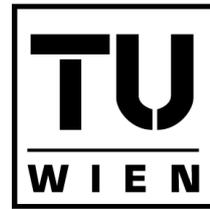


Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

Diplomarbeit

## **Data Envelopment Analysis - Theorie und Anwendung im Anlagenbau**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
„Diplom-Ingenieur“  
unter der Leitung von

o. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. Adolf Stepan

Institut für Managementwissenschaften (E330) der Technischen Universität Wien

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Spazierer Peter

0025260 / E740

Schwaigergasse 12/1/10

1210 Wien

Österreich

.....  
Ort, Datum

.....  
Unterschrift Studierender

# Inhaltsverzeichnis

<b>INHALTSVERZEICHNIS .....</b>	<b>1</b>
<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS .....</b>	<b>3</b>
<b>TABELLENVERZEICHNIS.....</b>	<b>4</b>
<b>1. EINLEITUNG.....</b>	<b>5</b>
1.1. ZIEL DER ARBEIT.....	5
1.2. AUFBAU DER ARBEIT .....	6
<b>2. GRUNDLAGEN DER EFFIZIENZMESSUNG.....</b>	<b>7</b>
2.1. ALLGEMEINE KENNZAHLEN .....	7
2.2. PARAMETRISCHE MODELLE.....	8
2.3. NICHT-PARAMETRISCHE MODELLE .....	10
2.4. TECHNIKEIGENSCHAFTEN .....	11
2.4.1. Skalenerträge .....	11
2.4.2. Verschwendbarkeit von In- und Outputs.....	13
2.4.3. Kombinierbarkeit.....	14
2.5. DAS EFFIZIENZMAß.....	15
2.5.1. Effizienzmaße im eindimensionalen Fall .....	16
2.5.2. Effizienzmaß im mehrdimensionalen Fall.....	21
<b>3. DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA) - GRUNDMODELLE .....</b>	<b>23</b>
3.1. DAS CCR-MODELL .....	23
3.1.1. Inputorientierung.....	23
3.1.2. Outputorientierung.....	30
3.2. BCC-MODELL.....	32
3.2.1. Inputorientierung.....	32
3.2.2. Outputorientierung.....	36
3.3. ADDITIVE MODELLE .....	38
3.4. MULTIPLIKATIVE MODELLE .....	44
3.5. FREE DISPOSAL HULL MODELL .....	47
<b>4. BERÜCKSICHTIGUNG VON A PRIORI WISSEN.....</b>	<b>50</b>
4.1. NICHT-DISKRETE FAKTOREN .....	50
4.1.1. Kontinuierliche Variablen.....	50
4.1.2. Kategorische Variablen .....	54
4.1.2.1. Ordinale Ausprägung .....	55
4.1.2.2. Nominale Ausprägung.....	56
4.2. UNERWÜNSCHTE OUTPUTS.....	59

<b>5. PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG EINER DEA-ANALYSE .....</b>	<b>61</b>
5.1. BEHANDLUNG DER DATEN VOR DER ANALYSE .....	62
5.2. BEGRENZUNG DER GEWICHTUNGEN .....	63
5.3. KREUZ-EFFIZIENZ .....	67
5.4. SUPEREFFIZIENZ .....	69
5.5. EFFIZIENZÄNDERUNG ÜBER DIE ZEIT .....	73
<b>6. ABGRENZUNG DER DEA.....</b>	<b>77</b>
<b>7. FALLSTUDIE .....</b>	<b>79</b>
7.1. EINLEITUNG .....	79
7.2. PROJEKTBESCHREIBUNG .....	79
7.3. BETRACHTUNGEN ZUR DECISION MAKING UNIT (DMU).....	81
7.3.1. <i>Definition</i> .....	81
7.3.2. <i>Vergleichbarkeit der DMU's</i> .....	81
7.4. DEFINITION DER INPUTS UND OUTPUTS.....	82
7.4.1. <i>Gesamtarbeitszeit</i> .....	82
7.4.2. <i>Zusatzarbeiten</i> .....	83
7.4.3. <i>Jahreszeit</i> .....	84
7.4.4. <i>Niederlassung</i> .....	84
7.4.5. <i>Bodenhersteller</i> .....	85
7.4.6. <i>Höhe und Durchmesser des Reaktors</i> .....	85
7.4.7. <i>Auflageroste der Katalysatoren</i> .....	86
7.4.8. <i>Einbauhöhe der jeweiligen Auflageroste</i> .....	86
7.4.9. <i>Anzahl der Verteilerböden über den Katalysatorenbetten</i> .....	87
7.4.10. <i>Anzahl, Ebenen und Höhe der Quenchboxen</i> .....	87
7.4.11. <i>Einbauhöhe der Quenchboxen</i> .....	88
7.4.12. <i>Einbau von Temperaturfühlern</i> .....	89
7.5. BEHANDLUNG DER DATENMENGE VOR DER ANALYSE.....	90
7.6. DAS BERECHNUNGSPROGRAMM.....	92
7.7. DIE ANALYSE .....	93
7.7.1. <i>Effizienzanalyse zur ex-post Überprüfung</i> .....	93
7.7.2. <i>Effizienzanalyse für weiteres Vorgehen</i> .....	94
7.7.3. <i>Einfluss der Outputvariablen</i> .....	97
7.7.4. <i>Einfluss der Jahreszeit</i> .....	98
7.7.5. <i>Unterschiede zwischen den Bodenherstellern</i> .....	101
7.7.6. <i>Unterschiede zwischen den Niederlassungen</i> .....	102
7.8. ZUSAMMENFASSUNG DER ANALYSE.....	103
<b>8. RESÜMEE.....</b>	<b>105</b>
<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>107</b>
<b>ANHANG .....</b>	<b>112</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Ausbildungen des PPS-Raums.....	10
Abbildung 2:	Skalenerträge.....	12
Abbildung 3:	PPS-Raum bei unterschiedlichen Skalenertragsannahmen .....	13
Abbildung 4:	Free Disposal Hull Modell .....	15
Abbildung 5:	Effizienzberechnung bei konstanten Skalenerträgen.....	17
Abbildung 6:	Ausprägungen der technischen Effizienz.....	18
Abbildung 7:	PPS-Raum im zweidimensionalen Fall .....	19
Abbildung 8:	Allokative Effizienz .....	21
Abbildung 9:	Begrenzung variabler Skalenerträge.....	36
Abbildung 10:	Additives Modell.....	38
Abbildung 11:	Effizienzberechnung im FDH Modell.....	49
Abbildung 12:	Effizienter Rand beim Vergleich zweier Systeme .....	57
Abbildung 13:	Effizienter Rand beim Assurance Region Modell.....	65
Abbildung 14:	Begrenzung der Multiplier beim Cone-Ratio Modell.....	66
Abbildung 15:	Kreuz-Effizienz Matrix .....	68
Abbildung 16:	Effizienzberechnung beim Super-Effizienz Modell.....	70
Abbildung 17:	Nichtbestimmtheit beim Super-Effizienz Modell.....	72
Abbildung 18:	Windows Analyse.....	74
Abbildung 19:	Effizienzberechnung mit dem Malmquist-Index .....	75
Abbildung 20:	Übersichtsskizze eines Reaktors .....	80
Abbildung 21:	Korrelation der Gesamthöhe zur Anzahl der Ebenen aller Quenchboxen ...	88

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Berechnung Gesamtarbeitszeit.....	83
Tabelle 2:	Kategorische Einteilung der Jahreszeit.....	84
Tabelle 3:	Kategorische Einteilung der Niederlassung.....	84
Tabelle 4:	Kategorische Einteilung der Bodenhersteller.....	85
Tabelle 5:	Berechnung der Absenkhöhe der Auflagerroste.....	86
Tabelle 6:	Anzahl der Verteilerböden .....	87
Tabelle 7:	Gesamthöhe der Quenchboxen.....	88
Tabelle 8:	Berechnung der Absenkhöhe der Quenchboxen.....	89
Tabelle 9:	Anzahl der Temperaturfühler .....	90
Tabelle 10:	Korrelationsmatrix der In- und Outputs .....	91
Tabelle 11:	Datensatz der Analyse.....	92
Tabelle 12:	Ergebnisse des Modells NCN-I-C.....	93
Tabelle 13:	Ergebnisse des Modells NDRS-I .....	95
Tabelle 14:	Projektion des Projektes 4 .....	95
Tabelle 15:	Berechnung Skaleneffizienz .....	96
Tabelle 16:	Ergebnisse des Modells Super-CCR-I.....	97
Tabelle 17:	Ergebnisse des Modells CCR-I / Multiplier-Form.....	98
Tabelle 18:	Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Jahreszeit .....	99
Tabelle 19:	Ergebnisse des Modells CAT-I-C / Jahreszeit .....	100
Tabelle 20:	Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Bodenhersteller .....	101
Tabelle 21:	Ergebnisse des Modells CAT-I-C / Bodenhersteller .....	102
Tabelle 22:	Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Niederlassung.....	102

## **1. Einleitung**

Die Leistungsüberprüfung von unternehmerischen Prozessen ist unerlässlich, um die Effizienz eines Unternehmens zu gewährleisten. Durch die Bewertung der verschiedenen Leistungen ist es möglich, ineffiziente Prozesse zu erkennen und mit der Kenntnis von effizienten Prozessen zu verbessern (Allen 2002, S.32).

Die Analyse der sowohl besten als auch schlechtesten Prozesse trägt dabei nicht nur entscheidend zum Verständnis des Prozesses selbst bei (Thanassoulis 2003, S.1), sie ist auch ein Instrument der Kontrolle über das Unternehmen. Da die Ziele der Leistungsbeurteilung mit den Prioritäten des Unternehmens in Verbindung stehen, kann allein der Versuch, diese Ziele auch zu erreichen, zu einer Verhaltensänderung der Mitarbeiter führen, und damit zu einer nachhaltigen Leistungssteigerung. (Thanassoulis 2003, S.3)

Diese Beurteilung jener wertschöpfenden Tätigkeiten, also die Frage nach ihrem Erfolg oder ihrer Leistungsfähigkeit, ist eine der Kernfragen der ökonomischen Forschung. Diese Erfolgsmessung beschränkt sich dabei nicht auf betriebliche Einheiten, sondern kann ganze Branchen oder sogar Volkswirtschaften umfassen (Dyckhoff & Allen 1999, S.411).

### **1.1. Ziel der Arbeit**

Das Ziel dieser Arbeit ist, einen Überblick über die Methode der Data Envelopment Analyse zur Bestimmung der relativen Effizienz von Vergleichsprozessen zu bieten. Dabei sollen nicht nur die Grundlagen der Effizienzanalyse und die Vorgehensweise einer Bewertung behandelt, sondern auch der praktische Einsatz der Data Envelopment Analyse näher betrachtet werden. Es sollen sowohl die sich bietenden Möglichkeiten unterschiedlich ausgerichteter Analysen, als auch die dabei entstehenden Probleme dargestellt werden. Diese Erkenntnisse sollen dann praxisnah in einem Fallbeispiel angewendet werden.

## 1.2. Aufbau der Arbeit

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Grundlagen der Effizienzmessung behandelt. Ausgehend von einer allgemeinen Definition der Effizienz wird zunächst der theoretische Bezugsrahmen zur Formulierung eines Effizienzmaßes erarbeitet. Danach wird dieses Effizienzmaß im eindimensionalen sowie im mehrdimensionalen Fall näher behandelt und des Weiteren jene Effizienzdefinition erarbeitet, auf welcher diese Arbeit aufbaut. Dabei werden unter anderem auch die verschiedenen Ausprägungen der Effizienz untersucht und deren Verhältnis zueinander erläutert.

Der nächste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Grundmodellen der Data Envelopment Analyse. Ausgehend von dem ursprünglichen Modell werden die grundlegenden Typen dieser Analyse vorgestellt. Danach werden die wichtigsten Erweiterungen dieser Basismodelle behandelt, welche die Berücksichtigung von a priori Wissen des Benutzers erlauben.

Anschließend werden die praktischen Aspekte der Durchführung einer Data Envelopment Analyse untersucht. Hier werden unter anderem die Behandlung der Ursprungsdaten vor einer Analyse, als auch die weiterführende Behandlung bereits errechneter Effizienzwerte betrachtet. So werden auch die Methoden bereitgestellt, welche für die folgende Fallstudie benötigt werden. Abgeschlossen wird der theoretische Teil dieser Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung der Data Envelopment Analyse und ihrer Abgrenzung zu den Verfahren der Multi-Criteria-Decision-Making Methode.

Im darauf folgenden praktischen Teil der Arbeit wird ein Fallbeispiel im Bereich des Anlagenbaues durchgeführt, welches in Zusammenarbeit mit einem deutschen Ingenieurbüro entstand. Das Ziel dieser Fallstudie ist der Vergleich durchgeführter Projekte verschiedener Niederlassungen und die Bereitstellung nützlicher Informationen für das Management der Firma für zukünftige Projekte.

Abgeschlossen wird diese Arbeit mit einem Resümee über das Verfahren der Data Envelopment Analyse und der durchgeführten Fallstudie, sowie der Meinung des Autors über die Entwicklung dieser Methode.

## 2. Grundlagen der Effizienzmessung

### 2.1. Allgemeine Kennzahlen

Allgemein bekannte Kennzahlen für die Beurteilung sind in der entscheidungsorientierten Produktionstheorie von Dyckhoff (Dyckhoff & Spengler 2007, S.40) beispielsweise der Gewinn, die Rentabilität oder der Deckungsbeitrag (Allen 2002, S.31). Diese ökonomischen Kennzahlen werden der Erfolgstheorie zugerechnet und stellen vereinfacht ausgedrückt eine Nutzen-/Schadenbilanz dar (Dyckhoff & Spengler 2007, S.42).

In der eigentlichen Produktionstheorie dagegen wird der reale Aufwand und Ertrag einer wertschöpfenden Tätigkeit untersucht. Dabei wird der Transformationsprozess, also die „Umwandlung“ der Inputs in Outputs, direkt betrachtet (Dyckhoff & Spengler 2007, S.41). Eine Kennzahl dieser mengenmäßigen Erfolgsmessung ist die Faktorproduktivität bzw. Effizienz (Allen 2002, S.32).

Bei einem Prozess, welcher nur einen Input und einen Output hat, ist die Leistungsbeurteilung relativ einfach. Thanassoulis (2003, S.5) spricht in diesem Fall von einem „Performance Indicator“. Dieser Leistungsindikator ist in diesem einfachen eindimensionalen Fall die Gegenüberstellung des Outputs zum verwendeten Input, welcher dann mit dem Leistungsindikator einer anderen Einheit verglichen wird.

Um die Effizienz einer Produktivität angeben zu können, muss sie also mit allen anderen Produktivitäten verglichen werden. Als Ergebnis erhält man ein relatives Effizienzmaß wie in Beziehung (1) dargestellt (Stepan 2005, S.4). Der Vorteil bei der Bildung eines Quotienten aus anderen Quotienten ist das Erreichen eines dimensionslosen Effizienzmaßes, welches nicht von den Einheiten der verschiedenen Inputs oder Outputs abhängt, sofern sie für jede Vergleichseinheit dieselben sind (Cooper, Seiford und Tone 2007, S.24).

$$\text{Relative Effizienz} = \frac{\text{Produktivität der betrachteten Vergleichseinheit}}{\text{Höchste beobachtete Produktivität aller Vergleichseinheiten}} \quad (1)$$

Im Verlauf der Arbeit wird immer, wenn der Effizienzbegriff erwähnt wird, von relativer Effizienz gesprochen. Relativ deshalb, weil die Bewertung aufgrund eines Vergleiches mit anderen beobachteten Vergleichseinheiten erfolgt.

Wenn die zu untersuchenden Einheiten jedoch mehr als nur einen In- oder Output verwenden, fehlt in diesem Fall natürlich die Beschreibung, inwieweit sich die verschiedenen In- und Outputs gegenseitig beeinflussen. Um dieses Problem lösen zu können, müssen andere Modelle zur vergleichenden Leistungsbeurteilung herangezogen werden. Grundsätzlich unterscheidet man hierbei zwischen zwei verschiedenen Herangehensweisen - den parametrischen und den nicht-parametrischen Modellen (Thanassoulis 2003, S.6).

## 2.2. Parametrische Modelle

Bei den parametrischen Modellen kann man grundsätzlich zwischen zwei Modellvarianten unterscheiden. Diese unterscheiden sich dahingehend, ob ineffiziente Prozesse explizit angenommen werden oder nicht (Thanassoulis 2003, S.6).

Formel (2) beschreibt einen Transformationsprozess, bei dem ein einzelner Input mehrere Outputs hervorbringt, indem der Parameter  $\beta$  die zu bestimmende Variable darstellt, welche den formalen Zusammenhang zwischen dem Input und dem Output beschreibt. Der Parameter  $\eta$  ist normalverteilt und beschreibt den zufallsbedingten Fehler bei dieser formalen Beschreibung.

$$x = f(\beta, y_1, y_2, \dots, y_s) + \eta \quad (2)$$

In diesem Fall wurde keine Annahme getroffen, dass ebenfalls ineffiziente Prozesse existieren könnten. Der Parameter  $\beta$  kann über eine einfache Regressionsanalyse abgeschätzt werden. Alle Prozesse, welche einen geringeren geschätzten Output aufweisen, sind demnach ineffizient (Thanassoulis 2003, S.7).

Wenn jedoch auch ineffiziente Prozesse angenommen werden sollen, so muss die vorige Gleichung erweitert werden. Diese Methode nennt man die Stochastic Frontier

Analyse, welche in der Formel (3) dargestellt wird (Thanassoulis 2003, S.7). Eine detailliertere Darstellung bietet die Formel (4) bei der die Cobb-Douglas Funktion zur Abschätzung herangezogen wird (Coelli, Prasada Rao und Battese 1998, S.184f).

$$x = f(\beta, y_1, y_2, \dots, y_s) + v + u \quad (3)$$

$$\ln(y_i) = x_i \cdot \beta + v_i - u_i \quad (4)$$

Der Parameter  $\beta$  beschreibt wiederum den formalen Zusammenhang zwischen In- und Outputs, jedoch wurde der zufällige Fehler  $\eta$ , also der statistische Abstand zwischen den errechneten und den beobachteten Inputwerten, in einen normalverteilten Zufallsfehler  $v$  und einem Term  $u$  aufgespalten. Der Parameter  $u$  spiegelt hier die mögliche Ineffizienz wieder und es gilt:  $u \geq 0$ , d.h. es wird nicht nur vom Durchschnitt der beobachteten Prozesse ausgegangen, sondern es wird auch die statistische Verteilung von  $u$ , welche abgeschätzt werden muss, in Betracht gezogen. Der Parameter  $\beta$  kann wiederum mit der Regressionsanalyse oder unter Verwendung der Maximum Likelihood Methode errechnet werden (Thanassoulis 2003, S.8).

Die Stochastic Frontier Analyse geht damit einen völlig anderen Weg der Effizienzmessung. Während im ersten Fall angenommen wird, dass die Produktionsfunktion einer effizienten Einheit bekannt ist, so wird sie hier über die In- und Outputs der Einheiten abgeschätzt. Die Stochastic Frontier Analyse schätzt dabei den effizienten Rand über eine parametrische Funktion, während die Data Envelopment Analysis (DEA) eine stückweise lineare Technologie verwendet (Coelli et al. 1998, S.183).

Grundsätzlich eignen sich die parametrischen Vorgehensweisen zum besseren Verständnis des zu betrachtenden Prozesses, sind jedoch vor allem im mehrdimensionalen Fall, also unter der Annahme von mehreren Inputs und mehreren Output problematisch (Thanassoulis 2003, S.9).

### 2.3. Nicht-Parametrische Modelle

Zum Unterschied zu den parametrischen Modellen, welche versuchen, einen formalen Zusammenhang zwischen Inputs und Outputs anzugeben, beschreiben nicht-parametrische Modelle den Transformationsprozess aufgrund seiner Input- und Outputquantitäten unter Zuhilfenahme der verwendeten Technik. Es werden damit automatisch auch ineffiziente Produktionen berücksichtigt (Allen 2002, S.33).

Die Hauptmethode der nicht-parametrischen Methoden der Effizienzmessung ist laut Thanassoulis (2003, S.9) die DEA. Bei ihr liegt das Hauptaugenmerk nicht in der Beschreibung eines funktionalen Zusammenhanges, sondern vielmehr in der Beschreibung des möglichen Produktionsraumes (PPS – Production Possibility Set). Dieser wird mithilfe der beobachteten Daten, also der beobachteten In- und Outputs, gebildet. Dieser Produktionsraum umfasst damit sowohl alle realen, beobachteten Kombinationen als auch alle theoretisch möglichen (Dyckhoff & Gilles 2004, S.4). Der Raum ist so konstruiert, dass er die kleinstmögliche Menge darstellt um alle möglichen Kombinationen zu umgeben (Thanassoulis 2003, S.10).

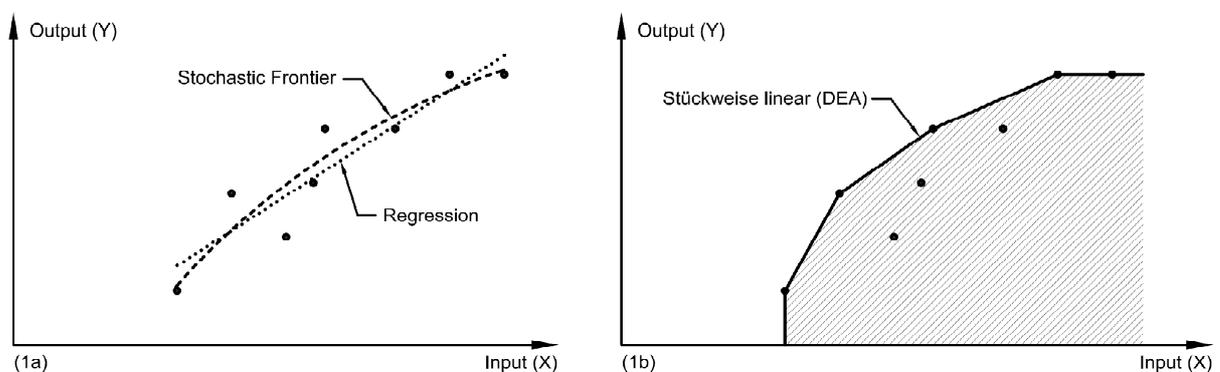


Abbildung 1: Ausbildungen des PPS-Raums

In der Abbildung (1) werden alle drei bisher beschriebenen Verfahren dargestellt. Man sieht, dass sich der PPS-Raum (schraffierte Fläche unterhalb des effizienten Randes in Abbildung 1b) der DEA, stückweise linear aufgrund der realen Transformationen ergibt. Die linearen Segmente sind damit eine Schätzung des nicht bekannten effizienten Randes. Daher ist eine a priori Festlegung der Ausprägung des effizienten Randes (linear, nicht-linear, logarithmisch,...) wie bei den parametrischen Modellen nicht nötig (Thanassoulis 2003, S.12).

Wenn man den PPS-Raum konstruiert hat, geht man wie im Fall der parametrischen Methoden vor. Man misst den Abstand zum effizienten Rand und bestimmt dadurch die Effizienz des betrachteten Prozesses.

## **2.4. Technikeigenschaften**

Wie in der Einleitung angeführt, ist die Faktorproduktivität einer Vergleichseinheit ein sehr einfaches Mittel der Leistungsbeurteilung. Um jedoch tatsächlich eine Aussage über ihre Effizienz machen zu können, müssen die „Transformationsmöglichkeiten“ dieser Einheit bekannt sein (Scheel 2000, S.37). Die Beurteilung hängt also davon ab, ob eine höhere Produktivität erreicht hätte werden können (Dyckhoff & Allen 1999, S.414). Alle möglichen Kombinationen der Input-Output Transformation werden durch die „Technologiemenge“ (Scheel 2000, S.38) beschrieben.

Mit den, durch diese Technologiemenge beschriebenen, technisch möglichen Prozessen werden die realen Prozesse verglichen, um auf ihre Effizienz schließen zu können (Scheel 2000, S.39). Da die genaue reale Technik oft unbekannt ist, müssen realistische Annahmen über die Technikeigenschaften getroffen werden. Die wesentlichen Eigenschaften der Technologiemenge betreffen die Skalenerträge, die Kombinierbarkeit von verschiedenen Vergleichseinheiten und die Verschwendbarkeit von Faktoren (Allen 2002, S.43).

Die sich ergebenden Effizienzmaße sind damit in zweierlei Hinsicht relativ zu sehen - einerseits durch den Vergleich mit anderen Vergleichseinheiten, andererseits durch die Annahmen der Technikeigenschaften aufgrund der unbekannt realen Technik (Dyckhoff & Allen 1999, S.415).

### **2.4.1. Skalenerträge**

Skalenerträge beschreiben die Möglichkeit der Veränderungen der Größe der Produktion (Dyckhoff & Spengler 2007, S.63). In der Betriebswirtschaftslehre spricht man in diesem Fall von „totaler Faktorvariation“. Dabei wird der Inputmix, also alle verwendeten Inputfaktoren, proportional verändert. Ändert sich der Output nicht proportional zur Inputänderung, spricht man von „economies or diseconomies of scale“ (Stepan & Fischer 2001, S.9f). In den Abbildungen (2a) bis (2c) werden die

verschiedenen Skalenertragsannahmen dargestellt. Fall (2a) entspricht einer Technik mit konstanten Skalenerträgen, während die Fälle (2b) bzw. (2c) das Vorhandensein von steigenden bzw. fallenden Skalenerträgen zeigen.

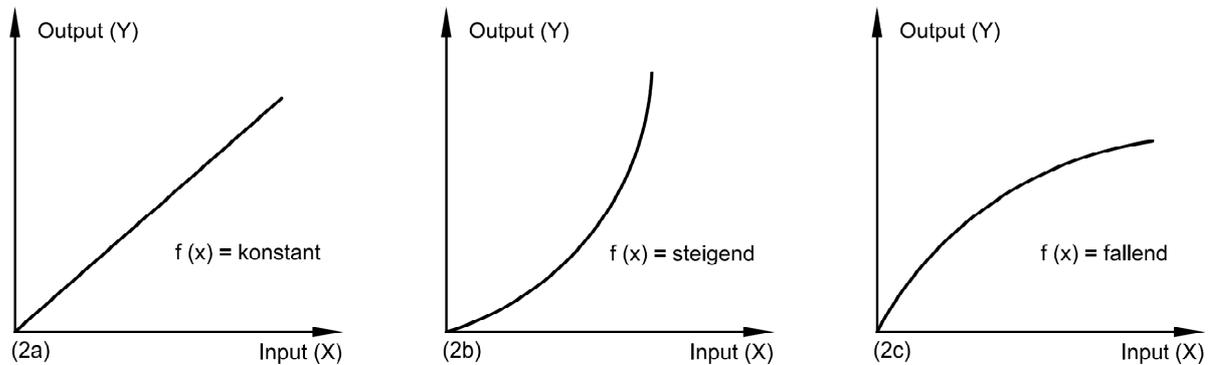


Abbildung 2: Skalenerträge

Für die Verwendung als Technischeigenschaft für die DEA werden in den Abbildungen (3a) bis (3d) noch einmal die verschiedenen Skalenertragseigenschaften bei der Konstruktion des PPS-Raums dargestellt.

Bei der Unterstellung konstanter Skalenerträge wie im Fall (3a) sind nur jene Vergleichseinheiten effizient, welche am äußersten Fahrstrahl durch den Koordinatenursprung liegen. Im Fall (3b) bzw. (3c) geht man von „nichtzunehmenden Skalenerträgen“ (NZSE) bzw. „nichtabnehmenden Skalenerträgen“ (NASE) (Scheel 2000, S.41) aus. Es werden also nur abnehmende bzw. nur zunehmende Skalenerträge erlaubt. Können die Skalenertragsannahmen wie in Abbildung (3b) und (3c) nicht angenommen werden, so spricht man von „variablen Skalenerträgen“ (VSE) (Allen 2002, S.44), dargestellt im Fall (3d).

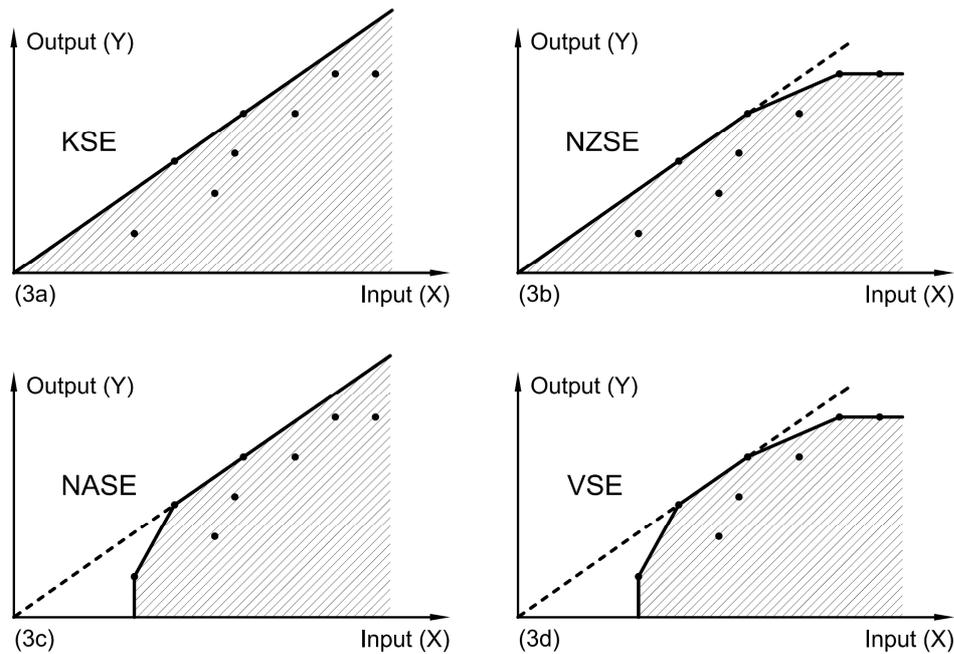


Abbildung 3: PPS-Raum bei unterschiedlichen Skalenertragsannahmen

Welche Skalenertragsannahme getroffen werden sollte, ist in der Praxis oft sehr schwer zu entscheiden. Durch eine Ausweitung des Produktionsprozesses können sich zum Beispiel sowohl Synergieeffekte also auch steigende administrative Tätigkeiten ergeben. Die Unterstellung konstanter Skalenerträge ist dabei die restriktivste Strukturannahme, die Annahme variabler Skalenerträge die schwächste (Scheel 2000, S.43).

Die Analyse der Skalenerträge bietet weitere Hinweise zur Bestimmung der optimalen Betriebsgröße einer Vergleichseinheit. Befindet sich eine Vergleichseinheit im Bereich der abnehmenden Skalenerträge, so würde eine Verringerung des Outputniveaus zu einer überproportionalen Inputreduktion führen. Im Bereich der zunehmenden Skalenerträge wäre hingegen bei Inputerhöhung mit einer überproportionalen Steigerung des Outputniveaus zu rechnen. Befindet sich eine DMU im Bereich der konstanten Skalenerträge, so hat sie eine optimale Betriebsgröße (Scheel 2000, S.44).

## 2.4.2. Verschwendbarkeit von In- und Outputs

Bei der Herstellung einer konstanten Menge an Output, jedoch mit mehr Input als notwendig, spricht man von „Verschwendbarkeit des Inputs“. Analog dazu definiert

sich die „Verschwendbarkeit des Outputs“ durch die Herstellung von weniger Output unter Verwendung des gleichen Inputniveaus (Allen 2002, S.44).

Die Annahme der Verschwendbarkeit kann sowohl in der Abbildung (1b) als auch (3b, 3c, 3d) durch die waagrechte und senkrechte Begrenzung des PPS-Raums gesehen werden.

### **2.4.3. Kombinierbarkeit**

Bei der Kombinierbarkeit wird davon ausgegangen, dass durch die Kombination von zwei oder mehreren realen Vergleichseinheiten eine fiktive Vergleichseinheit erstellt werden kann, welche ebenso wie die realen Einheiten technisch realisierbar ist. Man unterscheidet hierbei zwischen additiven, linearen oder konvexen Kombinationen. Von einer additiven Kombinierbarkeit spricht man, wenn die Summen und deren Vielfachen sowohl der Inputs als auch der Outputs wiederum eine technisch mögliche, fiktive DMU ergeben. Kombiniert man dieses Konzept mit konstanten Skalenerträgen, so spricht man von linearer Kombinierbarkeit. Bei der konvexen Kombination können sogar solche realisiert werden, welche sich aus Anteilen mehrerer realer Prozessen zusammensetzen (Allen 2002, S.44).

In der DEA geht man von einer konvexen Technologiemenge aus. Betrachtet man in Abbildung (1b) den stückweise linearen Rand des PPS-Raums, so ist ein Prozess, welcher auf einer dieser Verbindungen der realen Vergleichseinheiten liegt, technisch möglich.

Die konvexe Kombinierbarkeit ist jedoch eine sehr optimistische Annahme. In der Praxis ist es nicht immer möglich, Konvexität tatsächlich vorauszusetzen. Oft ist eine Zusammensetzung von verschiedenen Produkten nicht herzustellen. In einem solchen Fall geht man von einer nichtkonvexen Technologie aus, welche als „Free Disposal Hull“ bezeichnet wird. Bei diesem Ansatz wird nur von freier Verschwendbarkeit ausgegangen (Scheel 2000, S.47f).

Der PPS-Raum dieses Ansatzes ist in Abbildung (4) dargestellt.

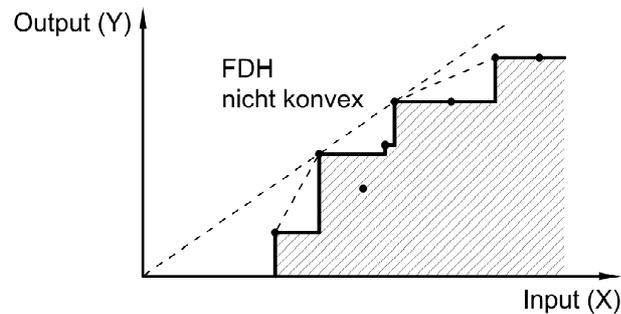


Abbildung 4: Free Disposal Hull Modell

## 2.5. Das Effizienzmaß

Mithilfe der Konstruktion des PPS-Raums ist es möglich, durch die Messung des Abstandes auf den effizienten Rand ein richtiges „Effizienzmaß“ zu definieren, welches nicht nur angibt, ob eine DMU effizient ist oder nicht, sondern auch den Grad ihrer Ineffizienz beschreibt. Der Punkt am effizienten Rand, zu dem der Abstand der betrachteten Einheit gemessen wird, ist ihr „Referenzpunkt“ oder auch „Target“. Dieser Punkt kann entweder eine reale oder auch eine fiktive, also nur rein technisch mögliche Vergleichseinheit darstellen (Allen 2002, S.50).

Grundsätzlich wird dabei zwischen einem äquiproportionalen und einem additiven Effizienzmaß unterschieden. Während das erstere Maß prozentuell angegeben wird, gibt das additive Maß einen absoluten Wert des Verbesserungspotenzials an (Allen 2002, S.51). Eine weitere Unterscheidung ist die Orientierung, also die Richtung, in die gemessen wird. Hier unterscheidet man zwischen unorientierten bzw. input- oder outputorientierten Effizienzmaßen (Allen 2002, S.51).

