



Diplomarbeit

Optimale Dividendenzahlungen im Cramér-Lundberg Modell

ausgeführt am Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter der Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Peter Grandits

durch

DI Dr. Dietmar Hareter
Matr. Nr.: 9525320
2700 Wiener Neustadt, Weidengasse 9

Wien, am 18. April 2010

Für Papa

Inhaltsverzeichnis

1	Stochastische Grundlagen	1
1.1	Stochastische Prozesse, Filter und Stoppzeiten	1
1.2	Bedingter Erwartungswert und Martingale	6
1.3	Die Brownsche Bewegung und deren Eigenschaften	8
1.4	Itô-Prozesse und Itô-Integrale	11
1.5	Kettenregel für Itô-Prozesse und Itô-Formel	14
1.6	Punktprozesse	16
2	Risikotheorie	17
2.1	Ruintheorie	19
2.2	Diffusionsapproximation	26
2.3	Vergleich der Ergebnisse	29
3	Kontrolltheorie	33
3.1	Das Verifikationstheorem	39
3.2	Gestoppte Zustandsprozesse	41
4	Optimale Dividendenstrategien	43
4.1	Modelle in diskreter Zeit	43
4.2	Modelle in stetige Zeit	45
4.2.1	Beschränkte Dividendenzahlungen	46
4.2.2	Unbeschränkte Dividendenzahlungen	53
4.2.3	Die optimale Dividendenstrategie	58
4.3	Optimale Dividendenstrategien für die Diffusionsapproximation	69
4.3.1	Beschränkte Dividendenzahlungen	69
4.3.2	Unbeschränkte Dividendenzahlungen	75
4.4	Vergleich der Ergebnisse	77
5	Anhang	81
	Literatur	83

Kapitel 1

Stochastische Grundlagen

1.1 Stochastische Prozesse, Filter und Stoppzeiten

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten Grundbegriffe und dient unter anderem zur Festlegung der Notationen.

Definition 1.1 Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie von \mathbb{R} -wertigen Zufallsvariablen $X = (X_t)_{t \in I}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für stochastische Prozesse in diskreter Zeit ist die Indexmenge $I = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ bzw. für Prozesse in stetiger Zeit $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. \square

Jeder stochastische Prozess lässt sich auf drei verschiedene Arten betrachten:

1. Als Abbildung

$$\begin{aligned} X &: I \rightarrow \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \\ t &\mapsto X_t \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen auf Ω bezeichnet. $X = (X_t)_{t \in I}$ heißt *p-integrierbar*, wenn $X_t \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für alle $t \in I$ mit

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left\{ Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \mid \mathbb{E}[|Y|^p] = \int_{\Omega} |Y(\omega)|^p \mathbb{P}(d\omega) < \infty \right\}.$$

2. Als Abbildung

$$\begin{aligned} X &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^I \\ \omega &\mapsto (t \mapsto X_t(\omega)). \end{aligned}$$

Für jedes feste $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ ein *Pfad* von X . X hat per Definition eine bestimmte Eigenschaft (z.B. heißt X stetig), wenn jeder Pfad von X diese Eigenschaft besitzt (z.B. stetig ist).

3. Als Abbildung

$$\begin{aligned} X &: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Definition 1.2 Für $I = \mathbb{R}_+$ heißt ein stochastischer Prozess *cadlag* („continue à droite, limite à gauche“, französisch für „rechtsstetig mit linksseitigem Grenzwert“), falls die Abbildung $t \mapsto X_t$ für alle $t \in I$ fast sicher rechtsstetig ist und $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$ für alle $t \in I$ existiert. \square

Die Indexmenge I eines stochastischen Prozesses wird gewöhnlich als Zeitachse interpretiert, sodass $X_t(\omega)$ der zum Zeitpunkt t beobachtete Wert des Prozesses ist. Mit dem folgenden Begriff einer sogenannten Filtration wird die mit der Zeit anwachsende verfügbare Information modelliert.

Definition 1.3 Eine monoton wachsende Folge $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ von σ -Algebren auf Ω heißt *Filtration in Ω* . Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und \mathcal{F}_t für alle $t \in I$ eine Sub- σ -Algebra von \mathcal{A} , so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I})$ ein *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*. Die Filtration \mathbf{F} heißt *vollständig*, wenn \mathcal{F}_0 alle Nullmengen des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ enthält, d.h. $A \in \mathcal{F}_0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$. Für $I = \mathbb{R}_+$ heißt eine Filtration *rechtsstetig*, falls mit

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$ gilt. Eine Filtration erfüllt die „üblichen Bedingungen“, wenn sie vollständig und rechtsstetig ist. \square

Die σ -Algebra \mathcal{F}_t repräsentiert die Information, die ein Beobachter bis zur Zeit t gesammelt hat.

Definition 1.4 Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ heißt *adaptiert* an die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, falls X_t \mathcal{F}_t -messbar für alle $t \in I$ ist. Die kleinste rechtsstetige Filtration für die X adaptiert ist, heißt *natürliche Filtration* und wird mit $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in I}$ bezeichnet. \square

Wird der stochastische Prozess X beobachtet, so ist die natürliche Filtration des Prozesses

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s \mid s \in I, s \leq t) = \sigma\left(\bigcup_{s \leq t} X_s^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\right),$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel'sche σ -Algebra auf \mathbb{R} bezeichnet.

Definition 1.5 Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt *\mathbf{F} -progressiv messbar* bezüglich der Filtration $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, wenn für jedes $t \geq 0$ der Prozess als Abbildung

$$X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar ist. \square

Bemerkung 1.6 Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.5 gilt:

1. Ist X \mathbf{F} -progressiv messbar, so ist X \mathbf{F} -adaptiert.
2. Ist X \mathbf{F} -adaptiert und rechtsstetig, so ist X \mathbf{F} -progressiv messbar.

Beweis:

zu 1. Mit

$$\begin{aligned}\psi_t &: \Omega \rightarrow [0, t] \times \Omega \\ \omega &\mapsto (t, \omega)\end{aligned}$$

für $t \geq 0$ gilt für $B \in \mathcal{B}([0, t])$ und $F \in \mathcal{F}_t$

$$\psi_t^{-1}(B \times F) = \begin{cases} F \in \mathcal{F}_t & \text{für } t \in B \\ \emptyset \in \mathcal{F}_t & \text{für } t \notin B \end{cases},$$

sodass $\psi_t \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -messbar ist. Wegen $X_t = X \circ \psi_t$ ist X_t \mathcal{F}_t -messbar.zu 2. Siehe Deck [6] Lemma 7.27 auf Seite 142. \square

Die Analyse eines stochastischen Prozesses $X = (X_t)_{t \in I}$ bedeutet vor allem die Untersuchung der Eigenschaften der (zufälligen) Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$. Dabei sind Zeitpunkte mit bestimmten Eigenschaften von Interesse, die vom beobachteten Pfad und damit ebenfalls vom Zufall abhängen. Ist $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ eine Filtration, X \mathbf{F} -adaptiert und beschreibt die Zufallsvariable τ den Zeitpunkt des erstmaligen Eintritts eines beobachteten Ereignisses, so ist es eine naheliegende Forderung, dass $\{\tau \leq t\}$ in \mathcal{F}_t liegen sollte. Mit dieser Forderung kann zu jedem Zeitpunkt t entschieden werden, ob das beobachtete Ereignis eingetreten ist, oder nicht.

Definition 1.7 Eine Zufallsvariable τ heißt *Stoppzeit bezüglich der Filtration* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ (kurz: \mathbf{F} -Stoppzeit) wenn $\tau \in [0, \infty]$ und

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in I. \quad (1.1)$$

τ heißt *Optionszeit bezüglich der Filtration* \mathbf{F} wenn in (1.1) „ \leq “ durch „ $<$ “ ersetzt wird. τ ist *endlich*, falls $\tau(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$ bzw. ist τ *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $\tau(\omega) < C$ für alle $\omega \in \Omega$. \square

Stoppzeiten sind ein wichtiger Begriff in der Theorie stochastischer Prozesse, da sie bei deren Steuerung oder bei der Ermittlung optimaler Strategien eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkung 1.8 Ist $I = \mathbb{R}_+$ und τ eine Stoppzeit, dann ist $\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t - \frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \tau \leq t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Damit ist jede Stoppzeit auch Optionszeit. \square **Satz 1.9** τ ist \mathcal{F}_t -Optionszeit $\Leftrightarrow \tau$ ist \mathcal{F}_{t+} -Stoppzeit**Beweis:** Siehe Deck [6] Lemma 7.21 auf Seite 135. \square

Nach Satz 1.9 stimmen für eine rechtsstetige Filtration Stopp- und Optionszeiten überein. Aus diesem Grund wird häufig die Rechtsstetigkeit von Filtrationen vorausgesetzt, und ist für eine Filtration, welche die üblichen Bedingungen erfüllt, per Definition der Fall.

Bemerkung 1.10 Ist \mathbf{F} eine rechtsstetige Filtration, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein \mathbf{F} -adaptierter, rechtsseitig stetiger Prozess und $G \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge, dann ist die *Eintrittszeit* τ_G von G , definiert durch

$$\tau_G(\omega) := \inf \{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in G\},$$

eine \mathbf{F} -Stopppzeit. Für eine leere Menge auf der rechten Seite wird $\inf \emptyset := \infty$ gesetzt.

Beweis: Ist $X_s(\omega) \in G$ für ein $s < t$, so folgt aus der rechtsseitigen Stetigkeit des Pfades $a \mapsto X_a(\omega)$ und der Offenheit von G , dass es ein $r \in \mathbb{Q}_+$ mit $s \leq r < t$ und $X_r(\omega) \in G$ geben muss. Damit folgt

$$\{\tau_G < t\} = \bigcup_{s < t} \{X_s \in G\} = \bigcup_{r < t, r \in \mathbb{Q}_+} \{X_r \in G\} \in \mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t.$$

und die Aussage direkt aus Satz 1.9. □

Bemerkung 1.11 Für jede Filtration $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ gelten folgenden Eigenschaften:

1. Jede Konstante $c \in [0, \infty]$ – aufgefasst als konstante Funktion auf Ω – ist eine \mathbf{F} -Stopppzeit.
2. Sind τ_1 und τ_2 \mathbf{F} -Stopppzeiten, so sind auch

$$\tau_1 \wedge \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2) \quad \text{und} \quad \tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$$

\mathbf{F} -Stopppzeiten.

3. Ist $(\tau_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von \mathbf{F} -Stopppzeiten, so ist auch $\sup_{n \geq 1} \tau_n$ eine \mathbf{F} -Stopppzeit. Ist \mathbf{F} zudem rechtsseitig stetig, so ist auch $\inf_{n \geq 1} \tau_n$ eine \mathbf{F} -Stopppzeit.
4. Sind τ_1 und τ_2 \mathbf{F} -Stopppzeiten und ist $I = [0, \infty)$, so ist auch $\tau_1 + \tau_2$ eine \mathbf{F} -Stopppzeit.

Beweis:

zu 1. Trivial

zu 2. Die Behauptung folgt aus

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

und

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

da $\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und $\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ nach Voraussetzung.

zu 3. Die erste Behauptung folgt aus

$$\left\{ \sup_{n \geq 1} \tau_n \leq t \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

die zweite Behauptung folgt aus

$$\left\{ \inf_{n \geq 1} \tau_n < t \right\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

und Satz 1.9.

zu 4. Siehe Deck [6] Lemma 7.22 auf Seite 136. □

Aus Bemerkung 1.11 folgt, dass für eine Stopppzeit τ und für jedes $t \in I$ auch $\tau \wedge t$ eine Stopppzeit ist.

Definition 1.12 Für eine \mathbf{F} -Stopppzeit τ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist die σ -Algebra der Ereignisse bis zur Zeit τ durch

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in I\}$$

definiert. □

Interpretation der σ -Algebra der Ereignisse:

Tritt bei der Realisierung eines Zufallsexperiments das Ereignis $\tau = t$ ein (dies ist zum Zeitpunkt t entscheidbar), so lässt sich zur Zeit t auch entscheiden ob $A \in \mathcal{F}_\tau$ eingetreten ist.

Bemerkung 1.13 Mit $A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{A \cap \{\tau \leq t\}\}^c$ folgt $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_\tau$. Damit ist ersichtlich, dass \mathcal{F}_τ eine σ -Algebra ist. □

Bemerkung 1.14 Die Zufallsvariable τ ist \mathcal{F}_τ -messbar.

Beweis: Für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet per Definition von \mathcal{F}_τ , dass $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_\tau, \forall s \in \mathbb{R}$. □

Satz 1.15 Für Stopppzeiten τ und μ bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ gilt:

1. $\mathcal{F}_{\tau \wedge \mu} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\mu$.
2. $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\mu$ für $\tau \leq \mu$.

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.24 auf Seite 138. □

Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ kann häufig „kontrolliert“ werden, indem er gestoppt wird, sobald ein gewisses Ereignis erstmals eintritt.

Definition 1.16 Für eine Stopppzeit τ ist der *gestoppte Prozess* $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in I}$ definiert durch

$$X_t^\tau = X_{\min(t, \tau)} = X_{t \wedge \tau} \quad \forall t \in I.$$

Für $t \leq \tau(\omega)$ gilt somit $X_t^\tau(\omega) = X_t(\omega)$ und für $t \geq \tau(\omega)$ gilt $X_t^\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$, d.h. die Pfade von X^τ sind ab der Zeit τ konstant. □

Satz 1.17 Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ progressiv messbar bezüglich $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ und ist τ eine \mathbf{F} -Stopppzeit, so gilt:

1. Ist τ endlich, so ist X_τ messbar bezüglich \mathcal{F}_τ .
2. $(X_t^\tau)_{t \geq 0}$ ist progressiv messbar bezüglich \mathbf{F} .

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 7.26 auf Seite 141. □

Satz 1.18 Jeder rechtsstetige, reelle, \mathbf{F} -adaptierte Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ist progressiv messbar bezüglich $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Insbesondere ist der gestoppte Prozess $(\bar{X}_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$ rechtsstetig und progressiv messbar bezüglich \mathbf{F} .

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.27 auf Seite 142. □

1.2 Bedingter Erwartungswert und Martingale

Definition 1.19 Ist $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d.h. $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, und \mathcal{G} eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{A} , dann heißt eine Zufallsvariable $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein *bedingter Erwartungswert von X gegeben \mathcal{G}* (bzw. *bezüglich \mathcal{G}* oder *unter der Hypothese \mathcal{G}*) wenn:

(BE1) Für alle $B \in \mathcal{G}$ gilt die Mittelwerteigenschaft

$$\mathbb{E}[Y I_B] = \mathbb{E}[X I_B]. \quad (1.2)$$

(BE2) Y ist \mathcal{G} messbar. □

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modelliert für ein Ereignis B mit $\mathbb{P}(B) > 0$ die Spur- σ -Algebra (über B), definiert durch

$$\mathcal{A}_B := \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\},$$

alle Ereignisse, die zusammen mit B eintreten können. Wird der Versuch eines Zufallsexperiments nur dann als „gültig“ angesehen wenn B eintritt, so ist

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass im eingeschränkten Experiment (als E_B bezeichnet) das Ereignis A eintritt. E_B ist auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(B, \mathcal{A}_B, \mathbb{P}_B)$ definiert. Wird eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nur dann beobachtet wenn B eintritt, dann ist der statistische Mittelwert (im Limit unendlich vieler Versuche)

$$\int_B X \, d\mathbb{P}_B = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \, d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}[X I_B].$$

Die Division der Gleichung (1.2) durch $\mathbb{P}(B)$ zeigt, dass die beiden Zufallsvariablen X und Y den selben Erwartungswert unter Kenntnis von B haben. Unter der zusätzlichen Annahme, dass für ein festes $y \in Y(\Omega)$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon := \{Y \in [y, y + \varepsilon]\}$ die Bedingung $\mathbb{P}(B_\varepsilon) > 0$ gilt, folgt aus $B_\varepsilon \in \mathcal{G}$:

$$\int_{Y \in [y, y + \varepsilon]} Y \, d\mathbb{P}_{B_\varepsilon} = \frac{1}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} \int_{Y \in [y, y + \varepsilon]} Y \, d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} \int_{Y \in [y, y + \varepsilon]} X \, d\mathbb{P}$$

Ist $\omega_0 \in \Omega$ ein Punkt mit $y = Y(\omega_0)$, so konvergiert die linke Seite der obigen Gleichung gegen $Y(\omega_0)$, und deshalb auch die rechte Seite, d.h. es gilt

$$Y(\omega_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\mathbb{P}(B_\varepsilon)} \int_{Y \in [y, y + \varepsilon]} X \, d\mathbb{P} \right].$$

$Y(\omega_0)$ ist somit der Grenzwert von bedingten Erwartungswerten von X , wobei B_ε von ω_0 abhängt. Diese Eigenschaft rechtfertigt die Bezeichnung der Zufallsvariable Y als bedingter Erwartungswert von X .

Die Existenz bedingter Erwartungswerte folgt in einfacher Weise aus dem Satz von Radon-Nikodym, siehe z.B. Bauer [3] Kapitel 15 ab Seite 115.

Satz 1.20 *Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes*

Sind Y und Z zwei bedingte Erwartungswerte von X gegeben \mathcal{G} , dann gilt $Y = Z$ \mathbb{P} -f.s.

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.2 auf Seite 121. \square

Bemerkung 1.21 Im Folgenden wird mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ein konkreter, nicht näher spezifizierter, bedingter Erwartungswert von X gegeben \mathcal{G} bezeichnet (vergleiche Satz 1.20). Gleichungen bzw. Ungleichungen mit bedingten Erwartungswerten sind deshalb stets mit dem Zusatz „ \mathbb{P} -fast sicher“ zu lesen, um die nicht eindeutige Spezifikation von $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ zu berücksichtigen. \square

Satz 1.22 *Integral- und Projektionseigenschaften bedingter Erwartungswerte*

Sind $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und \mathcal{G} eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{A} , dann gilt:

- (a) Linearität: $\mathbb{E}[\alpha X + Y|\mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Monotonie: Ist $X \geq Y$, dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Ist $X \geq 0$, so folgt als Spezialfall $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
- (c) Dreiecksungleichung: $|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}]$.
- (d) Erwartungstreue: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
- (e) Ist $X = Y$ \mathbb{P} -f.s., dann gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
- (f) Turmeigenschaft: Ist $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{G} , so gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
- (g) Unabhängigkeit: Ist X unabhängig von \mathcal{G} , dann gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- (h) Für $X_n \rightarrow X$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- (i) Taking out what is known: Ist $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und X messbar bezüglich \mathcal{G} , so gilt $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Für $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und X messbar bezüglich \mathcal{G} folgt als Spezialfall $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
- (j) Jensen'sche Ungleichung: Hat X Werte im offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ist $c(\cdot)$ eine konvexe C^1 -Funktion auf I mit $c(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in I$ und es gilt $\mathbb{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq c(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$.
- (k) Fatou: Für eine Folge integrierbarer nicht-negativer Zufallsvariablen X_n gilt $\mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n|\mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$.

Beweis: Für die Aussagen (a)-(d) siehe Deck [6] Lemma 7.3 auf Seite 121, für die Aussagen (e)-(i) siehe Deck [6] Satz 7.4 auf Seite 122, für die Aussage (j) siehe Deck [6] Satz 7.7 auf Seite 125 und für die Aussage (k) siehe Deck [6] Lemma 11.6 auf Seite 218. \square

In der Theorie der später benötigten stochastischen Integrale spielen Martingale eine zentrale Rolle.

Definition 1.23 Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit $I \subset \mathbb{R}$ und ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein \mathbf{F} -adaptierter \mathcal{L}^1 -Prozess, dann heißt X

- (a) *Martingal* bezüglich \mathbf{F} , falls $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \forall s \leq t$,
- (b) *Supermartingal* bezüglich \mathbf{F} , falls $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s \quad \forall s \leq t$,
- (c) *Submartingal* bezüglich \mathbf{F} , falls $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s \quad \forall s \leq t$.

Eine abgekürzte Sprechweise für „Martingal bezüglich \mathbf{F} “ ist „ \mathbf{F} -Martingal“ (analog für Sub- und Supermartingale). Ist $p \in [1, \infty)$ und $X_t \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für alle $t \in I$, so wird X ein \mathcal{L}^p -(*Super- bzw. Sub-*)Martingal genannt. \square

Bemerkung 1.24 Ist X ein Submartingal, so ist $-X$ ein Supermartingal und umgekehrt. Es genügt deshalb, Sätze nur für Submartingale zu formulieren und zu beweisen. \square

Im Folgenden sind einige wichtige und interessante Eigenschaften von Martingalen dargestellt.

Satz 1.25 *Elementare Stabilitätseigenschaften von Submartingalen*

Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein \mathcal{L}^1 -Prozess und adaptiert an $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, dann gilt:

- (a) Ist X ein \mathbf{F} -Submartingal, so ist X auch ein \mathbf{F}^X -Submartingal.
- (b) Ist X ein \mathbf{F} -Martingal und $c(\cdot)$ eine konvexe C^1 -Funktion mit $c(X_t) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für alle $t \in I$, so ist $(c(X_t))_{t \in I}$ ein Submartingal. Speziell ist $(|X_t|)_{t \in I}$ ein Submartingal.

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.14 auf Seite 130 \square

Satz 1.26 Ist $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ein \mathbf{F} -Submartingal, dann gilt

$$(X_t)_{t \in [0, T]} \text{ ist ein Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T]$$

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.15 auf Seite 130 \square

Einer der wichtigsten Eigenschaften von Martingalen ist die *Stoppinvarianz der Martingaleigenschaft*. Diese wird auch als „Hauptsatz der Martingaltheorie“ bezeichnet und verallgemeinert die definierende (Sub-)Martingaleigenschaft von Zeiten $s \leq t$ auf Stoppzeiten $\mu \leq \tau$.

Satz 1.27 *Fundamentales Lemma von Doob (Optional Sampling Theorem)*

Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges \mathbf{F} -Submartingal und sind τ und μ beschränkte \mathbf{F} -Stoppzeiten mit $\mu \leq \tau$, dann sind X_μ und X_τ integrierbar und es gilt

$$X_\mu \leq \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\mu] \tag{1.3}$$

Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein \mathcal{L}^p -Martingal mit $p \in [1, \infty)$, so sind $X_\mu, X_\tau \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und in (1.3) gilt Gleichheit.

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 7.31 auf Seite 146. \square

Satz 1.28 *Stoppssatz*

Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges \mathbf{F} -Submartingal (bzw. Martingal) und τ eine beliebige \mathbf{F} -Stoppzeit, dann ist auch X^τ ein rechtsstetiges \mathbf{F} -Submartingal (bzw. Martingal).

Beweis: Siehe Deck [6] Korollar 7.32 auf Seite 147. \square

1.3 Die Brownsche Bewegung und deren Eigenschaften

Definition 1.29 Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt ein *Prozess mit unabhängigen Zuwächsen*, wenn für alle $m \geq 1$ und alle Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$ die Zufallsvariablen

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$$

stochastisch unabhängig sind. \square

Definition 1.30 Sei $x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ und $B(x, \mu, \sigma^2) = (B_t(x, \mu, \sigma^2))_{t \geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit den Eigenschaften

- (B1) $B_0 = x$ \mathbb{P} -f.s.,
- (B2) B hat stetige Pfade,
- (B3) $\forall 0 \leq s \leq t$ gilt $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$,
- (B4) $\forall 0 \leq s \leq t$ ist $B_t - B_s$ stochastisch unabhängig von der durch $(B_u)_{u \leq s}$ erzeugten σ -Algebra.

Dann heißt $B(x, \mu, \sigma^2)$ eine *Brownsche Bewegung* mit Startwert x , Drift μ und Diffusionskoeffizient σ . \square

Die Brownsche Bewegung ist einer der wichtigsten stetigen stochastischen Prozesse. Sie hat einerseits interessante mathematische Eigenschaften, andererseits lassen sich viele weitere Prozesse durch sie darstellen – etwa stetige Martingale und Diffusionsprozesse (siehe später). Norbert Wiener entwickelte 1923 als erster ein mathematisch korrektes Modell für die Brownsche Bewegung. Die standardisierte Brownsche Bewegung mit Startwert 0, Drift 0 und Diffusionskoeffizient 1 wird deshalb *Wiener-Prozess* genannt und mit $W = (W_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet. Wird im Folgenden von einer Brownschen Bewegung gesprochen und mit W bezeichnet, so ist stets eine standardisierte Brownsche Bewegung gemeint.

Aus der dritten Eigenschaft (B3) folgt, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen von $B(x, \mu, \sigma^2)$ eindeutig bestimmt sind. Die vierte Eigenschaft (B4) (Unabhängigkeitseigenschaft) impliziert, dass $B(x, \mu, \sigma^2)$ ein Markovprozess ist, d.h. die zukünftige Entwicklung hängt nur vom aktuellen Zustand, aber nicht von der Vergangenheit ab.

Eine Brownsche Bewegung $(B_t(x, \mu, \sigma^2))_{t \geq 0}$ lässt sich mit Hilfe der standardisierten Brownschen Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$ als

$$B_t(x, \mu, \sigma^2) = x + t\mu + \sigma W_t \quad \forall t \geq 0$$

schreiben (diese Beziehung kann einfach aus der Definition von $B(x, \mu, \sigma^2)$ und den Eigenschaften der Normalverteilung abgeleitet werden).

Da nach Definition des Wiener-Prozesses $W_0 = 0$ \mathbb{P} -f.s. und aus (B3) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ folgt, gilt für die standardisierte Brownsche Bewegung

$$W_t \sim \sqrt{t} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{und damit} \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t. \quad (1.4)$$

Satz 1.31 Für die Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ gilt:

1. W ist ein Martingal.
2. Die Zufallsvariable $W_t^2 - t$ ist ein Martingal.

Beweis:

zu 1. Da die Brownsche Bewegung unabhängige Zuwächse hat, gilt für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = W_s. \end{aligned}$$

zu 2. Wieder unter Ausnutzung der unabhängigen Zuwächse folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [(W_t - W_s + W_s)^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E} [(W_t - W_s)W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} [W_s^2 | \mathcal{F}_s] - t \\ &= t - s + 2W_s \mathbb{E} [(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] + W_s^2 - t = W_s^2 - s. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 1.32 Eine *Zerlegung* von $[\alpha, \beta]$ ist eine Menge $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ mit $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \beta$. Die positive Zahl

$$\Delta(\mathcal{Z}) = \max_{i=1, \dots, N} (t_i - t_{i-1})$$

heißt *Feinheit* von \mathcal{Z} . Eine Folge von Zerlegungen $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Zerlegungsnullfolge*, wenn $\Delta(\mathcal{Z}_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. \square

Satz 1.33 Für $f \in C^1([\alpha, \beta])$, also eine auf $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbare Funktion, und eine Zerlegungsnullfolge $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[\alpha, \beta]$ mit $\mathcal{Z}_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{N_n}^{(n)}\}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} \left[f(t_{k+1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)}) \right]^2 = 0.$$

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 2.6 auf Seite 23. \square

Satz 1.34 *Quadratische Variation der Brownschen Bewegung*

Für eine Brownsche Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ und einer Folge $t_k^{(n)} = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$ mit $0 \leq \alpha < \beta$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right)^2 = \beta - \alpha \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 2.8 auf Seite 24. \square

Aus Satz 1.33 und Satz 1.34 folgt, dass \mathbb{P} -f.s. jeder Pfad einer standardisierten Brownschen Bewegung in keinem Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar ist – dies gilt auch für eine beliebige Brownsche Bewegung $B(x, \mu, \sigma^2)$. Es lässt sich weiters zeigen, dass \mathbb{P} -f.s. jeder Pfad einer Brownschen Bewegung zu keinem Zeitpunkt $t \geq 0$ differenzierbar ist.

Bemerkung 1.35 Die Pfade einer Brownschen Bewegung sind von *unbeschränkter Variation* auf $[\alpha, \beta]$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{Z}_n} \left\{ \sum_{k=0}^n |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \right\} = \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von $[\alpha, \beta]$ gebildet wird. Dies folgt für eine Zerlegungsnullfolge $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[\alpha, \beta]$ mit $\mathcal{Z}_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{N_n}^{(n)}\}$ aus der Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} \left(W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right)^2 \leq \max_{k=1, \dots, N_n-1} \left| W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right| \sum_{k=0}^{N_n-1} \left| W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}} \right|,$$

denn das Maximum des ersten Ausdrucks auf der rechten Seite geht Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der Brownschen Bewegung gegen 0, sodass die Summe gegen ∞ gehen muss – andernfalls würde die linke Seite nicht gegen $\beta - \alpha$ konvergieren.

Es ist deshalb nicht möglich, für reelle Funktionen $f(\cdot)$ auf $[\alpha, \beta]$ (selbst falls f stetig ist) das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW_t \quad (1.5)$$

als Riemann-Stieltjes-Integral zu definieren. \square

1.4 Itô-Prozesse und Itô-Integrale

Wie bereits im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, kann ein Integral der Form (1.5) nicht als Riemann-Stieltjes-Integral definiert werden. Deshalb werden Integrale dieser Form zunächst für „elementare“ Funktionen als geeignete Summe definiert, und dann auf eine größere Klasse durch Grenzübergang fortgesetzt.

In diesem Abschnitt sind nur die Grundidee der Definition und der Fortsetzung sowie einige wichtige Ergebnisse dargestellt, da eine vollständige Behandlung des Themas den Rahmen dieser Einführung sprengen würde. Eine umfangreiche Darstellung der gesamten Theorie sowie viele zusätzliche Bemerkungen und Aussagen ist in Deck [6] zu finden.

