt.

Parameterdarstellung der Evolute

Man betrachtet den Schnittpunkt $H(t)$ der Kurvennormalen in zwei „benachbarten“ Punkten $c(t_0)$, $c(t)$ der parametrisierten Kurve $c(t)$, $t \in I$ (vgl. 2.1.1)

$$H(t) = n(t_0) \cap n(t)$$

Man betrachtet nun die Grenzlage $t \rightarrow t_0$

$$H(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} H(t)$$

Falls die Grenzlage $H(t_0)$ existiert, so ist dieser Punkt der Hüllpunkt in der Kurvennormalen, also der Berührungspunkt der Kurvennormale n mit der Evolute c^*

$$H(t_0) = n(t_0) \cap \frac{dn}{dt}(t_0) = n(t_0) \cap \dot{n}(t_0)$$

Zur Bestimmung von $\dot{n}(t_0)$ wird die Gleichung

$$x \cdot \dot{c}(t_0) - c(t_0) \cdot \dot{c}(t_0) = 0$$

der Kurvennormalen differenziert, das ergibt

$$x \cdot \ddot{c}(t_0) - \dot{c}(t_0)^2 - c(t_0) \cdot \ddot{c}(t_0) = 0$$

Als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$x \cdot \dot{c}(t_0) - c(t_0) \cdot \dot{c}(t_0) = 0$$

$$x \cdot \ddot{c}(t_0) - \dot{c}(t_0)^2 - c(t_0) \cdot \ddot{c}(t_0) = 0$$

ergibt sich das Koordinatenpaar des Hüllpunktes $H(t_0)$, und somit die Parametrisierung der Evolute c^*

$$c^*(t) = (c_1^*(t), c_2^*(t))$$

$$c_1^* = c_1 - \dot{c}_2 \frac{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2}{\dot{c}_1 \ddot{c}_2 - \dot{c}_1 \dot{c}_2}, \quad c_2^* = c_2 + \dot{c}_1 \frac{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2}{\dot{c}_1 \ddot{c}_2 - \dot{c}_1 \dot{c}_2}$$

Für $\det(\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)) = 0$ gibt es keine Lösung des Gleichungssystems. Dieser Fall tritt bei allen Wendepunkten der Kurve $c(t)$ auf. Es gibt dann keinen Berührungspunkt $H(t)$ von $n(t)$ mit $c^*(t)$ und keinen Krümmungsmittelpunkt von $c(t)$. In einem Wendepunkt von $c(t)$ ist der Krümmungsradius unendlich und der Krümmungskreis „verflacht“ in die Kurventangente.

Krümmungsradius

Um den Krümmungsradius zu berechnen, wird der Richtungsvektor der Kurvennormalen normiert

$$n(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} (-\dot{c}_2(t), \dot{c}_1(t)) = \frac{1}{\sqrt{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2}} (-\dot{c}_2(t), \dot{c}_1(t))$$

$$\rho(t) = \|c(t_0) - c^*(t_0)\| = \frac{\|\dot{c}(t)\|^3}{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}$$

$\rho(t_0)$ bezeichnet den orientierten Krümmungsradius.

Mithilfe des Krümmungsradius ergibt sich folgende Parametrisierung der Evolute

$$c^*(t) = c(t) + \rho(t)n(t)$$

$$n(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} (-c_2(t), c_1(t))$$

$$\rho(t) = \frac{\|\dot{c}(t)\|^3}{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}$$

Durch den Krümmungsradius wird der Krümmungskreis festgelegt, welcher die Kurve c optimal approximiert. Der Krümmungskreis ist in der folgenden Figur rot dargestellt.

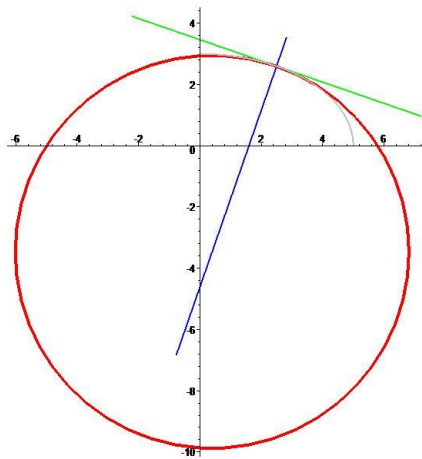


Abbildung 8: Krümmungskreis

Bezeichnet $\rho(t)$ den Krümmungsradius im Punkt $c(t)$, so ist die Krümmung κ folgendermaßen definiert

$$\kappa(t) = \left| \frac{1}{\rho(t)} \right|$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

$\kappa(t_0) > 0$... Die Kurve liegt ganz in der positiven Halbebene bezüglich der Kurventangente, dort weist die Kurvennormale hin.

$\kappa(t_0) < 0$... Die Kurve liegt ganz in der negativen Halbebene bezüglich der Kurventangente.

Im Allgemeinen durchsetzt die Kurve c den Krümmungskreis im Punkt P . In Sonderfällen kann die Kurve lokal ganz auf einer Seite des Krümmungskreises liegen, dann spricht man von einem Kurvenscheitel. Dieser Fall liegt z.B. in den Scheiteln der Kegelschnitte vor.

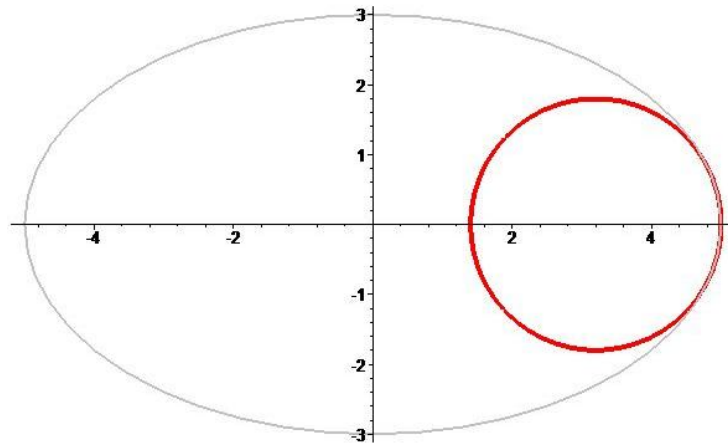


Abbildung 9: Krümmungskreis im Hauptscheitel der Ellipse

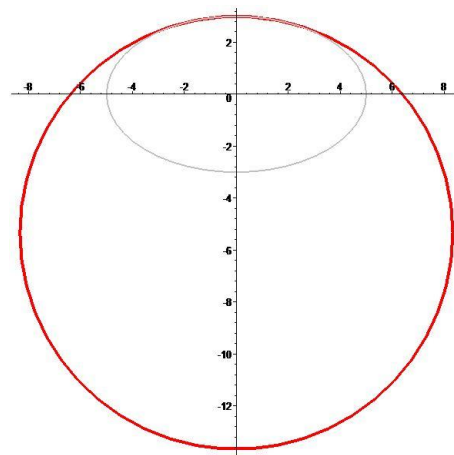


Abbildung 10: Krümmungskreis im Nebenscheitel der Ellipse

Ein Kreis hat konstante Krümmung $\kappa(t) = \pm \frac{1}{\rho(t)}$. Bei einer Geraden ist die Krümmung gleich Null.

Tangente, Normale, Evolute, Krümmungskreis, Krümmungsradius und der Betrag der Krümmung $|\kappa|$ einer Kurve sind nicht von der Parametrisierung oder Positionierung in der Ebene einer Kurve abhängig. Man nennt Begriffsbildungen dieser Art geometrische Begriffsbildungen der Kurve. Insbesondere sind der Tangentenvektor und Normalvektor geometrische Begriffsbildungen bezüglich gleichsinnigem Wechsel der Parametrisierung: Sie ändern ihre Orientierung bei Wechsel der Durchlaufrichtung der

Kurve. Die Krümmung jedoch ist vorzeichenbehaftet. In Wendepunkten und Flachpunkten ist die Krümmung gleich Null.

2.1.3 Offset einer ebenen Kurve

Eine reguläre ebene Kurve c ist durch ihre Parameterdarstellung gegeben

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$$

In jedem Punkt der Kurve c gibt es eine eindeutige Kurventangente und eine eindeutige Kurvennormale

$$n(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} (-\dot{c}_2(t), \dot{c}_1(t))$$

Auf den Normalen von c wird nun eine orientierte Strecke mit konstanter orientierter Länge $d \in \mathbb{R}$ aufgetragen. So entsteht die Offsetkurve oder Parallelkurve c_d von c im Abstand d . Im Zusammenhang mit Offsetkurven – und im Folgenden auch Offsetflächen – ist die Begriffsbildung „konstante orientierte negative Streckenlänge“ natürlich sinnvoll. Für $d = 0$ liegt natürlich die Ausgangskurve vor. Die Motivation für die Begriffsbildung „Parallelkurve“ folgt weiter unten.

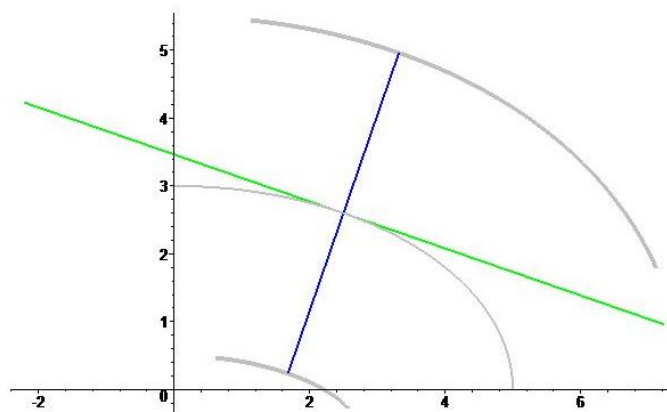


Abbildung 11: Offsetkurven einer ebenen Kurve

Auf jeder Normalen der Kurve c findet man also Punkte $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ mit der orientierten Distanz d zur Kurve c . Diese Punkte entstehen durch den Schnitt eines Kreises, mit Mittelpunkt $Q(t) \in c$ und Radius $|d|$, mit der Kurvennormalen $n(t)$.

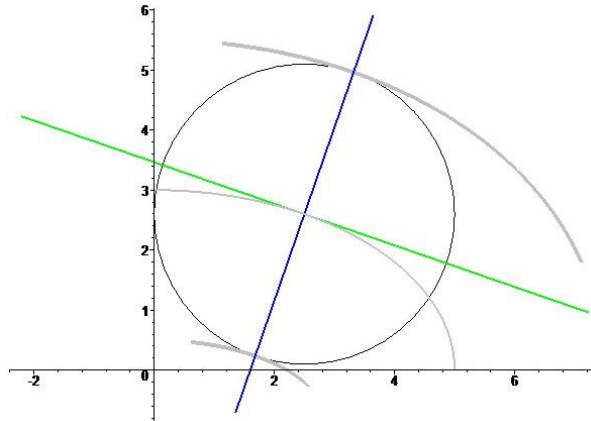


Abbildung 12: Offsetkurven hüllen Kreisschar ein

Man kann die Offsetkurve also auch als Hüllkurve von Kreisen betrachten. Die Mitten dieser Kreise liegen auf c , der Radius hat den Betrag $|d|$.

Variiert d , so erhält man eine ganze Schar von Offsetkurven.

Parameterdarstellung der Offsetkurve

Um die Parameterdarstellung der Offsetkurve c_d zu erhalten, wird nun zu jedem Punkt $c(t)$ der Kurve c die orientierte Distanz d in Richtung des Normalvektors addiert

$$\mathbf{c}_d(t) = \mathbf{c}(t) + d \mathbf{n}(t), \quad \|\mathbf{n}(t)\| = 1$$

Differenziert man nun die Identität $\mathbf{n}^2(t)=1$, so erhält man die Gleichung

$$\mathbf{n}(t) \cdot \dot{\mathbf{n}}(t) = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man erkennen, dass $\dot{\mathbf{n}}$ normal zu $\mathbf{n}$ liegt, und daher $\dot{\mathbf{n}}$ parallel zu $\dot{\mathbf{c}}$ ist.

Die Tangentenrichtung von c_d berechnet sich aus der Ableitung von c_d

$$\dot{\mathbf{c}}_d(t) = \dot{\mathbf{c}}(t) + d \cdot \dot{\mathbf{n}}(t)$$

Da $\dot{\mathbf{c}}$ und $\dot{\mathbf{n}}$ linear abhängig sind, haben c_d und c in entsprechenden Punkten die gleiche Kurvennormale. Dadurch sind auch alle Tangenten von c parallel zu den Tangenten von c_d , das rechtfertigt die Bezeichnung „Parallelkurve“.

Da nun c und c_d in entsprechenden Punkten parallele Tangentenvektoren $\dot{c}(t_0)$ und $\dot{c}_d(t_0)$ haben, und daher auch gleiche Kurvennormalen besitzen, besitzen auch alle Kurven der Menge $\{c_d, d \in \mathbb{R}\}$ die gleiche Evolute c^* .

Umgekehrt entstehen alle Kurven der Menge $\{c_d, d \in \mathbb{R}\}$ durch einen ebenen Bewegungsvorgang aus der Evolute c^* . Die Tangenten von c^* sind die Normalen der Kurven von $\{c_d, d \in \mathbb{R}\}$. Wird nun eine Tangente g von c^* auf c^* abgerollt, so durchläuft ein fester Punkt $P \in g$ die Kurve c_d . $\{c_d, d \in \mathbb{R}\}$ sind die Evolventen der Evolute c^* .

Der Punkt $c^*(t_0)$ auf $n(t_0)$ ist das momentane Drehzentrum für die Änderung der Normalen beim beschriebenen Abrollvorgang, also der Krümmungsmittelpunkt von c in $P = c(t_0)$.

Ein Kreis, der die Kurve c in $P = c(t_0)$ berührt, hat also seinen Mittelpunkt auf $n(t_0)$. Derjenige Kreis mit Mittelpunkt $c^*(t_0)$ approximiert die Kurve am besten, ist also der Krümmungskreis von c im Punkt P .

2.2 Raumkurven

2.2.1 Tangente

Punkte im Raum werden durch ihre Koordinaten $X=(x_1, x_2, x_3)$ im räumlichen kartesischen $x_1x_2x_3$ -Koordinatensystem angegeben. Eine Raumkurve c hat die Parameterdarstellung

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)), t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

Ihre Koordinaten besitzen die Koordinatenfunktionen

$$c_i: t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow c_i(t) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

Wir setzen im Folgenden stets hinreichend oftmalige Differenzierbarkeit voraus.

Analog zur Ebene lautet der erste Ableitungsvektor

$$\dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t), \dot{c}_3(t)), \dot{c}_i(t) = \frac{dc_i}{dt}$$

Ein Punkt $c(t_0)$ der Raumkurve c ist regulär, wenn gilt

$$\dot{c}(t_0) \neq (0,0,0)$$

Der 1. Ableitungsvektor $\dot{c}(t_0)$ gibt den Richtungsvektor der Tangente an. Diese besitzt daher die Parameterdarstellung

$$c(t_0) + \lambda \dot{c}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Interpretiert man t als Zeit, so ist $\dot{c}(t)$ der Geschwindigkeitsvektor. Sein Betrag $\|\dot{c}(t)\|$ gibt die Geschwindigkeit des in c „laufenden“ Punktes $c(t)$ an.

Bogenlänge

Betrachtet man zwei Parameterwerte $a < b$ aus dem Intervall I , so berechnet sich die Bogenlänge $L(a,b)$ zwischen den Kurvenpunkten $c(a)$ und $c(b)$ auf folgende Weise

$$L(a,b) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt, \quad \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t)} = \sqrt{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2 + \dot{c}_3^2}$$

Bei Bogenlängenparametrisierung, also konstanter Geschwindigkeit $\|\dot{c}(t)\| = 1$, lautet die Bogenlänge $L(a,b) = b - a$. Sie wird beschrieben durch die Grenzlage eines Sehnepolygons, dessen Knoten auf der Raumkurve c liegen.

Der normierte Ableitungsvektor wird als Tangentenvektor $t(t_0) = \dot{c}(t_0)$ bezeichnet.

Eine reguläre parametrisierte Kurve $c(t)$ kann stets auf die Bogenlänge „umparametrisiert“ werden. Wir setzen daher im Folgenden eine Bogenlängenparametrisierung von c voraus.

2.2.2 Schmiegeebene

Die Tangente in P approximiert die Raumkurve c in der Umgebung von P geradlinig. Nun ist eine Ebene durch die Kurventangente in P gesucht, welche die Raumkurve c möglichst gut approximiert. Liegt die Kurve in einer Ebene, so ist die gesuchte Ebene die Trägerebene der Kurve.

Wie schon erwähnt, entsteht die Tangente $c(t_0) + \lambda \cdot \dot{c}(t_0)$ aus dem Grenzwert einer Folge von Sehnen. Nun wird eine Ebene durch die Tangente und einen „benachbarten“ Kurvenpunkt $c(t)$ gelegt. Man erhält die Ebene

$$c(t_0) + \lambda \cdot \dot{c}(t_0) + \mu(c(t) - c(t_0))$$

Die Grenzlage dieser Ebene

$$\sigma(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \sigma(t)$$

ist die Schmiegeebene $\sigma(t)$ der Raumkurve c im Kurvenpunkt $c(t_0)$ mit Parameterdarstellung

$$x(\lambda, \mu) = c(t_0) + \lambda \cdot \dot{c}(t_0) + \mu \cdot \ddot{c}(t_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Voraussetzung ist, dass c in der Umgebung von P nicht geradlinig verläuft.

Die Schmiegeebene $\sigma(t)$ wird aufgespannt durch den ersten Ableitungsvektor $\dot{c}(t)$, dieser entspricht bei Interpretation von t als Zeit dem Geschwindigkeitsvektor, und dem zweiten Ableitungsvektor $\ddot{c}(t)$, welcher dem Beschleunigungsvektor entspricht.

Liegt eine Bogenlängenparametrisierung vor, und wird die Identität $\dot{c}(t) = 1$ differenziert, so erhält man

$$\dot{c}(t) = 1 \Rightarrow \dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0$$

Daraus folgt, dass der zweite Ableitungsvektor normal zum Tangentenvektor $t(t) = \dot{c}(t)$ liegt. Wird der zweite Ableitungsvektor jetzt noch gleichsinnig normiert, so erhält man den Normalvektor der Raumkurve

$$n(t) = \frac{1}{\|\ddot{c}(t)\|} \ddot{c}(t)$$

2.2.3 Krümmungskreis

Die Normalebene $v(t)$ einer Raumkurve liegt normal zur Kurventangente. Sie besitzt daher die Parameterdarstellung

$$v(t) = (x - c(t)) \cdot \dot{c}(t) = x \cdot \dot{c}(t) - c(t) \cdot \dot{c}(t) = 0$$

Alle Normalebenen einer Raumkurve hüllen eine abwickelbare Fläche ein. Eine derartige Fläche nennt man Torse.

Nun betrachtet man die Schnittgerade der Normalebene $v(t)$ mit der Ableitungsebene $\dot{v}(t)$, deren Gleichung lautet

$$x \cdot \ddot{c}(t) - \dot{c}(t)^2 - c(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0$$

Diese Schnittgerade $v(t) \cap \dot{v}(t)$ ist die Krümmungsachse der Raumkurve c . Schneidet man nun noch die Krümmungsachse mit der Schmiegeebene $\sigma(t)$ der Raumkurve, so erhält man den Krümmungsmittelpunkt

$$K(t) = v(t) \cap \dot{v}(t) \cap \sigma(t)$$

Der in $K(t)$ zentrierte Kreis in der Schmiegeebene $\sigma(t)$ approximiert die Raumkurve c am besten. Man nennt ihn den Krümmungskreis. Sein Radius ist der Abstand vom Krümmungsmittelpunkt zum jeweiligen Punkt der Raumkurve

$$\rho = \|c^* - c\|$$

Sind die Ableitungsvektoren $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ linear unabhängig, so ist die Raumkurve c in der Umgebung von $c(t)$ nicht geradlinig, und es existiert eine Schmiegeebene $\sigma(t)$ mit folgender Parametrisierung

$$c(t) + \lambda \dot{c}(t) + \mu \ddot{c}(t)$$

Folgende Bedingungen für die Berechnung von λ, μ müssen erfüllt sein

$$\lambda \dot{c}^2 + \mu (\dot{c} \cdot \ddot{c}) = 0$$

$$\lambda (\dot{c} \cdot \ddot{c}) + \mu \ddot{c}^2 = \dot{c}^2$$

$$\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2 = \dot{c}^2 \cdot \ddot{c}^2 - (\dot{c} \cdot \ddot{c})^2$$

$$c^* = c - \frac{\dot{c}^2 (\dot{c} \cdot \ddot{c})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2} \cdot \dot{c} + \frac{\dot{c}^4}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2} \cdot \ddot{c}$$

c^* ist die vom Krümmungsmittelpunkt durchlaufene Kurve, also die Evolute der Raumkurve c .

Nun lässt sich der Krümmungsradius berechnen

$$\rho = \|c^* - c\| = \frac{\|\dot{c}\|^3}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}$$

Die Krümmung ist der Kehrwert des Krümmungsradius

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3}$$

Handelt es sich um eine Bogenlängenparametrisierung, so gilt $\kappa = \|\ddot{c}\|$, also

$$\ddot{c}(t) = \kappa \cdot n(t)$$

Bogenlänge, Kurventangente, Normalvektor, Schmiegebene, Krümmung und Krümmungskreis sind geometrische Begriffsbildungen der Kurve c . Der Tangentenvektor hingegen wechselt seine Richtung beim Wechsel der Parametrisierung.

2.2.4 Frenet-Begleitbasis

Ohne Einschränkung wird eine Bogenlängenparametrisierung $c(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ angenommen, es gilt also $\|\dot{c}(t)\| = 1$. Dann erhält man den Tangentenvektor $t(t) = \dot{c}(t)$, sowie den Normalvektor durch Umformung von $\ddot{c}(t) = \kappa n(t)$. Diese beiden Vektoren werden nun zu einem Tripel ergänzt

$$t(t) = \dot{c}(t), n(t) = \frac{1}{\|\ddot{c}(t)\|} \cdot \ddot{c}(t), b(t) = t(t) \times n(t)$$

Der Vektor $b(t)$ ist der Binormalenvektor der Raumkurve c . Das Tripel (t, n, b) nennt man die Frenet-Begleitbasis. Sie wird in jedem Punkt der Kurve angehängt. Mithilfe der Frenet-Begleitbasis erhält man

$$\text{Schmiegebene } \sigma(t) = c(t) + \lambda t(t) + \mu n(t)$$

$$\text{Normalebene } \nu(t) = c(t) + \lambda n(t) + \mu b(t)$$

$$\text{Rektifizierende Ebene } \beta(t) = c(t) + \lambda t(t) + \mu b(t)$$

Die Änderung der Frenet-Begleitbasis $(\dot{t}, \dot{n}, \dot{b})$ kann mit der folgenden Matrix dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

Dies sind die Frenetschen Ableitungsgleichungen. Die Krümmung κ beschreibt die Änderung der Kurventangente, die Torsion τ gibt die Änderung der Schmiegtangente an. Abschließend noch die Formel für die Berechnung der Torsion

$$\tau = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{\|\ddot{c}\|^2}$$

Die Krümmung κ ist immer größer oder gleich Null. Die Torsion τ hingegen ist vorzeichenbehaftet. Das Vorzeichen der Torsion ist abhängig von der Position der Frenet-Begleitbasis zur Schmiegeebene $\sigma(t)$.

Normalvektor, Krümmung und Torsion sind geometrische Begriffsbildungen. Tangentenvektor und Binormalenvektor sind von einem gleichsinnigen Wechsel der Parametrisierung abhängig.

2.3 Flächen

2.3.1 Parameterdarstellung

Punkte X einer Ebene E im Raum werden unter Verwendung von linearen Funktionen $x_i(u, v)$ wie folgt dargestellt

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \quad , (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Die Abbildung $x: (u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x(u, v) \in \mathbb{R}^3$ bildet die uv -Ebene auf die Ebene E im Raum ab.

Betrachtet man nun allgemeine Flächen im Raum R , so wird ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ in den Raum $\mathbb{R}^3$ abgebildet

$$x: (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

$x(U) = \Phi$ bezeichnet ein Flächenstück im Raum $\mathbb{R}^3$. Die Funktionen $x_i(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ sind die Koordinatenfunktionen der parametrisierten Fläche Φ .

2.3.2 Flächenkurven, Flächentangente, Tangentialebenen

Die Parameterdarstellung $x(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stellt ein Flächenstück Φ dar. Betrachtet man die achsenparallelen Geraden zu den Parameterwerten $u = u_0$ und $v = v_0$, so werden diese auf die Parameterlinien von Φ durch den Punkt $X_0 = x(u_0, v_0)$, welcher aus dem Punkt $P_0 = (u_0, v_0)$ entsteht, abgebildet.

Nun werden die partiellen Ableitungen der Fläche Φ in einem Punkt gebildet

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = x_u(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = x_v(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)$$

Die Vektoren $x_u(u_0, v_0)$ und $x_v(u_0, v_0)$ sind die Tangentialvektoren der Parameterlinien im Punkt X_0 . Sind x_u und x_v linear unabhängig, so spannen sie die Tangentialebene τ_0 von Φ in X_0 auf

$$x(u_0, v_0) + s x_u(u_0, v_0) + t x_v(u_0, v_0) \quad , (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

In einem regulären Punkt der Fläche Φ sind die beiden partiellen Ableitungen x_u und x_v linear unabhängig. Somit lässt sich der Normalvektor n berechnen

$$n(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0) \times x_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0)$$

Die Gerade n_0 durch den Punkt X_0 in Richtung des Normalvektors ist die Flächennormale von Φ mit Parameterdarstellung

$$x(u_0, v_0) + \lambda n(u_0, v_0) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Bei Selbstdurchdringung einer Fläche längs einer Kurve k ist ein Punkt X_0 durch zwei unterschiedliche Parameterpaare (u_0, v_0) und (u_1, v_1) gegeben. Diese „Teilbereiche“ um die Punkte in U haben unterschiedliche Normalvektoren und Flächennormalen. Bei Selbstberührung hingegen haben die Punkte gleiche Flächennormalen.

Besitzt eine Fläche nur reguläre Punkte, so spricht man von einer regulären Fläche. Ein singulärer Punkt der Fläche ist durch die lineare Abhängigkeit von den partiellen Ableitungen x_u und x_v gekennzeichnet. Dies tritt z.B. in einer Kegelspitze auf.

Eine parametrisierte Kurve $l \subset U$ mit der Parameterdarstellung $l(t) = (u(t), v(t))$ wird abgebildet auf die Kurve k_l in Φ . Sie besitzt dann die Parameterdarstellung $x(u(t), v(t)) = x(t)$ und geht durch den Punkt $x(t_0)$. Ihr Ableitungsvektor $\dot{x}(u(t), v(t))$ berechnet sich mithilfe der Kettenregel

$$\dot{x}(u(t), v(t)) = x_u(u, v) \cdot \dot{u}(t) + x_v(u, v) \cdot \dot{v}(t)$$

Die Gerade durch X_0 in Richtung $\dot{x}(u(t_0), v(t_0))$ ist die Tangente an die Flächenkurve $k_l \in \Phi$, sie wird auch Flächentangente genannt.

