

Diplomarbeit

Optimale Dividendenauszahlung in einem Diffusionsmodell unter Berücksichtigung des Ruinzeitpunktes

ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Martin Krenn
Fellnergasse 30b
7083 Purbach

Inhaltsverzeichnis

1	Risiko- und Ruintheorie	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Das Ruinproblem in diskreter Zeit	4
1.3	Das Ruinproblem in stetiger Zeit	8
1.4	Zusammengesetztes Poisson Modell	9
1.5	Diffusionsapproximation	21
2	Stochastische Kontrolltheorie	25
2.1	Stochastisches Kontrollproblem	25
2.2	Dynamische Programmierung	26
2.3	Verifikationstheorem für endlichen Zeithorizont	33
2.4	Verifikationstheorem für unendlichen Zeithorizont	37
3	Lokalzeit der Brownschen Bewegung	40
3.1	Einleitung	40
3.1	Tanaka - Formel	41
4	Optimierung der Dividendenzahlungen im Diffusionsmodell	49
4.1	Einleitung	49
4.2	Das Modell	50
4.3	Optimale Strategie bei beschränkter Dividendenintensität	52
4.4	Optimale Strategie bei unbeschränkter Dividendenintensität	72

5	Simulation	90
5.1	Einleitung	90
5.2	Simulationsergebnisse	92
6	Anhang	100
6.1	Matlab-Code zur Berechnung der Wertfunktion im beschränkten Fall	100
6.2	Matlab-Code zur Berechnung der Wertfunktion im unbeschränkten Fall . . .	102
6.3	Matlab-Code zur Simulation der Zielfunktion	103

Kapitel 1

Risiko- und Ruintheorie

1.1 Einleitung

Die Ruintheorie beschäftigt sich mit der Anfälligkeit eines Versicherungsunternehmens für Insolvenz auf Basis der mathematischen Modellierung des Überschusses eines Unternehmens. Die Theorie beinhaltet die Berechnung und den Ursprung vieler ruinbezogener Maße und Größen, wie zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit des technischen Ruins oder die Verteilung des Überschusses eines Versicherungsunternehmens. Die Ruintheorie kann als Bereich der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie gesehen werden, da die meisten Techniken und Methoden auf die der angewandten stochastischen Prozesse basieren.

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die Risikotheorie angeführt. Anfangs wird ein Risikomodell in diskreter Zeit betrachtet und danach gehen wir genauer auf das klassische Modell, das sogenannte Cramer-Lundberg Modell, ein.

Es soll ein kurzer Einblick in die Modellierung von sogenannten Risikoreserveprozessen sowohl in diskreter als auch in stetiger Zeit gegeben werden.

1.2 Das Ruinproblem in diskreter Zeit

1.2.1 Allgemeines

Folgende Ergebnisse wurden aus dem Buch Stochastic Processes for Insurance and Finance von T. Rolski¹ u.a. entnommen.

In diesem Abschnitt werden wir den diskreten Risikoreserveprozess

$$R_n = x + n + \sum_{k=1}^n X_k \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

betrachten. Die Variable x soll das Anfangskapital zum Zeitpunkt $n=0$ darstellen und die Prämie beträgt 1 im Intervall $(n-1, n]$. Die Schäden X_k im Intervall $(n-1, n]$ werden in diesem Modell als unabhängig und identisch verteilt (iid)² angenommen. Die Verteilung der Schäden soll desweiteren diskret mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_k = \mathbb{P}(X_k)$ sein.

Das Ereignis $\bigcup_{n \geq 1} \{R_n < 0\}$ bezeichnet man als *technischen Ruin*. Es sei darauf hingewiesen, dass in unserem Fall das Ereignis $R_i \leq 0$ nur dann eintreten kann, wenn $p_0 + p_1 < 1$ gilt.

Definition 1.1. Die Ruinzeit $\tau_d(x)$ in einem diskreten Modell ist gegeben durch $\tau_d(x) = \min\{n \in \mathbb{N} | R_n < 0\}$.

Definition 1.2. Die Ruinwahrscheinlichkeit im diskreten Modell sei $\psi(x) = \mathbb{P}(\tau_d(x) < \infty)$.

Bemerkung:

a) Man nennt $\bar{\psi}(x) := 1 - \psi(x)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der technische Ruin nicht eintritt.

¹siehe [1]

²iid bedeutet unabhängig und identisch verteilt

b) Betrachtet man jedoch nur endlichen Zeithorizont, dann definiert man die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x; n) = \mathbb{P}(\tau_d(x) \leq n)$. Die Ruinwahrscheinlichkeit in einem unendlichen Zeithorizont ist oft einfacher zu berechnen und ist außerdem für großes n eine gute Näherung beziehungsweise eine obere Schranke für $\psi(x; n)$: $\psi(x; n) \leq \psi(x)$.