Definition 1.36 Der Vektorraum $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$ aller *Treppenfunktionen* auf $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ besteht aus allen Funktionen $f(\cdot)$, die mit $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \beta$ und $e_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, N$ in der Form

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) + e_N \mathbb{1}_{\{\beta\}}(t) \quad (1.6)$$

dargestellt werden können ($\mathbb{1}_{\{t\}}(\cdot)$ ist hier und im Folgenden die Indikatorfunktion). \square

Definition 1.37 Ist $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f \in \mathcal{T}([\alpha, \beta])$ mit der Darstellung (1.6), so heißt

$$I(f) := \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW_t = \sum_{j=0}^{N-1} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \quad (1.7)$$

das *einfache Wiener-Integral* von (bzw. über) f . \square

Satz 1.38 *Elementare Itô-Isometrie*

Für Integrale der Form (1.7) gilt

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^2 dt. \quad (1.8)$$

Beweis: Der entscheidende „Trick“ der stochastischen Integrationstheorie (das Verschwinden der „Nicht-Diagonaltheme“) ist bereits in folgender Rechnung zu sehen. Hier wird

wesentlich von der Unabhängigkeit und Zentriertheit der Zuwächse gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dW_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e_i e_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2 \mathbb{E} \left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right] \\
&\quad + \sum_{i \neq j} e_i e_j \mathbb{E} \left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2 \mathbb{E} \left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right] \\
&\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2 (t_{i+1} - t_i)^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^2 \, dt
\end{aligned}$$

Der zweite Summand im dritten Teil ist 0 aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse. \square

Gleichung (1.8) ist der wesentliche Schlüssel zur Erweiterung des Wiener Integrals. Sie besagt, dass die lineare Abbildung $f \mapsto I(f)$ eine Isometrie vom Raum $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$ nach $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist. Diese Abbildung lässt sich damit stetig auf den \mathcal{L}^2 -Abschluss von $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$, d.h. auf alle Funktionen die Grenzwert einer geeigneten Folge $f_n \in \mathcal{T}([\alpha, \beta])$ sind, fortsetzen (der Abschluss von $\mathcal{T}([\alpha, \beta])$ wird mit $\mathcal{L}^2([\alpha, \beta], \lambda)$ bezeichnet). Aus $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^2([\alpha, \beta], \lambda)$ folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2([\alpha, \beta], \lambda)$ ist, sodass wegen der Itô-Isometrie auch $(I(f_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist, deren Grenzwert mit $I(f)$ bezeichnet wird. Eine genaue Darstellung dieser Erweiterung ist in Deck [6] Kapitel 2 zu finden.

Das Wiener Integral ist zum sogenannten Itô-Integral verallgemeinerbar, indem zunächst die Treppenfunktionen durch Treppenprozesse ersetzt werden, und dann per Dichtheitssatz das Integral stetig fortgesetzt wird. Im ersten Schritt der Fortsetzung wird für quadratintegrierbare Integranden die Itô-Isometrie verallgemeinert und das fortgesetzte Integral als Limes im quadratischen Mittel definiert. Im zweiten Schritt wird mittels stochastischer Konvergenz die Klasse der zulässigen Integranden nochmals vergrößert. Erst diese zweite Klasse ist hinreichend groß für die Entwicklung des Itô'schen Differentialkalküls.

Zunächst wird eine Klasse von einfachen Integranden für das Itô-Integral festgelegt.

Definition 1.39 Ist $f = (f_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ein an die Filtration \mathbf{F} adaptierter, reeller Prozess und gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ von $[\alpha, \beta]$ sowie Zufallsvariablen $e_j, j = 0, \dots, N$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass für alle $(t, \omega) \in [\alpha, \beta] \times \Omega$

$$f_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) + e_N(\omega) \mathbb{1}_{\{\beta\}}(t) \quad (1.9)$$

gilt, so heißt f **\mathbf{F} -adaptierter Treppenprozess**, kurz $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$. Für $p \in [1, \infty)$ wird $\mathcal{T}_a^p([\alpha, \beta]) := \mathcal{T}_a([\alpha, \beta]) \cap \mathcal{L}_a^p([\alpha, \beta])$ gesetzt, wobei $\mathcal{L}_a^p([\alpha, \beta])$ alle \mathbf{F} -adaptierten Funktion $f \in \mathcal{L}^p([\alpha, \beta] \times \Omega, \mathcal{B}([\alpha, \beta]) \otimes \mathcal{A}, \lambda \otimes \mathbb{P})$ bezeichnet. Die Menge aller beschränkten $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ wird mit $\mathcal{T}_a^\infty([\alpha, \beta])$ bezeichnet. \square

Bemerkung 1.40 Für $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ gilt $f(\cdot, \omega) \in \mathcal{T}([\alpha, \beta])$, $\forall \omega \in \Omega$. Die Pfade eines Treppenprozesses sind Treppenfunktionen mit festen Sprungzeiten t_i , d.h. lediglich die „Sprunghöhen“ variieren mit ω . \square

Definition 1.41 Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess, so heißt jeder Prozess $Y = (Y_t)_{t \in I}$ mit $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in I$ eine *Version* von X . \square

Definition 1.42 Ist $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ wie in (1.9), so ist das *Itô-Integral von (bzw. über) f* durch

$$I(f) := \int_{\alpha}^{\beta} f_t \, dW_t = \sum_{j=0}^{N-1} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \quad (1.10)$$

definiert. \square

Der Unterschied von (1.10) zum einfachen Wiener-Integral (1.7) ist, dass die e_j in (1.10) Zufallsvariablen sind, in (1.7) hingegen Konstanten. Dies wird durch die Schreibweise f_t anstelle von $f(t)$ formal berücksichtigt. Wie auch in Satz 1.38 kann für $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ die elementare Itô-Isometrie (siehe (1.8)) gezeigt werden.

Satz 1.43 *Elementare Itô-Isometrie*

Für $f \in \mathcal{T}_a([\alpha, \beta])$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\alpha}^{\beta} f_t \, dW_t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f_t^2 \, dt \right] = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\lambda \otimes \mathbb{P})}^2, \quad (1.11)$$

wobei generell $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$ die Halbnorm in \mathcal{L}^p bezeichnet.

Beweis: Siehe Deck [6] Lemma 4.2 auf Seite 65. \square

Der folgende Dichtheitssatz hat eine zentrale Bedeutung in der Erweiterung des Itô-Integrals auf eine größere Klasse von integrierbaren Funktionen.

Satz 1.44 Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist $\mathcal{T}_a^p([\alpha, \beta])$ dicht in $\mathcal{L}_a^p([\alpha, \beta])$.

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 4.5 auf Seite 67. \square

Definition 1.45 Für $0 \leq \alpha < \beta$ und $f \in \mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$ sei $f_n \in \mathcal{T}_a^2([\alpha, \beta])$ mit $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$. Dann ist das Itô-Integral über f durch

$$I(f) := \int_{\alpha}^{\beta} f_t \, dW_t := \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(t) \, dW_t$$

definiert. \square

Mit dieser Definition ist $f \mapsto I(f)$ eine Abbildung, von $\mathcal{L}_a^2([\alpha, \beta])$ in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Deck zeigt in [6] ab Seite 70 die Fortsetzung des Itô-Integrals auf den sogenannten *Raum $\mathcal{L}_\omega^p([\alpha, \beta])$ der pfadweise adaptierten \mathcal{L}^p -Prozesse*, unter Verwendung geeigneter Metriken. Diese Fortsetzung und die Entwicklung der dazu notwendigen Sätze ist umfangreich und wird für die spätere Theorie nicht benötigt. Das Wesentliche ist, durch die dargestellte Theorie die grundlegende Idee der Definition von Itô-Integralen und deren Berechnung zu erkennen.

Eine wesentliche Eigenschaft, die Grundlage für die Entwicklung der später dargestellten Integrationstheorie ist, beinhaltet der folgende Satz.

Satz 1.46 Ist $f \in \mathcal{L}_\omega^2([0, \infty))$, dann besitzt der Prozess

$$\left(\int_0^t f_s dW_s \right)_{t \geq 0}$$

eine stetige Version.

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 5.5 auf Seite 85. \square

Im Folgenden wird stets eine stetige Version des Itô-Integrals betrachtet.

1.5 Kettenregel für Itô-Prozesse und Itô-Formel

Definition 1.47 Ein *Itô-Prozess* $(X_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ist ein stetiger \mathbf{F} -adaptierter Prozess, der für alle $t \in [\alpha, \beta]$ mit geeigneten $f \in \mathcal{L}_\omega^1([\alpha, \beta])$ und $g \in \mathcal{L}_\omega^2([\alpha, \beta])$ eine Darstellung der Form

$$X_t = X_\alpha + \int_\alpha^t f_r dr + \int_\alpha^t g_r dW_r \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (1.12)$$

besitzt. Ist $(h_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ein \mathbf{F} -adaptierter Prozess mit $hf \in \mathcal{L}^1([\alpha, \beta])$ und $hg \in \mathcal{L}^2([\alpha, \beta])$, so wird

$$\int_s^t h_r dX_r := \int_s^t h_r f_r dr + \int_s^t h_r g_r dW_r \quad (1.13)$$

gesetzt. \square

Bemerkung 1.48 Aus (1.12) folgt für alle $\alpha \leq s < t \leq \beta$

$$X_t - X_s = \int_s^t f_r dr + \int_s^t g_r dW_r \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (1.14)$$

Die Gleichung (1.14) wird kurz

$$dX_t = f_t dt + g_t dW_t \quad (1.15)$$

geschrieben. \square

Satz 1.49 *Itô-Formel* oder *Hauptsatz der Itô'schen Integrationstheorie*

Sei $f \in \mathcal{L}_\omega^1([\alpha, \beta])$, $g \in \mathcal{L}_\omega^2([\alpha, \beta])$, X_α eine \mathbf{F} -messbare Zufallsvariable und $(X_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ein Itô-Prozess der Form (1.12). Ist $F \in C^{1,2}([\alpha, \beta] \times \mathbb{R})$ und $F_t := F(t, X_t)$, so gilt für $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$

$$F_t - F_s = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(u, X_u) du + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, X_u) (dX_u)^2 \quad (1.16)$$

\mathbb{P} -f.s., wobei $(dX_u)^2$ durch formales Ausmultiplizieren nach den Regeln $(du)^2 = 0$, $du dW_u = 0$ und $(dW_u)^2 = du$ berechnet wird und somit $(dX_u)^2 = g^2(u, X_u) du$ folgt.

In differentieller Schreibweise lautet die Itô-Formel:

$$dF(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 5.9 auf Seite 91. \square

Definition 1.50 Ist $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein reeller Prozess und $(\mathcal{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegungsnullfolge von $[0, t]$ mit $\mathcal{Z}_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{N_n}^{(n)}\}$, dann wird die durch

$$\langle X \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} \left[X_{t_{k+1}^{(n)}} - X_{t_k^{(n)}} \right]^2 \quad (1.17)$$

definierte Zufallsvariable *quadratische Variation von X zur Zeit t* genannt. \square

Satz 1.51 *Quadratische Variation von Itô-Prozessen*

Ist $f \in \mathcal{L}_\omega^1([\alpha, \beta])$ und $g \in \mathcal{L}_\omega^2([\alpha, \beta])$, dann gilt für den Itô-Prozess (1.12)

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t g_s^2 ds.$$

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 5.14 auf Seite 98. \square

Bemerkung 1.52 Mit Satz 1.51 kann die Itô-Formel (1.16) in der Form

$$F_t - F_s = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(u, X_u) du + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, X_u) d\langle X \rangle_u \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

geschrieben werden. \square

Satz 1.53 *Produktregel für Itô-Prozesse*

Sind $(X_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ und $(Y_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ Itô-Prozesse, dann ist auch $(X_t Y_t)_{t \in [\alpha, \beta]}$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

In integraler Form gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_\alpha^\beta X_t dY_t = X_\beta Y_\beta - X_\alpha Y_\alpha - \int_\alpha^\beta Y_t dX_t - \int_\alpha^\beta dX_t dY_t.$$

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 5.12 auf Seite 96. \square

Definition 1.54 *Stochastische Differentialgleichung*

Sind $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ beschränkt und Lipschitz-stetig und ist X_0 eine vom Prozess $(W_t)_{t \geq 0}$ unabhängige Zufallsvariable, dann wird

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (1.18)$$

eine *stochastische Differentialgleichung* bzw. *SDE* (aus dem englischen Begriff „stochastic differential equation“) genannt. μ wird *Drift* und σ *Diffusionskoeffizient* genannt. \square

Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung sind in Kapitel 3 zu finden.

Eine wichtige Frage für Itô-Integrale ist, unter welchen Bedingungen das Integral ein Martingal ist. Der folgende Satz zeigt, dass Itô-Integrale mit quadratintegrierbaren Integranden stets Martingals sind.

Satz 1.55 Ist $f \in \mathcal{L}_a^2([0, \infty))$, dann ist der Prozess

$$\left(\int_0^t f_s dW_s \right)_{t \geq 0}$$

ein $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -Martingal bezüglich des von der Brownschen Bewegung erzeugten Filters.

Beweis: Siehe Deck [6] Satz 8.1 auf Seite 149. \square

1.6 Punktprozesse

Definition 1.56 Ein wachsender stochastischer Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{N} und $N_0 = 0$ wird *Punktprozess* genannt. Sind die Sprunghöhen jeweils 1, d.h. $N_t - N_{t-} \in \{0, 1\}$, so heißt der Punktprozess *einfach*. Die Zeitpunkte der Sprünge werden *Eintrittszeitpunkte* genannt und mit $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots$ bezeichnet. \square

Definition 1.57 Ein Punktprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit den Eigenschaften

(P1) N_t hat stationäre und unabhängige Zuwächse,

(P2) $\mathbb{P}(N_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ für $h \rightarrow 0$,

(P3) $\mathbb{P}(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$ für $h \rightarrow 0$,

wird *homogener Poisson-Prozess mit Rate λ* genannt. \square

Satz 1.58 Für einen Punktprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ mit Eintrittszeitpunkten $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots$ und $\lambda > 0$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(a) $(N_t)_{t \geq 0}$ ist ein homogener Poisson-Prozess mit Rate λ .

(b) $(N_t)_{t \geq 0}$ hat unabhängige Zuwächse und $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ für alle $t \geq 0$.

(c) Die Zwischeneintrittszeitpunkte $\{T_k - T_{k-1} : k \geq 1\}$ sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ .

(d) Ist $t > 0$, N_t poissonverteilt mit Parameter λt und $\{N_t = n\}$ gegeben, haben die Eintrittszeitpunkte T_i die selbe Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen Gleichverteilungen auf $[0, t]$.

Beweis: Siehe Schmidli [18] Behauptung C.2 auf Seite 183. \square

Kapitel 2

Risikotheorie

Die Grundidee einer Versicherung ist der *Ausgleich im Kollektiv*, d.h. die Zusammenfassung mehrerer gleichartiger Risiken zu einem Bestand (Portfolio), in dem sich günstige und ungünstige Einzelrisikoverläufe ausgleichen können.

Im individuellen Modell wird der Gesamtschaden eines Bestandes als Summe der Schäden aller Einzelrisiken berechnet. Ist R_i der Schaden des i -ten Risikos in einer Periode, und besteht der Bestand aus insgesamt n Risiken, so ist der Gesamtschaden

$$S = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Die Einzelrisiken R_i werden dabei als unabhängig vorausgesetzt. Sind die einzelnen Risiken zusätzlich identisch verteilt (homogenes Portfolio), so kann der Ausgleich im Kollektiv am einfachsten anhand der Tschebyscheff'schen Ungleichung gezeigt werden. In diesem Fall gilt $\mathbb{E}[S] = n \mathbb{E}[R_1]$ bzw. $\text{Var}[S] = n \text{Var}[R_1]$ und aus der Ungleichung von Tschebyscheff folgt

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S - \mathbb{E}[S]|}{\mathbb{E}[S]} \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S - \mathbb{E}[S]| \geq \varepsilon \mathbb{E}[S]) \leq \frac{\text{Var}[S]}{(\varepsilon \mathbb{E}[S])^2} = \frac{\text{Var}[R_1]}{n \varepsilon^2 \mathbb{E}[R_1]}.$$

Wie aus der Ungleichung ersichtlich ist, wird die Wahrscheinlichkeit, dass S zum erwarteten Gesamtschaden $\mathbb{E}[S]$ relativ um mehr als ε abweicht, mit steigendem Bestand immer kleiner. Insbesondere konvergiert die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

Im Gegensatz zum individuellen Modell werden im kollektiven Modell nicht die Einzelrisiken, sondern Einzelschäden betrachtet. Die Höhe des i -ten Schadens im gesamten Bestand wird durch die Zufallsvariable Y_i und die Anzahl der Schäden durch die Zufallsvariable N beschrieben. Die Y_i werden als unabhängig und auch unabhängig von N vorausgesetzt, und unterliegen der selben Verteilung. Der Gesamtschaden S ist durch die Zufallssumme

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

gegeben. Mit Hilfe der Iterativität des Erwartungswertes können einfache Formeln für den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens abgeleitet werden:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \mathbb{E}[Y]] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[Y], \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \mathbb{E}[\text{Var}[S|N]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \text{Var}[Y]] + \text{Var}[N \mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[N] \text{Var}[Y] + [\mathbb{E}[Y]]^2 \text{Var}[N]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Häufig wird im kollektiven Modell eine poissonverteilte Schadenanzahl mit Parameter λ , d.h. $N \sim P(\lambda)$, verwendet. Die Verteilung des Gesamtschadens S wird in diesem Fall *zusammengesetzte Poissonverteilung* bzw. *Compound Poisson Distribution* (CP) genannt. Für ein CP-Modell folgt aus der obigen Darstellung des Erwartungswertes und der Varianz

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \mathbb{E}[Y] \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}[S] = \lambda \mathbb{E}[Y^2].$$

Ist $F(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Schadenshöhen Y_i , so wird das CP-Modell durch $S \sim CP(\lambda, F(\cdot))$ abgekürzt.

Satz 2.1 Die Summe $S = S_1 + \dots + S_n$ von n unabhängigen CP-Verteilungen mit $S_i \sim CP(\lambda_i, F_i(\cdot))$ ist wieder CP-verteilt mit $S \sim CP(\lambda, F(\cdot))$ wobei

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x).$$

Beweis: Siehe Mikosch [14] Behauptung 3.3.4 auf Seite 118. □

Das kollektive Modell ist Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen.

Das klassische Modell der Risikothorie geht auf die Arbeiten von Filip Lundberg und Harald Cramér zurück. Bei näherer Untersuchung des klassischen Risikomodells zeigt sich, dass viele Eigenschaften und Aussagen von umfangreicheren und komplizierteren Modellen in diesem einfachen Modell bereits enthalten sind.

Im klassischen Cramér-Lundberg Modell ist der Überschuss (Gewinn) eines Portfolios zum Zeitpunkt t

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (2.3)$$

wobei $X_0 = x$ das Anfangskapital, $c > 0$ die Prämienrate und N_t ein Poissonprozess mit Rate λ ist. N_t gibt die Anzahl der Schäden im Intervall $(0, t]$ an. Die Schadenshöhen $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind eine Folge von unabhängigen positiven Zufallsvariablen die der selben Verteilung unterliegen und unabhängig von $(N_t)_{t \geq 0}$ sind. Die Schadenszeitpunkte sind $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$, wobei zur Vereinfachung der späteren Schreibweise $T_0 = 0$ gesetzt wird. Weiters wird die Verteilungsfunktion der Schadenshöhe Y_i mit $G(\cdot)$ bezeichnet, deren momenterzeugende Funktion mit $M_Y(r) = \mathbb{E}[e^{rY_i}]$ und deren Momente mit $\mu_n = \mathbb{E}[Y_i^n]$, wobei für eine einfachere Schreibweise $\mu := \mu_1$ gesetzt wird. Nachdem die Zufallsvariablen Y_i als positiv vorausgesetzt sind, ist $G(x) = 0$ für $x < 0$.

2.1 Ruintheorie

Das Hauptinteresse der Ruintheorie liegt in der Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit, d.h. jener Wahrscheinlichkeit, mit der X_t zu einem Zeitpunkt negativ wird. Mit der Ruinzeit τ , definiert durch

$$\tau = \inf \{t : X_t < 0\}$$

und $\inf \emptyset = \infty$, ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Anfangskapital von x der Ruin vor dem Zeitpunkt t eintritt:

$$\psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau \leq t \mid X_0 = x] = \mathbb{P}\left[\inf_{0 < s \leq t} X_s < 0 \mid X_0 = x\right] \quad (2.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ruins bei einem Anfangskapital von x ist dementsprechend

$$\psi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = \mathbb{P}\left[\inf_{t > 0} X_t < 0 \mid X_0 = x\right] = \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

Es ist einfach nachzuprüfen, dass $\psi(x, t)$ fallend in x und wachsend in t ist.

Ruin kann im klassischen Cramér-Lundberg Modell nur durch einen Schaden eintreten. Es ist deshalb sinnvoll, den Überschuss an den einzelnen Schadenszeitpunkten (nach Abzug des Schadens) zu betrachten. Die Darstellung erfolgt am einfachsten mit Hilfe der Zufallsvariablen $Z_i = c(T_i - T_{i-1}) - Y_i$, d.h. Z_i ist der Überschuss zwischen dem i -ten und dem $(i-1)$ -ten Schaden nach Auszahlung des i -ten Schadens. Für den Überschussprozess gilt

$$X_{T_n} = x + \sum_{i=1}^n Z_i,$$

d.h. er ist eine einfache Irrfahrt.

Nach Satz 1.58 Punkt (c) gilt $T_i - T_{i-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ und damit

$$\mathbb{E}[c(T_i - T_{i-1}) - Y_i] = c\mathbb{E}[T_i - T_{i-1}] - \mathbb{E}[Y_i] = \frac{c}{\lambda} - \mu.$$

Satz 2.2 Im klassischen Cramér-Lundberg Modell gilt

$$\tau < \infty \text{ f.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[c(T_i - T_{i-1}) - Y_i] < 0,$$

d.h. $\psi(x) = 1 \forall x$, falls $c < \lambda\mu$.

Beweis: Vergleiche Mikosch [14] Behauptung 4.1.3 auf Seite 159. □

Als Konsequenz aus Satz 2.2 wird im Folgenden angenommen, dass die sogenannte *Gewinnbedingung* $c > \lambda\mu$ erfüllt ist. Die Bezeichnung „Gewinnbedingung“ kommt aus

$$\mathbb{E}[X_t - x] = (c - \lambda\mu)t$$

d.h. die Prämieinnahmen sind „im Durchschnitt“ höher als die durch Schäden verursachten Ausgaben.

Satz 2.3 Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Cramér-Lundberg-Prozess und τ eine endliche Stoppzeit, dann ist $(X_{\tau+t} - X_\tau)_{t \geq 0}$ ein Cramér-Lundberg-Prozess mit Startkapital 0 und der Prozess ist unabhängig von \mathcal{F}_τ (den durch $(X_t)_{t \geq 0}$ erzeugten Filter).

Beweis: Siehe Schmidli [18] Lemma 4.1 auf Seite 64. \square

Die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit erfolgt über eine Differentialgleichung, die aus folgender Überlegung hergeleitet wird: Ist T die Zeit bis zum ersten Schaden, h klein und positiv und tritt im Intervall $(0, T \wedge h]$ kein Ruin ein, dann ist der ab $T \wedge h$ startende Prozess ein Cramér-Lundberg-Prozess mit Anfangskapital $X_{T \wedge h}$. Im Folgenden ist $\delta(x) = 1 - \psi(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass für ein Anfangskapital x kein Ruin eintritt. Da N_t nach Voraussetzung ein Poissonprozess mit Parameter λ ist, ist die Zeit zwischen zwei Schäden nach Satz 1.58 Punkt (c) exponentialverteilt mit Parameter λ und Dichte $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, d.h. $\mathbb{P}[T > h] = e^{-\lambda h}$. Für $x < 0$ ist $\delta(x) = 0$, da bei einem Anfangskapital kleiner 0 unmittelbar Ruin eintritt (bzw. ist bereits Ruin vorhanden), und damit folgt

$$\delta(x) = e^{-\lambda h} \delta(x + ch) + \int_0^h \int_0^{x+ct} \delta(x + ct - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (2.5)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite steht für den Fall, dass bis zum Zeitpunkt h kein Schaden eintritt. Das Anfangskapital für den zum Zeitpunkt h beginnende Cramér-Lundberg-Prozess beträgt in diesem Fall $x + ch$ (das Anfangskapital x zum Zeitpunkt 0 ist um die Prämieinnahmen erhöht). Der zweite Summand kommt aus dem Fall, dass bis zum Zeitpunkt h ein Schaden eintritt. Dabei ergibt sich die Grenze des inneren Integrals durch $\delta(x) = 0$ für $x < 0$.

Für $h \downarrow 0$ in (2.5) folgt die Rechtsstetigkeit von $\delta(\cdot)$. Eine einfache Umformung und Division durch h ergibt

$$c \frac{\delta(x + ch) - \delta(x)}{ch} = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} \delta(x + ch) - \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{x+ct} \delta(x + ct - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Für $h \downarrow 0$ folgt aus der Rechtsstetigkeit und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt = f(0) \quad (2.6)$$

die rechtsseitige Differenzierbarkeit von $\delta(\cdot)$ mit

$$c\delta'(x) = \lambda \left[\delta(x) - \int_0^x \delta(x - y) dG(y) \right]. \quad (2.7)$$

Wird in Gleichung (2.5) x durch $x - ch$ ersetzt, so ist

$$\delta(x - ch) = e^{-\lambda h} \delta(x) + \int_0^h \int_0^{x-c(h-t)} \delta(x - c(h-t) - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

woraus für $h \downarrow 0$ die Linksstetigkeit, bzw. insgesamt die Stetigkeit von $\delta(\cdot)$ ersichtlich ist. Wie oben folgt die linksseitige Differenzierbarkeit von $\delta(\cdot)$ mit (2.7) durch einfache Umformung, Division durch h und mit $h \downarrow 0$.

Dies zeigt, dass $\delta(\cdot)$ an allen Stellen x differenzierbar ist, an denen $G(\cdot)$ stetig ist.

Beispiel 2.4 Für exponentialverteilte Schäden $Y_i \sim \text{Exp}(\alpha)$, d.h. $\mu = \frac{1}{\alpha}$, ist (2.7)

$$c\delta'(x) = \lambda \left[\delta(x) - \int_0^x \delta(x-y)\alpha e^{-\alpha y} dy \right] = \lambda \left[\delta(x) - e^{-\alpha x} \int_0^x \delta(y)\alpha e^{\alpha y} dy \right]. \quad (2.8)$$

Differenzieren ergibt

$$c\delta''(x) = \lambda \left[\delta'(x) - \alpha e^{-\alpha x} \int_0^x \delta(y)\alpha e^{\alpha y} dy - \alpha\delta(x) \right] = \lambda\delta'(x) - \alpha c\delta'(x),$$

womit die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit auf das Lösen eine einfache Differentialgleichung reduziert wurde. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$\delta(x) = A + B e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x},$$

wobei im Falle der Gewinnbedingung $c - \frac{\lambda}{\alpha} > 0$ ($\Rightarrow \alpha - \frac{\lambda}{c} > 0$) aus $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 1$ der Wert $A = 1$ und aus $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}$ (die Berechnung von $\delta(0)$ erfolgt erst später, siehe (2.11), das Ergebnis wird aber bereits hier verwendet) der Wert $B = -\frac{\lambda}{\alpha c}$ folgt. Die Lösung ist

$$\delta(x) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x}.$$

bzw.

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x}. \quad (2.9)$$

als Ruinwahrscheinlichkeit. □

Eine Gleichung der Form (2.7) wird *Integro-Differentialgleichung* genannt. Eine Möglichkeit eine Lösung dieser Gleichungen zu finden, ist die sogenannte Laplace-Transformation zu verwenden.

Definition 2.5 Ist $f(\cdot)$ eine reelle Funktion auf $[0, \infty)$, so ist

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \quad s \in \mathbb{R},$$

die *Laplace-Transformation* von f . □

Ist X eine absolut stetige, positive Zufallsvariable mit Dichte $f(\cdot)$, dann ist $F(s) = M_X(-s)$.

Bemerkung 2.6 Ist $F(\cdot)$ die Laplace-Transformation einer Funktion $f(\cdot)$, so kann f durch

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F\}(t) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) ds, \quad \gamma > s_0,$$

berechnet werden, wobei s_0 die sogenannte Konvergenzabszisse von F ist. □

Die Laplace-Transformation ist eine Integraltransformation, die eine gegebene Funktion f vom reellen Zeitbereich t in eine Funktion F im Spektralbereich (Frequenzbereich) s überführt. Sie findet vor allem in der mathematischen Physik und der theoretischen Elektrotechnik verbreitet Anwendung und ist in den meisten Computeralgebrasystemen (z.B. Maple oder Mathematica) vorhanden. Eine umfangreiche Darstellung der gesamten

Theorie sowie die Bestimmung der Konvergenzabszisse ist in Bücher aus diesen Bereichen zu finden.

Die wichtigste Eigenschaft der Laplace-Transformation ist, dass die Differentiation und Integration im reellen Originalbereich einfache algebraische Operationen im Bildbereich entsprechen. Die Vorgangsweise zur Lösung einer Integro-Differentialgleichung ist, zunächst die Laplace-Transformierte der Gleichung zu ermitteln, diese Gleichung algebraisch zu lösen und danach die Lösung wieder zurück in den Zeitbereich zu transformieren.