Mit der Parametrisierung $x(u, v) = (u, v, z(u, v))$ wird eine Fläche als Graph einer Funktion $z(u, v)$ dargestellt. Diese Art der Parametrisierung ist stets regulär, denn

$$n = x_u \times x_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_v \end{pmatrix} = (-z_u, -z_v, 1) \neq 0$$

Bei der Graphdarstellung einer Kurve $l(t) = (u(t), v(t))$ wird also die Koordinate $x_3(u(t), v(t)) = x_3(t)$ „über“ den Punkten von l aufgetragen.

2.3.3 Offset einer Fläche

Die Definition von Offsetflächen wird analog zur Definition von Offsetkurven in den Raum übertragen, es gelten dann weitgehende Analogien: Eine feste Distanz $d \in \mathbb{R}$ wird von einer Fläche entlang der Flächennormalen aufgetragen. Bei fester Distanz d ergibt sich aus einer regulären Fläche Φ ihre Offsetfläche Φ_d . Die Fläche Φ und alle ihre Offsets Φ_d besitzen in den Punkten einer festen Flächennormalen der Ausgangsfläche Φ stets gleiche Flächennormalen, die Tangentialebenen von Φ und Φ_d sind in „auf dieser Art entsprechenden Punkten“ parallel zueinander, daher handelt es sich bei Offsets von Flächen um Parallellflächen.

Offsetflächen Φ_d können auch als Hülle von Kugeln mit festem Radius $|d|$ und Mitte auf Φ angesehen werden: Auf jeder Flächennormalen der Ausgangsfläche Φ findet man zwei Punkte der Offsetflächen Φ_d .

Parameterdarstellung einer Offsetfläche

Die Parameterdarstellung einer regulären Fläche Φ im $\mathbb{R}^3$ hat folgende Gestalt

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

Der Normalvektor einer parametrisierten Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ berechnet sich aus dem Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$. Normiert man den Normalvektor, so wird die Parameterdarstellung der Offsetfläche Φ_d auf folgende Weise dargestellt

$$\mathbf{x}_d(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + d\mathbf{n}(u, v), d \in \mathbb{R}$$

Bei speziellen Flächenklassen gehören die Offsetflächen dem gleichen Flächentyp wie die Ausgangsfläche an. Dazu zählen zum Beispiel Zylinder- und Drehflächen.

3 Störungen der Regularität von Offsets

3.1 Störungen der Regularität in der Ebene

Bei entsprechender Distanz d treten Störungen der Regularität an den Offsetkurven von ebenen Kurven $c(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ zuerst an jenen Stellen auf, an denen sich der minimale Krümmungsradius befindet.

Diese Eigenschaft wird nun am Beispiel der Ellipse und ihren Offsetkurven veranschaulicht.

3.1.1 Diskussion der Störungen der Regularität von Offsetkurven am Beispiel der Ellipse

Die äußere Offsetkurve einer Ellipse ist stets regulär. Die innere Offsetkurve einer Ellipse weist genau dann Spitzen auf, wenn $d > \rho_{\min}$ bzw. $d < \rho_{\max}$. Die minimalen und maximalen Krümmungsradien einer Ellipse findet man genau in den Haupt- und Nebenseiteln.

Ein Zweig der inneren Offsetkurve c_d mit

$$\rho_{\min} \leq d \leq \rho_{\max}$$

hat Spitzen an der Evolute c^* . Die Spitzen entsprechen den Kurvenpunkten $c_d(t)$, an denen $d = \rho(t)$ gilt. An jeder Spitze trifft die Offsetkurve die Evolute orthogonal.

In den folgenden Figuren ist die Ellipse rot, die innere Parallelkurve grün, die äußere Parallelkurve magenta und die Evolute blau dargestellt.

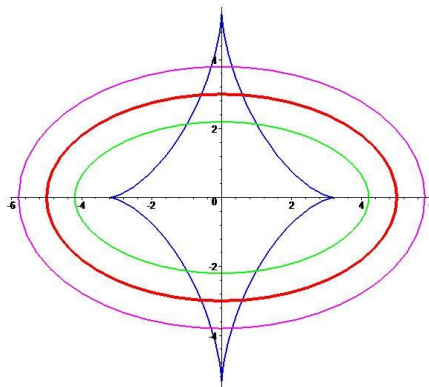
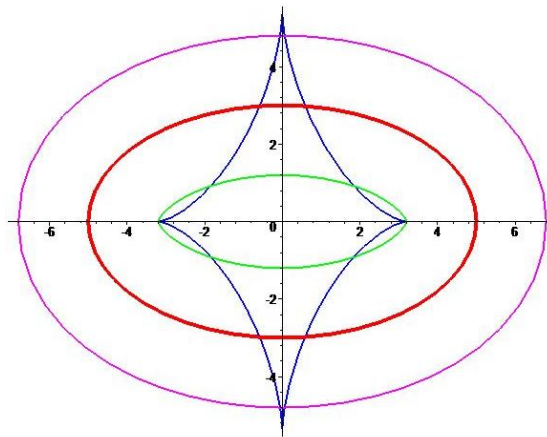
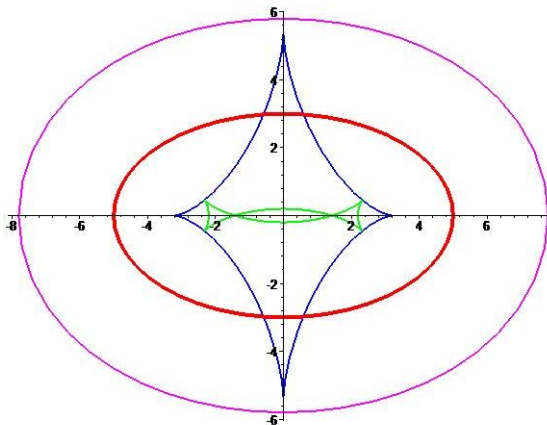
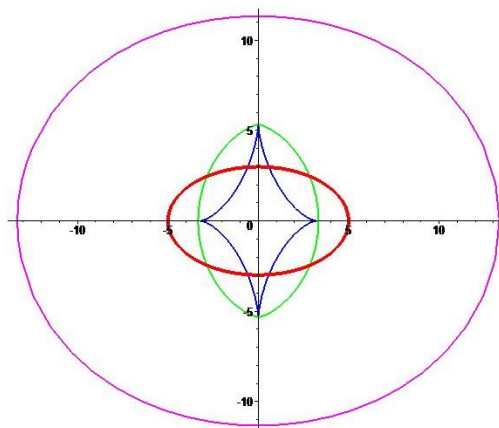


Abbildung 13: Offsetkurven der Ellipse bei $d < r_{\min}$

Abbildung 14: Offsetkurven der Ellipse bei $d=r_{\min}$ Abbildung 15: Offsetkurven der Ellipse bei $r_{\min} < d < r_{\max}$ Abbildung 16: Offsetkurven der Ellipse bei $d=r_{\max}$

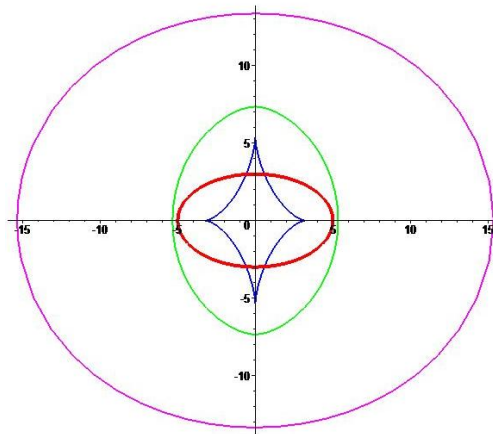


Abbildung 17: Offsetkurven der Ellipse bei $d > r_{\max}$

Störungen der Regularität einer ebenen Kurve sind abhängig von

- der Positionierung der Offsetkurve bezüglich ihrer Ausgangskurve und deren Tangenten
- dem Betrag $|d|$ der orientierten Strecken entlang der Kurvennormalen.

3.2 Störungen der Regularität im Raum

Wie schon erwähnt, werden Offsetflächen oft benötigt, um Materialstärken zu berücksichtigen. Dazu wird eine orientierte Strecke der Länge d auf der Normalen der Ausgangsfläche abgetragen.

Die so entstehende Offsetfläche kann reguläre Störungen enthalten. Diese Störungen sind von mehreren Punkten abhängig:

- Die Lage der Ausgangsfläche zu ihren Tangentialebenen, also ob sie diese durchsetzt oder nicht, beeinflusst die Gestalt der Offsetfläche.
- Störungen der Offsetfläche sind weiters abhängig von der Positionierung der Offsetfläche zur Ausgangsfläche und deren Tangentialebenen.
- Ein weiterer wichtiger Punkt ist der Betrag $|d|$ der Distanz d . Dieser darf nicht „zu groß“ gewählt werden. Um den Abstand der Offsetfläche zu ihrer Ausgangsfläche abzuschätzen, betrachtet man das Verhalten der Krümmungen der Normalschnitte von Φ in einer Umgebung Φ_0 eines bestimmten Punktes X_0 auf Φ . Dazu berechnet man eine Näherungsfläche $\bar{\Phi}$.

3.2.1 Reihenentwicklung nach Taylor

Wir verwenden in diesem Abschnitt statt der Koordinaten x_1, x_2, x_3 die Bezeichnung x, y, z , da die Indexposition für partielle Ableitungen verwendet wird. Die Näherungsfläche $\bar{\Phi}$ wird in ein xyz -Koordinatensystem gelegt, wobei der Punkt X_0 den Ursprung des Koordinatensystems darstellt und die Tangentialebene τ_0 von Φ in X_0 in der xy -Ebene liegt.

Ein Teilbereich Φ_0 von Φ wird nun als Graph einer einzigen Funktion über der xy -Ebene dargestellt

$$\Phi_0 = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2\}$$

$$f: (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Schritt 1

Im ersten Schritt wird f durch eine möglichst einfache Ersatzfunktion $\bar{f}$ approximiert. Das heißt, der Graph von f wird durch einen Graph $\bar{\Phi}$ von $\bar{f}$ lokal „hinreichend genau“ ersetzt.

Ein Hilfsmittel zur Analyse von Funktionen in der Umgebung eines festen Parameterwertes t_0 ist die Taylorreihe an der sogenannten „Entwicklungsstelle“. Nachfolgend die Taylorreihe $f(x)$ für Kurven bzw. $f(x, y)$ für Flächen

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + (^3)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ & + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + (^3) \end{aligned}$$

Dabei enthalten die Symbole $(^3)$ die Ableitungen der Koordinatenfunktionen $f(x)$ bzw. $f(x, y)$ von mindestens der Ordnung 3.

Mathematischer Inhalt der Taylorformeln

Funktionswerte $f(x)$ können mithilfe der Taylorformeln als unendliche Summe (Reihe) berechnet werden. Die mathematische Anwendung der Taylorformeln besteht nun darin, die unendliche Summe bereits nach endlich vielen Summanden abubrechen. Im Folgenden betrachten wir nur Summanden bis zum Grad zwei. So erhält man einen Funktionswert eines näherungsweise endlichen Polynoms in ein bzw. zwei Variablen $(x - x_0)$ bzw. $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$, welche die Koordinatendifferenz zwischen der festen Entwicklungsstelle und dem „laufenden“ Punkt angeben.

Man unterscheidet folgende Taylorpolynome für Kurven (in x) und Flächen (in x und y):

Konstantes Startpolynom

$$f^{(0)}(x) = f(x_0)$$

$$f^{(0)}(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Taylorpolynom vom Grad 1 (lineares Taylorpolynom)

$$f^{(1)}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f^{(1)}(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Taylorpolynom vom Grad 2 (quadratisches Taylorpolynom)

$$f^{(2)}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ & + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] \end{aligned}$$

Vor allem das quadratische Taylorpolynom ist wichtig für die geometrischen Diskussionen in dieser Arbeit. Die Koeffizienten der Taylorpolynome zweiten Grades sind die Ableitungen von f an der Entwicklungsstelle.

Für Kurven:

$$f'(x_0), f''(x_0), \dots$$

Für Flächen:

$$f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), f_{xx}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0), \dots$$

Wichtige Punkte beim „Abbrechen“ der Taylorreihe

Um eine qualitativ sinnvolle Näherung der Funktionswerte zu erhalten, ist es wichtig, einige Punkte zu beachten.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Umgebung $I_0 \subset \mathbb{R}$ bzw. $I_0 \subset \mathbb{R}^2$ der Entwicklungsstelle X_0 und der Qualität der Ergebnisse, das heißt die Differenz zum tatsächlichen Funktionswert. Dieser Zusammenhang ist abhängig von der Funktion f . Aus diesem Grund muss die Umgebung $I_0 \subset \mathbb{R}$ bzw. $I_0 \subset \mathbb{R}^2$ manchmal „sehr klein“ gewählt werden.

Die Genauigkeit der Ergebnisse ist weiters abhängig vom Grad des Taylorpolynoms von f , also von der maximalen Ordnung der verwendeten Ableitungen an der Entwicklungsstelle. Bei geometrischen Anwendungen sind meist nur Ableitungen ersten und zweiten Grades von Bedeutung. Polynomteile dritten und gegebenenfalls höheren Grades werden zu einem Restglied zusammengefasst. Dazu ist die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen dritten und vierten Grades erforderlich. Die Abschätzung des Restglieds ist meist sehr aufwändig, im Computeralgebrasystem Maple findet man dazu entsprechende Funktionen.

Zusammenfassend suchen wir im ersten Schritt ein Taylorpolynom für die Funktion

$$\bar{f} = f^{(2)}(x, y)$$

mithilfe derer man eine „hinreichend genau“ approximierende Fläche

$$\bar{\Phi} = \left\{ (x, y, \bar{f}(x, y)) \mid (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

für die Fläche Φ in der Umgebung eines Punktes erhält.

Das nächste Ziel ist es, die Funktion $f^{(2)}(x,y)$ durch geeignete Wahl des Koordinatensystems weiter zu vereinfachen.

Schritt 2

Man betrachtet nun eine lokale Graphdarstellung der regulären Fläche Φ . Der Punkt X_0 wird in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Dies führt zu

$$(x_0, y_0) = (0,0)$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = 0$$

Die Tangentialebene τ_0 in X_0 liegt in der xy -Ebene. Daraus ergeben sich folgende Ergebnisse

$$f_x(x_0, y_0) = f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = f_y(0,0) = 0$$

Weiters ergibt sich nun die Taylorentwicklung

$$f(x,y) = \frac{1}{2} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + \text{O}(3)$$

$$f^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2]$$

Betrachtet man nun einen festen Flächenpunkt $X_0 = (0,0, f(0,0)) = 0$, so werden Koeffizienten definiert

$$f_{xx}(0,0) = p$$

$$f_{xy}(0,0) = q$$

$$f_{yy}(0,0) = r$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung der Fläche

$$f^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2} (px^2 + 2qxy + ry^2)$$

Im Allgemeinen gilt nicht $p = q = r = 0$. Ausnahmepunkte sind Flachpunkte von Φ , diese kommen z.B. in ebenen Flächen vor. Um die Funktion weiter zu vereinfachen, das heißt das gemischte Element qxy zu eliminieren, wird die xy -Ebene noch mit dem Drehwinkel t um die z -Achse verdreht. Im Sonderfall $f_{xy}(0,0) = q = 0$ ist dieses Ziel bereits erreicht. Für eine Drehung um die z -Achse verwendet man folgende Formel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man erhält aus der obigen Funktion

$$f(x', y') = \frac{1}{2} (p'x'^2 + 2q'x'y' + r'y'^2)$$

wobei sich q' nun durch p und r ausdrücken lässt

$$q' = (r - p)\sin 2t + 2q\cos 2t$$

Nun lässt sich der Drehwinkel t_0 berechnen

$$\tan 2t_0 = \frac{2q}{p - r}$$

Eine konkrete Berechnung von p' und r' ist hier nicht von Bedeutung, daher werden wieder die alten Bezeichnungen x, y, z und $p, q = 0, r$ verwendet.

Zusammenfassung

Die reguläre Ausgangsfläche Φ besitzt also um den Flächenpunkt $X_0 = 0$ ohne Einschränkung eine Umgebung $\Phi_0 \subset \Phi$ mit folgender Graph-Darstellung

$$\Phi = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2\}$$

wobei $f(x, y)$ dabei durch das Taylorpolynom zweiten Grades approximiert wird

$$f^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} (px^2 + ry^2)$$

X_0 liegt im Ursprung des Koordinatensystems, die Tangentialebene τ_0 in der xy -Ebene.

Für die Koeffizienten p und r gelten folgende Definitionen

$$p = f_{xx}(0,0) = f_{xx}^{(2)}(0,0)$$

$$r = f_{yy}(0,0) = f_{yy}^{(2)}(0,0)$$

3.2.2 Berührung zweier Kurven bzw. Flächen in einem Punkt

Zwei Kurven bzw. Flächen berühren einander, wenn ihre gewöhnlichen bzw. partiellen Ableitungen übereinstimmen. Stimmen die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung überein, spricht man von Berührung zweiter Ordnung oder Oskulation. Stimmen nur die ersten Ableitungen überein, so handelt es sich um „gewöhnliche“ Berührung. Bei Oskulation von Kurven haben die beiden Kurven gleiche Krümmung im Berührungspunkt. Bei Oskulation von Flächen haben alle Schnitte durch X_0 gleiche Krümmung.

Da hier Funktionswerte und erste und zweite Ableitungen von f und $\bar{f}$ übereinstimmen, ist die Untersuchung von Krümmungen der Ausgangsfläche Φ auch an der Näherungsfläche

$$\bar{\Phi} = \Phi^{(2)} = \left\{ (x, y, f^{(2)}(x, y)) \mid (x, y) \in U_0 \subset U \right\}$$

im Punkt $X_0 = (0,0,0)$ möglich.

Die implizite Darstellung von $\Phi_0 \subset \Phi$ lautet

$$z = f^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}(px^2 + ry^2)$$

3.2.3 Visualisierung der Näherungsfläche

Man unterscheidet vier Typen der Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ von Φ im Flächenpunkt $X_0 = (0,0,0)$. Diese sind abhängig von den Vorzeichen der Konstanten p und r . Man nennt diese Flächen „quadratische Flächen“.

- $\text{sgn } p = \text{sgn } r$

Haben die beiden Koeffizienten p und r gleiches Vorzeichen, handelt es sich um ein elliptisches Paraboloid. Der Punkt $X_0 = (0,0,0)$ liegt im Flächenscheitel und wird deshalb als elliptischer Flächenpunkt bezeichnet.

- $\text{sgn } p \neq \text{sgn } r$

Haben die beiden Koeffizienten p und r unterschiedliche Vorzeichen, handelt es sich bei $\Phi^{(2)}$ um ein hyperbolisches Paraboloid. X_0 liegt im Flächenscheitel und X_0 ist ein hyperbolischer Flächenpunkt.

- $p \cdot r = 0$, aber $(p, r) \neq (0, 0)$

In diesem Fall handelt es sich bei $\Phi^{(2)}$ um einen parabolischen Zylinder. X_0 liegt auf der Scheitelerzeugenden und wird Flächenpunkt genannt.

- $p = r = 0$

Verschwinden beide Koeffizienten, fällt die Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ in die xy -Ebene und X_0 heißt Flachpunkt von Φ .

Elliptischer bzw. hyperbolischer Punkt

Das lokale Verhalten einer Fläche Φ in einem elliptischen oder hyperbolischen Punkt $X_0 \in \Phi$ ist einheitlich. Die oberhalb beschriebenen Koeffizienten p und r sind ungleich Null, variieren mit X_0 stetig und sind in der ganzen Fläche $\Phi^{(2)}$ ungleich Null. Dazu gibt es folgende Aussage der Differentialgeometrie: „Nichtnullstellen einer stetigen Funktion liegen nicht isoliert“.

Um einen elliptischen Flächenpunkt X_0 betrachten wir eine flächenhafte Umgebung $\Phi_0 \subset \Phi$. Die Tangentialebene hat mit Φ_0 nur X_0 gemeinsam. Das heißt, dass die Fläche Φ lokal ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt. Die flächenhafte Umgebung eines elliptischen Flächenpunktes enthält nur elliptische Flächenpunkte.

Auch um einen hyperbolischen Flächenpunkt betrachten wir eine flächenhafte Umgebung Φ_0 , jedoch wechselt die Fläche stetig von einer auf die andere Seite von τ_0 . Die Schnittkurve von Φ mit τ_0 sind die beiden Scheitelerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids. Φ durchsetzt die Tangentialebene τ_0 . Die flächenhafte Umgebung eines hyperbolischen Punktes besteht nur aus hyperbolischen Flächenpunkten.

Weiters gibt es noch zusammenhängende Flächen, welche elliptische und hyperbolische Flächenteile enthalten. Diese beiden Teile werden durch Flächenkurven getrennt. Diese Flächenkurven bestehen aus parabolischen Flächenpunkten oder Flachpunkten.

Beispiel – Ringtorus

Im Innenbereich des Ringtorus befinden sich hyperbolische Punkte, im Außenbereich elliptische Punkte. Getrennt werden diese beiden Bereiche von den Plattkreisen, welche aus parabolischen Punkten bestehen.

Parabolische Flächenpunkte

Das lokale Verhalten einer Fläche in der Umgebung eines parabolischen Flächenpunktes ist nicht einheitlich. Es ist mindestens einer der Koeffizienten p oder r gleich Null. Diese Nullstellen können isoliert sein oder in einem ganzen Intervall vorkommen. Man unterscheidet zwei Arten von parabolischen Zylindern:

Besitzt die Fläche Φ nur Flachpunkte, so handelt es sich um eine Ebene.

Besitzt die Fläche hingegen nur parabolische Punkte, so ist diese zusammengesetzt aus Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen von Raumkurven. Es können, müssen aber nicht, alle vorkommen.

Es gibt nun fünf verschiedene Arten des Verhaltens einer Fläche Φ um einen parabolischen Punkt mit

$$\Phi^{(3)} = \left\{ (x, y, f^{(3)}(x, y)) \mid (x, y) \in U_0 \subset U \right\}$$

$$f^{(3)}(x, y) = f^{(2)}(x, y) = x^2$$

$$f^{(3)}(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f^{(3)}(x, y) = y^2 + x^4$$

$$f^{(3)}(x, y) = y^2 - x^4$$

$$f^{(3)}(x, y) = (y - x^2)^2$$

Bei allen fünf Varianten handelt es sich um Schiebflächen, von denen eine Profilkurve eine nach oben offene „Standardparabel“ in der xz -Ebene ist. Bei der zweiten Profilkurve unterscheidet man zwischen:

- y -Achse
- kubische Standardparabel in yz -Ebene
- nach oben offene Standardparabel vom Grad 4 in yz
- nach unten offene Standardparabel vom Grad 4 in yz
- in Richtung x offene Standardparabel in xy

Um das „Durchsetzen“ bzw. „Nichtdurchsetzen“ der Flächen zu visualisieren, werden diese mit τ_0 bzw. einer nahe gelegenen Parallelebene zu τ_0 geschnitten.

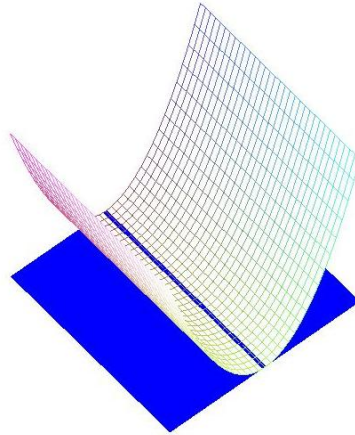


Abbildung 18: Parabolischer Punkt mit geradlinigem Tangentialschnitt

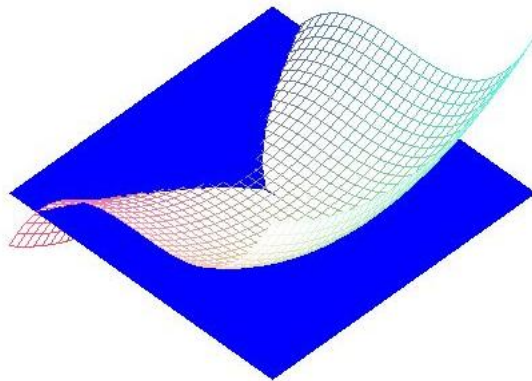


Abbildung 19: Parabolischer Punkt mit Tangentialschnitt mit Spitze

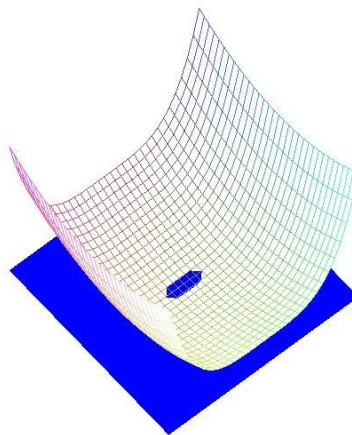


Abbildung 20: Parabolischer Punkt mit einpunktigem Tangentialschnitt

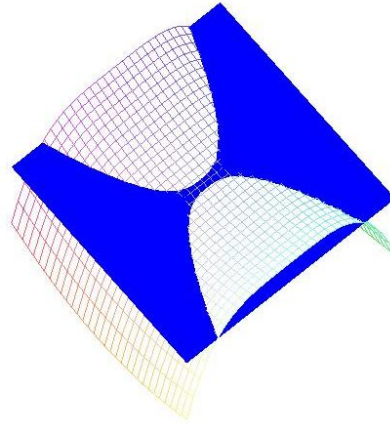


Abbildung 21: Parabolischer Punkt mit Tangentialschnitt mit Selbstberührung

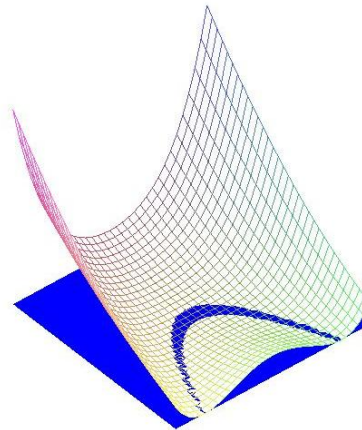


Abbildung 22: Parabolischer Punkt mit parabelförmigem Tangentialschnitt

3.2.4 Oskulatorie

Es soll nun die „Verteilung“ der Krümmungen der Normalschnitte von Φ in einem regulären Flächenpunkt bestimmt werden. Die quadratische Näherungsfläche $\Phi^{(2)} = \left\{ (x, y, f^{(2)}(x, y)) \mid (x, y) \in U_0 \subset U \right\}$ oskuliert die Fläche Φ in X_0 , wobei $f^{(2)}(x, y)$ das quadratische Taylorpolynom ist, welches nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems $(\tau_0 \dots xy\text{-Ebene}, n_0 \dots z\text{-Achse})$ die Form $f^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}(px^2 + ry^2)$ hat. Die implizite Gleichung der Näherungsfläche lautet $z = \frac{1}{2}(px^2 + ry^2)$.

v_φ ist die Normalebene von Φ . φ gibt den Winkel zwischen x -Achse und der Schnittgeraden $xy \cap v_\varphi$ an. Durchläuft nun φ das Intervall $[0, \pi)$, so erhält man jede mögliche Normalebene v_φ von Φ in X_0 .