Im Folgenden werden verschiedene Effizienzmaße behandelt. Generell wird von „Technischer Effizienz“ gesprochen, um klarzustellen, dass der Begriff keinerlei Aussagen über die relativen Preise oder Werte widerspiegelt (Thanassoulis 2003, S.26). Liegt ein Prozess auf dem effizienten Rand, so bedeutet das nur, dass er technisch effizient ist. Ob dieser Prozess auch wirtschaftlich effizient ist, kann damit jedoch nicht beantwortet werden. Durch die Berücksichtigung von Input-Preisen ist es aber möglich, den Prozess auch hinsichtlich der Kosteneffizienz zu beurteilen. Thanassoulis (2003, S.27) bezeichnet diese Form als „Allokative - oder Preis-Effizienz“.

Bei einem radialen Modell kommt ein orientiertes äquiproportionales Effizienzmaß zum Einsatz. Es gibt die proportionale Reduktion des gesamten Inputniveaus an (Stepan 2005, S.8). Es werden daher, je nach Orientierung, alle verwendeten Inputs bzw. Outputs gleichermaßen reduziert bzw. erhöht. Durch Beibehaltung der Verhältnisse zwischen den In- oder Outputs ergibt sich eine „Unabhängigkeit der Einheiten“ der Faktoren (Coelli et al. 1998, S.139). Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass nach einer proportionalen Verbesserung noch weitere Verbesserungspotentiale einzelner In- oder Outputs bestehen (Dyckhoff & Allen 1999, S.418). Daher wird die Technische Effizienz unterschieden in „reine technische Effizienz“ und „Mix-Effizienz“. Die reine technische Effizienz beschreibt dabei die proportionalen Verbesserungspotentiale, während die Mix-Effizienz eine Änderung des Input- bzw. Outputmixes vorschlägt (Cooper et al. 2007, S.11).

Nachdem die reine technische Effizienz variable Skalenerträge unterstellt, beinhaltet sie auch jene Verbesserungspotentiale, welche durch Skalenertragseigenschaften entstehen. Man unterscheidet daher neben der rein technischen Effizienz die „globale technische Effizienz“, welche konstante Skalenerträge annimmt, sowie die reine „Skaleneffizienz“ (Cooper et al. 2007, S.152).

In folgendem Kapitel werden die verschiedenen Ausprägungen anhand eines orientierten äquiproportionalen, radialen Effizienzmaß erläutert. Das unorientierte additive Effizienzmaß und die damit zusammenhängende Mix-Effizienz werden später im Rahmen der additiven Modelle näher betrachtet.

### **2.5.1. Effizienzmaße im eindimensionalen Fall**

Zur Herleitung der Effizienzberechnung wird von einem einfachen Single-Input / Single-Output Fall ausgegangen, wie er schon in den vorigen Abbildungen dargestellt wurde. Gemäß der Definition der relativen Effizienz in Formel (1) kann die Effizienz auch graphisch bestimmt werden. Dabei werden zunächst konstante Skalenerträge unterstellt, der effiziente Rand ist damit ein Fahrstrahl durch den Mittelpunkt.

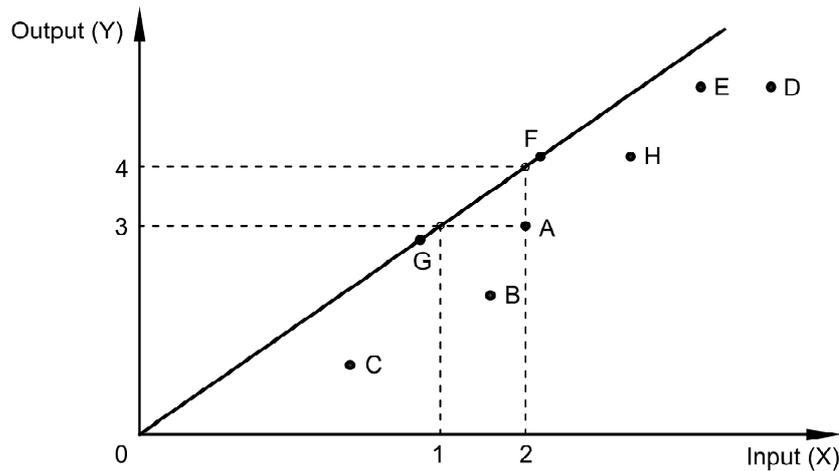


Abbildung 5: Effizienzberechnung bei konstanten Skalenerträgen

In Abbildung (5) liegt die Vergleichseinheit A nicht am effizienten Rand und ist somit ineffizient. Um sie auf den effizienten Rand zu verschieben, ist es einerseits möglich, ihren Input bei gleichbleibendem Output zu reduzieren oder andererseits ihren Output bei gleichbleibendem Input zu erhöhen.

Abhängig von der Kontrolle der Faktoren durch die Vergleichseinheit, also die Interpretation der Ineffizienz, spricht man von „Input-Orientierung“ oder „Output-Orientierung“ (Thanassoulis 2003, S.22).

Die graphische Interpretation ist in den Formeln (5) und (6) gegeben:

$$\text{Relative inputorientierte Effizienz} = \frac{01}{02} \quad (5)$$

$$\text{Relative outputorientierte Effizienz} = \frac{03}{04} \quad (6)$$

Im Fall von konstanten Skalenerträgen entspricht der Effizienzwert des inputorientierten Modells jenen des outputorientierten Modells. Bei variabler Skalenertragsannahme sind die Effizienzwerte verschieden (Coelli et al. 1998, S.137).

Wenn variable Skalenerträge unterstellt werden, so ergibt sich ein Technologieraum wie in Abbildung (6). Vergleichseinheit C liegt somit am effizienten Rand und wird zu

100% als vollkommen rein technisch effizient eingestuft. Jedoch hat sie eine Skaleneffizienz unter 100%.

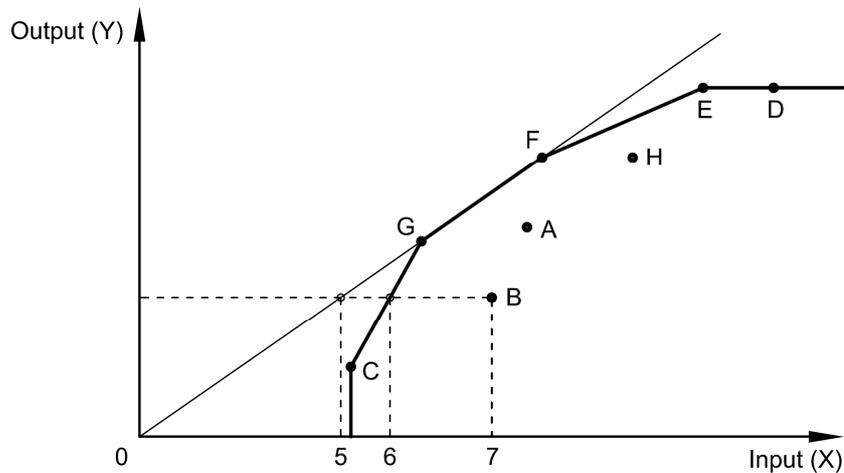


Abbildung 6: Ausprägungen der technischen Effizienz

Die inputorientierte globale technische Effizienz des Prozesses B ergibt sich aus der Beziehung (7), die reine Technische aus der Beziehung (8). Die Skaleneffizienz definiert sich durch die Beziehung (9) (Cooper et al. 2007, S.152):

$$\text{Globale technische Effizienz} = \frac{\overline{05}}{\overline{07}} \quad (7)$$

$$\text{Reine technische Effizienz} = \frac{\overline{06}}{\overline{07}} \quad (8)$$

$$\text{Skaleneffizienz (SE)} = \frac{\text{globale technische Effizienz}}{\text{reine technische Effizienz}} = \frac{\overline{05}}{\overline{07}} \times \frac{\overline{07}}{\overline{06}} = \frac{\overline{05}}{\overline{06}} \quad (9)$$

Im Fall von einem Output und zwei Inputs ist die Berechnung ebenfalls graphisch darstellbar. Dabei wird der Output durch die Voraussetzung von konstanten Skalenerträgen auf 1 normiert (Cooper et al. 2007, S.6). Der dadurch entstehende Produktionsraum wird in Abbildung (7) dargestellt.



Die Grundlage des Effizienzbegriffes formulierte Pareto, indem er einen Zustand als optimal definierte, in dem es nicht möglich war, ein Individuum besser zu stellen, ohne ein anderes damit schlechter zu stellen. Diese Definition wurde von Koopman auf eine Input-Output Transformation angewendet (Scheel 2000, S.62). Er erachtete eine Transformation als effizient, in der es nicht möglich war einen Output zu erhöhen, ohne sich in einen anderen zu verschlechtern. Farrell erweiterte den Effizienzbegriff von Pareto und Koopman, indem er ihn auch auf Inputs anwendete. Die wichtigste Weiterentwicklung von Farrell war jedoch, dass er die Leistungsfähigkeit einer Vergleichseinheit relativ zu jener aller anderen Prozesse berechnete (Cooper et al. 2004, S.5f). Bis dato gingen die Effizienzmaße nämlich von einer bekannten Produktionsfunktion aus. Da diese in der Praxis jedoch selten bekannt ist, schlug Farrell vor, sie über die Daten selbst, entweder durch eine stückweise lineare Technologie (DEA), oder über eine parametrische Funktion (Stochastic Frontier Analyse) abzuschätzen (Coelli et al. 1998, S.184). Charnes, Cooper und Rhodes entwickelten den ersten Ansatz aufbauend auf Farrells Arbeiten zur „Data Envelopment Analysis“, und erweiterten ihrerseits die Effizienzdefinition zur „Extended Pareto-Koopmans Definition“ (Cooper et al. 2004, S.4).

*„Full (100%) efficiency is attained by any DMU if and only if none of its inputs or outputs can be improved without worsening some of its other inputs or outputs.“ (Cooper 2001, S.183)*

Sind die Inputpreise bekannt, kann auch die Preiseffizienz betrachtet werden, indem man die Kostengerade  $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = k_1$  in Abbildung (8) einzeichnet. Die Kosten  $k_1$  können auf  $k_0$  reduziert werden, bis die Kostengerade tangential an dem PPS-Raum liegt und kann dann beschrieben werden mit  $c_1 \cdot x_1^* + c_2 \cdot x_2^* = k_0$  (Cooper et al. 2007, S.259). Da die Gerade tangential an C liegt, hat diese Vergleichseinheit jene Kombination der Inputfaktoren, welche einen Output (normiert auf 1) zu den geringsten Kosten produzieren kann (Thanassoulis 2003, S.27).

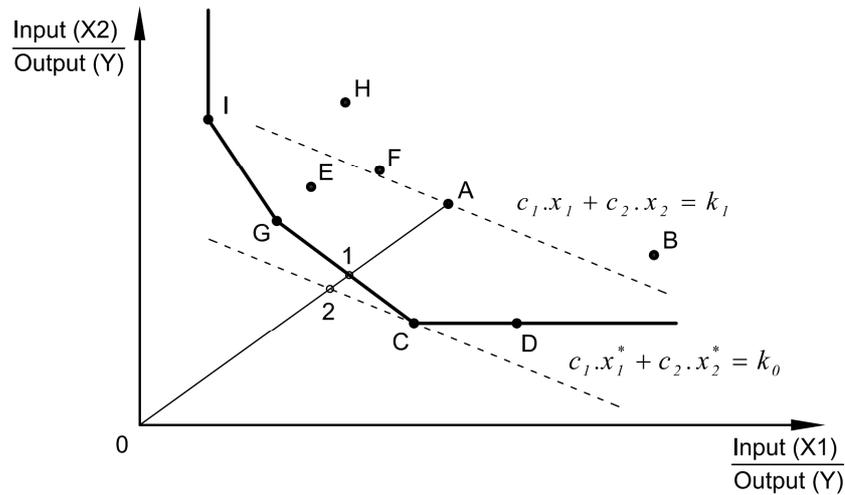


Abbildung 8: Allokative Effizienz

Für Vergleichseinheit A in Abbildung (8) ergeben sich damit folgende Beziehungen (Thanassoulis 2003, S.27f):

$$\text{Globale technische Effizienz} = \frac{\overline{01}}{0A} \tag{11}$$

$$\text{Allokative/Preis Effizienz} = \frac{\overline{02}}{01} \tag{12}$$

$$\text{Overall/Cost Effizienz} = \frac{\overline{02}}{0A} = \text{Globale Techn. Eff.} \times \text{Allokative Eff.} \tag{13}$$

Die Allokative- oder Preis Effizienz gibt damit den Zusammenhang der minimalen Kosten zu den Kosten bei technischer Effizienz an. Wird weiters Beziehung (9) in Beziehung (13) eingesetzt, ergibt sich folgenden Zusammenhang (Cooper et al. 2007, S.259):

$$\text{Kosten Effizienz} = \text{Reine Techn. Effizienz} \times \text{Skaleneffizienz} \times \text{Preis Effizienz} \tag{14}$$

### 2.5.2. Effizienzmaß im mehrdimensionalen Fall

Wie schon eingangs erwähnt, ist der übliche Weg einer Leistungsmessung die Gegenüberstellung des Outputs zum verwendeten Input. Dieser Quotient aus Output zu Input ergibt eine sogenannte „partielle Produktivität“ (Cooper et al. 2007, S.1). Partiiell deshalb, da in der Praxis fast immer mehrere Inputs und Outputs verwendet werden. Um zu einem totalen Produktivitätsfaktor zu kommen, müssen alle verwendeten In- und Outputs berücksichtigt werden (Cooper et al. 2007, S.1). Es

wäre natürlich möglich, eine Vielzahl an einzelnen einfachen Kennzahlen zu erstellen und diese dann zu vergleichen. Jedoch mit steigender Anzahl der In- und Outputs würde die Analyse zunehmend komplizierter werden und es wäre vor allem schwierig, eine „Gesamtperformance“ herauszulesen (Scheel 2000, S.60).

Um eine Gesamtkennzahl zu erreichen, können die Summen der In- und Outputs herangezogen werden. Dies würde jedoch zu dem Problem führen, dass die verschiedenen Faktoren auf verschiedenen Maßeinheiten basieren und daher eigentlich nicht vergleichbar sind. Um sie vergleichbar zu machen, muss man jeden einzelnen Input und Output bewerten. Dies kann am leichtesten mit der Angabe von Preisen geschehen. Sind jedoch keine oder nur vereinzelt Preise vorhanden bzw. zwar Preise vorhanden, diese jedoch Verzerrungen unterliegen (bei Vergleich eines Monopol- mit einem Wettbewerbsmarkt), so müssen die In- und Outputs a priori nach eigenem Ermessen gewichtet werden (Allen 2002, S.56).

Eine dadurch erreichte Gesamt-Performance einer Einheit ist in Beziehung (15) und für die spätere Verwendung genauer in Beziehung (16) dargestellt.

$$\text{Gesamt - Produktivität} = \frac{\text{Summe der gewichteten Outputs}}{\text{Summe der gewichteten Inputs}} \quad (15)$$

$$\text{Produktivität für Vergleichseinheit } \rho = \frac{Y^\rho}{X^\rho} = \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho} \quad (16)$$

mit der Anzahl der Vergleichseinheiten ( $\rho = 1, \dots, \pi$ )

$u_j$  .....Gewichtung für Output  $y_j$       $j = 1, \dots, m$

$v_i$  .....Gewichtung für Input  $x_i$       $i = 1, \dots, n$

$y_j^\rho$  .....Output ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) für Vergleichseinheiten ( $\rho = 1, \dots, \pi$ )

$x_i^\rho$  .....Input ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) für Vergleichseinheiten ( $\rho = 1, \dots, \pi$ )

Werden diese Gewichtungen nach eigenem Ermessen vergeben, ist es natürlich schwer zu sagen, welchen Einfluss die subjektive Gewichtung auf das Ergebnis hat (Cooper et al. 2007, S.12). Daher ist es ein verständliches Ziel, ein Effizienzmaß zu verwenden, welches ohne ein gegebenes Preissystem und ohne das Problem der subjektiven Gewichtung der einzelnen Faktoren auskommt (Scheel 2000, S.61).

### **3. Data Envelopment Analysis (DEA) - Grundmodelle**

Charnes, Cooper und Rhodes entwickelten 1978 mit der „Data Envelopment Analysis“ (DEA) eine Methode, welche ein relatives Effizienzmaß im multiplen Input- und Outputfall bot, auch CCR-Effizienzmaß genannt, welches ohne a priori Gewichtungen der Faktoren auskam (Banker, Charnes und Cooper 1984, S.1078). Dieses, auf Farrells frühere Arbeiten aufbauende Modell, wurde zur Evaluierung von Bildungsprogrammen für sozial benachteiligte Studenten entwickelt (Cooper et al. 2004, S.4).

Charnes, Cooper und Rhodes haben in diesem Zusammenhang den Begriff „Decision Making Unit“ (DMU) definiert (Cooper et al. 2004, S.8). Der Begriff „Decision Making“ soll nahelegen, dass dieser Prozess die Kontrolle über die Transformation von Inputs zu Outputs hat (Thanassoulis 2003, S.21). Diese können sowohl einfache Prozesse, als auch Firmen oder Regierungen sein (Cooper et al. 2004, S.8). Die Hauptnutzung dieser Methode war jedoch zur Evaluierung von „Non-Profit“ Organisationen wie Schulen oder Krankenhäuser gedacht (Banker et al. 1984, S.1079).

#### **3.1. Das CCR-Modell**

##### **3.1.1. Inputorientierung**

Ausgehend vom oben erklärten Effizienzbegriff der erweiterten Pareto-Koopman Effizienz, wird eine Situation als optimal betrachtet, wenn sich ein Prozess weder bei den verwendeten Inputs noch Outputs verbessern könnte, ohne sich bei einem anderen Input oder Output zu verschlechtern (Scheel 2000, S62f). Eine DMU wäre also erst effizient, wenn es keine andere DMU gibt, welche mit derselben Gewichtung, jedoch mit einer unterschiedlichen Zusammensetzung der In- und Outputs besser wäre, als die betrachtete DMU. Wiederholt man diesen Vorgang mit jeder DMU, so würde selbstverständlich jede DMU eine eigene Gewichtung bekommen, die verglichen zu den anderen DMU das bestmögliche Ergebnis für diese liefern würde.

Es werden also jene Gewichtungen der Inputs und Outputs für DMU ( $\rho=0$ ) gewählt, welche die Produktivität  $Y^0/X^0$  so hoch wie möglich halten. Mit diesen für die DMU ( $\rho=0$ ) optimalen Gewichtungen werden die Produktivitäten aller anderen DMU ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) berechnet und mit jener der DMU ( $\rho=0$ ) verglichen (Stepan 2005, S.11).

Ausgehend von der Definition der relativen Effizienz in Beziehung (1) ergibt sich dadurch die Effizienz in Beziehung (17):

$$\left( \max_{u,v} \frac{Y^0}{X^0} = \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0} \right) / \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0} \quad \text{mit} \quad \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho} = \max \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho} \mid \rho = 1, \dots, \pi \right\} \quad (17)$$

Dadurch, dass die Gewichtungen  $u_j, v_i$  keine negativen Werte annehmen dürfen und die betrachtete DMU ebenfalls in der Menge ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) enthalten ist, ergibt sich eine untere Grenze von größer 0 und eine obere Grenze von 1 für das relative Effizienzmaß (Cooper & Tone 1997, S.73f). Es ergeben sich somit  $\pi$  Optimierungsaufgaben der folgenden Form (Allen 2002, S.64):

CCR / Fraktionelles Programm:

$$\max_{u,v} \frac{Y^0}{X^0} = \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0} = \Theta^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\frac{Y^\rho}{X^\rho} = \frac{\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho}{\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho} \leq 1 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \quad (18)$$

Erreicht der Zielwert  $\Theta^0$  der betrachteten DMU ( $\rho=0$ ) den Wert 1, so kann keine andere DMU ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) mit den, für die DMU ( $\rho=0$ ) optimalen Gewichtungen eine höhere Produktivität erreichen. Ist hingegen  $\Theta^0 < 1$ , so ist dieser Wert ein Maß der Ineffizienz der betrachteten DMU (Allen 2002, S.65).

Bei diesem Quotientenprogramm (18), auch „Fraktionelles Programm“ (Cooper et al. 2007, S.24) genannt, gibt es unendlich viele Lösungen, da auch die Vielfachen einer optimalen Lösung wiederum optimal sind (Cooper et al. 2004, S.9). Um dieses Programm eindeutig lösen zu können, wird es durch Normierung des Nenners, also des Inputs, in ein gleichwertiges „Lineares Programm“ transformiert (Allen 2002, S.65). Diese Umwandlung wird auch „Charnes-Cooper Transformation“ genannt (Cooper et al. 2004, S.9). Es ergeben sich damit folgende Optimierungsaufgaben:

#### CCR-I / Multiplier-Form:

$$\begin{aligned} \max_{u,v} Y^0 &= \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 = \Theta^0 && \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ X^0 &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 = 1 && \text{und} \\ Y^\rho - X^\rho &= \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho \leq 0 && \text{mit den Nebenbedingungen } \begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \end{aligned} \quad (19)$$

$\Theta^0$  gibt den optimalen Zielwert des Linearen Programms an und entspricht demselben Zielwert wie beim Fraktionellen Programm. Die zugehörigen optimalen Gewichtungen werden mit  $u_j^*$  und  $v_i^*$  bezeichnet (Cooper et al. 2007, S.24).

Die betrachtete DMU wird als effizient bezeichnet, wenn

- 1.) Der Zielwert  $\Theta^0 = 1$  beträgt
- 2.) Alle optimalen Gewichtungen  $u_j^*, v_i^* \geq 0$  sind.

Ist eine dieser zwei Voraussetzungen nicht gegeben, so ist die betrachtete DMU CCR-ineffizient (Cooper et al. 2007, S.24).

Errechnet sich für eine DMU nun ein Zielwert von  $\Theta^0 < 1$  so wird sie als ineffizient betrachtet. Mit den zugehörigen optimalen Gewichtungen dieser DMU  $u^*, v^*$  kann durch Einsetzen in die Gleichungen (19) ein „Reference Set“ bestimmt werden, da die Gleichung  $\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho = \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho$  mit  $(\rho = 1, \dots, \pi)$  für mindestens eine der DMU's erfüllt sein muss. Jene DMU, welche als Referenz dient, liegt an der effizienten Grenze (Cooper et al. 2007, S.25).

Ist eine der Gewichtungen gleich 0, so ist die betrachtete DMU selbst bei einem Effizienzwert von  $\Theta^0 = 1$  als ineffizient einzustufen. Es handelt sich dabei um einen Überschuss an Input, gemessen an einer anderen effizienten DMU. Diese sogenannten „Slacks“ sind jedoch bei der Berechnung nach (19) nur schwer zu erkennen. Erst mit der Formulierung des dualen linearen Programms zu (19) können diese genau berechnet werden (Cooper et al. 2007, S.29).

Dieses Maximierungsproblem kann mithilfe des Dualitätssatzes der linearen Programmierung in ein Minimierungsproblem umformuliert werden. Eine einfache Anwendung ist hier gegeben (Möller 2008, S.3).

Primales Problem:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \pi = p^t \cdot x \\ \text{mit} \quad & A \cdot x \leq r \quad \text{und} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x_i} \quad & \pi = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ \text{mit} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 42 \end{pmatrix} \\ \text{mit} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Duales Problem:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & \bar{\pi} = r^t \cdot y \\ \text{mit} \quad & A' \cdot y \geq p \quad \text{und} \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{y_i} \quad & \bar{\pi} = 12 \cdot y_1 + 42 \cdot y_2 \\ \text{mit} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{mit} \quad & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Nach dem Dualitätstheorem gilt, dass wenn die Beziehung (20) eine optimale Lösung besitzt, auch Beziehung (21) eine optimale Lösung hat und beide denselben Zielwert annehmen (Gass & Harris 2001, S.218).

Das duale Minimierungsproblem zu dem primalen Maximierungsproblem in (19) hat dann folgende Form (Allen 2002, S.65):

CCR-I / Envelopment-Form:

$$\begin{aligned}
 \min_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq \Theta^0 \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

Das Maximierungsproblem wird durch die Berechnung der optimalen Gewichtungen für jede DMU auch „Multiplier-Form“ genannt. Das zugehörige Minimierungsproblem wird als „Envelopment-Form“ bezeichnet (Cook & Seiford 2009, S.2). Seine Variablen sind einerseits die Zielfunktion  $\Theta^0$ , andererseits die Dualgewichte  $\lambda^{\rho}$  (Allen 2002, S.66ff). Der Zielfunktionswert beschreibt die relative Inputeffizienz bei gleichbleibendem Outputniveau und damit den radialen Abstand zum effizienten Rand des Produktionsraumes, während die Dualgewichte über den damit ermittelten Punkt am effizienten Rand Auskunft geben, also mit welchen effizienten DMU's die Betrachtete verglichen wird (Stepan 2005, S.13).

Ist die betrachtete DMU ineffizient und besitzt einen Zielfunktionswert  $\Theta < 1$ , z.B. 0,8 bedeutet das, dass sie nur 80% des genutzten Inputs verwenden darf, um auf den effizienten Rand zu kommen. Da es sich um ein radiales Effizienzmaß handelt, muss also der Inputmix um  $(1-\Theta)$  proportional verringert werden. Die Inputfaktoren der virtuellen Vergleichseinheit am effizienten Rand können auch über die Dualgewichte berechnet werden (Stepan 2005, S.15).

Wie schon zuvor erwähnt, ist es möglich, dass eine DMU zwar als effizient eingestuft wird, jedoch nicht den Effizienzkriterien von Pareto und Koopmann entspricht. Mit anderen Worten: Es sind Slacks vorhanden. Diese DMU's werden auch schwach effizient oder „Farrell-effizient“ genannt (Allen 2002, S.68). Diese Bezeichnung rührt daher, dass Farrell die Beziehungen in (22) zur Effizienzberechnung heranzog (Cooper et al. 2004, S.10). Ein Beispiel für diesen Fall wäre die DMU D in Abbildung (7).

Die vorige Effizienzdefinition wird damit erweitert und eine DMU gilt erst dann als CCR-Effizient, wenn gilt (Cooper et al. 2004, S.11):

- 1.) Der Zielwert  $\Theta^0 = 1$  beträgt
- 2.) Alle Slacks  $s_i^-, s_j^+ = 0$  sind

Diese Definition der CCR-Effizienz ist gleichzusetzen mit der schon angeführten, aufgrund des „Strong Theorem of Complementary“ (Cooper et al. 2007, S.450), welches die primalen und dualen Variablen verbindet. Sind  $u_j^*, v_i^*, \lambda^*, s_i^-, s_j^+$  die optimalen Lösungen des primalen und dualen Linearen Programms, so gelten die Beziehungen  $u_j^* \cdot s_j^+ = 0$  und  $v_i^* \cdot s_i^- = 0$ . Dieses Theorem besagt damit, dass wenn eine Variable den Wert Null annimmt, die zugehörige Variable positiv ist. Sind keine Slacks vorhanden, so müssen die optimalen Gewichtungen positiv sein (Cooper et al. 2007, S.46).

Eine DMU würde also erst dann als effizient eingestuft werden, wenn nach Beziehung (22) die Gleichungen  $\Theta^0 \cdot x_i^0 - \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} = 0$  und  $\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - y_j^0 = 0$  erfüllt sind und damit alle Slackvariablen den Wert 0 haben (Coelli et al. 1998, S.142). Die erweiterte Envelopment-Form aus (22) wäre demnach:

#### CCR-I / Envelopment-Form mit Slacks:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \Theta, s_i^-, s_j^+} \quad & \Theta^0 && \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ & \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0 && \text{und} \\ & \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 && \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Bei der Berechnung nach (23) ist es jedoch möglich, dass nicht alle Slacks identifiziert werden. Dies kann passieren, wenn mehrere optimale Dualgewichte für eine DMU vorhanden sind (Coelli et al. 1998, S.142). Um dieses Problem zu umgehen, wird die Berechnung in zwei Phasen ausgeführt. In Phase 1 wird die Beziehung (22) gelöst, um einen optimalen Zielwert  $\Theta^0$  zu berechnen. Dieser wird in

Phase 2 übernommen, in der die Summen der In- und Outputslacks maximiert werden (Cooper et al. 2007, S.44f).

### CCR-I / Envelopment-Form / 2-Phasen Modell:

#### Phase 1:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq \Theta^0 \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

#### Phase 2: $\Theta^0 = \Theta^*$

$$\begin{aligned} \max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^* \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Um den Rechenaufwand des zweiphasigen Modells zu minimieren, besteht die Möglichkeit, dieses durch die Einführung einer weiteren Variablen  $\varepsilon$  wieder zu minimieren, dargestellt in Beziehung (26). Die Variable  $\varepsilon$  wird dabei als ein „Nicht-Archimedisches Element“ definiert, welches kleiner als jede reale positive Zahl ist (Cooper et al. 2004, S.11).

### CCR-I / Envelopment-Form / Minimiert:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \Theta, s_i^-, s_j^+} \Theta^0 - \varepsilon \cdot \left( \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \right) & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Die Beziehung in (26) ist äquivalent zu dem zweiphasigen Modell in (24) und (25) (Cooper et al. 2004, S.11). Bei dieser Schreibweise müsste jedoch aufgrund des Dualitätstheorems zwecks Vollständigkeit in der Multiplier-Form ebenfalls die Variable  $\varepsilon$  integriert werden (Cooper & Tone 1997, S.77). In der Literatur wird die übersichtliche minimierte Darstellung gerne verwendet. Es wird jedoch immer auf das zweistufige Verfahren verwiesen, da bei der Berechnung nach (26) nur eine partielle Unabhängigkeit von den Einheiten durch die Integrierung der Slacks gegeben ist (Banker, Cooper, Seiford, Thrall und Zhu 2004, S.347).

### 3.1.2. Outputorientierung

Während das inputorientierte Modell versucht, bei gleichbleibendem Outputniveau die Inputs zu senken, um Effizienz zu erreichen, versucht das outputorientierte Modell bei gleichbleibendem Inputniveau, den Output zu maximieren (Cooper et al. 2007, S.58).

Es wird dabei bei der Transformation des Quotientenprogramms in ein lineares Programm nicht der Input, sondern der Output normiert (Allen 2002, S.70). Die Ableitung der Berechnung erfolgt jedoch analog zum inputorientierten Modell.

#### CCR-O / Multiplier-Form:

$$\min_{u,v} \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 = \Theta^0$$

so dass für alle DMU's ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) gilt:

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 = 1$$

und

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho \leq 0$$

mit den Nebenbedingungen 
$$\begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \quad (27)$$

CCR-O / Envelopment-Form / 2-Phasen Modell:Phase 1:

$$\begin{aligned}
 \max_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq x_i^0 & \quad \text{und} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq \Theta^0 \cdot y_j^0 & \quad \text{mit den Nebenbedingungen } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

Phase 2:  $\Theta^0 = \Theta^*$ 

$$\begin{aligned}
 \max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 & \quad \text{und} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = \Theta^* \cdot y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (29)
 \end{aligned}$$

Alternativ können auch hier die Beziehungen (28) und (29) wie beim inputorientierten CCR-Modell zusammengefasst werden (Cooper et al. 2004, S.14).

Beim outputorientierten Modell gibt der Zielwert an, um wie viel der Output bei gleichem Inputniveau proportional erhöht werden sollte. Für eine effiziente DMU nimmt die Zielfunktion den Wert 1 an. Je höher der Zielfunktionswert ist, desto ineffizienter ist die DMU. Der Wert von  $\Theta^*$  gibt den effizienten Target des Outputniveaus an, ( $\Theta^* = 1$ ) damit die proportionale Erhöhung des Outputmixes (Allen 2002, S.70).

Die Ergebnisse bzw. die Variablen des outputorientierten CCR-Modells können jedoch auch direkt aus dem inputorientierten CCR-Modell abgeleitet werden (Cooper et al. 2007, S.58f):

$$\Theta^* = \frac{u_{Input}^*}{u_{Output}^*} = \frac{v_{Input}^*}{v_{Output}^*} = \frac{s_{Input}^{-*}}{s_{Output}^{-*}} = \frac{s_{Input}^{+*}}{s_{Output}^{+*}} = \frac{\lambda_{Input}}{\lambda_{Output}} \quad \text{und} \quad \Theta_{Output}^* = \frac{1}{\Theta_{Input}^*} \quad (30)$$

## 3.2. BCC-Modell

### 3.2.1. Inputorientierung

Wie im Kapitel 2.5.1. erwähnt, kann für einen adäquaten Effizienzvergleich die reine Unterstellung von konstanten Skalenerträgen nicht ausreichend sein. Im Gegensatz zum eben dargestellten CCR-Modell, berücksichtigt das BCC-Modell die Möglichkeit von variablen Skalenerträgen. Die Ausbildung des PPS-Raums dieses Modells ist in Abbildung (3d) dargestellt.

Durch die Ausbildung des Produktionsraumes in Abbildung (3), also der Konstruktion des effizienten Randes, sieht man sofort, dass der Effizienzwert des BCC Modells meistens geringer, jedoch maximal gleichhoch wie jener des CCR-Modells sein kann. Wird eine DMU im CCR-Modell als effizient ausgewiesen, so ist sie es zwangsweise auch im BCC-Modell. Auch die Effizienzdefinition des BCC-Modells ist identisch mit jener des CCR-Modells. Eine DMU wird nur dann als BBC-effizient bezeichnet, wenn der optimale Zielwert den Wert 1 annimmt und gleichzeitig alle Slacks 0 sind (Cooper et al. 2007, S.92).

Die Multiplier-Form des BCC-Modells zur Berechnung der Effizienz bei variablen Skalenerträgen ist gleich aufgebaut wie die des CCR-Modells. Sie unterscheiden sich nur durch eine zusätzliche Variable  $\omega$ , welche das Verhalten der Skalenerträge zeigt. Vom Wert dieser Variable ist das Skalenertragsverhalten der DMU abzulesen. Ist  $\omega > 0$ , so befindet sich die DMU im Bereich fallender Skalenerträge. Ist diese Variable negativ, also  $\omega < 0$ , so liegen steigende Skalenerträge vor. Nimmt die Variable  $\omega$  den Wert 0 an, so spricht man von konstanten Skalenerträgen (Allen 2002, S.71). Die Beziehung (31) geht zunächst von einer Inputorientierung aus.

#### BCC-I / Multiplier-Form:

$$\max_{u,v,\omega} \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 - \omega^0 = \Theta^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 = 1 \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho - \omega^0 \leq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \quad (31)$$

Der Unterschied der Envelopment-Form des BCC-Modells in Beziehung (32) und (33) zu jener des CCR-Modells in Beziehung (24) und (25) besteht in der zusätzlichen Nebenbedingung  $\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1$ . Durch diese Nebenbedingung wird der Produktionsraum nicht mehr wie bei konstanten Skalenerträgen durch einen Fahrstrahl ausgehend vom Ursprung begrenzt, sondern von einem stückweise linearen Rand, gegeben durch die effizienten DMU's (Cooper et al. 2007, S.91).