Beispiel 2.7 (Fortsetzung von Beispiel 2.4)

Die Laplace-Transformierte der Gleichung (2.8) wird durch

$$\int_0^\infty c\delta'(x)e^{-sx} dx = \lambda \int_0^\infty \delta(x)e^{-sx} dx - \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^x \delta(x-y)\alpha e^{-\alpha y} dy \right] e^{-sx} dx$$

berechnet und ist

$$csF(s) - cF(0) = \lambda F(s) - \frac{\lambda\alpha}{s+a}F(s).$$

Eine einfache Umformung führt auf die Gleichung

$$F(s) = \frac{c(s+\alpha)}{s(1-cs-\alpha c)}F(0)$$

bzw. die Rücktransformation in den Zeitbereich (in Maple mit dem Befehl „invlaplace“ berechnet) auf

$$\delta(x) = \frac{F(0)}{\lambda - \alpha c} \left(\lambda e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x} - \alpha c \right).$$

Aus $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 1$ folgt $-F(0)\frac{\alpha c}{\lambda - \alpha c} = 1$ und damit $F(0) = -\frac{\lambda - \alpha c}{\alpha c}$. Insgesamt folgt die Lösung

$$\delta(x) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x} \quad \text{bzw.} \quad \psi(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x}.$$

als Ruinwahrscheinlichkeit. □

Eine Möglichkeit die Gleichung (2.7) zu vereinfachen ist, zunächst das Differential auf der linken Seite zu beseitigen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} (\delta(x) - \delta(0)) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x c\delta'(u) du \stackrel{(2.7)}{=} \int_0^x \delta(u) du - \int_0^x \int_0^u \delta(u-y) dG(y) du \\ &= \int_0^x \delta(u) du - \int_0^x \int_y^x \delta(u-y) du dG(y) \\ &= \int_0^x \delta(u) du - \int_0^x \int_0^{x-y} \delta(u) du dG(y) \\ &= \int_0^x \delta(u) du - \int_0^x \int_0^{x-u} dG(y) \delta(u) du \\ &= \int_0^x \delta(u) (1 - G(x-u)) du = \int_0^x \delta(x-u) (1 - G(u)) du. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Aus

$$\int_0^\infty (1 - G(u)) du = \mathbb{E}[Y_i] = \mu$$

folgt für $x \rightarrow \infty$

$$c(1 - \delta(0)) = \lambda \int_0^{\infty} (1 - G(u)) \, du = \lambda\mu$$

und damit

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \quad \text{bzw.} \quad \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (2.11)$$

Wird in (2.10) $\delta(x)$ wieder durch $1 - \psi(x)$ ersetzt, so folgt

$$\begin{aligned} c\psi(x) &= c\psi(0) - \lambda \int_0^x (1 - \psi(x-u))(1 - G(u)) \, du \\ &= \lambda\mu - \lambda \int_0^x (1 - \psi(x-u))(1 - G(u)) \, du \\ &= \lambda \left[\int_x^{\infty} (1 - G(u)) \, du + \int_0^x \psi(x-u)(1 - G(u)) \, du \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bemerkung 2.8 Gleichung (2.12) ist von der Form

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-u) \, dF(u) \quad \text{für } x \geq 0, \quad (2.13)$$

wobei die Funktion $z(\cdot)$ bekannt, die Funktion $Z(\cdot)$ unbekannt und $F(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}[Y] = \lambda^{-1}$ ist. Gleichungen dieser Form werden *Erneuerungsgleichungen* genannt. \square

Satz 2.9 *Erneuerungstheorem*

Ist in Gleichung (2.13) $z(\cdot)$ eine Riemann-integrierbare Funktion, dann gilt für die Lösung $Z(\cdot)$ der Erneuerungsgleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) = \lambda \int_0^{\infty} z(u) \, du.$$

Beweis: Siehe Schmidli [18] Behauptung C.13 auf Seite 190. \square

Die Exponentialverteilung ist eine der wenigen Verteilungen, für die eine einfache Form der Ruinwahrscheinlichkeit (siehe Beispiel 2.4), gefunden werden kann, da für diesen Fall die Gleichung (2.7) bzw. die Erneuerungsgleichung (2.12) lösbar ist. Im Allgemeinen kann die Ruinwahrscheinlichkeit allerdings nicht durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden, sondern muss z.B. numerisch gelöst werden. Ist eine Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit nicht oder nur mit großem Aufwand möglich, so ist es für praktische Zwecke interessant sie nach oben abzuschätzen.

Eine wichtige Größe für die Schätzung der Ruinwahrscheinlichkeit ist der sogenannte *Lundberg-Exponent*. Dieser ist als die nichttriviale Lösung der Gleichung

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0$$

definiert, falls die Lösung existiert (es ist einfach nachzuprüfen, dass 0 eine Nullstelle der Gleichung ist, d.h. $\theta(0) = 0$). Für $\theta(\cdot)$ gilt $\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c$ und

$$\theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda \mathbb{E}[Y_i^2 e^{rY_i}] > 0,$$

d.h. $\theta(\cdot)$ ist strikt konvex. Weiters ist

$$\theta'(0) = \lambda M_Y'(0) - c = \lambda\mu - c = -(c - \lambda\mu).$$

Dieser Wert ist unter der oben vorausgesetzten Gewinnbedingung strikt negativ. Zusammen mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = \infty$ folgt, dass es in diesem Fall eine Lösung $R > 0$ der Gleichung $\theta(R) = 0$ geben muss. Diese Lösung ist der Lundberg-Exponent.

Beispiel 2.10 (Fortsetzung von Beispiel 2.4)

Die momenterzeugende Funktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable ist $M_Y(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$ wodurch die Gleichung

$$\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right) - cr = \frac{\lambda r}{\alpha - r} - cr = 0$$

zu lösen bleibt. Eine einfache Rechnung ergibt $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$ und damit kann die in Beispiel 2.4 berechnete Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Rx}.$$

dargestellt werden. □

Satz 2.11 Falls der Lundberg Exponent R existiert, gilt

$$\psi(x) < e^{-Rx}.$$

Beweis: Angenommen die Ungleichung stimmt nicht. Mit

$$x_0 = \inf \{ x \geq 0 : \psi(x) \geq e^{-Rx} \}$$

folgt aus der Stetigkeit von $\psi(\cdot)$

$$\psi(x_0) = e^{-Rx_0}.$$

Aufgrund von $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$ kann $x_0 > 0$ vorausgesetzt werden. Damit folgt aus Gleichung (2.12) für $x = x_0$

$$\begin{aligned} c\psi(x_0) &= \lambda \left[\int_{x_0}^{\infty} (1 - G(u)) \, du + \int_0^{x_0} \psi(x_0 - u) (1 - G(u)) \, du \right] \\ &< \lambda \left[\int_{x_0}^{\infty} (1 - G(u)) \, du + \int_0^{x_0} e^{-R(x_0 - u)} (1 - G(u)) \, du \right] \\ &\leq \lambda \left[\int_{x_0}^{\infty} e^{-R(x_0 - u)} (1 - G(u)) \, du + \int_0^{x_0} e^{-R(x_0 - u)} (1 - G(u)) \, du \right] \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-R(x_0 - u)} (1 - G(u)) \, du = \lambda e^{-Rx_0} \int_0^{\infty} e^{Ru} \int_u^{\infty} dG(y) \, du \\ &= \lambda e^{-Rx_0} \int_0^{\infty} \int_0^y e^{Ru} \, du \, dG(y) = \lambda e^{-Rx_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) \, dG(y) \\ &= \frac{\lambda}{R} e^{-Rx_0} (M_Y(R) - 1) = c e^{-Rx_0} \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme. □

Satz 2.12 Falls der Lundberg-Exponent existiert und

$$\int_0^\infty u e^{Ru} \frac{\lambda}{c} (1 - G(u)) \, du < \infty$$

ist (diese Voraussetzung ist äquivalent zu $M'_Y(R) < \infty$), dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) e^{Rx} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c}.$$

Beweis: Aus Gleichung (2.12) folgt

$$\psi(x) e^{Rx} = e^{Rx} \int_x^\infty \frac{\lambda}{c} (1 - G(u)) \, du + \int_0^x \psi(x - u) e^{R(x-u)} e^{Ru} \frac{\lambda}{c} (1 - G(u)) \, du.$$

Für diese Erneuerungsgleichung gilt für die Darstellung der Form (2.13)

$$z(x) = e^{Rx} \int_x^\infty \frac{\lambda}{c} (1 - G(u)) \, du,$$

wobei die Funktion nach Voraussetzung Riemann-integrierbar ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(u) \, du &= \int_0^\infty e^{Ru} \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} (1 - G(x)) \, dx \, du = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^x e^{Ru} \, du (1 - G(x)) \, dx \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty (e^{Rx} - 1) (1 - G(x)) \, dx = \frac{1}{R} - \frac{\lambda\mu}{cR} = \frac{1}{cR} (c - \lambda\mu) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \int_0^\infty x e^{Rx} \frac{\lambda}{c} (1 - G(x)) \, dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_x^\infty x e^{Rx} \, dG(y) \, dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^y x e^{Rx} \, dx \, dG(y) = \frac{\lambda}{cR^2} \int_0^\infty (Ry e^{Ry} - e^{Ry} + 1) \, dG(y) \\ &= \frac{\lambda (RM'_Y(R) - M_Y(R) + 1)}{cR^2} = \frac{\lambda RM'_Y(R) - cR}{cR^2} = \frac{\lambda M'_Y(R) - c}{cR} \end{aligned}$$

wodurch der Grenzwert unmittelbar aus dem Erneuerungstheorem (Satz 2.9) folgt. \square

Der obige Satz zeigt, dass es nicht möglich ist, eine exponentielle untere Grenze für die Ruinwahrscheinlichkeit zu erhalten, deren Exponent größer als R ist. Weiters folgt die sogenannte *Cramér-Lundberg Approximation*

$$\psi(x) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c} e^{-Rx}$$

für große x als gute Approximation für $\psi(x)$.

Beispiel 2.13 (Fortsetzung von Beispiel 2.10)

Aus $M_Y(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$ folgt

$$M'_Y(r) = \frac{\alpha}{(\alpha - r)^2}$$

und weiters

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) e^{Rx} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{\lambda M_Y'(R) - c} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{\lambda \frac{\alpha}{(\alpha-r)^2} - c} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{\lambda \alpha \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 - c} = \frac{\lambda}{\alpha c}$$

Damit ist ersichtlich, dass die Cramér-Lundberg Approximation

$$\psi(x) \sim \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Rx} = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x}.$$

für exponentialverteilte Schäden exakt ist. \square

2.2 Diffusionsapproximation

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, kann die Ruinwahrscheinlichkeit für allgemeine Verteilungen häufig nicht exakt berechnet werden. Eine Möglichkeit zur näherungsweise Bestimmung bei einer gegebenen Schadensverteilung ist – wie bereits im vorigen Abschnitt dargestellt – Gleichung (2.7) bzw. die Erneuerungsgleichung (2.12) numerisch zu lösen, oder sie nach oben abzuschätzen.

Eine weitere Möglichkeit zur näherungsweise Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit ist, den Überschussprozess (2.3) durch einen Diffusionsprozess der Form

$$\widehat{X}_t = x + m t + \sigma W_t$$

bzw. in Differentialschreibweise

$$d\widehat{X}_t = m dt + \sigma dW_t$$

mit $\widehat{X}_0 = x$ zu approximieren, und daraus die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen.

Für diese sogenannte „Diffusionsapproximation“ stellt sich die Frage, wie die beiden Parameter m und σ festgelegt werden sollen. Eine natürliche Forderung ist, dass zumindest die ersten beiden Momente der Prozesse X_t und \widehat{X}_t übereinstimmen sollen.

Für den Überschussprozess (2.3) ist N_t nach Voraussetzung ein homogener Poissonprozess mit Rate λ . Nach Satz 1.58 Punkt (b) gilt $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$, d.h. $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ bzw. $\text{Var}[N_t] = \lambda t$. Damit folgt aus (2.1) und (2.2) für die ersten beiden Momente von X_t

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}\left[x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right] = x + ct - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right] \stackrel{(2.1)}{=} x + ct - \lambda t \mu = x + t(c - \lambda \mu)$$

bzw.

$$\text{Var}[X_t] = \text{Var}\left[x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right] \stackrel{(2.2)}{=} \lambda t \text{Var}[Y_i] + \lambda t \mu^2 = \lambda t \mu_2.$$

Für die Momente der Diffusionsapproximation \widehat{X}_t gilt (vergleiche (1.4))

$$\mathbb{E}[\widehat{X}_t] = \mathbb{E}[x + m t + \sigma W_t] = x + m t + \mathbb{E}[\sigma W_t] = x + m t$$

bzw.

$$\text{Var} [\widehat{X}_t] = \text{Var} [x + mt + \sigma W_t] = \text{Var} [\sigma W_t] = \sigma^2 t.$$

Damit ergeben sich die beiden Parameter

$$m = c - \lambda\mu \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\lambda\mu_2}. \quad (2.14)$$

Entscheidender als die Übereinstimmung der ersten beiden Momente ist für die Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit jedoch die näherungsweise Übereinstimmung der Verteilungen von X_t und \widehat{X}_t . Iglehart zeigt in seiner Arbeit [13], dass dies zumindest für kleine Schäden der Fall ist.

Satz 2.14 Sind für eine Folge von Überschussprozessen der Form (2.3) mit

$$X_t^n = x_n + c_n t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i^n \quad (2.15)$$

die Bedingungen

(a) $x_n = x\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$,

(b) $c_n = c\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(c) $\mathbb{E}[Y_i^n] = \mu\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(d) $\text{Var}[Y_i^n] = \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$,

(e) $(\mathbb{E}[Y_i^n])^2$ ist beschränkt,

(f) die Zeit zwischen zwei Schäden ist exponentialverteilt mit Parameter λ , erfüllt, dann konvergiert $\frac{1}{\sqrt{n}}X_t^n$ in Verteilung gegen $x + (c - \lambda\mu)t + \sigma\sqrt{\lambda}W_t$.

Beweis: Siehe Iglehart [13]. □

Grandell zeigt in seinem Buch [12] einen ähnlichen Ansatz, der zur selben Approximation wie in Satz 2.14 führt. In seinem Ansatz wird zunächst nur der Schadensprozess

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad \text{für } t \geq 0$$

mit $S_0 = 0$ und $N_0 = 0$ betrachtet. Für diesen Schadensprozess ist $\mathbb{E}[S_t] = \lambda t\mu$ und $\text{Var}[S_t] = \lambda t\mu_2$, siehe (2.1) und (2.2), womit aus dem zentrale Grenzwertungssatz folgt, dass die Folge

$$S_t^n = \frac{S_{nt} - \lambda\mu nt}{\sqrt{\lambda\mu_2 nt}} \quad \text{mit } n \geq 1, t \geq 0 \quad (2.16)$$

in Verteilung gegen eine standardisierte Brownsche Bewegung W konvergiert. Somit ist der Grenzprozess der Folge (2.15)

$$X_t^D = x + \gamma\lambda\mu t - \sqrt{\lambda\mu_2} W_t \quad (2.17)$$

mit

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - \lambda\mu}{\lambda\mu} \sqrt{n}.$$

Weiters zeigt Grandell, dass die Folge

$$Y_t^n = \frac{c_n n t - \lambda \mu n t}{\sqrt{n}} - \sqrt{\lambda \mu_2} S_t^n$$

in Verteilung gegen

$$Y_t^D = \gamma \lambda \mu t - \sqrt{\lambda \mu_2} W_t, \quad \text{für } t \geq 0$$

konvergiert. Damit folgt

$$\mathbb{P} \left[\inf_{t \geq 0} Y_t^n < -x \right] \rightarrow \mathbb{P} \left[\inf_{t \geq 0} X_t^D < -x \right] \quad \text{für } x \geq 0$$

und für große x die Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi_n(x) = \mathbb{P} \left[\inf_{t \geq 0} X_t^n < 0 \right] \approx \mathbb{P} \left[\inf_{t \geq 0} X_t^D < 0 \right] = \psi_D(x).$$

Satz 2.15 Für $X_t = x + mt + \sigma W_t$ ist der Prozess $\left(e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_t} \right)_{t \geq 0}$ ein Martingal.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_t} \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt + \sigma W_t)} \mid \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} W_t} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} (W_t - W_s + W_s)} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} e^{-\frac{2m}{\sigma} W_s} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} (W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} e^{-\frac{2m}{\sigma} W_s} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} (W_t - W_s)} \right] \\ &= e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} e^{-\frac{2m}{\sigma} W_s} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} \sqrt{t-s} \mathcal{N}(0,1)} \right]. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert im letzten Ausdruck ist die momenterzeugende Funktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $\left(\frac{2m}{\sigma}\right)^2$, d.h.

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma} \sqrt{t-s} \mathcal{N}(0,1)} \right] = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\sigma}\right)^2 (t-s)} = e^{\frac{2m^2}{\sigma^2} (t-s)}.$$

Gesamt folgt aus

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_t} \mid \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt)} e^{-\frac{2m}{\sigma} W_s} e^{\frac{2m^2}{\sigma^2} (t-s)} = e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (x + mt + \sigma W_s)} = e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_s}$$

die Behauptung. □

Bemerkung 2.16 Für das Martingal aus Satz 2.15 folgt aus dem Stoppsatz (Satz 1.28), dass der Prozess $\left(e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} \right)_{t \geq 0}$ ebenfalls ein Martingal ist. Dieses Martingal ist, wie leicht zu sehen ist, nach oben mit 1 beschränkt. Aus $X_0 = x$, $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$ und Satz 1.26 folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} 0} \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} (X_0 - x)} \right] = e^{\frac{2m}{\sigma^2} x} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_0} \right] = e^{\frac{2m}{\sigma^2} x} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} \right] \\ &= e^{\frac{2m}{\sigma^2} x} \underbrace{\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} \mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} \right]}_{\rightarrow \mathbb{P}[\tau < \infty] \text{ für } t \rightarrow \infty} + e^{\frac{2m}{\sigma^2} x} \underbrace{\mathbb{E} \left[e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \right]}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert des ersten Summanden steht für den Fall, dass Ruin eintritt, d.h. $X_{\tau \wedge t} = X_\tau = 0$ und $e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} = 1$. Der Erwartungswert des zweiten Summanden steht für den Fall, dass kein Ruin eintritt und damit X_t aufgrund des positiven Drifts unbeschränkt wächst, d.h. $e^{-\frac{2m}{\sigma^2} X_{\tau \wedge t}} = 0$.

Gesamt folgt aus der obigen Gleichung

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty] = e^{-\frac{2m}{\sigma^2} x} \quad (2.18)$$

als Ruinwahrscheinlichkeit für eine Diffusionsapproximation mit Anfangskapital x . \square

Ein Vergleich von (2.11) und (2.18) zeigt, dass die Diffusionsapproximation im Falle kleiner Werte von x umso besser ist, je näher $\frac{\lambda\mu}{c}$ bei 1 liegt.

Für eine Diffusionsapproximation ist $\psi(x, t)$, d.h. die Ruinwahrscheinlichkeit vor dem Zeitpunkt t mit Anfangskapital x , in einfacher Form darstellbar.

Satz 2.17 Ist $X_t = x + (c - \lambda\mu)t + \sqrt{\lambda\mu_2} W_t$ die Diffusionsapproximation des Überschussprozesses (2.3) und $\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t < 0\}$ deren Ruinzeit bei Anfangskapital x , dann ist

$$\psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau \leq t] = 1 - \Phi\left(\frac{(c - \lambda\mu)t + x}{\sqrt{\lambda\mu_2 t}}\right) + e^{-\frac{2(c - \lambda\mu)x}{\lambda\mu_2}} \Phi\left(\frac{(c - \lambda\mu)t - x}{\sqrt{\lambda\mu_2 t}}\right)$$

Beweis: Sei $m = c - \lambda\mu$ und $\sigma = \sqrt{\lambda\mu_2}$. Nach Definition der Brownschen Bewegung ist $X_t = B_t(x, m, \sigma^2)$. Es ist einfach nachzuprüfen, dass für den durch $\widehat{X}_t = tX_{1/t} - m$ definierten Prozess $\widehat{X}_t = B_t(0, x, \sigma^2)$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau \leq t] &= \mathbb{P}[\inf \{X_s : 0 < s \leq t\} < 0] = \mathbb{P}[\inf \{sX_{1/s} : s \geq 1/t\} < 0] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[\inf \{m + \widehat{X}_s : s \geq 1/t\} < 0 \mid \widehat{X}_{1/t}\right]\right] \\ &= \int_{-\infty}^{-m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/t}} e^{-\frac{(y-x/t)^2}{2\sigma^2/t}} dy + \int_{-m}^{\infty} e^{-\frac{2x(y+\mu)}{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/t}} e^{-\frac{(y-x/t)^2}{2\sigma^2/t}} dy \\ &= \Phi\left(\frac{-m - x/t}{\sigma/\sqrt{t}}\right) + e^{-\frac{2xm}{\sigma^2}} \int_{-m}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/t}} e^{-\frac{(y+x/t)^2}{2\sigma^2/t}} dy \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{mt + x}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-\frac{2xm}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{mt - x}{\sigma\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

wobei $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Für $t \rightarrow \infty$ folgt (2.18). \square

2.3 Vergleich der Ergebnisse

Beispiel 2.18 (Fortsetzung von Beispiel 2.13)

Für die exponentialverteilte Zufallsvariable ist $\mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{\alpha}$ und $\text{Var}[Y_i] = \frac{1}{\alpha^2}$, womit aus (2.14) die beiden Parameter $m = c - \frac{\lambda}{\alpha}$ und $\sigma = \sqrt{\lambda\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)} = \sqrt{2\lambda\frac{1}{\alpha^2}}$ für die zugehörige Diffusionsapproximation des Überschussprozesses $\widehat{X}_t = x + mt + \sigma W_t$ folgen. Die Ruinwahrscheinlichkeit bei exakter Rechnung ist nach (2.9)

$$\psi^E(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})x}$$

bzw. die Ruinwahrscheinlichkeit der Diffusionsapproximation nach (2.18)

$$\psi^D(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty] = e^{-\frac{2m}{\sigma^2}x} = e^{-\frac{(c\alpha-\lambda)\alpha}{\lambda}x}.$$

$\psi^E(x)$ stimmt nach Beispiel 2.13 mit der Cramér-Lundberg Approximation überein. Der Quotient der beiden Ruinwahrscheinlichkeiten ist

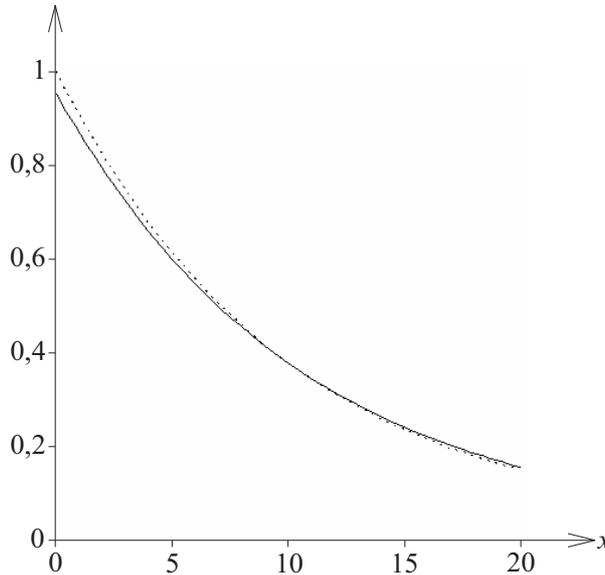
$$\frac{\psi^E(x)}{\psi^D(x)} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})x}}{e^{-\frac{(c\alpha-\lambda)\alpha}{\lambda}x}} = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})x + \frac{(c\alpha-\lambda)\alpha}{\lambda}x} = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\alpha(1-\frac{c\alpha}{\lambda})(1-\frac{\lambda}{c\alpha})x}.$$

Der Exponent ist unter der Gewinnbedingung $c > \frac{\lambda}{\alpha}$ positiv (da $1 - \frac{c\alpha}{\lambda} < 0$ und $1 - \frac{\lambda}{c\alpha} > 0$ ist), d.h. für große x unterschätzt $\psi^D(x)$ die exakte Ruinwahrscheinlichkeit. Der Quotient und somit der relative Schätzfehler ist umso kleiner, je näher der Quotient $\frac{\lambda}{\alpha c}$ bei 1 liegt. Sei für eine konkrete Anwendung $\alpha = 2$, $\lambda = 4$ und die Prämienrate $c = 2,1$. Für diese Parameter ist die Gewinnbedingung $c > \frac{\lambda}{\alpha}$ erfüllt und die beiden Ruinwahrscheinlichkeiten sind

$$\psi^E(x) = 0,95238e^{-0,095238x} \quad \text{bzw.} \quad \psi^D(x) = e^{-0,1x}.$$

Abbildung 2.1 zeigt einen Vergleich der beiden Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi^E(x)$ (punktiertere Kurve) und $\psi^D(x)$ (durchgezogene Kurve). Im Anhang ist auf Seite 81 das verwendete Maple-Programm zur Erzeugung der Abbildung 2.1 aufgelistet. \square

Abbildung 2.1: Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeiten bei exponentialverteilten Schäden.



Beispiel 2.19 Für gammaverteilte Schäden $Y_i \sim \text{Gam}(\alpha, \beta)$ mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0,$$

ist $\mathbb{E}[Y_i] = \alpha\beta$ und $\text{Var}[Y_i] = \alpha\beta^2$. Gleichung (2.7) ist in diesem Fall

$$c\delta'(x) = \lambda \left[\delta(x) - \int_0^x \delta(x-y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy \right]. \quad (2.19)$$

Diese Integro-Differentialgleichung besitzt keine geschlossene Lösung, kann jedoch mit Hilfe eines Computeralgebrasystemen wie z.B. Maple einfach mittels Laplace-Transformation (siehe Definition 2.5) gelöst werden und ergibt die Ruinwahrscheinlichkeit bei exakter Rechnung $\psi^E(x)$.

Aus der momenterzeugenden Funktion der Gammaverteilung

$$M_Y(r) = \int_0^\infty e^{rx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \left(\frac{1}{1-\beta r} \right)^\alpha$$

folgt der Lundberg-Exponent R aus der Gleichung

$$\theta(R) = \lambda (M_Y(R) - 1) - cR = \lambda \left(\left(\frac{1}{1-\beta R} \right)^\alpha - 1 \right) - cR = 0, \quad (2.20)$$

wobei diese Gleichung in praktischen Anwendungen numerisch gelöst werden kann. Als obere Grenze der Ruinwahrscheinlichkeit folgen $\psi^L(x) < e^{-Rx}$.

Für die zugehörige Diffusionsapproximation des Überschussprozesses $\widehat{X}_t = x + mt + \sigma W_t$ folgt aus (2.14) die beiden Parameter

$$m = c - \lambda\alpha\beta \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\lambda((\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2)} = \sqrt{\lambda\alpha\beta^2(1+\alpha)}.$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit der Diffusionsapproximation ist nach (2.18)

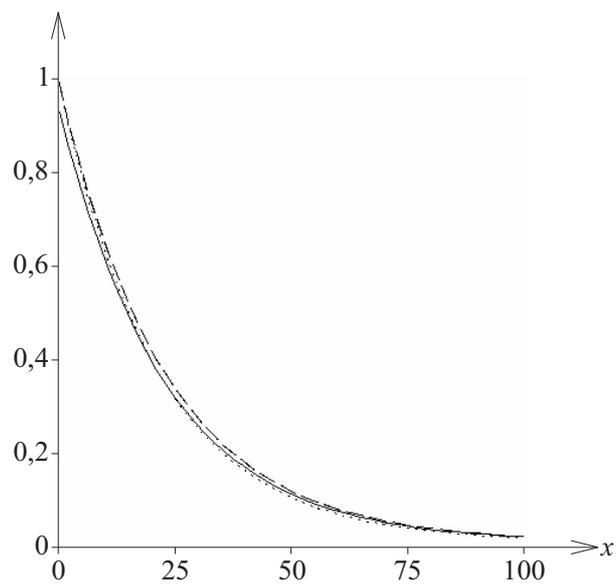
$$\psi^D(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty] = e^{-\frac{2m}{\sigma^2}x} = e^{-2\frac{c-\lambda\alpha\beta}{\lambda\alpha\beta^2(1+\alpha)}x}.$$

Sei für eine konkrete Anwendung $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda = 10$ und die Prämienrate $c = 21,4$. Für diese Parameter ist die Gewinnbedingung $c > \lambda\alpha\beta$ erfüllt und der aus (2.20) ermittelte Lundberg-Exponent ist $R = 0,043943$. Der und die Ruinwahrscheinlichkeiten sind

$$\psi^L(x) = e^{-0,043943x} \quad \text{bzw.} \quad \psi^D(x) = e^{-0,046666x}.$$

Abbildung 2.2 zeigt einen Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi^E(x)$ (punktierte Kurve), $\psi^D(x)$ (durchgezogene Kurve) und $\psi^L(x)$ (strichlierte Kurve). Im Anhang ist auf Seite 81 das verwendete Maple-Programm zur Berechnung der exakten Ruinwahrscheinlichkeit $\psi^E(\cdot)$ und zur Erzeugung der Abbildung 2.2 aufgelistet. \square

Abbildung 2.2: Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeiten bei gammaverteilten Schäden.



Kapitel 3

Kontrolltheorie

Die in diesem Kapitel dargestellte Einführung in die Kontrolltheorie folgt weitestgehend den ersten Kapiteln in Saß [16]. Allerdings werden hier, wie auch in den restlichen Kapiteln, nur eindimensionale Prozesse und eindimensionale Optimierungsprobleme betrachtet. In der umfangreicheren Darstellung in Saß [16] werden allgemeinere mehrdimensionale Prozesse behandelt.

Die mathematische Kontrolltheorie beschäftigt sich mit dynamischen Systemen, die durch einen reellwertigen Prozess $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ – *Zustandsprozess* genannt – beschrieben werden und durch einen Kontrollprozess (steuernder Prozess) beeinflusst werden können. Der Kontrollprozess ist ein progressiv messbarer Prozess $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$ mit Werten in einer Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$. Dabei soll der Zustandsprozess durch den Kontrollprozess so gesteuert werden, dass sich das System zwischen einen gegebenen Anfangs- und Endzustand bewegt, und dass eine vom Zustands- und Kontrollprozess abhängige Zielfunktion (bzw. Performancefunktion) optimiert wird.

Das Ziel der Kontrolltheorie ist, den Zustandspfad zur Optimierung der betrachteten Zielfunktion zu ermitteln und jenen Kontrollprozess zu finden, mit dem das System diesem Pfad folgt.

Im Folgenden werden nur solche dynamische Systeme betrachtet, deren Zustandsprozess durch eine stochastische Differentialgleichung (Diffusionsgleichung) der Form

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t \quad (3.1)$$

mit Startwert x , d.h. $X_0 = x$, beschrieben werden kann, wobei

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

bzw.

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

messbare Abbildungen sind. b wird Driftkoeffizient und σ Diffusionskoeffizient genannt.

Die (zu optimierende) Zielfunktion bei Start zum Zeitpunkt t und Zustand x , d.h. $X_t = x$, ist durch

$$J(t, x, u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \psi(s, X_s^u, u_s) ds + \Psi(T, X_T^u) \mid X_t^u = x \right] \quad (3.2)$$

gegeben, wobei

$$\psi : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine vom Zustands- und Kontrollprozess abhängige Bewertungsfunktion (z.B. Kosten, Gewinn, ...) ist. $\Psi(\cdot, \cdot)$ ist die Bewertungsfunktion für den Endzustand des Systems und unabhängig vom Zustand des Kontrollprozesses am Endzeitpunkt. Um die Abhängigkeit des Zustandsprozesses vom Kontrollprozess auch formal zu berücksichtigen, wird im Allgemeinen die Notation X_t^u verwendet. Im Folgenden wird diese formale Berücksichtigung allerdings nur an jenen Stellen verwendet, an denen sie der einfacheren Lesbarkeit dient.