Um die Schnittkurve $c_\varphi = \Phi^{(2)} \cap v_\varphi$ der Näherungsfläche mit der Normalebene darzustellen, legt man in die Normalebene das wz-Koordinatensystem, wobei die w-Achse der Schnitt der xy-Ebene mit der Normalebene v_φ ist. Liegt ein Punkt P in der Normalebene, so hat er die Darstellung $p = (w \cos \varphi, w \sin \varphi, z)$. Somit erhält man die Darstellungen der Schnittkurve c_φ in der Form

$$z = \frac{1}{2} (p(w \cos \varphi)^2 + r(w \sin \varphi)^2)$$

$$\text{bzw. } w^2 = \frac{2z}{p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi}$$

Gilt $p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \neq 0$, so ist c_φ eine Parabel in Standardpositionierung mit Scheitel $S = X_0 = 0$. Die Parabelachse liegt in der z-Achse. Man unterscheidet folgende zwei Fälle:

$\text{sgn}(p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi) = 1 \dots c_\varphi$ ist nach oben offen

$\text{sgn}(p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi) = -1 \dots c_\varphi$ ist nach unten offen

Ist $p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = 0$, so erfüllt c_φ die Gleichung $z = 0$. c_φ liegt also horizontalgeradlinig in der w-Achse.

Der Radius $\rho(\varphi)$ des Krümmungskreises c_φ im Scheitel S berechnet sich gemäß

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{|p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi|}$$

Die Visualisierung des Radius $\rho(\varphi)$ entspricht der Visualisierung von Φ in einer flächenhaften Umgebung von X_0 . Es handelt sich hierbei um den Scheitelkrümmungskreis k_φ in der Normalebene v_φ , wobei $\varphi = \angle(x, w)$ das Intervall $[0, \pi)$ durchläuft. Die von den Kreisen $\{k_\varphi | \varphi \in [0, \pi)\}$ überstrichene Fläche ist die Oskulatorie Osk_{X_0} von Φ in X_0 . Im Allgemeinen hat diese den Grad vier in den Koordinaten x, y, z.

Im Sonderfall $p = r$ ist die Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ ein Drehparaboloid und die Oskulatorie eine Kugelfläche.

Flächentangenten zum Krümmungsradius $\rho(\varphi_0) = \infty$ sind Schmiegtangenten im Punkt X_0 von Φ . Man unterscheidet:

Elliptischer Flächenpunkt ... keine Schmiegtangenten

Parabolischer Flächenpunkt ... eine Schmiegtangente

Hyperbolischer Flächenpunkt ... zwei Schmiegtangenten

Flachpunkt ... alle Tangenten sind Schmiegtangenten

Dupinsche Indikatrix

Um die Verteilung der Radien $\rho(\varphi)$, und vor allem die Position der Extremwerte, darstellen zu können, wird auf der w-Achse der Wert $\sqrt{|\rho(\varphi)|}$ auf beide Seiten von X_0 aus abgetragen. Die Streckenendpunkte $P_1(\varphi)$ und $P_2(\varphi)$ haben folgende Gestalt

$$P_1(\varphi) = \sqrt{|\rho(\varphi)|}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{1}{\sqrt{|p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi|}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$P_2(\varphi) = -\sqrt{|\rho(\varphi)|}(\cos \varphi, \sin \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{|p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi|}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Der Winkel φ ist dabei aus dem Intervall $[0, \pi)$ und die Menge der Punkte $\{P_1(\varphi), P_2(\varphi) | \varphi \in [0, \pi)\} \subset \tau_0$ nennt man die Dupinsche Indikatrix Dup_{X_0} von Φ in X_0 .

Statt $\rho(\varphi)$ wird der Betrag $\sqrt{|\rho(\varphi)|}$ abgetragen. Dadurch kann die Dupinsche Indikatrix durch symmetrische Kegelschnitte oder zueinander parallele Geradenpaare erfasst werden. So kommt es zu einer einfacheren Berechnung der Extremwerte der Radien.

Außerdem gilt: Besitzt $f: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ einen Extremwert, so besitzt auch $f^{(2)}: x \in \mathbb{R} \mapsto f^{(2)}(x) \in \mathbb{R}$ in $f^{(2)}(x_0)$ einen Extremwert.

Bei $\rho(\varphi_0) = \infty$ liegt kein Punkt im Endlichen, das heißt die w-Achse enthält keinen Punkt der Dupinschen Indikatrix Dup_{X_0} . In einem Flachpunkt gilt in jeder Richtung $\rho(\varphi_0) = \infty$, also ist die Dupinsche Indikatrix die leere Menge und jede Flächentangente in einem Flachpunkt ist eine Schmiegtangente.

Weiters unterscheidet man folgende Fälle:

- Elliptischer Flächenpunkt: Es existiert keine w-Richtung mit $\rho(\varphi_0) = \infty$

- Hyperbolischer Flächenpunkt: Es existieren genau zwei w-Richtungen mit $\rho(\varphi_0) = \infty$.
- Parabolischer Flächenpunkt: Es existiert genau eine w-Richtung mit $\rho(\varphi_0) = \infty$.

Die Dupinsche Indikatrix ist symmetrisch bezüglich X_0 , geht also durch X_0 . Die Punkte der Dupinschen Indikatrix auf der x- bzw. y-Achse haben die Koordinaten

$$A_1, A_2 = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{|p|}}, 0 \right)$$

$$B_1, B_2 = \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{|r|}} \right)$$

Elliptischer Flächenpunkt

In einem elliptischen Flächenpunkt $X_0 \in \Phi$ gilt $\text{sgn } p = \text{sgn } r$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass $p, r > 0$ gilt. Die Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ ist ein elliptisches Paraboloid mit der Gleichung $z = \frac{1}{2}(px^2 + ry^2)$. Der Krümmungsradius $\rho(\varphi) = \frac{1}{p \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi}$ ist immer größer Null. Es existiert daher keine Schmiegtangente. $\rho(\varphi)$ ist aus dem Intervall $\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right]$.

Die Oskulatorie Osk_{X_0} in einem elliptischen Flächenpunkt besteht aus einem einzigen Flächenmantel und berührt die Tangentialebene τ_0 in X_0 . Bei $p \neq r$ hat die Oskulatorie einen Selbstschnitt, bei $p = r$ handelt es sich um eine Kugelfläche.

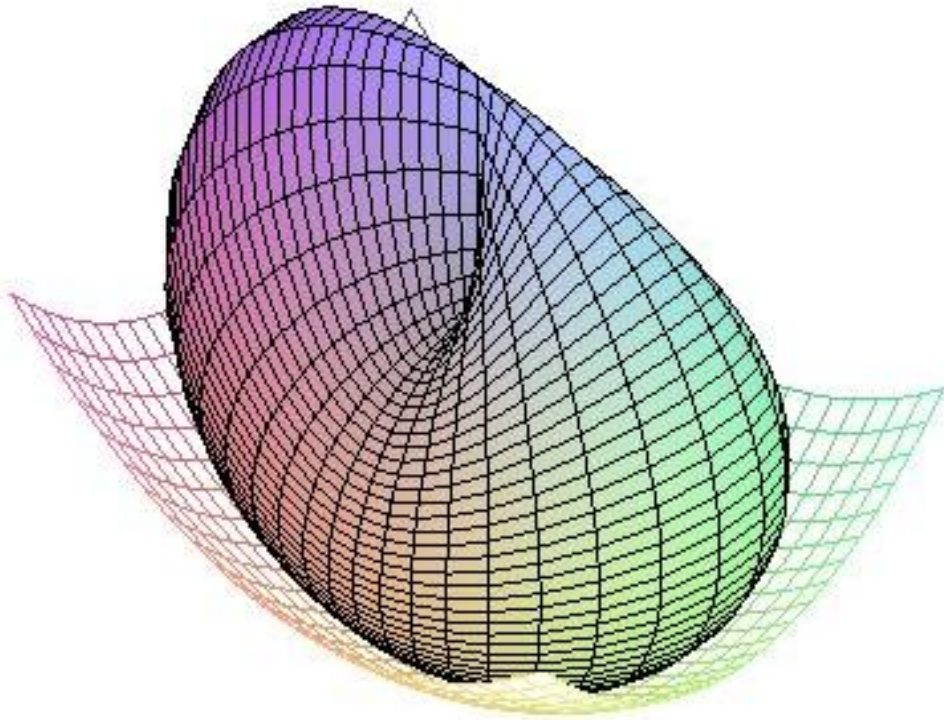


Abbildung 23: Oskulatorie in einem elliptischen Flächenpunkt

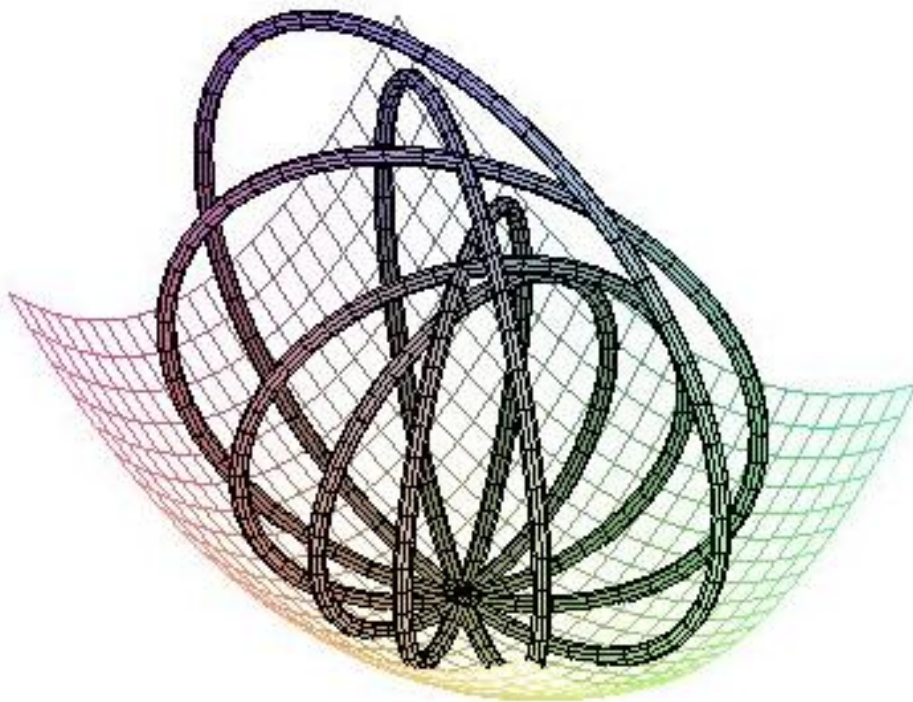


Abbildung 24: Netz der Oskulatorie in einem elliptischen Flächenpunkt

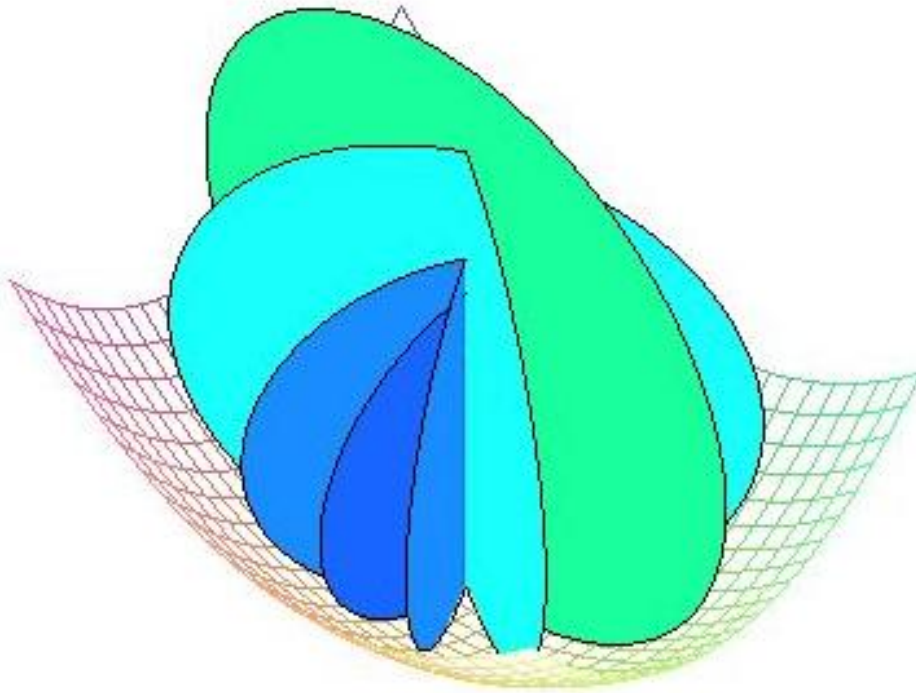


Abbildung 25: Krümmungskreise in einem elliptischen Flächenpunkt

Hyperbolischer Flächenpunkt

In einem hyperbolischen Flächenpunkt $X_0 \in \Phi$ gilt $\text{sgn } p \neq \text{sgn } r$. Ohne Einschränkung kann man $p > 0$, $r < 0$ annehmen, sowie $r_1 = -r > 0$. Die Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ in einem hyperbolischen Flächenpunkt ist ein hyperbolisches Paraboloid mit der Gleichung $z = \frac{1}{2}(px^2 - r_1y^2)$. Die Schnittkurve mit der xz -Ebene ist nach oben offen, jene mit der yz -Ebene nach unten offen.

Für den Krümmungsradius gilt $\rho(\varphi) = \frac{1}{|p \cos^2 \varphi - r_1 \sin^2 \varphi|}$. Genau im Punkt $\tan \varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{p}{r_1}}$ ist $|\rho(\varphi_0)| = \infty$. Das heißt, in einem hyperbolischen Flächenpunkt existieren zwei Schmiegtangenten. Diese sind genau die Erzeugenden e_1 und e_2 in der Tangentialebene $\tau_0 = xy$ durch den Flächenscheitel $X_0 = 0$. Der Krümmungsradius bewegt sich in zwei Intervallen $[\frac{1}{p}, \infty)$ und $[\frac{1}{r_1}, \infty)$.

Die Oskulatorie Osk_{X_0} besteht in einem hyperbolischen Flächenpunkt aus zwei Flächenmänteln, welche durch die Tangentialebene τ_0 getrennt werden.

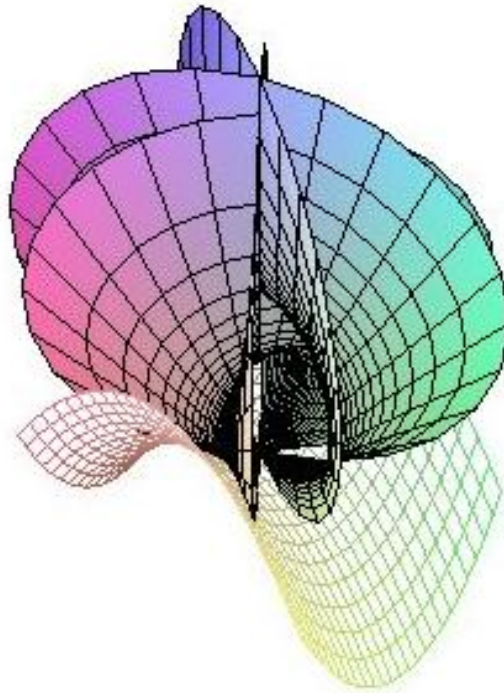


Abbildung 26: Oskulatorie in einem hyperbolischen Flächenpunkt

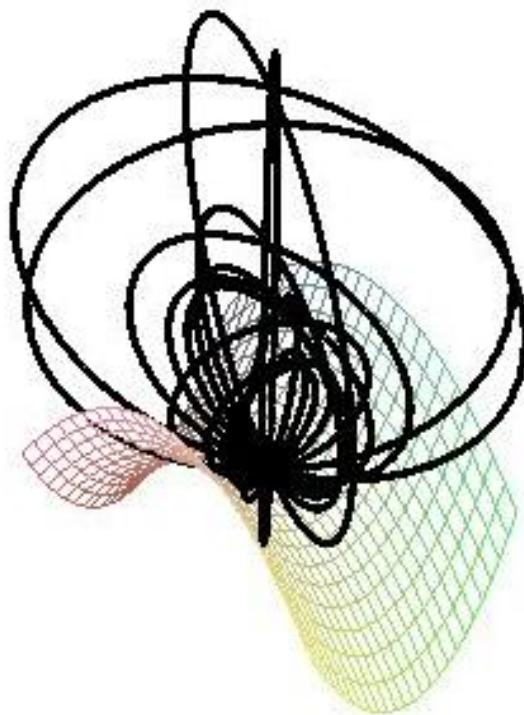


Abbildung 27: Netz der Oskulatorie in einem hyperbolischen Flächenpunkt

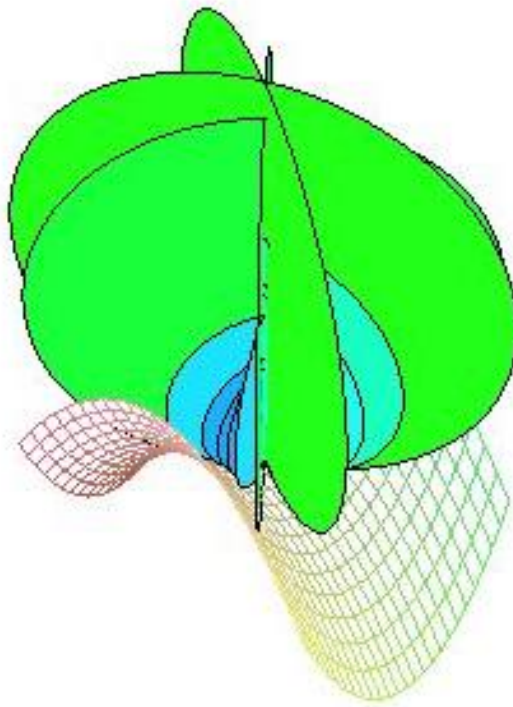


Abbildung 28: Krümmungskreise in einem hyperbolischen Flächenpunkt

Parabolischer Flächenpunkt

In einem parabolischen Flächenpunkt $X_0 \in \Phi$ gilt $p \cdot r = 0$, aber $(p, r) \neq (0, 0)$. Ohne Einschränkung kann man $p = 0$ und $r > 0$ annehmen. Die Näherungsfläche $\Phi^{(2)}$ ist ein nach oben offener parabolischer Zylinder mit der Gleichung $z = \frac{r}{2}y^2$. Die Zylindererzeugenden liegen parallel zur x -Achse.

Der Krümmungsradius $\rho(\varphi) = \frac{1}{r \sin^2 \varphi}$ ist genau bei $\varphi_0 = 0$ unendlich. Daher existiert eine Schmiegtangente in Richtung der Scheitelerzeugenden. Der Krümmungsradius bewegt sich im Intervall $[\frac{1}{r}, \infty)$.

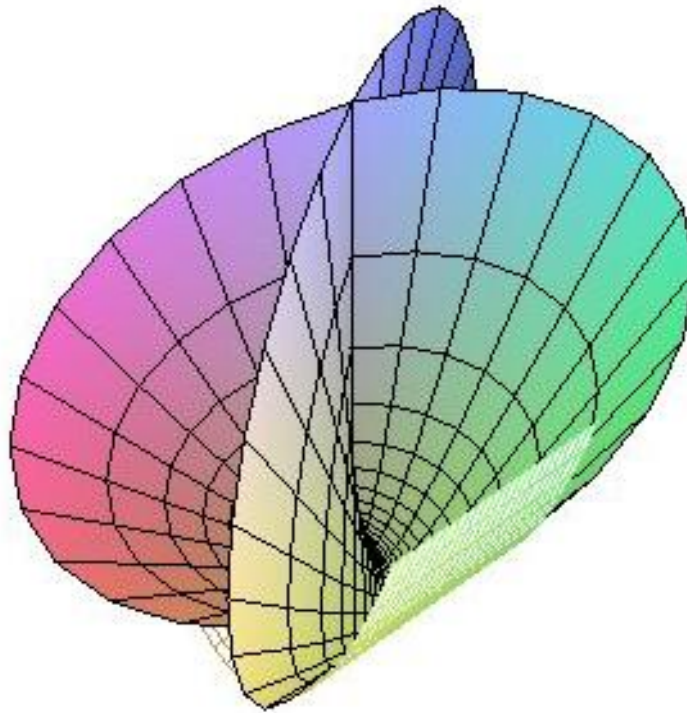


Abbildung 29: Oskulaturie in einem parabolischen Flächenpunkt

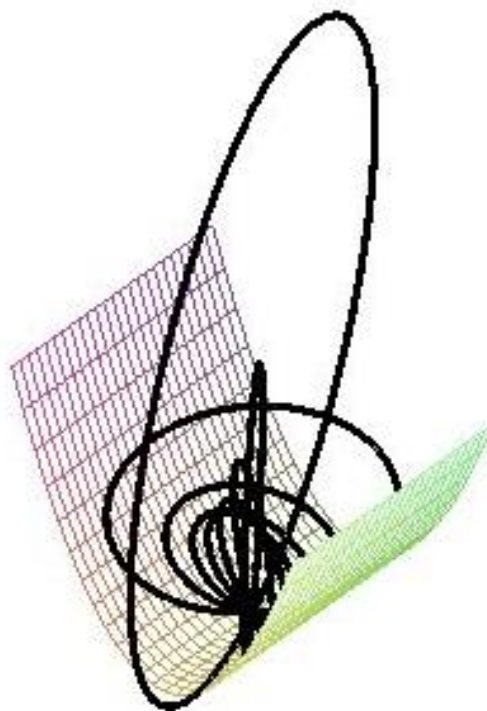


Abbildung 30: Netz der Oskulaturie in einem parabolischen Flächenpunkt

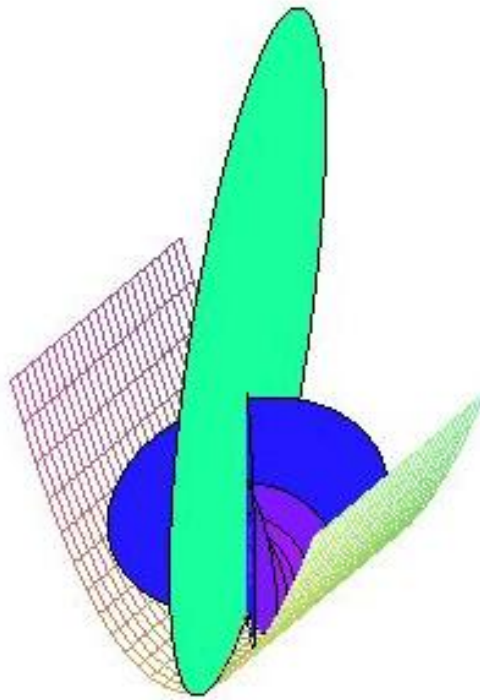


Abbildung 31: Krümmungskreise in einem parabolischen Flächenpunkt

4 Offsets von ebenen Kurven

4.1 Offset des Kreises

Ein Kreis k ist definiert durch seine Mitte m und seinen Radius r . Um nun eine Offsetkurve zum Kreis k zu erstellen, betrachtet man ein Paar von Kreisen, welche die gleiche Mitte m und den Radius $r+d$ bzw. $r-d$ besitzen.

Alle Offsetkurven von Kreisen sind konzentrische Kreise. Sie besitzen die gleichen Kurvennormalen und haben daher parallele Tangenten in entsprechenden Punkten.

Im Allgemeinen ist die Offsetkurve jedoch nicht vom gleichen Typ wie die Originalkurve.

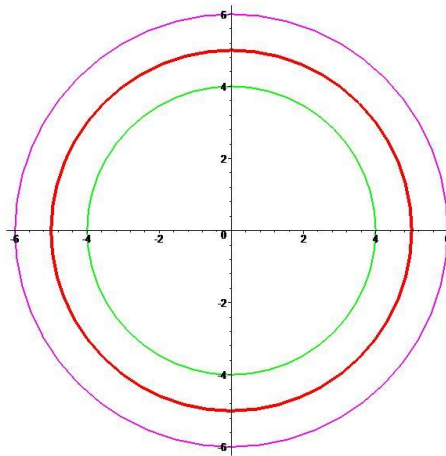


Abbildung 32: Offsetkurven des Kreises bei $d < r$

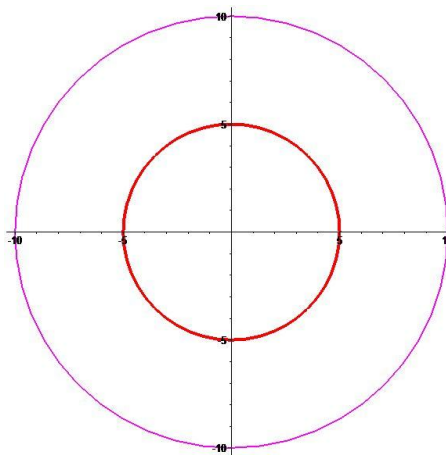
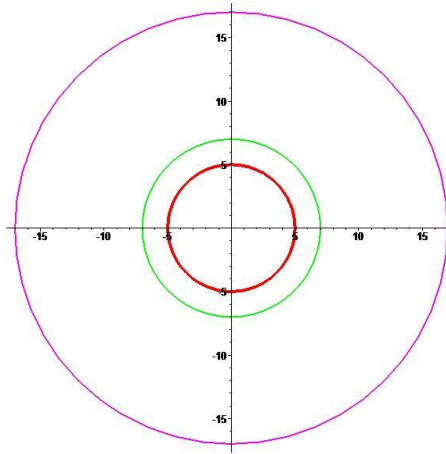


Abbildung 33: Offsetkurven des Kreises bei $d = r$

Abbildung 34: Offsetkurven des Kreises bei $d > r$

4.2 Offset der Ellipse

Die Ellipse ist eine ebene Kurve ohne Selbstdurchdringungen oder Spitzen. Wie man aber leicht erkennen kann, ist die Offsetkurve c_d einer Ellipse keine Ellipse mehr. Bei kleiner Distanz d lässt sich vielleicht noch vermuten, dass es sich um eine Ellipse handelt. Vergrößert man jedoch die Distanz, so kommt es auf der Offsetkurve zu Selbstschnitten. Es handelt sich daher um keine Ellipse mehr.

Im Innenbereich kann man beim Offsetbild der Ellipse Selbstdurchdringungen und Spitzen vermeiden, indem man den Betrag $|d|$ kleiner als den kleinsten Krümmungsradius, dieser findet sich in den Hauptscheiteln, der Ellipse wählt.

Aufgrund der Symmetrie hat die innere Offsetkurve einer Ellipse entweder zwei Spitzpunkte oder vier Spitzen auf der Evolute.

Ein Beispiel eines Spitzpunktes liefert die Parameterdarstellung $t \mapsto (t^3, t^4)$ im Koordinatenursprung mit dem Parameterwert $t = 0$.