Anstelle des Risikoreserveprozesses ist es oft hilfreich den Schadenüberschussprozess zu betrachten, der wie folgt definiert ist:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k - n = \sum_{k=1}^n Y_k \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Die Inkremente $Y_k = (X_k - 1)$ sind unabhängig und identisch verteilt. Mit der obigen Notation gilt nun für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\max\{S_1, S_2, \dots\} > x) = \mathbb{P}(M > x) \quad (1.3)$$

wobei $M := \max\{S_1, S_2, \dots\}$ ist.

Bemerkung :

a) Aus obiger Gleichung erkennt man, dass man das diskrete Ruinproblem als Studium des Maximums M einer Irrfahrt sehen kann.

b) Aus dem Gesetz der Großen Zahl folgt, dass $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}[Y]$ f.s.. Daher folgt $S_n \rightarrow \infty$ f.s., d.h. $\psi(x) = 1$, für $\mathbb{E}[Y] > 0$. Selbiges kann für den Fall $\mathbb{E}[Y] = 0$ gezeigt werden.

Aus $\mathbb{E}[Y] < 0$ folgt, dass $S_n \rightarrow -\infty$, d.h. $\max\{0, S_1, S_2, \dots\} < \infty$ f.s. und $\psi(x) < 1$ für manche x (siehe Gleichung 1.3).

1.2.2 Berechnung der Ruinfunktion im diskreten Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir den Schadenüberschussprozess $\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^n Y_k\}$ mit Inkrementen der Form $Y_k = X_k - 1$ und der Konvention $S_0 = 0$. Außerdem nehmen wir an, dass $\mathbb{E}[Y] < 0$.

Weiters definieren wir einen stochastischen Prozess $\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n Y_{k+1}$ und dessen Maximum $\tilde{M} := \max_{n \in \mathbb{N}} \{\tilde{S}_n\}$. Da die Prozesse $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\tilde{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ die gleiche Verteilung besitzen, stimmen auch die Verteilungen von M und $\tilde{M}$ überein. Man kann leicht

zeigen, dass $M \stackrel{d}{=} (Y_1 + \tilde{M})_+$ f.s.³ Mit der Notation $g_M(s) = \mathbb{E}(s^M)$ bzw. $g_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ werden wir nun im folgenden Theorem die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von M herleiten und damit das Ruinproblem in diskreter Zeit lösen (vgl. Gleichung 1.3).

Satz 1.1. *Es gilt:*

a) *Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von M ist gegeben durch:*

$$g_M(s) = \frac{(1-s)(1-\mathbb{E}(X))}{g_X(s) - s}, \quad s \in (-1, 1) \quad (1.4)$$

b) *M ist zusammengesetzt geometrisch verteilt i.e. $M \sim ZGeo(\rho, F_U)$ mit $\rho = \mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(X > k) \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$*

Beweis:

a) Wir werden die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von M direkt berechnen:

$$\begin{aligned} g_M(s) &= \mathbb{E}(s^M) = \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)_+}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)_+}; M+X-1 \geq 0\right) + \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)_+}; M+X-1 < 0\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)}; M+X-1 \geq 0\right) + \mathbb{E}\left(s^0; M+X-1 < 0\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)}; M+X-1 \geq 0\right) + \mathbb{E}\left(1; M+X-1 < 0\right) \\ &= \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)}\right) - \mathbb{E}\left(s^{(M+X-1)}; M+X-1 < 0\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{(M+X-1 < 0)}\right) \\ &= \frac{1}{s} \mathbb{E}\left(s^{(M+X)}\right) - \frac{1}{s} \mathbb{E}\left(s^{(M+X)}; M=0 \wedge X=0\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{(M=0 \wedge X=0)}\right) \end{aligned}$$

³ $(X)_+ := \max\{x, 0\}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{s} \mathbb{E}\left(s^{(M+X)}\right) - \frac{1}{s} \mathbb{E}\left(1; \mathbb{I}_{(M=0 \wedge X=0)}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{(M=0 \wedge X=0)}\right) \\
 &= \frac{1}{s} g_M(s) g_X(s) - \frac{1}{s} \mathbb{P}(M+X=0) + \mathbb{P}(M+X=0) \\
 &\Rightarrow g_M(s) = \frac{s-1}{s-g_X(s)} \cdot \mathbb{P}(M+X=0)
 \end{aligned}$$