Definition 3.1 Eine stochastische Differentialgleichung heißt *stark lösbar*, falls zu einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, einer stochastischen Anfangsbedingung X und einer Brownschen Bewegung W eine adaptierte Lösung bezüglich der von W und X erzeugten und um Nullmengen erweiterten Filtration existiert.

Eine stochastische Differentialgleichung heißt *schwach lösbar*, wenn ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, eine Brownschen Bewegung W und eine Filtration gefunden werden kann, für die eine adaptierte Lösung existiert. \square

Die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse bei Start zum Zeitpunkt t im Zustand x wird mit $\mathcal{A}(t, x)$ bezeichnet. $\mathcal{A}(t, x)$ besteht aus allen Kontrollprozessen $(u_s)_{s \in [t, T]}$, für die (3.1) eine starke Lösung auf $[t, T]$ besitzt und die Zielfunktion (3.2) wohldefiniert ist. Bei Start im Zeitpunkt 0 wird kurz $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(0, x)$ geschrieben. Die *Wertfunktion* des Optimierungsproblems ist durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u) \quad (3.3)$$

definiert. Das Ziel ist, für einen vorgegebenen Startwert x_0 den Wert $V(0, x_0)$ zu berechnen und einen zugehörigen Kontrollprozess u^* zu finden, der die Zielfunktion optimiert, d.h. u^* erfüllt $V(0, x_0) = J(0, x_0, u^*)$. u^* wird *optimaler Kontrollprozess* genannt.

Zunächst stellt sich die Frage, für welche Koeffizienten (3.1) eine starke Lösung besitzt. Diese Frage wird für einfache Diffusionsprozesse durch folgenden Satz beantwortet.

Satz 3.2 Sei Z eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$ und die unabhängig von dem durch die Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$ erzeugten Filter \mathbf{F} ist. Erfüllen der Drift- bzw. Diffusionskoeffizient

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

in der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (3.4)$$

für eine Konstante $K > 0$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $s, t \in [0, T]$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} |b(s, x) - b(t, y)| + |\sigma(s, x) - \sigma(t, y)| &\leq K(|y - x| + |t - s|) \\ |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 &\leq K^2(1 + |x|^2), \end{aligned}$$

so besitzt (3.4) eine eindeutige starke Lösung mit $X_0 = Z$. Diese Lösung ist stetig in t , an dem durch Z und $(W_t)_{t \geq 0}$ erzeugten Filter adaptiert und erfüllt

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty \right].$$

Die Lösung wird *Itô-Diffusion* und $a(t, x) := \sigma(t, x)^2$ der *Diffusionskoeffizient* von X genannt.

Beweis: Siehe Øksendal [15] Theorem 5.2.1 auf Seite 68. \square

Zur kürzeren Schreibweise wird im Folgenden

$$\mathbb{E}_{t,x}[Y] = \mathbb{E}[Y|X_t = x] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_x[Y] = \mathbb{E}_{0,x}[Y]$$

gesetzt.

Definition 3.3 Eine *zeit-homogene Itô-Diffusion* ist ein stochastischer Prozess $X_t(\omega) = X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, der die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad (3.5)$$

mit dem Driftkoeffizienten $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. Diffusionskoeffizienten $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ erfüllt. \square

Satz 3.4 Für eine zeit-homogene Itô-Diffusion X und eine beschränkte und messbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(1) Für alle $\omega \in \Omega$ und $t, s \geq 0$ ist

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{E}_{X_t(\omega)}[f(X_s)].$$

(2) Für eine Stoppzeit $\tau < \infty$, $\omega \in \Omega$ und $s \geq 0$ ist

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau+s}) | \mathcal{F}_\tau](\omega) = \mathbb{E}_{X_\tau(\omega)}[f(X_s)].$$

Beweis: Für (1) siehe Øksendal [15] Theorem 7.1.2 auf Seite 115 bzw. für (2) siehe Øksendal [15] Theorem 7.2.4 auf Seite 117. \square

Eigenschaft (1) in Satz 3.4 wird *Markov-Eigenschaft für Itô-Diffusionen* genannt, (2) die *starke Markov-Eigenschaft für Itô-Diffusionen*. Die explizite Verwendung von ω auf der linken Seite der beiden Gleichungen soll darauf hinweisen, dass $\mathbb{E}_{X_t}[f(X_s)]$ eine Zufallsvariable ist.

Eine wesentliche Eigenschaft der Itô-Diffusion ist, dass sie mit einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung identifiziert werden kann. Diese Identifizierung erfolgt mittels den beiden folgend definierten Operatoren.

Definition 3.5 Der *infinitesimale Generator* L einer Itô-Diffusion X der Form (3.4) ist durch

$$Lf(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x}[f(t, X_t)] - f(s, x)}{t - s}$$

für alle $s \geq 0, x \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{D}_L$ definiert, wobei der Definitionsbereich \mathcal{D}_L alle Funktionen $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ umfasst, für die der obige Grenzwert existiert. \square

Definition 3.6 Der Operator \mathcal{L} ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

mit der Definitionsmenge

$$\mathcal{C}^{1,2} := \{g(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ stetig differenzierbar in } t \\ \text{und zwei mal stetig differenzierbar in } x\}$$

definiert. \square

Für den Operator \mathcal{L} gilt

$$\mathcal{L}f(t, x) := f_t(t, x) + b(t, x)f_x(t, x) + \frac{1}{2}a(t, x)f_{xx}(t, x),$$

und falls keine Abhängigkeit von t vorliegt vereinfacht sich der Operator zu

$$\mathcal{L}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}a(x)f''(x).$$

Bemerkung 3.7 Mit der obigen Notation kann die Itô-Formel in der Form

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) \sigma(t, X_t) dW_t$$

geschrieben werden. □

Satz 3.8 Ist $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ und gilt für alle $u \geq t \geq 0, x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)| ds \right] < \infty \tag{3.6}$$

und

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u |f_x(s, X_s) \sigma(s, X_s)|^2 ds \right] < \infty, \tag{3.7}$$

dann ist $f \in \mathcal{D}_L$ und $Lf(t, x) = \mathcal{L}f(t, x)$ für alle $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Durch Anwendung der Itô-Formel auf $f(t, X_t)$ in

$$Lf(x, s) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x} [f(t, X_t)] - f(s, x)}{t - s}$$

folgt

$$Lf(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x} \left[\int_s^t \mathcal{L}f(u, X_u) du + \int_s^t f_x(u, X_u) \sigma(u, X_u) dW_u \right]}{t - s}. \tag{3.8}$$

Wegen (3.7) ist der durch das stochastischen Integral

$$\left(\int_s^t f_x(u, X_u) \sigma(u, X_u) dW_u \right)_{t \geq s}$$

definierte Prozess nach Satz 1.55 ein Martingal und weiters ist nach Satz 1.26

$$\mathbb{E}_{s,x} \left[\int_s^t f_x(u, X_u) \sigma(u, X_u) dW_u \right] = \mathbb{E}_{s,x} \left[\int_s^s f_x(u, X_u) \sigma(u, X_u) dW_u \right] = 0,$$

d.h. der zweite Summand in (3.8) fällt weg. Wegen (3.6) kann in (3.8) die Erwartungswertbildung und der Grenzübergang vertauscht werden womit aus (2.6) und $X_0 = x$ bzw. $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ wegen

$$Lf(x, s) = \mathbb{E}_{s,x} \left[\lim_{t \downarrow s} \frac{\int_s^t \mathcal{L}f(u, X_u) du}{t - s} \right] = \mathcal{L}f(s, x)$$

die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.9 Der obige Satz rechtfertigt für \mathcal{L} die Bezeichnung *Generator von X* . \square

Satz 3.10 *Dynkin's Formel*

Ist $f \in C^{1,2}$ eine Funktion mit kompakten Träger und τ eine Stoppzeit mit der Eigenschaft $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$, so gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(\tau, X_\tau)] = f(0, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(s, X_s) ds \right]$$

Beweis: Siehe Øksendal [15] Theorem 7.4.1 auf Seite 124. \square

Für die Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) wird das Prinzip der sogenannten *dynamischen Programmierung* verwendet. Der Begriff wurde von Richard Bellman in den 1940er Jahren eingeführt und ist ein Ansatz zum algorithmischen Lösen von Optimierungsproblemen. Die dynamische Programmierung kann für alle Optimierungsprobleme angewendet werden, die aus vielen gleichartigen Teilproblemen bestehen und bei denen die optimale Lösung des gesamten Problems aus optimalen Lösungen der Teilprobleme zusammengefügt werden kann (*Optimalitätsprinzip von Bellman*). Das Verfahren besteht darin, zuerst die optimalen Lösungen der kleinsten Teilprobleme zu berechnen, und diese dann geeignet zu einer Lösung eines nächstgrößeren Teilproblems zusammenzusetzen.

Nach dem Bellman-Prinzip führt ein optimaler Kontrollprozess auf $[t_0, t_1]$ und anschließend optimales Handeln auf $[t_1, T]$ zu einem globalen Optimum auf $[t_0, T]$. Für die Wertfunktion $V(t, x)$ des Optimierungsproblems ist somit

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}^u) \right].$$

Zur Herleitung der HJB-Gleichung des Optimierungsproblems werden im Folgenden einige notwendige Annahmen getroffen, die für den hier betrachteten allgemeinen Fall als erfüllt vorausgesetzt werden. Häufig ist es in konkreten Anwendungen leichter als im allgemeinen Fall nachzuweisen dass die Annahmen erfüllt sind, und sollte deshalb für jede Anwendung einzeln nachgeprüft werden.

Zunächst wird die Itô-Formel auf $V(t_1, X_{t_1}^u)$ angewandt:

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}^u) \right. \\ & + \int_t^{t_1} V_t(s, X_s^u) + b(s, X_s^u, u_s) V_x(s, X_s^u) ds \\ & \left. + \int_t^{t_1} \frac{1}{2} a(s, X_s^u, u_s) V_{xx}(s, X_s^u) ds + \int_t^{t_1} V_x(s, X_s^u) \sigma(s, X_s^u, u_s) dW_s \right] \end{aligned}$$

wobei $a(\cdot)$ der Diffusionskoeffizient $a(s, X_s^u, u_s) := \sigma(s, X_s^u, u_s)^2$ ist. Unter der Annahme, dass

$$\int_t^{t_1} V_x(s, X_s^u) \sigma(s, X_s^u, u_s) dW_s$$

für $t_1 \geq t$ ein Martingal ist, ist der Erwartungswert nach Satz 1.26 gleich 0 und der letzte Summand in der obigen Formel fällt weg. Wird in der restlichen Formel auf beiden Seiten $V(t, x)$ subtrahiert und durch $t_1 - t$ dividiert, so folgt mit $X_t^u = x$ für den Grenzübergang $t_1 \downarrow t$:

$$0 = \lim_{t_1 \downarrow t} \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\frac{\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) \, ds}{t_1 - t} + \frac{\int_t^{t_1} V_t(s, X_s^u) + V_x b(s, X_s^u, u_s)(s, X_s^u) \, ds}{t_1 - t} + \frac{\int_t^{t_1} \frac{1}{2} a(s, X_s^u, u_s) V_{xx}(s, X_s^u) \, ds}{t_1 - t} \right]$$

Unter der Voraussetzung, dass der Grenzübergang mit der Supremum- und Erwartungswertbildung vertauschbar ist, folgt

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} \psi(s, X_s^u, u_s) \, ds}{t_1 - t} + \lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} \frac{1}{2} a(s, X_s^u, u_s) V_{xx}(s, X_s^u) \, ds}{t_1 - t} + \lim_{t_1 \downarrow t} \frac{\int_t^{t_1} V_t(s, X_s^u) + b(s, X_s^u, u_s) V_x(s, X_s^u) \, ds}{t_1 - t} \right].$$

Für den Grenzwert $t_1 \downarrow t$ beschränkt sich die Bestimmung des optimalen Kontrollprozesses auf $[t, t_1]$ auf die Wahl eines Wertes $u_t \in \mathcal{U}$ und in der obigen Gleichung kann der bedingte Erwartungswert nach dem Grenzübergang vernachlässigt werden. Mit $X_t^u = x$ folgt die *HJB-Gleichung*

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(t, x, u) + V_t(t, x) + b(t, x, u) V_x(t, x) + \frac{1}{2} a(t, x, u) V_{xx}(t, x) \right\}. \quad (3.9)$$

Diese Gleichung ist unter den in der Herleitung benutzten Voraussetzungen eine notwendige Bedingung für die Wertefunktion $V(t, x)$ des Optimierungsproblems. Für eine kürzere Schreibweise der HJB-Gleichung wird der vom Kontrollprozess u abhängige Operator \mathcal{L}^u , definiert durch

$$\mathcal{L}^u f(t, x) = f_t(t, x) + b(t, x, u) f_x(t, x) + \frac{1}{2} a(t, x, u) f_{xx}(t, x),$$

verwendet. Mit diesem Operator kann die HJB-Gleichung (3.9) als

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u V(t, x) \} \quad (3.10)$$

geschrieben werden.

Ein optimaler Kontrollprozess kann auf folgende Weise gefunden werden:

1. Ermittlung eines optimalen $u = \hat{u}(t, x)$ in (3.10).
2. Existiert eine Lösung in 1., dann ist sie anhängig von V_t , V_x und V_{xx} , d.h.

$$\hat{u}(t, x) = u(t, x, V_t(t, x), V_x(t, x), V_{xx}(t, x)).$$

Diese Lösung ergibt nach Substitution in (3.10) eine partielle Differentialgleichung für $V(\cdot, \cdot)$ mit Randbedingung $V(T, x) = \Psi(T, x)$. Die Lösungen der partielle Differentialgleichung sind Kandidaten für die Wertfunktion des Optimierungsproblems.

3. Erfüllt eine Lösung $V^*(\cdot, \cdot)$ die Voraussetzungen des Verifikationstheorems im folgenden Abschnitt (siehe Satz 3.11), und ist $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ für $t \in [0, T]$ ein zulässiger Kontrollprozess, dann ist $V^*(\cdot, \cdot)$ die Wertfunktion des Optimierungsproblems und $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ ist der optimale Kontrollprozess. X_t^* ist dabei die Lösung von (3.1) mit dem optimalen Kontrollprozess u_s^* auf $[0, t)$.

3.1 Das Verifikationstheorem

Die Erfüllung der HJB-Gleichung ist – unter den im vorigen Abschnitt getroffenen Annahmen – eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion $V(\cdot, \cdot)$ des Optimierungsproblems. Die umgekehrte Frage in diesem Zusammenhang ist, unter welchen Bedingungen eine Lösung der HJB-Gleichung die gesuchte Wertfunktion ist. Diese Frage wird durch das sogenannte *Verifikationstheorem* beantwortet, wobei zunächst die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $\mathcal{A}(t, x)$ spezifiziert werden muss.

Ein Kontrollprozess $u = (u_s)_{s \in [t, T]}$ ist *zulässig*, d.h. $u \in \mathcal{A}(t, x)$ wenn gilt:

1. $u = (u_s)_{s \in [t, T]}$ ist progressiv messbar mit Werten in \mathcal{U} und

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |u_s|^2 ds \right] < \infty.$$

2. Die stochastische Differentialgleichung (3.1) hat eine starke Lösung $(X_s)_{s \in [t, T]}$ mit $X_t = x$ und

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s|^2 \right] < \infty.$$

3. $J(t, x, u)$ ist wohldefiniert.

Satz 3.11 *Verifikationstheorem*

Ist $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ stetig und existieren Konstanten $C_\sigma, C_\psi > 0$ mit

$$|\sigma(t, x, u)|^2 \leq C_\sigma (1 + |x|^2 + |u|^2) \quad \text{und} \quad |\psi(t, x, u)|^2 \leq C_\psi (1 + |x|^2 + |u|^2)$$

für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{U}$, dann gilt:

- (i) Ist $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ mit $|\Phi(t, x)|^2 \leq C_\Phi (1 + |x|^2)$ für ein $C_\Phi > 0$ und erfüllt Φ die HJB-Gleichung

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x) \} = 0 \quad \text{für } t \in [0, T), x \in \mathbb{R}$$

mit

$$\Phi(T, x) = \Psi(T, x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

für alle $t \in [0, T)$ und $x \in \mathbb{R}$.

- (ii) Existiert eine Funktion $\widehat{u}(t, x)$ die $u \mapsto \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)$ maximiert und für die $u^* = (u_t^*)_{t \in [0, T]}$ mit $u_t^* = \widehat{u}(t, X_t^*)$ ein zulässiger Kontrollprozess ist, so ist $\Phi(t, x) = V(t, x)$ für alle $t \in [0, T)$ und $x \in \mathbb{R}$ und u^* ist der optimale Kontrollprozess, d.h. $V(t, x) = J(t, x, u^*)$. X_t^* ist dabei die Lösung von (3.1) mit dem Kontrollprozess u_s^* auf $[0, t)$.

Beweis: Siehe Saß [16] Theorem 2.7 auf Seite 14. □

Bemerkung 3.12 Sind die Voraussetzungen von Satz 3.11 erfüllt, bleiben die Aussagen auch für Stoppzeiten τ mit Werten in $[t, T]$ gültig, d.h.

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^\tau \psi(s, X_s^u, u_s) ds + V(\tau, X_\tau^u) \right].$$

Weiters zeigt Satz 3.11, dass eine Lösung der HJB-Gleichung in der Menge aller $\mathcal{C}^{1,2}$ -Funktionen eindeutig ist. Der zugehörige Kontrollprozess ist hingegen nicht eindeutig. □

Hängen der Drift- und der Diffusionskoeffizient sowie ψ nicht explizit von der Zeit ab, so kann der Zustandsprozess durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t, u_t) dt + \sigma(X_t, u_t) dW_t \tag{3.11}$$

mit Startwert x , d.h. $X_0 = x$, beschrieben werden und der vom Kontrollprozess abhängige zugehörige Differentialoperator ist

$$\mathcal{L}^u f(t, x) = b(x, u) f_x(x) + \frac{1}{2} a(x, u) f_{xx}(x).$$

Im Folgenden sei für (3.11)

$$J(x, u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} \psi(X_s^u, u_s) ds \right]$$

die zu optimierende Zielfunktion bei Start im Zustand x mit $\beta > 0$. Weiters sei $\mathcal{A}(x)$ die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse und

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x, u)$$

die Wertfunktion des Optimierungsproblems. Der folgende Satz enthält Bedingungen für die Wertfunktion des betrachteten Optimierungsproblems.

Satz 3.13 *Verifikationstheorem*

Ist $\psi(\cdot, \cdot)$ stetig und existieren Konstanten $C_\sigma, C_\psi > 0$ mit

$$|\sigma(x, u)|^2 \leq C_\sigma (1 + |x|^2 + |u|^2) \quad \text{und} \quad |\psi(x, u)|^2 \leq C_\psi (1 + |x|^2 + |u|^2)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{U}$, dann gilt:

- (i) Ist $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ mit $|\Phi(x)|^2 \leq C_\Phi (1 + |x|^2)$ für ein $C_\Phi > 0$ und erfüllt Φ die HJB-Gleichung

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \{\psi(x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)\} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\Phi(x) \geq V(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (ii) Existiert eine Funktion $\hat{u}(x)$ die $u \mapsto \psi(x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)$ maximiert und für die $u^* = (u_t^*)_{t \geq 0}$ mit $u_t^* = \hat{u}(X_t^*)$ ein zulässiger Kontrollprozess ist, so ist $\Phi(x) = V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und u^* ist ein optimaler Kontrollprozess, d.h. $V(x) = J(x, u^*)$. X_t^* ist dabei die Lösung von (3.11) mit dem Kontrollprozess u_s^* auf $[0, t]$.

Beweis: Siehe Satz [16] Theorem 3.1 auf Seite 21. \square

3.2 Gestoppte Zustandsprozesse

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, soll der Zustandsprozess durch den Kontrollprozess derart gesteuert werden, dass sich das System zwischen einen gegebenen Anfangs- und Endzustand bzw. in einem vorgegebenen Bereich bewegt, und eine Zielfunktion optimiert wird. Der System wird gestoppt, falls der Zustandsprozess den vorgegebenen Bereich verlässt.

Im Folgenden soll der Prozess $(t, X_t)_{t \geq 0}$ auf einer offenen Menge Q in $[0, T] \times \mathbb{R}$ beschränkt werden und ∂Q der Rand von Q sein. Der Prozess wird gestoppt sobald er die Menge Q verlässt, d.h. die Stoppzeit ist

$$\tau = \inf \{t > 0 : (t, X_t) \notin Q\}.$$

Die Menge $(\{T\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{Q}$ mit $\overline{Q} = Q \cup \partial Q$ ist ein Teil des Randes von Q , woraus $\mathbb{P}_{t,x}(\tau \leq T) = 1$ für alle $(t, x) \in Q$ folgt. Weiters sei $\partial^* Q$ jener Teil des Randes, für den

$$\mathbb{P}_{t,x}((\tau, X_\tau) \in \partial^* Q) = 1 \quad \text{für alle } (t, x) \in Q$$

gilt und

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^\tau \psi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(\tau, X_\tau) \right]$$

die zu optimierende Zielfunktion, wobei Ψ für $t < T$ auf der Menge $\partial^* Q$ definiert sein muss. Die Wertfunktion des Optimierungsproblems ist durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, u),$$

mit der Menge $\mathcal{A}(t, x)$ der zulässigen Kontrollprozesse, gegeben. Mit den Voraussetzungen wie für (3.1) kann das Verifikationstheorem für dieses Optimierungsproblem gezeigt werden.

Satz 3.14 Verifikationstheorem

Ist $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ stetig und existieren Konstanten $C_\sigma, C_\psi > 0$ mit

$$|\sigma(t, x, u)|^2 \leq C_\sigma (1 + |x|^2 + |u|^2) \quad \text{und} \quad |\psi(t, x, u)|^2 \leq C_\psi (1 + |x|^2 + |u|^2)$$

für alle $(t, x) \in Q$ und $u \in \mathcal{U}$, dann gilt:

- (i) Ist $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}(Q) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$ mit $|\Phi(t, x)|^2 \leq C_\Phi (1 + |x|^2)$ für ein $C_\Phi > 0$ und erfüllt Φ die HJB-Gleichung

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \{\psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)\} = 0 \quad \text{für } (t, x) \in Q$$

mit

$$\Phi(t, x) = \Psi(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in \partial^* Q$$

dann gilt

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

für alle $(t, x) \in Q$.

- (ii) Existiert eine Funktion $\hat{u}(t, x)$ die $u \mapsto \psi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)$ für $(t, x) \in Q$ maximiert und für die $u^* = (u_t^*)_{t \leq \tau}$ mit $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ ein zulässiger Kontrollprozess ist, so ist $\Phi(t, x) = V(t, x)$ für alle $(t, x) \in Q$ und u^* ist ein optimaler Kontrollprozess, d.h. $V(t, x) = J(t, x, u^*)$. X_t^* ist dabei die Lösung von (3.1) mit dem Kontrollprozess u_s^* auf $[0, t)$.

Beweis: Siehe Saß [16] Theorem 3.2 auf Seite 23. □

Kapitel 4

Optimale Dividendenstrategien

Das Problem der optimalen Dividendenzahlung geht auf eine Arbeit von Bruno De Finetti, siehe [7], aus dem Jahr 1957 und auf seinen Vortrag auf dem „15th International Congress of Actuaries“ in New York City zurück. Wie in Kapitel 2 dargestellt, beschäftigt sich die klassische Risikotheorie unter anderem mit der Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten die zur Bewertung der Güte eines Portfolios herangezogen werden können. Tritt für einen Pfad des Überschussprozesses kein Ruin ein, dann wächst der Überschuss in diesem Fall unbeschränkt. Ein unbeschränkt wachsender Überschuss ist praktisch allerdings nicht sinnvoll bzw. auch nicht realistisch. Deshalb schlug De Finetti in seinem Vortrag vor, den wirtschaftlichen bzw. ökonomischen Erfolg eines Portfolios nicht anhand der Ruinwahrscheinlichkeit zu bewerten (und somit den Sicherheitsgedanken in den Vordergrund zu stellen), sondern die maximal zu erreichenden, am Bewertungszeitpunkt abgezinsten, Dividenden bis zum Ruin als Kriterium zu betrachten.

Zunächst werden die grundlegenden Annahmen und Voraussetzungen anhand des einfacher darstellbaren diskreten Modells, d.h. Schäden können nur an diskreten Zeitpunkten eintreten, formuliert und die ersten interessanten Ergebnisse gezeigt. Erst danach wird das für praktische Anwendungen wichtigere und theoretisch interessantere stetige Modell behandelt.

4.1 Modelle in diskreter Zeit

Der Zustandsprozess des zu kontrollierenden Systems im einfachen diskreten Modell wird mit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die der selben Verteilung folgen und die stochastische Änderung des zu kontrollierenden Systems über die Zeit modelliert. Zu jedem Zeitpunkt n wird eine Entscheidung, modelliert durch eine Zufallsvariable U_n mit Werten in \mathcal{U} , getroffen, wobei der stochastische Prozess $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Menge \mathcal{U} der zulässigen Kontrollprozesse liegen muss. Ein Kontrollprozess ist zulässig, wenn er adaptiert an die durch den stochastischen Prozess $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugte Filtration ist. Dies bedeutet, dass die Entscheidung nur von Informationen aus der Vergangenheit und nicht von zukünftigen Informationen anhängig ist. Der deterministische Startwert des Zustandsprozesses ist x , d.h. $X_0 = x$.

Im einfachen diskreten Modell wird der Zustand zum Zeitpunkt $n + 1$ durch die rekursive

Formel

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n, Y_{n+1})$$

mit der messbaren Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben. Die Interpretation der obigen Gleichung ist folgende: Der aktuelle Zustand des zu kontrollierenden Prozesses hängt zu jedem Zeitpunkt nur vom Zustand und der Entscheidung zum direkt vorhergehenden Zeitpunkt sowie dem stochastischen Einfluss ab. Zustände und Entscheidungen zu früheren Zeitpunkten beeinflussen den aktuellen Zustand nicht.

Zu jedem Zeitpunkt gibt es eine vom Zustand und der Entscheidung abhängige „Belohnung“ der Höhe $r(X_n, U_n)$. Eine negative Belohnung kann dabei als Verlust aufgefasst werden. Die gesamte Belohnung eines konkreten Kontrollprozesses $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Startwert x ist durch

$$V_T^U(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^T r(X_n, U_n) e^{-\delta n} \right] \quad (4.1)$$

gegeben, wobei der Zeithorizont T endlich oder unendlich sein kann. Der Parameter $\delta \geq 0$ ist der Diskontierungsfaktor zur Berechnung der Barwerte (d.h. der zum Bewertungszeitpunkt abgezinsten Werte) zum Zeitpunkt 0. Für $T = \infty$ wird $\delta > 0$ vorausgesetzt.

Das Ziel ist, die Belohnung zu maximieren und einen optimalen Kontrollprozess, für den dieser maximale Wert erreicht wird, zu finden. Der maximal erreichbare Wert der Belohnung ist

$$V_T(x) = \max_{U \in \mathfrak{U}} V_T^U(x).$$

Die Lösung des Optimierungsproblems erfolgt mit Hilfe des im Kapitel 3 dargestellten Optimalitätsprinzip von Bellman.

Satz 4.1 *Dynamische Programmierung oder Bellman Gleichung*

Ist $V_T(x)$ endlich, dann erfüllt es das *Dynamische Prinzip*

$$V_T(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}(f(x, u, Y))] \right\} \quad (4.2)$$

wobei Y eine Zufallsvariable mit gleicher Verteilung wie Y_n ist. Für $T = \infty$ folgt

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V(f(x, u, Y))] \right\}. \quad (4.3)$$

Beweis: Ist U eine beliebige Strategie und $X_1 = f(x, U_0, Y)$, dann ist

$$V_T^U(x) = \mathbb{E} [r(x, U_0)] + e^{-\delta} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} r(X_{n+1}, U_{n+1}) e^{-\delta n} \right].$$

Für $\tilde{X}_n = X_{n+1}$, $\tilde{U}_n = U_{n+1}$ und $\tilde{Y}_n = Y_{n+1}$ gilt $\tilde{X}_{n+1} = f(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n, \tilde{Y}_{n+1})$ und somit ist der auf X_1 und U_0 bedingte Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} r(X_{n+1}, U_{n+1}) e^{-\delta n} \mid X_1, U_0 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} r(\tilde{X}_n, \tilde{U}_n) e^{-\delta n} \mid X_1, U_0 \right] \\ &= V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1) \leq V_{T-1}(X_1). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} V_T^U(x) &\leq \mathbb{E} \left[r(x, U_0) + e^{-\delta} V_{T-1}(X_1) \right] = \mathbb{E} \left[r(x, U_0) + e^{-\delta} V_{T-1}(f(x, U_0, Y_1)) \right] \\ &\leq \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}(f(x, u, Y))] \right\} \end{aligned}$$

und da U beliebig gewählt wurde

$$V_T(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}(f(x, u, Y))] \right\}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, $u \in \mathcal{U}$ und \tilde{U} eine zulässige Strategie mit $V_{T-1}(X_1) < V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1) + \varepsilon$ für $X_1 = f(x, u, Y_1)$. Damit folgt für $U_0 = u$ und $U_n = \tilde{U}_{n-1}$

$$\begin{aligned} r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}(f(x, u, Y_1))] &< r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1)] + \varepsilon \\ &= V_T^U(x) + \varepsilon \leq V_T(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

und weiter

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ r(x, u) + e^{-\delta} \mathbb{E} [V_{T-1}(f(x, u, Y))] \right\} \leq V_T(x) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt wurde, folgt Gleichung (4.2).

Im obigen Beweis wird nicht explizit die Endlichkeit von T verwendet. Gleichung (4.3) folgt deshalb direkt aus dem Beweis, indem T und $T - 1$ durch ∞ ersetzt werden. \square

Gleichung (4.2) kann rekursiv gelöst werden, Gleichung (4.3) numerisch.

Diese kurze Einführung in den diskreten Fall soll lediglich zur Beschreibung des Modells und der Herleitung der Bellman-Gleichung, die ein rekursives Lösen des Optimierungsproblems ermöglicht, dienen. Weitaus wichtiger und interessanter ist der stetige Fall.