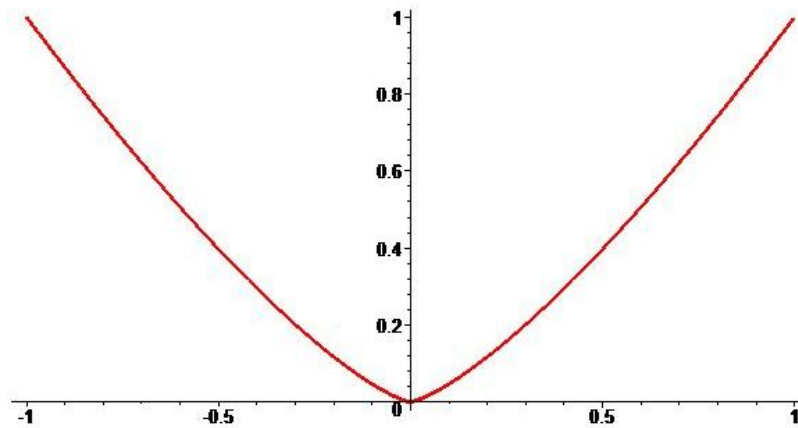
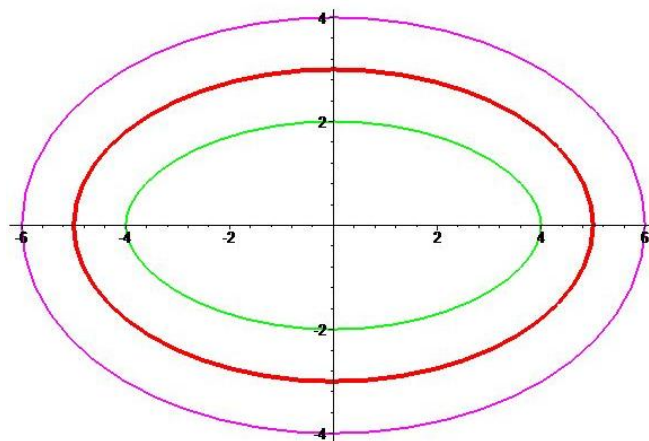
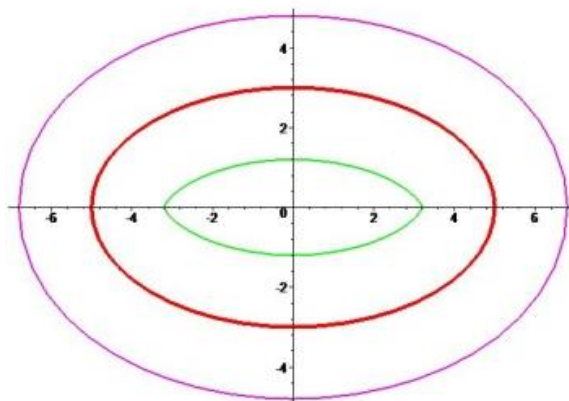


Abbildung 35: Spitzpunkt an einer ebenen Kurve

Abbildung 36: Offsetkurven einer Ellipse bei $d < r_{\min}$ Abbildung 37: 2 Spitzpunkte an der Offsetkurve einer Ellipse bei $d = r_{\min}$

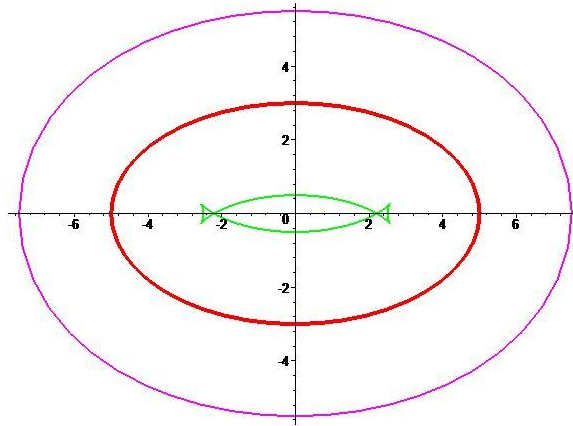


Abbildung 38: 4 Spitzen an der Offsetkurve einer Ellipse bei $r_{\min} < d < r_{\max}$

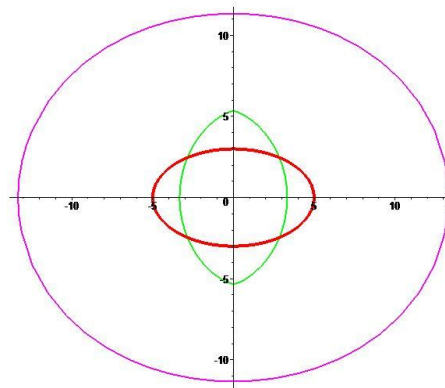


Abbildung 39: 2 Spitzpunkte an der Offsetkurve einer Ellipse bei $d = r_{\max}$

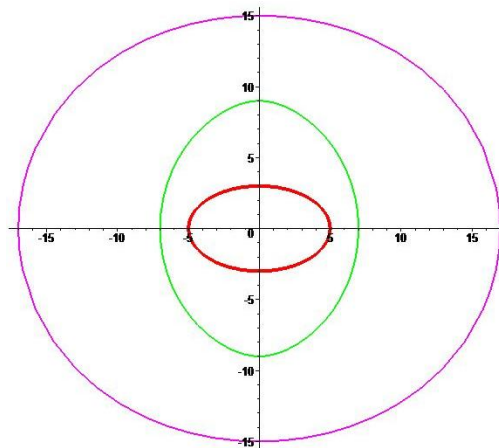


Abbildung 40: Offsetkurven einer Ellipse bei $d > r_{\max}$

Beispiel – Umriss eines Torus unter Normalprojektion

Die Offsetkurven einer Ellipse erscheinen auch als Umriss eines Torus unter Normalprojektion.

Der Torus ist die Hüllfläche einer Kugel S mit konstantem Radius $r = d$, ihre Mitte bewegt sich auf einem Kreis k . Die Normalprojektion des Mittenkreises k ergibt eine Ellipse k^n . Bei Normalprojektion erscheint der Umriss der Kugel S als Kreis mit Radius d , seine Mitte befindet sich auf k^n . Der Normalumriss des Torus ist die Hülle einer Schar von Kreisen S^n , mit Radius d und Mitte auf k^n . Also ist der Normalumriss des Torus eine Offsetkurve von k^n .

4.3 Offset der Parabel

Der minimale Krümmungsradius der Parabel findet sich im Scheitel. Ist $d < \rho_{\min}$, so ist das Offsetbild der Parabel eine reguläre Kurve. Bei $d = \rho_{\min}$ besitzt die innere Parallelkurve einen Spitzpunkt, bei $d > \rho_{\min}$ zwei Spitzen.

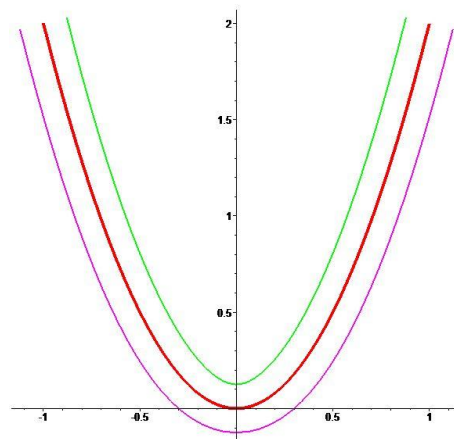
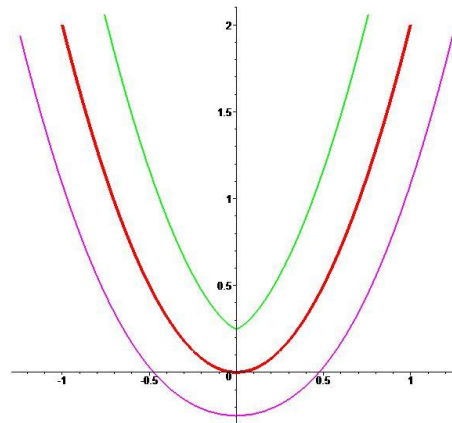
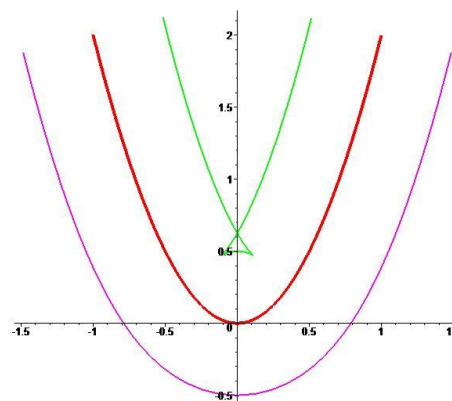
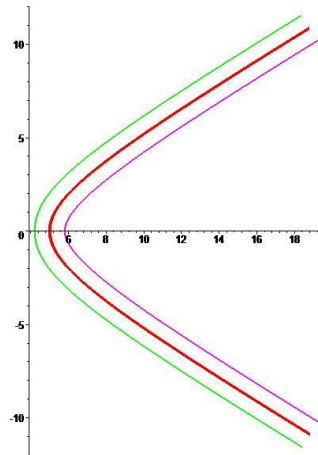
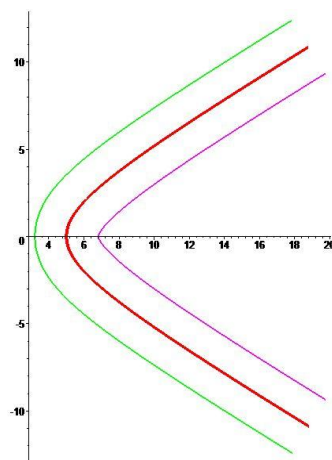
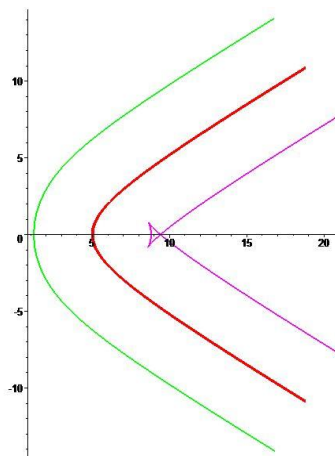


Abbildung 41: Offsetkurven der Parabel bei $d < r_{\min}$

Abbildung 42: Offsetkurven der Parabel bei $d=r_{\min}$ Abbildung 43: Offsetkurven der Parabel bei $d > r_{\min}$

4.4 Offset der Hyperbel

Auch bei der Hyperbel findet sich der minimale Krümmungsradius in den Scheiteln der Hyperbel. Zur besseren Anschaulichkeit wird in den folgenden Figuren nur ein Ast der Hyperbel dargestellt. Bei $d < \rho_{\min}$ ist die Offsetkurve der Hyperbel eine reguläre Kurve. Bei $d = \rho_{\min}$ besitzt die innere Offsetkurve einen Spitzpunkt, bei $d > \rho_{\min}$ zwei Spitzen.

Abbildung 44: Offsetkurven der Hyperbel bei $d < r_{\min}$ Abbildung 45: Offsetkurven der Hyperbel bei $d = r_{\min}$ Abbildung 46: Offsetkurven der Hyperbel bei $d > r_{\min}$

4.5 Offset der logarithmischen Spirale

Die logarithmische Spirale weist zwar keine minimalen oder maximalen Krümmungsradien auf, trotzdem findet man auf ihrem Offsetbild zwei „unterschiedliche“ Seiten.

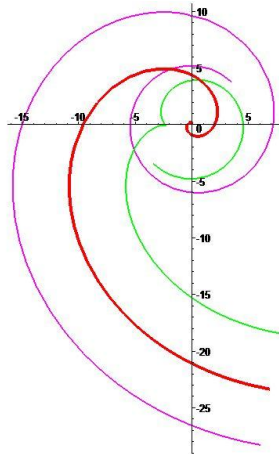


Abbildung 47: Offsetkurven der logarithmischen Spirale

4.6 Offsets von ebenen Polygonen

Offsets von ebenen Polygonen findet man häufig in CAD-Anwendungen. Jede Kante eines ebenen Polygons hat eine eindeutige Normale. In einer Ecke befinden sich mehrere, nämlich unendlich viele, Normalen. Eine Ecke an der Offsetkurve ergibt dadurch einen Kreisbogen.

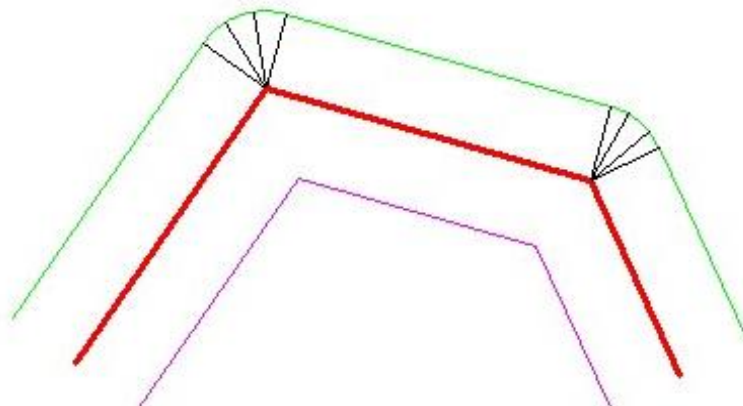


Abbildung 48: Offsetkurven eines Polygons

Die Endpunkte der beiden Offsetkurven von Polygonen können auf zwei Arten verbunden werden:

- Verbindung der beiden Endpunkte mit einem Liniensegment in Richtung der gemeinsamen Normalen

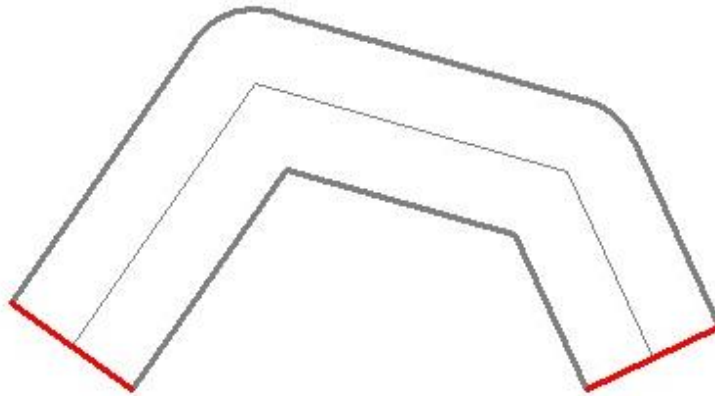


Abbildung 49: Offsetkurven eines Polygons - lineare Endpunktverbindung

- Verbindung mit einem Halbkreis (Radius d)

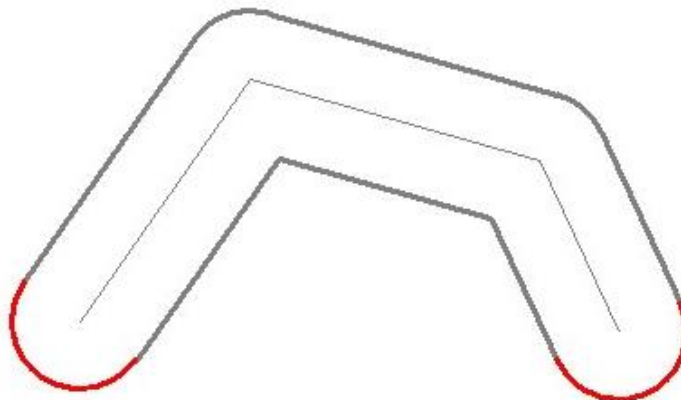


Abbildung 50: Offsetkurven eines Polygons - halbkreisförmige Endpunktverbindung

5 Offsets von Flächen im Raum

5.1 Offsets von Drehflächen

Eine Drehfläche Φ entsteht durch Drehung einer nichtnotwendig ebenen Kurve um die Drehachse a , ohne Einschränkung legen wir a in die x_3 -Achse. Die stetige Drehung $D_3(u)$ um die x_3 -Achse besitzt folgende Gestalt

$$x' = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = D_3(u)x, \quad u \in \mathbb{R}$$

Besitzt die Kurve c die Parameterdarstellung

$$c = (c_1(v), c_2(v), c_3(v)), \quad v \in I \subset \mathbb{R}$$

so hat die von c , bei Drehung um x_3 , überstrichene Drehfläche Φ die Parametrisierung

$$x(u, v) = (c_1(v) \cos u - c_2(v) \sin u, c_1(v) \sin u + c_2(v) \cos u, c_3(v))$$

$$v \in I, u \in [-\pi, \pi]$$

Liegt die erzeugende Kurve c in einer Ebene durch x_3 , so nennt man c den Meridian von Φ . Als Ebenen für den Ausgangsmeridian c bieten sich z.B. die Koordinatenebenen durch x_3 an. In der x_3x_1 -Ebene z.B. gilt $c_2(v) = 0$. Diese Erzeugung einer Drehfläche durch Drehung einer ebenen Kurve um die Drehachse legen wir im Folgenden zugrunde.

Man wählt nun die x_3 -Achse als Drehachse a und $u \in I = [-\pi, \pi]$. Mithilfe dieses Intervalls der Länge 2π wird die gesamte Drehfläche einmal überstrichen. Handelt es sich um einen symmetrischen Meridian bezüglich der Drehachse, so ist das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit Länge π ausreichend.

Parameterdarstellung einer Drehfläche

Das Netz der Parameterlinien auf Φ besteht aus den Drehlagen der erzeugenden Kurve c ($u = u_0$), und den Breitenkreisen, also die Bahnkurven der Punkte von c ($v = v_0$). Ist die erzeugende Kurve c ein Meridian, so bilden die Parameterlinien ein orthogonales

Kurvennetz auf Φ . Drehflächen werden längs ihrer Breitenkreise von Kugeln berührt, vorausgesetzt die Meridiantangente ist nicht orthogonal zur Drehachse.

Offsets von Drehflächen

Offsets von Drehflächen sind aufgrund der geometrischen Erzeugung natürlich wieder Drehflächen:

Eine Drehfläche Φ entsteht ohne Einschränkung durch Rotation einer Profilkurve c um eine komplanare Achse a . Die Kurvennormalen von c entsprechen den Flächennormalen der Drehfläche Φ .

Das Offset Φ_d einer Drehfläche Φ entsteht aus einer ebenen Offsetkurve c_d der Profilkurve c und anschließender Rotation von c_d um die Achse a . Daher ist die Offsetfläche Φ_d einer Drehfläche Φ eine koaxiale Drehfläche.

5.1.1 Kugel

Eine Kugel mit Zentrum m und Radius r hat als Offset konzentrische Kugeln mit Zentrum z und Radius $r+d$ bzw. $r-d$.

Bei $d = r$ fällt die innere Offsetfläche in einen Punkt, den Kugelmittelpunkt.

Zur besseren Anschaulichkeit wird hier immer nur eine Kugelhälfte samt ihrer Offsetflächen dargestellt.

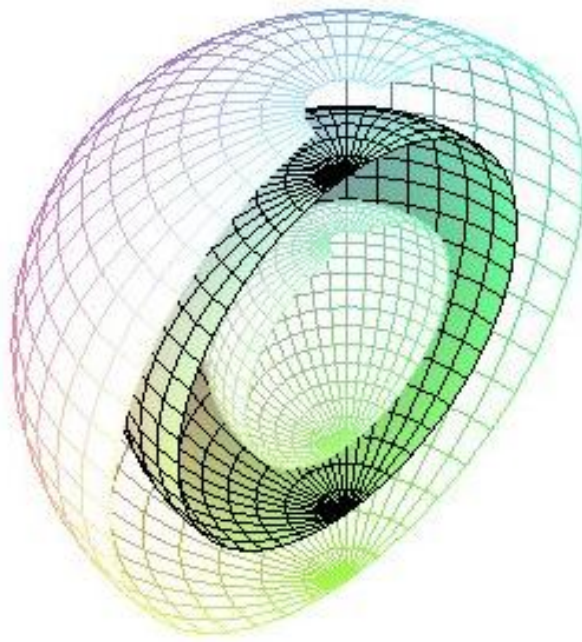


Abbildung 51: Offsetflächen der Kugel bei $d < r$

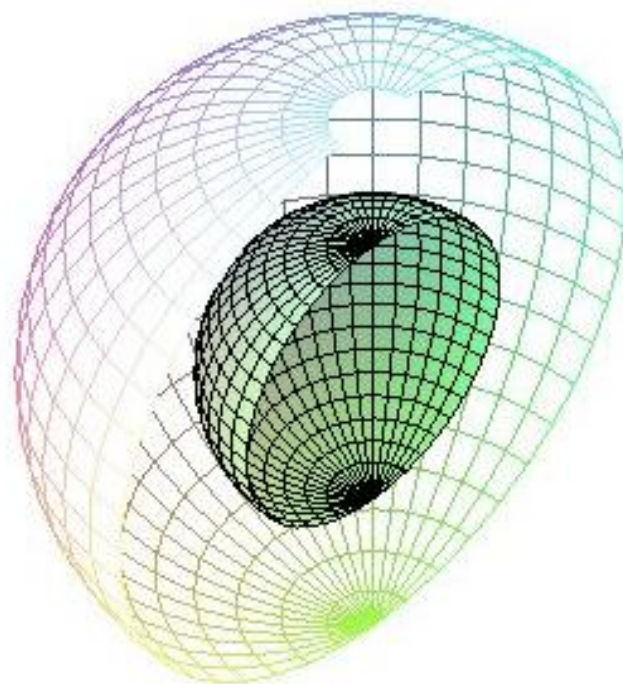


Abbildung 52: Offsetflächen der Kugel bei $d = r$

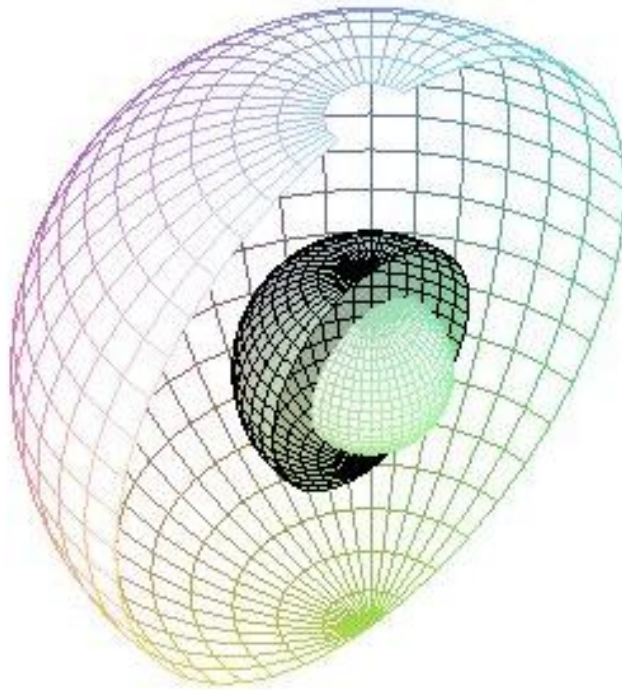


Abbildung 53: Offsetflächen der Kugel bei $d > r$

5.1.2 Torus

Ein Torus entsteht durch Rotation eines Kreises um eine Achse a der Kreisebene, das heißt der Meridian c ist ein Kreis. Wählt man x_3 als Drehachse und den Mittelpunkt $M=(m_1,0,0)$ von k auf der x_1 -Achse, so erhält man bei $m_1 = 0$, das heißt der Mittelpunkt M von c liegt in a , eine Kugel, bei $m_1 \neq 0$ eine „echte“ Torusfläche.

Der größte Breitenkreis des Torus ist der Äquator, der tiefste und höchste Breitenkreis ist jeweils ein Plattenkreis. Abhängig von der Größe von m_1 unterscheidet man drei Arten von Tori.

Die Offsetfläche Φ_d eines Torus Φ ist aufgrund der geometrischen Erzeugung von Φ als Hüllfläche einer um die Torusachse gedrehten Kugel natürlich wieder ein Torus.

Zur besseren Anschaulichkeit wird in diesem Abschnitt immer nur die untere Hälfte der verschiedenen Tori mit ihren Offsetflächen dargestellt.

Andererseits entsteht ein Torus auch aus Kugeln mit gleichem Radius, deren Mitten sich auf einem Kreis befinden.

Offsets von Kugeln sind wieder Kugeln. Daher ist auch die Offsetfläche eines Torus wieder ein Torus mit gleicher Achse und gleichem Mittenkreis.

Ringtorus

Beim Ringtorus gilt $m_1 > r$. Der kleinste Breitenkreis wird Kehlkreis genannt.

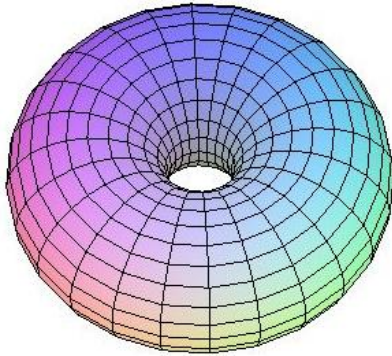


Abbildung 54: Ringtorus

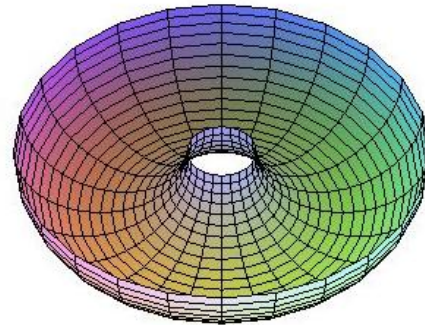


Abbildung 55: untere Hälfte des Ringtorus

Die innere Offsetfläche bei $d = r$ fällt in den Mittenkreis des Ringtorus zusammen.