Da $g_M(s)$ eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist, gilt $g_M(1) = 1$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 1 = g_M(1) &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{s-1}{s-g_X(s)} \stackrel{\text{Regel von de l'Hospital}}{=} \frac{1}{1-\mathbb{E}(X)} \cdot \mathbb{P}(M+X=0) \\
 \Rightarrow \mathbb{P}(M+X=0) &= 1 - \mathbb{E}(X)
 \end{aligned}$$

b) Zuerst sei darauf hingewiesen, dass die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von U Folgendes erfüllt

$$g_U(s) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \frac{1-g_X(s)}{1-s}.$$

Also erhalten wir mit (1.4) für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von M:

$$g_M(s) = \frac{(1-\rho)(1-s)}{g_X(s)-s} = \frac{(1-\rho)(1-s)}{(s-1)\rho g_U(s) + (1-s)} = \frac{1-\rho}{1-\rho g_U(s)}.$$

Sei nun $\tilde{M} = \sum_{i=1}^N U_i$, dann gilt:

$$g_{\tilde{M}}(s) = \mathbb{E}(s^{\tilde{M}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{\tilde{M}} | N=n) \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (g_U(s))^n (1-\rho) \rho^n$$

$$= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} (g_U(s))^n \rho^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho g_U(s)} = g_M(s)$$

Aufgrund der eindeutigen Zusammengehörigkeit einer Verteilung und ihrer erzeugenden Funktion ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen. □

Bemerkung: An dieser Stelle sei auf die Tatsache $\mathbb{P}(X = k) = \frac{g_X^{(k)}}{k!}$ hingewiesen.

1.3 Das Ruinproblem in stetiger Zeit

1.3.1 Allgemeines Modell

Im Folgenden betrachten wir einen stetigen Risikoreserveprozess $\{R_t, t \geq 0\}$ gegeben durch

$$R_t = x + \beta t - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k \tag{1.5}$$

Wobei folgende Annahmen getroffen werden:

- Anfangskapital $x \in \mathbb{R}_+$
- zufällige Schadenzeitpunkte $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots$ mit der Konvention $\sigma_0 = 0$
- die Zwischenankunftszeiten sind gegeben durch $\tau_n := \sigma_n - \sigma_{n-1} \quad n \geq 0$
- Strikt positive Schäden $U_1, U_2, \dots$ zu den Schadenzeitpunkten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$
- Prämien werden mit konstanter Intensität $\beta > 0$ eingenommen.

Der Ruinzeitpunkt wird definiert als $\tau(x) = \min\{t \geq 0 \mid R_t < 0\}$ und die Ruinwahrscheinlichkeit ist $\psi(x) = \mathbb{P}(\tau(x) < \infty)$.

Definiert man den Schadenüberschussprozess analog zum diskreten Fall

$$S_t = \sum_{k=0}^{N(t)} U_k - \beta t \quad (1.6)$$

mit $N(t) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\{\sigma_k \leq t\}}$ und beachtet man, dass Ruin nur bei den Schadenzeitpunkten σ_n eintreten kann, dann liefert

$$M = \max_{t \geq 0} S(t) = \max_{n \geq 0} S(\sigma_n) = \max_{n \geq 0} \sum_{k=1}^n (U_k - \beta T_k) \quad (1.7)$$

die Ruinwahrscheinlichkeit :

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\tau(x) < \infty) = \mathbb{P}(M > x). \quad (1.8)$$

1.4 Zusammengesetztes Poisson Modell

In diesem Abschnitt werden wir uns anfangs mit Poissonprozessen und zusammengesetzten Poissonprozessen beschäftigen, um danach das Compound Poisson Modell (Cramer-Lundberg Modell) untersuchen zu können.

1.4.1 Homogener Poissonprozess

Wir betrachten Zwischenankunftszeiten $\{T_n, n \geq 1\}$ die unabhängig, identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, dann ist der Zählprozess $\{N(t), t \geq 0\}$ ein (homogener) Poissonprozess mit Intensität λ .

Im folgenden Theorem werden wir einige äquivalente und nützliche Beschreibungen des Poissonprozessen anführen.

Satz 1.2. (ohne Beweis): Sei $\{N(t), t \geq 0\}$ ein Zählprozess, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\{N(t), t \geq 0\}$ ist ein Poissonprozess mit Intensität λ
- b) Für alle $t \geq 0$ und $n = 1, 2, \dots$ gilt $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$ und die bedingte Verteilung von $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) | \{N(t) = n\}$ ist die Verteilung der Ordnungsstatistik von n iid gleichverteilten Zufallsvariablen auf $[0, t]$
- c) $\{N(t)\}$ hat unabhängige Inkremente mit $\mathbb{E}(N(1)) = \lambda$ und die bedingte Verteilung von $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) | \{N(t) = n\}$ ist die Verteilung der Ordnungsstatistik von n iid gleichverteilten Zufallsvariablen auf $[0, t]$
- d) $\{N(t), t \geq 0\}$ hat unabhängige, stationäre Inkremente und für jedes feste $t \geq 0$ gilt $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$.