4.2 Modelle in stetige Zeit

Im Folgenden wird das in Kapitel 2 beschriebene Cramér-Lundberg Modell (2.3) mit einer zusätzlichen Dividendenkomponente U_t betrachtet. Diese Komponente entspricht der Entscheidung in jedem Zeitpunkt im diskreten Modell.

Die Verteilung der Schadenshöhen sei für dieses Modell stetig und \mathbf{F} der aus der Schadenssumme $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ erzeugte Filter. Die Menge der zulässigen Dividendenstrategien ist \mathcal{U} und besteht aus allen positiven cadlag-Prozessen, die adaptiert an \mathbf{F} sind.

Der Überschussprozess nach Dividendenzahlung zum Zeitpunkt t mit einem Dividendenprozess $(U_t)_{t \geq 0}$ ist

$$X_t^U = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \int_0^t U_s \, ds. \quad (4.4)$$

Dividenden können bis zum Ruin gezahlt werden, d.h. die maximale, von U abhängige, Dividendenzahldauer ist $\tau^U = \inf \{t : X_t^U < 0\}$.

Der Wert der abgezinsten Dividendenzahlungen (Barwert) ist

$$V^U(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^U} e^{-\delta t} U_t dt \right]$$

bzw. die Wertfunktion des Optimierungsproblems

$$V(x) = \sup_{U \in \mathfrak{U}} V^U(x).$$

4.2.1 Beschränkte Dividendenzahlungen

Zunächst wird die Dividendenrate U_t durch einen Wert $u_0 > 0$ nach oben beschränkt, d.h. $0 \leq U_t \leq u_0 < \infty$, und \mathfrak{U} auf alle zulässigen, durch u_0 beschränkten Dividendenstrategien eingeschränkt.

Im Folgenden wird die Wertfunktion $V(\cdot)$ und deren Eigenschaften Schritt für Schritt hergeleitet.

Satz 4.2 Die Wertfunktion $V(\cdot)$ ist durch $\frac{u_0}{\delta}$ nach oben beschränkt, wachsend, Lipschitzstetig (also insbesondere absolut stetig) und konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen $\frac{u_0}{\delta}$.

Beweis: Ein Vergleich der selben Strategie mit zwei unterschiedlichen Startkapitalen zeigt, dass $V(\cdot)$ eine wachsende Funktion ist (der Ruin tritt bei höherem Startkapital später ein und erlaubt bei gleicher Dividendenzahlung eine längere Dividendenzahldauer). Weiters ist aufgrund der vorausgesetzten Beschränkung der Dividendenzahlung

$$V(x) = \sup_{U \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^U} e^{-\delta t} U_t dt \right] \leq \sup_{U \in \mathfrak{U}} \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t} u_0 dt \right] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} u_0 dt = \frac{u_0}{\delta}.$$

Für $x \rightarrow \infty$ konvergiert die Ruinzeit τ^U gegen ∞ und deshalb $\mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau^U} \right]$ gegen 0. Mit der speziellen Wahl $U_t = u_0$ für $t \geq 0$ (diese Strategie ist zulässig) folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^U} e^{-\delta t} u_0 dt \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau^U} \right] \right) \frac{u_0}{\delta} = \frac{u_0}{\delta}$$

bzw. insgesamt die Konvergenz von $V(x)$ gegen $\frac{u_0}{\delta}$ für $x \rightarrow \infty$.

Zum Beweis der Lipschitz-Stetigkeit sei h klein, \tilde{U} eine Strategie mit Anfangskapital $x + ch$ und die Strategie U_t definiert durch

$$U_t = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq h \text{ oder } T_1 \leq h \\ \tilde{U}_{t-h} & \text{für } T_1 \wedge t > h \end{cases},$$

wobei T_1 eine Zufallsvariable ist, die den Zeitpunkt des ersten Schadens beschreibt. Nach Voraussetzung bzw. Annahmen für das Cramér-Lundberg Modell ist die Zeit bis zum ersten Schaden exponentialverteilt mit Parameter λ , d.h. $\mathbb{P} [T_1 > h] = e^{-\lambda h}$. Mit einer äquivalenten Argumentation wie zur Herleitung der Gleichung (2.5), wobei hier im Falle eines Schadens vor h keine Dividende gezahlt wird und damit ein Summand wegfällt, folgt aus dem Supremum über alle Strategien \tilde{U}

$$V(x) \geq e^{-\lambda h} e^{-\delta h} V(x + ch) \geq e^{-(\lambda + \delta)h} V(x)$$

und daraus die Rechtsstetigkeit von $V(\cdot)$ an x . Mit einer ähnlichen Überlegung folgt

$$V(x) \geq V(x - ch) \geq e^{-(\lambda+\delta)h}V(x)$$

und damit die Linksstetigkeit von $V(\cdot)$ an x . Gesamt folgt aus

$$0 \leq V(x) - V(x - ch) \leq V(x) \left(1 - e^{-(\lambda+\delta)h}\right) \leq u_0 \frac{(\lambda + \delta)h}{\delta}$$

die Lipschitz-Stetigkeit. \square

Satz 4.3 Die Funktion $V(\cdot)$ ist an $x \geq 0$ von rechts und von links differenzierbar und die beiden Ableitungen $V'(x-)$ und $V'(x+)$ erfüllen die HJB-Gleichung

$$\sup_{0 \leq u \leq u_0} \left\{ (c - u)V'(x) + \lambda \left[\int_0^x V(x - y) dG(y) - V(x) \right] - \delta V(x) + u \right\} = 0. \quad (4.5)$$

Ist $u_0 < c$, dann ist $V(\cdot)$ stetig differenzierbar auf \mathbb{R}_+ . Ist $u_0 > c$ und $V(\cdot)$ nicht differenzierbar in x , dann gilt $V'(x-) \leq 1 < V'(x+)$.

Beweis: Sei $h > 0$ und $u \in [0, u_0]$. Weiters sei $u \leq c$ für $x = 0$ und für $x > 0$ sei h klein genug, sodass $x + (c - u)h \geq 0$. Diese Annahmen garantieren, dass der Ruin vor h nicht durch die Dividendenzahlungen verursacht wird. Für ein $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $x_k = k \frac{x + (c - u)h}{n}$, $k = 1, \dots, n$ und die Strategie U_t definiert durch

$$U_t = \begin{cases} u & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \wedge h \\ U_{t - T_1 \wedge h}^\varepsilon & \text{für } t > T_1 \wedge h \end{cases}.$$

In der obigen Definition ist U_t^ε eine Strategie mit Anfangskapital x_k für $x_k \leq X_{T_1 \wedge h} < x_{k+1}$ und $V^\varepsilon(x_k) > V(x_k) - \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Konstruktion folgt die Messbarkeit von U_t . Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von $V(\cdot)$ kann n groß genug gewählt werden, sodass $V^\varepsilon(x') > V(x') - \varepsilon$ für alle $x' \in [0, x + (c - u)h]$. Nach Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Schadens exponentialverteilt mit Parameter λ . Damit folgt aus einer ähnlichen intuitiven Argumentation wie für die Herleitung der Gleichung (2.5)

$$\begin{aligned} V(x) &\geq e^{-\lambda h} \left[\int_0^h u e^{-\delta t} dt + e^{-\delta h} V^\varepsilon(x + (c - u)h) \right] \\ &\quad + \int_0^h \left[\int_0^t u e^{-\delta s} ds + e^{-\delta t} \int_0^{x + (c - u)t} V^\varepsilon(x + (c - u)t - y) dG(y) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\geq e^{-\lambda h} \left[\int_0^h u e^{-\delta t} dt + e^{-\delta h} V(x + (c - u)h) \right] \\ &\quad + \int_0^h \left[\int_0^t u e^{-\delta s} ds + e^{-\delta t} \int_0^{x + (c - u)t} V(x + (c - u)t - y) dG(y) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt - \varepsilon. \end{aligned}$$

Nachdem $V(x)$ als Supremum über alle zulässigen Strategien definiert ist, ist es insbesondere größer als die Wertfunktion der speziell gewählten Strategie U_t , woraus die obige Abschätzung „ \geq “ folgt.

Da ε beliebig gewählt wurde, stimmt die Ungleichung auch für $\varepsilon \rightarrow 0$. Eine Umformung der obigen Ungleichung und Division durch h ergibt für $h \downarrow 0$:

$$0 \geq \frac{V(x + (c - u)h) - V(x)}{h} - \frac{1 - e^{-(\delta + \lambda)h}}{h} V(x + (c - u)h) + e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h u e^{-\delta t} dt + \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_0^t u e^{-\delta s} ds + e^{-\delta t} \int_0^{x + (c - u)t} V(x + (c - u)t - y) dG(y) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (4.6)$$

Die Grenzwerte der einzelnen Summanden für $h \rightarrow 0$ sind:

Erster Summand (für $c \neq u$, da für $c = u$ der Grenzwert offensichtlich 0 ist):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + (c - u)h) - V(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (c - u) \frac{V(x + (c - u)h) - V(x)}{(c - u)h} = (c - u)V'(x).$$

Zweiter Summand:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - e^{-(\delta + \lambda)h}}{h}}_{\rightarrow (\delta + \lambda)} V(x + (c - u)h) = (\delta + \lambda)V(x).$$

Dritter Summand:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h u e^{-\delta t} dt \stackrel{(2.6)}{=} u.$$

Vierter Summand:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_0^t u e^{-\delta s} ds \right] \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left[u \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \stackrel{(2.6)}{=} 0.$$

Fünfter Summand:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left[e^{-\delta t} \int_0^{x + (c - u)t} V(x + (c - u)t - y) dG(y) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \stackrel{(2.6)}{=} \lambda \int_0^x V(x - y) dG(y).$$

Damit folgt

$$0 \geq (c - u)V'(x) + \lambda \left[\int_0^x V(x - y) dG(y) - V(x) \right] - \delta V(x) + u$$

und da u beliebig gewählt wurde

$$\sup_{0 \leq u \leq u_0} (c - u)V'(x) + \lambda \left[\int_0^x V(x - y) dG(y) - V(x) \right] - \delta V(x) + u \leq 0. \quad (4.7)$$

Nun wird gezeigt, dass die obere Grenze 0 für ein $u \leq u_0$ angenommen wird, und in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt. Dazu sei U eine Strategie mit $V^U(x) \geq V(x) - h^2$ für h klein. Für diese Strategie existiert ein Wert u_h mit

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T_1 \wedge h} (U_s - u_h) e^{-\delta s} ds \right] = 0.$$

Sei weiters u'_t die betrachtete Strategie U_t bedingt auf $T_1 > t$ und $a(t) = \int_0^t (c - u'_s) ds$. Durch eine ähnliche Überlegung wie zur Herleitung der obigen Ungleichung (4.6) kann

$$0 \leq h + \frac{V(x + a(h)) - V(x)}{h} - \frac{1 - e^{-(\delta+\lambda)h}}{h} V(x + a(h)) + e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h u_h e^{-\delta t} dt \\ + \frac{1}{h} \int_0^h \left[\int_0^t u_h e^{-\delta s} ds + e^{-\delta t} \int_0^{x+a(t)} V(x + a(t) - y) dG(y) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt$$

gefunden werden. Zum Nachweis der Konvergenz des zweiten Terms sein $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x + a(h_n)) - V(x)}{h_n} = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x + a(h)) - V(x)}{h}.$$

Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von $V(\cdot)$ ist dieser Grenzwert endlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{h_n} = \tilde{u}$ vorausgesetzt werden. Da für diese Folge ebenfalls (4.6) gilt, folgt die Eindeutigkeit des Grenzwertes mit

$$(c - \tilde{u}) V'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(x + a(h_n)) - V(x)}{h_n}$$

und weiters (mit den bereits gezeigten Grenzwertbildungen der einzelnen Summanden)

$$(c - \tilde{u}) V'(x) + \lambda \left[\int_0^x V(x - y) dG(y) - V(x) \right] - \delta V(x) + \tilde{u} \geq 0.$$

Zusammen mit (4.7) folgt die HJB-Gleichung (4.5).

Der Beweis für die Zulässigkeit und Eindeutigkeit der obigen Grenzübergänge und der Beweis der restlichen Behauptungen des Satzes ist umfangreich und wird hier nicht vollständig dargestellt. Der gesamte Beweis ist in Schmidli [17] Theorem 2.32 auf Seite 71 zu finden. \square

Aus der HJB-Gleichung (4.5) folgt unmittelbar

$$V'(x) \geq 1 \Leftrightarrow (\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x - y) dG(y) \geq c. \quad (4.8)$$

Der von u abhängige Teil der HJB-Gleichung (4.5) ist

$$(c - u)V'(x) + u = cV'(x) + u(1 - V'(x)), \quad (4.9)$$

d.h. die HJB-Gleichung ist linear in u . Daraus folgt, dass für den Fall $V'(x) \neq 1$ das Supremum – abhängig von $V'(x)$ – entweder in 0 oder in u_0 angenommen wird. Die lineare Abhängigkeit führt auf die Strategie

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } V'(x-) > 1 \\ u_0 & \text{für } V'(x-) < 1 \\ \min\{c, u_0\} & \text{für } V'(x-) = 1 \end{cases}, \quad (4.10)$$

wobei dies für die Fälle $V'(x-) > 1$ und $V'(x-) < 1$ direkt aus (4.9) folgt. Die Wahl für den Fall $V'(x-) = 1$ ist aus folgender Überlegung abgeleitet: Ist $V'(x-) = 1$, dann folgt aus (4.8)

$$(\lambda + \delta) V(x) - \lambda \int_0^x V(x - y) dG(y) = c$$

und damit

$$V(x) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^x V(x - y) dG(y).$$

Wie nicht schwer zu erkennen ist, ist dies die Wertfunktion einer Strategie, in der die eingekommene Prämie bis zum ersten Schaden als Dividende ausbezahlt wird. Ab dem Schaden wird die ideale Strategie für den verbleibenden Überschuss angewendet. Damit folgt die Wahl für $u_0 \geq c$ unmittelbar, für $u_0 < c$ wird im folgenden Satz 4.4 gezeigt, dass die Wahl unerheblich ist. Der Satz ist mit dem Verifikationstheorem aus Abschnitt 3.1 vergleichbar.

Die optimale Strategie (4.10) kann intuitiv folgendermaßen interpretiert werden: wächst die Wertfunktion $V(\cdot)$ an x „stark“ (d.h. $V'(x-) > 1$), dann ist es ratsam kein Kapital zu entnehmen, da der überproportionale Anstieg der Wertfunktion einen höheren Nutzen als das entnommene Kapital besitzt. Wächst die Wertfunktion $V(\cdot)$ an x mit steigendem Überschuss hingegen wenig an (d.h. $V'(x-) < 1$), dann besitzt die Kapitalentnahme einen höheren Nutzen als die steigende Wertfunktion.

Satz 4.4 Für eine wachsende, beschränkte und positive Lösung $f(\cdot)$ der HJB-Gleichung (4.5) gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{u_0}{\delta}$. Ist $u_0 \leq c$ oder $f'(0) \geq 1$, dann ist $f(x) = V(x)$ auf \mathbb{R}_+ und (4.10) ist eine *optimale Dividendenstrategie*.

Beweis: Da $f(\cdot)$ als wachsend und beschränkt vorausgesetzt ist, konvergiert der Wert gegen $f(\infty) < \infty$ und es existiert eine wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$. Wird in (4.10) $V'(x-)$ durch $f'(x-)$ ersetzt, dann folgt $u(x_n) = u_0$ für große n (da $f'(x_n) < 1$) und weiters für den Grenzwert von (4.5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (c - u(x_n)) \underbrace{f'(x_n)}_{\rightarrow 0} + \lambda \underbrace{\left[\int_0^{x_n} f(x_n - y) dG(y) - f(x_n) \right]}_{\rightarrow 0 \text{ da } f(\infty) \text{ beschränkt}} - \delta \underbrace{f(x_n)}_{\rightarrow f(\infty)} + u(x_n) = 0,$$

d.h. $f(\infty) = \frac{u_0}{\delta}$.

Für den Beweis der restlichen Aussagen wird ein Ergebnis aus [5] verwendet. Dort zeigt Brémaud auf Seite 27, dass der Prozess

$$M'_t = \sum_{i=1}^{N_{\tau^U \wedge t}} (f(X_{T_i}^U) - f(X_{T_i-}^U)) e^{-\delta T_i} - \lambda \int_0^{\tau^U \wedge t} e^{-\delta s} \left(\int_0^{X_s^U} f(X_s^U - y) dG(y) - f(X_s^U) \right) ds$$

für eine beliebige Strategie U ein Martingal ist. Wird in diesem Martingal T_i- durch $(T_i \wedge \tau^U \wedge t)-$ bzw. T_{i-1} durch die Zeit des letzten Schadens vor $T_{i-1} \wedge \tau^U \wedge t$ ersetzt, so folgt aus dem Stoppsatz (Satz 1.28), dass der gestoppte Prozess ebenfalls ein Martingal ist.

Es ist einfach nachzuweisen, dass

$$f\left(X_{T_i-}^U\right) e^{-\delta T_i} - f\left(X_{T_{i-1}}^U\right) e^{-\delta T_{i-1}} = \int_{T_{i-1}}^{T_i-} [(c - U_s) f'(X_s^U) - \delta f(X_s^U)] e^{-\delta s} ds$$

gilt. Diese Gleichung bedeutet im wesentlichen, dass die diskontierte Differenz von $f(\cdot)$ zwischen zwei Schäden (wobei der zweite Schaden nicht berücksichtigt wird) lediglich die diskontierte Differenz der Prämien- und Dividendenzahlungen ist. Die Herleitung der Gleichung ist ähnlich zur Herleitung der HJB-Gleichung (4.5).

Mit dieser Gleichung und dem gestoppten Martingal $(M_t)_{t \geq 0}$ folgt, dass der Prozess

$$\left(f\left(X_{\tau^U \wedge t}^U\right) e^{-\delta(\tau^U \wedge t)} - \int_0^{\tau^U \wedge t} \left[(c - U_s) f'(X_s^U) + \lambda \int_0^{X_s^U} f(X_s^U - y) dG(y) - (\lambda + \delta) f(X_s^U) \right] e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

ebenfalls ein Martingal ist. Für die durch (4.10) definierte Strategie U^* folgt zusammen mit (4.5) bzw. (4.8), dass

$$\left(f\left(X_{\tau^* \wedge t}^*\right) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} + \int_0^{\tau^* \wedge t} U_s^* e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal ist, und daraus mit Satz 1.26

$$f(x) = \mathbb{E} \left[f\left(X_{\tau^* \wedge t}^*\right) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} + \int_0^{\tau^* \wedge t} U_s^* e^{-\delta s} ds \right].$$

Mit $t \rightarrow \infty$ folgt $f(x) = V^*(x)$ auf \mathbb{R}_+ . Hier ist die Voraussetzung $f'(0) \geq 1$ entscheidend, da $X_{\tau^*}^* = 0$ und in diesem Fall für $f'(0) < 1$ als „optimale“ Dividendenstrategie nach Definition von U^* die maximale Rate gezahlt werden würde. Für eine beliebige Strategie U folgt aus (4.5)

$$f(x) \geq \mathbb{E} \left[f\left(X_{\tau^U \wedge t}^U\right) e^{-\delta(\tau^U \wedge t)} + \int_0^{\tau^U \wedge t} U_s e^{-\delta s} ds \right]$$

und damit $f(x) \geq V^U(x)$ für $t \rightarrow \infty$, d.h. $f(x) = V(x)$. □

Aufgrund der in Satz 4.2 bewiesenen Beschränktheit von $V(\cdot)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\lambda \int_0^x V(x - y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(x) \right] = \lambda \frac{u_0}{\delta} - (\lambda + \delta) \frac{u_0}{\delta} = -u_0,$$

womit die HJB-Gleichung (4.5) als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq u_0} (c - u)V'(x) - u_0 + u = \lim_{x \rightarrow \infty} \max \{ cV'(x) - u_0, (c - u_0)V'(x) \} = 0$$

geschrieben werden kann.

Ist $u_0 < c$, dann folgt daraus, dass $V'(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Speziell folgt aus

(4.10) $u(x) = u_0$ für genügend große x , d.h. in diesem Fall wird die maximale Dividende ausbezahlt.

Ist $u_0 > c$, dann hat $V'(\cdot)$ nach Satz 4.3 nur positive Sprünge, d.h. $u(x) = 0$ oder $u(x) = u_0$ für große x bzw. folgt aus der Beschränktheit von $V(\cdot)$, dass in diesem Fall $u(x) = u_0$ gilt ($V'(x)$ konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen 0).

Ist $u_0 = c$, dann ist $V'(x) \leq 1$. Der Prozess X^* ist beschränkt, da nach (4.10) $u(x) = c$ für alle x mit $V'(x) < 1$ ist, d.h. die gesamten Prämien werden als Dividenden ausbezahlt.

Ist $u_0 < c - \lambda\mu$, dann bleibt die Gewinnbedingung auch für den Fall $u = u_0$ erfüllt (die Prämieinnahmen sind im Durchschnitt höher als die Zahlungen für Schäden und Dividenden) und deshalb $\psi(x) \leq \psi^{u_0}(x) < 1$, d.h. der Ruin tritt nicht mit Sicherheit ein (siehe Satz 2.2).

Ist $u_0 \geq c$, dann ist der Prozess X^* durch $x_0 = \inf \{z \geq x : V'(z) \leq 1\}$ nach oben beschränkt (da in x_0 für die optimale Strategie u_0 als Dividende ausbezahlt wird). Weiters folgt mit

$$\mathbb{P} \left[\sum_{i=N_t+1}^{N_{t+1}} Y_i > x_0 + c \right] > 0$$

aus dem Lemma von Borel-Cantelli (siehe Bauer [3] Lemma 11.1 auf Seite 74), dass das Ereignis $\sum_{i=N_t+1}^{N_{t+1}} Y_i > x_0 + c$ für einige Zeitpunkte t eintritt und damit fast sicher zum Ruin führt.

Ist $c - \lambda\mu \leq u_0 < c$ und das Anfangskapital $x > x_0 = \sup \{z : V'(z) \geq 1\}$, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\inf_t X_t^* < x_0$ gleich der Ruinwahrscheinlichkeit eines Prozesses mit Anfangskapital $x - x_0$ und Prämienrate $c - u_0$. Da die Gewinnbedingung in diesem Fall nicht erfüllt ist, tritt Ruin mit Wahrscheinlichkeit 1 ein. Insbesondere gilt, dass der Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder unter dem Wert x_0 fällt, falls er den Wert $x_0 + c$ übersteigt (in diesem Fall wird die maximale Dividende u_0 ausbezahlt und $c - \lambda\mu - u_0 \leq 0$). Somit kommt der Prozess (X_t^*) immer wieder in das Intervall $[0, x_0]$ zurück, bis Ruin eintritt.

Gesamt folgt, dass für die optimale Strategie Ruin dann und nur dann fast sicher eintritt, falls $u_0 \geq c - \lambda\mu$.

Der folgende Satz zeigt, unter welchen Bedingungen $V(\cdot)$ im Falle $u_0 > c$ in x differenzierbar ist.

Satz 4.5 Ist

$$(\lambda + \delta)V(x) = \lambda \int_0^x V(x - y) dG(y) + c, \tag{4.11}$$

dann ist $V(\cdot)$ in x differenzierbar und $V'(x) = 1$. Falls die Ableitung von rechts oder von links 1 ist, dann gilt (4.11). Ist

$$(\lambda + \delta)V(x) > \lambda \int_0^x V(x - y) dG(y) + c \tag{4.12}$$

und existiert eine wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $u(x_n) = 0$, dann ist $V(\cdot)$ in x differenzierbar mit $V'(x) > 1$.

Beweis: Gilt (4.11) oder $V'(x-) = 1$ oder $V'(x+) = 1$, so folgt die Behauptung aus Satz 4.3 bzw. aus dem Beweis des Satzes.

Gilt (4.12), dann folgt aus der Stetigkeit von $V(\cdot)$, dass

$$(\lambda + \delta)V(z) > \lambda \int_0^z V(z - y) dG(y) + c + \varepsilon$$

für $z_0 \leq z \leq z_1$ mit geeigneten $\varepsilon > 0$ und $z_0 < x < z_1$. Nachdem $V'(\cdot)$ nach Satz 4.3 nur positive Sprünge besitzt, gibt es ein $z_2 \in [z_0, z_1]$ mit $u(z) = u_0$ für $z_0 \leq z \leq z_2$ und $u(z) = 0$ für $z_2 < z \leq z_1$. Existiert die beschriebene wachsende Folge, dann ist $x > z_2$ und aus dem Beweis von Satz 4.3 folgt die Differenzierbarkeit von $V(\cdot)$ in x . Die Behauptung $V'(x) > 1$ folgt direkt aus der Definition von $u(x)$. \square

Ist $V(\cdot)$ in x nicht differenzierbar, dann ist $u(z) = u_0$ auf einem Intervall $[z_0, x]$ und $u(z) = 0$ auf einem Intervall $(x, z_1]$ mit $z_0 < x < z_1$.

4.2.2 Unbeschränkte Dividendenzahlungen

In diesem Abschnitt wird die Beschränkung $0 \leq U_t \leq u_0 < \infty$ aufgehoben, d.h. Dividendenzahlungen sind in beliebiger Höhe möglich. Im Folgenden bezeichnet

$$D_t = \int_0^t U_s ds$$

den Prozess der kumulierten Dividendenzahlungen. $(D_t)_{t \geq 0}$ ist ein adaptierter, positiver cadlag-Prozess.

Der Überschussprozess unter Berücksichtigung der Dividendenzahlungen ist

$$X_t^U = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - D_t.$$

Dividenden können bis zum Ruin gezahlt werden, d.h. die maximale Dividendenzahldauer ist $\tau^U = \inf \{t : X_t^U < 0\}$. Weiters ist der Wert der abgezinnten Dividendenzahlungen für einen Dividendenprozess D

$$V^D(x) = \mathbb{E} \left[\int_{0-}^{\tau^D-} e^{-\delta t} dD_t \right],$$

bzw. die Wertfunktion des Optimierungsproblems

$$V(x) = \sup_{D \in \mathcal{U}} V^D(x).$$

Der Punkt 0 liegt im Integrationsbereich, um unmittelbare Dividendenzahlungen $D_0 > 0$ in die Modellierung mit aufnehmen zu können. Eine mögliche Dividende zum Zeitpunkt τ^D wird in der Berechnung nicht berücksichtigt, da durch diese Dividendenzahlung unmittelbar Ruin eintreten würde.

Eine sehr intuitive Lösung des Optimierungsproblems bei unbeschränkter Dividendenzahlung ist, die Ergebnisse für beschränkte Dividendenzahlungen zu übernehmen und $u_0 \rightarrow \infty$ zu betrachten. In dieser Vorgangsweise sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden: der Fall $V'(x) > 1$ in dem keine Dividende bezahlt wird, der Fall $V'(x) = 1$ in

dem die eingehende Prämie als Dividende bezahlt wird und der Fall $V'(x) < 1$ in dem das gesamte Kapital unmittelbar als Dividende ausbezahlt wird (da u_0 größer als jeder Überschuss ist). Im Folgenden wird untersucht, ob diese Strategie auch optimal für unbeschränkte Dividendenzahlungen ist.

Ist $V'(x) < 1$ für alle x , so ist es möglich eine Dividende zu bezahlen und eine Wertfunktion größer als $V(x)$ zu erhalten, indem zunächst eine Dividende der Höhe $D_0 > 0$ bezahlt, und anschließend die optimale Strategie für den verbleibenden Überschuss angewandt wird:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq D_0 + V(x - D_0) = D_0 + V(x) - \int_{x-D_0}^x V'(z) dz \\ &> D_0 + V(x) - \int_{x-D_0}^x 1 dz = V(x) \end{aligned}$$

Satz 4.6 Die Funktion $V(\cdot)$ ist lokal Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ und deshalb absolut stetig. Für alle x gilt

$$x + \frac{c}{\lambda + \delta} \leq V(x) \leq x + \frac{c}{\delta}$$

und weiters $V(x) - V(y) \geq x - y$ für alle $y \leq x$.

Beweis: Die Grenze für $V(x) - V(y)$ folgt aus der Überlegung, für ein Anfangskapital x unmittelbar $x - y$ als Dividende zu zahlen, und danach einer optimalen Strategie für das Anfangskapital y zu folgen d.h. $V(x) \geq x - y + V(y)$.

Die untere Grenze von $V(x)$ folgt aus der Überlegung, unmittelbar das Anfangskapital x und danach die gesamten Prämien mit Rate c als Dividende zu zahlen, bis der erste Schaden und damit Ruin eintritt. Da nach Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit des ersten Schadens exponentialverteilt mit Parameter λ ist, d.h. $\mathbb{P}[T_1 > h] = e^{-\lambda h}$, folgt für die Wertfunktion in diesem Fall

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E} \left[\int_{0-}^{\infty} e^{-\delta t} dD_t \right] = x + \int_0^{\infty} \left[\int_0^t c e^{-\delta s} ds \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= x + \int_0^{\infty} \frac{c}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) \lambda e^{-\lambda t} dt = x + \frac{c}{\lambda + \delta} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der oberen Grenze von $V(x)$ wird eine „Pseudo“-Strategie betrachtet, bei der zunächst unmittelbar das Anfangskapital x und danach eine Dividende mit Rate c gezahlt wird, wobei die Zahlungen bei Ruin nicht gestoppt werden. Mit $dD_t = 0$ für $t \geq \tau^D$ folgt

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E} \left[\int_{0-}^{\infty} e^{-\delta t} dD_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_{0-}^{\infty} \int_t^{\infty} \delta e^{-\delta s} ds dD_t \right] \\ &= \delta \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} \int_{0-}^{s-} e^{-\delta s} dD_t ds \right] = \delta \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} D_{s-} e^{-\delta s} ds \right] \quad (4.13) \\ &\leq \delta \int_0^{\infty} (x + cs) e^{-\delta s} ds = x + \frac{c}{\delta}. \end{aligned}$$

Der Beweis der lokalen Lipschitz-Stetigkeit ist äquivalent wie im Beweis von Satz 4.2. \square

Der folgende Satz ist eine Rechtfertigung des oben erwähnten intuitiven Lösungsansatzes (Verwendung der Ergebnisse bei beschränkter Dividendenzahlung mit $u_0 \rightarrow \infty$).