Weiters besteht mit dieser Nebenbedingung auch die Möglichkeit, über die Summe der Dualgewichte  $\sum \lambda^{\rho} = 1$  einer DMU, die Skalenerträge beim CCR-Modell zu bestimmen. Während für konstante Skalenerträge die Beziehung  $\sum \lambda^{\rho} = 1$  gelten muss, weisen die Beziehungen  $\sum \lambda^{\rho} < 1$  bzw.  $\sum \lambda^{\rho} > 1$  auf steigende bzw. fallende Skalenerträge hin (Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.350).

### BCC-I / Envelopment-Form / 2-Phasen Modell:

#### Phase 1:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq \Theta^0 \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1 \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

#### Phase 2:     $\Theta^0 = \Theta^*$

$$\begin{aligned} \max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^* \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1 \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Ist eine DMU effizient, kann die Situation der Skalenerträge durch den optimalen Wert  $\omega^*$  der Multiplier-Form beschrieben werden. Ist eine DMU ineffizient, so muss sie zuerst auf den effizienten Rand projiziert werden, um ihr Skalenverhalten

bestimmen zu können (Banker, Bardhan und Cooper 1996, S.584). Da es jedoch mehrere optimale Lösungen geben kann, muss für eine eindeutige Bestimmung der Skalenerträge für alle optimalen Lösungen derselbe Wertebereich (z.B. für alle Lösungen  $\omega^* < 0$ ) gelten (Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.348).

Diese Aufgabe wird wiederum in zwei Phasen gelöst. In der ersten Phase (34) wird mit den optimalen Werten  $\Theta^*, s_i^{-*}, s_j^{+*}$  der Envelopment-Form (32) und (33) die DMU  $(x^0, y^0)$  auf den effizienten Rand  $(\hat{x}^0, \hat{y}^0)$  projiziert (Cooper et al. 2007, S.137).

### BCC-I / Bestimmung Skalenerträge:

#### Phase 1:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^0 &= \Theta^{0*} \cdot x_i^0 - s_i^{-*} & i &= 1, \dots, n \\ \hat{y}_j^0 &= y_j^0 + s_j^{+*} & j &= 1, \dots, m\end{aligned}\quad (34)$$

Danach wird in der zweiten Phase das erweiterte Multiplier-Modell (35) gelöst, zur Umgehung der Überprüfung aller optimalen Lösungen. Ob die zweite Phase als Maximierungs- oder Minimierungsproblem beschrieben wird, hängt von dem Ergebnis des unveränderten Multiplier-Modells (31) ab, also ob  $\omega^0$  einen positiven oder negativen Wert angenommen hat. Ist  $\omega^0 < 0$ , wird ein Maximierungsproblem mit der Nebenbedingung  $\hat{\omega}^0 \leq 0$  formuliert und es wird kontrolliert, ob tatsächlich fallende Skalenerträge vorhanden sind. Ist dabei die Zielfunktion  $(\max \hat{\omega}^0) = \hat{\omega}^{0*} < 0$ , so sind diese bestätigt. Zeigt die optimale Lösung jedoch, dass  $\hat{\omega}^{0*} = 0$  ist, so operiert die DMU im Bereich konstanter Skalenerträge. Nimmt  $\omega^0$  im ursprünglichen Modell einen positiven Wert an, so wird die Beziehung (35) als Minimierungsproblem mit der Nebenbedingung  $\hat{\omega}^0 \geq 0$  formuliert (Cooper et al. 2007, S.137f bzw. Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.349).

Phase 2:

$\max \hat{\omega}^0$   
 $\min$  so dass für alle DMU's ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) gilt:

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho - \hat{\omega}^0 \leq 0 \quad \text{mit } \rho \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot \hat{y}_j^0 - \sum_{i=1}^n v_i \cdot \hat{x}_i^0 - \hat{\omega}^0 \leq 0 \quad \text{mit } \rho = 0$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot \hat{x}_i^0 = 1 \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot \hat{y}_j^0 - \hat{\omega}^0 = 1 \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad u_j, v_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \hat{\omega}^0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (35)$$

Wie anfangs erwähnt ist es auch möglich, im CCR-Modell aufgrund der Summe der Dualgewichte auf das Skalenertragsverhalten zu schließen, obwohl bei diesem Modell konstante Skalenerträge vorausgesetzt sind. Da auch in diesem Fall alle optimalen Lösungen überprüft werden müssen, geschieht dies analog wie beim BCC-Modell in zwei Phasen (Banker, Cooper, Seiford und Zhu 2004, S.49).

Eine Erweiterung des BBC-Modells stellen Modelle dar, welche entweder nur steigende, nur fallende oder nur begrenzt steigende und fallende Skalenerträge zulassen. Dafür wird die Nebenbedingung  $\sum \lambda^\rho = 1$  in Beziehungen (32) und (33) verändert, indem die Grenzen der Summen der Dualgewichte in Beziehung (36) individuell definiert werden (Cooper et al. 2007, S.150).

$$L \leq \sum \lambda^\rho \leq U$$

Untere Grenze...  $0 \leq L \leq 1$

Obere Grenze...  $1 \leq U$  (36)

Die Festlegung der Grenzen auf ( $L=0, U=\infty$ ) entspricht der Annahme von konstanten Skalenerträgen wie im CCR-Modell. Werden die Grenzen mit ( $L=U=1$ ) festgelegt, so werden allgemein variable Skalenerträge, wie im BCC Modell, unterstellt (Cooper et al. 2007, S.150). Durch Veränderung dieser Grenzen können

auch Spezialfälle der variablen Skalenerträge wie in Abbildung (3b) und (3c) berechnet werden.

Steigende bzw. nicht abnehmende Skalenerträge wie in Abbildung (3c)

$$\sum \lambda^p \geq 1 \quad \rightarrow \quad L=1, U = \infty$$

Fallende bzw. nicht zunehmende Skalenerträge wie in Abbildung (3b)

$$0 \leq \sum \lambda^p \leq 1 \quad \rightarrow \quad L=0, U=1$$

Begrenzt fallende und steigende Skalenerträge wie in Abbildung (9)

$$L \leq \sum \lambda^p \leq U \quad \rightarrow \quad 0 \leq L \leq 1, U \geq 1$$

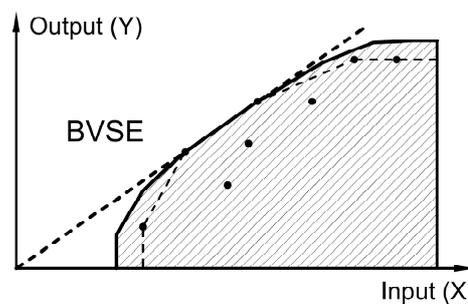


Abbildung 9: Begrenzung variabler Skalenerträge

Der Effizienzwert bei diesen drei Modellen erreicht maximal jenen des BCC-Modells. Generell gilt damit (Cooper et al. 2007, S.151):

$$\Theta_{CCR}^* \leq \Theta_{NASE}^*, \Theta_{NZSE}^*, \Theta_{BVSE}^* \leq \Theta_{BCC}^* \quad (37)$$

### 3.2.2. Outputorientierung

Wie beim CCR-Modell ist das Ziel des outputorientierten BCC-Modells, die Outputs bei gleichbleibendem Inputniveau zu maximieren (Cooper et al. 2004, S.34). Die Berechnung der optimalen Werte erfolgt analog zum outputorientierten CCR-Modell wie folgt:

BCC-O / Multiplier-Form:

$$\min_{u,v,\omega} \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 - \omega^0 = \Theta^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 = 1 \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho + \omega^0 \leq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \quad (38)$$

BCC-O / Envelopment-Form / 2-Phasen Modell:Phase 1:

$$\max_{\lambda, \Theta} \Theta^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho \leq x_i^0 \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho = 1$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho \geq \Theta^0 \cdot y_j^0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen } \lambda^\rho \geq 0 \quad (39)$$

Phase 2:  $\Theta^0 = \Theta^*$ 

$$\max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho + s_i^- = x_i^0 \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho = 1$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho - s_j^+ = \Theta^* \cdot y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^\rho, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (40)$$

Die Beziehungen aus (30) zwischen den Variablen des input- und outputorientierten Modells gilt beim BCC-Modell nicht mehr. Durch die Annahme der variablen Skalenerträge und der damit verbundenen Ausbildung des effizienten Randes, kann eine DMU in verschiedene Bereiche der Skalenertragsannahme projiziert werden. Ein Beispiel wäre DMU B in Abbildung (6).

### 3.3. Additive Modelle

Beim additiven Modell ist, im Gegensatz zu den bisherigen radialen Modellen CCR und BCC, die Festlegung der Orientierung nicht notwendig, da gleichzeitig die Outputs maximiert bzw. die Inputs minimiert werden (Banker, Cooper, Seiford und Zhu 2004, S.58). Der Effizienzwert in Beziehung (41) gibt damit für DMU B in Abbildung (10) den maximalen Abstand zum effizienten Rand an (Siemens 2005, S.22).

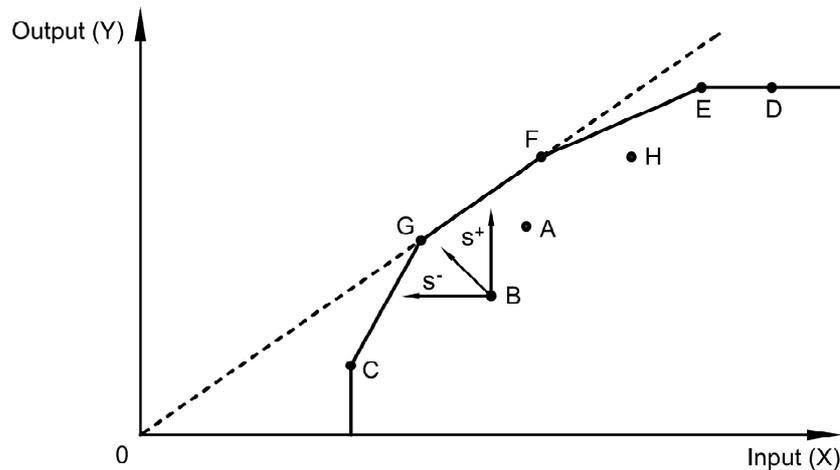


Abbildung 10: Additives Modell

Während bei den radialen Modellen CCR und BCC in der ersten Phase nur die Farrell-Effizienz berechnet wird, und erst durch die zusätzliche Bestimmung der Slacks in der zweiten Phase die Pareto-Koopman'sche Effizienzforderung erfüllt werden kann, wird beim additivem Modell die Effizienz im Sinn von Pareto und Koopmann direkt berechnet (Cooper et al. 2007, S.95).

Da beim additiven Modell über die Slackvariablen der Abstand zum effizienten Rand maximiert wird, wird nur die zweite Phase der Berechnung durchgeführt. Bei Unterstellung von konstanten Skalenerträgen ergeben sich folgende Beziehungen:

ADD / Envelopment-Form / KSE:

$$\max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (41)$$

ADD / Multiplier-Form / KSE:

$$\min_{u,v} \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 - \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho - \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho \geq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen } u_j, v_i \geq 1 \quad (42)$$

Für eine effiziente DMU ergibt sich ein Zielfunktionswert von Null, da keine weiteren Slacks vorhanden sind, weil sie schon auf dem effizienten Rand liegt (Allen 2002, S.73). Damit gilt, dass eine DMU nur dann nach dem Additiven Modell effizient ist, wenn sie auch im CCR-Modell (bzw. BCC-Modell bei variablen Skalenerträgen) effizient ist (Cooper et al. 2007, S.95).

Bei der Unterstellung von variablen Skalenerträgen wird analog zu den vorigen Modellen die Nebenbedingung  $\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho = 1$  in der Envelopment-Form bzw. die Variable  $\omega$  in die Multiplier-Form eingefügt.

ADD / Envelopment-Form / VSE:

$$\max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho + s_i^- = x_i^0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho = 1 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^\rho \geq 0 \quad (43)$$

ADD / Multiplier-Form / VSE:

$$\min_{u,v,\omega} \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 - \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 + \omega^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho - \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho + \omega^0 \geq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen } u_j, v_i \geq 1 \quad (44)$$

Analog zu den Erklärungen beim BCC-Modell kann auch beim Additiven Modell über die Variable  $\omega$  auf das Skalenertragsverhalten geschlossen werden. Dabei wird wieder in der ersten Phase einerseits Beziehung (43) gelöst, um über die optimalen Werte  $s_i^{-*}, s_j^{+*}$  die DMU auf den effizienten Rand zu projizieren und andererseits Beziehung (44), um über den Wert  $\omega^0$  feststellen zu können, ob ein Maximierungsproblem ( $\omega^0 < 0$ ) bzw. ein Minimierungsproblem ( $\omega^0 > 0$ ) formuliert werden muss. Grundsätzlich liegen bei  $\hat{\omega}^{0*} > 0$  wieder fallende, bei  $\hat{\omega}^{0*} < 0$  steigende und bei  $\hat{\omega}^{0*} = 0$  konstante Skalenerträge vor (Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.356).

### ADD / Bestimmung Skalenerträge:

#### Phase 1:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^0 &= x_i^0 - s_i^{-*} & i &= 1, \dots, n \\ \hat{y}_j^0 &= y_j^0 + s_j^{+*} & j &= 1, \dots, m\end{aligned}\quad (45)$$

#### Phase 2:

$\max \hat{\omega}^0$   
 $\min$  so dass für alle DMU's ( $\rho = 1, \dots, \pi$ ) gilt:

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^\rho - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^\rho - \hat{\omega}^0 \leq 0 \quad \text{mit } \rho \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot \hat{y}_j^0 - \sum_{i=1}^n v_i \cdot \hat{x}_i^0 - \hat{\omega}^0 \leq 0 \quad \text{mit } \rho \neq 0$$

$$\text{mit der Nebenbedingung } u_j, v_i \geq 0 \text{ und } \hat{\omega}^0 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad (46)$$

Neben der Tatsache, dass beim Additiven Modell der Effizienzwert die Pareto-Koopman'sche Effizienzforderung erfüllt, besteht ein weiterer Vorteil dieses Modells in der sogenannten „Translation Invariance“ (Cooper et al. 2007, S.97). Sie bezeichnet die Unabhängigkeit von den Vorzeichen der In- und Outputs. Es können somit auch negative Inputs und Outputs behandelt werden, ohne dass die Analyse beeinflusst werden würde. Der Grund liegt in der Nichtabhängigkeit vom Ursprung des Koordinatensystems. Während das CCR Modell nicht vorzeichenunabhängig ist, so ist das BCC Modell es nur bei einer Variablen, abhängig von der Orientierung

(Inputorientierung bedeutet Vorzeichenabhängigkeit beim Input, aber nicht beim Output) (Cooper et al. 2007, S.97).

Ein Nachteil des Additiven Modells ist jedoch die Abhängigkeit von den Einheiten der In- und Outputs. Es ist also von Bedeutung, wenn die Inputs verschiedene Maßeinheiten verwenden, anders als beim CCR und BCC Modell. Diese Eigenschaft der Unabhängigkeit von den Einheiten wird dann „Units invariant“ genannt (Cooper et al. 2007, S.100).

Eine Abhilfe kann das gewichtete Additive Modell in Beziehung (47) sein. Dabei wird mit den zusätzlichen Variablen  $w_i^-, w_j^+$  die Möglichkeit geschaffen, eventuelle Unterschiede der Einheiten zu beseitigen. Die Berechnung der Zielfunktion wäre in diesem Fall (Zhu 2003, S.40):

ADD-Gewichtet / Envelopment-Form / KSE:

$$\begin{aligned} \max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n w_i^- \cdot s_i^- + \sum_{j=1}^m w_j^+ \cdot s_j^+ & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 & \quad \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Durch individuelle Festlegung der Gewichtungen  $w_i^-, w_j^+$  ist es nun auch möglich, das Additive Modell als orientiertes Modell zu formulieren (Allen 2002, S.144).

Um die Abhängigkeit der Einheiten ohne notwendige Benutzereingabe zu umgehen, gibt es Erweiterungen des Additiven Modells. Hierbei ist das „Range-Adjusted-Measure“, das sogenannte RAM-Maß zu erwähnen, welches eine Weiterentwicklung des gewichteten Additiven Modells aus (47) darstellt. Dabei werden die Gewichte

$$w_i^-, w_j^+ \text{ ersetzt durch } \left( w_i^- = \frac{1}{n \cdot (\bar{x}_i - \underline{x}_i)}, w_j^+ = \frac{1}{m \cdot (\bar{y}_j - \underline{y}_j)} \right). \text{ Die Variablen } \bar{x}_i, \underline{x}_i, \bar{y}_j, \underline{y}_j$$

stellen dabei den größten bzw. kleinsten Wert des Inputs bzw. Outputs dar (Allen 2002, S.145).

Die Formeln  $(\bar{y}_j - \underline{y}_j)$  und  $(\bar{x}_i - \underline{x}_i)$  beschreiben die Spannweite des Verbesserungspotentials. Das RAM-Maß gibt damit das durchschnittliche Verbesserungspotential gemessen am maximal möglichen Potential an (Siemens 2005, S.22). Der Bereich des Effizienzwertes umfasst die Werte zwischen 0 und 1. Dabei erreicht eine effiziente DMU den Zielfunktionswert von 0, da keine Verbesserungspotentiale möglich sind (Cook & Seiford 2009, S.5).

Eine andere Erweiterung des Additiven Modells, welche das Ziel hat, die Benutzereingabe einer Gewichtung zu umgehen, ist das „Slack-Based Measure“, genannt SBM-Modell, welches äquivalent zum sogenannten „Russel-Measure“-Modell ist (Cook & Seiford 2009, S.5). Das Russel-Maß wird jedoch seltener eingesetzt, da im Gegensatz zum SBM-Modell ein nichtlineares Programm zur Lösung erforderlich ist (Tone 2001, S.507).

Die Abhängigkeit von den Einheiten wird hier umgangen, indem die Zielfunktion in Beziehung (48) die relative Verringerung bzw. Erhöhung der Inputs bzw. Outputs berechnet (Cooper et al. 2007, S.102). Die Beziehung (48) stellt im Gegensatz zu den vorherigen Modellen aufgrund der besseren Darstellung das Fraktionelle Programm dar. Dieses kann natürlich auch in ein lineares Programm mithilfe der Charnes-Cooper Transformation übersetzt werden (Tone 2001, S.500).

#### SBM-Modell / Fraktionelles Programm / Unorientiert:

$$\min_{\lambda, s_i^-, s_j^+} \rho = \frac{1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{s_i^-}{x_i^0}}{1 + \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{s_j^+}{y_j^0}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^0 - s_i^-}{x_i^0}}{\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{y_j^0 + s_j^+}{y_j^0}} \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (48)$$

Eine DMU ist nach (48) dann effizient, wenn alle Input- und Outputslacks den Wert 0 annehmen. In diesem Fall ergibt die Zielfunktion den Wert 1 (Effizienzbereich zwischen [0,1]). Der Wert  $\rho$  gibt dabei das Verhältnis der durchschnittlichen

proportionalen Änderungen der Inputs bzw. Outputs wieder, und ist nie größer als der Effizienzwert beim CCR-Modell (Cooper et al. 2007, S.101ff).

Die Projizierung auf den effizienten Rand erfolgt genauso wie beim ursprünglichen Additiven Modell über die Beziehung (49) (Tone 2001, S.501 bzw. Cooper et al. 2007, S.102).

$$\begin{aligned}\hat{x}^0 &= x^0 - s^{-*} \\ \hat{y}^0 &= x^0 + s^{+*}\end{aligned}\quad (49)$$

Ist trotzdem a priori-Wissen vorhanden, so können die In- und Outputs des SBM-Modells auch gewichtet werden. Dies geschieht wie bei Additiven Modell durch das Einfügung der Variablen  $w$  (Cooper et al. 2007, S.105f).

Das SBM-Modell kann auch wie das gewichtete Additive Modell als orientiertes Modell angeschrieben werden (Cooper et al. 2007, S.105).

#### SBM-Modell / Fraktionelles Programm / Inputorientiert:

$$\begin{aligned}\rho_{Input}^* &= \min_{\lambda, s_i^-} \left( 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{s_i^-}{x_i^0} \right) && \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- &= x_i^0 && \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} &\geq y_j^0 && \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^- \geq 0\end{aligned}\quad (50)$$

#### SBM-Modell / Fraktionelles Programm / Outputorientiert:

$$\begin{aligned}\rho_{Output}^* &= \min_{\lambda, s_j^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{s_j^+}{y_j^0}} && \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} &\leq x_i^0 && \text{und} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ &= y_j^0 && \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_j^+ \geq 0\end{aligned}\quad (51)$$

Um nun auch die radiale Effizienz mit der nicht-radialen Effizienz in Verbindung zu bringen, kann die sogenannte „Mix-Effizienz“ (Cooper et al. 2007, S.155) formuliert werden. Hierbei wird der Effizienzwert des CCR-Modells aus (24) mit dem des inputorientierten SBM Modells aus (50) verglichen (Cooper et al. 2007, S.155).

$$MIX = \frac{\rho_{Input}^*(SBM)}{\Theta_{CCR}^*} \quad \text{bzw.} \quad \rho_{Input}^*(SBM) = \Theta_{CCR}^* \times MIX \quad (52)$$

Damit wird in Beziehung (52) die nicht-radiale Effizienz in eine radiale und eine Mix-Effizienzkomponente zerlegt. Beziehung (9) in (52) eingesetzt ergibt (Cooper et al. 2007, S.155):

$$\rho_{Input}^* = MIX \times \Theta_{BCC}^* \times SE$$

$$\text{nichtradialeEff.} = MIX \text{ Eff.} \times \text{reine technische Eff.} \times \text{Skaleneffizienz} \quad (53)$$

### 3.4. Multiplikative Modelle

Eine weitere Art von DEA-Modellen stellen die „Multiplikativen Modelle“ dar (Charnes, Cooper, Lewin und Seiford 1996, S.29). Bei diesen Modellen ergibt sich, anders als bei dem bisher erklärten, nicht eine abschnittsweise lineare Hülle, sondern entweder eine logarithmisch-lineare Umhüllende oder ein effizienter Rand aufgrund einer Cobb-Douglas Funktion. Grundsätzlich wird zwischen dem sogenannten „Varianten Multiplikativen Modell“ und seiner Weiterentwicklung, dem „Invarianten Multiplikativen Modell“ unterschieden (Siemens 2005, S.23).

Der Unterschied des Varianten- zum Invarianten Multiplikativen Modell besteht in der Konvexitätsbedingung  $\sum \lambda^p = 1$  bzw. ihrer dualen Variable  $\omega^0$  (Siemens 2005, S.23). Damit behandelt das Variante Modell nur den Fall konstanter Skalenerträge, während das Units-Invariante Modell variable Skalenerträge unterstellt. Wie angedeutet, wird das Multiplikative Modell durch diese Nebenbedingung von den Einheiten der Faktoren unabhängig (Cooper et al. 2007, S.124).

Beim fraktionellen Problem des Multiplikativen Modells wird der virtuelle Input bzw. Output nicht wie in Beziehung (16) durch Aufsummierung der gewichteten Faktoren,

sondern durch Multiplikation dieser gebildet. Die zugehörigen Gewichtungen  $v_i, u_j$  werden dabei als Exponenten verwendet (Siemens 2005, S.22 bzw. Charnes, Cooper, Seiford und Stutz, S.223).

$$\text{Virtueller Input für DMU } \rho = \prod_{i=1}^n (x_i^\rho)^{v_i}$$

$$\text{Virtueller Output für DMU } \rho = \prod_{j=1}^m (y_j^\rho)^{u_j} \quad \text{mit } \rho = 1, \dots, \pi \quad \text{und } v_i, u_j \geq 1 \quad (54)$$

Die relative Effizienz der DMU ( $\rho = 0$ ) ergibt sich dann aus der Maximierung des Verhältnisses des virtuellen Inputs und Outputs (Charnes et al. 1982, S.223):

#### Multiplikatives Modell / Fraktionelles Problem:

$$\max_{v_i, u_j} \frac{\prod_{j=1}^m (y_j^0)^{u_j}}{\prod_{i=1}^n (x_i^0)^{v_i}} \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^m (y_j^\rho)^{u_j}}{\prod_{i=1}^n (x_i^\rho)^{v_i}} \leq 1 \quad \text{mit der Nebenbedingung } v_i, u_j \geq 1 \quad (55)$$

Die Envelopment- (56) und Multiplier-Form (57) sind genauso wie beim Additiven Modell in den Beziehungen (41) und (42) aufgebaut (Charnes et al. 1996, S.29), jedoch mit den Unterschied, dass die In- und Outputs logarithmisiert sind (angezeigt mit einer Wellenlinie  $\tilde{x}$  über der Variablen) (Siemens 2005, S.23).

#### Envelopment-Form / Variantes Multiplikatives Modell:

$$\max_{s_i^-, s_j^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot \tilde{x}_i^\rho + s_i^- = \tilde{x}_i^0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot \tilde{y}_j^\rho - s_j^+ = \tilde{y}_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^\rho, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (56)$$

Multipliiier-Form / Variantes Multiplikatives Modell:

$$\min_{u,v} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \tilde{x}_i^0 - \sum_{j=1}^m u_j \cdot \tilde{y}_j^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot \tilde{x}_i^\rho - \sum_{j=1}^m u_j \cdot \tilde{y}_j^\rho \geq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen } u_j, v_i \geq 1 \quad (57)$$

Envelopment-Form / Invariantes Multiplikatives Modell:

$$\max_{s_i^-, s_j^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot \tilde{x}_i^\rho + s_i^- = \tilde{x}_i^0 \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho = 1$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^\rho \cdot \tilde{y}_j^\rho - s_j^+ = \tilde{y}_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (58)$$

Multipliiier-Form / Invariantes Multiplikatives Modell:

$$\min_{u,v} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \tilde{x}_i^0 - \sum_{j=1}^m u_j \cdot \tilde{y}_j^0 - \omega_0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot \tilde{x}_i^\rho - \sum_{j=1}^m u_j \cdot \tilde{y}_j^\rho - \omega_0 \geq 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen } u_j, v_i \geq 1 \quad (59)$$

Analog zum Additiven Modell wird auch beim Multiplikativen Modell eine DMU als effizient bezeichnet, wenn alle ihre Slacks den Wert 0 annehmen (Charnes et al. 1982, S.224). Zur Berechnung der Projektion  $\hat{x}_i^0, \hat{y}_j^0$  auf den Effizienten Rand müssen die Slacks  $s_i^{*-}, s_j^{*+}$  zunächst mit der Exponentialfunktion transformiert werden (Siemens 2005, S.24). Diese sind dann in Beziehung (60) die Multiplikatoren der ursprünglichen Faktoren  $x_i^0, y_j^0$  (Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.358).

$$\hat{x}_i^0 = x_i^0 \cdot e^{-s_i^{*-}} \quad \text{und} \quad \hat{y}_j^0 = y_j^0 \cdot e^{s_j^{*+}} \quad (60)$$

Bei Verwendung einer Cobb-Douglas<sup>1</sup> Funktion können die Faktoren  $x_i^0, y_j^0$  auch nach Beziehung (61) formuliert werden (Cooper et al. 2007, S.123).

$$x_i^0 = e^{S_i^{-s}} \cdot \prod_{\rho=1}^{\pi} (x_i^{\rho})^{\lambda_{\rho}^*} \quad \text{und} \quad y_j^0 = e^{-S_j^{+s}} \cdot \prod_{\rho=1}^{\pi} (y_j^{\rho})^{\lambda_{\rho}^*} \quad (61)$$

Die Cobb-Douglas Funktion in der Fußnote sei deshalb erwähnt, da sie bei der Bestimmung der Skalenerträge gewisse Vorteile bringt. Durch die Summe der partiellen Elastizitäten  $\sum \alpha_i$ , also die relative Änderung von  $x_i$  bezogen auf  $y$ , kann angezeigt werden, in welchem Skalenertragsbereich die DMU operiert. Analog zu den vorigen Modellen gelten für  $\sum \alpha_i = 1$  konstante, und für  $\sum \alpha_i < 1$  bzw.  $\sum \alpha_i > 1$  fallende bzw. steigende Skalenerträge (Coelli et al. 1998, S.21).

Die genaue Herleitung der Bestimmung der Skalenertragsannahmen wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt, doch neben der Möglichkeit auch eine nicht konkave Umhüllende zu konstruieren, ist ihre einfache Bestimmung über die Cobb-Douglas Funktion ein Hauptvorteil dieses Modells (Banker, Cooper, Seiford, Thrall et al. 2004, S.357).

### 3.5. Free Disposal Hull Modell

Das Free Disposal Hull Modell (FDH-Modell) ist ein nicht-konvexes DEA-Modell (Allen 2002, S.168). Die Annahme der Konvexität als Technischeigenschaft aus Kapitel 2.4.3. zur Konstruktion des effizienten Randes wird bei diesem Modell verworfen. Durch die Annahme, dass sich Inputs und Outputs nicht substituieren lassen, ergibt sich kein stückweiser linearer Rand des PPS-Raums wie beim CCR- oder BCC-Modell, welcher aus virtuellen aber technisch möglichen DMU's besteht.

Beim FDH-Modell wird dieser effiziente Rand nur durch die tatsächlich vorhandenen DMU's bestimmt (Cook & Seiford 2009, S.6). Durch die Technischeigenschaft der freien Verschwendbarkeit aus Kapitel 2.4.2. kommt es zu der charakteristischen

---

<sup>1</sup>  $y = \alpha_0 \cdot (x_1)^{\alpha_1} \cdot (x_2)^{\alpha_2} \dots (x_n)^{\alpha_n}$  mit  $\alpha_0, \alpha_i \geq 0$  (Kistner & Steven 1999, S.63)

Stufenfunktion (Cooper et al. 2007, S.118). Der damit entstehende PPS-Raum ist in Abbildung (4) dargestellt.

Die Berechnung des FDH-Modells in (62) ist dieselbe, wie die für das BCC-Modell in (32), jedoch mit der zusätzlichen Nebenbedingung, dass die Dualgewichte nur den Wert  $\lambda^p \in \{0,1\}$  annehmen dürfen (Cook & Seiford 2009, S.6).

FDH / Envelopment-Form / Inputorientiert:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq \Theta^0 \cdot x_i^0 & \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1 \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} = \{0,1\} \end{aligned} \quad (62)$$

FDH / Envelopment-Form / Outputorientiert:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq x_i^0 & \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1 \\ \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} \geq \Theta^0 \cdot y_j^0 & \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} = \{0,1\} \end{aligned} \quad (63)$$

Das FDH-Modell gibt einen radialen Effizienzwert wieder. Durch die Forderung  $\lambda^p \in \{0,1\}$  und die Nebenbedingung  $\sum \lambda^p = 1$  gibt es nur ein  $\lambda$ , welches von 0 verschieden ist (Ray 2004, S.137).

Für DMU A in Abbildung (11) würde der Referenzpunkt am effizienten Rand Punkt A' sein, welcher mit der DMU C, also  $\lambda^C = 1$ , verglichen wird. Die nicht-radialen Verbesserungsmöglichkeiten (Slacks) bis zu DMU C werden nicht berücksichtigt. Ebenso das Vorhandensein von schwacher Effizienz bei DMU D. Eine Möglichkeit, bei ausgeschlossener Konvexität auch die Slacks zu berechnen, besteht in der Anwendung des SBM-Modells aus (50) mit den zusätzlichen Bedingungen  $\sum \lambda^p = 1$  und  $\lambda^p \in \{0,1\}$  (Cooper et al. 2007, S.119).

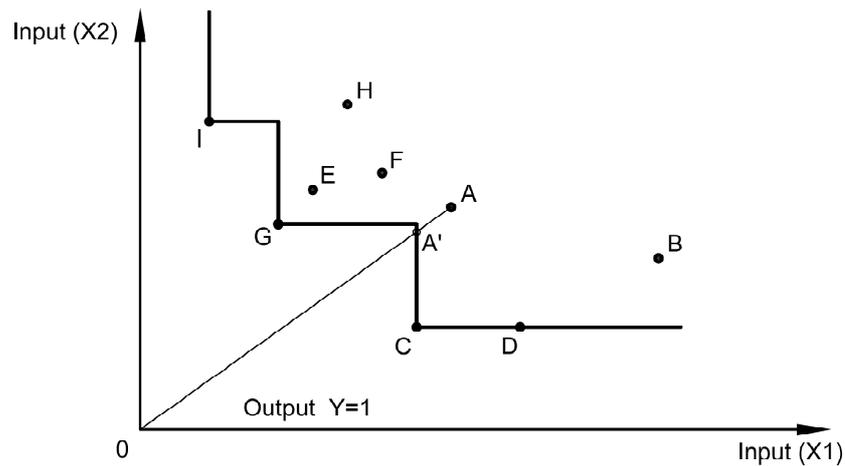


Abbildung 11: Effizienzberechnung im FDH Modell

Die Berechnung des FDH-Modells ist nicht so aufwendig wie jene der vorigen Modelle (Allen 2002, S.169), da sie nicht über ein lineares Programm, sondern über einen paarweisen Vektorvergleich durchgeführt wird (Siemens 2005, S.24). Ein weiterer Vorteil ist die bessere Feststellbarkeit von ineffizienten Einheiten, da durch die Ausbildung des PPS-Raums mehrere DMU's am effizienten Rand liegen. Ein Nachteil besteht jedoch darin, dass, wenn nur wenige DMU's für die Analyse vorhanden sind, ein Großteil als effizient ausgewiesen wird, weil es keine reale DMU gibt, welche die zu bewertende dominiert (Allen 2002, S.172).

## 4. Berücksichtigung von a priori Wissen

### 4.1. Nicht-diskrete Faktoren

Bei den eben beschriebenen Modellen wurde angenommen, dass die Faktoren (Inputs und Outputs) diskret sind. Man geht von der Annahme aus, dass alle Variablen vom Benutzer variiert werden können (Cooper et al. 2007, S.63). In der Praxis kommt es jedoch häufiger vor, dass eine DMU eine oder mehrere Variablen nicht verändern kann. Um jedoch eine faire Effizienzanalyse gewährleisten zu können, müssen jene nicht-diskreten Variablen ebenso in die Analyse einfließen (Camanho, Portela und Vaz 2009, S.2).

Um diese nicht-diskreten Variablen in die Analyse einfließen zu lassen, wurden verschiedene Modelle entwickelt, dessen Anwendungen von der Ausprägung der nicht-diskreten Variablen abhängen. Liegen diese als kategorische Variablen (ordinal bzw. nominal skaliert) vor, so ist es möglich die DMU's in verschiedene Gruppen einzuteilen. Welches Modell dabei verwendet wird, hängt von Art der Skalierung der nicht-diskreten Daten ab. Diese Modelle werden im Anschluss im Kapitel 4.1.2. betrachtet. Liegen diese dagegen als kontinuierliche Variable (kardinal skaliert) vor, so können sie nicht in Gruppen eingeteilt werden und müssen innerhalb der eben vorgestellten Modelle berücksichtigt werden (Camanho et al. 2009, S.2).