1.4.2 Zusammengesetzter Poissonprozess

Wir nehmen weiterhin an, dass $\{T_n\}$ exponentialverteilte iid Zufallsvariablen mit Parameter λ sind oder dass $\{N(t)\}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ ist.

Betrachten wir nun einen Gesamtschadenprozess $X(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} U_k$, wobei die Einzelschäden U_n iid mit Verteilungsfunktion F_U sind und $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ unabhängig von $\{N(t)\}$ ist. Dann nennt man $\{X(t), t \geq 0\}$ einen zusammengesetzten Poissonprozess mit Charakteristiken (λ, F_U) .

Satz 1.3. (ohne Beweis): Sei $\{X(t)\}$ ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Charakteristiken (λ, F_U) . Dann gilt:

- a) $\{X(t)\}$ hat stationäre und unabhängige Inkremente.
- b) Die momenterzeugende Funktion von $X(t)$ ist gegeben durch

$$m_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(m_U(s)-1)} \quad (1.9)$$

und weiters gilt: $\mathbb{E}X(t) = \lambda t \mathbb{E}(U)$ bzw. $\mathbb{V}X(t) = \lambda t \mathbb{E}(U^2)$.

1.4.3 Ruinwahrscheinlichkeiten im zusammengesetzten Poissonmodell

Mit Hilfe der vorigen Abschnitte können wir nun das zusammengesetzte Poisson Modell definieren und schließlich genauer analysieren. In diesem Abschnitt werden wir sowohl Gleichungen für die Ruinwahrscheinlichkeiten, als auch für Überlebenswahrscheinlichkeiten herleiten.

Das zusammengesetzte Poisson Modell ist ein Risikomodell in stetiger Zeit :

$$R_t = x + \beta t - \sum_{k=0}^{N(t)} U_k \quad (1.10)$$

wobei der Zählprozess $\{N(t)\}$ ein Poissonprozess mit Intensität λ ist und daher der Gesamtschadenprozess $X(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} U_k$ ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Charakteristiken (λ, F_U) ist.

Der Schadenüberschussprozess $\{S_n\}$ ist darstellbar als

$$S(\sigma_n) = \sum_{k=1}^n (U_k - \beta T_k) =: \sum_{k=1}^n Y_k \quad (1.11)$$

Wie wir bereits in Abschnitt 1.2 gesehen haben, muss $\mathbb{E}(Y_k) < 0$ sein, um $\psi(x) < 1$ für manche x gewährleisten zu können. Sei $\mu = \mathbb{E}(U)$, dann muss

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(U) - \beta \mathbb{E}(T) = \mu - \frac{\beta}{\lambda} < 0 \quad (1.12)$$

gelten. Dies ist gewährleistet, wenn der *relative Sicherheitszuschlag*

$$\Lambda := \frac{\beta}{\lambda \cdot \mu} - 1 > 0 \quad (1.13)$$

erfüllt.

Der folgende Satz zeigt uns eine erste Charakterisierung der Überlebenswahrscheinlichkeit durch eine Doppelintegralgleichung.

Satz 1.4. (Eine Doppelintegralgleichung): Sei $\{R(t)\}$ der Risikoreserveprozess des zusammengesetzten Poissonmodells, dann gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^\infty \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u + \beta t - v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt \quad (u \geq 0) \quad (1.14)$$

Beweis: Wie im diskreten Fall definieren wir auch hier $S_k := \sum_{i=1}^k Y_i$, $M_n := \max_{k=1, \dots, n} S_k$, sowie $\tilde{S}_k := \sum_{i=1}^k Y_{i+1}$ und $\tilde{M}_n := \max_{k=0, \dots, n} \tilde{S}_k$. Auch hier gilt $M_n \stackrel{d}{=} (Y_1 + \tilde{M}_{n-1})_+$.