Satz 4.7 Ist $V_u(x)$ die Wertfunktion für eine mit $u_0 = u$ beschränkten Dividendenzahlung und Startwert x , dann gilt $\lim_{u \rightarrow \infty} V_u(x) = V(x)$.

Beweis: $V_u(x)$ ist wachsend in u und konvergiert aufgrund der Beschränktheit von $V(\cdot)$ punktweise. Da die Strategie mit beschränkten Dividendenzahlungen in der Menge der zulässigen Strategien für den Fall einer unbeschränkten Dividendenzahlung liegt, folgt $\lim_{u \rightarrow \infty} V_u(x) \leq V(x)$.

Für $\varepsilon > 0$ sei D ein Dividendenprozess mit $V^D(x) \geq V(x) - 2\varepsilon$, wobei D als reiner Sprungprozess, dessen Sprünge mindestes Höhe ε haben, vorausgesetzt wird. D existiert aufgrund folgender Überlegung: Es existiert ein Dividendenprozess \tilde{D} mit $V^{\tilde{D}}(x) \geq V(x) - \varepsilon$. Der Sprungprozess D wird aus \tilde{D} vom Startpunkt 0 aus für wachsendes t konstruiert. Zunächst wird $D_0 = \tilde{D}_0 \mathbb{1}_{\tilde{D}_0 > \varepsilon}$ gesetzt, d.h. in D wird am Beginn nur dann eine Dividende der Höhe \tilde{D}_0 gezahlt, wenn die Dividendenzahlung in \tilde{D} zu Beginn höher als ε ist. Ist der Prozess D bis zum Zeitpunkt $t-$ konstruiert, so wird der Wert D_t folgendermaßen festgelegt: ist $\{\tilde{D}_t < D_{t-} + \varepsilon\}$, so wird keine Dividende bezahlt, d.h. $dD_t = 0$. Ist $\{\tilde{D}_t \geq D_{t-} + \varepsilon\}$, so wird $D_t = \tilde{D}_t$ gesetzt, d.h. zu den Zeitpunkten an denen die Differenz der beiden Prozesse größer als ε ist, wird eine Dividende bezahlt deren Höhe so festgelegt ist, dass die kumulierten Zahlungen übereinstimmen. Aus der Konstruktion folgt, dass \tilde{D}_t stets größer als D_t ist und aus der in (4.13) hergeleiteten Darstellung für $V(x)$

$$V^{\tilde{D}}(x) - V^D(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \delta e^{-\delta s} (\tilde{D}_s - D_s) ds \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \delta e^{-\delta s} \varepsilon ds \right] = \varepsilon$$

bzw. $V^D(x) = V^D(x) - V^{\tilde{D}}(x) + V^{\tilde{D}}(x) \geq -\varepsilon + V(x) - \varepsilon = V(x) - 2\varepsilon$. Im nächsten Schritt wird aus dem Sprungprozess D ein linearer Dividendenprozess \hat{D} konstruiert. Die Konstruktion erfolgt wieder rekursiv vom Startpunkt 0 aus für wachsendes t , indem zu jedem Zeitpunkt eine Dividendenzahlung U_t bestimmt und $\hat{D}_t = \int_0^t U_s ds$ gesetzt wird.

Zur Konstruktion von \hat{D} seien mit $s_0 = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ die Bereiche S_n und s_n rekursiv durch $S_n = \inf \{t \geq s_n : D_t \geq \hat{D}_{s_n} + \varepsilon\}$ und $s_{n+1} = \inf \{t > S_n : \hat{D}_{S_n} + u_0 t = D_t\}$ bzw. die Dividendenstrategie durch $U_t = 0$ auf $[s_n, S_n)$ und $U_t = u_0$ auf $[S_n, s_{n+1})$ definiert. Aus dieser Konstruktion folgt, dass \hat{D} ein linear wachsender Dividendenprozess ist, wobei \hat{D}_t stets kleiner als D_t ist und $D_t = \hat{D}_t$ auf $[s_n, S_n)$ gilt. Aus

$$\int_{0-}^t e^{-\delta s} dD_s = D_t e^{-\delta t} + \delta \int_0^t D_{s-} e^{-\delta s} ds$$

und aus $D_t \leq x + ct$ folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t e^{-\delta t} = 0$.

Zu zeigen bleibt, dass der Erwartungswert der diskontierten Differenz

$$\delta \int_0^\infty e^{-\delta s} (\hat{D}_s - D_s) ds$$

der beiden Prozesse D und \hat{D} beliebig klein gemacht werden kann. Aus der Konstruktion von \hat{D} folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta \int_{s_n}^{S_n} (D_s - \hat{D}_s) e^{-\delta s} ds = 0,$$

da die Werte auf diesem Bereich übereinstimmen. Die verbleibende Differenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta \int_{S_n}^{s_{n+1}} (D_s - \widehat{D}_s) e^{-\delta s} ds$$

ist eine Funktion von u_0 . Aus der Definition der s_n ist ersichtlich, dass $\lim_{u_0 \rightarrow \infty} s_{n+1} = S_n$ gilt, d.h. die obige Differenz ist monoton fallend in u_0 und konvergiert für $u_0 \rightarrow \infty$ gegen 0. Aus dem Satz der monotonen Konvergenz folgt, dass ein u_0 mit

$$V^D(x) - V^{\widehat{D}}(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta \int_{S_n}^{s_{n+1}} (D_s - \widehat{D}_s) e^{-\delta s} ds \right] < \varepsilon$$

existiert, woraus

$$V(x) - V^{\widehat{D}}(x) = V(x) - V^D(x) + V^D(x) - V^{\widehat{D}}(x) < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

und damit die Behauptung folgt. \square

Im nächsten Satz wird die HJB-Gleichung des Optimierungsproblems hergeleitet. Die Idee für die Herleitung ist eine zu (4.5) äquivalente Version zu finden und $u_0 \rightarrow \infty$ zu betrachten.

Satz 4.8 Die Funktion $V(\cdot)$ ist auf $(0, \infty)$ von links und rechts differenzierbar, und die beiden Ableitungen erfüllen die HJB-Gleichung

$$\max \left\{ cV'(x) + \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(x), 1 - V'(x) \right\} = 0. \quad (4.14)$$

Ist $V(\cdot)$ an x nicht differenzierbar, so ist $V'(x-) = 1 < V'(x+)$.

Beweis: Da u als unbeschränkt vorausgesetzt ist, kann $u > c$ gesetzt werden. Gleichung (4.5) kann in diesem Fall mit (4.10) als

$$\max \left\{ cV'_u(x) + \lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)V_u(x), \right. \\ \left. 1 + \frac{\lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)V_u(x) + c}{u - c} - V'_u(x) \right\} = 0 \quad (4.15)$$

geschrieben werden. Der erste Teil folgt direkt aus (4.5) mit $u = 0$, der zweite Teil für $u > c$ durch eine einfache Umformung. Im Folgenden wird gezeigt, dass $V'_u(\cdot)$ punktweise fast sicher gegen eine Funktion $f(\cdot)$ konvergiert, wobei $V'_u(x)$ entweder die links- oder rechtsseitige Ableitung an x bezeichnet. Diese Funktion $f(\cdot)$ erfüllt

$$\max \left\{ cf(x) + \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(x), 1 - f(x) \right\} = 0.$$

Aus der beschränkten Konvergenz folgt

$$V(x) - V(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^x V'_u(z) dz = \int_0^x \lim_{u \rightarrow \infty} V'_u(z) dz = \int_0^x f(z) dz$$

d.h. $f(\cdot)$ ist die Dichte von $V(\cdot)$. Damit ist $V(\cdot)$ an x differenzierbar, falls $f(\cdot)$ an x stetig ist. Weiters folgt aus der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (\lambda + \delta)V_u(x) - \lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y) = (\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y).$$

Zunächst wird der Fall

$$(\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) = c$$

betrachtet. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unbeschränkte, wachsende Folge, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} V'_{u_n}(x)$ existiert. Der Grenzwert ist aufgrund von

$$cV'_u(x) \stackrel{(4.15)}{\leq} (\lambda + \delta)V_u(x) - \lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y) \leq (\lambda + \delta)V_u(x) \leq (\lambda + \delta)V(x)$$

endlich. Aus (4.15) folgt, dass entweder $\lim_{n \rightarrow \infty} V'_{u_n}(x) \leq 1$ (falls der erste Term das Maximum bestimmt) oder $\lim_{n \rightarrow \infty} V'_{u_n}(x) \geq 1$ (falls der zweite Term das Maximum bestimmt) ist. Gesamt folgt somit $\lim_{u \rightarrow \infty} V'_u(x) = 1$ und aus der Stetigkeit von

$$(\lambda + \delta)V_u(x) - \lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y)$$

die Stetigkeit von $f(\cdot)$ an x .

Aus der optimalen Strategie (4.10) und (4.15) folgt

$$(\lambda + \delta)V_u(x) - \lambda \int_0^x V_u(x-y) dG(y) \geq c$$

wobei diese Ungleichung auch für $V(x)$ gilt. Falls

$$(\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) > c$$

ist, folgt aus der Stetigkeit, dass Größen $\varepsilon > 0$ und $x_1 < x < x_2$ mit

$$(\lambda + \delta)V(z) - \lambda \int_0^z V(z-y) dG(y) > c + 2\varepsilon$$

für alle $x_1 \leq z \leq x_2$ existieren. Deshalb kann ein u groß genug mit

$$(\lambda + \delta)V_u(z) - \lambda \int_0^z V_u(z-y) dG(y) > c + \varepsilon$$

und damit $V'_u(z) \neq 1$ gefunden werden.

Der Wechsel von keine Dividendenzahlung zur Zahlung von Dividenden an einem Punkt z impliziert $V'(z) = 1$.

Falls eine unbeschränkt wachsende Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der optimalen Strategie, eine Dividende mit Rate u_n auf $X_t \in [x_1, x_2]$ zu zahlen, existiert, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} V'_{u_n}(z) = 1$ und aus der beschränkten Konvergenz

$$V(x_2) - V(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} V'_{u_n}(z) dz = x_2 - x_1.$$

Existiert weiters eine unbeschränkt wachsende Folge $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V'_{u'_n}(z) > 1$, dann folgt

$$V'_{u'_n}(z) = \frac{1}{c} \left((\lambda + \delta)V_{u'_n}(z) - \lambda \int_0^z V_{u'_n}(z-y) dG(y) \right) \geq \frac{c + \varepsilon}{c}.$$

bzw. $V(x_2) - V(x_1) \geq (x_2 - x_1) \frac{c+\varepsilon}{c}$ und damit ein Widerspruch, d.h. $\lim_{u \rightarrow \infty} V'_u(z) = 1$.
 Aus einer ähnlichen Argumentation folgt, dass

$$\lim_{u \rightarrow \infty} V'_u(x) = \frac{1}{c} \left((\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) \right)$$

falls eine unbeschränkt wachsende Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von optimalen Strategien existiert, für die auf $X_t \in [x_1, x_2]$ keine Dividende gezahlt wird.

Die letzte Möglichkeit ist, dass $V_u(z)$ auf $[x_1, x_2]$ für große u nicht differenzierbar ist. Aus Satz 4.5 folgt allerdings, dass ein eindeutigen Punkt $z_u \in [x_1, x_2]$ existiert, in dem $V_u(z)$ nicht differenzierbar ist und für den $V'_u(z) \leq 1$ für $z < z_u$ bzw. $V'_u(z) \geq 1$ für $z > z_u$ gilt. Ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge für die $(z_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und gilt $\lim_{u \rightarrow \infty} z_{u_n} = y \neq x$, dann kann aus der selben Argumentation wie oben für $[x_1, y]$ bzw. $[y, x_2]$ falls $x < y$ bzw. $y < x$ die Existenz des Grenzwertes $\lim_{u \rightarrow \infty} V'_u(x)$ gezeigt werden.

Für den Fall $\lim_{u \rightarrow \infty} z_{u_n} = x$ folgt aus der selben obigen Argumentation, dass $V'(z) = 1$ für $z < x$ und $V'(z) > 1$ für $z > x$. Damit folgt, dass die beiden Grenzwerte von $V'(\cdot)$ an x existieren und $V'(x-) = 1$ ist. \square

Für ein Kapital 0 ist $V'(0)$ die rechtsseitige Ableitung, d.h. $V'(0) = \frac{\lambda+\delta}{c} V(0)$. Aus Satz 4.6 folgt $V(0) \geq \frac{c}{\lambda+\delta}$ und damit $(\lambda + \delta)V(0) \geq c$.

4.2.3 Die optimale Dividendenstrategie

Sei

$$\mathfrak{B}_0 = \{x : V'(x-) > 1\}$$

und $V'(0-) = V'(0+)$ gesetzt. Weiters sei die Menge $\tilde{\mathfrak{B}}_c$ durch

$$\tilde{\mathfrak{B}}_c = \begin{cases} \{0\} & \text{für } V(0) = \frac{c}{\lambda+\delta} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die „obere Grenze“ von \mathfrak{B}_0 sei durch

$$\mathfrak{B}_c = \tilde{\mathfrak{B}}_c \cup \{x \notin \mathfrak{B}_0 : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}_0, x_n \uparrow x\}$$

und \mathfrak{B}_∞ durch

$$\mathfrak{B}_\infty = (0, \infty) \setminus (\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}_c)$$

gegeben.

Satz 4.9 Die oben definierten Mengen können folgendermaßen charakterisiert werden:

- 1) Die Menge \mathfrak{B}_0 ist offen.
- 2) Ist $x \in \mathfrak{B}_\infty$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x] \subset \mathfrak{B}_\infty$.
- 3) Ist $x \notin \mathfrak{B}_\infty$ und existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}_\infty$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, dann folgt $x \in \mathfrak{B}_c$.
- 4) $\left(\frac{c\lambda}{\delta(\lambda+\delta)}, \infty \right) \subset \mathfrak{B}_\infty$.

Beweis:

- zu 1) Für $x \in \mathfrak{B}_0$ ist $V'(x-) > 1$ und aus Satz 4.8 folgt, dass $V(\cdot)$ an x differenzierbar ist. Aufgrund der Stetigkeit von V ist die Funktion auch in einer Umgebung von x differenzierbar mit $V'(z-) > 1$ für alle z in dieser Umgebung.
- zu 2) Ist $V'(0) = 1$, dann ist $0 \in \mathfrak{B}_c$ (da $V(0) = \frac{c}{\lambda + \delta}$). Da x nach Voraussetzung in \mathfrak{B}_∞ liegt, ist somit $x \neq 0$. Aus der Definition von \mathfrak{B}_c folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x) \cap \mathfrak{B}_0 = \emptyset$ existiert, da sonst $x \in \mathfrak{B}_c$ wäre, woraus direkt die Behauptung folgt.
- zu 3) Aus den Voraussetzungen folgt $V'(x_n-) = 1$ für alle x_n der Folge. Existiert $V'(x)$, dann muss der Wert ebenfalls 1 sein und damit $x \notin \mathfrak{B}_0$. Ist andererseits $V'(\cdot)$ an x nicht differenzierbar, dann folgt $V'(x-) = 1$ und somit $x \notin \mathfrak{B}_0$ aus Satz 4.8.
- zu 4) Da $V(\cdot)$ wachsend ist, ist

$$V(x) - \int_0^x V(x-y) dG(y) \geq V(x) - V(x) \int_0^x dG(y) \geq V(x)(1 - G(x)) \geq 0.$$

Existiert $x > \frac{c\lambda}{\delta(\lambda + \delta)}$ mit $V'(x-) > 1$, so folgt aus Satz 4.6

$$V(x) \geq x + \frac{c}{\lambda + \delta} > \frac{c\lambda}{\delta(\lambda + \delta)} + \frac{c}{\lambda + \delta} = \frac{c}{\delta}.$$

Weiters ist in diesem Fall $V'(z) > 1$ für alle $z \geq x$ aufgrund folgender Überlegung: Sei $z = \inf \{y > x : V'(y) = 1\} < \infty$. Da $V'(\cdot)$ keine negativen Sprünge besitzt, folgt aus

$$\lambda V(z) - \lambda \int_0^z V(z-y) dG(y) \geq 0$$

und aus (4.5) mit $u = 0$

$$1 = V'(z) = \frac{1}{c} \left[(\lambda + \delta)V(z) - \lambda \int_0^z V(z-y) dG(y) \right] \geq \frac{\delta V(z)}{c} > \frac{\delta V(x)}{c} > 1$$

und damit ein Widerspruch. Somit ist $V'(z) \geq \frac{\delta}{c}V(z)$ für alle $z \geq x$ bzw.

$$\log \left(\frac{V(z)}{V(x)} \right) \geq \frac{(z-x)\delta}{c},$$

d.h. $V(z)$ wächst auf $[x, \infty)$ exponentiell. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Satz 4.6, woraus $V'(x-) = 1$ und damit die Behauptung folgt. \square

Satz 4.9 führt auf folgende Strategie D^* : Ist $x \in \mathfrak{B}_0$, dann werden keine Dividenden bezahlt. Da die Menge \mathfrak{B}_0 offen ist, ist $t_0 = \inf \{t : x + ct \notin \mathfrak{B}_0\} > 0$. Aus der Definition von \mathfrak{B}_c folgt, dass $x + ct_0 \in \mathfrak{B}_c$, d.h. falls $T_1 > t_0$ (wobei T_1 der Zeitpunkt des ersten Schadens ist) wird in (t_0, T_1) eine Dividende der Höhe c bezahlt. Somit wird für $x \in \mathfrak{B}_c$ eine Dividende mit $dD^* = c dt$ bis zum nächsten Schaden bezahlt, d.h. $X_t^* = x$ für $t < T_1$. Ist $x \in \mathfrak{B}_\infty$, dann wird eine Dividende der Höhe

$$\Delta D_t^* = x - \sup \{z < x : z \notin \mathfrak{B}_\infty\}$$

bezahlt. Aus Satz 4.9 (2) folgt $\Delta D_t^* > 0$ und aus Satz 4.9 (3) folgt, dass der Wert nach der Dividendenzahlung in \mathfrak{B}_c liegt. Aufgrund der Konstruktion der Strategie ist sie messbar.

Definition 4.10 Eine Strategie D^* der oben konstruierten Form wird *Band Strategie* genannt. \square

Satz 4.11 Die Strategie D^* ist optimal, d.h. $V^*(x) = V(x)$ auf \mathbb{R}_+ .

Beweis: Mit $X_0^* = x - D_0^*$ sei $J_t = \mathbb{1}_{X_t^* \in \mathfrak{B}_c}$. In Satz 4.9 wurde gezeigt, dass der Prozess D^* nur an Schadenszeitpunkten springt. Damit ist der Prozess $(X_t^* e^{-\delta t})_{t \geq 0}$ ein stückweise deterministischer Markov-Prozess. Brémaud zeigt in [5] auf Seite 27, dass der Prozess

$$\begin{aligned} M'_t &= \sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} [V(X_{T_i}^* + \Delta D_{T_i}^*) - V(X_{T_i-}^*)] e^{-\delta T_i} \\ &\quad - \int_0^{\tau^* \wedge t} \lambda \left[\int_0^{X_s^*} V(X_s^* - y) dG(y) - V(X_s^*) \right] e^{-\delta s} ds \end{aligned}$$

ein Martingal ist. Aus $V'(x) = 1$ auf \mathfrak{B}_c folgt

$$V(X_{T_i}^* + \Delta D_{T_i}^*) - V(X_{T_i}^*) = \int_{X_{T_i}^*}^{X_{T_i}^* + \Delta D_{T_i}^*} V'(z) dz = \Delta D_{T_i}^*$$

bzw. gilt weiters

$$\begin{aligned} &V(X_{T_i-}^*) e^{-\delta T_i} - V(X_{T_{i-1}}^*) e^{-\delta T_{i-1}} \\ &= \int_{T_{i-1}}^{T_i} (cV'(X_s^*) - \delta V(X_s^*)) e^{-\delta s} \mathbb{1}_{J_s=0} ds - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \delta V(X_s^*) e^{-\delta s} \mathbb{1}_{J_s=1} ds. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt die selbe Interpretation wie die Gleichung im Beweis von Satz 4.4: Die diskontierte Differenz von $V(\cdot)$ zwischen zwei Schäden (wobei der zweite Schaden nicht berücksichtigt wird) ist lediglich die diskontierte Differenz der Prämien- und Dividendenzahlungen.

Insgesamt folgt, dass der Prozess

$$\begin{aligned} &\left(V(X_{\tau^* \wedge t}^*) e^{-\delta t} + \sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} \right. \\ &\quad - \int_0^{\tau^* \wedge t} \left[cV'(X_s^*) + \lambda \int_0^{X_s^*} V(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(X_s^*) \right] e^{-\delta s} \mathbb{1}_{J_s=0} ds \\ &\quad \left. - \int_0^{\tau^* \wedge t} \left[\lambda \int_0^{X_s^*} V(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(X_s^*) \right] J_s e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0} \end{aligned}$$

ebenfalls ein Martingal ist. Aus (4.14) folgt auf \mathfrak{B}_c wegen $V'(x) = 1$

$$\lambda \int_0^{X_s^*} V(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(X_s^*) = -c.$$

Diese Gleichung gilt auch für $x = 0$.

Auf \mathfrak{B}_∞ springt der Prozess aufgrund der Definition unmittelbar. Weiters ist $V'(X_s^*) > 1$ auf $\{J_s = 0\}$ und das Integral über dieser Menge ist 0. Damit folgt, dass

$$\left(V(X_{\tau^* \wedge t}^*) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} + \sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^* \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

ebenfalls ein Martingal ist und ergibt

$$V(x) = V(X_0^*) + D_0 = \mathbb{E} \left[V(X_{\tau^* \wedge t}^*) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} + \sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^* \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right].$$

Aus

$$V(X_t^*) e^{-\delta t} \leq V(x + ct) e^{-\delta t} \leq \left(x + ct + \frac{c}{\delta} \right) e^{-\delta t}$$

(siehe Satz 4.6) folgt, dass $V(X_t^*) e^{-\delta t}$ beschränkt ist und für $t \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[V(X_{\tau^* \wedge t}^*) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} \right] = 0.$$

Gesamt folgt aus der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} V(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^* \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_{\tau^*}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^*} c J_s e^{-\delta s} ds \right] = V^*(x) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung $V(x) = V^*(x)$. \square

Bemerkung 4.12 Ist $x_0 = \sup \{x : V'(x) > 1\}$, dann ist $X_t^* \leq x_0$ für alle $t \geq 0$ (da für alle x_0 übersteigenden Überschüsse mindestens die eingekommene Prämie als Dividende ausbezahlt wird). Nachdem die Verteilung von $\sum_{i=0}^{N_1} Y_i$ aufgrund der Unbeschränktheit von N_1 einen unbeschränkten Wertebereich besitzt, ist

$$\mathbb{P} \left[\sum_{i=N_{n-1}+1}^{N_n} Y_i > x_0 + c \right] = \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^{N_1} Y_i > x_0 + c \right] > 0.$$

Die Zufallsvariablen $\left(\sum_{i=N_{n-1}+1}^{N_n} Y_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sind nach Voraussetzung unabhängig und identisch verteilt. Damit folgt aus dem Lemma von Borel-Cantelli, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=N_{n-1}+1}^{N_n} Y_i > x_0 + c$ existiert, d.h. der Überschussprozess ist an n negativ. Daraus folgt, dass für die optimale Dividendenstrategie fast sicher Ruin eintritt. \square

Ist $G(\cdot)$ stetig differenzierbar, dann gibt der folgende Satz einen Anhaltspunkt wie die Werte von \mathfrak{B}_c gefunden werden können.

Satz 4.13 Sei

$$v(x) = \frac{1}{\lambda + \delta} \left(c + \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) \right)$$

und $G(\cdot)$ differenzierbar an x . Ist $x \in \mathfrak{B}_c \setminus \{0\}$, dann ist $v'(x) = 1$.

Beweis: Es gilt

$$\int_0^x V(x-y) dG(y) = V(0)G(x) + \int_0^x V'(y)G(x-y) dy$$

wegen $G(0) = 0$. Da $V'(\cdot)$ beschränkt und fast sicher stetig ist, ist $v(\cdot)$ an allen Punkten differenzierbar, an denen $V(\cdot)$ differenzierbar ist.

$v(x)$ ist die Wertfunktion folgender Strategie: Bis zum ersten Schaden werden die eingenommenen Prämien als Dividenden ausbezahlt und ab dem ersten Schaden die optimale Strategie für den verbleibenden Überschuss angewandt. Ist $x \in \mathfrak{B}_c$, d.h. $V'(x) = 1$, dann ist nach (4.5)

$$(\lambda + \delta)V(x) - \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) = c$$

und deshalb

$$V(x) = \frac{1}{\lambda + \delta} \left(c + \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) \right) = v(x).$$

Damit gilt für $0 < h < x$

$$v(x) = V(x) \geq V(x-h) + h \geq v(x-h) + h,$$

bzw.

$$v'(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \geq 1.$$

Nun wird folgende Strategie betrachtet: auf dem Intervall $(0, T_1 \wedge h)$ werden keine Dividenden, und auf dem Intervall $[T_1 \wedge h, T_1]$ die eingehenden Prämien als Dividenden bezahlt. Nach T_1 wird die optimale Strategie für den verbleibenden Überschuss verfolgt. Ist $v(x, h)$ die Wertfunktion dieser Strategie, dann gilt mit $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$v(x, h) = \int_0^h e^{-\delta t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda h} e^{-\delta h} v(x+ch).$$

Der erste Summand steht für den Fall dass vor h ein Schaden eintritt, wobei die obere Grenze des Integrals aus $V(x) = 0$ für $x < 0$ folgt. Der zweite Summand steht für den Fall, dass kein Schaden eintritt und in h ein Überschuss der Höhe $x+ch$ vorhanden ist.

Für diese Wertfunktion ist $\lim_{h \downarrow 0} v(x, h) = v(x) = V(x)$, da der erste Summand 0 ist. Da $v(x, h)$ die Wertfunktion einer speziellen Strategie ist, folgt $v(x, h) \leq V(x)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{v(x, h) - v(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\delta t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{v(x, h) - v(x)}{h} - \frac{1 - e^{-(\lambda+\delta)h}}{h} v(x+ch) \end{aligned}$$

und weiters für $h \downarrow 0$ (mit äquivalenten Überlegungen zu den Grenzübergängen wie im Beweis von Satz 4.3)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) + cv'(x) - (\lambda + \delta)V(x) \\ &= cv'(x) + \underbrace{\lambda \int_0^x V(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)V(x)}_{=-c \text{ auf } \mathfrak{B}_c \text{ da } V'(x)=1} = cv'(x) - c, \end{aligned}$$

d.h. $v'(x) \leq 1$. □

Im Beweis von Satz 4.13 wurde lediglich die Voraussetzung $V'(x) = 1$ benutzt. Damit folgt, dass für alle $x \in \partial \mathfrak{B}_\infty \setminus \{0\}$, für die $V(\cdot)$ differenzierbar ist, $v'(x) = 1$ gilt.

Die Lösungen der Gleichung $v'(x) = 1$ sind Kandidaten für \mathfrak{B}_c . Allerdings ist $V(\cdot)$ in dieser Gleichung unbekannt, wodurch die Berechnung nicht direkt erfolgen kann. Dieses Problem lässt sich leichter lösen, wenn zunächst die Charakteristik der Lösung des Optimierungsproblems genauer untersucht wird.

Satz 4.14 *Charakterisierung der Lösung*

$V(\cdot)$ ist die minimale Lösung der HJB-Gleichung (4.14). Ist $f(\cdot)$ eine Lösung mit ausschließlich positiven Sprüngen in deren Ableitung und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-\frac{\delta}{c}x} = 0$ und ist weiters entweder $f'(0) > 1$ oder $f(0) = \frac{c}{\lambda + \delta}$, dann ist $f(x) = V(x)$ auf \mathbb{R}_+ .

Beweis: Sei X^* der Prozess mit der optimalen Dividendenstrategie. Äquivalent zum Beweis von Satz 4.11 folgt, dass der Prozess

$$\begin{aligned} & \left(f(X_{\tau^* \wedge t}^*) e^{-\delta(\tau^* \wedge t)} + \sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} (f(X_{T_i}^* + \Delta D_{T_i}^*) - f(X_{T_i}^*)) e^{-\delta T_i} \right. \\ & \quad - \int_0^{\tau^* \wedge t} \left[cf'(X_s^*) + \lambda \int_0^{X_s^*} f(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(X_s^*) \right] e^{-\delta s} \mathbb{I}_{J_s=0} ds \\ & \quad \left. - \int_0^{\tau^* \wedge t} \left[\lambda \int_0^{X_s^*} f(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(X_s^*) \right] J_s e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0} \end{aligned}$$

ein Martingal ist.

Aus $f'(x) \geq 1$ folgt $f(x) \geq f(X_0^*) + D_0^*$ bzw. zu den Schadenszeitpunkten $f(X_{T_i}^* + \Delta D_{T_i}^*) \geq f(X_{T_i}^*) + \Delta D_{T_i}^*$ (die Ungleichung folgt aus der Strategie zunächst eine Dividende der Höhe $\Delta D_{T_i}^*$ auszubehalten, und danach die optimale Strategie für den verbleibenden Überschuss $X_{T_i}^*$ anzuwenden). Weiters folgt aus (4.14)

$$cf'(X_s^*) + \int_0^{X_s^*} f(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(X_s^*) \leq 0$$

bzw.

$$\int_0^{X_s^*} f(X_s^* - y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(X_s^*) \leq -cf'(X_s^*) \leq -c,$$

d.h.

$$\begin{aligned} f(x) & \geq \mathbb{E} \left[f(X_t^*) e^{-\delta t} + \sum_{i=0}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^* \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right] \\ & \geq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_{\tau^* \wedge t}} \Delta D_{T_i}^* e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau^* \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right]. \end{aligned}$$

Aus der monotonen Konvergenz folgt somit $f(x) \geq V^{D^*}(x) = V(x)$.