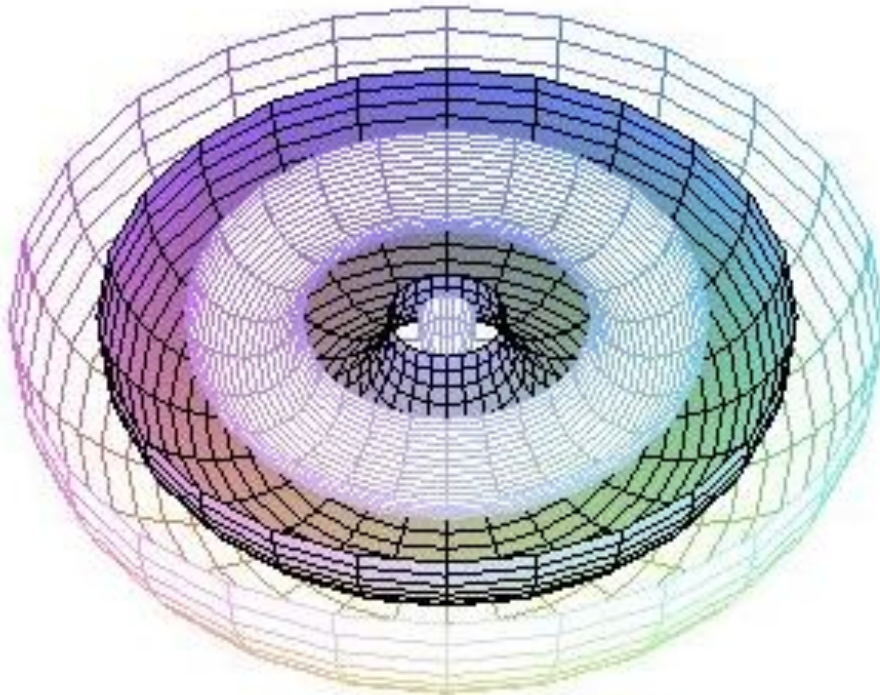


Abbildung 56: Offsetflächen des Ringtorus bei $d < r$

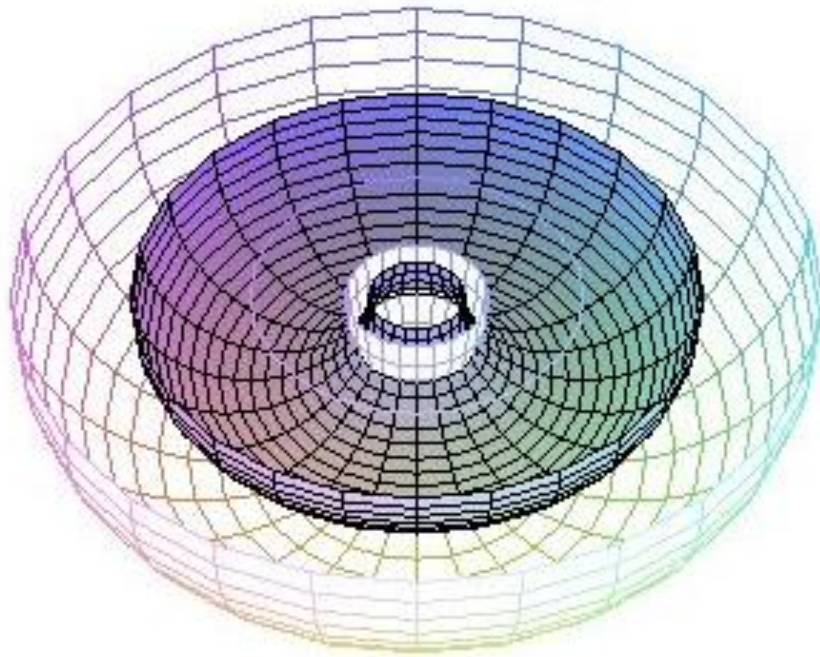


Abbildung 57: Offsetflächen des Ringtorus bei $d=r$

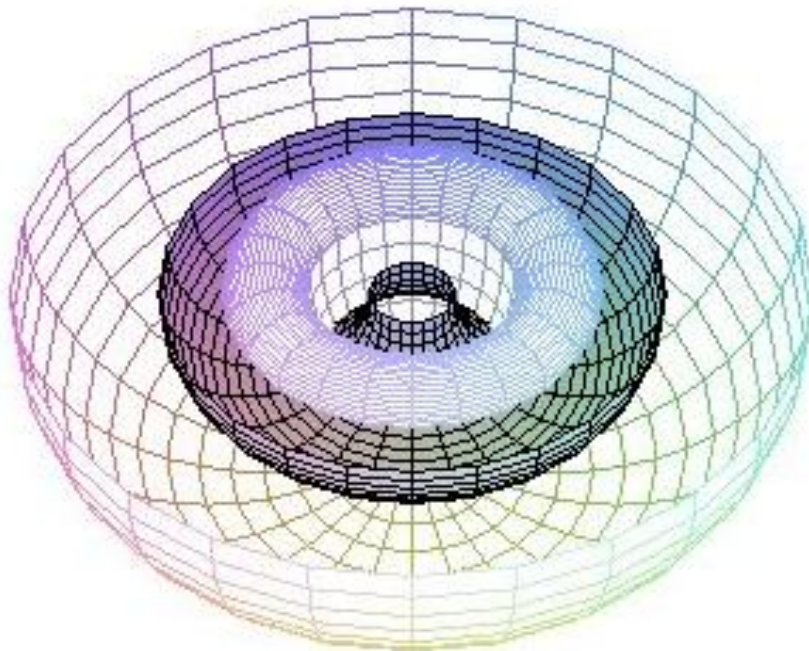


Abbildung 58: Offsetflächen des Ringtorus bei $d>r$

Dorntorus

Hier ist $m_1 = r$ und der Kehlkreis fällt in das punktförmige Zentrum des Dorns zusammen.

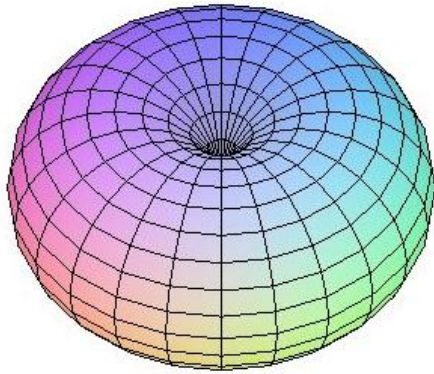


Abbildung 59: Dorntorus

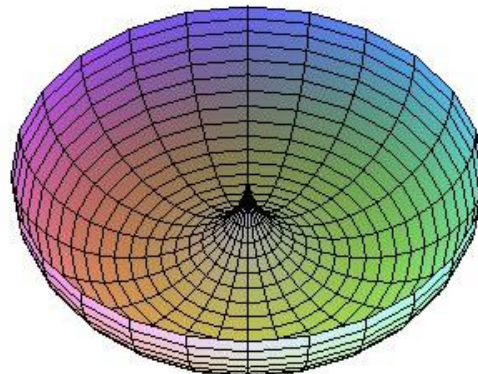


Abbildung 60: untere Hälfte des Dorntorus

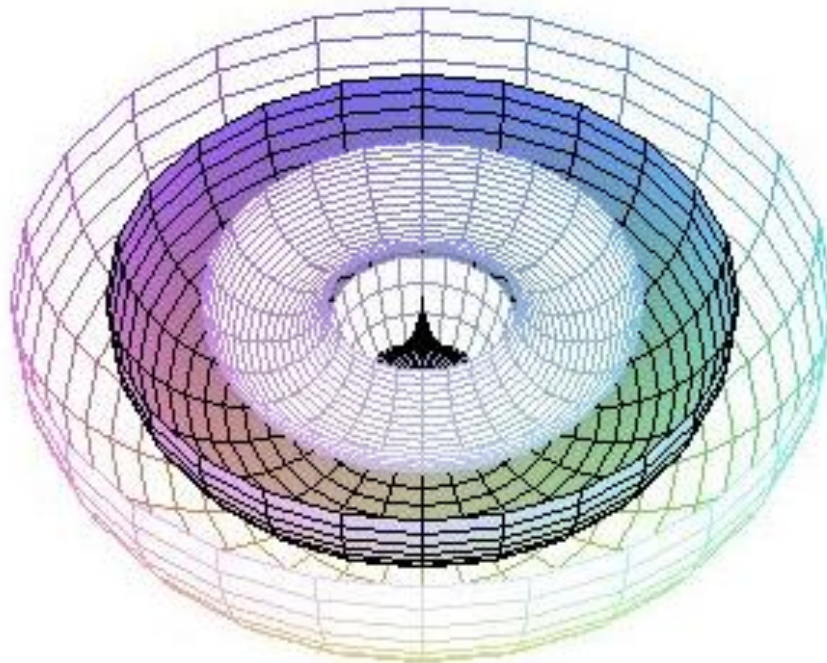


Abbildung 61: Offsetflächen des Dorntorus bei $d < r$

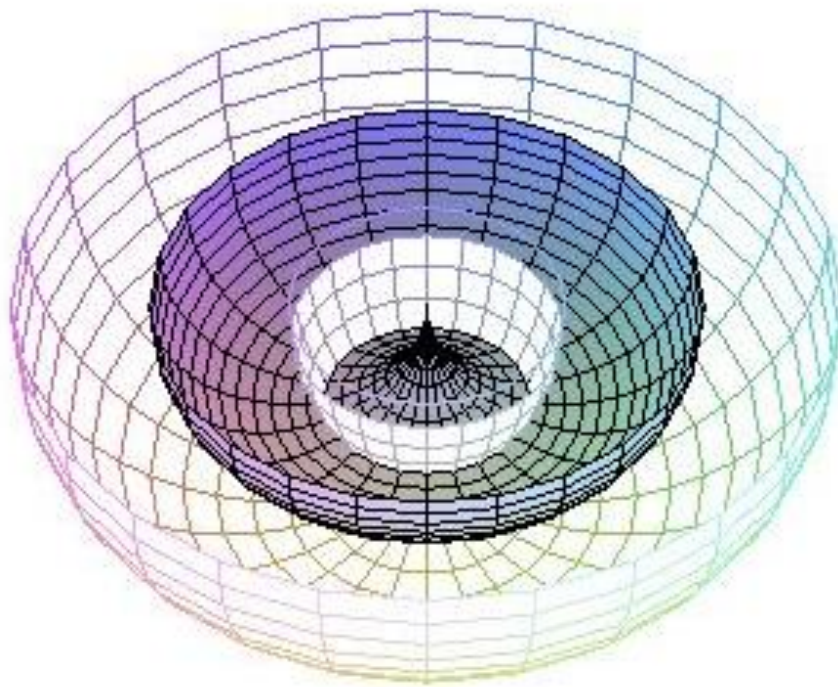


Abbildung 62: Offsetflächen des Dorntorus bei $d=r$

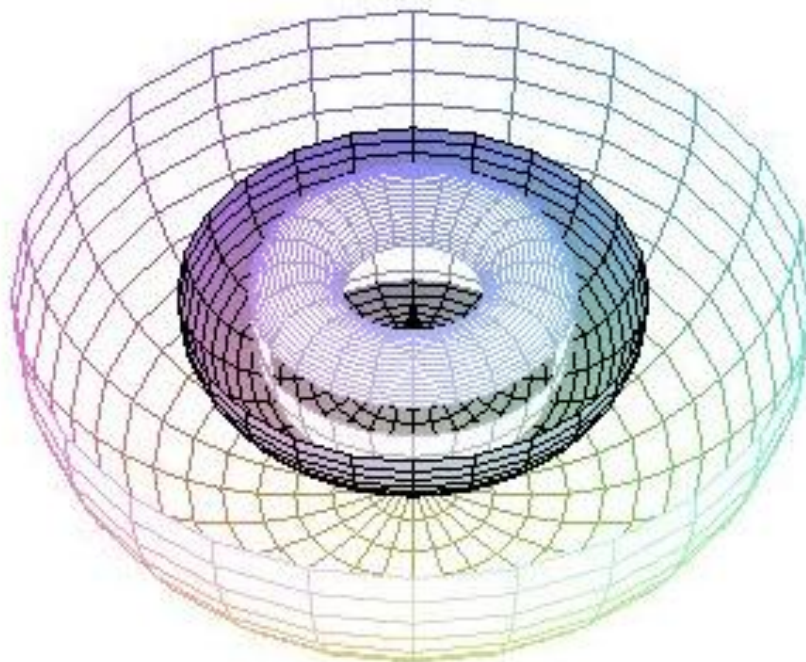


Abbildung 63: Offsetflächen des Dorntorus bei $d>r$

Spindeltorus

Ist $m_1 < r$, so spricht man von einem Spindeltorus. Die innenliegende Spindel bildet eine selbstständige Drehfläche Φ_1 . Sie besitzt selbst einen größten Breitenkreis k_1 in der Äquatorebene. Die Knotenpunkte des Spindeltorus sind die Minima der Breitenkreise.

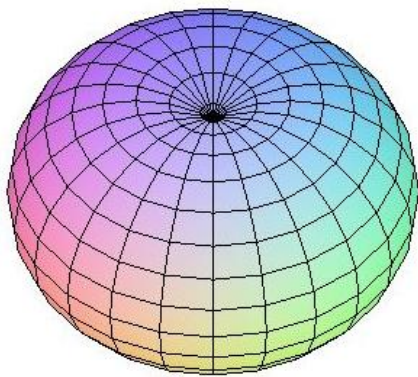


Abbildung 64: Spindeltorus

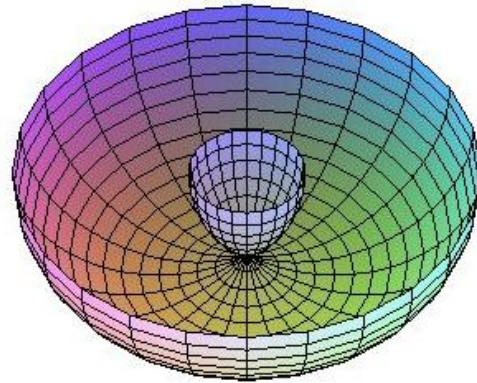


Abbildung 65: untere Hälfte des Spindeltorus

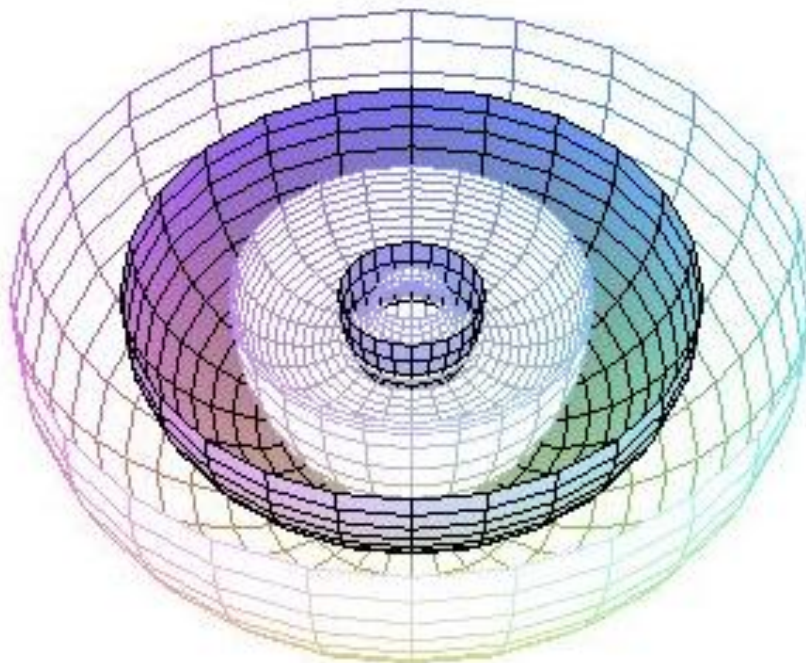


Abbildung 66: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d < r$

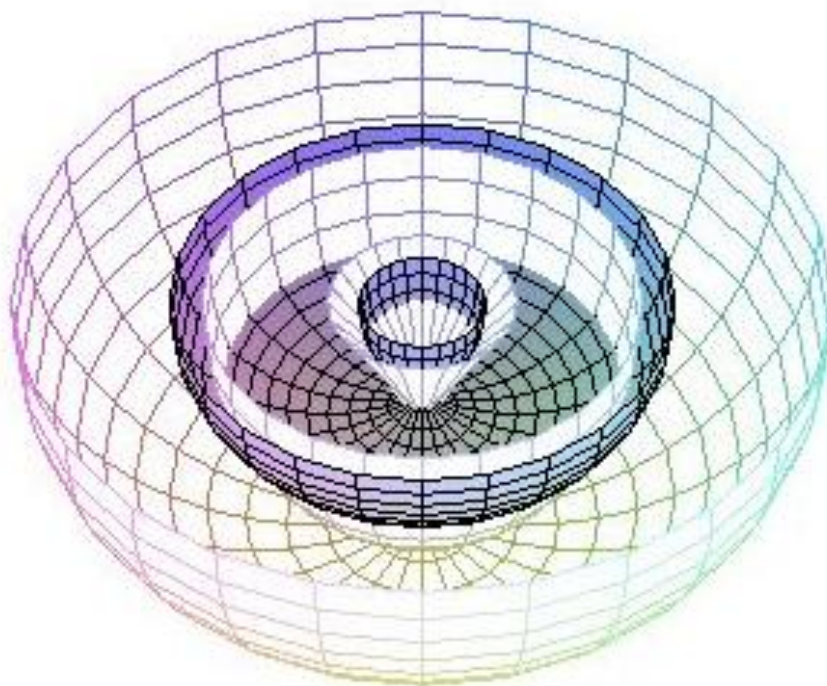


Abbildung 67: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d=r$

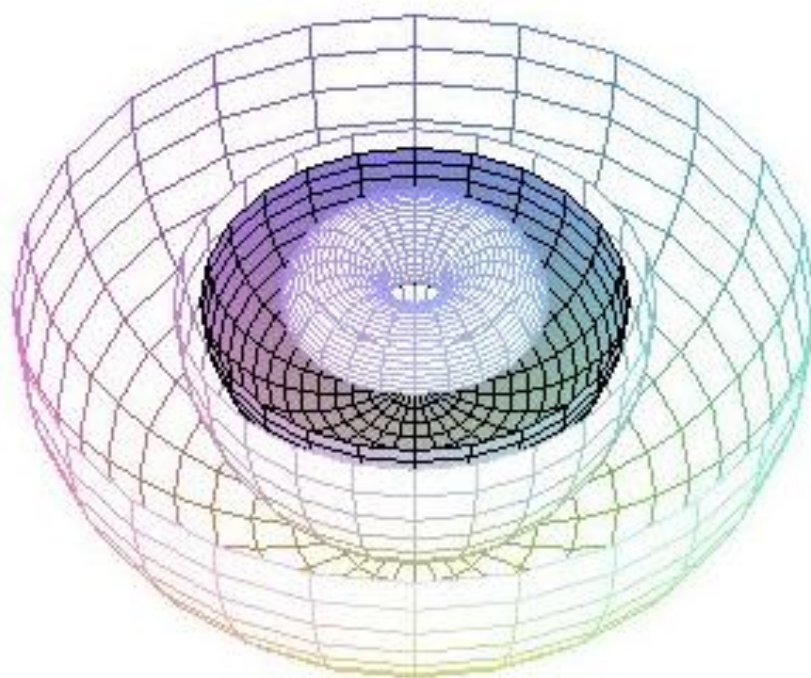


Abbildung 68: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d>r$

5.1.3 Drehquadriken

Drehquadriken entstehen aus der Drehung eines Kegelschnittes um eine seiner Achsen.

Die Offsetflächen Φ_d einer Drehquadrik Φ sind zwar wieder Drehflächen um dieselbe Drehachse, allerdings nur im torsalen Fall $d = 0$ wieder eine Quadrik, wie die Abschnitte 4.2, 4.3 und 4.4 – und natürlich die folgenden Abbildungen – unmittelbar zeigen.

Drehellipsoid

Durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen entsteht das Drehellipsoid. Bei $d < \rho_{\min}$ sind beide Offsetflächen reguläre Flächen. Genau bei $d = \rho_{\min}$ besitzt die innere Offsetfläche zwei nichtreguläre Punkte (vgl. Abbildung 36-40).

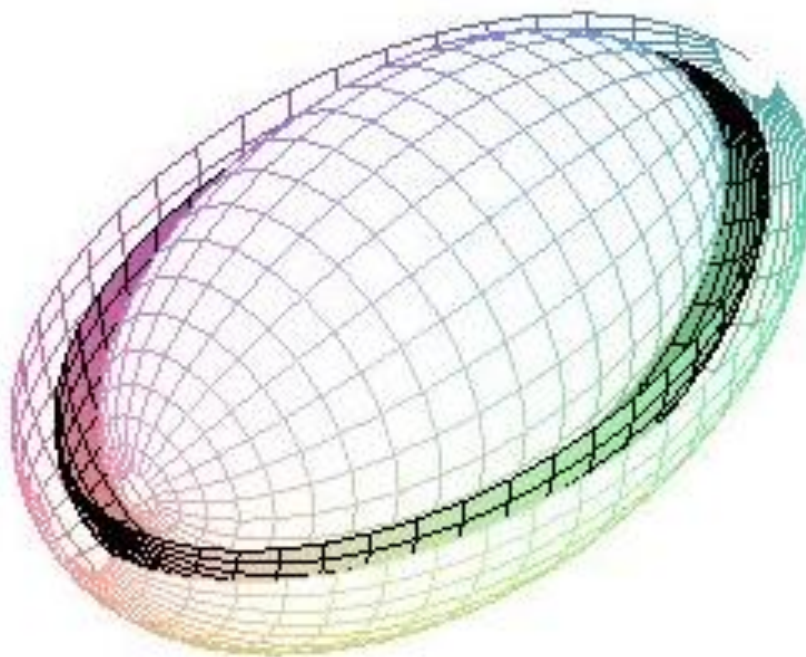


Abbildung 69: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d < r_{\min}$

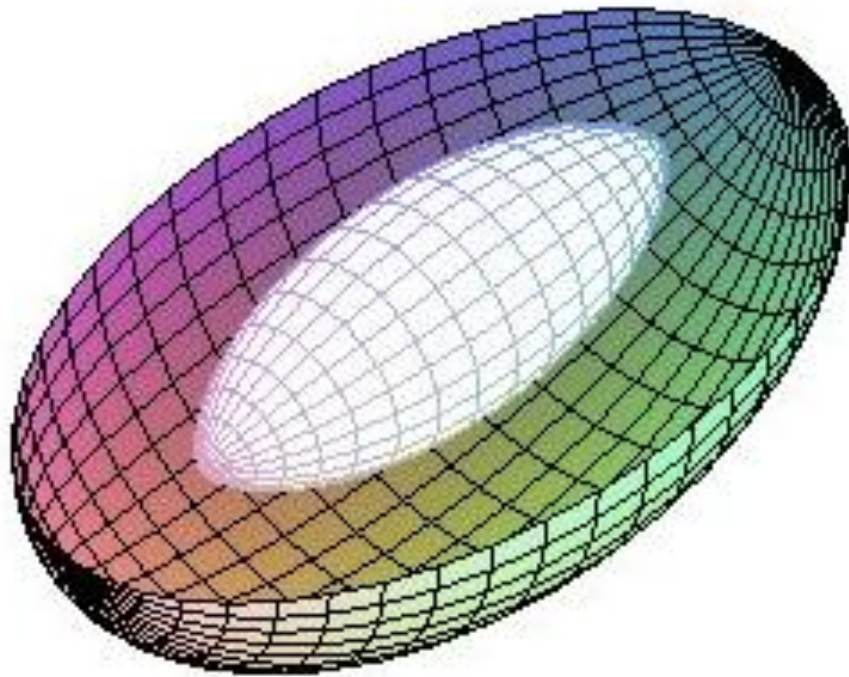


Abbildung 70: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d=r_{\min}$

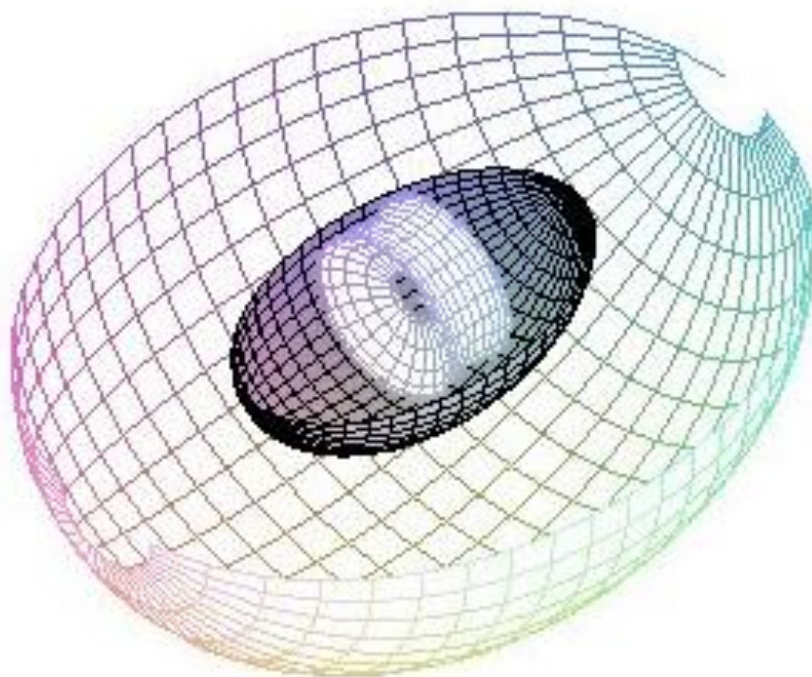


Abbildung 71: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $r_{\min} < d < r_{\max}$

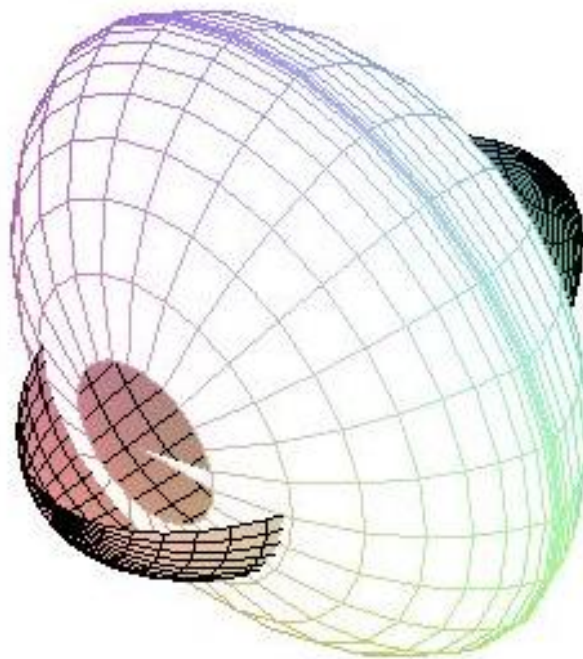


Abbildung 72: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d=r_{\max}$

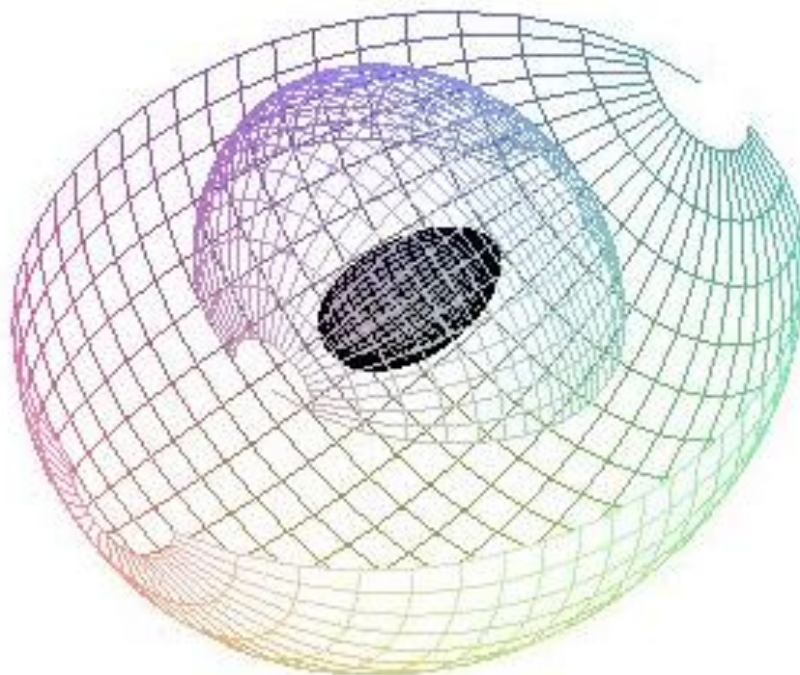


Abbildung 73: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d > r_{\max}$

Drehparaboloid

Ein Drehparaboloid entsteht aus der Drehung einer Parabel um ihre Achse. Die innere Offsetfläche eines Drehparaboloids besitzt eine reguläre Störung bei $d = \rho_{\min}$ (vgl. Abbildung 41-43).