#### 4.1.1. Kontinuierliche Variablen

Das erste Modell, welches die Berücksichtigung nicht-diskreter Inputvariablen erlaubt, ist eine Abänderung des CCR-Modells aus Beziehung (26) (Cook & Seiford 2009, S.10). Das Modell in der Beziehung (64) wird in seiner minimierten Version angeschrieben. Wie in Kapitel 3.1.1. beschrieben, deutet die Variable  $\varepsilon$  jedoch an, dass die Slacks, wie in Beziehungen (24) und (25), in einer zweiten Phase maximiert werden (Cooper et al. 2007, S.64). Die zugehörige Multiplier-Form wird in Beziehung (65) beschrieben.

CCR-Modell mit nicht-diskreten Variablen / Envelopment-Form:

$$\min_{\lambda, \Theta, s^-, s^+} \Theta - \varepsilon \cdot \left( \sum_{i \in D} s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \right) \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0 \quad \text{mit } (i \in D)$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 \quad \text{mit } (i \in ND) \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (64)$$

CCR-Modell mit nicht-diskreten Variablen / Multiplier-Form:

$$\max \sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 - \sum_{i \in ND} v_i \cdot x_i^0 = \Theta^0 \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^{\rho} - \sum_{i \in ND} v_i \cdot x_i^{\rho} - \sum_{i \in D} v_i \cdot x_i^{\rho} \leq 0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{i \in D} v_i \cdot x_i^0 = 1 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \begin{array}{l} u_j \geq \varepsilon \\ v_i \geq \varepsilon \quad i \in D \\ v_i \geq 0 \quad i \in ND \end{array} \quad (65)$$

$(i \in D)$  und  $(i \in ND)$  bezeichnen die zwei Gruppen „Diskret“ (D) und „Nicht-Diskret“ (ND).

Da die Variablen  $x_i^0 \in ND$  von der DMU nicht verändert werden können, wird der Zielfunktionswert  $\Theta^0$  in der nicht-diskreten Gruppe der Envelopment-Form nicht berücksichtigt (Esmaeli, Lofti und Jahanshaloo 2007, S.239). Diese Variablen können also nicht proportional verändert werden. Ebenso werden die Slacks der nicht-diskreten Variablen nicht in der zweiten Phase der Berechnung maximiert<sup>2</sup> (Cooper et al. 2004, S.20). Daher haben die nicht-diskreten Inputvariablen  $x_i^0 \in ND$  keinen direkten Einfluss auf die Effizienzberechnung in (64), sondern nur indirekt über die Nebenbedingungen (Cooper et al. 2007, S.64).

<sup>2</sup> Eine DMU wird nach diesem Modell daher nur als effizient bezeichnet, wenn ihr Zielfunktionswert =1, und alle Slacks in der Zielfunktion  $(s_i^-, s_j^+ \quad i \in D) = 0$  sind (Esmaeli 2009, S.2).

Direkt wirken sich die ND-Variablen hingegen in der Multiplier-Form auf den Effizienzwert aus, da nur sie in (65) in die Zielfunktion aufgenommen werden (Esmaeli et al. 2007, S.239). Ob sich die verschiedenen  $x_i^0 \in ND$  auf den Effizienzwert überhaupt auswirken, wird durch ihre optimalen Werte  $v_i^*$  entschieden (Cooper et al. 2007, S.223). Die Gewichtungen  $v_i$  jener Inputs  $x_i^0 \in ND$  sind die einzigen Variablen, welche auch den Wert 0 annehmen können, und nicht streng positiv sein müssen (aufgrund von  $\varepsilon$ ). Dementsprechend sind auch nur die Slacks der diskreten Variablen in der Zielfunktion von (64) vertreten (Cook & Seiford 2009, S.10).

Aufgrund der Complementary-Slackness Beziehung (Kapitel 3.1.1.) bedeutet dies, wenn die Bedingung  $\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} x_i^{\rho} + s_i^{-} = x_i^0$  in Beziehung (64) in ihrem Optimum einen Wert  $s_i^{-*} > 0$  für einen Slack einer ND Variable annimmt, so ist die zugehörige Gewichtung  $v_i^* = 0$ . Damit hat die verwandte Inputvariable  $x_i^0$  ( $i \in ND$ ) keinen Einfluss auf den Effizienzwert in (65), da von ihr ohnehin mehr verfügbar wäre (Cooper et al. 2007, S.223).

Ist der Input der nicht-diskreten Variable jedoch kritisch und müsste er normalerweise proportional verändert werden, so ist ihr Slack  $s_i^{-*} = 0$ , ihre Gewichtung  $v_i^* > 0$  und sie übt damit Einfluss auf den Effizienzwert in (65) aus (Cooper et al. 2007, S.242).

Auch der Fall mit variablen Skalenerträgen kann durch Hinzufügen der bekannten Nebenbedingung  $\sum \lambda = 1$  formuliert werden (Camanho et al. 2009, S.2), ebenso wie eine Outputorientierung (Charnes et al. 1996, S.52).

Beziehung (66) stellt ein erweitertes Additives Modell aus Beziehung (41) unter Einbeziehung nicht-diskreten Faktoren dar. Auch für ein SBM Modell besteht die Möglichkeit, nicht-diskrete Faktoren in die Berechnung zu integrieren (Esmaeli 2009, S2ff), was jedoch hier nicht gezeigt wird.

Additives Modell mit nicht-diskreten Variablen:

$$\max_{s^-, s^+} \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = x_i^0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad \begin{array}{l} s_i^- \leq \beta_i \cdot x_i^0 \\ s_j^+ \leq \gamma_j \cdot y_j^0 \end{array} \quad (66)$$

Die Besonderheit dieses Modells liegt in der Möglichkeit, den Grad der Kontrollierbarkeit bestimmen zu können. Ob und in welchem Ausmaß ein Faktor als nicht-diskret behandelt werden soll, wird durch die Parameter  $\beta_i$  für die Inputs und  $\gamma_j$  für die Outputs bestimmt (Cooper et al. 2007, S.216). Dem Parameter  $\beta_i$  kann ein Wert zwischen 0 und 1 zugewiesen werden. Wird der Inputparameter auf  $\beta_i = 1$  gesetzt, gewährt dies der DMU vollkommenen Zugriff auf den zugehörigen Input  $x_i^0$ . In Gegenzug wird dieser Input als nicht-diskret behandelt bei  $\beta_i = 0$ . Analog bedeutet ein Wert  $\gamma_j = 0$  für den zugehörigen Output Nichtkontrollierbarkeit, während  $\gamma_j \rightarrow \infty$  oder das Weglassen dieses Parameters dem verwandten Output vollkommene Freiheit zusagt (Esmaeli et al. 2007, S.240).

Bei der Integrierung von a priori Wissen werden neben den bisher beschriebenen, nicht-diskreten Faktoren auch noch nicht-kontrollierbare Faktoren unterschieden. Beim modifizierten CCR-Modell aus (64) kann es vorkommen, dass einer DMU eine Referenzeinheit zugewiesen wird, welche zwar kein größeres, jedoch möglicherweise ein geringeres Niveau des fixierten Faktors aufweist. Müssen die Werte des nicht-diskreten Faktors jedoch gleichbleiben, so bezeichnet man ihn als „nicht-kontrollierbar“ (NC) (Cook & Seiford 2009, S.10). Der Wert des nicht-kontrollierbaren Faktors bleibt daher auch nach der Projektion der DMU auf den effizienten Rand konstant. Das dahingehend modifizierte CCR-Modell ist in Beziehung (67) dargestellt.

CCR-Modell mit nicht-kontrollierbaren Variablen:

$$\min_{\lambda, \Theta, s^-, s^+} \Theta^0 - \varepsilon \cdot \left( \sum_{i \in D} s_i^- + \sum_{j \in D} s_j^+ \right) \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0 \quad (i \in D)$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} = x_i^0 \quad (i \in NC)$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} - s_j^+ = y_j^0 \quad (j \in D)$$

$$\sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho} = y_j^0 \quad (j \in NC) \quad \text{mit} \quad \lambda^{\rho}, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (67)$$

Durch Hinzufügen einer weiteren Nebenbedingung  $L \leq \sum \lambda^{\rho} \leq U$  können auch verschiedene Skalenertragsniveaus angenommen werden (Cooper et al. 2007, S.219). Eine andere Erweiterung des Modells in (67) betrifft die Einführung von oberen und unteren Grenzen, in denen sich die nicht-diskrete Variable bewegen darf (Cooper et al. 2007, S.224).

#### 4.1.2. Kategorische Variablen

Im vorigen Kapitel wurde von kardinal skalierten nicht-diskreten Faktoren ausgegangen. Diese werden nur durch geeignete Nebenbedingungen im Modell berücksichtigt. Die DMU's selbst werden jedoch nicht differenziert und in verschiedene Gruppen aufgeteilt.

Liegen nicht-diskrete Faktoren in ordinaler oder nominaler Ausprägung vor, so werden sie in der Gruppe der Kategorischen Variablen zusammengefasst und es ist möglich, sie in Gruppen anzuordnen. Während die nominal skalierten Faktoren nur eine grundsätzliche Unterteilung in Gruppen zulassen, können ordinal skalierte Faktoren zusätzlich in eine Reihenfolge gebracht werden.

#### 4.1.2.1. Ordinale Ausprägung

Ein in der Literatur häufig verwendetes Beispiel für ordinal skalierte Faktoren ist die geografische Lage bei einem Vergleich der Wettbewerbssituation verschiedener Geschäfte. Die Bestimmung der Effizienz einer DMU, welche von vornherein durch ein schlechteres Umfeld benachteiligt ist, durch Vergleich mit einer grundsätzlich besser gestellten DMU wäre unfair und sollte vermieden werden. Eine DMU darf nur mit jenen verglichen werden, welche in einem ähnlichen Umfeld operieren bzw. in einem noch schlechteren (Banker & Morey 1986, S.1614).

Für die Berechnung werden nun die DMU's in Kategorien eingeteilt und diese gemäß ihrer Situation in eine Rangfolge gebracht. Dabei bezeichnet Kategorie 1 die schlechteste Ausgangssituation, welche sich mit jeder höheren Kategorie verbessert. Eine DMU in Kategorie 3 wird damit nur mit jenen DMU's der Gruppen 1 bis 3 verglichen, jedoch nicht mit jenen höherer Gruppen (Cook & Seiford 2009, S.11).

Um die Implementierung von kategorischen Variablen zu formulieren, gibt es mehrere Ansätze. Ein sehr bekanntes Modell stammt von Banker und Morey (1986, S.1615ff), welche ein gemischt ganzzahliges<sup>3</sup> lineares Programm vorschlagen. In Beziehung (68) wird für ein Additives Modell ein anderer, etwas weniger komplizierter Ansatz dargestellt, aus Cooper et al. (2004, S.22):

#### CCR-Modell mit Kategorischen Variablen / Envelopment-Form:

Kategorien:  $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \dots \cup K_L$

$$DMU_0 \in D_K \quad \text{mit} \quad K \in \{1, 2, \dots, L\}$$

$$\min_{\lambda, \Theta, s^-, s^+} \Theta^0 - \varepsilon \cdot \left( \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \right) \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = \bigcup_{k=1}^K D_k) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\rho = \bigcup_{k=1}^K D_k} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0 \quad \text{mit}$$

$$\sum_{\rho = \bigcup_{k=1}^K D_k} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^\rho, s_i^-, s_j^+ \geq 0 \quad (68)$$

<sup>3</sup> Mixed integer LP: Lineares Programm, bei welchem nicht alle unbekanntenen Variablen einen ganzzahligen oder nominalen Wert annehmen müssen.

Sollen alle DMU's in der Kategorie  $K_2$  evaluiert werden, so werden alle DMU's  $\rho = \bigcup_{k=1}^K D_k$  aus  $K_1 \cup K_2$  verwendet (Cooper et al. 2004, S.22).

In Beziehung (68) wird vorausgesetzt, dass die kategorische Variable nicht-kontrollierbar ist, weshalb sie nur zur Unterscheidung verwendet wird. Kategorische Variablen können jedoch auch in der Entscheidungsgewalt der DMU liegen, d.h. von ihr geändert werden. Ein Beispiel wären Qualitätsunterscheidungen als Kategorien. Ist eine DMU in einer schlechteren Kategorie eingeteilt und hat somit eine geringere Qualitätsbewertung, so ist es das Ziel der DMU, in den Kategorien aufzusteigen. Beim kategorischen Modell mit kontrollierbaren Variablen wird eine DMU daher nur mit ihrer eigenen Gruppe und mit den DMU's der besseren Kategorien verglichen (Cooper et al. 2007, S.229).

#### 4.1.2.2. Nominale Ausprägung

Ist die kategorische Variable nominal skaliert vorhanden (z.B. 0,1), so ist es nicht möglich, die Kategorien in eine Rangfolge zu bringen. Da weiter die Möglichkeit besteht, dass zwischen den DMU's der verschiedenen Gruppen die Konvexitätsbedingung nicht gilt, weil die kategorische Variable z.B. die Verwendung verschiedener Geräte wiedergibt, werden die verschiedenen Kategorien als getrennte Systeme betrachtet (Cooper et al. 2007, S.231).

Die betreffende DMU wird nun nicht nur mit ihrem eigenen System, sondern auch mit dem anderen verglichen. Nach Beziehung (69) errechnet sich damit für eine DMU ein Effizienzwert  $\Theta_A$  für ihr eigenes System und ein Effizienzwert  $\Theta_B$  für das „fremde“ System.

#### Vergleich von Systemen:

$$\begin{aligned}
 \min \Theta & \quad \text{so dass gilt:} \\
 \Theta \cdot x_0 & \geq X_A \cdot \lambda_A + X_B \cdot \lambda_B & L \cdot z_B & \leq e \lambda_B \leq U \cdot z_B \\
 y_0 & \leq Y_A \cdot \lambda_A + Y_B \cdot \lambda_B & L \cdot z_A & \leq e \lambda_A \leq U \cdot z_A \\
 z_A + z_B & = 1 & \text{mit der Nebenbedingung } & \lambda_A, \lambda_B \geq 0 \quad \text{und} \quad z_A, z_B = \{0,1\} & (69)
 \end{aligned}$$

$y_0 \equiv$  Vektor für die Outputs  $y_j^0$  der betrachteten DMU  $\rho = 0$

$x_0 \equiv$  Vektor für die Inputs  $x_i^0$  der betrachteten DMU  $\rho = 0$

$Y_A \equiv$  Vektor für die Outputs  $y_j^p$  aller DMU  $\rho \in A$

$X_A \equiv$  Vektor für die Inputs  $x_i^p$  aller DMU  $\rho \in B$

Durch Festlegung der Variablen  $L, U$  können verschiedene Skalenertragsannahmen getroffen werden. Danach wird Beziehung (69) in zwei Phasen gelöst. Durch Setzen der Variablen  $z_A, z_B$  auf  $z_A = 1, z_B = 0$  wird die betrachtete DMU  $(x_0, y_0)$  mit jenen des Systems A verglichen. Analog wird diese DMU bei Setzen der binären Variablen auf  $z_A = 0, z_B = 1$  mit System B verglichen. Ihr optimaler Effizienzwert ergibt sich schließlich aus Beziehung (70) (Cooper et al. 2007, S.232).

$$\Theta^* = \min \{ \Theta_A, \Theta_B \}. \quad (70)$$

Der Effizienzwert  $\Theta_A$  des eigenen Systems kann wie bisher für eine effiziente DMU nur den maximalen Wert 1 erreichen. Der Effizienzwert  $\Theta_B$  jedoch kann auch einen Wert größer als 1 erreichen, da die Möglichkeit besteht, dass diese DMU außerhalb der Umhüllende des Systems B liegt. Dieser Fall ist in Abbildung (12) für DMU A1 dargestellt. Der effiziente Rand ergibt sich unter Einbeziehung beider Systeme. Dass zwischen den beiden Systemen die Konvexitätsbedingung nicht gilt, ist an den Knick anstatt der linearen Verbindung bei den DMU's A2 und B1 zu erkennen (Cooper et al. 2007, S.232f).

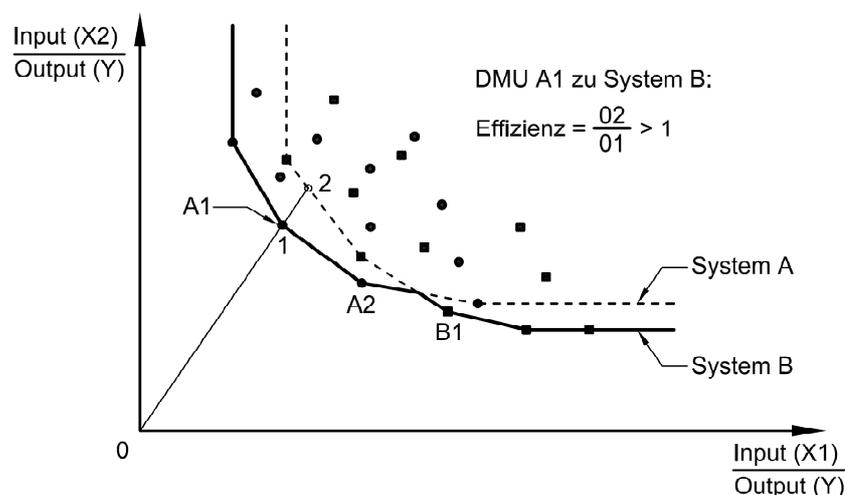


Abbildung 12: Effizienter Rand beim Vergleich zweier Systeme

Vergleicht man nun zwei Systeme miteinander, so stellt sich natürlich die Frage, ob sich die Effizienzen der beiden Gruppen statistisch gesehen überhaupt signifikant unterscheiden. Dazu wird ein sogenannter „Bilateraler Vergleich“ und ein „Rank-Sum-Test“ verwendet (Cooper et al. 2007, S.233).

Bei dem eben behandelten Vergleich von Systemen wird die betrachtete DMU nicht nur mit jenen ihrer eigenen, sondern auch mit den DMU's der anderen Gruppen verglichen. Beim Bilateralen Vergleich hingegen werden die DMU's einer Gruppe nur mit jenen der anderen Gruppen verglichen. Mit der Berechnung aus Beziehung (71) ergibt sich damit eine viel schärfere Unterscheidungsmöglichkeit der beiden Gruppen. Wie auch beim systemfremden Vergleich in Beziehung (69) ist auch hier der Effizienzwert nicht auf den Wert 1 begrenzt (Cooper et al. 2007, S.236).

#### Bilateraler Vergleich:

Systeme:  $A$  und  $B \rightarrow DMU_0 \in A$

$\min \Theta$  so dass gilt:

$$\sum_{\rho \in B} x^{\rho} \cdot \lambda^{\rho} \leq \Theta \cdot x^0$$

$$\sum_{\rho \in B} y^{\rho} \cdot \lambda^{\rho} \leq y^0 \quad \text{mit der Nebenbedingung } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (71)$$

Nachdem für alle DMU's ihr Effizienzwert nach (71) bestimmt wird, werden diese nach ihrer Größe in eine Rangfolge gebracht, beginnend beim höchsten Effizienzwert. Der Rank-Sum-Test in Beziehung (72) überprüft nun, ob diese zwei Gruppen dieselbe Verteilung haben (Cooper et al. 2007, S.234).

$$T = \frac{S - m \cdot (m + n + 1) / 2}{\sqrt{m \cdot n \cdot (m + n + 1) / 12}} \quad (72)$$

Die Variable  $m$  bzw.  $n$  ist die Anzahl der DMU's in der Gruppe A bzw. B. Die Variable  $S$  ist die Summe der Ränge der Gruppe A. Es wird also geprüft, ob A dieselbe Verteilung wie B hat. Über den Wert der Prüfgröße  $T$ , kann eine Aussage darüber gemacht werden, ob, gemessen am Signifikanzniveau  $\alpha$ , die beiden Gruppen derselben Population angehören. Als Vergleichswert dienen die Quartile der Standardnormalverteilung  $z_{\alpha}$ , welche aus einer Tabelle abgelesen werden

können. Dabei wird von der Nullhypothese ausgegangen, welche besagt, dass es keinen Unterschied der Verteilungen gibt. Gilt jedoch  $T \geq z_{\alpha}$  oder  $T \leq -z_{\alpha}$ , so wird die Nullhypothese verworfen. Dies bedeutet, dass die Effizienzen der beiden Gruppen bei dem gegebenen Signifikanzniveau nicht die gleiche Verteilung haben. Also die Effizienzen der Gruppe B jenen der Gruppe A überlegen sind (Cooper et al. 2007, S.234f).

## 4.2. Unerwünschte Outputs

In den Grundmodellen der DEA wird stets davon ausgegangen, dass bei Outputs die Regel gilt: „Je mehr, desto besser“ (Cook & Seiford 2009, S.11). Andererseits wird bei Vorhandensein eines unerwünschten Outputs (z.B. Anzahl defekter Produkte oder Emissionen) eine DMU besser gestellt, je weniger sie von diesem Output produziert (Scheel 2000, S.148). Analog dazu, wenn auch nicht so verbreitet, besteht auch bei Inputs manchmal die Notwendigkeit, einzelne zu erhöhen, um die Effizienz der DMU zu steigern (Zhu 2003, S.105).

Ein Weg, um unerwünschte Outputs ( $y_j^{\rho(B)}$ ) in der Effizienzberechnung zu berücksichtigen, ist die Multiplikation dieses Outputs mit  $(-1)$ . Durch Addition einer Konstanten werden diese wieder in den positiven Raum gebracht, so dass gilt  $\bar{y}_j^{\rho(B)} = -y_j^{\rho(B)} + v_j > 0$  (Seiford & Zhu 2002, S.18). Da die proportionale Senkung des unerwünschten Faktors betrachtet werden will, wird ein outputorientiertes BCC-Modell in Beziehung (73) verwendet. Dabei werden die erwünschten Outputs ( $y_j^{\rho(G)}$ ) erhöht und die Unerwünschten verringert.

### BCC-O / Unerwünschte Outputs / Transformiert:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\lambda, \Theta} \Theta^0 && \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\
 & \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho(G)} \geq \Theta^0 \cdot y_j^{0(G)} && j \in G \text{ (erwünschte Outputs)} \\
 & \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot \bar{y}_j^{\rho(B)} \geq \Theta^0 \cdot \bar{y}_j^{0(B)} && j \in B \text{ (unerwünschte Outputs)} \\
 & \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} \leq x_i^0 \quad \text{und} \quad \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} = 1 && \text{mit den Nebenbedingungen } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (73)
 \end{aligned}$$

Eine andere Methode verwendet den Kehrwert des unerwünschten Outputs als Outputfaktor. Bei dieser Methode ist jedoch darauf zu achten, dass alle unerwünschten Outputfaktoren bei jeder DMU vorhanden sind (Allen 2002, S.112).

Bei diesen beiden Ansätzen wird der unerwünschte Output auf der Outputseite belassen und nur „transformiert“. Daher werden diese Methoden auch unter dem Begriff „Datentransformation“ zusammengefasst (Scheel 2000, S.148). Dabei muss beachtet werden, dass die Ergebnisse mit diesen Modellen bei ihrer Interpretation zunächst wieder in den ursprünglichen Wertebereich übersetzt werden müssen (Allen 2002, S.112).

Ein anderer Weg ist die Verwendung des unerwünschten Outputs als Input in der Effizienzanalyse. Dies hat besonders dann Sinn, wenn ein inputorientiertes Modell durchgeführt werden soll. Damit können gleichzeitig die möglichen Verbesserungspotentiale der Inputs und die des unerwünschten Outputs wiedergegeben werden (Allen 2002, S.112f). Beziehung (74) beschreibt diese Methode anhand eines inputorientierten Modells unter Annahme von konstanten Skalenerträgen.

#### CCR-I / Unerwünschte Outputs / Als Inputs:

$$\begin{aligned}
 \min_{\lambda, \Theta} \Theta^0 & \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot x_i^{\rho} & \leq \Theta^0 \cdot x_i^0 \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho(B)} & \leq \Theta^0 \cdot y_j^{0(B)} \quad j \in B \text{ (unerwünschte Outputs)} \\
 \sum_{\rho=1}^{\pi} \lambda^{\rho} \cdot y_j^{\rho(G)} & \geq y_j^{0(G)} \quad j \in G \text{ (erwünschte Outputs)} \quad \text{mit } \lambda^{\rho} \geq 0 \quad (74)
 \end{aligned}$$

Wenn ein gemischter Effizienzwert, also das gemischte Verbesserungspotential der Inputs und der unerwünschten Outputs aufgrund der Aufgabenstellung nicht erwünscht ist, kann der Zielfunktionswert bei den Inputs in der ersten Bedingung der Beziehung (74) eliminiert werden. Dann werden ausschließlich die Verbesserungspotentiale der unerwünschten Outputs betrachtet (Allen 2002, S.113).

## 5. Praktische Durchführung einer DEA-Analyse

Nach der Durchführung einer DEA-Analyse kommt es in der Praxis häufig vor, dass die Qualität der Analyse nur unzureichend gegeben ist, weil die notwendige Diskriminierung der DMU's nur in einem geringen Maße erreicht wird. Dafür können zwei Hauptgründe verantwortlich gemacht werden. Entweder erreichen viele DMU's einen sehr hohen Effizienzwert, im schlimmsten Fall werden alle Einheiten als effizient eingestuft (Podinovski & Thanassoulis 2007, S.118), oder etlichen Vergleichseinheiten wird ein unglaublich niedriger Effizienzwert zugewiesen (Hammerschmidt, Wilken und Staat 2009, S.293).

Der erste Fall, ein vermehrtes Auftreten von effizienten Einheiten, tritt häufig ein, wenn nur wenige DMU's verglichen, diese jedoch mit einer größeren Anzahl von Variablen beschrieben werden. Aber auch bei ausreichend großen Versuchsreihen mit einer relativ geringen Anzahl an Variablen kann ein Problem auftreten, wenn viele DMU's sehr verschiedene Zusammensetzungen der Faktoren zeigen (Podinovski & Thanassoulis 2007, S.118). Ein anderes Extrem wird durch sogenannte Ausreißer in der Datenmenge verursacht. Die DEA ist für Ausreißer, meist verursacht durch Messfehler, sehr anfällig, weil sie den effizienten Rand derart verändern, dass andere DMU's keine Chance mehr haben (Hammerschmidt et al. 2009, S.293). Allgemein ermöglicht ein radiales Effizienzmaß, durch die direkte Ignorierung der Slacks, eine geringere Diskriminierung der Vergleichseinheiten (Podinovski & Thanassoulis 2007, S.119).

Um diesen Problemen jedoch zu begegnen, sind verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Zunächst wird der Datensatz vor der eigentlichen Analyse betrachtet, um die Qualität der DEA Analyse von vornherein zu steigern. Anschließend werden, unter anderem mit der Einführung von Gewichtungen, Kreuz-Effizienzen und dem Ansatz der Supereffizienz mehrere Methoden vorgestellt, welche die Möglichkeit bieten, die erreichten Effizienzen näher zu betrachten, effiziente DMU's weiter zu unterscheiden oder Ausreißer festzustellen. Zum Schluss wird die Effizienzmessung über einen längeren Zeitraum behandelt.

## 5.1. Behandlung der Daten vor der Analyse

Für eine adäquate Analyse muss vor allem eine genügend große Datenmenge zur Verfügung stehen, da bei der DEA die Messung der relativen Effizienz über eine Schätzung des PPS-Raums erfolgt (Hammerschmidt et al. 2009, S.304). Eine Faustregel besagt dabei, dass zumindest dreimal so viele DMU's vorhanden sein sollen wie die Summe der Inputs und Outputs (Cooper et al. 2007, S.284). Ist dies nicht der Fall, so besteht die Möglichkeit, entweder die Anzahl der DMU's zu erhöhen, oder aber die Anzahl der Faktoren zu senken. Im ersten Fall stehen, wenn überhaupt, nur wenige Möglichkeiten zur Verfügung. Dabei können nur Vergleichseinheiten wieder in die Datenmenge aufgenommen werden, welche zunächst aufgrund fehlerhafter oder fehlender Daten ausgeschlossen wurden. Fehlende Outputdaten können mit dem Wert 0 substituiert werden, Inputdaten dagegen mit einem sehr großen Wert (Podinovski & Thanassoulis 2007, S.119). Dabei muss jedoch auch beachtet werden, dass zu viele DMU's wiederum Probleme verursachen. Bei gleichbleibender Anzahl an Input- und Outputfaktoren sinkt der durchschnittliche Effizienzwert mit ansteigender Zahl der Vergleichseinheiten (Hammerschmidt et al. 2009, S.303).

Die zweite Möglichkeit besteht in der Reduktion der Input- und Outputfaktoren. Grundsätzlich sollten alle Faktoren in der Analyse verwendet werden, welche den Transformationsprozess beeinflussen. Die Input und Outputvariablen sollten zusätzlich eine gewisse positive Korrelation aufweisen. Jedoch kann eine sehr hohe Korrelation zwischen zwei Input- bzw. zwei Outputfaktoren ein Grund für den Ausschluss einer der beiden Variablen sein. Die endgültige Entscheidung, welche Input- bzw. Outputvariable aus der Analyse ausgeschlossen werden kann, wird aufgrund ihrer Beeinflussung des Effizienzwertes gefällt. Dabei wird zunächst eine Analyse mit allen relevanten Variablen durchgeführt, welche dann ausgehend von ihrer Korrelation zwischen In- und Outputs einzeln ausgeschlossen werden. Reagiert der Effizienzwert sehr sensibel bei Weglassen einer Variablen, so kann diese als sehr wichtig und einflussreich eingestuft werden (Hammerschmidt et al. 2009, S.300). Das Weglassen einer Variablen bei der Analyse ist im Grunde nichts anderes, als die Zuordnung des Wertes 0 zur zugehörigen Gewichtung bei Formulierung des virtuellen Inputs bzw. Outputs. Eine andere Vorgehensweise wäre,

diese Variable nicht aus der Analyse auszuschließen, sondern ihren Einfluss zu beschränken (Podinovski & Thanassoulis 2007, S.120).

Oft tritt auch der Fall ein, dass es unklar ist, ob ein Faktor als Input oder Output definiert werden soll. Eine triviale Lösung ist die Gegenüberstellung verschiedener Berechnungen mit unterschiedlicher Definierung eines Faktors. Weiterentwicklungen dieser Fragestellung schlagen zwei Alternativen dazu vor. Der erste Vorschlag definiert die Ausrichtung des fragwürdigen Faktors für jede einzelne DMU individuell, und zwar aufgrund der höchsten Effizienz, welche mit einer Ausrichtung erreicht werden kann. Jene Ausrichtung, bei welcher mehr DMU's die höhere Effizienz erreichen, wird für die Analyse definiert. Der zweite Vorschlag berechnet hingegen eine kumulierte Effizienz über den gesamten Datensatz, einmal mit Definierung des Faktors als Input, einmal als Output. Auch hier wird jene Ausrichtung gewählt, welche den höheren Effizienzgrad erreicht (Dyckhoff & Ahn 2009, S.6).

## **5.2. Begrenzung der Gewichtungen**

Wie in Kapitel 2.5.2. erwähnt, sind bei der Formulierung eines Effizienzmaßes bei multiplen In- und Outputs Gewichtungen für diese erforderlich. Durch den Einsatz der Data Envelopment Analyse entsteht der Vorteil, dass eine a priori Bestimmung dieser Gewichtungen (Multiplier) nicht mehr notwendig ist (Cooper et al. 2004, S.22).

Diese Flexibilität bei der Beurteilung des Einflusses von Input- bzw. Outputfaktoren bringt jedoch auch Nachteile mit sich. Da die Gewichtungen versuchen, die relative Effizienz so groß wie möglich zu gestalten, kann eine DMU bei einzelnen Multipliern extrem hohe Werte annehmen, welche vom Benutzer jedoch als relativ unwichtig eingestuft werden (Allen 2002, S.215).

Zusammenfassend umfasst der Einsatzbereich, indem die Begrenzungen der Gewichtungen angewendet werden, folgende Situationen (Cooper et al. 2004, S.22f):

- Unglaubliche Bewertung der Input- und Outputfaktoren
- Vermeidung von Informationsverlust, bei bekannten Präferenzen des Managements

- Fehlende oder schlechte Diskriminierung durch Verwendung kleiner Datensätze.

Die Begrenzung des absoluten Wertes einer Gewichtung  $P_{1i} \leq v_i \leq P_{2i}$  ist eine grundsätzlich sehr einfach zu implementierende Möglichkeit. Um die Dimensionen der Grenzen festzustellen, wird zu Beginn die Analyse unbegrenzt durchgeführt (Cook & Seiford 2009, S.8).

Anstatt die absoluten Werte der Gewichtungen zu begrenzen, ist es auch möglich, ihr Verhältnis gegeneinander einzuschränken (Allen 2002, S.218). Wie in Beziehung (75) dargestellt, definiert man, um wie viel ein Faktor dem Management wichtiger ist als ein zweiter. Dieses Modell wird auch „Assurance Region“ (AR-Modell) genannt (Cooper et al. 2007, S.178).

$$L_{1,2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq U_{1,2} \quad \text{mit} \quad 0 < L_{1,2} < U_{1,2} \quad (75)$$

Durch Umformen der Beziehung in  $L_{1,2} \cdot v_1 \leq v_2$  und  $v_2 \leq U_{1,2} \cdot v_1$  sieht man, dass keine der beiden Multiplier  $v_1, v_2$  den Wert 0 annehmen können, wenn Beziehung (75) erfüllt sein muss (Ray 2004, S.160f). Aufgrund der Complementary-Slackness-Beziehung aus Kapitel 3.1.1. wird eine DMU dann als effizient nach dem AR-Modell bezeichnet, wenn ihr Zielfunktionswert  $\Theta^* = 1$  und ihre Slacks  $s_i^-, s_j^+ = 0$  sind (Cooper et al. 2007, S.180).