Also gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n(u) &= \mathbb{P}(M_n \leq u) = \mathbb{P}((Y_1 + \tilde{M}_{n-1})_+ \leq u) = \mathbb{P}((Y_1 + \tilde{M}_{n-1}) \leq u) \\ &= \mathbb{P}(U_1 - \beta T_1 + \tilde{M}_{n-1} \leq u) \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{v=0}^\infty \int_{m=0}^\infty \mathbb{I}_{\{v-\beta t+m \leq u\}} dF_{\tilde{M}_{n-1}}(m) dF_U(v) dF_T(t) \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{v=0}^\infty \int_{m=0}^\infty \mathbb{I}_{\{m \leq u-v+\beta t\}} dF_{\tilde{M}_{n-1}}(m) dF_U(v) dF_T(t) \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{v=0}^\infty \int_{m=0}^{u+\beta t-v} dF_{\tilde{M}_{n-1}}(m) dF_U(v) dF_T(t) \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{v=0}^\infty F_{\tilde{M}_{n-1}}(u + \beta t - v) dF_U(v) dF_T(t) \end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass $F_{M_{n-1}}(x) = \bar{\psi}_{n-1}(x)$ und dass für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\psi(x) = 0$ für $x < 0$ gilt, so folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz die Gleichung (1.14). $\square$

Im nächsten Satz werden wir zeigen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u)$ auf ganz $\mathbb{R}_+$, außer an den höchstens abzählbar vielen Sprungstellen von F_U , differenzierbar ist.

Satz 1.5. (Eine Integro-Differentialgleichung): Die Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}(u)$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+$ mit rechts- und linksseitigen Ableitungen $\bar{\psi}_+^{(1)}(u)$ und $\bar{\psi}_-^{(1)}(u)$. Es gilt:

$$\bar{\psi}_+^{(1)}(u) = \frac{\lambda}{\beta} (\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF_U(y)) \quad (1.15)$$

$$\bar{\psi}_-^{(1)}(u) = \frac{\lambda}{\beta} (\bar{\psi}(u) - \int_0^{u-} \bar{\psi}(u-y) dF_U(y)) \quad (1.16)$$

Beweis: Die Gleichung (1.14) lässt sich darstellen als:

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^h \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u+\beta t-v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt + \int_h^\infty \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u+\beta t-v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

Substituiert man nun $t \mapsto t + h$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= \int_0^h \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u + \beta t - v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^{u+\beta(t+h)} \bar{\psi}(u + \beta(t+h) - v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda(t+h)) dt \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^h \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u + \beta t - v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt + \bar{\psi}(u + \beta h) \exp(-\lambda h)$$

Aus dieser Gleichung folgt mit $h \rightarrow 0$ die Rechtsstetigkeit von $\bar{\psi}(u)$. Durch geschicktes Umformen bekommt man die Gleichung:

$$\beta \frac{\bar{\psi}(u + \beta h) - \bar{\psi}(u)}{\beta h} = \bar{\psi}(u + \beta h) \left(\frac{1 - \exp(-\lambda h)}{h} \right) - \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{u+\beta t} \bar{\psi}(u + \beta t - v) dF_U(v) \cdot \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

Also haben wir gezeigt, dass $\bar{\psi}(u)$ rechtsseitig differenzierbar ist und durch $h \rightarrow 0$ folgt Gleichung (1.15). Man kann die Linksdifferenzierbarkeit auf analoge Weise zeigen. $\square$

Da obige Integro- Differentialgleichung sowohl Ableitungen als auch Integrale enthält, ist sie praktisch nicht leicht lösbar. Daher werden wir im Folgenden versuchen den Ableitungsterm loszuwerden.

Satz 1.6. (Eine einfache Integralrechnung): Die Ruinfunktion $\psi(u)$ erfüllt die Integralgleichung:

$$\beta \psi(u) = \lambda \left(\int_u^\infty \bar{F}_U(x) dx + \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}_U(x) dx \right) \quad (1.17)$$

Beweis: Betrachten wir zuerst die etwas umgeformte Gleichung (1.15):

$$\frac{\beta}{\lambda} \bar{\psi}_+^{(1)}(x) = \bar{\psi}(x) - \int_0^x \bar{\psi}(x-y) dF_U(y) \quad (1.18)$$

und integrieren diese über das Intervall $(0, u]$.

Linke Seite:

$$\frac{\beta}{\lambda} \int_0^u \bar{\psi}_+^{(1)}(x) dx = \frac{\beta}{\lambda} (\bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0))$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} & \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_{x=0}^u \int_{y=0}^x \bar{\psi}(x-y) dF_U(y) dx \\ & \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_{y=0}^u \int_{x=y}^u \bar{\psi}(x-y) dx dF_U(y) \\ & = \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_{y=0}^u \int_{z=0}^{u-y} \bar{\psi}(z) dz dF_U(y) \\ & \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_0^u \bar{\psi}(x) dx - \int_{z=0}^u \int_{y=0}^{u-z} dF_U(y) \bar{\psi}(z) dz \\ & = \int_0^u (1 - F_U(u-x)) \bar{\psi}(x) dx = \int_0^u (1 - F_U(x)) \bar{\psi}(u-x) dx \\ & = \int_0^u \bar{F}_U(x) (1 - \psi(u-x)) dx \end{aligned}$$