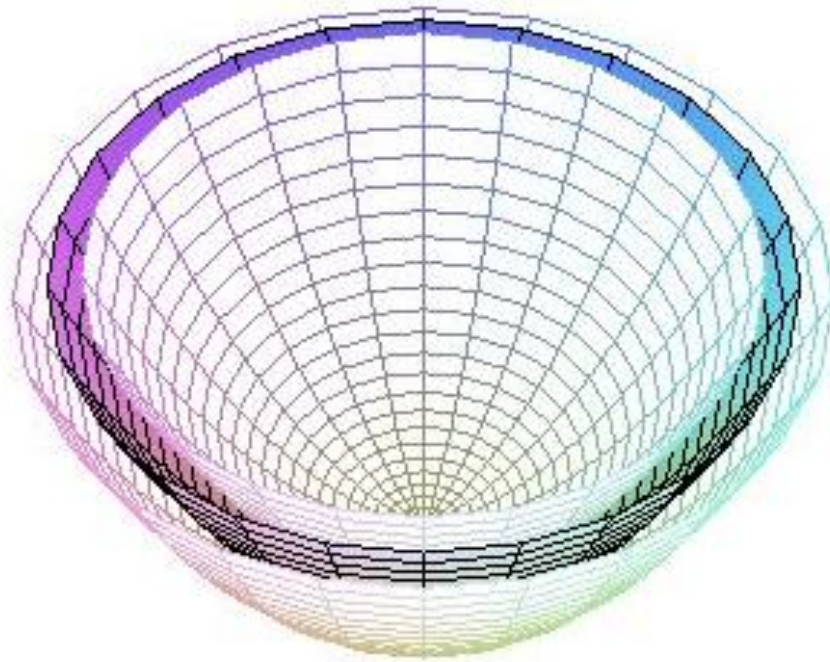


Abbildung 74: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d < r_{\min}$

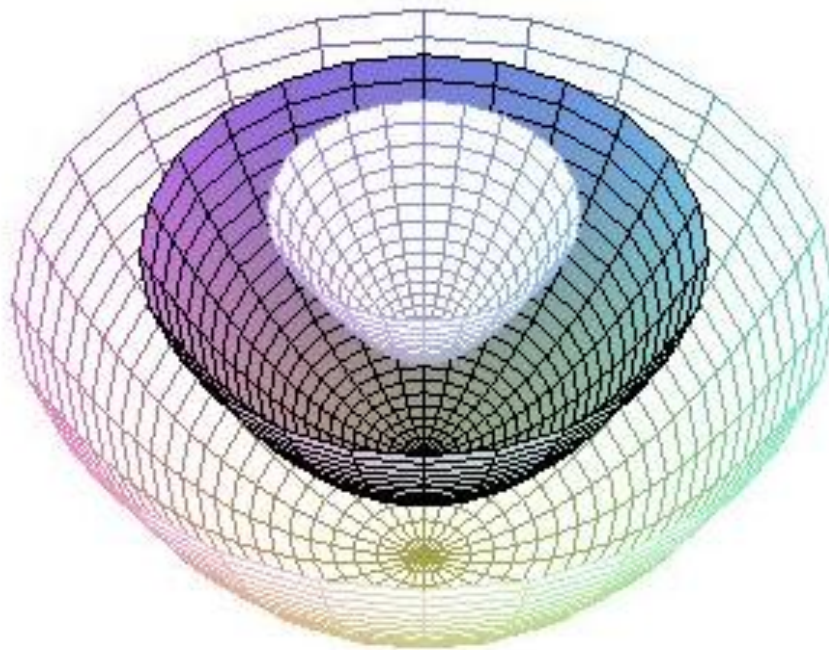


Abbildung 75: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d=r_{\min}$

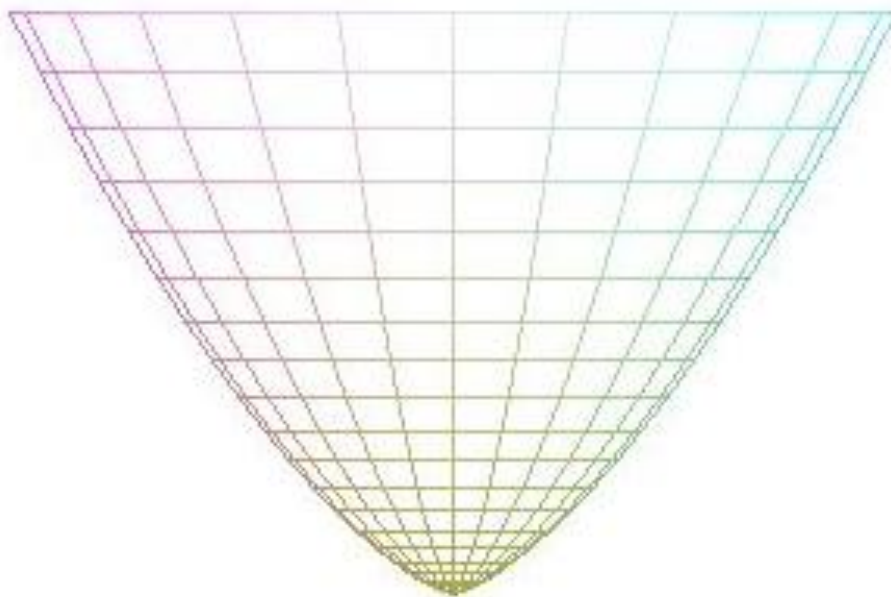


Abbildung 76: Reguläre Störung der oberen Offsetfläche des Drehparaboloids bei $d=r_{\min}$

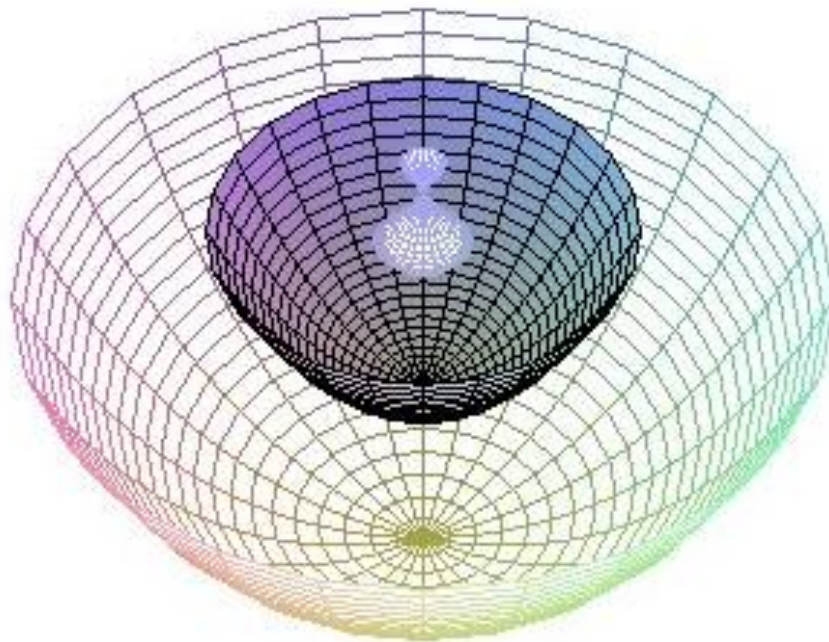


Abbildung 77: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d > r_{\min}$

Einschaliges Drehhyperboloid

Die Standardangabe des einschaligen Drehhyperboloids besteht aus der Drehung einer Hyperbel c um ihre Nebenachse n . Eine andere Möglichkeit für die Angabe eines einschaligen Drehhyperboloids ist die Drehung einer Geraden um eine windschiefe Achse a .

Man wählt nun die Meridianhyperbel c in der x_3x_1 -Ebene, ihren Mittelpunkt in $M = O$, ihre Nebenachse n entlang der x_3 -Achse und ihre Hauptachse orthogonal dazu entlang der x_1 -Achse. Man erhält nun die Parametrisierung eines Astes der Hyperbel

$$c(v) = (\pm a \cosh v, 0, b \sinh v)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$$

Die Asymptoten a_i sind die Geraden durch M , welche die Hyperbelpunkte „sehr gut“ approximieren. Man kann also die Asymptoten als Tangenten aus M an c ansehen

$$a_i = \lim_{p \rightarrow \infty} MP$$

Dreht man nun die Meridianhyperbel c um die x_3 -Achse, so erhält man folgende Parameterdarstellung der Drehfläche Φ

$$x(u, v) = D_3(u)c(v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, b \sinh v), u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], v \in \mathbb{R}$$

$u = 0$ ergibt die Meridianhyperbel $c \in x_3x_1$. Die Drehfläche Φ hat nun die Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} - 1 = 0$$

Dreht man die Asymptoten um die Nebenachse der Hyperbel, so entsteht der drehkegelförmige Asymptotenkegel Γ von Φ

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} = 0$$

Der minimale Krümmungsradius findet sich hier in den Scheiteln der Meridianhyperbel. Bei $d = \rho_{\min}$ kommt es auf der inneren Parallelfäche zu einer Selbstberührung, bei $d > \rho_{\min}$ zu zwei Selbstdurchdringungen (vgl. Abbildung 44-46).

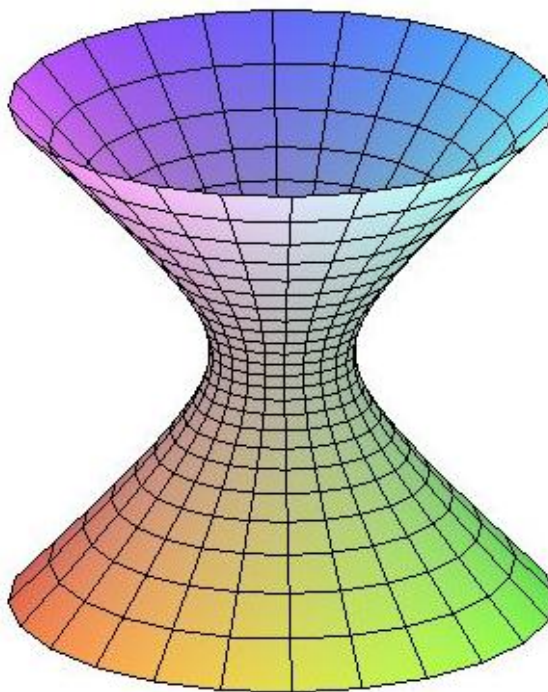


Abbildung 78: Einschaliges Drehhyperboloid

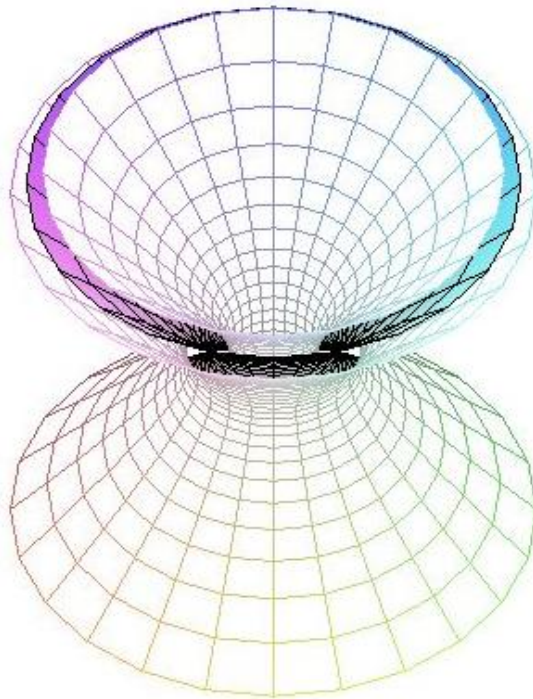


Abbildung 79: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$

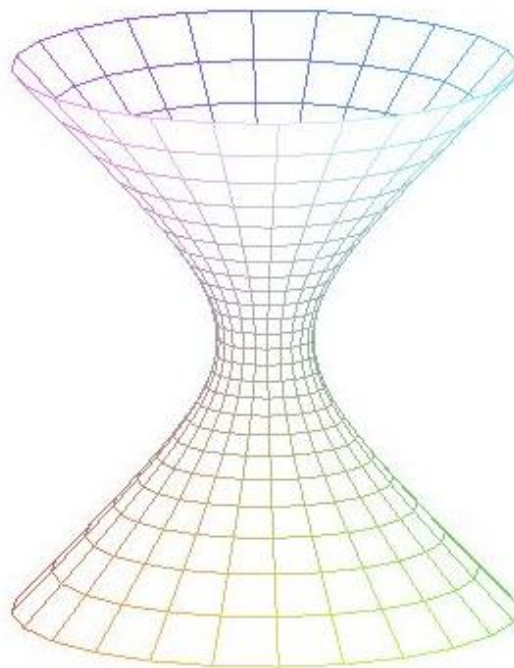


Abbildung 80: Innere Offsetfläche des einschaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$

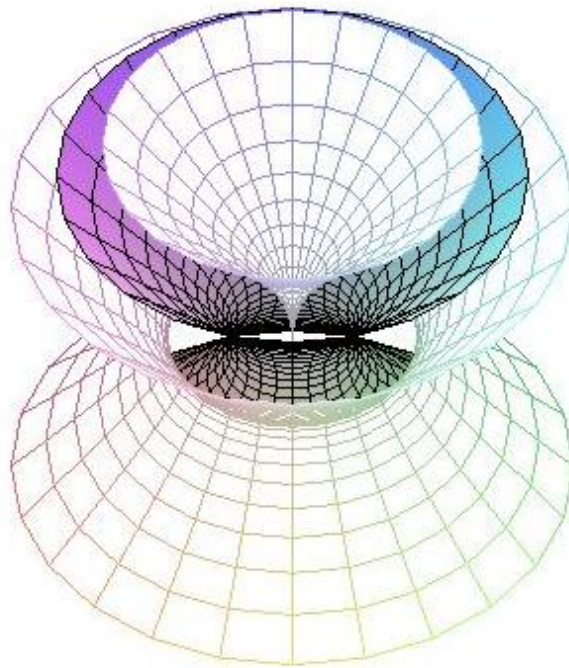


Abbildung 81: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d=r_{\min}$

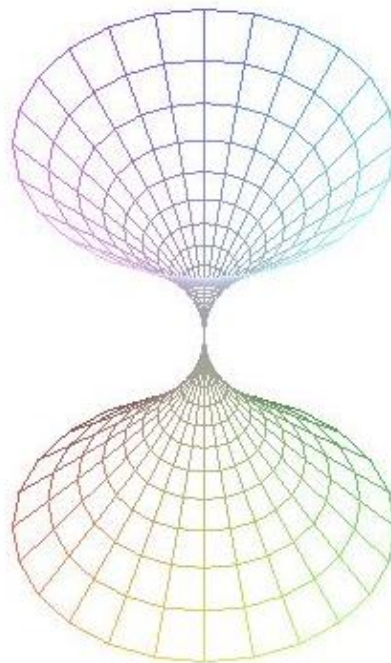


Abbildung 82: Innere Offsetfläche des einschaligen Drehhyperboloids bei $d=r_{\min}$

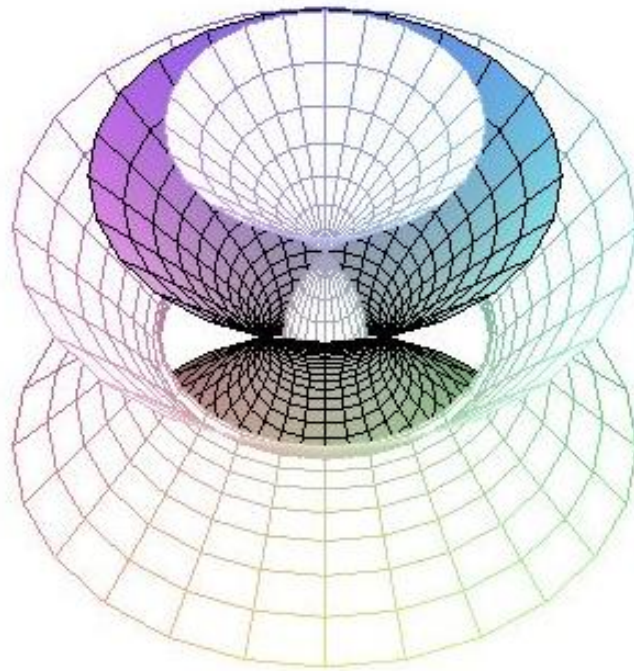


Abbildung 83: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d > r_{\max}$

Zweischaliges Drehhyperboloid

Nun betrachtet man die Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptachse h . Die Meridianhyperbel c liegt dabei in der x_3x_1 -Ebene. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung O , ihre Achsen in Richtung der Koordinatenachsen x_1 und x_3 . Man erhält so die Parameterdarstellung beider Schalen des zweischaligen Drehhyperboloids Φ

$$x(u, v) = D_1(u)c(v) = (\pm a \cosh v, -b \sinh v \sin u, b \sinh v \cos u), u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], v \in \mathbb{R}$$

sowie die Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{b^2} - 1 = 0$$

Wählt man $u = 0$, so erhält man die Meridianhyperbel c in der x_3x_1 -Ebene. Da diese symmetrisch ist, ist das Intervall I mit der Länge π ausreichend. Der Asymptotenkegel hat in diesem Fall folgende Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{b^2} = 0$$

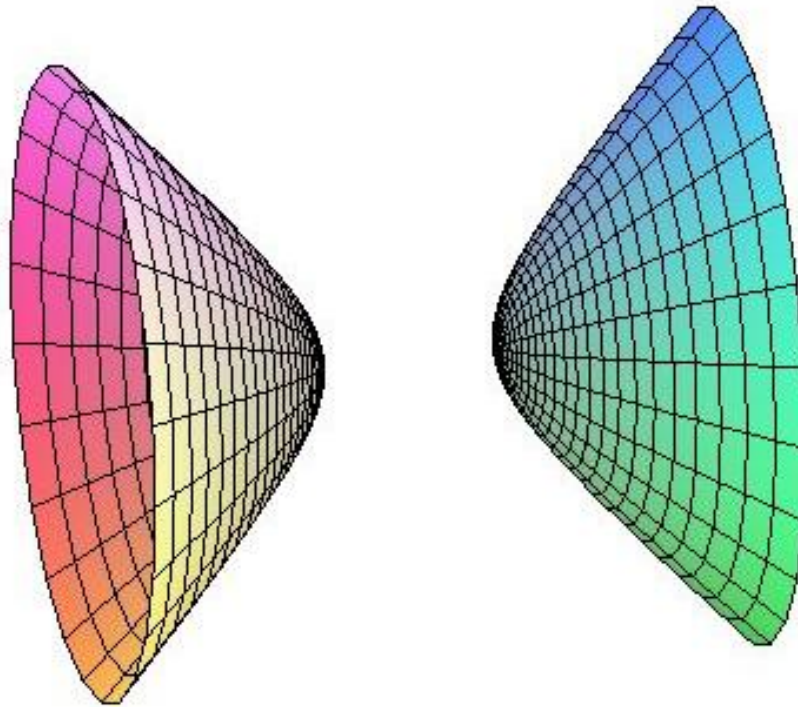


Abbildung 84: Zweischaliges Drehhyperboloid

Zur besseren Anschaulichkeit wird in den folgenden Beispielen nur ein Teil des zweischaligen Drehhyperboloids dargestellt.

Die Offsetfläche besitzt je eine reguläre Störung bei $d = \rho_{\min}$.

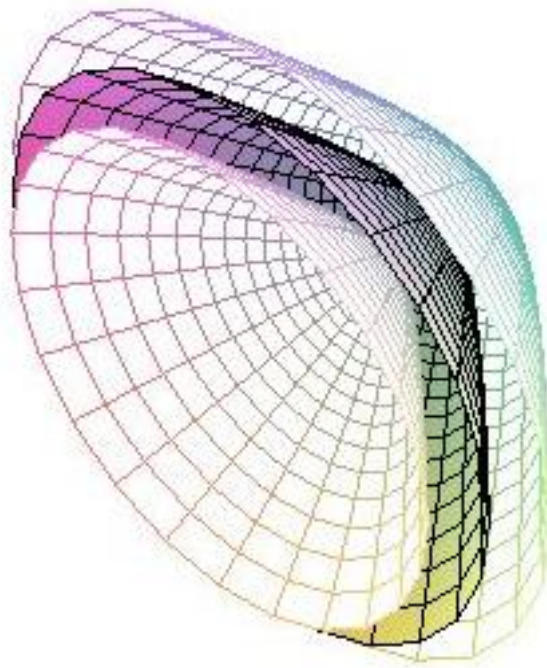


Abbildung 85: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$

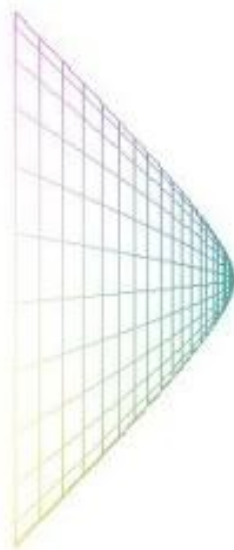


Abbildung 86: Äußere Offsetfläche des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$

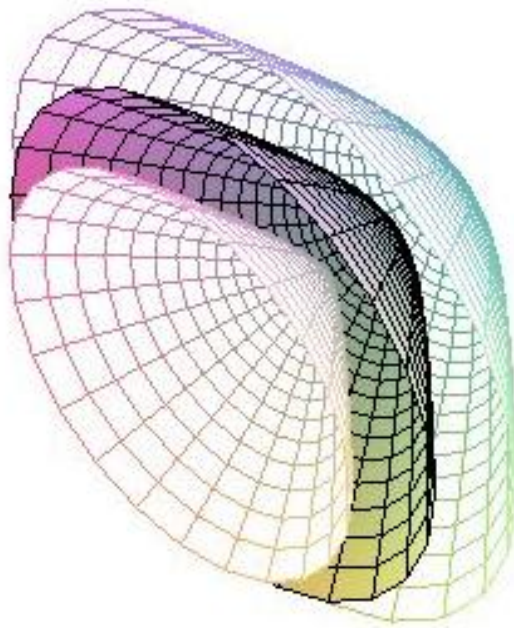


Abbildung 87: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d=r_{\min}$

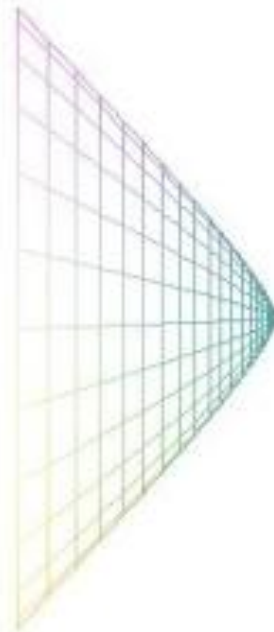


Abbildung 88: Äußere Offsetfläche des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d=r_{\min}$

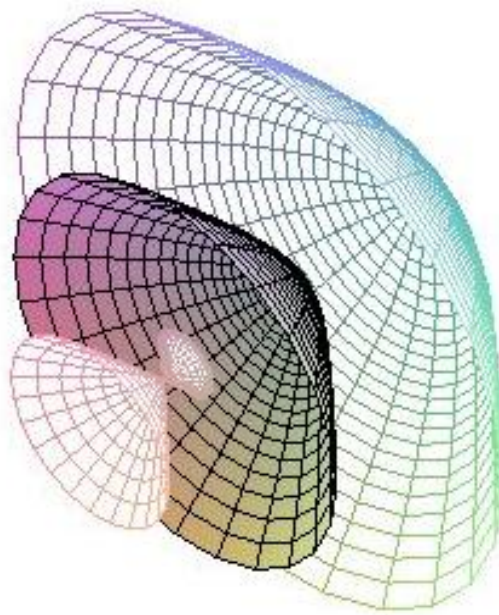


Abbildung 89: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d > r_{\max}$

5.2 Offsets von torsalen Regelflächen

Regelflächen entstehen durch stetige Bewegung einer Geraden. Zu den Regelflächen gehören insbesondere Zylinder-, Kegel-, Regeldreh- und Regelschraubflächen.

Ist die Tangentialebene in allen Punkten längs einer jeden Erzeugenden der Regelflächen jeweils gleich, spricht man von einer torsalen Regelflächen, und die Erzeugenden heißen torsal. Die torsalen Regelflächen bestehen aus Teilen von Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen von Raumkurven. Andernfalls spricht man von windschiefen Regelflächen: Bei diesen besitzen die Erzeugenden im Allgemeinen in jeweils zwei verschiedenen Punkten auch verschiedene Tangentialebenen, es kann aber auch einzelne torsale Erzeugende geben. Zu den windschiefen Regelflächen gehören z.B. das einschalige Drehhyperboloid oder die Regelschraubflächen.

Regularität von torsalen Regelflächen

Durch jeden Punkt einer torsalen Regelfläche gehen geradlinige Flächenkurven.

Durch jeden Punkt eines Kurvenstücks l geht genau eine Gerade.

$$l: u \in I \times \mathbb{R} \mapsto l(u) \in \mathbb{R}^3$$

$$\Phi: (u, \lambda) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \Phi(u, \lambda) = l(u) + \lambda r(u)$$

$r(u)$ ist der Richtungsvektor der Erzeugenden. Ist $r(u)$ konstant, so handelt es sich um einen Zylinder. Gehen alle Erzeugenden der torsalen Regelfläche durch einen festen Punkt S , so handelt es sich um einen Kegel mit der Spitze S .

Längs jeder Erzeugenden einer torsalen Regelfläche existiert eine feste Tangentialebene, wie es bei Zylinder- und Kegelflächen der Fall ist. Eine derartige Erzeugende wird, wie schon erwähnt, torsale Erzeugende genannt. Auf einer torsalen Erzeugenden gibt es höchstens einen nichtregulären Punkt, und es gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Ist } u_0 \in I \text{ und } \{\dot{l}(u_0), r(u_0)\} \text{ linear unabhängig, dann ist die Erzeugende torsal} \\ &\Leftrightarrow \{\dot{l}(u_0), r(u_0), \dot{r}(u_0)\} \text{ linear abhängig} \end{aligned}$$

Aufgrund der geometrischen Struktur einer torsalen Regelfläche Φ gilt daher, dass die Offsetflächen Φ_d stets ebenfalls torsale Regelflächen sind. Allerdings wechselt im Falle eines Kegels oder der Tangentenfläche der Typ zu einer Tangentenfläche Φ_d , nur bei einem Zylinder Φ sind die Offsetflächen Φ_d stets wieder Zylinderflächen.

5.2.1 Zylinderflächen

Eine Zylinderfläche Φ wird aus einer Leitkurve c mit der Parameterdarstellung $x(t)$ durch eine stetige Translation mit dem Vektor $a \neq (0,0,0)$ beschrieben. Und man erhält somit die Parameterdarstellung Φ

$$x(t) + ua$$

Ohne Einschränkung können wir $x(t)$ als Normalschnitt von Φ bezüglich a voraussetzen. Die Offsetflächen Φ_d einer Zylinderfläche Φ sind daher wieder Zylinderflächen, und zwar mit derselben Erzeugendenrichtung.

Drehzylinder

Ein Drehzylinder Φ mit Achse A und Radius r hat als Offset zwei Drehzylinder Φ_d mit Radius $r+d$ bzw. $r-d$ und Achse A . Φ und Φ_d besitzen gleiche Flächennormalen normal zur Achse A .

Die innere Offsetfläche fällt bei $d = r$ in die Zylinderachse zusammen.