Der Effizienzwert des CCR-Modells wird durch die Einführung von Begrenzungen grundsätzlich verschlechtert (Cooper et al. 2007, S.178) und es gilt somit  $\Theta_{AR}^* \leq \Theta_{CCR}^*$ . Dies resultiert aus der Änderung des effizienten Randes, welcher von den Restriktionen „aufgebogen“ wird (Cook & Seiford 2009, S.3, 8). Abbildung (13) zeigt den effizienten Rand bei einem Fall mit zwei Inputs und einen Output, welcher in Abbildung (7) verwendet wurde, nachdem die Gewichtungen der Inputs mit

$$L_{1,2} = 0,5 \leq \frac{v_2}{v_1} \leq U_{1,2} = 1 \text{ begrenzt wurden.}$$

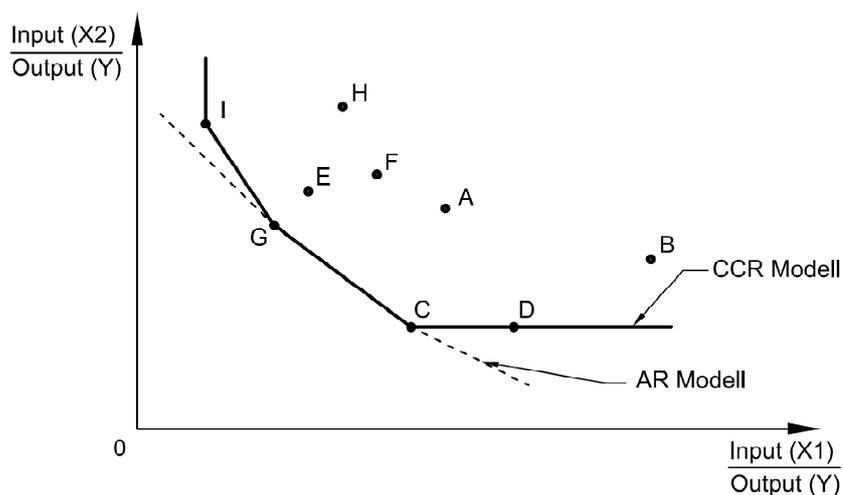


Abbildung 13: Effizienter Rand beim Assurance Region Modell

Bei einer Erweiterung des AR-Modells wird ein gewichteter Inputwert dem gesamten virtuellen Input, also der Summe aller gewichteten Inputs gegenüber gestellt (Allen 2002, S.218). Dieses sehr einfach zu verwendende Modell wird auch das „Globale Assurance Region“ Modell (ARG-Modell) genannt (Cooper et al. 2007, S.185) und wird in Beziehung (76) dargestellt.

$$L_i \leq \frac{v_i \cdot x_i^0}{\sum_{\rho=1}^{\pi} v_i \cdot x_i^{\rho}} \leq U_i \quad (76)$$

Anders als beim AR-Modell gelten beim ARG-Modell Nebenbedingungen für die Grenzen  $\sum L_i \leq 1$  und  $\sum U_i \geq 1$  falls alle Inputs Restriktionen unterliegen (Cooper et al. 2007, S.185).

Ein anderer Ansatz, die Grenzen des Verhältnisses der virtuellen Gewichtungen zu definieren, liefert die „Cone-Ratio Methode“ (CR-Modell) (Ray 2004, S.166). Wie der Name schon andeutet, werden bei dieser Methode die Möglichkeiten der verschiedenen Multiplier durch einen Kegel beschränkt (Cooper et al. 2007, S186). Abbildung (14) zeigt einen solchen Kegel bei der Verwendung von nur zwei Inputs.

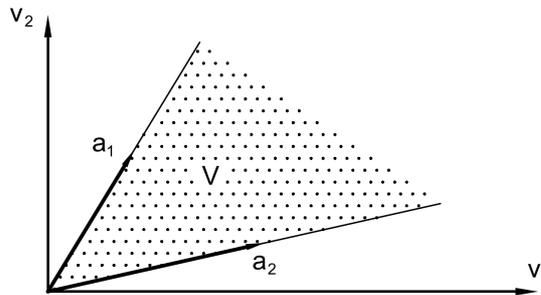


Abbildung 14: Begrenzung der Multiplier beim Cone-Ratio Modell

Der Input-Multiplier-Vektor  $v = (v_1, v_2, \dots, v_i)$  muss nun innerhalb dieses Kegels  $V$  liegen, welcher im zweidimensionalen Fall von den beiden Vektoren  $a_1, a_2$  beschränkt wird. Werden auch die Outputs beschränkt, so wird auch für sie ein Kegel  $U$  definiert (Cook & Seiford 2009, S.8).

Bei Verwendung des CCR-Modells werden zur Implementierung in der Multiplier-Form der Beziehung (19) die beiden Nebenbedingungen  $v_i u_j \geq 0$  durch  $v_i \in V$  und  $u_j \in U$  ersetzt (Cooper et al. 2007, S.187). Werden diese abgeschlossenen konvexen Kegel  $V$  und  $U$  auf den gesamten Quadranten in Abbildung (14) ausgedehnt, ergibt sich wieder ein normales CCR-Modell (Charnes, Cooper, Huang und Sun 1990, S.77). Im zweidimensionalen Raum, also bei Definition von nur zwei Vektoren, entspricht die Formulierung jener des AR-Modells. Daher wird das AR Modell auch als Spezialfall des Cone-Ratio-Modells gesehen (Cooper et al. 2007, S.187).

Die mathematische Formulierung der konvexen Kegeln  $V$  und  $U$  lauten  $V = A^T \cdot \alpha$  und  $U = B^T \cdot \beta$  mit  $A^T = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  und  $B^T = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ . Durch Umformulierung der Multiplier-Form aus (19) unter Verwendung der Vektoren  $\alpha$  bzw.  $\beta$  und Transformation in die Envelopment-Form, ergibt sich das bekannte „normale“ CCR-Modell mit nunmehr transformierten Variablen der Form  $\bar{X} = A \cdot X$  und  $\bar{Y} = B \cdot Y$  (Charnes et al. 1990, S.79). Zur Verwendung einer Beschränkung im Sinn des Cone-Ratio Ansatzes ist also kein erweitertes Modell notwendig, sondern nur die Transformation der Variablen, welche in Beziehung (77) exemplarisch für den zweidimensionalen Fall gezeigt wird (Cooper et al. 2007, S.189).

$$\begin{aligned} a_1^T &= (1, 0.5) \\ a_2^T &= (1, 2) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{X} \quad (77)$$

Ein üblicher Weg, die Werte der Vektoren  $a_k, b_l$  zu bestimmen, ist die Durchführung eines unbeschränkten Modells, bei welchem eine DMU gewählt wird, welche realistisch erscheinende Gewichtungen der Variablen aufweist. Die optimalen Multiplier dieser DMU werden dann verwendet, um den beschränkenden konvexen Kegel zu definieren (Allen 2002, S.221).

Ist die Gewichtung der Variablen nicht möglich, so besteht mit der Berechnung der Kreuz-Effizienten die Möglichkeit, den Effizienzwert einer DMU genauer zu untersuchen.

### 5.3. Kreuz-Effizienz

Wie im vorigen Kapitel erläutert, können DMU's bei einigen Multipliern extreme Werte annehmen und dadurch einen unrealistisch hohen Effizienzwert erreichen. Das heißt, dass ihre Gesamtperformance eigentlich als viel schlechter, im Gegensatz zu ihren Vergleichseinheiten, einzustufen ist (Baker & Talluri 1997, S.103). Die Methode der Kreuz-Effizienz bietet in diesem Fall gewisse Vorteile, weil sie zwischen „guten“ und „schlechten“ Vergleichseinheiten unterscheiden kann, ohne die benutzerdefinierte Beschränkung von Gewichtungen (Wu, Liang und Yang 2009, S.872).

Die Methode der Kreuz-Effizienzen in Beziehung (78) betrachtet dabei die Auswirkungen auf den Effizienzwert, wenn die betrachtete DMU nicht ihre eigenen, sondern die optimalen Gewichtungen der anderen DMU's verwendet (Baker & Talluri 1997, S.104).

$$\text{Kreuz-Effizienz} \quad E_{d,\rho} = \frac{\sum_{j=1}^m u_j^{d*} \cdot y_j^\rho}{\sum_{i=1}^n v_i^{d*} \cdot x_i^\rho} \quad \text{mit DMU's } d, \rho = (1, 2, \dots, \pi) \quad (78)$$

Die gewonnenen Effizienzwerte werden in die Matrix in Abbildung (15) eingetragen und ein durchschnittlicher Effizienzwert  $\bar{E}_\rho$  gebildet, welcher als neues Effizienzmaß verwendet werden kann (Wu et al. 2009, S.873). Je höher dieser Durchschnittswert, desto besser kann diese DMU eingeschätzt werden. Ein niedriger Effizienzwert dagegen deutet jedoch darauf hin, dass jene DMU nur sehr schlecht mit anderen verglichen werden kann, was darauf hinweist, dass diese ihre zur Verfügung stehende Faktoren sehr extrem einsetzt (Homburg 2001, S.56).

$DMU_{d,\rho}$	1	2	3	...	$\pi$
1	$E_{11}$	$E_{12}$	$E_{13}$	...	$E_{1\pi}$
2	$E_{21}$	$E_{22}$	$E_{23}$	...	$E_{2\pi}$
3	$E_{31}$	$E_{32}$	$E_{33}$	...	$E_{3\pi}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\pi$	$E_{\pi 1}$	$E_{\pi 2}$	$E_{\pi 3}$	...	$E_{\pi \pi}$
Durchschnitt	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$		$\bar{E}_\pi$

Abbildung 15: Kreuz-Effizienz Matrix

Bei Verwendung dieser Methode zur Ausreißeridentifikation kann der sogenannte Maverick-Index aus Beziehung (79) angewendet werden, dabei ist  $\Theta_\rho^*$  der Effizienzwert des CCR-Modells. Ergibt dieser einen Wert größer als 1, so kann von einem Ausreißer ausgegangen werden (Hammerschmidt et al. 2009, S.294f).

$$M_\rho = \frac{\Theta_\rho^* - \bar{E}_\rho}{\bar{E}_\rho} \quad \text{mit DMU's } \rho = (1, 2, \dots, \pi) \quad (79)$$

Ein Problem bei der Verwendung von Kreuz-Effizienzen als Effizienzmaß ist das mögliche Vorhandensein von mehreren optimalen Lösungen für die Multiplier (Cook & Seiford 2009, S.6). Um dieses Problem zu umgehen kann eine sogenannte „Aggressive Formulierung“ (Baker & Talluri 1997, S.104) des CCR-Modells, wie in Beziehung (80), zusätzlich zu diesem verwendet werden.

CCR-I / Multiplier-Form / Aggressive Formulierung:

$$\min_{u,v} \left( \sum_{j=1}^m u_j \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^m y_j^\rho \right) \quad \text{mit } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ so dass gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^n \left( v_i \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 0}}^n x_i^\rho \right) = 1$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^{\rho(\rho \neq 0)} - \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^{\rho(\rho \neq 0)} \leq 0 \quad \text{und}$$

$$\sum_{j=1}^m u_j \cdot y_j^0 - \Theta^0 \cdot \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^0 = 0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \begin{array}{ll} u_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \\ v_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{array} \quad (80)$$

Der Wert  $\Theta^0$  ist der „normale“ Effizienzwert, wie er mittels Beziehung (19) errechnet werden kann. Mithilfe dieser Beziehung wird also nicht der Effizienzwert der betrachteten DMU durch Beziehung (19) maximiert, sondern es wird auch mit Beziehung (80) die Effizienz einer kumulierten Vergleichseinheit minimiert. Diese kumulierte Vergleichseinheit setzt sich aus allen DMU's außer der betrachteten zusammen, indem man die jeweiligen In- und Outputs aufsummiert. Die optimalen Gewichtungen, welche mit dieser Formulierung bestimmt werden, maximieren demnach nicht nur die Effizienz der betrachteten DMU, sondern minimieren gleichzeitig die Effizienz aller anderen (Baker & Talluri 1997, S.104f).

Neuere Entwicklungen lösen das Problem von mehreren optimalen Lösungen der Multiplier durch Anwendung der Spieltheorie. Diese Methode wird auch „Ultimative Kreuz-Effizienz“ genannt (Wu et al. 2009, S.873f).

## 5.4. Supereffizienz

Mit der Einführung von Gewichtungen und der Methode der Kreuzeffizienzen wurden Ansätze bereitgestellt, welche es ermöglichen, auf das Problem einer extremen Ausbildung der Multiplier zu reagieren. Auch können diese Methoden zur weiteren Diskriminierung der DMU's herangezogen werden, wenn sehr viele DMU's einen hohen Effizienzwert erreichen.

Eine weitere Methode, effiziente Einheiten zusätzlich zu unterscheiden, bietet das „Super-Effizienz“ Modell. Dabei wird dasselbe Prinzip angewendet, wie bei der Bestimmung der Effizienz einer ineffizienten DMU bei den bisher vorgestellten Basismodellen, und zwar das Verbesserungspotential als Abstand der betrachteten DMU auf die Umhüllende. Auch bei der Methode der Super-Effizienz wird durch den Abstand der DMU auf den effizienten Rand auf ihr „Potential“ geschlossen (Scheel 2000, S.111f). Jedoch wird bei der Konstruktion des effizienten Randes die betrachtete DMU aus der Technologiemenge eliminiert. Handelt es sich bei dieser DMU um eine ineffiziente Einheit, so wird durch ihren Ausschluss der effiziente Rand nicht verändert. Ist sie jedoch Bestand der Umhüllenden, so ergibt sich ein anderer effizienter Rand, zu welchem der Abstand der betrachteten DMU als Maß für ihre Super-Effizienz definiert wird (Hammerschmidt et al. 2009, S.295).

Die Veränderung des effizienten Randes ist in Abbildung (16) dargestellt. Geht man von einem radialen Effizienzmaß aus, so gibt das Super-Effizienzmaß die proportionale Änderungsmöglichkeit der Inputs an, damit die DMU noch immer am effizienten Rand wäre. Diese DMU könnte also ihre Inputs im ausgewiesenen Maß proportional erhöhen und würde trotzdem noch zur Konstruktion des PPS-Raums herangezogen, wäre also noch als effizient einzustufen (Scheel 2000, S.112).

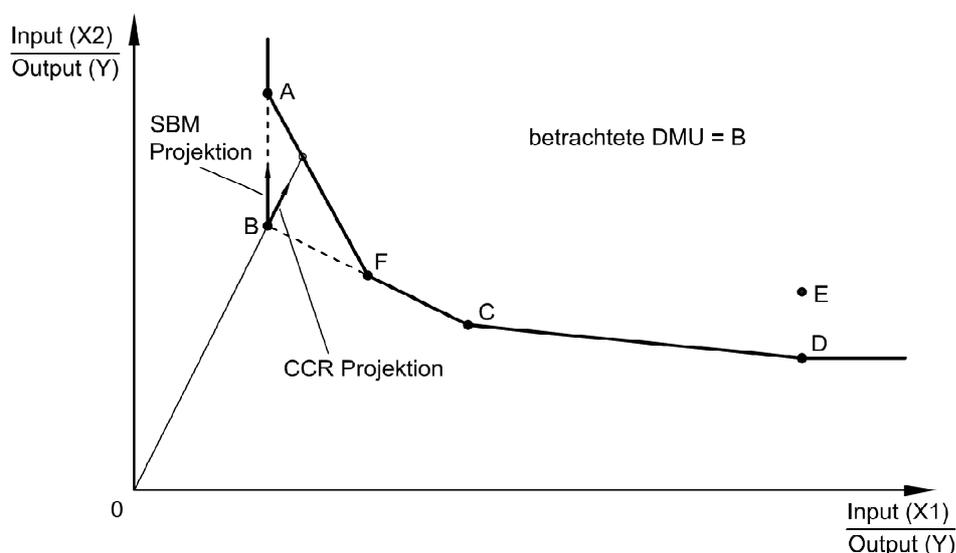


Abbildung 16: Effizienzberechnung beim Super-Effizienz Modell

Das Supereffizienzmaß zeigt also, um wie viel sich eine DMU in seinen Inputs „verschlechtern“ dürfte, ohne im Vergleich zu allen anderen gleich ineffizient zu

werden. Besitzt eine DMU dieses Potential, so wird sie Supereffizient genannt. Je höher dieses Potential ist, desto besser ist ihre Effizienz zu werten (Ray 2004, S.95). Beziehung (81) zeigt die Berechnung eines radialen inputorientierten Super-Effizienz Modells mit konstanten Skalenerträgen.

#### CCR-I / Super-Effizienz Modell:

$$\Theta_{SUPER}^* = \min_{\lambda, \Theta, s^-, s^+} \Theta^0 - \varepsilon \cdot \left( \sum_{i=1}^n s_i^- + \sum_{j=1}^m s_j^+ \right) \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq 0}}^{\pi} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho + s_i^- = \Theta^0 \cdot x_i^0$$

$$\sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq 0}}^{\pi} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho - s_j^+ = y_j^0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \lambda^\rho, s^-, s^+ \geq 0 \quad (81)$$

Das Super-Effizienz Modell kann auch als Additives bzw. als Slack-based Modell formuliert werden. Diese können orientiert oder unorientiert angeschrieben werden (Cooper et al. 2007, S.313ff). Beziehung (82) zeigt als Beispiel ein inputorientiertes SBM Modell.

#### SBM-I / Super-Effizienz Modell:

$$\Theta_{Input}^* = \min_{\lambda, s^-} \left( 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{s_i^-}{x_i^0} \right) \quad \text{so dass für alle DMU's } (\rho = 1, \dots, \pi) \text{ gilt:}$$

$$\sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq 0}}^{\pi} \lambda^\rho \cdot x_i^\rho + s_i^- = x_i^0$$

$$\sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq 0}}^{\pi} \lambda^\rho \cdot y_j^\rho \geq y_j^0 \quad \text{mit den Nebenbedingungen} \quad \lambda^\rho, s^- \geq 0 \quad (82)$$

Ein Problem welches bei diesem Modell auftreten kann, ist die sogenannte „Nicht-Durchführbarkeit“ der Berechnung des Effizienzwertes bei bestimmten DMU's. Abbildung (17) zeigt dies am Beispiel eines Single-Input / Single-Output Falls (Zhu 2003, S.204).

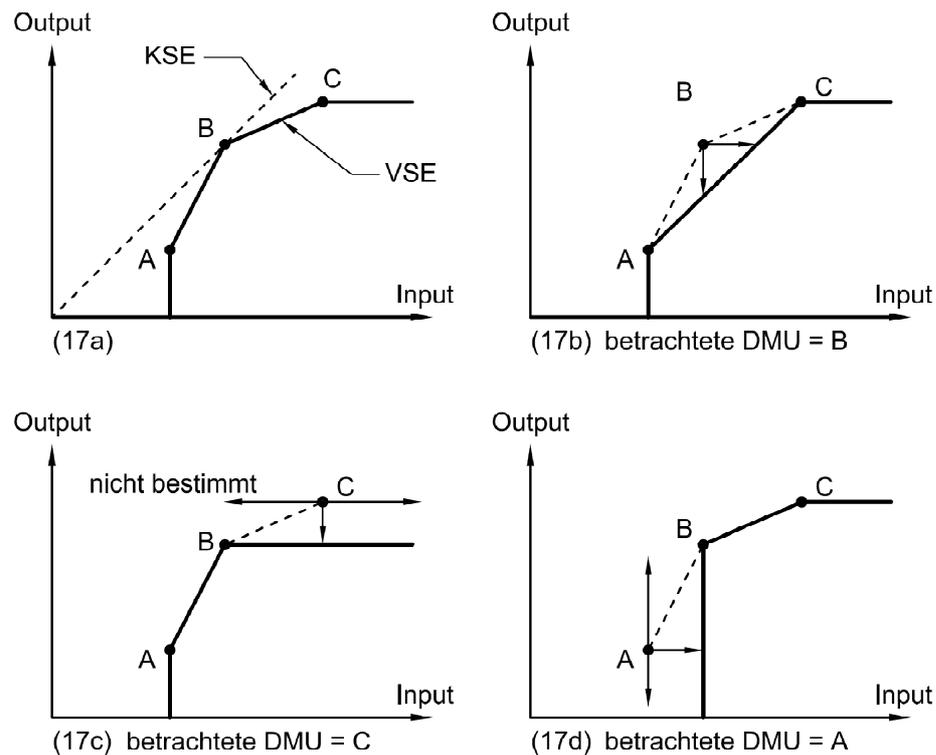


Abbildung 17: Nichtbestimmtheit beim Super-Effizienz Modell

Der PPS-Raum in Abbildung (17a) ergibt sich unter Annahme variabler Skalenerträge. Bei der Betrachtung der DMU B (17b) ergeben sich bei beiden Orientierungen keine Probleme. Soll die Supereffizienz von DMU C (17c) bewertet werden, so kann sie Outputorientiert ihren Output bis auf den Wert von DMU B senken. Sie wäre zwar dann nur mehr schwach, aber immer noch effizient. Inputorientiert gibt es jedoch keine Vergleichseinheit. Damit würde die Effizienz der DMU C beim inputorientierten Super-Effizienz Modell unter variablen Skalenerträgen nicht berechenbar sein. Dasselbe gilt für DMU A (17d) beim outputorientierten Modell.

Diese „Nicht-Bestimmbarkeit“ kann sich nicht nur bei den radialen Super-Effizienzmodellen unter Annahme variabler Skalenerträge ergeben, sondern auch bei den nicht-radialen Super-SBM Modell beider Orientierungen. Nur das unorientierte Super-SBM Modell hat auch unter variablen Skalenerträgen immer eindeutige Lösungen (Cooper et al. 2007, S.321).

Das Modell der Super-Effizienz bietet verschiedene Möglichkeiten zur Anwendung. Einerseits kann es zur Reihung von DMU's verwendet werden, wenn sehr viele

Vergleichseinheiten als effizient ausgewiesen werden, z.B. bei einem geringen Datensatz (Cook & Seiford 2009, S.12). Das Modell kann damit jedoch auch zur Ausreißeridentifikation verwendet werden. Je höher der Supereffizienzwert, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der betrachteten DMU um einen Ausreißer handelt. Diese Methode ist jedoch eher umstritten, da es schwierig ist einen geeigneten Grenzwert zu definieren (Hammerschmidt et al. 2009, S.295).

Eine weitere wichtige Anwendung des Supereffizienz-Modells ist seine Verwendung als Instrument der Sensitivitätsanalyse der Input- und Outputfaktoren. Eine Sensitivitätsanalyse wird dann erforderlich, wenn angenommen werden kann, dass Fehler im Datensatz auftreten können. Würden sich diese Daten ändern, so würde sich zwangsläufig auch die Umhüllende, und damit alle Effizienzwerte ändern. Der effiziente Rand wird daher nur dann als stabil bezeichnet, wenn er sich auch bei Veränderung der Daten nicht verändert. Eine Erweiterung des Modells in (81) behandelt dabei den Fall, wie stabil die Effizienz der betrachteten DMU einzuschätzen ist, wenn alle Inputs bzw. Outputs der anderen DMU's gesteigert bzw. gesenkt werden. Auch hier gilt wieder, je höher der Supereffizienzwert einer DMU, desto stabiler ist sie (Zhu 2001, S.443ff).

## **5.5. Effizienzänderung über die Zeit**

Eine der Grundannahmen der DEA geht davon aus, dass alle DMU's von einer einheitlichen Technik ausgehen. Dies impliziert, dass von einem abgeschlossenen Zeitraum ausgegangen wird, da ansonsten die Homogenität der Daten aufgrund des technischen Fortschritts nicht mehr gegeben ist (Siemens 2005, S.28). Um auch die Effizienzänderung über die Zeit bestimmen zu können, stehen mit der „Windows Analyse“ (Charnes et al. 1996, S.57) und dem „Malmquist Produktivitätsindex“ (Tone 2004, S.203) zwei Methoden zur Verfügung.

Die Windows Analyse kann eingesetzt werden, wenn für eine DMU Daten aus fortlaufenden Zeiträumen vorhanden sind. Dabei wird die Datenmenge eines Zeitraums als eigenständige DMU definiert. Damit erhält man für eine DMU welche über 5 Jahre gemessen wurde 5 eigenständige Vergleichseinheiten (Cooper et al. 2004, S.24). Abbildung (18) zeigt exemplarisch die Wirkungsweise dieser Analyse.

<i>DMU</i>	<i>Year 1</i>	<i>Year 2</i>	<i>Year 3</i>	<i>Year 4</i>	<i>Year 5</i>
<i>DMU A</i>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 1</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 2</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 2</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 3</sub>	⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 4</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 4</sub>	⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 5</sub>
<i>DMU B</i>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 1</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 2</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 2</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 3</sub>	⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 4</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 4</sub>	⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 5</sub>
<i>DMU C</i>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 1</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 2</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 2</sub>	⊖ <sup>Window 1</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 3</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 3</sub>	⊖ <sup>Window 2</sup> <sub>year 4</sub> ⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 4</sub>	⊖ <sup>Window 3</sup> <sub>year 5</sub>

Abbildung 18: Windows Analyse

In Abbildung (18) wurde ein Fenster von 3 Jahren gewählt. Im ersten Durchgang (Fenster) werden also von den DMU's A, B und C die Daten der ersten 3 Jahre (DMU's  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ ) in die Analyse eingebracht. Im nächsten Jahr wird das Fenster um ein Jahr weiter verschoben, und es werden alle eigenständigen DMU's der Jahre 2-4 verwendet. Es werden also insgesamt 3 Analysen mit jeweils 9 DMU's durchgeführt.

Zur Interpretation der Ergebnisse werden die Veränderungen der Werte einer DMU (A, B oder C) betrachtet. Dabei lassen die Werte in den Spalten der Jahre Rückschlüsse auf die Stabilität zu, während die Zeilen das Verhalten (Trend) einer DMU anzeigt (Cooper et al. 2007, S.326). Für einen besseren Vergleich können mithilfe der Varianzanalyse und der Bildung eines Mittelwerts die zeitliche Entwicklung der Effizienz besser veranschaulicht werden (Allen 2002, S.204).

Eine weitere Methode zur Berechnung der zeitlichen Effizienzänderung bietet der Malmquist-Index. Er berechnet die Produktivitätsänderung einer DMU zwischen zwei Perioden. Dabei werden zwei verschiedene Veränderungen betrachtet. Einerseits der „Catch-up“ Effekt, also die Effizienzänderung der DMU<sub>0</sub> zu ihrem jeweiligen effizienten Rand in dieser Periode, andererseits die Verschiebung der Umhüllenden an sich (Cooper et al. 2007, S.328). Abbildung (19) veranschaulicht das Prinzip bei Inputorientierung.

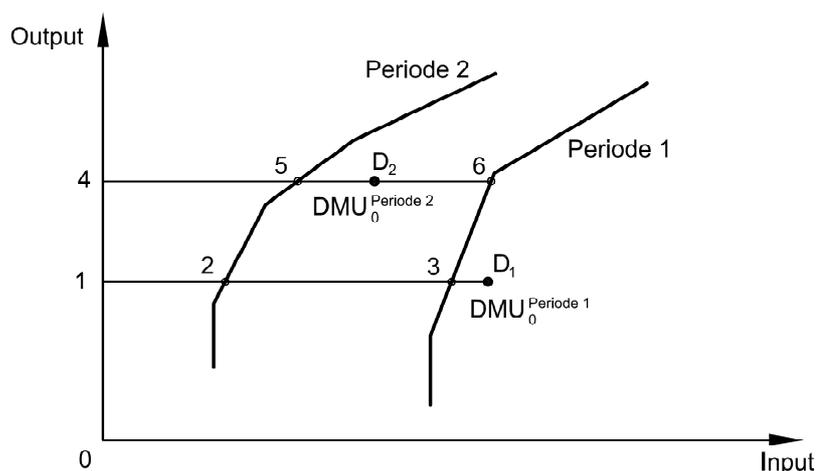


Abbildung 19: Effizienzberechnung mit dem Malmquist-Index

Beziehung (83) beschreibt den Catch-up Effekt, welcher das Verhältnis der Effizienzwert der betrachteten DMU in den jeweiligen Perioden.

$$\text{Catch-up} = \frac{\Theta_{D_2}^{\text{Periode 2}}}{\Theta_{D_1}^{\text{Periode 1}}} = \frac{45 / 4D_2}{13 / 1D_1} \quad (83)$$

Beziehungen (84) beschreiben die zeitlichen Veränderungen der Umhüllenden. Dabei behandelt die Variable  $\varphi_1$  die Verschiebung auf Höhe der  $DMU_0^{\text{Periode 1}}$  und  $\varphi_2$  jene auf Höhe der  $DMU_0^{\text{Periode 2}}$ .

$$\varphi_1 = \frac{\Theta_{D_1}^{\text{Periode 1}}}{\Theta_{D_1}^{\text{Periode 2}}} = \frac{13 / 1D_1}{12 / 1D_1} = \frac{13}{12}$$

$$\varphi_2 = \frac{\Theta_{D_2}^{\text{Periode 1}}}{\Theta_{D_2}^{\text{Periode 2}}} = \frac{46 / 4D_2}{45 / 4D_2} = \frac{46}{45}$$

$$\text{Verschiebung } \varphi_{\text{Gesamt}} = \sqrt{\varphi_1 \cdot \varphi_2} \quad (84)$$

Der Malmquist-Index (MI), Beziehung (85), definiert sich dann aus dem Produkt der beiden Veränderungen.

$$\text{Malmquist Index} = \text{Catch-up} \times \text{Verschiebung}$$

bzw.

$$MI^2 = \frac{\Theta_{D_2}^{\text{Periode 1}}}{\Theta_{D_1}^{\text{Periode 1}}} \times \frac{\Theta_{D_2}^{\text{Periode 2}}}{\Theta_{D_1}^{\text{Periode 2}}} \quad (85)$$

Durch Anschreiben der Effizienzen in (85) ergibt sich  $MI^2$  damit aus dem Produkt der Effizienzänderung gemessen an der Technologie der Periode 1, und der Effizienzänderung gemessen an Periode 2. Eine positive Entwicklung der Produktivität ist durch einen Wert  $MI > 1$  gegeben. Während  $MI = 1$  keine Veränderung bedeutet, weist  $MI < 1$  hingegen auf eine Verschlechterung der Produktivität hin. Die Berechnung des Malmquist Index über den effizienten Rand einer DEA Analyse kann entweder als radiales oder auch nicht-radiales Modell formuliert werden (Cooper et al. 2007, S.329ff)

## 6. Abgrenzung der DEA

Die Data Envelopment Analyse ist, wie in der Einleitung schon erwähnt, eine Methode zur relativen Effizienzmessung. Da für sie kein formaler Zusammenhang des Produktionsprozesses erforderlich ist, wird sie zu den Modellen der nicht-parametrischen Verfahren der Effizienzmessung gezählt. Die Konstruktion eines Technologieraumes, mithilfe weniger Grundannahmen über die Technischeigenschaften der Produktion, ermöglicht dem Verfahren nicht nur effiziente Produktionen zu identifizieren, sondern auch ein Maß für die Ineffizienz schlechterer Vergleichseinheiten bereitzustellen.

Der größte Kritikpunkt an der DEA entsteht eigentlich durch ihren größten Vorteil, nämlich dem Wegfall von Präferenzinformationen bei der Definierung der virtuellen Produktivität im mehrdimensionalen Fall. Gerade durch diese Flexibilität wird jedoch eine unglaubliche Bewertung der Vergleichseinheit ermöglicht (Dyckhoff & Allen 1999, S.431). Eine Möglichkeit diesem Kritikpunkt zu begegnen ist die Einführung von Gewichtungen der Multiplier, welche in Kapitel 5.2. erläutert wurden.

Mit dem Erlauben von Präferenzinformation zur Gewichtung ergeben sich jedoch wieder andere Probleme. Das offensichtlichste ist die adäquate Festlegung der Grenzen. Obwohl die absolute Gewichtung am einfachsten erscheint ist die Festlegung der Grenzen sehr schwierig. Die Beschränkung eines Verhältnisses zwischen zwei Faktoren (AR-Modell) kann möglicherweise nicht alle Nullwerte aufheben, und die Beschränkung der virtuellen In- und/oder Outputs (ARG-Modell) kann zu Nicht-Bestimmtheit führen (Dyson, Allen, Camanho, Podinovski, Sarrico und Shale 2001, S.254ff).

Eine Alternative zur DEA ist das sogenannte „Multi Criteria Decision Making“ (MCDM). Dies ist ein Sammelbegriff für verschiedene Verfahren welche für verschiedene Entscheidungssituationen verwendet werden können. Diese können grundsätzlich zwischen den „Multi Attribute-“ (MADM) und „Multi Objective“ Decision Making (MODM) unterschieden werden, welche Entscheidungssituationen mit einer endlichen bzw. unendlichen Anzahl von Alternativen behandeln (Allen 2002, S.59ff).

Zu den MADM gehört zum Beispiel auch die Dominanzanalyse, dessen Dominanzbegriff<sup>4</sup> jener DEA-Effizienzdefinition nach Pareto-Koopman sehr ähnlich ist. Aber auch mit der Einführung von Beschränkungen der Multiplier in DEA Analysen ergeben sich gewisse strukturelle Ähnlichkeiten mit dem MCDM (Allen 2002, S.187). Daher wurde die Data Envelopment Analysis meist nur als Verfahren des MCDM angesehen. Sie wird jedoch zunehmend als eine eigene Methode angesehen, da sie andere Ansätze als die Verfahren des MCDM verfolgt (Dyckhoff & Allen 1999, S.413). Aufgrund der Gemeinsamkeiten der beiden Methoden, wird jedoch immer häufiger versucht diese zu kombinieren (Allen 2002, S.189).

Der grundlegendste Unterschied ist, dass die MCDM Verfahren, wie der Namen schon sagt, zur ex-ante Entscheidungsfindung gedacht sind. Die DEA stellt zwar auch mit ihren Ergebnissen eine Grundlage für weiterführende Entscheidungen bereit, ist jedoch eine ex-post Analyse, bei der die Effizienz von bereits durchgeführten Alternativen bewertet wird. Ein weiterer Unterschied liegt im Schwerpunkt der beiden Analysen. Während das MCDM versucht die beste Alternative zu zeigen, richtet sich die DEA nicht nur auf die Identifikation der effizienten Einheiten, sondern vor allem auch auf die Beschreibung der Verbesserungsmöglichkeiten bei Ineffizienz. Weitere Unterscheidungsmerkmale sind die Notwendigkeiten von a priori Informationen beim MCDM oder die Anforderung einer vergleichsweise größeren Datenmenge bei der DEA Analyse (Allen 2002, S.187f).

---

<sup>4</sup> Ein Prozess wird als nicht dominiert (ergo effizient) bezeichnet, wenn kein anderer Prozess mit demselben Input einen höheren Output produziert bzw. bei gleichem Output weniger Input benötigt (Allen 2002, S.33).

## **7. Fallstudie**

### **7.1. Einleitung**

Die Fallstudie wurde in Zusammenarbeit mit einem großen deutschen Ingenieurbüro durchgeführt. Ziel dieser Studie ist der Vergleich verschiedener Projekte im Bereich des Anlagenbaus. Dabei wird nicht die gesamte Lebensdauer der Projekte betrachtet, sondern nur der eigentliche Bauabschnitt. Speziell behandeln diese Projekte die Montage von Inneneinbauteilen bei Reaktoren, welche bei diversen Raffinerien in ganz Europa durchgeführt wurden.

Es werden hierbei Projekte von zwei verschiedenen Niederlassungen, einer österreichischen und einer deutschen, verglichen.

### **7.2. Projektbeschreibung**

Ein Reaktor ist ein Teil einer Anlage zur Raffinierung von Rohöl, wobei bei hohen Temperaturen ein chemischer Prozess (das Hydrofining) abläuft. Dabei werden durch die Reaktion mit Wasserstoff diverse Schwefelverbindungen aus den verschiedenen Rohölen entfernt, welche nach der fraktionellen Destillation anfallen (Mineralölwirtschaftsverband 2003, S.29ff).

Die Bauweise eines Reaktors ist stets dieselbe. Er ist vereinfacht ausgedrückt eine Kolonne mit nur zwei Hauptstützen (am Kopf und im Sumpf der Kolonne) in dem einer oder mehrere Böden eingebaut werden, auf denen die Katalysatoren liegen. Der genaue Aufbau des Reaktors wird anhand der nachstehenden Skizze - Abbildung (20) - erläutert, um die erforderlichen Arbeitsschritte im weiteren Verlauf definieren zu können.