Fügt man nun linke und rechte Seite zusammen, so erhält man:

$$\frac{\beta}{\lambda} (\bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0)) = \int_0^u \bar{F}_U(x) (1 - \psi(u-x)) dx \quad (1.19)$$

Eine Formel zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit für Anfangskapital $u = 0$ erhält man, wenn man in Gleichung (1.19) $u \rightarrow \infty$, sodass $\bar{\psi}(u) \rightarrow 1$. Man erhält schließlich

$$\bar{\psi}(0) = 1 - \frac{\mathbb{E}(U) \lambda}{\beta} \quad \text{bzw.} \quad \psi(0) = \frac{\mathbb{E}(U) \lambda}{\beta} \quad (1.20)$$

Setzt man nun diese Formel für $\psi(0)$ in Gleichung (1.19) ein, dann folgt durch geschicktes Umformen unmittelbar die gewünschte Integralgleichung. $\square$

Bemerkung: An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Ruinwahrscheinlichkeit bei Anfangskapital $u = 0$ (siehe (1.20)) nur von der erwarteten Schadenhöhe und nicht von der Verteilung eines Einzelschadens ab.

1.4.4 Pollaczek-Kinchin Formel

In diesem Abschnitt werden wir eine Formel zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit, die sogenannte Pollaczek-Kinchin Formel, herleiten. Zuerst berechnen wir jedoch die Laplace-Transformierten von ψ und $\bar{\psi}$:

$$L_{\psi}(s) = \int_0^{\infty} \psi(u) \exp(-su) du \quad \text{bzw.} \quad L_{\bar{\psi}}(s) = \int_0^{\infty} \bar{\psi}(u) \exp(-su) du \quad (1.21)$$

Beide Integrale machen natürlich nur für $s > 0$ Sinn. Desweiteren gilt der elementare Zusammenhang:

$$L_{\psi}(s) = \int_0^{\infty} (1 - \bar{\psi}(u)) \exp(-su) du = \frac{1}{s} - L_{\bar{\psi}}(s) \quad (1.22)$$

Satz 1.7. Die Laplace Transformaten von $L_{\psi}(s)$ und $L_{\bar{\psi}}(s)$ sind gegeben durch

$$L_{\psi}(s) = \frac{\beta - \lambda u}{\beta s - \lambda(1 - l_U(s))} \quad \text{für } s > 0 \quad (1.23)$$

und

$$L_{\bar{\psi}}(s) = 1/s - \frac{\beta - \lambda u}{\beta s - \lambda(1 - l_U(s))} \quad \text{für } s > 0 \quad (1.24)$$

Bemerkung: Wir bezeichnen mit $l_U(s)$ die Laplace-Stieltjes-Transformation des Einzel-schadens U , also: $l_U(s) = \int_0^\infty \exp(-sy) dF_U(y)$

Beweis: Wir werden in diesem Beweis die Laplace-Transformierte für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{\psi}$ herleiten und dann mit Hilfe von (1.22) auf die Laplace-Transformierte der Ruinwahrscheinlichkeit schließen. Wir betrachten die Integro-Differentialgleichung (1.15) und transformieren die linke und rechte Seite:

$$\text{Integro-Differentialgleichung (1.15): } \bar{\psi}_+^{(1)}(u) = \frac{\lambda}{\beta} (\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF_U(y))$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \bar{\psi}_+^{(1)}(u) \exp(-su) du \stackrel{\text{part. Integration}}{=} \exp(-su) \bar{\psi}(u) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty \bar{\psi}(u) \exp(-su) du \\ & = -\bar{\psi}(0) + s L_{\bar{\psi}}(s) \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\beta} \left(\int_0^\infty \bar{\psi}(u) \exp(-su) du - \int_{u=0}^\infty \exp(-su) \int_{y=0}^u \bar{\psi}(u-y) dF_U(y) du \right) \\ & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{\lambda}{\beta} \left(L_{\bar{\psi}}(s) - \int_{y=0}^\infty \int_{u=y}^\infty \exp(-su) \bar{\psi}(u-y) du dF_U(y) \right) \\ & \stackrel{|u=u+y|}{=} \frac{\lambda}{\beta} \left(L_{\bar{\psi}}(s) - \int_{y=0}^\infty \int_{u=0}^\infty \exp(-s(u+y)) \bar{\psi}(u) du dF_U(y) \right) \\ & = \frac{\lambda}{\beta} \left(L_{\bar{\psi}}(s) - \underbrace{\int_{y=0}^\infty \exp(-sy) dF_U(y)}_{l_U(s)} \underbrace{\int_{u=0}^\infty \exp(-su) \bar{\psi}(u) du}_{L_{\bar{\psi}}(s)} \right) \\ & = \frac{\lambda}{\beta} \left(L_{\bar{\psi}}(s) - L_{\bar{\psi}}(s) l_U(s) \right) \end{aligned}$$