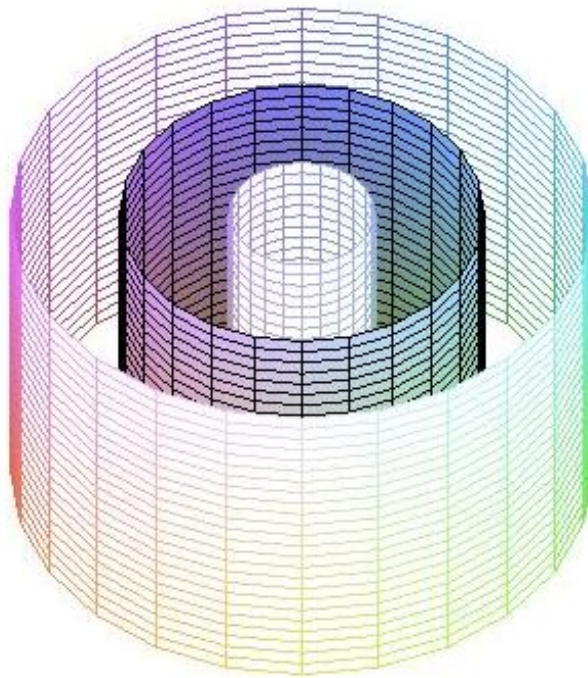


Abbildung 90: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d < r$

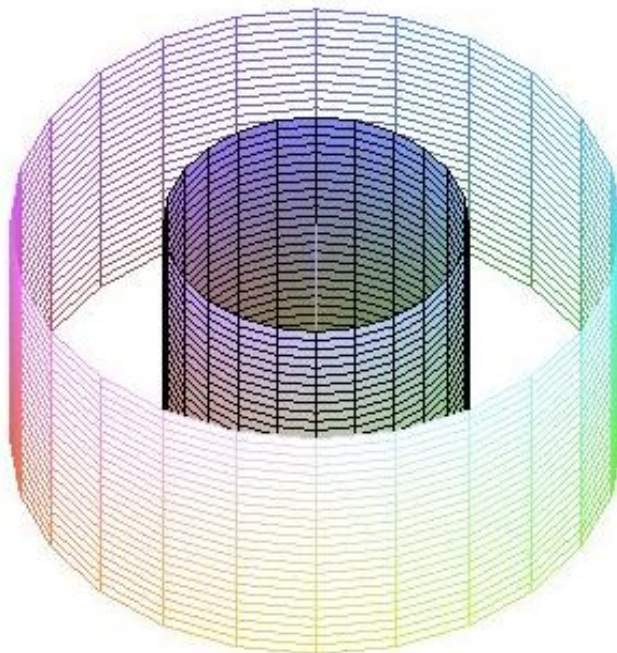


Abbildung 91: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d = r$

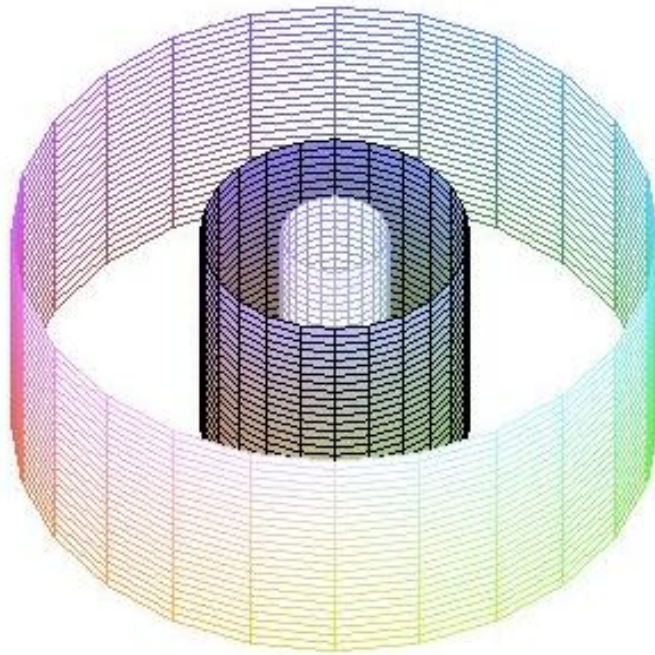


Abbildung 92: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d > r$

Allgemeine Zylinderflächen

In Abhängigkeit der Leitkurve c der Zylinderfläche Φ kann es natürlich zu Störungen der Regularität der Offsetfläche Φ_d von Φ kommen.

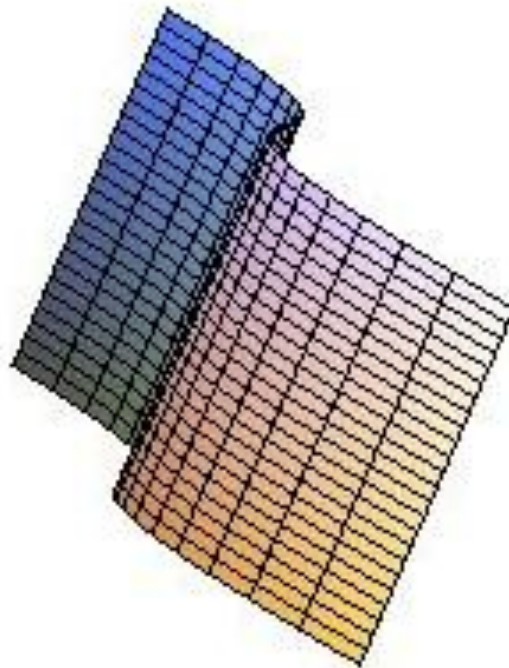


Abbildung 93: Allgemeine Zylinderfläche

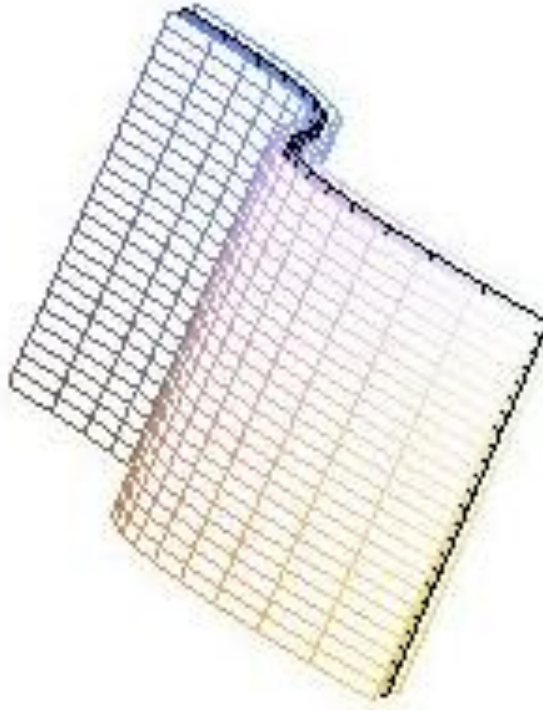


Abbildung 94: Offsetflächen einer Zylinderfläche bei kleinem d

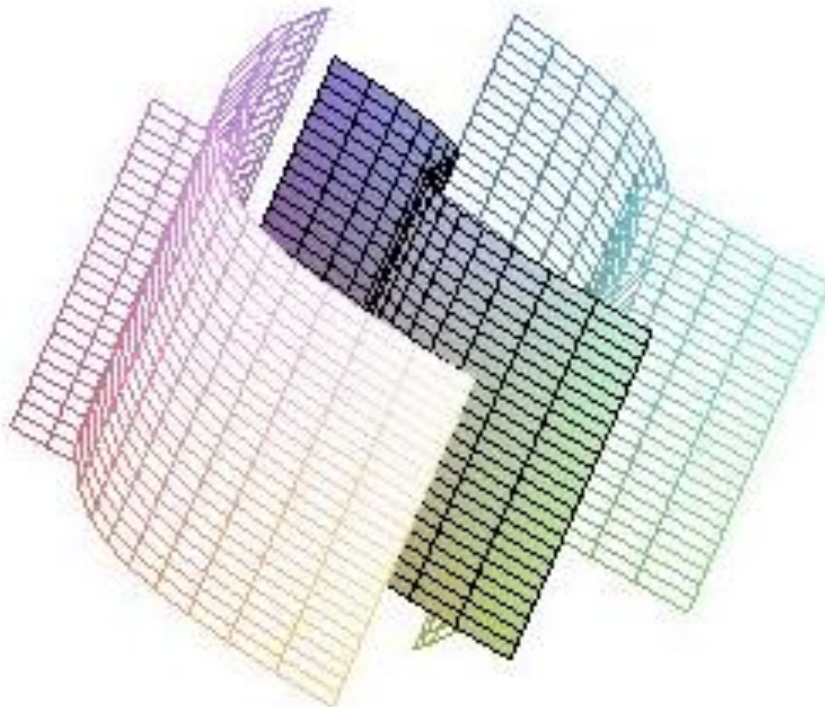


Abbildung 95: Offsetflächen einer Zylinderfläche bei großem d

5.2.2 Kegelflächen

In diesem Punkt werden allgemeine Kegelflächen, jedoch nicht notwendig Drehkegel behandelt. Eine Kegelfläche entsteht aus einer ebenen Kurve, welche mit geraden Linien mit der Spitze v verbunden wird. In der Spitze v ist die Kegelfläche Φ nicht regulär, daher gibt es in diesem Punkt keine eindeutige Flächennormale.

Aufgrund der geometrischen Erzeugung einer Kegelfläche Φ sind die Offsetflächen Φ_d zwar wieder torsale Regelflächen, doch wie die folgenden Abbildungen zeigen nicht notwendig kegelig, sondern im Allgemeinen Teile von Tangentenflächen von Raumkurven.

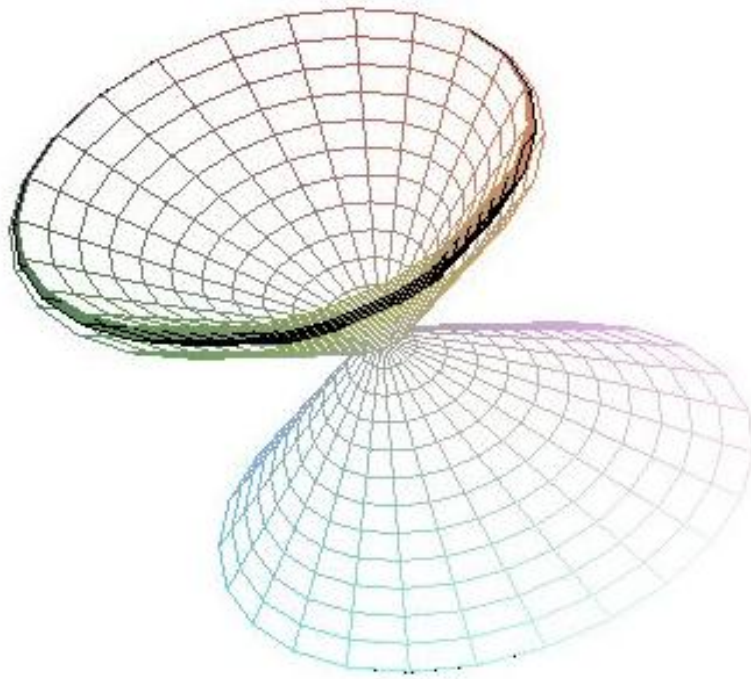
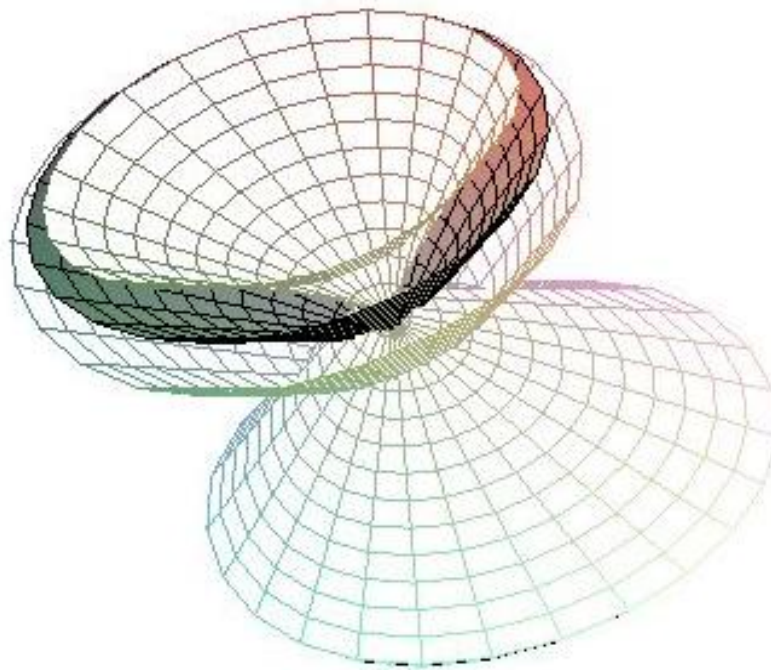


Abbildung 96: Offsetflächen der Kegelfläche bei kleinem d

Abbildung 97: Offsetflächen der Kegelfläche bei großem d

5.2.3 Tangentenflächen einer Raumkurve

Tangentenflächen einer Raumkurve enthalten nur torsale Erzeugende. Betrachtet wird nun eine nicht geradlinige Kurve c . Die Menge aller Punkte ihrer Tangenten ist eine Tangentenfläche Φ mit Gratkurve c . Die Punkte der Gratkurve sind die Gratspunkte der Tangentenfläche Φ . Ist c eine ebene Kurve, so fällt die Tangentenfläche in die Ebene von c .

Handelt es sich bei der Kurve c um ein reguläres Kurvenstück, so ist die Tangentenfläche eine Regelfläche. Ist c regulär und wendepunktfrei, so ist die Tangentenfläche torsal.

Jede torsale Regelfläche besteht aus Teilen von Zylinder-, Kegel- und Tangentenflächen von Raumkurven.

Die Tangentenfläche Φ einer Raumkurve $c(t)$ besitzt die Parameterdarstellung

$$c(t) + s\dot{c}(t), \quad \|\dot{c}(t)\| = 1$$

Weiters wird für $c(t)$ die Krümmung $\kappa \neq 0$ vorausgesetzt, da es sich sonst um einen Wendepunkt handeln würde, in welchem die Tangentenfläche nicht regulär ist.

In Richtung des Binormalenvektors $c_3(t)$ wird nun die Offsetdistanz d abgetragen. Somit erhält man die Parameterdarstellung der Offsetfläche $\Phi_d(s,t)$ von Φ

$$c(t) + s c_1(t) + d c_3(t)$$

Nun wird Φ_d nach s und t differenziert

$$\Phi_{ds} = c_1$$

$$\Phi_{dt} = \dot{c} + s \dot{c}_1 + d \dot{c}_3 = \|\dot{c}\| c_1 + s \kappa c_2 - d \tau c_2 = c_1 \|\dot{c}\| + (s\kappa - d\tau) c_2$$

Man untersucht nun den Fall, dass Φ_{ds} und Φ_{dt} linear unabhängig sind.

$$\{ \Phi_{ds}, \Phi_{dt} \} \text{la} \Leftrightarrow c_1 \times (c_1 \|\dot{c}\| + (s\kappa - d\tau) c_2) = (s\kappa - d\tau) c_3 = 0 \Leftrightarrow s\kappa - d\tau = 0$$

$$\Rightarrow s_0 = \frac{d\tau}{\kappa}$$

Nun wird die Parameterdarstellung der Gratkurve g der Offsetfläche Φ_d aufgestellt

$$c(t) + \frac{d\tau}{\kappa} c_1 + d c_3$$

Die erste Ableitung der Gratkurve $g(t)$ ergibt

$$\dot{g} = \dot{c} + d \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa} \right) c_1 + \frac{d\tau}{\kappa} \dot{c}_1 + d \dot{c}_3$$

Verwendet man nun die Formeln $c_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$, $\dot{c}_1 = \kappa c_2$, $\dot{c}_3 = -\tau c_2$

so ergibt sich die Umformung

$$\dot{g} = c_1 \left(\|\dot{c}\| + d \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa} \right) \right) + d \tau c_2 - d \tau c_2 = c_1 \left(\|\dot{c}\| + d \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa} \right) \right)$$

Es wird nun untersucht, ob die Gratkurve $g(t)$ auch singuläre Punkte enthalten kann

$$\dot{g} = 0 \Leftrightarrow \|\dot{c}\| + d \left(\frac{\dot{\tau}}{\kappa} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Die Gratkurve g der Offsetfläche Φ_d kann singuläre Punkte besitzen.

Schraublinie

Bei einer stetigen Schraubung zum Schraubparameter p beschreibt jeder Punkt des Raumes eine Bahnkurve, wobei die Punkte der Schraubachse fix bleiben. Liegt ein Punkt nicht auf der Schraubachse a , so beschreibt er unter stetiger Schraubung eine Schraublinie s .

Man wählt nun das Koordinatensystem geeignet, so dass die Schraubachse a in der x_3 -Achse liegt, und der Punkt zum Parameterwert $\varphi = 0$ in der Ebene $x_3 = 0$ liegt. So erhält man folgende Parameterdarstellung einer Schraublinie c , wobei der Punkt P die Koordinaten $(r, 0, 0)$ besitzt

$$(r \cos \varphi, r \sin \varphi, p \varphi) \in \mathbb{R}^3$$

Jede Schraublinie c ist ein reguläres Kurvenstück. Ihr Grundriss c' ist ein Kreis um den Grundriss der Achse a' . Der Drehzylinder mit Schraubachse a als Drehachse wird Schraubzylinder genannt.

Die Gratlinie g der Offsetfläche der Tangentenfläche einer Schraublinie ist aufgrund der geometrischen Erzeugung schiebungsgleich zu c in Richtung der Schraubachse.

Diese Tatsache kann man auch dadurch bestätigen, dass die Krümmung κ_d und Torsion τ_d berechnet werden. Nach den Formeln von 2.2.3 und 2.2.4 bestätigt man

$$\kappa_d = \kappa, \tau_d = \tau$$

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie sind daher c und g kongruent.

Es gilt also: Die Offsetflächen Φ_d der Tangentenfläche Φ einer Schraublinie c zum Schraubparameter p um eine Achse a sind zu Φ in Richtung a schiebungsgleiche Flächen. Allerdings sind die „Offset-Bilder“ von c nicht die Gratkurven g der Offsetflächen Φ_d . Die Gratkurve $g(t)$ der Offsetfläche Φ_d ist regulär, da

$$\sqrt{r^2 + p^2} > 0$$

gilt.

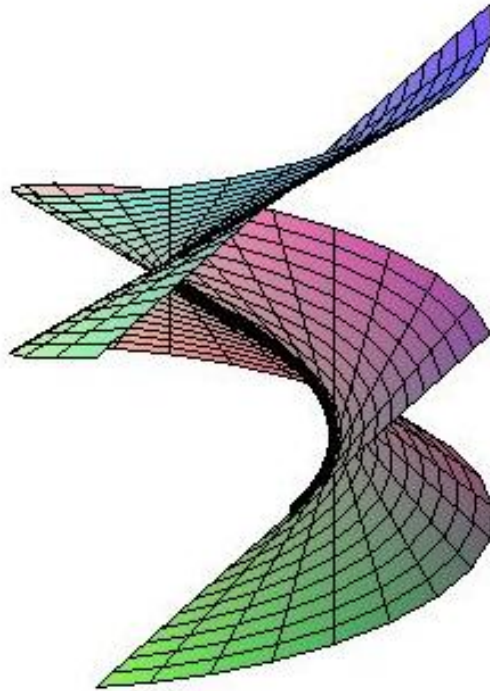


Abbildung 98: Tangentenfläche einer Schraublinie

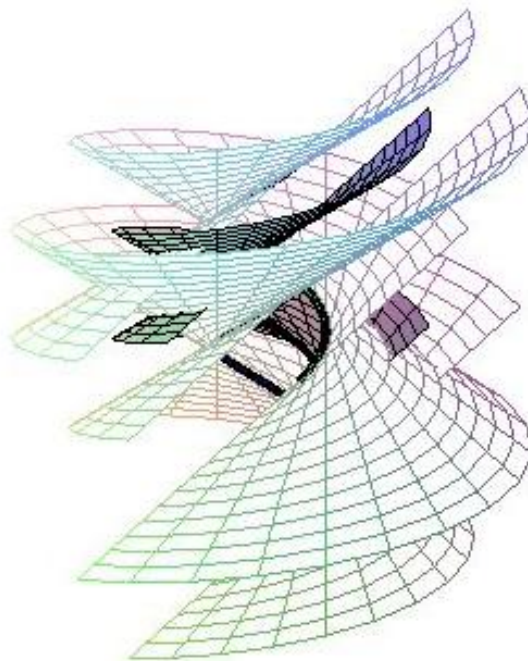


Abbildung 99: Offsetflächen einer Tangentenfläche einer Schraublinie

Kubische Parabel

Die Parameterdarstellung der kubischen Parabel $c(t)$ lautet

$$c(t) = (a t, b t^2, c t^3) \in \mathbb{R}^3, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Entlang dieser Raumkurve $c(t)$ wird nun die Tangentenfläche Φ erzeugt.

Wie schon erwähnt, ist die Offsetfläche Φ_d einer Tangentenfläche Φ wieder eine torsale Regelfläche, im Fall der Tangentenfläche einer kubischen Parabel die Tangentenfläche einer Raumkurve g ; der kegelige oder zylindrische Fall tritt nicht ein.

In den folgenden Bildern ist jeweils eine „obere“ und eine „untere“ Offsetfläche Φ_d einer Tangentenfläche Φ der kubischen Parabel dargestellt. In beiden Abbildungen kann man erkennen, dass die Gratkurve $g(t)$ der Offsetfläche Φ_d Spitzen besitzen kann. Die Gratkurve $g(t)$ der Offsetfläche Φ_d ist dann also im Gegensatz zur kubischen Parabel $c(t)$ selbst keine reguläre Raumkurve mehr. Die Parameterwerte $t_1, t_2, \dots$, welche zu Spitzen der Gratkurve g führen, sind durch $\dot{g}_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots$ gekennzeichnet. Aus dem einleitenden Abschnitt 5.2.3 gilt die Kennzeichnung

$$\dot{g} = 0 \Leftrightarrow \|\dot{c}\| + d \left(\frac{\ddot{t}}{\kappa} \right) = 0$$

Diese Bedingung führt zu einem algebraischen Problem, welches mit dem verwendeten Computeralgebrasystem ausgewertet werden kann.

Vereinfacht formuliert gilt:

Je größer die Offsetdistanz d ist, umso mehr reelle Spitzen kann die Gratkurve g besitzen. In den Figuren 101 und 102 treten jeweils zwei reelle Spitzen von g auf, die durch Kugeln markiert sind.

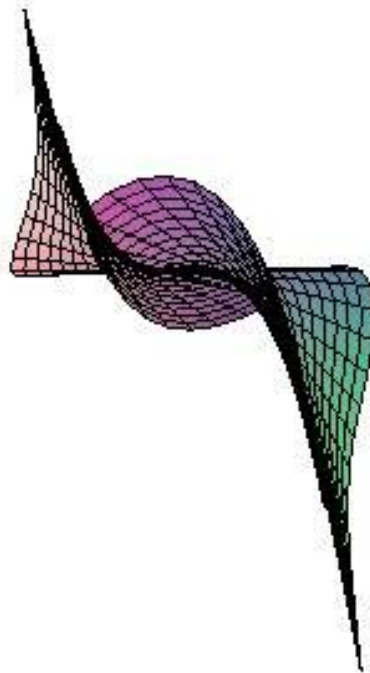


Abbildung 100: Tangentenfläche der kubische Parabel

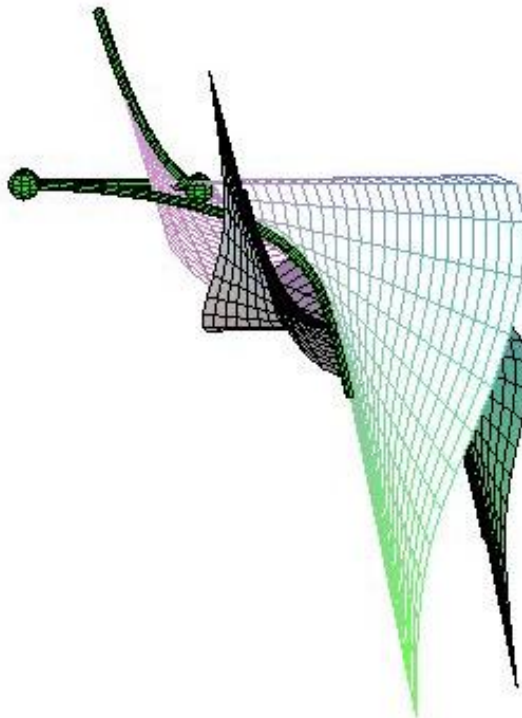


Abbildung 101: „Oberer“ Teil einer Offsetfläche der Tangentenfläche der kubischen Parabel

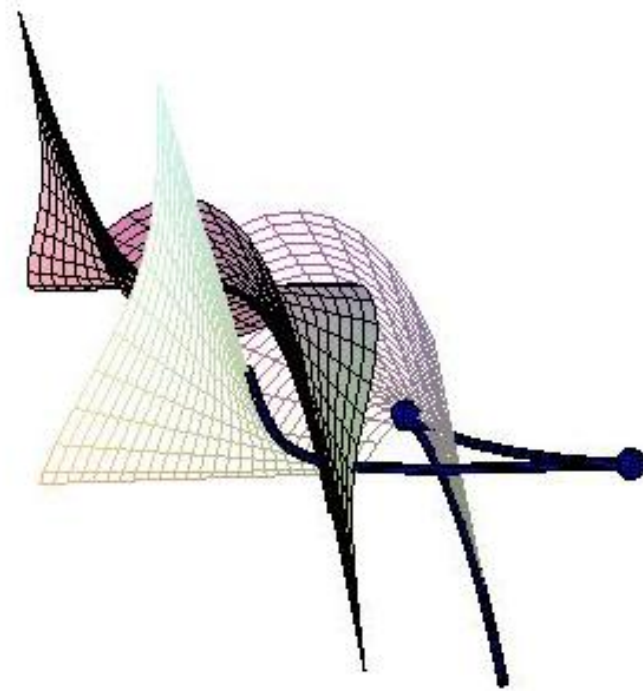


Abbildung 102: "Unterer" Teil einer Offsetfläche der Tangentenfläche der kubischen Parabel

5.3 Offsets von Schraubflächen

Als Schraubachse a einer Schraubfläche Φ wählen wir ohne Einschränkung die Gerade x_3 . Die stetige Schraubung $S_3(u)$ um x_3 wird wie folgt erfasst

$$x' = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot u \end{pmatrix} = D_3(u) x + v(u), u \in \mathbb{R}$$

Wird ein Punkt $X = (r, 0, 0)$ verschraubt, so erhält man die Schraublinie $s(u) = (r \cos u, r \sin u, pu)$. Wählt man nun eine Raumkurve $c(v) = (c_1(v), c_2(v), c_3(v))$, welche keine Bahnschraublinie ist, so erhält man die Schraubfläche Φ

$$\begin{aligned} x(u, v) &= D_3(u) c(v) + v(u) \\ &= (c_1(v) \cos u - c_2(v) \sin u, c_1(v) \sin u + c_2(v) \cos u, c_3(v) + pu) \end{aligned}$$

$$u \in \mathbb{R}, v \in I$$

Das Netz der Parameterlinien einer Schraubfläche besteht einerseits aus den verschraubten Kopien von c ($u = u_0$), andererseits aus den Bahnschraublinien ($v = v_0$).