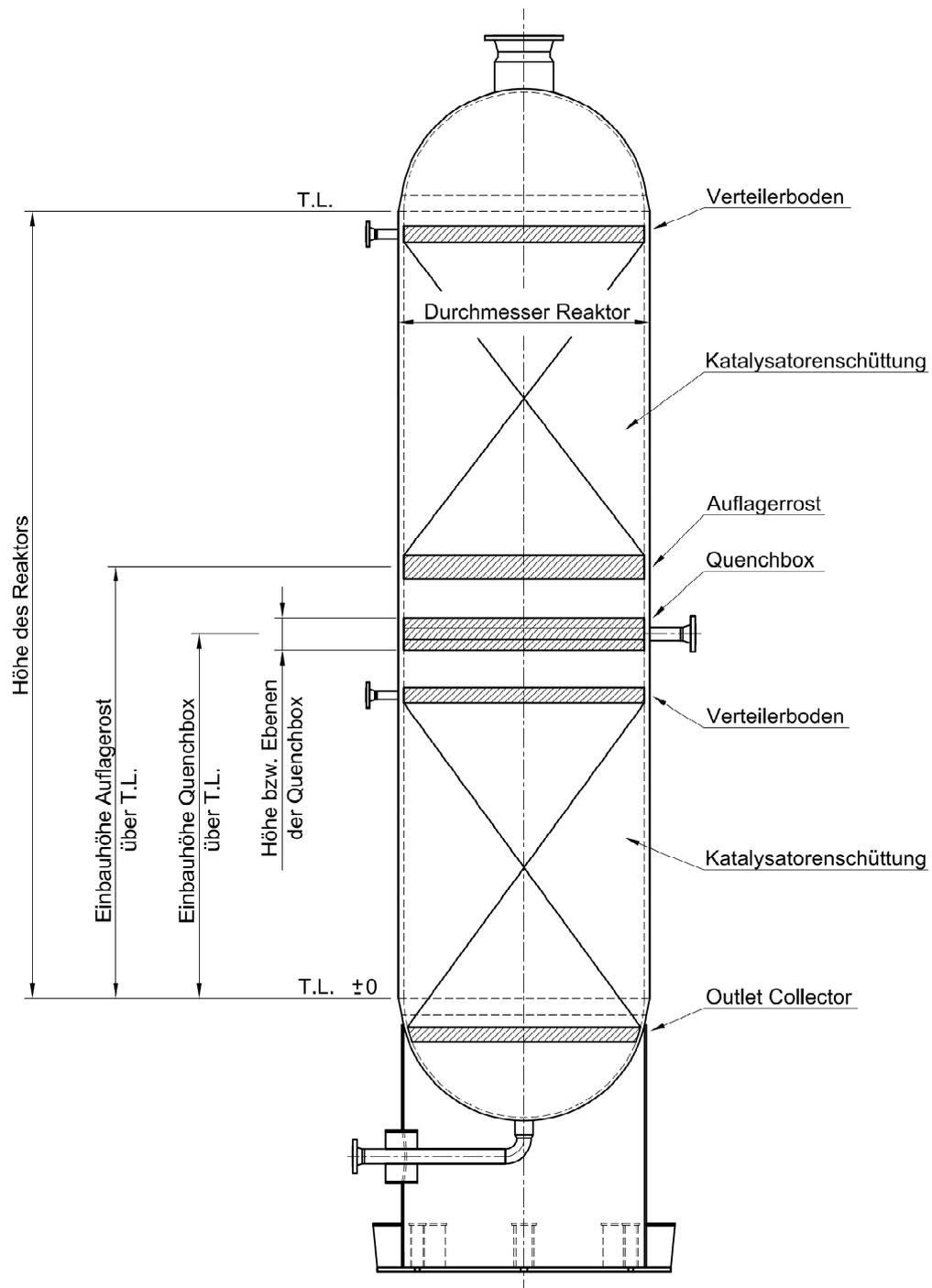


Abbildung 20: Übersichtsskizze eines Reaktors

Ein Reaktor wird, anders als eine Kolonne, aufgrund der hohen Wanddicken (erforderlich durch die beim chemischen Prozess notwendigen hohen Temperaturen) als fertiges Bauteil auf die Baustelle geliefert. Schweißarbeiten wie einzusetzende Stützen oder Mannlöcher bzw. Bodenbefestigungen müssen nicht mehr durchgeführt werden. Die Montagearbeiten beschränken sich also auf die Installation der Inneneinbauteile.

Die Auflageroste tragen die für den chemischen Prozess notwendigen Katalysatoren. Je nach Verwendungszweck des Reaktors wird er mit einem oder mehreren Ebenen der Katalysatorschüttung ausgerüstet, wobei das unterste Bett keinen Auflagerrost benötigt, da dieses schon bei der Herstellung vormontiert wird. Ist dies noch nicht geschehen, muss noch ein sogenannter „Outlet-Collector“ installiert werden. Diese Auflageroste bestehen aus mehreren Längsträgern, welche aufrecht stehend durch den Kopfflansch heruntergelassen werden. Innerhalb des Reaktors werden sie anschließend am Kran hängend in waagrechte Position gedreht und auf die bestehende Unterstützung aufgelegt. Die Zwischenräume werden zuletzt mit Bodenteilen verschlossen und versiegelt.

Über jedes Katalysatorenbett wird ein Verteilerboden installiert, welcher einerseits einen gleichmäßigen Durchsatz des Produktes garantiert, andererseits als Begrenzung der Schüttung dient.

Bei dem Einsatz von mehreren Betten wird in dem entstehenden Zwischenraum üblicherweise ein Zwischeneinlauf installiert. Für diesen Eintrittsstutzen wird eine sogenannte Quenchbox installiert. Sie ist für die gleichmäßige Verteilung des eintretenden Mediums zuständig.

### **7.3. Betrachtungen zur Decision Making Unit (DMU)**

#### **7.3.1. Definition**

Als DMU wird die durchzuführende Reaktormontage definiert. Es wird dabei nur der Bauabschnitt des Projektes betrachtet, während die Planungstätigkeiten außer Acht gelassen werden. Auch die dem Bauabschnitt zurechenbare Vorarbeiten werden bei der Analyse nicht berücksichtigt, da diese bei allen Projekten in einem vergleichbaren Ausmaß bestehen.

#### **7.3.2. Vergleichbarkeit der DMU's**

Um die Vergleichbarkeit der DMU's zu gewährleisten, werden nur Projekte behandelt, welche entweder ausschließlich Reaktormontagen umfassen, oder bei denen der Arbeitsaufwand für zusätzliche Projekte wie z.B. Reaktorumbauten,

Kolonnenneubauten, Kolonnenumbauten oder Arbeiten an Druckbehältern genau abgegrenzt wurde. Aufgrund des überschaubaren technischen Fortschrittes bei diesen Montagenarbeiten, kann auch ohne Probleme von einer gleichbleibenden Technologie ausgegangen werden, auch wenn die Projekte über einen langen Zeitraum verteilt durchgeführt wurden.

## 7.4. Definition der Inputs und Outputs

In der nachfolgenden Aufstellung werden alle für die Analyse vorerst festgelegten Inputs und Outputs aufgelistet. Die Auswahl dieser Faktoren wurde in Zusammenarbeit mit der Firma erarbeitet. Im Anhang befindet sich die Originalliste, welche von der Firma ausgefüllt wurde. Nur die zugehörigen Projektnummern wurden zur Wahrung der Diskretion weggelassen.

Bei der Projektbeschreibung wurden schon die wichtigsten Variablen herausgestrichen, werden jedoch anschließend noch näher definiert und für den Einsatz der Analyse aufgearbeitet.

### Inputs

1. Gesamtarbeitszeit
2. Zusatzarbeit

### Zusätzliche Informationen

1. Jahreszeit
2. Niederlassung
3. Bodenhersteller

### Outputs

1. Höhe des Reaktors
2. Durchmesser des Reaktors
3. Anzahl der Auflagerroste
4. Einbauhöhe der Auflagerroste
5. Anzahl der Verteilerböden
6. Anzahl der „Outlet-Collectors“
7. Anzahl der „Quenchboxen“
8. Anzahl der Ebenen der „Quenchboxen“
9. Gesamthöhe der Ebenen der „Quenchboxen“
10. Einbauhöhe der „Quenchboxen“
11. Einbau von Temperaturfühler

### 7.4.1. Gesamtarbeitszeit

Normalerweise wird bei Projekten im Anlagenbau ein Großteil der Arbeitskräfte von Leihfirmen gestellt, während nur die wichtigsten Funktionen mit Stammpersonal besetzt werden. Bei einem Vergleich von Projekten mit sehr unterschiedlichem

Einsatz von Leihkräften müsste der Anteil des Stammpersonals berücksichtigt werden. Bei einer Reaktormontage wird jedoch aufgrund der schwierigen Bedingungen meistens nur Stammpersonal eingesetzt. Die Unterscheidung in angestelltes, und damit sehr gut ausgebildetes Personal und in Leihpersonal wird daher nicht vorgenommen.

#### 7.4.2. Zusatzarbeiten

Ein Teil der Gesamtarbeitszeit besteht aus sogenannter Zusatzarbeit. Diese entsteht durch Arbeiten welche größtenteils auf Probleme zurückzuführen sind. Beispiele sind Reparaturen oder Änderungen der Einbauteile aufgrund falscher Planungs- und Konstruktionsdetails, aber auch zusätzliche organisatorische Aufwände. Ein vermehrtes Auftreten von Zusatzarbeit könnte die Gesamtarbeitszeit verlängern, und damit ein Projekt fälschlicherweise ineffizient machen. Daher wird für die Analyse nur die reine Arbeitszeit herangezogen.

Die Zusatzarbeiten werden nicht monetär sondern in Stunden angegeben, da der Regiesatz bei jedem Projekt unterschiedlich ist. Sie sind für die Projekte entweder in Stunden oder als Gesamtpreis verfügbar, welcher über den jeweiligen Regiesatz wieder in Stunden umgerechnet wird. Tabelle (1) zeigt die Berechnung der Gesamtarbeitszeit exklusiv der Zusatzarbeiten, welche für die Analyse benötigt wird.

Projekt Nr.:	Gesamtarbeitszeit incl. Zusatzarbeit [ h ]	Zusatzarbeit [ h oder € ]	Zusatzarbeit [ h ]	Gesamtarbeitszeit ohne Zusatzarbeit [ h ]
1	2050	500	500	1550
2	723	8.650€ / 50€/Std.	173	550
3	838	14.500€ / 50€/Std.	290	548
4	1804	341	341	1463
5	591	84	84	507
6	1240	327	327	913
7	890	171	171	719
8	1492	267	267	1225

Tabelle 1: Berechnung Gesamtarbeitszeit

### 7.4.3. Jahreszeit

Die Jahreszeit muss berücksichtigt werden, weil die Arbeiten im Freien stattfinden. Da die Wetterbedingungen bei den einzelnen Projekten nicht bekannt sind, wird die Jahreszeit als Einflussgröße gewählt. Diese geht als kategorische Variable in die Analyse ein, und wird in Tabelle (2) allen Projekten zugeordnet.

Von Oktober bis März → Kategorie 1

Von April bis September → Kategorie 2

Projekt Nr.:	Zeitraum	Kategorie
1	09/2008 - 12/2008	1
2	06/2004 - 08/2004	2
3	06/2004 - 08/2004	2
4	02/2002 - 03/2002	1
5	02/2003	1
6	06/2006 - 07/2006	2
7	06/2001 - 07/2001	2
8	08/2002 - 09/2002	2

Tabelle 2: Kategorische Einteilung der Jahreszeit

### 7.4.4. Niederlassung

Die Niederlassung wird ebenfalls als kategorische Variable in die Analyse eingebunden. Mit ihr werden die Projekte verschiedenen Systemen zugeordnet, welche dann auf ihren Zusammenhang überprüft werden.

Projekt Nr.:	Niederlassung	Kategorie
1	Österreich	1
2	Österreich	1
3	Österreich	1
4	Deutschland	2
5	Deutschland	2
6	Deutschland	2
7	Deutschland	2
8	Deutschland	2

Tabelle 3: Kategorische Einteilung der Niederlassung

### 7.4.5. Bodenhersteller

Es gibt nur wenige Hersteller von Reaktorböden. Auch sind deren Produkte durchaus vergleichbar. Jedoch weiß man aufgrund der Erfahrungen aus der Praxis, dass bei deren Montage mit unterschiedlichem Arbeitsaufwand zu rechnen ist. Auch hier liegt wie bei der Betrachtung der Jahreszeit und der Niederlassung eine kategorische Variable vor.

Projekt Nr.:	Bodenhersteller	Kategorie
1	A	1
2	B	2
3	B	2
4	B	2
5	B	2
6	B	2
7	A	1
8	A	1

Tabelle 4: Kategorische Einteilung der Bodenhersteller

### 7.4.6. Höhe und Durchmesser des Reaktors

Hierbei ist zu beachten, dass das Volumen nur bedingt als Vergleichsgröße genommen werden kann. Denn je höher ein Reaktor ist bzw. je mehr Durchmesser er hat, desto länger dauert die Montage. Der Grund liegt in der Bauweise. Zuerst müssen alle Teile ausschließlich durch den Kopfflansch in den Reaktor gebracht werden, da es sonst keine Mannlöcher gibt. Weiters haben Reaktoren meistens nur wenige Böden auf denen das extrem hohe Gewicht der Katalysatoren liegt. Zusätzlich durch die sehr hohe Betriebstemperatur von über 350°C sind die Bodenteile aus Vollmaterial und sehr schwer zu handhaben. Ein größerer Durchmesser entspricht also einem höheren Arbeitsaufwand und erhöht damit den Output.

In der Analyse werden daher Höhe und Durchmesser als einfache Variablen angesehen und in Millimeter angegeben.

### 7.4.7. Auflagerroste der Katalysatoren

Mit größer werdendem Durchmesser eines Reaktors steigt natürlich auch die Anzahl der Einzelteile, besonders die der massiven Längsträger und damit der Output. Diese Abhängigkeit der Arbeitszeit von der Größe des Reaktors wird mit der Angabe des Durchmessers berücksichtigt. Die Anzahl der Auflagerroste wird in Stück angegeben.

### 7.4.8. Einbauhöhe der jeweiligen Auflagerroste

Da die Auflagerböden ein hohes Gewicht zu tragen haben und daher sehr massiv konstruiert sind, ist die Höhe in der die Auflagerroste eingebaut werden ebenfalls als Variable zu berücksichtigen. Die Einbauhöhe der Auflagerroste ist als Höhe über der „Tangent Line“ (Beginn des zylindrischen Teiles des Behälters) gegeben. Die Höhe wirkt sich besonders durch den Absenkvorgang und der schwierigeren Handhabung in der Arbeitszeit aus, da Reaktoren von 13 bis zu 36m Höhe betrachtet werden. In der Analyse wird nur der Absenkvorgang innerhalb des Reaktors berücksichtigt, da der Hubvorgang außerhalb des Behälters bei korrekter Organisation die Arbeitszeit nur minimal beeinflusst. Der Absenkvorgang berechnet sich aus der Differenz der Höhe des Reaktors und der Absenkhöhe und wird in Millimeter angegeben.

Projekt Nr.:	Anzahl der Auflagerroste [ Anzahl ]	Höhe der Auflagerroste ab T.L. [ mm ]	Höhe [ mm ]	Absenkhöhe [ mm ]	Absenkhöhe Gesamt [ mm ]
1	2	9120	25125	16005	22260
		18870		6255	
2	1	7954	13655	5701	5701
3	1	6033	13655	7622	7622
4	2	8086	21010	12924	17547
		16387		4623	
5	2	16260	36140	19880	27240
		28780		7360	
6	2	10050	26400	16350	21900
		20850		5550	
7	1	5690	13405	7715	7715
8	2	9390	24290	14900	19855
		19335		4955	

Tabelle 5: Berechnung der Absenkhöhe der Auflagerroste

### 7.4.9. Anzahl der Verteilerböden über den Katalysatorenbetten

Da die Verteilerböden ein geringeres Gewicht aufweisen und damit einfacher zu handhaben sind, muss bei ihrem Einbau die Einbauhöhe als Einflussgröße auf die Arbeitszeit nicht berücksichtigt werden. Die Abhängigkeit der Arbeitszeit von der Größe des Reaktors wird wiederum mit der Angabe des Durchmessers berücksichtigt. Die Anzahl der Verteilerböden wird in Stück angegeben.

Da nur bei einem Projekt ein Outlet-Collector verbaut werden musste, wird dieser aufgrund des ähnlichen Arbeitsaufwandes wie ein weiterer Verteilerboden behandelt.

Projekt Nr.:	Verteilerböden	Outlet-Collectors	Verteilerböden inkl. Outlet-Collectors
1	3	0	3
2	2	0	2
3	2	0	2
4	3	0	3
5	3	0	3
6	3	1	4
7	2	0	2
8	3	0	3

Tabelle 6: Anzahl der Verteilerböden

### 7.4.10. Anzahl, Ebenen und Höhe der Quenchboxen

Quenchboxen bestehen je nach Anforderungen des Reaktors aus verschiedenen Ebenen, welche wiederum verschiedene Bauhöhen aufweisen. Die Anzahl der zu montierenden Ebenen haben einen beträchtlichen Einfluss auf die Arbeitszeit. Die Höhen der jeweiligen Ebenen wirken sich zwar nur bedingt aus, werden jedoch zur Verfeinerung der Ergebnisse der Analyse ebenfalls berücksichtigt.

Es wird nur die Gesamthöhe der Quenchboxen in die Analyse eingebracht. Die Anzahl der Ebenen ist nur ein anderer Ausdruck dieser Variable, welche die Regressionsanalyse mit einem Bestimmtheitsmaß von  $R^2=0,95$  in Abbildung (21) beweist. Die Abhängigkeit der Arbeitszeit von der Größe des Reaktors wird mit der Angabe des Durchmessers berücksichtigt. Alle Angaben sind in Millimeter.

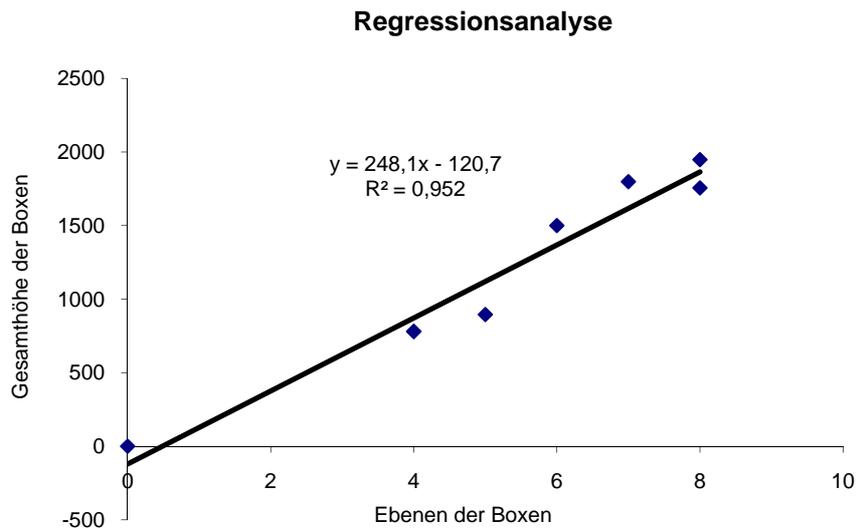


Abbildung 21: Korrelation der Gesamthöhe zur Anzahl der Ebenen aller Quenchboxen

Projekt Nr.:	Einzelne Höhen der Quenchboxen [ mm ]	Gesamthöhe der Quenchboxen [ mm ]
1	750 750	1500
2	250 530	780
3	250 530	780
4	639 639 478	1756
5	0	0
6	759 759 430	1948
7	590 305	895
8	739 739 320	1798

Tabelle 7: Gesamthöhe der Quenchboxen

#### 7.4.11. Einbauhöhe der Quenchboxen

Die Einbauhöhe hat aufgrund des Gewichtes und des Arbeitsumfanges, vor allem bei mehreren Ebenen, einen indirekten Einfluss auf die Arbeitszeit durch den Absenkvorgang. Die Einbauhöhe ist wie bei den Auflagerrosten als Höhe über der

„Tangent Line“ gegeben. In der Analyse wird wiederum nur der Absenkvorgang innerhalb des Reaktors berücksichtigt.

Projekt Nr.:	Quenchboxen [ Anzahl ]	Ebenen der Quenchboxen [ Anzahl ]	Höhe der Quenchboxen ab T.L. (Stützenhöhe) [ mm ]	Höhe [ mm ]	Absenkhöhe je Ebene [ mm ]	Absenkhöhe alle Ebenen [ mm ]	Absenkhöhe Gesamt [ mm ]
1	2	3	8370	25125	16755	50265	71280
		3	18120		7005	21015	
2	2	1	13300	13655	355	355	19921
		3	7133		6522	19566	
3	2	1	13300	13655	355	355	25621
		3	5233		8422	25266	
4	3	3	5195	21010	15815	47445	73577
		3	13506		7504	22512	
		2	19200		1810	3620	
5	0	0	0	36140	0	0	0
6	3	3	6859	26400	19541	58623	88586
		3	17659		8741	26223	
		2	24530		1870	3740	
7	2	3	5780	13405	7625	22875	23365
		2	13160		245	490	
8	3	3	6389	24290	17901	53703	79246
		3	16334		7956	23868	
		1	22615		1675	1675	

Tabelle 8: Berechnung der Absenkhöhe der Quenchboxen

#### 7.4.12. Einbau von Temperaturfühlern

Um die Arbeitsweise des Reaktors überwachen zu können, werden gewöhnlich Temperaturfühler montiert. Ihre Montage hat eigentlich nur einen geringen Einfluss auf die Gesamtarbeitszeit, wird jedoch in die Analyse integriert, da nicht alle betrachteten Reaktoren mit ihnen ausgerüstet werden. Richtigerweise müsste diese Variable über die Anzahl der Wicklungen in die Analyse einfließen. Diese Werte sind jedoch nicht vorhanden. Allerdings kann man von den Erfahrungswerten ausgehen, dass pro Katalysatorenbett 2 Wicklungen erfolgen.

Projekt Nr.:	Temperaturfühler	Bettanzahl	Temperaturfühler
1	nein	3	0
2	ja	2	4
3	ja	2	4
4	ja	3	6
5	ja	3	6
6	ja	3	6
7	nein	2	0
8	ja	3	6

Tabelle 9: Anzahl der Temperaturfühler

## 7.5. Behandlung der Datenmenge vor der Analyse

Zunächst wurden nun alle Variablen, welche von der Firma als relevant eingestuft wurden, in eine für die Analyse brauchbare Form gebracht. Daraus ergeben sich folgende Inputs und Outputs

### Inputs

1. Gesamtarbeitszeit

### Kategorien/Systeme

1. Jahreszeit
2. Niederlassung
3. Bodenhersteller

### Outputs

1. Höhe des Reaktors
2. Durchmesser des Reaktors
3. Anzahl der Auflagerroste
4. Einbauhöhe der Auflagerroste
5. Anzahl der Verteilerböden
6. Gesamthöhe der Ebenen der Quenchboxen
7. Einbauhöhe der Quenchboxen
8. Einbau von Temperaturfühler

Alle diese Faktoren wurden von der Firma als wichtig für den Transformationsprozess eingestuft. Da jedoch nur wenige DMU's zur Verfügung stehen, ist eine gute Abgrenzung der Einheiten sehr wichtig. Um diese Diskriminierung zu erreichen, wird zunächst der Datensatz näher betrachtet, um „unwichtige“ Einflussfaktoren schon zu Beginn ausschließen zu können. Dies geschieht über die Beurteilung der Korrelationen zwischen den verschiedenen Faktoren. In der folgenden Tabelle (10) werden daher alle Wechselbeziehungen zwischen Inputs und Outputs gelistet.

	Gesamtarbeitszeit	Höhe	Innendurchmesser	Anzahl der Verteilerböden	Anzahl der Auflageroste	Einbauhöhe Auflageroste	Gesamthöhe der Quenchboxen	Einbauhöhe Quenchboxen	Temperaturfühler
Gesamtarbeitszeit	1	0,17667	0,8924	0,4577	0,63919	0,40639	0,76348	0,80604	-0,1102
Höhe	0,17667	1	0,29208	0,7352	0,84262	0,96591	-0,0616	0,13244	0,41991
Innendurchmesser	0,8924	0,29208	1	0,45424	0,71454	0,46817	0,65116	0,70039	0,26712
Anzahl der Verteilerböden	0,4577	0,7352	0,45424	1	0,87831	0,8286	0,555	0,6869	0,46291
Anzahl der Auflageroste	0,63919	0,84262	0,71454	0,87831	1	0,93945	0,44559	0,60505	0,42164
Einbauhöhe Auflageroste	0,40639	0,96591	0,46817	0,8286	0,93945	1	0,16574	0,35691	0,35711
Gesamthöhe der Quenchboxen	0,76348	-0,0616	0,65116	0,555	0,44559	0,16574	1	0,97711	0,11491
Einbauhöhe Quenchboxen	0,80604	0,13244	0,70039	0,6869	0,60505	0,35691	0,97711	1	0,16801
Temperaturfühler	-0,1102	0,41991	0,26712	0,46291	0,42164	0,35711	0,11491	0,16801	1

Tabelle 10: Korrelationsmatrix der In- und Outputs

Zunächst wird betrachtet, wie sehr der Input mit den verschiedenen Outputs korreliert. Hier erkennt man, dass weder die Höhe des Reaktors noch der Einbau von Temperaturfühlern einen großen Einfluss auf die Arbeitszeit ausübt. Auch sollten die Outputs zumindest positiv korreliert sein (Hammerschmidt et al. 2009, S.300). Diese zwei Variablen werden daher aus der Analyse ausgeschlossen.

Weiter fällt der sehr hohe Korrelationswert von 0,977 zwischen der Einbauhöhe und der Gesamthöhe (Ebenen) der Quenchboxen auf. Diese zwei Faktoren sind also sehr redundant. Genauso ist der Korrelationswert von 0,939 zwischen der Anzahl und der Einbauhöhe der Auflageroste sehr hoch. Daher werden die zwei Variablen, Anzahl der Auflageroste und Gesamthöhe der Quenchboxen ebenfalls aus dem Datensatz genommen. Das Entfernen dieser Variablen wurde überprüft, indem auch eine Analyse mit dem ursprünglichen Datensatz durchgeführt wurde, um durch die stückweise Entnahme der einzelnen Faktoren die Veränderung des Effizienzwertes zu betrachten.

Damit verbleiben nur noch 4 Outputs, welche bei der Analyse berücksichtigt werden. Der zu verwendende Datensatz wird in Tabelle (11) gezeigt.

**Inputs**

1. Gesamtarbeitszeit

**Outputs**

1. Durchmesser des Reaktors
2. Anzahl der Verteilerböden
3. Einbauhöhe der Auflagerroste
4. Einbauhöhe der Quenchboxen

**Kategorien/Systeme**

4. Jahreszeit
5. Niederlassung
6. Bodenhersteller

Projekt	Niederlassung System	Jahreszeit Kategorie	Bodenhersteller Kategorie	Gesamtarbeitszeit ohne Zusatzarbeit [ Stunden ] Input
1	1	1	1	1550
2	1	2	2	550
3	1	2	2	548
4	2	1	2	1463
5	2	1	2	507
6	2	2	2	913
7	2	2	1	719
8	2	2	1	1225

Projekt	Innen- durchmesser [ mm ] Output	Anzahl der Verteilerböden [ Anzahl ] Output	Einbauhöhe Auflagerroste [ mm ] Output	Einbauhöhe Quenchboxen [ mm ] Output
1	4400	3	22260	71280
2	2820	2	5701	19921
3	2820	2	7622	25621
4	5492	3	17547	73577
5	3200	3	27240	0
6	3350	4	21900	88586
7	2750	2	7715	23365
8	4850	3	19855	79246

Tabelle 11: Datensatz der Analyse

**7.6. Das Berechnungsprogramm**

Die Berechnungen wurden mit dem Programm „DEA-Solver V5“ von Cooper, Seiford und Tone durchgeführt. Das Programm ist auf CD als Zugabe zum Textbuch „Data

Envelopment Analysis“ (Cooper et al. 2007) verfügbar. Eine Light-Version ist jedoch auch als Freeware im Internet (zum Beispiel <http://www.softpedia.com/>) verfügbar. Für ergänzende Berechnungen wurde auch das Programm von Zhu, „DEA Frontier“ verwendet. Auch diese Software ist als CD-Beilage zum Textbuch „Quantitative models for performance evaluation and benchmarking“ (Zhu 2003) erhältlich. Eine freie Version steht auf der Homepage des Autors für dieses Programm (<http://www.deafrontier.com/>) zur Verfügung.

## 7.7. Die Analyse

### 7.7.1. Effizienzanalyse zur ex-post Überprüfung

Die Analysen werden grundsätzlich inputorientiert durchgeführt, da die verschiedenen Outputs durch die Projekte vorgegeben werden. Da die Arbeitszeit den einzigen Input bei der Analyse darstellt, stellt sich für eine reine Überprüfung der Leistungen der Projekte die Frage inwieweit dieser Input effizient eingesetzt wurde.

Dabei müssen zwei Sichtweisen beachtet werden. Zunächst wird eine ex-post Analyse durchgeführt, um die Frage beantworten zu können, welche Projekte im Vergleich welche Effizienz erreicht haben. Da die Spezifikationen der Projekte vom Auftraggeber vorgegeben sind, d.h. es ist der Firma nicht möglich jeglichen Output zu variieren, wird die Effizienzberechnung bei nicht-kontrollierbarem Outputniveau durchgeführt. Dazu wird ein Modell mit nicht-kontrollierbaren Output-Variablen „NCN-I-C“, mit der restriktivsten Annahme von konstanten Skalenerträgen verwendet.

No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	1	$\lambda_1 = 1$
2	Projekt 2	1	1	$\lambda_2 = 1$
3	Projekt 3	1	1	$\lambda_3 = 1$
4	Projekt 4	1	1	$\lambda_4 = 1$
5	Projekt 5	1	1	$\lambda_5 = 1$
6	Projekt 6	1	1	$\lambda_6 = 1$
7	Projekt 7	0,7445	8	$\lambda_2 = 0,277 \quad \lambda_3 = 0,642 \quad \lambda_5 = 0,033 \quad \lambda_6 = 0,016$
8	Projekt 8	1	1	$\lambda_8 = 1$

Tabelle 12: Ergebnisse des Modells NCN-I-C

Tabelle (12) zeigt das Ergebnis der Analyse, bei der nur der Inputfaktor „Gesamtarbeitszeit“ als diskreter Faktor definiert wurde. Dabei wurde das Projekt 7 als ineffizient ausgewiesen, mit einem Effizienzwert von 74,5%. Das würde bedeuten, dass Projekt 7 um 25,5% oder ca. 184 Stunden weniger brauchen hätte sollen.

Durch die Definierung aller Outputfaktoren als nicht-diskret, wurde bei dieser Analyse ausschließlich die mögliche Inputänderung betrachtet (Cooper et al. 2007, S.244). Die fehlende Diskriminierung der Ergebnisse, ist dabei auf den geringen Datensatz zurückzuführen. Bei der Verwendung einer nicht-kontrollierbaren Variablen, wird die betrachtete DMU nur mit virtuellen DMU's (linearen Kombinationen realer DMU's) verglichen, welche dasselbe Niveau bei dieser nicht-diskreten Variablen aufweisen (Cook & Seiford 2009, S.10). Vor allem bei Verwendung mehrerer nicht-kontrollierbarer Variablen und einer geringen Anzahl von DMU's, wird es schwierig eine Vergleichsbasis zu finden.

### **7.7.2. Effizienzanalyse für weiteres Vorgehen**

Das vorige Modell stellte eine reine ex-post Überprüfung dar. Es sind außer der Arbeitszeit keinerlei Ansatzpunkte für die Firma vorhanden, da es sich um abgeschlossene Einzelprojekte handelt, und nicht um einen kontinuierlichen Produktionsprozess. Um jedoch auch einen Überblick zu bieten, was in zukünftigen Projekten besser gemacht werden könnte, wird eine „normale“ DEA-Analyse durchgeführt, bei der alle Variablen als diskret angesehen werden. Weiter soll mit dieser Analyse auch der Einfluss der jeweiligen Faktoren bestimmt werden, um für zukünftige Projekte Informationen für die Preiskalkulation zu bieten.

Zunächst stellt sich die Frage, ob variable Skalenerträge angenommen werden können. In gewisser Weise kann der Output aufgrund von Verbesserungspotentialen (das Montageteam spielt sich ein) überproportional in Bezug auf den Arbeitseinsatz gesteigert werden. Steigende Skalenerträge sind also möglich. Fallende Skalenerträge werden jedoch ausgeschlossen. Es wird daher ein inputorientiertes Modell mit nicht fallenden Skalenerträgen „NDRS-I“ gewählt, dessen Ergebnisse in Tabelle (13) dargestellt werden.

No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)	Slacks
1	Projekt 1	0,6441	8	$\lambda_3 = 0,682$ $\lambda_5 = 0,138$ $\lambda_6 = 0,607$	$s_2^+ = 1,208$
2	Projekt 2	0,9798	4	$\lambda_3 = 0,778$ $\lambda_5 = 0,222$	$s_1^+ = 84,540$ $s_2^+ = 0,222$ $s_3^+ = 6285,490$
3	Projekt 3	1	1	$\lambda_3 = 1$	
4	Projekt 4	0,8024	6	$\lambda_3 = 1,464$ $\lambda_6 = 0,407$	$s_2^+ = 1,556$ $s_3^+ = 2527,907$
5	Projekt 5	1	1	$\lambda_5 = 1$	
6	Projekt 6	1	1	$\lambda_6 = 1$	
7	Projekt 7	0,7571	7	$\lambda_3 = 0,912$ $\lambda_5 = 0,088$	$s_1^+ = 103,460$ $s_2^+ = 0,088$ $s_3^+ = 1634,419$
8	Projekt 8	0,8988	5	$\lambda_3 = 1,001$ $\lambda_6 = 0,605$	$s_2^+ = 1,422$ $s_3^+ = 1025,492$

Tabelle 13: Ergebnisse des Modells NDRS-I

Betrachtet man exemplarisch Projekt 4, so wird dieses mit einer linearen Kombination der Projekte 3 und 6 verglichen. Das Projekt erreichte einen Effizienzwert von 80%, müsste also seinen Input um 20% bzw. ca. 289 Stunden verringern. Weiter sind Slacks der Outputfaktoren 2 und 3 (Anzahl der Verteilerböden bzw. Einbauhöhe der Auflagerroste) vorhanden. Tabelle (14) zeigt die Projektion des Projektes 4 auf den effizienten Rand.