Sei $f(\cdot)$ eine Lösung der HJB-Gleichung (4.14) mit $f(x)e^{-\frac{\delta}{c}x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Weiters seien

wie zum Beginn dieses Abschnittes folgende Mengen definiert: $\mathfrak{B}'_0 = \{x : f'(x-) > 1\}$,

$$\tilde{\mathfrak{B}}'_c = \begin{cases} \{0\} & \text{für } f(0) = \frac{c}{\lambda+\delta} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases},$$

$\mathfrak{B}'_c = \tilde{\mathfrak{B}}'_c \cup \{x \notin \mathfrak{B}'_0 : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}'_0, x_n \uparrow x\}$ und $\mathfrak{B}'_\infty = (0, \infty) \setminus (\mathfrak{B}'_0 \cup \mathfrak{B}'_c)$, wobei für diese Mengen die selben Aussagen wie in Satz 4.9 gelten. Für diese Mengen sei D' die zu $f(\cdot)$ gehörige optimale Strategie mit der selben Definition wie D^* . Mit den gleichen Beweisschritten wie in Satz 4.11 und mit $J'_t = \mathbb{I}_{X_t \in \mathfrak{B}'_c}$ folgt, dass

$$\left(f(X_{\tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau \wedge t)} + \sum_{i=1}^{N_{\tau \wedge t}} \Delta D'_{T_i} e^{-\delta T_i} + \int_0^{\tau \wedge t} c J'_s e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal ist. Für den Erwartungswert des Martingals folgt mit der Abschätzung

$$f(X_{\tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau \wedge t)} \leq f(x + ct) e^{-\delta t} = f(x + ct) e^{-\delta \frac{x+ct}{c}} e^{\frac{\delta x}{c}}$$

aus den Voraussetzungen $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[f(X_{\tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau \wedge t)} \right] = 0$ und damit die Behauptung. \square

In den bisherigen Aussagen und Sätzen wurde die Situation für ein Startkapital der Höhe 0 kaum behandelt, dieser Fall ist jedoch für die gesamte Charakterisierung der Lösung wesentlich.

Für das Startkapital 0 gibt es zwei Möglichkeiten: Eine Dividende der Höhe c wird bezahlt, woraus $V(0) = \frac{c}{\delta+\lambda}$ folgt, oder es wird keine Dividende bezahlt, d.h. es existiert ein Wert $x_0 = \inf \{x : V'(x) = 1\} > 0$ ab dem eine Dividende bezahlt wird. Im zweiten Fall kann die Wertfunktion $V(0)$ gefunden werden, indem die Ergebnisse für verschiedene Werte von x_0 verglichen und das Optimum ermittelt wird. Für diesen Vergleich muss

$$cf'(x) + \lambda \int_0^x f(x-y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(x) = 0 \quad (4.16)$$

auf $[0, x_0]$ gelöst werden.

Satz 4.15 Gleichung (4.16) besitzt eine eindeutige Lösung mit $f(0) = 1$.

Beweis: Ist $x_1 = \inf \{x : f'(x) \leq 0\}$, dann ist auf $[0, x_1]$ wegen (4.16)

$$f'(x) = \frac{1}{c} \left[(\lambda + \delta)f(x) - \lambda \int_0^x f(x-y) dG(y) \right] > \frac{\delta}{c} f(x),$$

d.h. $x_1 = \infty$ und $f(x) > e^{\frac{\delta}{c}x}$ (die obige Abschätzung gilt, da $f(\cdot)$ wachsend ist). Andererseits folgt aus (4.16) $f'(x) \leq \frac{\lambda+\delta}{c} f(x)$, d.h. die obere Grenze für $f(x)$ ist $f(x) \leq e^{\frac{\lambda+\delta}{c}x}$.

Im Folgenden wird eine Lösung $f(\cdot)$ auf $[0, x_0]$ mit $x_0 > 0$ konstruiert. Mit dieser Funktion $f(\cdot)$ ist $\frac{f(x)}{f(0)}$ eine Lösung mit Anfangskapital 1.

Sei $f(x_0) = 1$ und $\tau_0 = \inf \{t > 0 : X_t^0 > x_0\}$, wobei $(X_t^0)_{t \geq 0}$ der Prozess ohne Dividendenzahlung ist. Weiters sei die Funktion $f(\cdot)$ durch

$$f(x) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau_0} \mathbb{I}_{\tau_0 < \tau} \right]$$

definiert. Es ist einfach zu sehen, dass für diese Funktion $f(x_0) = 1$ ist. Für $x < x_0$ und $h < \frac{x_0 - x}{c}$ gilt für den Prozess auf $[0, T_1 \wedge h]$, wobei T_1 den Zeitpunkt des ersten Schadens bezeichnet, die bereits bekannte Darstellung

$$f(x) = e^{-\lambda h} e^{-\delta h} f(x + ch) + \int_0^h e^{-\delta t} \int_0^{x+ct} f(x + ct - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Aus $h \downarrow 0$ folgt die Rechtsstetigkeit von $f(\cdot)$ an x und eine Umformung und Division durch h führt auf

$$0 = \frac{f(x + ch) - f(x)}{h} - \frac{1 - e^{-(\lambda + \delta)h}}{h} f(x + ch) + \frac{1}{h} \int_0^h \lambda e^{-(\lambda + \delta)t} \int_0^{x+ct} f(x + ct - y) dG(y) dt.$$

Für $h \downarrow 0$ folgt mit den Grenzwerten aus dem Beweis von Satz 4.3 die rechtsseitige Differenzierbarkeit von $f(\cdot)$ in x und zeigt, dass f eine Lösung von (4.16) ist. Wird im obigen Ansatz x durch $x - ch$ ersetzt, so folgt mit den gleichen Argumenten die linksseitige Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $f(\cdot)$ in x . Es ist einfach nachzuprüfen, dass die links- und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen, d.h. $f(\cdot)$ ist eine differenzierbare Lösung von (4.16).

Angenommen $f(\cdot)$ ist eine Lösung von (4.16) mit $f(0) = 1$, dann kann wie im Beweis von Satz 4.11 gezeigt werden, dass

$$\left(f(X_{\tau_0 \wedge \tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau_0 \wedge t)} - \int_0^{\tau_0 \wedge \tau \wedge t} \left[c - f'(X_s) + \int_0^{X_s} f(X_s - y) dG(y) - (\lambda + \delta)f(X_s) \right] e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

und $(f(X_{\tau_0 \wedge \tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau_0 \wedge t)})_{t \geq 0}$ Martingale sind. Aus der beschränkten Konvergenz folgt mit $f(X_\tau) = 0$ und $\tau_0 \wedge \tau < \infty$

$$f(x) = \mathbb{E} \left[f(X_{\tau_0 \wedge \tau}) e^{-\delta \tau_0} \right] = f(x_0) \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau_0} \mathbb{I}_{\tau_0 < \tau} \right].$$

Der Wert $f(x_0)$ ist durch die Bedingung $f(0) = 1$ eindeutig bestimmt. Da x_0 beliebig gewählt wurde, folgt die Eindeutigkeit der Lösung. \square

Definition 4.16 Eine Strategie D mit $D_0 = (x - x_0)^+$ und $\Delta D_t = c \mathbb{I}_{X_t = x_0}$ heißt *Barriere Strategie mit Barriere x_0* . \square

In einer Barrierenstrategie wird zunächst der gesamte x_0 übersteigende Überschuss als Dividende ausbezahlt. Danach wird zu jedem Zeitpunkt, in dem der Überschuss den Wert x_0 erreicht, die eingenommene Prämie als Dividende ausbezahlt.

Satz 4.17 Ist $f(\cdot)$ die Lösung der Gleichung (4.16) mit $f(0) = 1$. Die Wertfunktion einer Barrieren-Strategie mit Barriere x_0 ist

$$V_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f'(x_0)} & \text{für } x \leq x_0, \\ V_{x_0}(x_0) + x - x_0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Beweis: Da das gesamte x_0 übersteigende Kapital unmittelbar als Dividende ausbezahlt und für den verbleibenden Überschuss x_0 die optimale Strategie angewandt wird, folgt die Behauptung für den Fall $x > x_0$.

Für den Fall $x \leq x_0$ gilt einerseits dass $V_{x_0}(x)$ die Gleichung (4.16) löst (da $f(\cdot)$ eine Lösung der Gleichung ist), und andererseits $V'_{x_0}(x_0) = 1$ (die Prämien werden als Dividenden ausbezahlt). Mit $J_s = \mathbb{1}_{X_s=x_0}$ folgt wie im Beweis von Satz 4.11, dass der Prozess

$$\left(V_{x_0}(X_{\tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau \wedge t)} + \int_0^{\tau \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal ist, d.h.

$$V_{x_0}(x) = \mathbb{E} \left[V_{x_0}(X_{\tau \wedge t}) e^{-\delta(\tau \wedge t)} + \int_0^{\tau \wedge t} c J_s e^{-\delta s} ds \right].$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit $t \rightarrow \infty$. □

Nun kann $V(0)$ berechnet werden.

Satz 4.18 Ist $f(\cdot)$ die Lösung der Gleichung (4.16) mit $f(0) = 1$, dann ist

$$V(0) = \sup_{x \geq 0} (f'(x))^{-1}.$$

Beweis: In Satz 4.11 wurde gezeigt, dass die optimale Strategie eine Barriere-Strategie ist, wobei 0 eine mögliche Barriere darstellt. Weiters folgt aus Satz 4.17, dass für die Wertfunktion mit Startkapital 0 und Barriere x_0 $V(0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ gilt. Nachdem die Barriere beliebig gewählt werden kann, ist die Wertfunktion an 0 gleich dem Maximum von $\frac{1}{f'(x_0)}$ für $x_0 \geq 0$. □

Die Wertfunktion kann nun auf folgende Weise rekursiv konstruiert werden: Ist $f_0(x)$ die Lösung von (4.16) und $x_0 = \sup \left\{ x : f'_0(x) = \inf_y f'_0(y) \right\}$, so ist zunächst die Wertfunktion $V_0(\cdot)$ durch

$$V_0(x) = \begin{cases} \frac{f_0(x)}{f'_0(x_0)} & \text{für } x \leq x_0 \\ \frac{f_0(x_0)}{f'_0(x_0)} + x - x_0 & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

definiert. Falls $V_0(x)$ eine Lösung von (4.14) ist, so gilt $V(x) = V_0(x)$.

Angenommen $V_n(x)$ und x_n wurden bereits konstruiert. Die Funktion $f_{n+1}(x; a)$ ist für alle $x, a \in \mathbb{R}_+$ durch

$$f_{n+1}(x; a) = \begin{cases} V_n(x) & \text{für } x \leq a \\ \text{Lösung von (4.16)} & \text{für } x > a \end{cases}$$

definiert, wobei aufgrund der Stetigkeit der Lösung $V_n(a) = f_{n+1}(a, a)$ gelten muss. Das für die Konstruktion der Wertfunktion verwendete a ist

$$a = \inf \left\{ x > x_0 : \inf_{y > x} f'_{n+1}(y; x) = 1 \right\},$$

wobei die Ableitung von $f_{n+1}(\cdot, \cdot)$ nach dem ersten Argument erfolgt. Aus (4.16) folgt, dass bei der Wahl eines kleineren a die Ableitung nicht den Wert 1 erreicht bzw. bei der Wahl

eines größeren a die Ableitung einen Wert kleiner als 1 erreicht. Für dieses a ist x_{n+1} durch $x_{n+1} = \sup \{x : f'_{n+1}(x; a) = 1\}$ und die Wertfunktion $V_{n+1}(\cdot)$ durch

$$V_{n+1}(x) = \begin{cases} f_{n+1}(x; a) & \text{für } x \leq x_{n+1} \\ f_{n+1}(x_{n+1}; a) + x - x_{n+1} & \text{für } x > x_{n+1} \end{cases}$$

definiert. Ist $V_{n+1}(\cdot)$ eine Lösung der Gleichung (4.14), dann ist $V(x) = V_{n+1}(x)$, ansonst wird die rekursive Berechnung fortgesetzt.

Beispiel 4.19 Im Folgenden wird die Wertfunktion für exponentialverteilte Schäden, d.h. $G(y) = 1 - e^{-\alpha y}$ bestimmt. Wie auch für die Ruinwahrscheinlichkeit in Abschnitt 2.1, kann für die Exponentialverteilung eine allgemeine Form der Wertfunktion angegeben werden. Zunächst werden jene Fälle bestimmt, für die zunächst der gesamte Überschuss als Dividende, und danach die gesamte Prämie ausbezahlt wird, d.h. $V(x) = x + \frac{c}{\lambda + \delta}$. In diesem Fall ist die linke Seite von (4.5)

$$\lambda \left(\frac{c}{\lambda + \delta} - \frac{1}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha x}) - \delta x, \quad (4.17)$$

wobei die Funktion für $\alpha c \leq \lambda + \delta$ negativ ist und $x + \frac{c}{\lambda + \delta}$ (4.5) erfüllt.

Ist $\alpha c > \lambda + \delta$, dann ist (4.17) strikt konkav und die Funktion ist dann und nur dann negativ, wenn seine Ableitung in 0 negativ ist, d.h. wenn $\lambda \left(\frac{c\alpha}{\lambda + \delta} - 1 \right) \leq \delta$ bzw. äquivalent $\lambda c\alpha \leq (\lambda + \delta)^2$. Damit ist $V(x) = x + \frac{c}{\lambda + \delta}$, falls $\lambda c\alpha \leq (\lambda + \delta)^2$ ist.

Im Folgenden wird $\lambda c\alpha > (\lambda + \delta)^2$ vorausgesetzt. Die Funktion $G(y)$ ist stetig differenzierbar, d.h. die Werte von $\mathfrak{B}_c \setminus \{0\}$ können aus der Gleichung $v'(x) = 1$ mit

$$v(x) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^x V(x-y) \alpha e^{-\alpha y} dy = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda \alpha}{\lambda + \delta} e^{-\alpha x} \int_0^x V(y) e^{\alpha y} dy$$

bestimmt werden. Aus $v(x) = V(x)$ folgt

$$v'(x) = 1 = -\frac{\lambda \alpha^2}{\lambda + \delta} e^{\alpha x} \int_0^x V(y) e^{-\alpha y} dy + \frac{\lambda \alpha}{\lambda + \delta} V(x) = \frac{c\alpha}{\lambda + \delta} - \frac{\alpha \delta}{\lambda + \delta} V(x),$$

bzw.

$$v(x) = V(x) = \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha \delta}. \quad (4.18)$$

Da $V(\cdot)$ eine strikt wachsende Funktion ist, kann $\mathfrak{B}_c \setminus \{0\}$ nur einen Wert $a > 0$ enthalten. Die optimale Strategie ist in diesem Fall, für $0 < x < a$ keine Dividenden zu bezahlen womit für die Wertfunktion $V(a+x) = V(a) + x$ für $x \geq 0$ folgt.

Auf $(0, a)$ erfüllt die Wertfunktion die Gleichung

$$cV'(x) = (\lambda + \delta)V(x) - \lambda e^{-\alpha x} \int_0^x V(y) \alpha e^{\alpha y} dy. \quad (4.19)$$

Aus der Differenzierbarkeit der rechte Seite folgt

$$cV''(x) = (\lambda + \delta)V'(x) + \lambda \alpha e^{-\alpha x} \int_0^x V(y) \alpha e^{\alpha y} dy - \alpha \lambda V(x),$$

woraus sich durch Einsetzen von (4.19) die Differentialgleichung

$$cV''(x) = (\lambda + \delta - \alpha c)V'(x) + \alpha\delta V(x)$$

mit der Lösung

$$V(x) = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{-\theta_2 x}$$

ergibt. Die beiden Parameter θ_1 und $-\theta_2$ erfüllen die quadratische Gleichung

$$c\theta^2 - (\lambda + \delta - \alpha c)\theta - \alpha\delta = 0$$

mit den Lösungen

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{(\alpha c - \lambda - \delta)^2 + 4\alpha\delta c} - (\alpha c - \lambda - \delta)}{2c}$$

bzw.

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{(\alpha c - \lambda - \delta)^2 + 4\alpha\delta c} + (\alpha c - \lambda - \delta)}{2c}.$$

Durch Einsetzen von $V(x)$ in (4.19) folgt

$$C_2 = -\frac{\alpha - \theta_2}{\alpha + \theta_1} C_1,$$

und weiters aus $V'(a) = 1$

$$C_1 = \frac{\alpha + \theta_1}{\theta_1(\alpha + \theta_1)e^{\theta_1 a} + \theta_2(\alpha - \theta_2)e^{-\theta_2 a}}.$$

Zusammen mit (4.18) kann a somit durch

$$V(a) = \frac{(\alpha + \theta_1)e^{\theta_1 a} - (\alpha - \theta_2)e^{-\theta_2 a}}{\theta_1(\alpha + \theta_1)e^{\theta_1 a} + \theta_2(\alpha - \theta_2)e^{-\theta_2 a}} = \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha\delta}$$

bestimmt werden. Aus der Gleichung folgt

$$e^{(\theta_1 + \theta_2)a} = \frac{-(c\alpha - \lambda - \delta)\theta_2^2 + \alpha(c\alpha - \lambda - 2\delta)\theta_2 + \alpha^2\delta}{-(c\alpha - \lambda - \delta)\theta_1^2 - \alpha(c\alpha - \lambda - 2\delta)\theta_1 + \alpha^2\delta} = \frac{(\lambda + \delta)\theta_2^2 - \alpha\delta\theta_2}{(\lambda + \delta)\theta_1^2 + \alpha\delta\theta_1}$$

bzw.

$$a = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \left(\frac{\theta_2((\lambda + \delta)\theta_2 - \alpha\delta)}{\theta_1((\lambda + \delta)\theta_1 + \alpha\delta)} \right)$$

und damit

$$V(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha + \theta_1)e^{\theta_1 x} - (\alpha - \theta_2)e^{-\theta_2 x}}{\theta_1(\alpha + \theta_1)e^{\theta_1 a} + \theta_2(\alpha - \theta_2)e^{-\theta_2 a}} & \text{für } \alpha\lambda c > (\lambda + \delta)^2 \text{ und } x < a, \\ \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha\delta} + x - a & \text{für } \alpha\lambda c > (\lambda + \delta)^2 \text{ und } x \geq a, \\ x + \frac{c}{\lambda + \delta} & \text{für } \alpha\lambda c \leq (\lambda + \delta)^2 \end{cases}$$

als gesamte Wertfunktion. □

4.3 Optimale Dividendenstrategien für die Diffusionsapproximation

In diesem Abschnitt wird das Cramér-Lundberg Modell mit Dividendenkomponente (4.4) durch einen Diffusionsprozess (vergleiche Abschnitt 2.2) mit Dividendenkomponente approximiert und die Wertfunktion der Approximation als Näherung der exakten Wertfunktion verwendet. Die Parameter des Diffusionsprozesses werden nach den gleichen Überlegungen wie in Abschnitt 2.2 gewählt. Es ist einfach zu sehen, dass in (2.14) ermittelten Parameter durch die Dividendenkomponente nicht verändert werden.

Für eine Strategie mit kummulierter Dividendenzahlung D_t ist der Überschuss des Diffusionsprozesses zum Zeitpunkt t

$$X_t^D = x + mt + \sigma W_t - D_t,$$

wobei der durch die standardisierte Brownsche Bewegung erzeugte Filter zugrundegelegt wird. Wie in Abschnitt 4.2.1 wird zunächst der Prozess mit einer Beschränkung der Dividendenzahlung betrachtet.

4.3.1 Beschränkte Dividendenzahlungen

Der Überschuss zum Zeitpunkt t ist

$$X_t^U = x + mt + \sigma W_t - \int_0^t U_s ds,$$

wobei für den adaptierten Dividendenprozess U die Beschränkung $0 \leq U_t \leq u_0$ gilt. Der Prozess wird bei Ruin mit Ruinzeitpunkt $\tau^U = \inf \{t \geq 0 : X_t^U < 0\}$ gestoppt. Die Wertfunktion für ein Startkapital x und Dividendenprozess U ist

$$V^U(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^U} U_s e^{-\delta s} ds \right],$$

bzw. die Wertfunktion $V(x)$ des Optimierungsproblems bei Startkapital x das Supremum über alle zulässigen Strategien. Für die Diffusionsapproximation ist $V(0) = 0$, da für das Anfangskapital 0 aufgrund der Fluktuation der Brownschen Bewegung, siehe Bemerkung 1.35, unmittelbar Ruin eintritt. Wie in Abschnitt 4.2.1 kann für die Wertfunktion $V(\cdot) \leq \frac{u_0}{\delta}$ auf \mathbb{R}_+ gezeigt werden.

Ist $y > x$ und U eine optimale Strategie für das Anfangskapital x bzw. \hat{U} eine optimale Strategie für das Anfangskapital $y - x$ und sind τ_x bzw. τ_y die zugehörigen Ruinzeiten, dann ist die durch

$$\tilde{U}_t = \begin{cases} U_t & \text{für } t \leq \tau_x \\ \hat{U}_{t-\tau_x} & \text{für } \tau_x < t \leq \tau_y \end{cases}$$

definierte Strategie optimale für das Anfangskapital y . Damit folgt

$$V(y) \geq V(x) + \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau_x} \right] V(y - x)$$

und zeigt dass $V(\cdot)$ wachsend ist. Weiters kann durch eine äquivalente Argumentation wie in Abschnitt 4.2.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \frac{u_0}{\delta}$ gezeigt werden.

Im Folgenden wird die HJB-Gleichung des Optimierungsproblems hergeleitet: Für $\varepsilon > 0$ und jedes $x \geq 0$ gibt es eine Strategie U^x mit $V^{U^x} \geq V(x) - \varepsilon$. Für $0 \leq u \leq u_0$ und $h > 0$ ist die Strategie U_t durch

$$U_t = \begin{cases} u & \text{für } 0 \leq t \leq \tau \wedge h, \\ U_{t-h}^{X_h} & \text{für } t > h \text{ und } \tau > h \end{cases}$$

definiert. Mit dieser Strategie folgt

$$\begin{aligned} V(x) &\geq V^U(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau \wedge h} u e^{-\delta s} ds \right] + \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\tau > h} \int_h^\tau U_s^{X_h} e^{-\delta(s+h)} ds \right] \\ &= u \mathbb{E} \left[\frac{1 - e^{-\delta(\tau \wedge h)}}{\delta} \right] + e^{-\delta h} \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\tau > h} V^{U^{X_h}}(X_h) \right] \\ &\geq u \frac{1 - \mathbb{E} [e^{-\delta(\tau \wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h} \mathbb{E} [\mathbb{I}_{\tau > h} (V(X_h) - \varepsilon)] \\ &\geq u \frac{1 - \mathbb{E} [e^{-\delta(\tau \wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h} \mathbb{E} [V(X_{\tau \wedge h}) - \varepsilon], \end{aligned}$$

wobei $V(X_\tau) = V(0) = 0$ verwendet wurde. Da ε beliebig gewählt wurde, gilt

$$V(x) \geq u \frac{1 - \mathbb{E} [e^{-\delta(\tau \wedge h)}]}{\delta} + e^{-\delta h} \mathbb{E} [V(X_{\tau \wedge h})].$$

Unter der Annahme dass $V(\cdot)$ zwei mal stetig differenzierbar ist, folgt aus der Itô-Formel

$$V(X_{\tau \wedge h}) = V(x) + \int_0^{\tau \wedge h} \sigma V'(X_s) dW_s + \int_0^{\tau \wedge h} \left((m - u)V'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} V''(X_s) \right) ds.$$

Wird weiters vorausgesetzt, dass

$$\left(\int_0^t V'(X_s) dW_s \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal ist, dann ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals 0 (siehe Satz 1.26) und es folgt mit einer einfachen Umformung und Division durch h

$$\begin{aligned} u \mathbb{E} \left[\frac{1 - e^{-\delta(\tau \wedge h)}}{\delta h} \right] - \frac{1 - e^{-\delta h}}{h} V(x) \\ + e^{-\delta h} \mathbb{E} \left[\frac{1}{h} \int_0^{\tau \wedge h} \left((m - u)V'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} V''(X_s) \right) ds \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ folgt unter der Annahme der Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Erwartungswertbildung wegen $X_0 = x$ bzw. mit den Grenzwerten aus dem Beweis von Satz 4.3

$$\frac{\sigma^2}{2} V''(x) + (m - u)V'(x) - \delta V(x) + u \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $0 \leq u \leq u_0$, d.h.

$$\sup_{0 \leq u \leq u_0} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} V''(x) + (m - u)V'(x) - \delta V(x) + u \right\} \leq 0.$$

Aus dem weiteren Verlauf des Beweises ist ersichtlich, dass das Supremum angenommen wird (es wird gezeigt, dass die Lösung der Gleichung auch eine Lösung des Optimierungsproblems ist). Damit folgt die HJB-Gleichung

$$\sup_{0 \leq u \leq u_0} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + (m - u)f'(x) - \delta f(x) + u \right\} = 0. \quad (4.20)$$

Diese HJB-Gleichung ist ebenfalls linear in u , woraus mit der selben Überlegung wie für (4.10) die optimale Dividendenstrategie

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } f'(x) > 1 \\ \in [0, u_0] & \text{für } f'(x) = 1 \\ u_0 & \text{für } f'(x) < 1 \end{cases},$$

folgt. Für $f'(x) = 1$ ist die HJB-Gleichung (4.20) unabhängig von u , d.h. jeder Wert kleiner u_0 erfüllt die Gleichung.

Als nächstes soll eine zweifach differenzierbare Lösung der Gleichung (4.20) gefunden werden. Nach der Definition der optimalen Dividendenstrategie gibt es Bereiche mit $u(x) = 0$ und Bereiche mit $u(x) = u_0$. Diese beiden Bereiche, die durch $f'(x) < 1$ und $f'(x) > 1$ festgelegt sind, werden zunächst getrennt betrachtet und anschließend an $f'(x) = 1$ zu einer zweifach integrierbaren Funktion zusammengefügt.

Es ist einfach nachzurechnen, dass die Lösung von (4.20) für den Fall $f'(x) > 1$

$$f_1(x) = A e^{\theta_1(0)x} + B e^{-\theta_2(0)x}$$

und für den Fall $f'(x) < 1$

$$f_2(x) = \frac{u_0}{\delta} + C e^{\theta_1(u_0)x} + D e^{-\theta_2(u_0)x}$$

mit

$$\theta_1(u) = \frac{\sqrt{(m - u)^2 + 2\delta\sigma^2} - (m - u)}{\sigma^2} > 0 \quad (4.21)$$

bzw.

$$\theta_2(u) = \frac{\sqrt{(m - u)^2 + 2\delta\sigma^2} + (m - u)}{\sigma^2} > 0 \quad (4.22)$$

ist. Ist x_0 ein Wert mit $f'_1(x_0) = 1$, so muss wegen der Stetigkeit der gesamten Lösung $f_1(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0)$ gelten. Aus der Lösung von $f_1(\cdot)$ folgt

$$f'_1(x_0) = A \theta_1(0) e^{\theta_1(0)x_0} - B \theta_2(0) e^{-\theta_2(0)x_0} = 1$$

bzw.

$$B = \frac{1}{\theta_2(0)} e^{\theta_2(0)x_0} \left(A \theta_1(0) e^{\theta_1(0)x_0} - 1 \right).$$

Einsetzen in die Gleichung für $f_1(\cdot)$ ergibt

$$f_1(x_0) = A \frac{\theta_1(0) + \theta_2(0)}{\theta_2(0)} e^{\theta_1(0)x_0} - \frac{1}{\theta_2(0)}$$

bzw. für die zweite Ableitung mit (4.21) und (4.22)

$$\begin{aligned} f_1''(x_0) &= A \theta_1(0) (\theta_1(0) + \theta_2(0)) e^{\theta_1(0)x_0} - \theta_2(0) \\ &= \theta_1(0) \theta_2(0) \left(A \frac{\theta_1(0) + \theta_2(0)}{\theta_2(0)} e^{\theta_1(0)x_0} - \frac{1}{\theta_2(0)} + \frac{1}{\theta_2(0)} \right) - \theta_2(0) \\ &= \theta_1(0) \theta_2(0) f(x_0) - (\theta_2(0) - \theta_1(0)) = \frac{2}{\sigma^2} (\delta f(x_0) - m). \end{aligned}$$

Angenommen $f_1''(x_0) > 0$. Da $f'(\cdot)$ in diesem Fall wachsend ist, folgt $f(x) = f_1(x)$ auf einem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ ($f_1'(x_0) = 1$ und $f'(\cdot)$ ist wachsend, d.h. $f'(\cdot)$ ist im angegebenen Intervall größer als 1). Damit ist für $x > x_0$ mit $f'(x) = 1$

$$f''(x) = f_1''(x) = \frac{2}{\sigma^2} (\delta f(x) - m) > \frac{2}{\sigma^2} (\delta f(x_0) - m) = f_1''(x_0) > 0,$$

d.h. $f(x) = f_1(x)$ auf $[x_0, \infty)$. Aus der Beschränktheit von $f(\cdot)$ folgt $A = 0$ und, da $f(\cdot)$ wachsend ist, $B < 0$. Andererseits folgt $B > 0$ für $f(x) > 0$ mit $x > 0$ und damit ein Widerspruch zur Annahme.

Generell gilt entweder $f(x) = f_1(x)$, $f(x) = f_2(x)$ oder es existiert ein Wert x_0 mit $f(x) = f_1(x)$ für $x \leq x_0$ und $f(x) = f_2(x)$ für $x \geq x_0$. Die obige Argumentation zeigt, dass der Fall $f(x) = f_1(x)$ für alle x nicht möglich ist.

Aus $0 \leq f(x) < \frac{u_0}{\delta}$ für alle x folgt $C = 0$ und damit, da $f(\cdot)$ wachsend ist, $D < 0$. Ist $f(x) = f_2(x)$ für alle x , dann muss die Lösung wegen $f(0) = 0$

$$f(x) = \frac{u_0}{\delta} \left(1 - e^{-\theta_2(u_0)x} \right)$$

sein. Damit folgt

$$f'(x) = \frac{u_0}{\delta} \theta_2(u_0) e^{-\theta_2(u_0)x} \leq 1$$

für alle x , d.h. $\delta \geq u_0 \theta_2(u_0)$.

Angenommen es existiert ein $x_0 > 0$ mit $f'(x_0) = 1$, dann ist $D = -\frac{1}{\theta_2(u_0)} e^{\theta_2(u_0)x_0}$ bzw. $0 < f(x_0) = \frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}$ woraus $\delta < u_0 \theta_2(u_0)$ folgt.