Schneidet man Φ mit Ebenen durch die Schraubachse a , so erhält man die Meridiane der Schraubfläche.

Aufgrund der geometrischen Erzeugung einer Schraubfläche Φ um die Achse a zum Schraubparameter p sind die Offsetflächen Φ_d von Φ stets wieder Schraubflächen zum Parameter p .

Auf die verschiedenen Arten der Kreisschraubfläche und die Schraubrohrfläche wird in den nächsten Punkten näher eingegangen.

5.3.1 Kreisschraubflächen

Grundsätzlich entsteht eine Kreisschraubfläche durch Verschraubung eines Kreises c um die Drehachse a . Hier werden zwei verschiedene Typen von Kreisen gewählt, um eine Kreisschraubfläche zu erhalten:

Meridiankreis

Der Meridian der Schraubfläche ist ein Kreis, das heißt der Kreis c liegt in einer lotrechten Ebene.

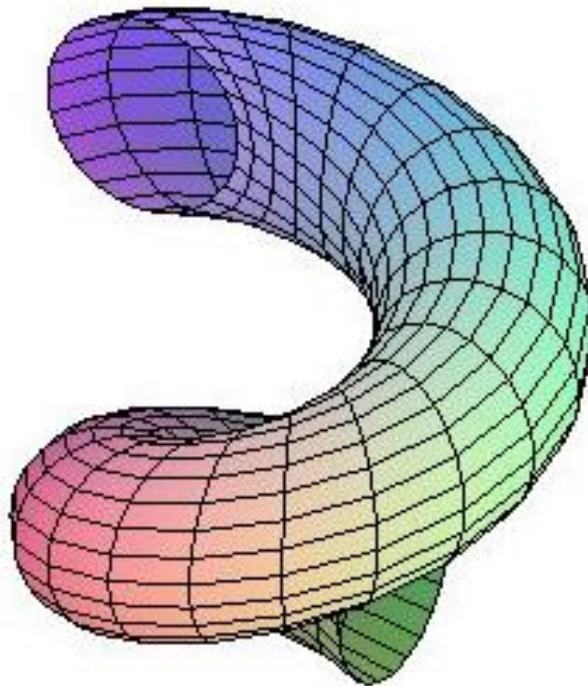


Abbildung 103: Kreisschraubfläche eines Meridiankreises

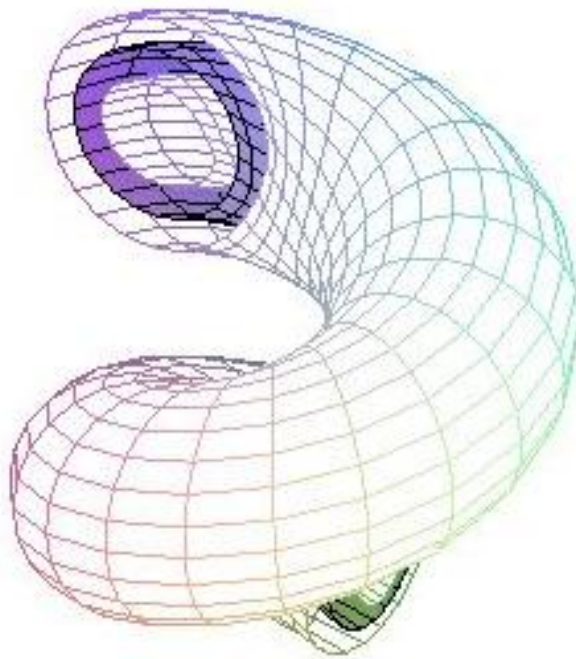


Abbildung 104: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d < r$

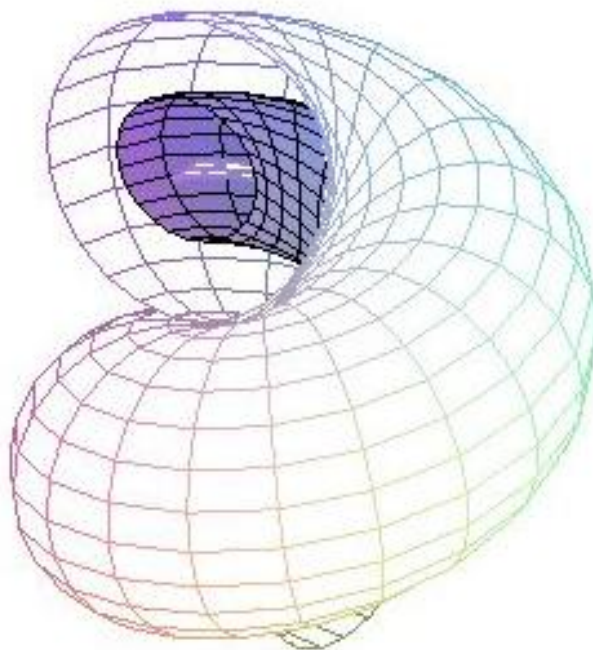


Abbildung 105: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d = r$

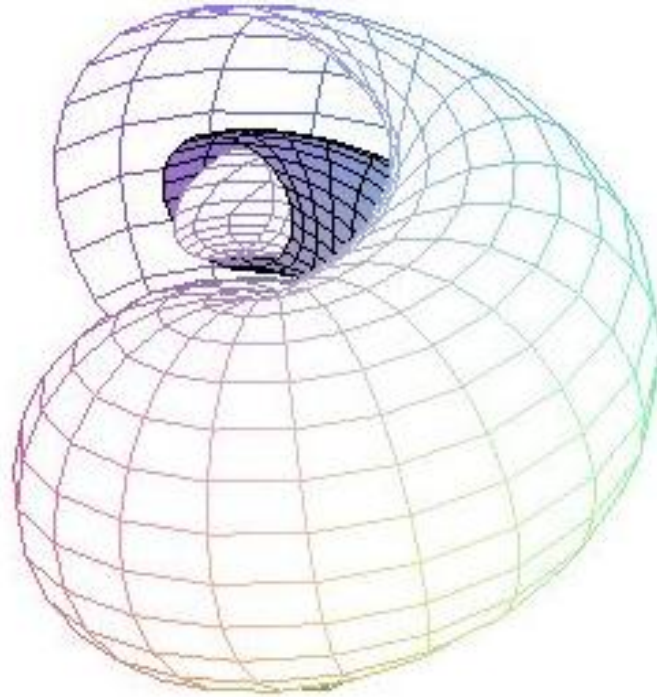


Abbildung 106: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d > r$

Schichtenkreis

Der verschraubte Kreis c liegt in einer horizontalen Ebene, man nennt ihn Schichtenkreis.

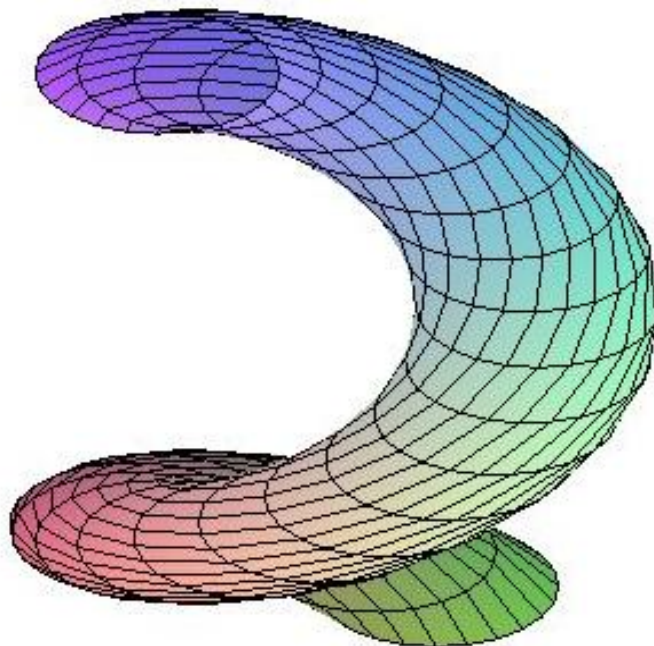


Abbildung 107: Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises

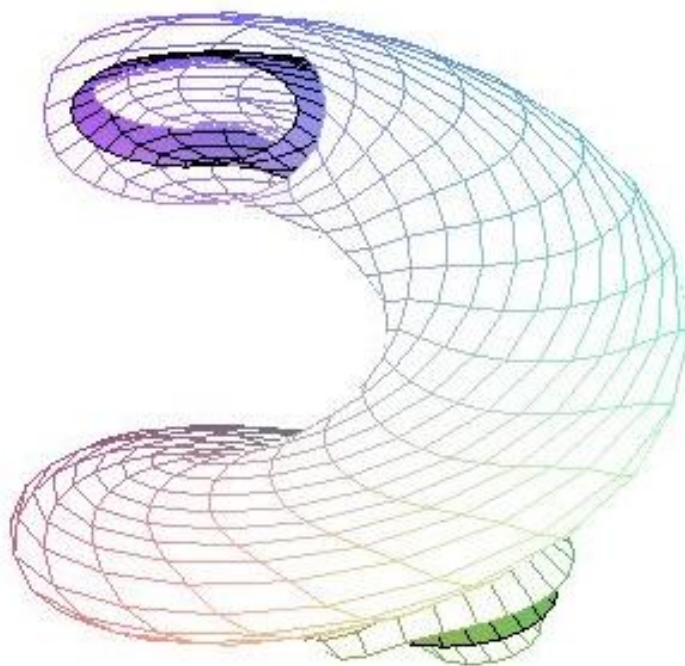


Abbildung 108: Offsetflächen der Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d < r$

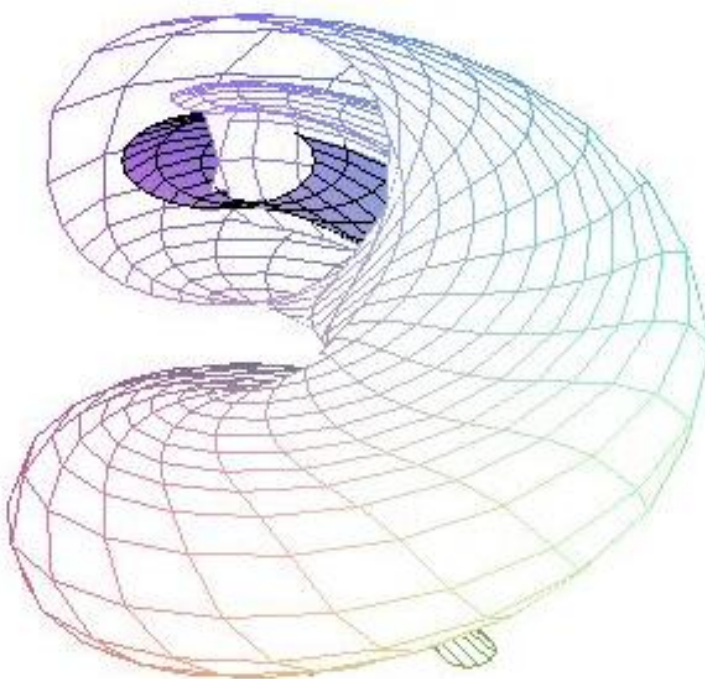


Abbildung 109: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d = r$

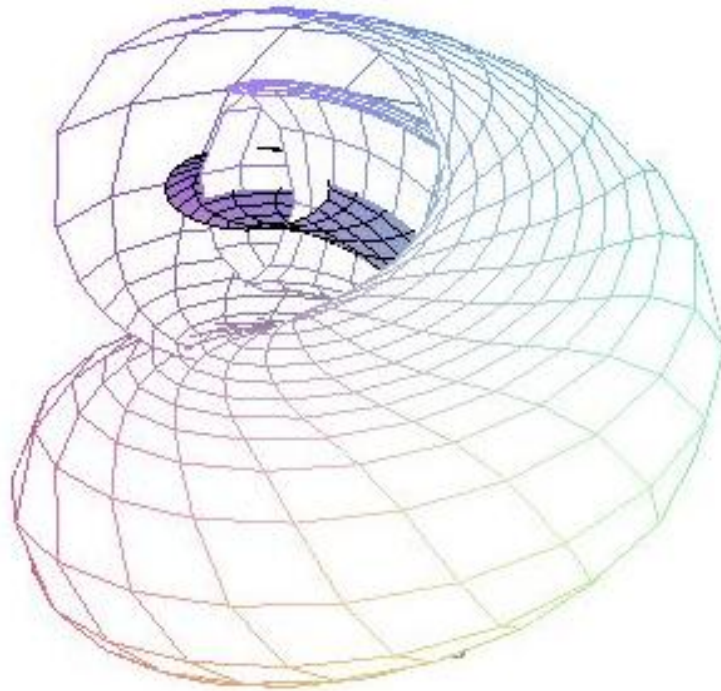


Abbildung 110: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d > r$

5.3.2 Schraubrohrfläche

Der verschraubte Kreis c liegt nun in der Bahnnormalebene des Kreismittelpunktes. Eine Schraubrohrfläche ist die Hüllfläche einer verschraubten Kugel K mit c als Gratkreis. Diese Kugel berührt die Hüllfläche, also die Schraubrohrfläche Φ , längs eines Großkreises in der Bahnnormalebene, also längs dem Kreis c . Dieser Berührkreis ist die Charakteristik des Hüllvorgangs.

Die Offsetflächen Φ_d einer Schraubrohrfläche Φ um eine Schraubachse a zum Schraubparameter p sind aufgrund dieser geometrischen Erzeugung daher wieder Schraubrohrflächen um die Schraubachse a zum Schraubparameter p .

Diese Eigenschaft gilt auch noch für Rohrflächen, welche aus einer bewegten Kugel entlang der Mittenkurve entstehen. Eine Rohrfläche kann außerdem als Offset der Mittenkurve angesehen werden.

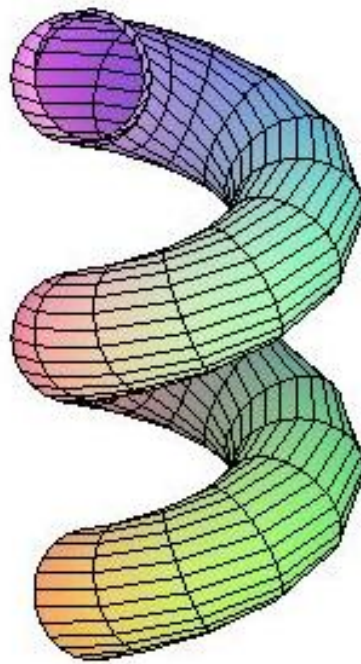


Abbildung 111: Schraubrohrfläche

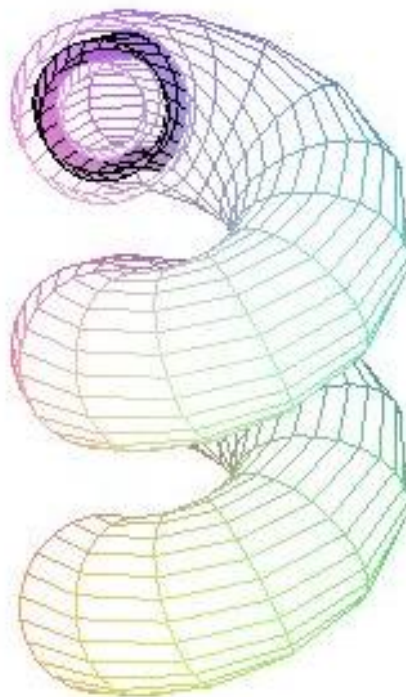


Abbildung 112: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d < r$

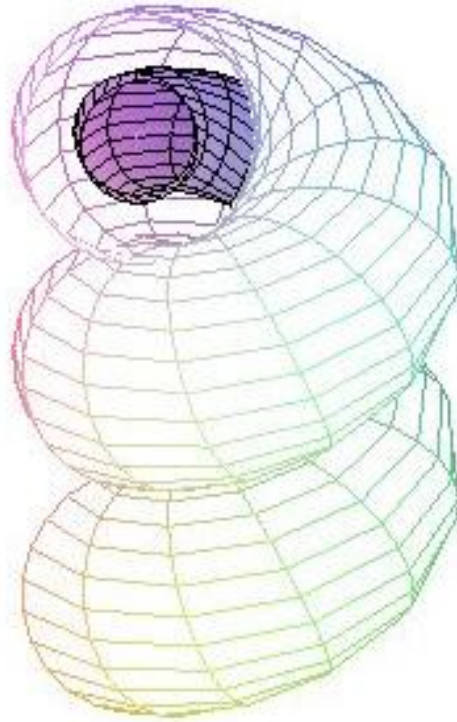


Abbildung 113: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d=r$

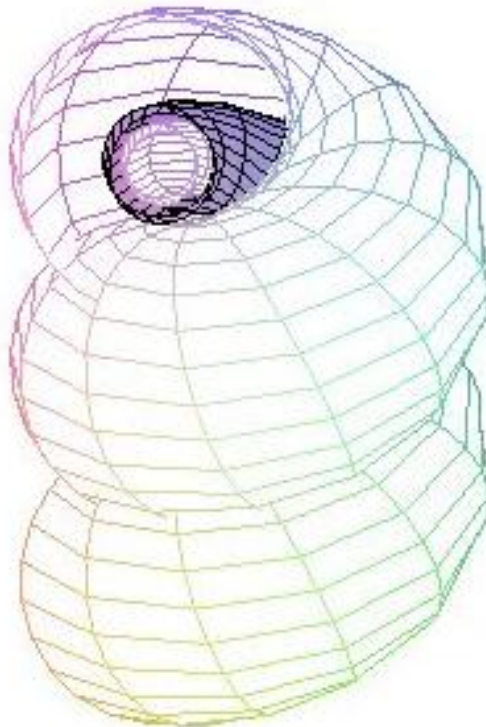


Abbildung 114: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d>r$

Literaturverzeichnis

- [1] Heinrich Brauner: „Differentialgeometrie“ Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1981.
- [2] H. Brauner: „Lehrbuch der konstruktiven Geometrie“ Springer Verlag, Wien, 1986.
- [3] Helmut Pottmann, Andreas Asperl, Michael Hofer, Axel Kilian: „Architectural Geometry“ Bentley Institute Press, 2007.
- [4] Helmut Reckziegel, Markus Kriener, Knut Pawel: „Elementare Differentialgeometrie mit Maple“ Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1998.
- [5] Volkmar Wünsch: „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Differentialgeometrie Kurven und Flächen“ B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart Leipzig, 1997.
- [6] Manfredo P. do Carmo: „Differentialgeometrie von Kurven und Flächen“ Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1993.
- [7] Peter Paukowitsch: Skriptum „Mathematik für ArchitektInnen“ zur gleichnamigen Lehrveranstaltung an der TU Wien am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie FG4: Geometrische Modellierung und Industrielle Geometrie, Wintersemester 2008/2009.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Polarkoordinaten, kartesische Koordinaten	4
Abbildung 2: Neilsche Parabel.....	6
Abbildung 3: x_1 -Achse	6
Abbildung 4: Kurvennormale und -tangente	7
Abbildung 5: Kurvennormalen und Evolute	8
Abbildung 6: Normalen eines Kreises.....	8
Abbildung 7: Normalen einer Geraden.....	9
Abbildung 8: Krümmungskreis	11
Abbildung 9: Krümmungskreis im Hauptscheitel der Ellipse	12
Abbildung 10: Krümmungskreis im Nebenscheitel der Ellipse.....	12
Abbildung 11: Offsetkurven einer ebenen Kurve.....	13
Abbildung 12: Offsetkurven hüllen Kreisschar ein.....	14
Abbildung 13: Offsetkurven der Ellipse bei $d < r_{\min}$	24
Abbildung 14: Offsetkurven der Ellipse bei $d = r_{\min}$	25
Abbildung 15: Offsetkurven der Ellipse bei $r_{\min} < d < r_{\max}$	25
Abbildung 16: Offsetkurven der Ellipse bei $d = r_{\max}$	25
Abbildung 17: Offsetkurven der Ellipse bei $d > r_{\max}$	26
Abbildung 18: Parabolischer Punkt mit geradlinigem Tangentialschnitt	35
Abbildung 19: Parabolischer Punkt mit Tangentialschnitt mit Spitze.....	35
Abbildung 20: Parabolischer Punkt mit einpunktigem Tangentialschnitt.....	35

Abbildung 21: Parabolischer Punkt mit Tangentialschnitt mit Selbstberührung	36
Abbildung 22: Parabolischer Punkt mit parabelförmigem Tangentialschnitt.....	36
Abbildung 23: Oskultorie in einem elliptischen Flächenpunkt	40
Abbildung 24: Netz der Oskultorie in einem elliptischen Flächenpunkt.....	40
Abbildung 25: Krümmungskreise in einem elliptischen Flächenpunkt	41
Abbildung 26: Oskultorie in einem hyperbolischen Flächenpunkt	42
Abbildung 27: Netz der Oskultorie in einem hyperbolischen Flächenpunkt.....	42
Abbildung 28: Krümmungskreise in einem hyperbolischen Flächenpunkt	43
Abbildung 29: Oskultorie in einem parabolischen Flächenpunkt.....	44
Abbildung 30: Netz der Oskultorie in einem parabolischen Flächenpunkt.....	44
Abbildung 31: Krümmungskreise in einem parabolischen Flächenpunkt.....	45
Abbildung 32: Offsetkurven des Kreises bei $d < r$	46
Abbildung 33: Offsetkurven des Kreises bei $d = r$	46
Abbildung 34: Offsetkurven des Kreises bei $d > r$	47
Abbildung 35: Spitzpunkt an einer ebenen Kurve	48
Abbildung 36: Offsetkurven einer Ellipse bei $d < r_{\min}$	48
Abbildung 37: 2 Spitzpunkte an der Offsetkurve einer Ellipse bei $d = r_{\min}$	48
Abbildung 38: 4 Spitzen an der Offsetkurve einer Ellipse bei $r_{\min} < d < r_{\max}$	49
Abbildung 39: 2 Spitzpunkte an der Offsetkurve einer Ellipse bei $d = r_{\max}$	49
Abbildung 40: Offsetkurven einer Ellipse bei $d > r_{\max}$	49
Abbildung 41: Offsetkurven der Parabel bei $d < r_{\min}$	50
Abbildung 42: Offsetkurven der Parabel bei $d = r_{\min}$	51

Abbildung 43: Offsetkurven der Parabel bei $d > r_{\min}$	51
Abbildung 44: Offsetkurven der Hyperbel bei $d < r_{\min}$	52
Abbildung 45: Offsetkurven der Hyperbel bei $d = r_{\min}$	52
Abbildung 46: Offsetkurven der Hyperbel bei $d > r_{\min}$	52
Abbildung 47: Offsetkurven der logarithmischen Spirale	53
Abbildung 48: Offsetkurven eines Polygons	53
Abbildung 49: Offsetkurven eines Polygons - lineare Endpunktverbindung.....	54
Abbildung 50: Offsetkurven eines Polygons - halbkreisförmige Endpunktverbindung...	54
Abbildung 51: Offsetflächen der Kugel bei $d < r$	57
Abbildung 52: Offsetflächen der Kugel bei $d = r$	57
Abbildung 53: Offsetflächen der Kugel bei $d > r$	58
Abbildung 54: Ringtorus Abbildung 55: untere Hälfte des Ringtorus	59
Abbildung 56: Offsetflächen des Ringtorus bei $d < r$	59
Abbildung 57: Offsetflächen des Ringtorus bei $d = r$	60
Abbildung 58: Offsetflächen des Ringtorus bei $d > r$	60
Abbildung 59: Dorntorus Abbildung 60: untere Hälfte des Dorntorus.....	61
Abbildung 61: Offsetflächen des Dorntorus bei $d < r$	61
Abbildung 62: Offsetflächen des Dorntorus bei $d = r$	62
Abbildung 63: Offsetflächen des Dorntorus bei $d > r$	62
Abbildung 64: Spindeltorus Abbildung 65: untere Hälfte des Spindeltorus	63
Abbildung 66: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d < r$	63
Abbildung 67: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d = r$	64

Abbildung 68: Offsetflächen des Spindeltorus bei $d > r$	64
Abbildung 69: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d < r_{\min}$	65
Abbildung 70: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d = r_{\min}$	66
Abbildung 71: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $r_{\min} < d < r_{\max}$	66
Abbildung 72: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d = r_{\max}$	67
Abbildung 73: Offsetflächen des Drehellipsoids bei $d > r_{\max}$	67
Abbildung 74: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d < r_{\min}$	68
Abbildung 75: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d = r_{\min}$	69
Abbildung 76: Reguläre Störung der oberen Offsetfläche des Drehparaboloids bei $d = r_{\min}$	69
Abbildung 77: Offsetflächen des Drehparaboloids bei $d > r_{\min}$	70
Abbildung 78: Einschaliges Drehhyperboloid	71
Abbildung 79: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$	72
Abbildung 80: Innere Offsetfläche des einschaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$	72
Abbildung 81: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d = r_{\min}$	73
Abbildung 82: Innere Offsetfläche des einschaligen Drehhyperboloids bei $d = r_{\min}$	73
Abbildung 83: Offsetflächen des einschaligen Drehhyperboloids bei $d > r_{\max}$	74
Abbildung 84: Zweischaliges Drehhyperboloid.....	75
Abbildung 85: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$	76
Abbildung 86: Äußere Offsetfläche des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d < r_{\min}$	76
Abbildung 87: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d = r_{\min}$	77
Abbildung 88: Äußere Offsetfläche des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d = r_{\min}$	77

Abbildung 89: Offsetflächen des zweischaligen Drehhyperboloids bei $d > r_{\max}$	78
Abbildung 90: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d < r$	80
Abbildung 91: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d = r$	80
Abbildung 92: Offsetflächen des Drehzylinders bei $d > r$	81
Abbildung 93: Allgemeine Zylinderfläche	81
Abbildung 94: Offsetflächen einer Zylinderfläche bei kleinem d	82
Abbildung 95: Offsetflächen einer Zylinderfläche bei großem d	82
Abbildung 96: Offsetflächen der Kegelfläche bei kleinem d	83
Abbildung 97: Offsetflächen der Kegelfläche bei großem d	84
Abbildung 98: Tangentenfläche einer Schraublinie	87
Abbildung 99: Offsetflächen einer Tangentenfläche einer Schraublinie	87
Abbildung 100: Tangentenfläche der kubische Parabel	89
Abbildung 101: „Oberer“ Teil einer Offsetfläche der Tangentenfläche der kubischen Parabel	89
Abbildung 102: "Unterer" Teil einer Offsetfläche der Tangentenfläche der kubischen Parabel	90
Abbildung 103: Kreisschraubfläche eines Meridiankreises	91
Abbildung 104: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d < r$	92
Abbildung 105: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d = r$	92
Abbildung 106: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Meridiankreises bei $d > r$	93
Abbildung 107: Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises	93
Abbildung 108: Offsetflächen der Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d < r$	94

Abbildung 109: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d = r$	94
Abbildung 110: Offsetflächen einer Kreisschraubfläche eines Schichtenkreises mit $d > r$	95
Abbildung 111: Schraubrohrfläche	96
Abbildung 112: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d < r$	96
Abbildung 113: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d = r$	97
Abbildung 114: Offsetflächen der Schraubrohrfläche bei $d > r$	97