Projektion				
Projekt 4	Effizienz = 0,8024	Projektion	Differenz	%
Gesamtarbeitszeit	1463	1173,934	-289,066	-19,76
Innendurchmesser	5492	5492	0	0
Anzahl der Verteilerböden	3	4,556	1,556	51,88
Einbauhöhe Auflagerroste	17547	20074,907	2527,907	14,41
Einbauhöhe Quenchboxen	73577	73577	0	0

Tabelle 14: Projektion des Projektes 4

Das inputorientierte radiale Modell ist bei dieser Fragestellung das geeignetste Modell, da sein Effizienzwert die Inputreduktion wiedergibt, während seine Slacks die möglichen Erhöhungen der Outputs anzeigt, welche zusätzlich geschafft hätten werden können. Ein inputorientiertes additives Modell (SBM-I-NDRS Modell), würde aufgrund des einzelnen Inputs dieselben Effizienzwerte errechnen, mit dem einzigen Unterschied, dass die Reduktion der Arbeitszeit durch die Inputslacks gegeben wären, und nicht proportional mit dem Effizienzwert zu berechnen sind. Dagegen

würde ein nicht orientiertes additives Modell auch die Outputslacks beachten und einen niedrigeren Effizienzwert ausgeben. Dies würde jedoch zu einer falschen Interpretation der Ergebnisse führen, da die Outputs eigentlich gegeben sind, und die Analyse nur einen Überblick geben soll, was möglich wäre.

Da steigende Skalenerträge möglich sind, kann für jene Projekte auch die Skaleneffizienz bestimmt werden. Wie in Kapitel 2.5.1. beschrieben ergibt sich die Skaleneffizienz aus dem Verhältnis der globalen Effizienz (CCR-Modell) und der reinen technischen Effizienz (BCC-Modell), und wird in Tabelle (15) berechnet.

DMU	NDRS Effizienz	CRS Effizienz	Skaleneffizienz	RTS (BCC)
1	0,6441	0,6441	1	Fallend
2	0,9798	0,9554	0,9751	Steigend
3	1	1	1	Konstant
4	0,8024	0,8024	1	Fallend
5	1	1	1	Konstant
6	1	1	1	Konstant
7	0,7571	0,7345	0,9701	Steigend
8	0,8988	0,8988	1	Fallend

**Tabelle 15: Berechnung Skaleneffizienz**

Die letzte Spalte in Tabelle (15) zeigt zum Vergleich das Skalenertragsverhalten, welches mit dem BCC-Modell über die Auswertung der Variablen  $\omega$  errechnet wurde. Die Projekte 2 und 7, welche steigende Skalenerträge zeigen, haben zwar eine gewisse Skalenineffizienz, diese ist jedoch so gering, dass von konstanten Skalenerträgen ausgegangen werden kann.

Natürlich können die effizienten Projekte noch weiter unterschieden werden, um die Frage zu beantworten, wie stabil ihr effizienter Status einzuschätzen ist. Dazu wird ein inputorientiertes Super-Effizienz Modell mit konstanten Skalenerträgen gewählt.

No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)	Slacks
1	Projekt 1	0,6441	8	$\lambda_3 = 0,682$ $\lambda_5 = 0,138$ $\lambda_6 = 0,607$	$s_2^+ = 1,208$
2	Projekt 2	0,9554	4	$\lambda_3 = 0,778$ $\lambda_5 = 0,196$	$s_2^+ = 0,143$ $s_3^+ = 5565,843$
3	Projekt 3	1,0171	3	$\lambda_5 = 0,578$ $\lambda_6 = 0,289$	$s_2^+ = 0,892$ $s_3^+ = 14469,5057$
4	Projekt 4	0,8024	6	$\lambda_3 = 1,464$ $\lambda_6 = 0,407$	$s_2^+ = 1,556$ $s_3^+ = 2527,907$
5	Projekt 5	2,2399	1	$\lambda_6 = 1,244$	$s_1^+ = 966,849$ $s_2^+ = 1,975$ $s_4^+ = 110186,422$
6	Projekt 6	1,6043	2	$\lambda_3 = 0,628$ $\lambda_8 = 0,915$	$s_1^+ = 2857,281$ $s_3^+ = 1049,868$
7	Projekt 7	0,7345	7	$\lambda_3 = 0,902$ $\lambda_5 = 0,062$ $\lambda_6 = 0,003$	$s_3^+ = 898,703$
8	Projekt 8	0,8988	5	$\lambda_3 = 1,001$ $\lambda_6 = 0,605$	$s_2^+ = 1,422$ $s_3^+ = 1025,492$

Tabelle 16: Ergebnisse des Modells Super-CCR-I

Wie zu erwarten hat Projekt 5, durch den Wegfall der Quenchboxen, den größten Effizienzwert mit  $\rho_{Input}^* = 2,24$ . Aber auch Projekt 6 hat noch einigen Spielraum. Es dürfte um ca. 60% mehr als die eingesetzte Arbeitszeit verwenden. Projekt 3 hingegen würde schon bei einer geringen Erhöhung der Arbeitszeit von ca. 9 Stunden den effizienten Rand verlassen.

### 7.7.3. Einfluss der Outputvariablen

Weiter ist der Einfluss der verschiedenen Variablen auf den Effizienzwert für die Firma sehr interessant. Dieser wird über die Gewichtungen bestimmt, welche die DEA zur Berechnung wählte. Ausgehend von konstanten Skalenerträgen, werden in Tabelle (17) zum besseren Verständnis nicht die Multiplier selbst, sondern die gewichteten Faktoren dargestellt, mit denen der virtuelle Output gebildet wird. Sie ergeben sich aus der Multiplikation der jeweiligen Multiplier mit dem dazugehörigen Output.

Nr.	DMU	Innen- durchmesser	Anzahl der Verteilerböden	Einbauhöhe Auflageroste	Einbauhöhe Quenchboxen
1	Projekt 1	0,4342	0	0,0093	0,2006
2	Projekt 2	0,8124	0	0	0,1431
3	Projekt 3	0,8153	0	0	0,1847
4	Projekt 4	0,5758	0	0	0,2266
5	Projekt 5	1	0	0	0
6	Projekt 6	0	0,7404	0	0,2596
7	Projekt 7	0,5684	0,0291	0	0,1369
8	Projekt 8	0,6073	0	0	0,2915

Tabelle 17: Ergebnisse des Modells CCR-I / Multiplier-Form

Tabelle (17) zeigt, dass der Durchmesser und die Einbauhöhe der Quenchboxen, und damit die Anzahl der Quenchboxen den größten Einfluss auf den Effizienzwert haben. Eine Erhöhung dieser Outputs steigert bei gleichbleibendem Inputniveau den Effizienzwert beträchtlich. Während eine Erhöhung der anderen Faktoren nur einen geringfügige Erhöhung des Zielfunktionswertes bewirken. Das viele gewichtete Outputs in Tabelle (17) den Wert Null annehmen, ist durch das Vorhandensein von Slacks erklärbar. Nur Projekt 5 und 6 zeigt zwar eine glaubwürdige, jedoch einseitige Gewichtung. Bei Projekt 5 ist dies durch die fehlenden Quenchboxen zu erklären. Bei Projekt 6 hingegen ist die starke Gewichtung der Verteilerböden dadurch zu erklären, dass es das einzige Projekt mit 4 Verteilerböden (maximale Anzahl) ist.

Für die Firma haben diese Ergebnisse verschiedene Bedeutungen. Einerseits zeigt sich, dass der Durchmesser des Reaktors ein wichtiger Faktor bei der Planung der Arbeitszeit und damit bei der Preiskalkulation der Projekte ist. Andererseits kann der Faktor „Einbauhöhe der Quenchboxen“ als kritischer Projektabschnitt identifiziert werden. Passieren also beim Einbau der Quenchboxen selbstverschuldete Fehler (die nicht in den Bereich der Zusatzarbeiten fallen würden), welche zu einem Ausbau und erneuten Einbau führen würden, hätten diese einen stärkeren Einfluss auf die Arbeitszeit als zum Beispiel ein Fehler bei den Auflagerrosten.

#### 7.7.4. Einfluss der Jahreszeit

Eine weitere Frage der Firma lautet: Kann ein Unterschied zwischen den Projekten im Sommer und Winter festgestellt werden? Dazu wurden die Projekte in Kategorien eingeteilt. Zuerst muss die Frage geklärt werden, ob diese zwei Gruppen überhaupt

miteinander verglichen werden dürfen, oder ob sie getrennt voneinander behandelt werden sollten. Dafür wird ein Bilateraler Vergleich verwendet, welcher die DMU's einer Gruppe nur mit jenen der anderen Gruppe vergleicht. Die Analyse wird als radiales Modell unter der Annahme konstanter Skalenerträge durchgeführt, genauer „Bilateral-CCR-I“. Anschließend wird ein Rank-Sum-Test angewendet. Tabelle (18) zeigt die Ergebnisse der Analyse.

No.	DMU	Gruppe	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	0,6881	8	$\lambda_3 = 0,602 \quad \lambda_6 = 0,807$
2	Projekt 2	2	1,1042	5	$\lambda_4 = 0,271 \quad \lambda_5 = 0,417$
3	Projekt 3	2	1,2243	4	$\lambda_4 = 0,348 \quad \lambda_5 = 0,318$
4	Projekt 4	1	0,8024	7	$\lambda_3 = 1,464 \quad \lambda_6 = 0,407$
5	Projekt 5	1	2,2399	1	$\lambda_6 = 1,244$
6	Projekt 6	2	2,0011	2	$\lambda_4 = 1,204 \quad \lambda_5 = 0,129$
7	Projekt 7	2	0,8923	6	$\lambda_4 = 0,318 \quad \lambda_5 = 0,349$
8	Projekt 8	2	1,3008	3	$\lambda_4 = 1,077 \quad \lambda_5 = 0,035$

Tabelle 18: Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Jahreszeit

Die Summe der Ränge in der ersten Gruppe ergeben  $S = 16$ . Mit  $m = 3$  und  $n = 5$  ergibt sich nach Formel (72) ein Prüfgröße von  $T = 0,745$ . Bei einem vorausgesetzten Signifikanzniveau von 10% ergibt sich ein Vergleichswert mit  $\alpha = 0,1 \rightarrow T_{1-\alpha/2} = T_{0,95} = 1,65$ . Damit gilt  $T < T_{1-\alpha/2}$ . Die Nullhypothese kann also bei einem Signifikanzniveau von 10% nicht abgewiesen werden. Beide Gruppen haben somit die gleiche Verteilung.

Betrachtet man jedoch die Ränge, fällt auf, dass dieses Ergebnis nur durch das extrem effiziente Projekt 5 verursacht wird. Alle anderen Projekte im Winter belegen die letzten Plätze. Schließt man Projekt 5 aus der Analyse aus, so würden sich die vorher berechneten CCR-I Effizienzwerte nur geringfügig ändern, jedoch würde die Nullhypothese in diesem Fall verworfen werden, mit dem eindeutigen Ergebnis von  $T = 1,936 > T_{1-\alpha/2} = 1,65$ . Die Effizienzwerte der Gruppe 2 (Sommer) übertreffen damit jene der Gruppe 1 (Winter).

Natürlich ist es problematisch, Projekt 5 als Ausreißer zu definieren und damit einfach aus der Analyse auszuschließen. Einerseits unterstützt der hohe

Supereffizienzwert des Projektes 5 die Annahme, dass dieses Projekt einen Ausreißer darstellt, jedoch sind einfach zu wenig DMU's verfügbar um diese Frage eindeutig beantworten zu können. Aber auch gestützt durch Erfahrungen aus der Praxis, kann mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass die Arbeit im Winter sehr wohl mehr Arbeitszeit braucht und daher auch durchschnittlich geringere Effizienzwerte aufweist.

Es wird also angenommen, dass es unfair ist, Gruppe 1 mit Gruppe 2 zu vergleichen. Eine Möglichkeit beide Gruppen doch gemeinsam zu bewerten besteht in der Durchführung eines Kategorischen Vergleichs. Dabei werden wie im theoretischen Teil erklärt, nur DMU's mit derselben oder einer schlechteren Kategorie verglichen. Die Kategorie 1 umfasst jene Projekte, welche die schlechteren Voraussetzungen haben, also im Winter durchgeführt wurden. Kategorie 2 bilden die Projekte der Sommermonate. Tabelle (19) zeigt die Ergebnisse der Analyse.

No.	DMU	Gruppe	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	0,9776	5	$\lambda_4 = 0,969$ $\lambda_5 = 0,193$
2	Projekt 2	2	0,9554	6	$\lambda_3 = 0,778$ $\lambda_5 = 0,196$
3	Projekt 3	2	1	1	$\lambda_3 = 1$
4	Projekt 4	1	1	1	$\lambda_4 = 1$
5	Projekt 5	1	1	1	$\lambda_5 = 1$
6	Projekt 6	2	1	1	$\lambda_6 = 1$
7	Projekt 7	2	0,7345	8	$\lambda_3 = 0,902$ $\lambda_5 = 0,062$ $\lambda_6 = 0,003$
8	Projekt 8	2	0,8988	7	$\lambda_3 = 1,001$ $\lambda_6 = 0,605$

Tabelle 19: Ergebnisse des Modells CAT-I-C / Jahreszeit

War Projekt 5 zuvor das einzig effiziente Projekt in der Gruppe 1, so wird nun auch Projekt 4 als effizient eingestuft. Sogar Projekt 1 schafft es nur knapp nicht an den effizienten Rand. Da Projekt 1 zuvor den schlechtesten Effizienzwert aufwies, untermauern die Ergebnisse die vorige Annahme, dass die beiden Gruppen nicht dieselbe Verteilung aufweisen. Allgemein steigt mit dieser Einteilung der Durchschnitt der Effizienzwerte auf 94,6%. Dieser sehr hohe durchschnittliche Effizienzsatz ist jedoch nicht sehr überraschend, da bei der langjährigen Routine bei Montagearbeiten nicht mit sehr großen Abweichungen zu rechnen war.

### 7.7.5. Unterschiede zwischen den Bodenherstellern

Wie bei den kategorischen Einflüssen Jahreszeit und Niederlassung wird bei der kategorischen Variablen Bodenhersteller zunächst die Vergleichbarkeit der Gruppen geprüft. Tabelle (21) zeigt die Ergebnisse des bilateralen Vergleichs, wobei Gruppe 1 den Bodenhersteller A, Gruppe 2 den Bodenhersteller B darstellt.

No.	DMU	Gruppe	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	0,644	8	$\lambda_3 = 0,682$ $\lambda_5 = 0,138$ $\lambda_6 = 0,607$
2	Projekt 2	2	1,333	4	$\lambda_7 = 0,855$ $\lambda_8 = 0,097$
3	Projekt 3	2	1,338	3	$\lambda_7 = 0,855$ $\lambda_8 = 0,097$
4	Projekt 4	2	0,948	5	$\lambda_8 = 1,132$
5	Projekt 5	2	3,315	1	$\lambda_8 = 1,372$
6	Projekt 6	2	1,727	2	$\lambda_7 = 0,579$ $\lambda_8 = 0,947$
7	Projekt 7	1	0,734	7	$\lambda_3 = 0,902$ $\lambda_5 = 0,062$ $\lambda_6 = 0,003$
8	Projekt 8	1	0,899	6	$\lambda_3 = 1,001$ $\lambda_6 = 0,605$

Tabelle 20: Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Bodenhersteller

Im Fall der Bodenhersteller, kann mit einer Prüfgröße von  $T = 2,24 > T_{1-\alpha/2} = 1,65$  die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 10% verworfen werden. Die Gruppen der beiden Bodenhersteller haben daher nicht die gleiche Verteilung, und Bodenhersteller B erreicht höhere Effizienzwerte als Hersteller A. Wie bei dem Einfluss der Jahreszeit wird ein kategorisches Modell durchgeführt, um die Effizienzwerte bei Berücksichtigung dieses Ungleichgewichtes zu berechnen. Gruppe 1 bezeichnet den Hersteller A mit der schlechteren Voraussetzung, während Gruppe 2 Bodenhersteller B mit besseren Voraussetzungen umfasst. Tabelle (22) zeigt die Ergebnisse des Modells. Auch hier wird eine Gesamteffizienzsteigerung von 87,9% beim CCR-Modell auf 95,5% beim kategorischen Modell erreicht.

No.	DMU	Gruppe	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	0,886	7	$\lambda_8 = 1,121$
2	Projekt 2	2	0,955	6	$\lambda_3 = 0,778 \quad \lambda_5 = 0,196$
3	Projekt 3	2	1	1	$\lambda_3 = 1$
4	Projekt 4	2	0,802	8	$\lambda_3 = 1,464 \quad \lambda_6 = 0,407$
5	Projekt 5	2	1	1	$\lambda_5 = 1$
6	Projekt 6	2	1	1	$\lambda_6 = 1$
7	Projekt 7	1	1	1	$\lambda_7 = 1$
8	Projekt 8	1	1	1	$\lambda_8 = 1$

Tabelle 21: Ergebnisse des Modells CAT-I-C / Bodenhersteller

### 7.7.6. Unterschiede zwischen den Niederlassungen

Die nächste Frage betrifft die beiden Niederlassungen der Firma welche untersucht wurden. Eine in Deutschland und eine in Österreich. Auch hier muss zunächst geklärt werden, ob die jeweiligen Vergleichseinheiten die gleiche Verteilung besitzen, also miteinander verglichen werden dürfen. Dies beantwortet auch eine sehr interessante Frage, welche der beiden Niederlassungen „besser“ ist. Auch dafür wird wieder ein bilateraler Vergleich mithilfe des Rank-Sum-Tests durchgeführt. Gruppe 1 beinhaltet die Projekte der Niederlassung in Österreich, Gruppe 2 jene in Deutschland.

No.	DMU	Gruppe	Score	Rank	Reference set (lambda)
1	Projekt 1	1	0,648	8	$\lambda_5 = 0,533 \quad \lambda_6 = 0,805$
2	Projekt 2	1	0,969	6	$\lambda_5 = 0,646 \quad \lambda_6 = 0,225$
3	Projekt 3	1	1,017	5	$\lambda_5 = 0,578 \quad \lambda_6 = 0,289$
4	Projekt 4	2	1,076	4	$\lambda_3 = 2,872$
5	Projekt 5	2	3,741	1	$\lambda_1 = 1,224$
6	Projekt 6	2	2,075	2	$\lambda_3 = 3,458$
7	Projekt 7	2	0,771	7	$\lambda_1 = 0,009 \quad \lambda_3 = 0,987$
8	Projekt 8	2	1,383	3	$\lambda_3 = 3,093$

Tabelle 22: Ergebnisse des Modells Bilateral-CCR-I / Niederlassung

Mit  $T = 1,64 < T_{1-\alpha/2} = 1,65$  kann die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 10% nicht abgewiesen werden. Beide Niederlassungen haben die gleiche Verteilung.

Es kann also nicht gesagt werden, dass eine Niederlassung „besser“ ist als die andere.

## 7.8. Zusammenfassung der Analyse

Nachdem es sich bei der Analyse um abgeschlossene Einzelprojekte und nicht um einen kontinuierlichen Produktionsprozess handelte, wurde bei der Bestimmung der Effizienzen zunächst ein reiner ex-post Vergleich durchgeführt, bei dem alle Outputfaktoren als gegeben definiert wurden. Die Ergebnisse in Tabelle (12) zeigen daher die reinen Inputeffizienzen der Projekte. Dabei konnte eine Vergleichseinheit (Projekt 7) als ineffizient identifiziert werden. Diese Analyse ist jedoch eher exemplarischer Natur für die Zukunft, da für diese Vorgehensweise zurzeit noch zu wenige Daten zur Verfügung stehen. Je mehr Projekte im Laufe der Zeit durchgeführt werden, desto besser wird die Diskriminierung der Effizienzen werden. Leider mussten viele potentielle Projekte anfangs aus dem Datensatz ausgeschlossen werden, da die Abgrenzung des Arbeitsumfanges für die Reaktormontage von anderen Projektabschnitten nicht genügend gegeben war. Ein Ziel der Firma für die Zukunft sollte daher sein, verschiedene Arbeitsaufgaben, welche im Rahmen nur eines Projektes durchgeführt werden, auch im geeigneten Umfang getrennt zu dokumentieren.

Um eine Übersicht über die allgemeinen Verbesserungspotentiale geben zu können, wurde anschließend eine DEA-Analyse mit veränderbaren Faktoren durchgeführt. Dabei wurde zunächst von einer nicht-abnehmenden Skalenertragsannahme ausgegangen. Nach Berechnung der reinen Skaleneffizienzen, konnte jedoch gezeigt werden, dass den Transformationsprozessen näherungsweise konstante Skalenerträge zugrunde liegen. Daher wurde die Bestimmung der optimalen Betriebsgröße nicht mehr notwendig.

Im nächsten Schritt wurde über die Multiplier-Form des CCR-Modells der Einfluss der Outputfaktoren auf die Arbeitszeit untersucht. Dabei wurde der Innendurchmesser des Reaktors als jener Faktor identifiziert, welcher den größten Einfluss auf die Effizienzen der Projekte ausübt. Es ist damit auch jener Faktor, auf welchem bei der Preiskalkulation zukünftiger Projekte am meisten geachtet werden sollte. Eine

weitere einflussreiche Outputvariable stellt die Anzahl und Höhe der Quenchboxen dar. Bei angehenden Projekten sollte daher diesem kritischen Abschnitt besonders viel Aufmerksamkeit zuteil werden, da ein eigenverschuldeter Fehler bei diesem Arbeitsschritt erhebliche Auswirkungen auf die Gesamteffizienz des Projektes hätte.

Im letzten Teil der Analyse wurden zusätzliche Informationen betreffend der Jahreszeit und dem Bodenhersteller berücksichtigt. Nach der Einteilung der Projekte in verschiedene Kategorien, wurde der Unterschied der Verteilungen dieser Gruppen bestimmt. Dies geschah über die erreichten Effizienzen mithilfe des Rank-Sum-Tests, wobei von einem Signifikanzniveau von 10% ausgegangen wurde. Bei der Berücksichtigung der Wetterbedingungen, konnte das erwartete Ergebnis bestätigt werden, dass die im Sommer durchgeführten Projekte allgemein eine bessere Effizienz erreichten. Bei der Berücksichtigung von verschiedenen Bodenherstellern, ergab der Bilaterale Vergleich ebenfalls eine unterschiedliche Verteilung der Gruppen. Damit konnte gezeigt werden, dass die Projekte, welche Böden des Herstellers B verwendeten, bessere Effizienzwerte erreichten als jene Projekte mit Böden des Herstellers A. Auch wenn die ausführende Firma eigentlich keinen Einfluss auf die Auswahl des Bodenherstellers hat, so wäre es möglich bei den ersten Projektbesprechungen dahingehend Präferenzen zu äußern.

Ein abschließender Vergleich der beiden Niederlassungen, konnte eine alte Diskussionfrage beantworten, indem gezeigt wurde, dass die Effizienzen beider Niederlassungen derselben Verteilung angehören, und damit nicht bewiesen werden kann, dass eine „besser“ als die andere arbeitet.

## 8. Resümee

Diese Arbeit gab nach einer einführenden Erklärung eine Übersicht über die Grundlagen der Effizienzmessung sowie den Eigenschaften der Effizienzdefinition in den Kapiteln 1 und 2. In Kapitel 3 wurden die Grundmodelle der Data Envelopment Analysis behandelt. Im nächsten Schritt wurden in Kapitel 4 diverse Erweiterungen der Basismodelle vorgestellt, welche dem Anwender ermöglichen auch in die Analyse direkt einzugreifen. Danach wurden als Vorbereitung der durchzuführenden Fallstudie in Kapitel 5 die praktischen Aspekte einer DEA-Analyse näher behandelt. Dabei wurde sowohl die Auswahl bzw. Behandlung der Rohdaten einer Analyse, als auch Methoden zur weiteren Ergebnisdifferenzierung, zur Ausreißerdefinition oder zur Effizienzmessung über einen längeren Zeitraum betrachtet.

Im praktischen Teil dieser Arbeit (Kapitel 7) wurden schließlich die davor erarbeiteten Erkenntnisse in einem exemplarischen Beispiel einer Effizienzanalyse im Bereich des Anlagenbaus angewendet. Dazu wurden die zwei Analysetools DEA-Solver von Cooper et al. (2007) und DEA-Excel-Solver von Zhu (2003) verwendet. Die Aufgabe dieser Fallstudie war der Vergleich von verschiedenen Projekten (genauer Reaktormontagen), welche von zwei Niederlassungen eines deutschen Ingenieurbüros durchgeführt wurden. Obwohl nur ein kleiner Datensatz zur Verfügung stand, konnte gezeigt werden, dass die DEA sehr wohl ein geeignetes Instrument für diese Analyse darstellt und dem Management hilfreiche Informationen zur Verfügung stellen kann.

In dieser Arbeit wurde mit der Data Envelopment Analyse ein sehr wirkungsvolles Instrument der Effizienzmessung vorgestellt. Diese Methode der nicht-parametrischen relativen Effizienzmessung stellt ein relativ einfaches Mittel zur ex-post Analyse von Prozessen dar, welches in einer Vielzahl verschiedenster Fallstudien angewendet wurde. Seit ihrer Formulierung im Jahr 1978 wurde die DEA vielfach verfeinert und erweitert. Seiford (in Cooper et al. 2007) beispielsweise, hat bis zum Jahr 1999 über 1500 Artikel über die DEA zusammengetragen.

Mit der Verfügbarkeit von kostenlosen Berechnungsprogrammen und vor allem leicht verständlichen Abhandlungen, welche einen grundlegenden Überblick über die

Modelle und ihre Anwendung geben<sup>5</sup>, wurde es auch für den Durchschnittsmanager möglich, eine Data Envelopment Analyse durchzuführen. Die Beliebtheit dieser Methode ist ohne Zweifel darauf zurückzuführen, dass im Gegensatz zu den Methoden der MCDM keine a priori Informationen bezüglich der Gewichtungen notwendig sind. Jedoch wird oft vernachlässigt, dass der Anwender aufgrund der Modellwahl, also mit der Definition der Abstandsmessung, einen erheblichen Einfluss auf das Ergebnis einer Analyse hat (als trivialstes Beispiel ist hier die Skalenertragsannahme zu nennen). Wie in Kapitel 4 beschrieben, trägt jedoch auch die Auswahl der Vergleichseinheiten und ihrer Faktoren entscheidend zur Qualität der durchzuführenden Analyse bei. Diese Fallstricke erschwerten lange Zeit die unkomplizierte Durchführung einer Effizienzanalyse.

Erst in jüngerer Zeit ist Literatur verfügbar, welche sich diesen Problemen widmete. Siemens (2005) entwickelte ein anschauliches Vorgehensmodell zur Auswahl einer Modellvariante, während Dyson et al. (2001) einen umfangreichen Katalog über die u. a. vorher genannten Fallstricke und deren Umgehung zusammenstellte. Hammerschmidt et al. (2009) und Podinovski & Thanassoulis (2007) liefern dagegen einen sehr guten Überblick über Probleme und Lösungen bezüglich der Datenqualität und der damit zusammenhängenden Qualität der Effizienzanalyse, wobei der Fokus erstmals mehr auf die Arbeit vor der eigentlichen Analyse gerichtet ist.

Mit dieser Aufarbeitung der üblichen Probleme einer DEA-Analyse, wird für einen „normalen“ Anwender einer Effizienzanalyse die Arbeit mit dieser Methode erheblich erleichtert. Dadurch ist es mit begrenztem Aufwand auch für Laien möglich, eine adäquate Effizienzanalyse durchzuführen, und wird die Data Envelopment Analyse noch weiter im betrieblichen Umfeld verbreiten.

---

<sup>5</sup> zum Beispiel Cooper et al. (2007), Zhu (2003) oder Cooper et al. (2004)

## Literaturverzeichnis

Allen, K. (2002): Messung ökologischer Effizienz mittels Data Envelopment Analysis. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Baker, R. C.; Talluri, S. (1997): A closer look at the use of data envelopment analysis for technology selection. In: Computers & Industrial engineering, Jg. Vol. 32, H. 1, S. 101–108.

Banker, R. D.; Bardhan, I.; Cooper, W. W. (1996): A note on returns to scale in DEA. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 88, H. 3, S. 583–585.

Banker, R. D.; Charnes, A.; Cooper, W. W. (1984): Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. In: Management Science, Jg. Vol. 30, H. 9, S. 1078–1092.

Banker, R. D.; Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Thrall, R. M.; Zhu, J. (2004): Returns to scale in different DEA models. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 154, H. 2, S. 345–362.

Banker, R. D.; Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Zhu, J. (2004): Returns to scale in DEA. In: Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Zhu, J. (Hg.): Handbook on data envelopment analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers, S. 41–74.

Banker, R. D.; Morey, R. C. (1986): The use of categorical variables in data envelopment analysis. In: Management Science, Jg. Vol. 32, H. 12, S. 1613–1627.

Camanho, A. S.; Portela, M. C. Vaz C. B. (2009): Efficiency analysis accounting for internal and external non-discretionary factors. In: Computers & Operations Research, Jg. Vol. 36, H. 5, S. 1591–1601.

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Huang, Z. M.; Sun, D. B. (1990): Polyhedral cone-ratation DEA models with an illustrative application to large commercial banks. In: Journal of Econometrics, Jg. Vol. 46, H. 1-2, S. 73–91.

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Lewin, A. Y.; Seiford, L. M. (1996): Data envelopment analysis. Theory, methodology, and application. 2. Aufl. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Charnes, A.; Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Stutz, J. (1982): A multiplicative model for efficiency analysis. In: Socio-Economic Planning Sciences, Jg. Vol. 16, H. 5, S. 223–224.

Coelli, T. J.; Prasada Rao, D. S.; Battese, G. E. (1998): An introduction to efficiency and productivity analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Cook, W. D.; Seiford, L. M. (2009): Data envelopment analysis (DEA) - Thirty years on. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 192, H. 1, S. 1–17.

Cooper, W. W. (2001): Data envelopment analysis. In: Gass, S. I.; Harris, C. M. (Hg.): Encyclopedia of operations research and management science. 2. Aufl. Boston, Mass.: Kluwer Academic Publishers, S. 183–190.

Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Tone, K. (2007): Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2. Aufl. New York: Springer Science+Business Media LLC.

Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Zhu, J. (Hg.) (2004): Handbook on data envelopment analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Cooper, W. W.; Tone, K. (1997): Measures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 99, H. 1, S. 72–88.

Dyckhoff, H.; Ahn, H. (2009): Advanced Data Envelopment Analysis. Institut für Controlling & Unternehmensrechnung, Technische Universität Braunschweig. (Arbeitsbericht aDEA, Stand 02/2009). Online verfügbar unter [http://www.controlling-tubs.de/fileadmin/user\\_upload/xForschung/Arbeitsbericht\\_aDEA\\_2009-02-09.pdf](http://www.controlling-tubs.de/fileadmin/user_upload/xForschung/Arbeitsbericht_aDEA_2009-02-09.pdf), zuletzt geprüft am 20.05.2009.

Dyckhoff, H.; Allen, K. (1999): Theoretische Begründung einer Effizienzanalyse mittels Data Envelopment Analysis (DEA). In: Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung, Jg. Vol. 51, H. 5, S. 411–436.

Dyckhoff, H.; Gilles, R. (2004): Messung der Effektivität und Effizienz produktiver Einheiten. Lehrstuhl für Unternehmenstheorie, Universität RWTH Aachen. (Arbeitsbericht Nr. 02/11). Online verfügbar unter [http://sun.lut.rwth-aachen.de/forschung/arbeitsberichte/arbeitsbericht\\_0211.pdf](http://sun.lut.rwth-aachen.de/forschung/arbeitsberichte/arbeitsbericht_0211.pdf), zuletzt geprüft am 20.05.2009.

Dyckhoff, H.; Spengler, T. S. (2007): Produktionswirtschaft. Eine Einführung für Wirtschaftsingenieure. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Dyson, R. G.; Allen, R.; Camanho, A. S.; Podinovski, V. V.; Sarrico, C. S.; Shale, E. A. (2001): Pitfalls and protocols in DEA. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 132, H. 2, S. 245–259.

Esmaeili, M. (2009): A slacks-based measure of efficiency for the case of exogenously fixed factors. In: Expert Systems with Applications, Jg. Vol. 36, H. 3-1, S. 4822–4825.

Esmaeili, M.; Lotfi, F. H.; Jahanshahloo, G. R. (2007): Non-discretionary factors and imprecise data in DEA. In: International Journal of Mathematical Analysis, Jg. Vol. 1, H. 5, S. 237–246.

Gass, S. I.; Harris, C. M. (Hg.) (2001): Encyclopedia of operations research and management science. 2. Aufl. Boston, Mass.: Kluwer Academic Publishers.

Hammerschmidt, M.; Wilken, R.; Staat, M. (2009): Methoden zur Lösung grundlegender Probleme der Datenqualität in DEA-basierten Effizienzanalysen. In: Die Betriebswirtschaft, Jg. Vol. 69, H. 2, S. 289–309.

Homburg, C. (2001): Using data envelopment analysis to benchmark activities. In: International Journal of Production Economics, Jg. Vol. 73, H. 1, S. 51–58.

Kistner, Klaus-Peter; Steven, M. (1999): Produktion, Absatz, Finanzierung. 3. Aufl. Heidelberg: Physika-Verlag (Betriebswirtschaftslehre im Grundstudium, 1).

Mineralölwirtschaftsverband e. V. (Hg.) (2003): Mineralöl und Raffinerien. Hamburg. Online verfügbar unter [http://www.mwv.de/cms/upload/pdf/broschueren/140\\_Oel\\_Raff.pdf](http://www.mwv.de/cms/upload/pdf/broschueren/140_Oel_Raff.pdf), zuletzt geprüft am 20.05.2009.

Möller, J. (2008): Regionalökonomik. Grundlagen der linearen Programmierung und das Transportproblem. Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Regensburg. Regensburg.

Podinovski, V. V.; Thanassoulis, E. (2007): Improving discrimination in data envelopment analysis: some practical suggestions. In: Journal of Productivity Analysis, Jg. Vol. 28, H. 1-2, S. 117–126.

Ray, S. C. (2004): Data envelopment analysis. Theory and Techniques for Economics and Operations Research. Cambridge: Cambridge University Press.

Scheel, H. (2000): Effizienzmaße der Data Envelopment Analysis. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag [u.a.].

Seiford, L. M.; Zhu, J. (2002): Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 142, H. 1, S. 16–20.

Siemens, F. (2005): Vorgehensmodell zur Auswahl einer Variante der Data Envelopment Analysis. Institut für Produktion und Industrielles Informationsmanagement, Universität Duisburg-Essen. (Arbeitsbericht Nr.26). Online verfügbar unter [http://www.pim.wiwi.uni-due.de/uploads/tx\\_itochairt3/publications/Siemens-Arbeitsbericht26.pdf](http://www.pim.wiwi.uni-due.de/uploads/tx_itochairt3/publications/Siemens-Arbeitsbericht26.pdf), zuletzt geprüft am 20.05.2009.

Stepan, A. (2005): Zusatzskriptum zur Vorlesung Betriebswirtschaftliche Optimierung. Institut für Managementwissenschaften, Technische Universität Wien. Online verfügbar unter <http://www.imw.tuwien.ac.at/ibwl/Pdf/ZusatzskriptumBWOpt-10-2007.pdf>, zuletzt geprüft am 20.05.2009.