Fügt man nun die linke und rechte Seite zusammen, so gilt:

$$-\bar{\psi}(0) + s L_{\bar{\psi}}(s) = \frac{\lambda}{\beta} \left(L_{\bar{\psi}}(s) - L_{\bar{\psi}}(s) l_U(s) \right)$$

$$\Leftrightarrow -\beta \bar{\psi}(0) + L_{\bar{\psi}}(s) \left(\beta s - \lambda + \lambda l_U(s) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow L_{\bar{\psi}}(s) = \frac{\beta - \lambda u}{\beta s - \lambda(1 - l_U(s))} \quad \text{für } s > 0$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (1.20), wobei μ wieder den erwarteten Einzelschaden $\mathbb{E}(U)$ darstellt. $\square$

Satz 1.8. (Pollaczek-Kinchin Formel): Für jedes $u \geq 0$ gilt:

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \overline{F_v^{*n}}(x) \quad , \text{ wobei} \quad (1.25)$$

$$\rho = \frac{\lambda \mu}{\beta}, \quad F_v(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}_U(y) dy \quad \text{und} \quad \mu = \mathbb{E}(U)$$

Beweis: Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir wieder die Integralgleichung (1.17) und bilden die Laplace-Transformation auf beiden Seiten.

$$L_{\psi}(s) = \frac{\lambda \mu}{\beta} L_{\overline{F}_v}(s) + \frac{\lambda \mu}{\beta} L_{\psi}(s) L_{\overline{F}_v}(s)$$

$$\Rightarrow L_{\psi}(s) = \frac{\frac{\lambda \mu}{\beta} L_{\overline{F}_v}(s)}{1 - \frac{\lambda \mu}{\beta} L_{\overline{F}_v}(s)}$$

d.h. $L_{\psi}(s)$ ist die Laplace-Transformierte der Tail-Funktion einer zusammengesetzten Geometrischen Verteilung mit Charakteristiken (ρ, F_v) . Die Behauptung folgt nun aufgrund

der eindeutigen Zusammengehörigkeit zwischen Verteilungsfunktion und ihrer Laplace-Transformierten. $\square$

1.4.5 Lundberg Schranken

Wie wir in den vorigen Abschnitten gesehen haben, ist es grundsätzlich schwierig die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ exakt zu bestimmen. Daher werden wir in diesem Kapitel Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit im zusammengesetzten Poissonmodell bestimmen.

Wir betrachten wieder den Schadenüberschussprozess $S(t)$ für $t \geq 0$ des zusammengesetzten Poissonmodells. Da der Gesamtschadenprozess $X(t)$ ein zusammengesetzter Poissonprozess ist, können wir die momenterzeugende Funktion von $S(t)$ angeben als:

$$m_{S(t)}(s) = \mathbb{E}(\exp(s \cdot S(t))) = \exp(t(\lambda(m_U(s) - 1) - \beta s)) \quad (1.26)$$

$S(t)$ ist also ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Charakteristiken $(\lambda t, F_U)$ und Shift $-\beta t$.

Wenn $m_U(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > 0$, dann ist die Funktion

$$f(r) := \lambda(m_U(r) - 1) - \beta r \quad (1.27)$$

beliebig oft differenzierbar auf $(-\infty, s_0)$. Sie wird oft Cramer-Lundberg-Funktion genannt. Insbesondere ist $f(0) = 0$, die erste Ableitung an der Stelle Null ist strikt kleiner Null, wenn der Sicherheitszuschlag positiv ist. Die zweite Ableitung von f ist strikt größer Null. Das bedeutet $f(r)$ ist eine konvexe Funktion.

$$f^{(1)}(r) = \lambda m_U^{(1)}(r) - \beta \Rightarrow f^{(1)}(0) = \lambda\mu - \beta < 0 \quad (1.28)$$

$$f^{(2)}(r) = \lambda m_U^{(2)}(r) = \lambda \mathbb{E}(U^2 \exp(sU)) > 0 \quad (1.29)$$

Existiert eine zweite Lösung $r_0 \neq 0$ mit $f(r_0) = 0$, dann ist diese eindeutig und strikt positiv. Wir nennen diese Lösung, wenn sie existiert, *Anpassungskoeffizient* oder *Lundberg Koeffizient*.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage nach Voraussetzungen, die die Existenz eines Lundberg Koeffizienten sichern. Der folgende Satz liefert uns ein solches Kriterium.