Aus $f(0) = f_1(0) = 0$ folgt $B = -A$ und weiters aus $f_1'(x_0) = 1$

$$A = \frac{1}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}.$$

Der Wert x_0 kann somit aus der Gleichung

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= \frac{e^{\theta_1(0)x_0} - e^{-\theta_2(0)x_0}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} = \frac{e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} - 1}{\theta_1(0)e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} + \theta_2} \\ &= f_2(x_0) = \frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

berechnet werden. Eine Umformung der Gleichung ergibt

$$e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} = \frac{1 + \left(\frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}\right) \theta_2(0)}{1 - \left(\frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}\right) \theta_1(0)}. \quad (4.24)$$

Es gibt genau dann eine Lösung, wenn der Zähler strikt positiv ist. Aus

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= \frac{\sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2} - m}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{m^2 + 2\frac{\delta\sigma^2}{m}m + \left(\frac{\delta\sigma^2}{m}\right)^2} - \left(\frac{\delta\sigma^2}{m}\right) - m}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sqrt{\left(m + \frac{\delta\sigma^2}{m}\right)^2 - \left(\frac{\delta\sigma^2}{m}\right)^2} - m}{\sigma^2} < \frac{\left(m + \frac{\delta\sigma^2}{m}\right) - m}{\sigma^2} = \frac{\delta}{m} \end{aligned}$$

und

$$\frac{u_0}{\delta} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{(u_0 - m)^2 + 2\delta\sigma^2} + m - u_0} = \frac{u_0 + m - \sqrt{(u_0 - m)^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (4.25)$$

folgt mit $u_0 - m < \sqrt{(u_0 - m)^2 + 2\delta\sigma^2}$, dass x_0 eindeutig definiert ist und eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\log\left(1 + \left(\frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}\right) \theta_2(0)\right) - \log\left(1 - \left(\frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}\right) \theta_1(0)\right)}{\theta_1(0) + \theta_2(0)} \\ &= \frac{\log(\theta_2(0)) + \log(\theta_2(0) - \theta_2(u_0)) - \log(\theta_1(0)) - \log(\theta_1(0) - \theta_2(u_0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung der HJB-Gleichung (4.20)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{\delta} \left(1 - e^{-\theta_2(u_0)x_0}\right) & \text{für } \delta \geq u_0 \theta_2(u_0) \\ \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} & \text{für } \delta < u_0 \theta_2(u_0) \text{ und } x \leq x_0 \\ \frac{u_0}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)} e^{-\theta_2(u_0)(x-x_0)} & \text{für } \delta < u_0 \theta_2(u_0) \text{ und } x > x_0 \end{cases}$$

Aus $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ und $f_1'(x_0) = f_2'(x_0) = 1$ folgt aus der obigen Differentialgleichung $f_1''(x_0) = f_2''(x_0)$, d.h. $f(\cdot)$ ist zweifach diffenzierbar.

Die Bedingung $\delta < u_0 \theta_2(u_0)$ ist äquivalent zu $\delta\sigma^2 < 2u_0m$. Damit folgt $U_t = u_0$ für den Fall dass δ oder σ sehr groß sind bzw. m sehr klein ist.

Das folgende Verifikationstheorem zeigt $f(x) = V(x)$ auf \mathbb{R}_+ .

Satz 4.20 Es gilt $f(x) = V(x)$ für alle x und $U_t^* = u_0 \mathbb{I}_{X_t^* > x_0}$ ist eine optimale Dividendenstrategie.

Beweis: Für eine beliebige Strategie U folgt für eine Lösung f der HJB-Gleichung (4.20) mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} e^{-\delta(\tau \wedge t)} f(X_{\tau \wedge t}) &= f(x) + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} \sigma f'(X_s) dW_s \\ &\quad + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} \left[-\delta f(X_s) + (m - U_s) f'(X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X_s) \right] ds \\ &\leq f(x) - \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} U_s ds + \int_0^{\tau \wedge t} \sigma f'(X_s) dW_s, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit für $U = U^*$ gilt. Aus der Beschränktheit von $f'(\cdot)$ folgt aus Satz 1.55, dass der Prozess

$$\left(\int_0^{\tau \wedge t} \sigma f'(X_s) dW_s \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal ist, und damit

$$f(x) \geq \mathbb{E} \left[e^{-\delta(\tau \wedge t)} f(X_{\tau \wedge t}) + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} U_s ds \right],$$

wobei die Gleichheit wieder für den Fall $U = U^*$ gilt. Für $\tau \leq t$ ist $f(X_{\tau \wedge t}) f(X_\tau) = 0$ und aus der Beschränktheit von $f(\cdot)$ folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[e^{-\delta(\tau \wedge t)} f(X_{\tau \wedge t}) \right] = 0,$$

d.h.

$$f(x) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\delta s} U_s ds \right] = V^U(x)$$

mit Gleichheit für $U = U^*$. Damit ist $V^U(x) \leq f(x)$ bzw. $V(x) \leq f(x)$. Da für U^* die Gleichheit $V^{U^*}(x) = f(x)$ gilt, folgt $V(x) \geq f(x)$ und damit die Behauptung. \square

Ist $u_0 < m$ und $U_t = u_0$ für alle t , dann gilt für den Überschussprozess $X_t^{u_0} \leq X_t^*$ für alle t . Mit (2.18) ist

$$\psi^{u_0}(x) = e^{-2 \frac{m-u_0}{\sigma^2} x} < 1$$

für $x > 0$ und aus $\psi^*(x) \leq \psi^{u_0}(x) < 1$ folgt, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit kein Ruin eintritt.

Ist $m \leq u_0$, dann wird für jeden Startwert $x_0 + 1$ der Wert x_0 fast sicher unterschritten, d.h. $\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t \leq x_0$. Für die rekursiv definierten Zeitpunkte $T_0 = \inf \{t : X_t \leq x_0 + 1\}$ und $T_n = \inf \{t \geq T_{n-1} + 1 : X_t \leq x_0 + 1\}$ bzw. den Ereignissen

$$A_n = \left\{ \inf \{m t + \sigma (W_{T_n+t} - W_{T_n}) : 0 \leq t \leq 1\} < -x_0 - 1 \right\}$$

gilt $\mathbb{P}[A_n] = \delta > 0$ und die Ereignisse A_n sind unabhängig. Aus dem Lemma von Borel-Cantelli folgt, dass das Ereignis A_n unendlich oft und damit Ruin fast sicher eintritt.

Für die optimale Strategie tritt somit dann und nur dann Ruin eintritt, wenn $m \leq u_0$.

4.3.2 Unbeschränkte Dividendenzahlungen

Im Falle einer unbeschränkten Dividendenzahlung wird für die Diffusionsapproximation die selbe Vorgangsweise wie in Abschnitt 4.2.2 angewandt, d.h. die Ergebnisse für beschränkte Dividendenzahlungen werden übernommen und $u_0 \rightarrow \infty$ betrachtet. Der nächste Satz zeigt, dass die Vorgangsweise auch für die Diffusionsapproximation gerechtfertigt ist.

$V_u(x)$ ist die Wertfunktion des Optimierungsproblems mit Startkapital x und einer durch u beschränkten Dividendenzahlung. Für $V_u(x)$ gilt offensichtlich $V(x) \geq V_u(x)$.

Satz 4.21 Es gilt $\lim_{u \rightarrow \infty} V_u(x) = V(x)$

Beweis: Der Beweis ist äquivalent zum Beweis von Satz 4.7. \square

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt mit $u_0 \rightarrow \infty$ betrachtet. Zunächst wird die Funktion $\theta_2(\cdot)$, siehe (4.22), umgeformt zu

$$\begin{aligned} \theta_2(u) &= \frac{\left(\sqrt{(m-u)^2 + 2\delta\sigma^2} + (m-u)\right) \left(\sqrt{(m-u)^2 + 2\delta\sigma^2} - (m-u)\right)}{\sigma^2 \left(\sqrt{(m-u)^2 + 2\delta\sigma^2} - (m-u)\right)} \\ &= \frac{2\delta}{\sqrt{(u-m)^2 + 2\delta\sigma^2} + (u-m)}, \end{aligned}$$

woraus $\lim_{u \rightarrow \infty} \theta_2(u) = 0$ folgt. Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes ist ersichtlich, dass die Wertfunktion $V_u(x_0)$ nach (4.23) für $\delta > u\theta_2(u)$ negativ ist. Aus (4.25) folgt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)} &= \frac{u+m - \sqrt{(u-m)^2 + 2\delta\sigma^2}}{2\delta} = \frac{(u+m)^2 - (u-m)^2 - 2\delta\sigma^2}{2\delta \left(u+m + \sqrt{(u-m)^2 + 2\delta\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{2um - \delta\sigma^2}{\delta \left(u+m + \sqrt{(u-m)^2 + 2\delta\sigma^2}\right)}, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{u \rightarrow \infty} V_u(x_0) = \frac{m}{\delta}$. Für große u ist somit $u\theta_2(u) > \delta$ und für den Grenzwert der Gleichung (4.24) folgt

$$e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)}\right) \theta_2(0)}{1 - \left(\frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)}\right) \theta_1(0)} = \frac{1 + \frac{m\theta_2(0)}{\delta}}{1 - \frac{m\theta_1(0)}{\delta}} = \frac{\delta + m\theta_2(0)}{\delta - m\theta_1(0)}$$

woraus x_0 berechnet werden kann. Für $x \geq x_0$ ist die Wertfunktion gleich dem Grenzwert von $f_2(\cdot)$ mit

$$f_{2,u}(x) = \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)} e^{-\theta_2(u)(x-x_0(u))} = \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)} + \frac{1}{\theta_2(u)} \left(1 - e^{-\theta_2(u)(x-x_0(u))}\right),$$

wobei mit der Bezeichnung $x_0(u)$ explizit auf die Abhängigkeit von u hingewiesen werden soll. Als Grenzwert für $x \geq x_0 = x_0(\infty)$ folgt mit den obigen Ergebnissen

$$f_{2,u}(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\theta_2(u)} + \frac{1}{\theta_2(u)} \left(1 - e^{-\theta_2(u)(x-x_0(u))}\right) = \frac{m}{\delta} + x - x_0 = V(x).$$

Satz 4.22 Die Wertfunktion des Optimierungsproblems mit unbeschränkter Dividendenzahlung ist

$$V(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} & \text{für } x \leq x_0 \\ \frac{m}{\delta} + x - x_0 & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

mit

$$x_0 = \frac{\log(\delta + m\theta_2(0)) - \log(\delta - m\theta_1(0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)}$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus den obigen Ergebnissen und Satz 4.21. \square

Aus obigen Satz folgt direkt $V(x_0) = \frac{m}{\delta}$. Weiters ist ersichtlich, dass sowohl die rechtsseitige als auch die linksseitige Ableitung an x_0 gleich 1 und $V(\cdot)$ somit für alle $x > 0$ differenzierbar ist. Die zweite Ableitung von rechts ist offensichtlich konstant 0. Für die zweite Ableitung an x_0 von links gilt

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(0)^2 e^{\theta_1(0)x_0} - \theta_2(0)^2 e^{-\theta_2(0)x_0}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} &= \frac{\theta_1(0)^2 \frac{\delta + m\theta_2(0)}{\delta - m\theta_1(0)} - \theta_2(0)^2}{\theta_1(0) \frac{\delta + m\theta_2(0)}{\delta - m\theta_1(0)} + \theta_2(0)} \\ &= \frac{m\theta_1(0)\theta_2(0) - \delta(\theta_2(0) - \theta_1(0))}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left(m \frac{2\delta\sigma^2}{\sigma^4} - \delta \frac{2m}{\sigma^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

d.h. $V(\cdot)$ ist an x_0 zweifach stetig differenzierbar.

Nachdem die Ableitungen der Wertfunktion für beschränkte Dividendenzahlungen gegen die Ableitungen der Wertfunktion für unbeschränkte Dividendenzahlungen konvergieren, ist intuitiv zu erwarten dass dies auch für die HJB-Gleichung (4.20) gilt. Da die HJB-Gleichung linear in u ist und das Supremum somit nur an $u = 0$ oder $u = u_0$ angenommen wird, kann sie als

$$\max \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + mf'(x) - \delta f(x), \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (m-u)f'(x) - \delta f(x) + u \right) \right\} = 0$$

geschrieben werden.

Satz 4.23 Die Funktion $V(\cdot)$ erfüllt die HJB-Gleichung

$$\max \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + mV'(x) - \delta V(x), 1 - V'(x) \right\} = 0 \quad (4.26)$$

Beweis: Folgt direkt aus den obigen Ergebnissen für $u \rightarrow \infty$. \square

Satz 4.24 Die optimale Dividendenstrategie D^* ist, jedes x_0 übersteigende Kapital unmittelbar auszubezahlen, d.h. $D_t^* = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau} X_s - x_0, 0 \right\}$ mit $X_t = x + mt + \sigma W_t$.

Beweis: Ist $x > x_0$, dann wird $D_0^* = x - x_0$ gesetzt. Da die Wertfunktion in diesem Fall $V(x) = V(x_0) + x - x_0$ ist, genügt es die Behauptung für $x \leq x_0$ zu beweisen, wobei in

diesem Fall unmittelbar $X_t^* \leq x_0$ folgt.

Der Prozess D^* ist stetig, wachsend und beschränkt. Aus (4.26) folgt mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} e^{-\delta(\tau \wedge t)} V(X_{\tau \wedge t}^*) &= V(x) + \int_0^{\tau \wedge t} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 V''(X_s^*) + m V'(X_s^*) - \delta V(X_s^*) \right] e^{-\delta s} ds \\ &\quad - \int_0^{\tau \wedge t} V'(X_s^*) e^{-\delta s} dD_s^* + \int_0^{\tau \wedge t} V'(X_s^*) e^{-\delta s} \sigma dW_s \\ &= V(x) + \int_0^{\tau \wedge t} V'(X_s^*) e^{-\delta s} \sigma dW_s - \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} dD_s^*, \end{aligned}$$

da D^* nur an Punkten mit $X_s^* = x_0$, d.h. $V'(X_s^*) = 1$ wächst. Da $V'(\cdot)$ beschränkt ist, ist das stochastische Integral nach Satz 1.55 ein Martingal und der Erwartungswert nach Satz 1.26 gleich 0. Damit folgt für den Erwartungswert

$$V(x) = \mathbb{E} \left[e^{-\delta(\tau \wedge t)} V(X_{\tau \wedge t}^*) + \int_0^{\tau \wedge t} e^{-\delta s} dD_s^* \right].$$

Da $V(X_{\tau \wedge t}^*)$ beschränkt ist, kann der Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ und die Integration vertauscht werden, womit aus $V(X_\tau) = 0$ die Behauptung $V(x) = V^{U^*}(x)$ folgt. \square

4.4 Vergleich der Ergebnisse

Beispiel 4.25 (Fortsetzung von Beispiel 4.19)

Die allgemeine Form der exakt berechneten Wertfunktion für exponentialverteilte Schäden bei unbeschränkten Dividendenzahlungen wurde in Beispiel 4.19 hergeleitet und ist

$$V^E(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha + \theta_1) e^{\theta_1 x} - (\alpha - \theta_2) e^{-\theta_2 x}}{\theta_1 (\alpha + \theta_1) e^{\theta_1 a} + \theta_2 (\alpha - \theta_2) e^{-\theta_2 a}} & \text{für } \alpha \lambda c > (\lambda + \delta)^2 \text{ und } x < a, \\ \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha \delta} + x - a & \text{für } \alpha \lambda c > (\lambda + \delta)^2 \text{ und } x \geq a, \\ x + \frac{c}{\lambda + \delta} & \text{für } \alpha \lambda c \leq (\lambda + \delta)^2 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\sqrt{(\alpha c - \lambda - \delta)^2 + 4 \alpha \delta c} - (\alpha c - \lambda - \delta)}{2c}, \\ \theta_2 &= \frac{\sqrt{(\alpha c - \lambda - \delta)^2 + 4 \alpha \delta c} + (\alpha c - \lambda - \delta)}{2c} \end{aligned}$$

und

$$a = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \left(\frac{\theta_2 ((\lambda + \delta)\theta_2 - \alpha \delta)}{\theta_1 ((\lambda + \delta)\theta_1 + \alpha \delta)} \right).$$

Die Wertfunktion der Diffusionsapproximation bei unbeschränkten Dividendenzahlungen ist nach den Ergebnissen dieses Abschnittes

$$V^D(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} & \text{für } x \leq x_0 \\ \frac{m}{\delta} + x - x_0 & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

mit

$$\theta_1(0) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2} - m}{\sigma^2} \quad \text{bzw.} \quad \theta_2(0) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2} + m}{\sigma^2}$$

und

$$x_0 = \frac{\log(\delta + m\theta_2(0)) - \log(\delta - m\theta_1(0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)}.$$

bzw. den Parametern $m = c - \frac{\lambda}{\alpha}$ und $\sigma = \sqrt{2\lambda \frac{1}{\alpha^2}}$.

Ist $x > \max\{a, x_0\}$, dann ist $V^E(x) = \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha\delta} + x - a$ und $V^D(x) = \frac{m}{\delta} + x - x_0$. Der Quotient der beiden Wertfunktionen geht offensichtlich für $x \rightarrow \infty$ gegen 1, die absolute Differenz ist konstant

$$V^E(x) - V^D(x) = \frac{c\alpha - \lambda - \delta}{\alpha\delta} - a - \frac{m}{\delta} + x_0.$$

Für die konkreten Werte aus Beispiel 2.18 mit $\alpha = 2$, $\lambda = 4$ mit geänderter Prämienrate $c = 3$ und Abzinsungsfaktor $\delta = 0,1$ lauten die beiden Wertfunktionen

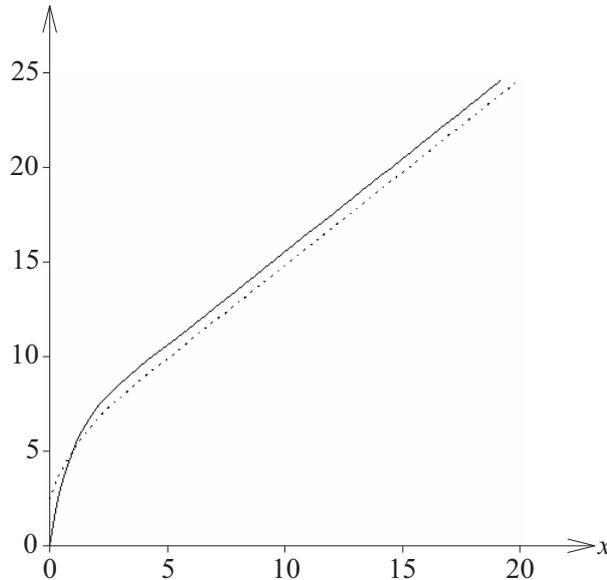
$$V^E(x) = \begin{cases} 6,4141 e^{0,09192x} - 3,9085 e^{-0,7253x} & \text{für } x < 4,44926 \\ 5,05073 + x & \text{für } x \geq 4,44926 \end{cases},$$

und

$$V^D(x) = \begin{cases} 6,8617 e^{0,09161x} - 6,8617 e^{-1,0916x} & \text{für } x < 4,1884 \\ 5,811603 + x & \text{für } x \geq 4,1884 \end{cases}.$$

Abbildung 4.1 zeigt einen Vergleich der beiden Wertfunktionen $V^E(x)$ (punktiertere Kurve) und $V^D(x)$ (durchgezogene Kurve). Im Anhang ist auf Seite 81 das verwendete Maple-Programm zur Erzeugung der Abbildung 4.1 aufgelistet. \square

Abbildung 4.1: Vergleich der Wertfunktionen bei exponentialverteilten Schäden.



Beispiel 4.26 Für gammad verteilte Schäden $Y_i \sim \text{Gam}(\alpha, \beta)$ wurden die Parameter der Diffusionsapproximation in Beispiel 2.19 hergeleitet.

In diesem Fall lautet die Gleichung (4.16) zur Bestimmung der Wertfunktion

$$cf'(x) + \lambda \int_0^x f(x-y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy - (\lambda + \delta)f(x) = 0. \quad (4.27)$$

Diese Integro-Differentialgleichung kann mit Hilfe der Laplace-Transformation (siehe Definition 2.5) gelöst werden, besitzt allerdings keine einfach darstellbare geschlossenen Lösung. Für die konkreten Werte aus Beispiel 2.19 mit $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda = 10$, Prämienrate $c = 21,4$ und Abzinsungsfaktor $\delta = 0,1$ zeigt Schmidli [17] auf Seite 95, dass die Wertfunktion bei exakter Rechnung

$$V^E(x) = \begin{cases} 2,11881x & \text{für } x \leq 1,80303 \\ V_1(x) & \text{für } 1,80303 < x \leq 10,2162 \\ 2,45582 + x & \text{für } x > 10,2162 \end{cases}$$

mit $V_1(x) = 11,2571 e^{0,039567x} - 9,43151 e^{-0,079355x} + 0,094314 e^{-1,48825x}$ ist.

Die Wertfunktion der Diffusionsapproximation bei unbeschränkten Dividendenzahlungen ist nach den Ergebnissen dieses Abschnittes

$$V^D(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} & \text{für } x \leq x_0 \\ \frac{m}{\delta} + x - x_0 & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

mit

$$\theta_1(0) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2} - m}{\sigma^2} \quad \text{bzw.} \quad \theta_2(0) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2} + m}{\sigma^2}$$

und

$$x_0 = \frac{\log(\delta + m\theta_2(0)) - \log(\delta - m\theta_1(0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)}$$

bzw. den Parametern

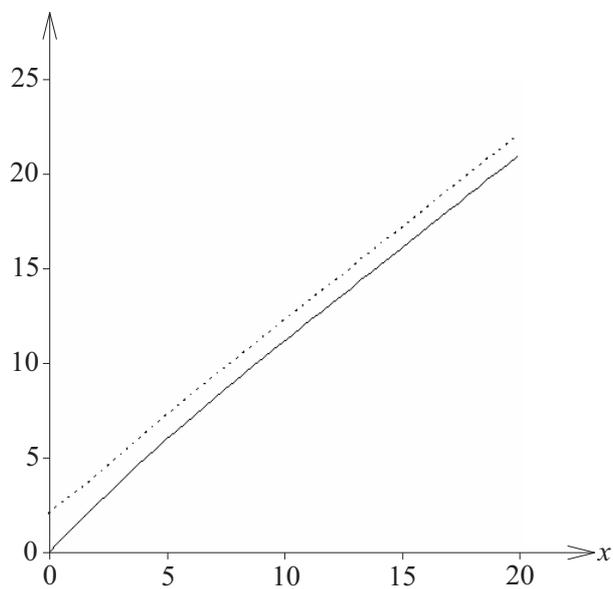
$$m = c - \lambda\alpha\beta \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{\lambda((\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2)} = \sqrt{\lambda\alpha\beta^2(1 + \alpha)}.$$

Für die gegebenen Parameter ist die Wertfunktion der Diffusionsapproximation

$$V^D(x) = \begin{cases} 10,78629 e^{0,038938x} - 10,78629 e^{-0,085605x} & \text{für } x < 12,65039 \\ 1,34961 + x & \text{für } x \geq 12,65039 \end{cases}.$$

Abbildung 4.2 zeigt einen Vergleich der beiden Wertfunktionen $V^E(x)$ (punktierte Kurve) und $V^D(x)$ (durchgezogene Kurve). Im Anhang ist auf Seite 82 das verwendete Maple-Programm zur Erzeugung der Abbildung 4.2 aufgelistet. \square

Abbildung 4.2: Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeiten bei gammaverteilten Schäden.



Kapitel 5

Anhang

Das folgende Maple-Programm wurde zur Erzeugung der Abbildung 2.1 in Beispiel 2.18 verwendet.

```
restart;
with(plots);
a := 2;
c := 2.1;
l := 4;
m := c - 1/a;
s := 2*l/(a^2);
phexakt := 1 / (a*c) * exp(-(a-1/c)*x);
phdiff := exp(-(c*a-1)*a/l*x);
plot([phexakt,phdiff], x=0..20, thickness=[0,0], linestyle=[solid,dot],
     color=[red,blue], view=[0..20,0..1]);
```

Das folgende Maple-Programm wurde zur Berechnung der exakten Ruinwahrscheinlichkeit $\psi^E(\cdot)$ und zur Erzeugung der Abbildung 2.2 in Beispiel 2.19 verwendet.

```
restart;
with(inttrans);
with(plots);
a := 2;
b := 1;
c := 21.4;
l := 10;
G11 := c*(diff(x(t), t)) =
  1*(x(t)-(int(x(t-y)*y^(a-1)*exp(-y/b)/(GAMMA(a)*b^a , y = 0 .. t)));
Lap1 := laplace(G11, t, s);
unassign('X(s)');
Lp1 := subs(laplace(x(t), t, s) = X(s), Lap1);
Y := s -> solve(Lp1, X(s));
Sol1 := invlaplace(Y(s), s, t);
phexakt := subs(t=x, 1 - subs(x(0)=1-1*a*b/c, Sol1));
phdiff := exp(-2*(c-1*a*b)/(1*a*b^2*(a+1)*x);
LKGl := 1*((1/(1-b*r))^a-1)-c*r;
LK := solve(LKGl, r)[3];
phL := exp(-LK*x);
plot([phexakt,phdiff,phL], x=0..100, thickness=[0,0,0],
     linestyle=[solid,dot,dash], color=[red,blue,green], view=[0..100,0..1]);
```

Das folgende Maple-Programm wurde zur Erzeugung der Abbildung 4.1 in Beispiel 4.25 verwendet.

```

restart;
with(plots);
a := 2;
c := 3;
l := 4;
d := 0.1;
m := c - l/a;
s := 2*l/(a^2);
th1 := (sqrt((a*c-l-d)^2+4*a*d*c) - (a*c-l-d)) / (2*c);
th2 := (sqrt((a*c-l-d)^2+4*a*d*c) + (a*c-l-d)) / (2*c);
aa := 1/(th1+th2) * log((th2*((1+d)*th2-a*d)) / (th1*((1+d)*th1+a*d)));
V1 := x -> ((a+th1)*exp(th1*x) - (a-th2)*exp(-th2*x)) /
  (th1*(a+th1)*exp(th1*aa) + th2*(a-th2)*exp(-th2*aa));
V2 := x -> (a*c-l-d)/(a*d)+x-aa;
V := 'if'(x < aa, V1(x), V2(x));
th1N := (sqrt(m^2+2*d*s)-m)/s;
th2N := (sqrt(m^2+2*d*s)+m)/s;
x0 := 1/(th1N+th2N) * (log(d+m*th2N)-log(d-m*th1N));
V1D := x -> (exp(th1N*x)-exp(-th2N*x)) / (th1N*exp(th1N*x0) +
  th2N*exp(-th2N*x0));
V2D := x -> m/d + x - x0;
VD := 'if'(x < x0, V1D(x), V2D(x));
plot([VD,V],x=0..20,thickness=[0,0],linestyle=[solid,dot], color=[red,blue],
  view=[0..20,0..25]);

```

Das folgende Maple-Programm wurde zur Erzeugung der Abbildung 4.2 in Beispiel 4.26 verwendet.

```

restart;
with(plots);
l := 10;
c := 21.4;
d := 0.1;
a := 2;
b := 1;
m := c - l*a*b;
s := l*a*b^2*(a+1);
th1N := (sqrt(m^2+2*d*s)-m)/s;
th2N := (sqrt(m^2+2*d*s)+m)/s;
x0 := 1/(th1N+th2N) * (log(d+m*th2N)-log(d-m*th1N));
V1D := x -> (exp(th1N*x)-exp(-th2N*x)) / (th1N*exp(th1N*x0) +
  th2N*exp(-th2N*x0));
V2D := x -> m/d + x - x0;
VD := 'if'(x < x0, V1D(x), V2D(x));
V1 := x -> 2.11881 + x;
V2 := x -> 11.2571*exp(0.039567*x) - 9.43151*exp(-0.079355*x) +
  0.094314*exp(-1.48825*x);
V3 := x -> 2.45582 + x;
V := 'if'(x < 1.80303, V1(x), 'if'(x < 10.2162, V2(x), V3(x)));
plot([VD,V],x=0..20,thickness=[0,0],linestyle=[solid,dot], color=[red,blue],
  view=[0..20,0..25]);

```

Literaturverzeichnis

- [1] H. Albrecher, S. Thonhauser: Optimality Results for Dividend Problems in Insurance, *RACSAM Revista de la Real Academia de Ciencias; Serie A, Matematicas* **103** (2), 295-320 (2009)
- [2] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 1992
- [3] H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 1991
- [4] R. Bellman: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957
- [5] P. Brémaud: *Point Processes and Queues*, Springer-Verlag, New York, 1981
- [6] T. Deck: *Der Ito-Kalkül*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006
- [7] B. de Finetti: Su un'Impostazione Alternativa dell Teoria Collectiva del Rischio, *Transactions of the 15th International Congress of Actuaries* **2**, 433-443 (1957)
- [8] H.U. Gerber: Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker* **69**, 185-227 (1969)
- [9] H.U. Gerber, E.S.W. Shui: Optimal Dividends: Analysis with Brownian Motion, *North American Actuarial Journal* **8**, 1-20 (2004)
- [10] H.U. Gerber, E.S.W. Shui: On Optimal Dividends: From Reflection to Refraction, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **186**, 4-22 (2006)
- [11] H.U. Gerber, E.S.W. Shui: On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model, *North American Actuarial Journal* **10** (2), 76-93 (2006)
- [12] J. Grandell: *Aspects of Risk Theory*, Springer Series in Statistics - Probability and its Applications, New York, 1991
- [13] D.L. Iglehart: Diffusion approximations in collective risk theory, *Journal of Applied Probability* **6**, 285-292 (1969)
- [14] T. Mikosch: *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004
- [15] B. Øksendal: *Stochastic Differential Equations*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003

- [16] J. Saß: *Stochastic Control: With Applications to Financial Mathematics*, RICAM Austrian Academy of Sciences, JKU Linz, 2007
- [17] H. Schmidli: *Stochastic Control in Insurance*, Springer-Verlag, London, 2008
- [18] H. Schmidli: *Lecture notes on Risk Theorie*, Institute of Mathematics, University of Cologne, 2007
- [19] R. Schneider: *Optimale Dividendenzahlung mit endlichem Zeithorizont*, Diplomarbeit, TU Wien, 2008
- [20] M.I. Taksar: Optimal Risk and Dividend Distribution Control Models for an Insurance Company, *Mathematical Methods of Operations Research* **51** (1), 1-42 (2000)