- Stepan, A.; Fischer, E. O. (2001): Betriebswirtschaftliche Optimierung. Einführung in die quantitative Betriebswirtschaftslehre. 7. Aufl. München: Wissenschaftsverlag Oldenbourg.
- Thanassoulis, E. (2003): Introduction to the Theory and Application of Data Envelopment Analysis. A foundation text with integrated software. 2. Aufl. New York: Springer Science+Business Media LLC.
- Tone, K. (2001): A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 130, H. 3, S. 498–509.
- Tone, K. (2004): Malmquist productivity index: Efficiency change over time. In: Cooper, W. W.; Seiford, L. M.; Zhu, J. (Hg.): Handbook on data envelopment analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers, S. 203–228.
- Wu, J.; Liang, L.; Yang, F. (2009): Determination of the weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. In: Expert Systems with Applications, Jg. Vol. 36, H. 1, S. 872–876.
- Zhu, J. (2001): Super-efficiency and DEA sensitivity analysis. In: European Journal of Operational Research, Jg. Vol. 129, H. 2, S. 443–455.
- Zhu, J. (2003): Quantitative models for performance evaluation and benchmarking. Data envelopment analysis with spreadsheets and DEA Excel Solver. New York: Springer Science+Business Media LLC.

## Anhang

Originalliste

		Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4	Projekt 5	Projekt 6	Projekt 7	Projekt 8
Niederlassung	[ Name ]	Österreich	Österreich	Österreich	Deutschland	Deutschland	Deutschland	Deutschland	Deutschland
Zeitraum von - bis	[ Datum ]	09/2008 - 12/2008	06/2004 - 08/2004	06/2004 - 08/2004	02/2002 - 03/2002	02/2003	06/2006 - 07/2006	06/2001 - 07/2001	08/2002 - 09/2002
Gesamtarbeitszeit incl. Zusatzarbeit	[ Stunden ]	2050	723	838	1804	591	1240	890	1492
Zusatzarbeit In Stunden oder in Euro mit Angabe des Regiesatzes	[ Stunden ]	500	8.650€ / 50€/Std.	14.500€ / 50€/Std.	341 Std	84 Std	327 Std	171 Std	267 Std
Höhe Reaktor (T.L. - T.L.)	[ mm ]	25125	13655	13655	21010	36140	26400	13405	24290
Innendurchmesser Reaktor	[ mm ]	4400	2820	2820	5492	3200	3350	2750	4850
Bettanzahl	[ Anzahl ]	3	2	2	3	3	3	2	3
Verteilerboden	[ Anzahl ]	3	2	2	3	3	3	2	3
Anzahl der Auflagerroste	[ Anzahl ]	2	1	1	2	2	2	1	2
Jeweilige Höhe der Auflagerroste ab T.L.	[ mm ]	+9.120 +18.870	+7.954	+6.033	+8086 +16387	+16260 +28780	+10050 +20850	+5690	+9390 +19335
Quenchboxen / Mixing Chamber	[ Anzahl ]	2	2	2	3	-	3	2	3
Ebenen der Quenchboxen / Mixing Chamber	[ Anzahl ]	3 3	1 3	1 3	3 3 2		3 3 2	3 2	3 3 1
Gesamthöhe der Quenchboxen / Mixing Chamber	[ mm ]	750mm 750mm	250mm 530mm	250mm 530mm	639 639 478		759 759 430	590 305	739 739 320
Jeweilige Höhe der Quenchboxen / MC ab T.L. (Stützenhöhe)	[ mm ]	+8.370 +18.120	+13.300 +7.133	+13.300 +5.233	+5195 +13506 +19200		+6859 +17659 +24530	+5780 +13160	+6389 +16334 +22615
Outlet-Collector	[ Anzahl ]	0	0	0	0	0	1	0	0
Temperaturfühler	[ ja/hein ]	nein	ja	ja	ja	ja	ja	nein	ja
Bodenhersteller	[ Name ]	A	B	B	B	B	B	A	A

NDRS-I

Ergebnis

No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)							
1	Projekt 1	0,64407246	8	Projekt 3	0,6821785	Projekt 5	0,138020149	Projekt 6	0,607340942		
2	Projekt 2	0,979779229	4	Projekt 3	0,777526248	Projekt 5	0,222473752				
3	Projekt 3	1	1	Projekt 3	1						
4	Projekt 4	0,802415521	6	Projekt 3	1,463765006	Projekt 6	0,407218712				
5	Projekt 5	1	1	Projekt 5	1						
6	Projekt 6	1	1	Projekt 6	1						
7	Projekt 7	0,75714859	7	Projekt 3	0,911947231	Projekt 5	0,088052769				
8	Projekt 8	0,898776168	5	Projekt 3	1,001133233	Projekt 6	0,605016204				

Gewichtungen

No.	DMU	Score	V(1) Gesamt-arbeitszeit	U(0)	U(1) Innen- durchmesser	U(2) Anzahl Verteilerböden	U(3) Einbauhöhe Auflagerroste	U(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	0,000645161	0	9,86711E-05	0	0	0			
2	Projekt 2	0,979779229	0,001818182	0,921818182	0	0	0	0			
3	Projekt 3	1	0,001824818	0	0,00028912	0	0	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0,000683527	0	0,000104846	0	0	0			
5	Projekt 5	1	0,001972387	0	0,0003125	0	0	0			
6	Projekt 6	1	0,00109529	0	0	0,185104053	0	0			
7	Projekt 7	0,75714859	0,001390821	0,705146036	0	0	0	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0,000816327	0	0,000125216	0	0	0			

Gewichtete Faktoren

No.	DMU	Score	VX(1) Gesamt-arbeitszeit	UY(0)	UY(1) Innen- durchmesser	UY(2) Anzahl Verteilerböden	UY(3) Einbauhöhe Auflagerroste	UY(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	1	0	0,434152876	0	0,009274369	0,200645215			
2	Projekt 2	0,979779229	1	0,921818182	0	0	0	0,057961048			
3	Projekt 3	1	1	0	0,815317062	0	0	0,184682938			
4	Projekt 4	0,802415521	1	0	0,575813762	0	0	0,226601759			
5	Projekt 5	1	1	0	1	0	0	0			
6	Projekt 6	1	1	0	0	0,74041621	0	0,25958379			
7	Projekt 7	0,75714859	1	0,705146036	0	0	0	0,052002554			
8	Projekt 8	0,898776168	1	0	0,607297492	0	0	0,291478676			

Slacks

No.	DMU	Score	Excess Gesamt-arbeitszeit S-(1)	Shortage Innen- durchmesser S+(1)	Shortage Anzahl Verteilerböden S+(2)	Shortage Einbauhöhe Auflagerroste S+(3)	Shortage Einbauhöhe Quenchboxen S+(4)			
1	Projekt 1	0,64407246	0	0	1,207781212	0	0			
2	Projekt 2	0,979779229	0	84,54002576	0,222473752	6285,490067	0			
3	Projekt 3	1	0	0	0	0	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0	0	1,556404858	2527,906658	0			
5	Projekt 5	1	0	0	0	0	0			
6	Projekt 6	1	0	0	0	0	0			
7	Projekt 7	0,75714859	0	103,4600523	0,088052769	1634,419226	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0	0	1,422331282	1025,492367	0			

Projektion

No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
1	Projekt 1	0,64407246				5	Projekt 5	1			
	Gesamtarbeitszeit	1550	998,312313	-551,687687	-35,59%		Gesamtarbeitszeit	507	507	0	0,00%
	Innendurchmesser	4400	4400	0	0,00%		Innendurchmesser	3200	3200	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,207781212	1,207781212	40,26%		Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflagerroste	22260	22260	0	0,00%		Einbauhöhe Auflagerroste	27240	27240	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	71280	71280	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	0	0	0	0,00%
2	Projekt 2	0,979779229				6	Projekt 6	1			
	Gesamtarbeitszeit	550	538,8785762	-11,12142383	-2,02%		Gesamtarbeitszeit	913	913	0	0,00%
	Innendurchmesser	2820	2904,540026	84,54002576	3,00%		Innendurchmesser	3350	3350	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,222473752	0,222473752	11,12%		Anzahl der Verteilerböden	4	4	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflagerroste	5701	11986,49007	6285,490067	110,25%		Einbauhöhe Auflagerroste	21900	21900	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	19921	19921	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	88586	88586	0	0,00%
3	Projekt 3	1				7	Projekt 7	0,75714859			
	Gesamtarbeitszeit	548	548	0	0,00%		Gesamtarbeitszeit	719	544,3898365	-174,610164	-24,29%
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	2750	2853,460052	103,460052	3,76%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%		Anzahl der Verteilerböden	2	2,088052769	0,08805277	4,40%
	Einbauhöhe Auflagerroste	7622	7622	0	0,00%		Einbauhöhe Auflagerroste	7715	9349,419226	1634,41923	21,18%
	Einbauhöhe Quenchboxer	25621	25621	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	23365	23365	0	0,00%
4	Projekt 4	0,802415521				8	Projekt 8	0,898776168			
	Gesamtarbeitszeit	1463	1173,933907	-289,066932	-19,76%		Gesamtarbeitszeit	1225	1101,000806	-123,999194	-10,12%
	Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,556404858	1,556404858	51,88%		Anzahl der Verteilerböden	3	4,422331282	1,42233128	47,41%
	Einbauhöhe Auflagerroste	17547	20074,90666	2527,906658	14,41%		Einbauhöhe Auflagerroste	19855	20880,49237	1025,49237	5,16%

**CCR-I**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)						
1	Projekt 1	0,64407246	8	Projekt 3	0,6821785	Projekt 5	0,138020149	Projekt 6	0,607340942	
2	Projekt 2	0,955425938	4	Projekt 3	0,777526248	Projekt 5	0,196054994			
3	Projekt 3	1	1	Projekt 3	1					
4	Projekt 4	0,802415521	6	Projekt 3	1,463765006	Projekt 6	0,407218712			
5	Projekt 5	1	1	Projekt 5	1					
6	Projekt 6	1	1	Projekt 6	1					
7	Projekt 7	0,73448055	7	Projekt 3	0,901927024	Projekt 5	0,061517901	Projekt 6	0,002898062	
8	Projekt 8	0,898776168	5	Projekt 3	1,001133233	Projekt 6	0,605016204			

Gewichtungen										
No.	DMU	Score	V(1) Gesamt-arbeitszeit	U(1) Innen-durchmesser	U(2) Anzahl Verteilerböden	U(3) Einbauhöhe Auflagerroste	U(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	0,000645161	9,86711E-05	0	0	0			
2	Projekt 2	0,955425938	0,001818182	0,000288068	0	0	0			
3	Projekt 3	1	0,001824818	0,00028912	0	0	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0,000683527	0,000104846	0	0	0			
5	Projekt 5	1	0,001972387	0,0003125	0	0	0			
6	Projekt 6	1	0,00109529	0	0,185104053	0	0			
7	Projekt 7	0,73448055	0,001390821	0,000206704	0,014564811	0	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0,000816327	0,000125216	0	0	0			

Gewichtete Faktoren										
No.	DMU	Score	VX(1) Gesamt-arbeitszeit	UY(1) Innen-durchmesser	UY(2) Anzahl Verteilerböden	UY(3) Einbauhöhe Auflagerroste	UY(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	1	0,434152876	0	0,009274369	0,200645215			
2	Projekt 2	0,955425938	1	0,812352273	0	0	0,143073665			
3	Projekt 3	1	1	0,815317062	0	0	0,184682938			
4	Projekt 4	0,802415521	1	0,575813762	0	0	0,226601759			
5	Projekt 5	1	1	1	0	0	0			
6	Projekt 6	1	1	0	0,74041621	0	0,25958379			
7	Projekt 7	0,73448055	1	0,568434971	0,029129622	0	0,136915957			
8	Projekt 8	0,898776168	1	0,607297492	0	0	0,291478676			

Slacks										
No.	DMU	Score	Excess Gesamt-arbeitszeit S-(1)	Shortage Innen-durchmesser S+(1)	Shortage Anzahl Verteilerböden S+(2)	Shortage Einbauhöhe Auflagerroste S+(3)	Shortage Einbauhöhe Quenchboxen S+(4)			
1	Projekt 1	0,64407246	0	0	1,207781212	0	0			
2	Projekt 2	0,955425938	0	0	0,143217478	5565,843097	0			
3	Projekt 3	1	0	0	0	0	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0	0	1,556404858	2527,906658	0			
5	Projekt 5	1	0	0	0	0	0			
6	Projekt 6	1	0	0	0	0	0			
7	Projekt 7	0,73448055	0	0	0	898,7029652	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0	0	1,422331282	1025,492367	0			

Projektion												
No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	
1	Projekt 1	0,64407246				5	Projekt 5	1				
	Gesamtarbeitszeit	1550	998,312313	-551,687687	-35,59%		Gesamtarbeitszeit	507	507	0	0,00%	
	Innendurchmesser	4400	4400	0	0,00%		Innendurchmesser	3200	3200	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,207781212	1,207781212	40,26%		Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%	
	Einbauhöhe Auflagerroste	22260	22260	0	0,00%		Einbauhöhe Auflagerroste	27240	27240	0	0,00%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	71280	71280	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	0	0	0	0,00%	
2	Projekt 2	0,955425938				6	Projekt 6	1				
	Gesamtarbeitszeit	550	525,4842658	-24,51573416	-4,46%		Gesamtarbeitszeit	913	913	0	0,00%	
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	3350	3350	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,143217478	0,143217478	7,16%		Anzahl der Verteilerböden	4	4	0	0,00%	
	Einbauhöhe Auflagerroste	5701	11266,8431	5565,843097	97,63%		Einbauhöhe Auflagerroste	21900	21900	0	0,00%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	19921	19921	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	88586	88586	0	0,00%	
3	Projekt 3	1				7	Projekt 7	0,73448055				
	Gesamtarbeitszeit	548	548	0	0,00%		Gesamtarbeitszeit	719	528,0915158	-190,908484	-26,55%	
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	2750	2750	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%		Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%	
	Einbauhöhe Auflagerroste	7622	7622	0	0,00%		Einbauhöhe Auflagerroste	7715	8613,702965	898,702965	11,65%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	25621	25621	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	23365	23365	0	0,00%	
4	Projekt 4	0,802415521				8	Projekt 8	0,898776168				
	Gesamtarbeitszeit	1463	1173,933907	-289,0660932	-19,76%		Gesamtarbeitszeit	1225	1101,000806	-123,999194	-10,12%	
	Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,556404858	1,556404858	51,88%		Anzahl der Verteilerböden	3	4,422331282	1,42233128	47,41%	
	Einbauhöhe Auflagerroste	17547	20074,90666	2527,906658	14,41%		Einbauhöhe Auflagerroste	19855	20880,49237	1025,49237	5,16%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	73577	73577	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	79246	79246	0	0,00%	

**Super-CCR-I**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)						
1	Projekt 1	0,64407246	8	Projekt 3	0,6821785	Projekt 5	0,138020149	Projekt 6	0,607340942	
2	Projekt 2	0,955425938	4	Projekt 3	0,777526248	Projekt 5	0,196054994			
3	Projekt 3	1,017051558	3	Projekt 5	0,578470956	Projekt 6	0,289221773			
4	Projekt 4	0,802415521	6	Projekt 3	1,463765006	Projekt 6	0,407218712			
5	Projekt 5	2,239885439	1	Projekt 6	1,243835616					
6	Projekt 6	1,604307212	2	Projekt 3	0,627546583	Projekt 8	0,914968945			
7	Projekt 7	0,73448055	7	Projekt 3	0,901927024	Projekt 5	0,061517901	Projekt 6	0,002898062	
8	Projekt 8	0,898776168	5	Projekt 3	1,001133233	Projekt 6	0,605016204			

Gewichtungen										
No.	DMU	Score	V(1) Gesamt-arbeitszeit	U(1) Innen-durchmesser	U(2) Anzahl Verteilerböden	U(3) Einbauhöhe Auflageroste	U(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	0,000645161	9,86711E-05	0	0	0			
2	Projekt 2	0,955425938	0,001818182	0,000288068	0	0	0			
3	Projekt 3	1,017051558	0,001824818	0,00028912	0	0	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0,000683527	0,000104846	0	0	0			
5	Projekt 5	2,239885439	0,001972387	0	0	8,22278E-05	0			
6	Projekt 6	1,604307212	0,00109529	0	0,16156612	0	1,08148E-05			
7	Projekt 7	0,73448055	0,001390821	0,000206704	0,014564811	0	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0,000816327	0,000125216	0	0	0			

Gewichtete Faktoren										
No.	DMU	Score	VX(1) Gesamt-arbeitszeit	UY(1) Innen-durchmesser	UY(2) Anzahl Verteilerböden	UY(3) Einbauhöhe Auflageroste	UY(4) Einbauhöhe Quenchboxen			
1	Projekt 1	0,64407246	1	0,434152876	0	0,009274369	0,200645215			
2	Projekt 2	0,955425938	1	0,812352273	0	0	0,143073665			
3	Projekt 3	1,017051558	1	0,815317062	0	0	0,201734496			
4	Projekt 4	0,802415521	1	0,575813762	0	0	0,226601759			
5	Projekt 5	2,239885439	1	0	0	2,239885439	0			
6	Projekt 6	1,604307212	1	0	0,646264481	0	0,958042731			
7	Projekt 7	0,73448055	1	0,568434971	0,029129622	0	0,136915957			
8	Projekt 8	0,898776168	1	0,607297492	0	0	0,291478676			

Slacks										
No.	DMU	Score	Excess Gesamt-arbeitszeit S-(1)	Shortage Innen-durchmesser S+(1)	Shortage Anzahl Verteilerböden S+(2)	Shortage Einbauhöhe Auflageroste S+(3)	Shortage Einbauhöhe Quenchboxen S+(4)			
1	Projekt 1	0,64407246	0	0	1,207781212	0	0			
2	Projekt 2	0,955425938	0	0	0,143217478	5565,843097	0			
3	Projekt 3	1,017051558	0	0	0,892299961	14469,50568	0			
4	Projekt 4	0,802415521	0	0	1,556404858	2527,906658	0			
5	Projekt 5	2,239885439	0	966,8493151	1,975342466	0	110186,4219			
6	Projekt 6	1,604307212	0	2857,280746	0	1049,868454	0			
7	Projekt 7	0,73448055	0	0	0	898,7029652	0			
8	Projekt 8	0,898776168	0	0	1,422331282	1025,492367	0			

Projektion												
No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	
1	Projekt 1	0,64407246				5	Projekt 5	2,239885439				
	Gesamtarbeitszeit	1550	998,312313	-551,687687	-35,59%		Gesamtarbeitszeit	507	1135,621918	628,621918	123,99%	
	Innendurchmesser	4400	4400	0	0,00%		Innendurchmesser	3200	4166,849315	966,849315	30,21%	
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,207781212	1,207781212	40,26%		Anzahl der Verteilerböden	3	4,975342466	1,97534247	65,84%	
	Einbauhöhe Auflageroste	22260	22260	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	27240	27240	0	0,00%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	71280	71280	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	0	110186,4219	110186,422	999,90%	
2	Projekt 2	0,955425938				6	Projekt 6	1,604307212				
	Gesamtarbeitszeit	550	525,4842658	-24,51573416	-4,46%		Gesamtarbeitszeit	913	1464,732485	551,732485	60,43%	
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	3350	6207,280746	2857,28075	85,29%	
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,143217478	0,143217478	7,16%		Anzahl der Verteilerböden	4	4	0	0,00%	
	Einbauhöhe Auflageroste	5701	11266,8431	5565,843097	97,63%		Einbauhöhe Auflageroste	21900	22949,86845	1049,86845	4,79%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	19921	19921	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	88586	88586	0	0,00%	
3	Projekt 3	1,017051558				7	Projekt 7	0,73448055				
	Gesamtarbeitszeit	548	567,3442537	9,344253712	1,71%		Gesamtarbeitszeit	719	528,0915158	-190,908484	-26,55%	
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	2750	2750	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,892299961	0,892299961	44,61%		Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%	
	Einbauhöhe Auflageroste	7622	22091,50568	14469,50568	189,84%		Einbauhöhe Auflageroste	7715	8613,702965	898,702965	11,65%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	25621	25621	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	23365	23365	0	0,00%	
4	Projekt 4	0,802415521				8	Projekt 8	0,898776168				
	Gesamtarbeitszeit	1463	1173,933907	-289,0660932	-19,76%		Gesamtarbeitszeit	1225	1101,000806	-123,999194	-10,12%	
	Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%	
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,556404858	1,556404858	51,88%		Anzahl der Verteilerböden	3	4,422331282	1,42233128	47,41%	
	Einbauhöhe Auflageroste	17547	20074,90666	2527,906658	14,41%		Einbauhöhe Auflageroste	19855	20880,49237	1025,49237	5,16%	
	Einbauhöhe Quenchboxer	73577	73577	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	79246	79246	0	0,00%	

**NCN-I-C**

Ergebnis											
No.	DMU	Score	Rank	Reference set (lambda)							
1	Projekt 1	1	1	Projekt 1	1						
2	Projekt 2	1	1	Projekt 2	1						
3	Projekt 3	1	1	Projekt 3	1						
4	Projekt 4	1	1	Projekt 4	1						
5	Projekt 5	1	1	Projekt 5	1						
6	Projekt 6	1	1	Projekt 6	1						
7	Projekt 7	0,744506254	8	Projekt 2	0,277083838	Projekt 3	0,642014077	Projekt 5	0,032920565	Projekt 6	0,01576062
8	Projekt 8	1	1	Projekt 8	1						

Projektion											
No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
1	Projekt 1	1				5	Projekt 5	1			
	(I)Gesamtarbeitszeit	1550	1550	0	0,00%		(I)Gesamtarbeitszeit	507	507	0	0,00%
	(ON)Innendurchmesser	4400	4400	0	0,00%		(ON)Innendurchmesser	3200	3200	0	0,00%
	(ON)Anzahl der Verteilerb	3	3	0	0,00%		(ON)Anzahl der Verteilerb	3	3	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Auflager	22260	22260	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Auflager	27240	27240	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Quencht	71280	71280	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Quencht	0	0	0	0,00%
2	Projekt 2	1				6	Projekt 6	1			
	(I)Gesamtarbeitszeit	550	550	0	0,00%		(I)Gesamtarbeitszeit	913	913	0	0,00%
	(ON)Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		(ON)Innendurchmesser	3350	3350	0	0,00%
	(ON)Anzahl der Verteilerb	2	2	0	0,00%		(ON)Anzahl der Verteilerb	4	4	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Auflager	5701	5701	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Auflager	21900	21900	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Quencht	19921	19921	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Quencht	88586	88586	0	0,00%
3	Projekt 3	1				7	Projekt 7	0,744506254			
	(I)Gesamtarbeitszeit	548	548	0	0,00%		(I)Gesamtarbeitszeit	719	535,2999964	-183,700004	-25,55%
	(ON)Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		(ON)Innendurchmesser	2750	2750	0	0,00%
	(ON)Anzahl der Verteilerb	2	2	0	0,00%		(ON)Anzahl der Verteilerb	2	2	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Auflager	7622	7622	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Auflager	7715	7715	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Quencht	25621	25621	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Quencht	23365	23365	0	0,00%
4	Projekt 4	1				8	Projekt 8	1			
	(I)Gesamtarbeitszeit	1463	1463	0	0,00%		(I)Gesamtarbeitszeit	1225	1225	0	0,00%
	(ON)Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		(ON)Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%
	(ON)Anzahl der Verteilerb	3	3	0	0,00%		(ON)Anzahl der Verteilerb	3	3	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Auflager	17547	17547	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Auflager	19855	19855	0	0,00%
	(ON)Einbauhöhe Quencht	73577	73577	0	0,00%		(ON)Einbauhöhe Quencht	79246	79246	0	0,00%

**Bilateral-CCR-I (Niederlassung)**

Ergebnis											
No.	DMU	Score	Rank	Group	Reference set (lambda)						
1	Projekt 1	0,648185008	8	1	Projekt 5	0,532640598	Projekt 6	0,804641817			
2	Projekt 2	0,968635761	6	1	Projekt 5	0,645831346	Projekt 6	0,22487752			
3	Projekt 3	1,017051558	5	1	Projekt 5	0,578470956	Projekt 6	0,289221773			
4	Projekt 4	1,075677865	4	2	Projekt 3	2,871745833					
5	Projekt 5	3,74115483	1	2	Projekt 1	1,223719677					
6	Projekt 6	2,075290015	2	2	Projekt 3	3,45755435					
7	Projekt 7	0,770866837	7	2	Projekt 1	0,008589637	Projekt 3	0,987115544			
8	Projekt 8	1,383648394	3	2	Projekt 3	3,093009641					

Rang			
Rank	DMU	Score	Group
1	Projekt 5	3,74115483	2
2	Projekt 6	2,075290015	2
3	Projekt 8	1,383648394	2
4	Projekt 4	1,075677865	2
5	Projekt 3	1,017051558	1
6	Projekt 2	0,968635761	1
7	Projekt 7	0,770866837	2
8	Projekt 1	0,648185008	1

Rank sum statistics  
 Group 1: 19  
 Group 2: 17  
 Test statistics: 1,639783183  
 NormDist: 0,050525128  
 Null hypothesis: the two groups have the same distribution of efficiency score.  
 The null hypothesis cannot be rejected at the significance level 10%.

Gruppe 1: Österreich  
 Gruppe 2: Deutschland

**Bilateral-CCR-I (Jahreszeit)**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Group	Reference set (lambda)					
1	Projekt 1	0,688064325	8	1	Projekt 3	0,601502306	Projekt 6	0,807093581		
2	Projekt 2	1,104202096	5	2	Projekt 4	0,27075037	Projekt 5	0,416574677		
3	Projekt 3	1,224267412	4	2	Projekt 4	0,348220232	Projekt 5	0,318446435		
4	Projekt 4	0,802415521	7	1	Projekt 3	1,463765006	Projekt 6	0,407218712		
5	Projekt 5	2,239885439	1	1	Projekt 6	1,243835616				
6	Projekt 6	2,001111501	2	2	Projekt 4	1,203990377	Projekt 5	0,129342956		
7	Projekt 7	0,892330881	6	2	Projekt 4	0,317558476	Projekt 5	0,349108191		
8	Projekt 8	1,300829342	3	2	Projekt 4	1,077048534	Projekt 5	0,035096526		

Rang			
Rank	DMU	Score	Group
1	Projekt 5	2,239885439	1
2	Projekt 6	2,001111501	2
3	Projekt 8	1,300829342	2
4	Projekt 3	1,224267412	2
5	Projekt 2	1,104202096	2
6	Projekt 7	0,892330881	2
7	Projekt 4	0,802415521	1
8	Projekt 1	0,688064325	1

Rank sum statistics  
 Group 1: 16  
 Group 2: 20  
 Test statistics: 0,745355992  
 NormDist: 0,22802827  
 Null hypothesis: the two groups have the same distribution of efficiency score.  
 The null hypothesis cannot be rejected at the significance level 10%.

**CAT-I-C (Jahreszeit)**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Category	Reference set (lambda)					
1	Projekt 1	0,977575726	5	1	Projekt 4	0,968781005	Projekt 5	0,193127743		
2	Projekt 2	0,955425938	6	2	Projekt 3	0,777526248	Projekt 5	0,196054994		
3	Projekt 3	1	1	2	Projekt 3	1				
4	Projekt 4	1	1	1	Projekt 4	1				
5	Projekt 5	1	1	1	Projekt 5	1				
6	Projekt 6	1	1	2	Projekt 6	1				
7	Projekt 7	0,73448055	8	2	Projekt 3	0,901927024	Projekt 5	0,061517901	Projekt 6	0,00289806
8	Projekt 8	0,898776168	7	2	Projekt 3	1,001133233	Projekt 6	0,605016204		

Rang			
Rank	DMU	Score	Category
1	Projekt 6	1	2
1	Projekt 5	1	1
1	Projekt 4	1	1
1	Projekt 3	1	2
5	Projekt 1	0,977575726	1
6	Projekt 2	0,955425938	2
7	Projekt 8	0,898776168	2
8	Projekt 7	0,73448055	2

Category: 1 = Winter = schlechter  
 2 = Sommer = besser

**Projektion**

No.	DMU I/O	Score Data	Category Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Category Projection	Difference	%
1	Projekt 1	0,977575726	1			5	Projekt 5	1	1		
	Gesamtarbeitszeit	1550	1515,242376	-34,75762432	-2,24%		Gesamtarbeitszeit	507	507	0	0,00%
	Innendurchmesser	4400	5938,554055	1538,554055	34,97%		Innendurchmesser	3200	3200	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	3,485726242	0,485726242	16,19%		Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	22260	22260	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	27240	27240	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	71280	71280	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	0	0	0	0,00%
2	Projekt 2	0,955425938	2			6	Projekt 6	1	2		
	Gesamtarbeitszeit	550	525,4842658	-24,51573416	-4,46%		Gesamtarbeitszeit	913	913	0	0,00%
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	3350	3350	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,143217478	0,143217478	7,16%		Anzahl der Verteilerböden	4	4	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	5701	11266,8431	5565,843097	97,63%		Einbauhöhe Auflageroste	21900	21900	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	19921	19921	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	88586	88586	0	0,00%
3	Projekt 3	1	2			7	Projekt 7	0,73448055	2		
	Gesamtarbeitszeit	548	548	0	0,00%		Gesamtarbeitszeit	719	528,0915158	-190,908484	-26,55%
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	2750	2750	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%		Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	7622	7622	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	7715	8613,702965	898,702965	11,65%
	Einbauhöhe Quenchboxer	25621	25621	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	23365	23365	0	0,00%
4	Projekt 4	1	1			8	Projekt 8	0,898776168	2		
	Gesamtarbeitszeit	1463	1463	0	0,00%		Gesamtarbeitszeit	1225	1101,000806	-123,999194	-10,12%
	Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%		Anzahl der Verteilerböden	3	4,422331282	1,422331282	47,41%
	Einbauhöhe Auflageroste	17547	17547	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	19855	20880,49237	1025,49237	5,16%
	Einbauhöhe Quenchboxer	73577	73577	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	79246	79246	0	0,00%

**Bilateral-CCR-I (Bodenhersteller)**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Group	Reference set (lambda)					
1	Projekt 1	0,64407246	8	1	Projekt 3	0,6821785	Projekt 5	0,138020149	Projekt 6	0,60734094
2	Projekt 2	1,332990596	4	2	Projekt 7	0,855172414	Projekt 8	0,096551724		
3	Projekt 3	1,337855525	3	2	Projekt 7	0,855172414	Projekt 8	0,096551724		
4	Projekt 4	0,948157648	5	2	Projekt 8	1,132371134				
5	Projekt 5	3,314861146	1	2	Projekt 8	1,371946613				
6	Projekt 6	1,726983097	2	2	Projekt 7	0,579499304	Projekt 8	0,947000464		
7	Projekt 7	0,73448055	7	1	Projekt 3	0,901927024	Projekt 5	0,061517901	Projekt 6	0,00289806
8	Projekt 8	0,898776168	6	1	Projekt 3	1,001133233	Projekt 6	0,605016204		

Rang			
Rank	DMU	Score	Group
1	Projekt 5	3,314861146	2
2	Projekt 6	1,726983097	2
3	Projekt 3	1,337855525	2
4	Projekt 2	1,332990596	2
5	Projekt 4	0,948157648	2
6	Projekt 8	0,898776168	1
7	Projekt 7	0,73448055	1
8	Projekt 1	0,64407246	1

Rank sum statistics  
 Group 1 21  
 Group 2 15  
 Test statistics 2,236067977  
 NormDist 0,012673659  
 Null hypothesis: the two groups have the same distribution of efficiency score.  
 The null hypothesis is rejected at the significance level  
 2,534731868 %  
 Group 2 outperforms Group 1.

Gruppe 1: Bodenhersteller A  
 Gruppe 2: Bodenhersteller B

**CAT-I-C (Bodenhersteller)**

Ergebnis										
No.	DMU	Score	Rank	Category	Reference set (lambda)					
1	Projekt 1	0,886052916	7	1	Projekt 8	1,121128179				
2	Projekt 2	0,955425938	6	2	Projekt 3	0,777526248	Projekt 5	0,196054994		
3	Projekt 3	1	1	2	Projekt 3	1				
4	Projekt 4	0,802415521	8	2	Projekt 3	1,463765006	Projekt 6	0,407218712		
5	Projekt 5	1	1	2	Projekt 5	1				
6	Projekt 6	1	1	2	Projekt 6	1				
7	Projekt 7	1	1	1	Projekt 7	1				
8	Projekt 8	1	1	1	Projekt 8	1				

Rang			
Rank	DMU	Score	Category
1	Projekt 8	1	1
1	Projekt 7	1	1
1	Projekt 6	1	2
1	Projekt 3	1	2
1	Projekt 5	1	2
6	Projekt 2	0,955425938	2
7	Projekt 1	0,886052916	1
8	Projekt 4	0,802415521	2

Gruppe 1: Bodenhersteller A  
 Gruppe 2: Bodenhersteller B

**Projektion**

No.	DMU I/O	Score Data	Category Projection	Difference	%	No.	DMU I/O	Score Data	Category Projection	Difference	%
1	Projekt 1	0,886052916	1			5	Projekt 5	1	2		
	Gesamtarbeitszeit	1550	1373,38202	-176,6179804	-11,39%		Gesamtarbeitszeit	507	507	0	0,00%
	Innendurchmesser	4400	5437,47167	1037,47167	23,58%		Innendurchmesser	3200	3200	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	3,363384538	0,363384538	12,11%		Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	22260	22260	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	27240	27240	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	71280	88844,9237	17564,9237	24,64%		Einbauhöhe Quenchboxer	0	0	0	0,00%
2	Projekt 2	0,955425938	2			6	Projekt 6	1	2		
	Gesamtarbeitszeit	550	525,4842658	-24,51573416	-4,46%		Gesamtarbeitszeit	913	913	0	0,00%
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	3350	3350	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2,143217478	0,143217478	7,16%		Anzahl der Verteilerböden	4	4	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	5701	11266,8431	5565,843097	97,63%		Einbauhöhe Auflageroste	21900	21900	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	19921	19921	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	88586	88586	0	0,00%
3	Projekt 3	1	2			7	Projekt 7	1	1		
	Gesamtarbeitszeit	548	548	0	0,00%		Gesamtarbeitszeit	719	719	0	0,00%
	Innendurchmesser	2820	2820	0	0,00%		Innendurchmesser	2750	2750	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%		Anzahl der Verteilerböden	2	2	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	7622	7622	0	0,00%		Einbauhöhe Auflageroste	7715	7715	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	25621	25621	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	23365	23365	0	0,00%
4	Projekt 4	0,802415521	2			8	Projekt 8	1	1		
	Gesamtarbeitszeit	1463	1173,933907	-289,0660932	-19,76%		Gesamtarbeitszeit	1225	1225	0	0,00%
	Innendurchmesser	5492	5492	0	0,00%		Innendurchmesser	4850	4850	0	0,00%
	Anzahl der Verteilerböden	3	4,556404858	1,556404858	51,88%		Anzahl der Verteilerböden	3	3	0	0,00%
	Einbauhöhe Auflageroste	17547	20074,90666	2527,906658	14,41%		Einbauhöhe Auflageroste	19855	19855	0	0,00%
	Einbauhöhe Quenchboxer	73577	73577	0	0,00%		Einbauhöhe Quenchboxer	79246	79246	0	0,00%