Satz 1.9. *Angenommen es existiert ein $r_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sodass $m_U(r) < \infty$ für $r < r_\infty$ und $\lim_{r \uparrow r_\infty} m_U(r) = \infty$. Dann existiert der Lundberg Koeffizient r_0 .*

Beweis: Aufgrund der Eigenschaften der Funktion $f(r)$, die wir am Anfang des Abschnitts diskutiert haben, müssen wir nur zeigen, dass $\lim_{r \uparrow r_\infty} f(r) = \infty$.

Der Fall $r_\infty < \infty$ ist klar.

Der Fall $r_\infty = \infty$: Wähle ein a so, sodass $F_U(a) < 1$ dann gilt:

$$m_U(r) = \int_0^\infty \exp(rx) dF_U(x) \geq \int_a^\infty \exp(rx) dF_U(x) \geq \int_a^\infty \exp(ra) dF_U(x) = \exp(ra) \overline{F_U(a)} \quad (1.30)$$

Also bewegt sich $m_U(r)$ sicher schneller gegen ∞ als jede lineare Funktion. $\square$

Solche Existenzbedingungen für den Lundbergkoeffizienten sind sehr wichtig, da sie allgemeine Abschätzungen für die Ruinwahrscheinlichkeiten ermöglichen. Folgender Satz liefert eben (unter der Existenzvoraussetzung des Lundbergkoeffizienten) eine obere und untere Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit im zusammengesetzten Poissonmodell.

Sei $x_0 := \sup \{x : F_U(x) < 1\}$.

Satz 1.10. *Angenommen der Lundbergkoeffizient $r_0 > 0$ existiert. Dann gilt:*

$$a_- \exp(-r_0 u) \leq \psi(u) \leq a_+ \exp(-r_0 u) \quad (1.31)$$

für alle $u \geq 0$, wobei

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0)} \frac{\exp(r_0 x) \int_x^\infty \overline{F_U}(y) dy}{\int_x^\infty \exp(r_0 y) \overline{F_U}(y) dy} \quad (1.32)$$

Der Beweis dieses Satzes erfolgt über die Theorie von zusammengesetzt geometrischen Zufallssummen, wird hier jedoch nicht angeführt. Der Leser sei auf Seite 170 von [1] verwiesen.

Da sich die exakte Berechnung des Lundberg Koeffizienten oft als schwierig herausstellt, ist es sinnvoll sich Schranken für den Anpassungskoeffizienten herzuleiten. Der nächste Satz, der aus dem Buch „An Introduction To Mathematical Risk Theory“⁴ von Hans U. Gerber entnommen wurde, liefert uns sowohl eine obere als auch eine untere Schranke.

⁴siehe[2]

Satz 1.11. Sei Λ der Sicherheitszuschlag des zusammengesetzten Poissonmodells (also $\Lambda = \frac{\beta}{\lambda \mathbb{E}(U)} - 1$), dann gilt:

- a) Existiert r_0 , dann gilt: $r_0 < 2\Lambda \frac{\mathbb{E}(U)}{\mathbb{E}(U^2)}$
 b) Ist $U_i \leq k$ konstant $\Rightarrow r_0$ existiert und es gilt: $r_0 > \frac{1}{k} \log(1 + \Lambda)$

Beweis: a) Betrachten wir die ersten Summanden der Exponentialreihe, dann gilt die Abschätzung $\exp(rx) \geq 1 + rx + \frac{r^2 x^2}{2}$. Also folgt

$$\mathbb{E}(\exp(rU)) \geq 1 + r\mathbb{E}(U) + \frac{r^2 \mathbb{E}(U^2)}{2}$$

und

$$f(r) = \lambda(m_U(r) - 1) - \beta r \geq \lambda\left(1 + r\mathbb{E}(U) + \frac{r^2 \mathbb{E}(U^2)}{2} - 1\right) - \beta r =: g(r).$$

Die Funktion $g(x)$ erfüllt dieselben Eigenschaften wie $f(x)$ i.e. $g(0) = 0$, $g^{(1)}(1) < 0$ und $g(x)$ ist ebenfalls konvex. Aufgrund dieser Eigenschaften und der Tatsache, dass $f(r) \geq g(r)$ gilt für die Nullstelle $r_1 = 2\lambda \frac{\mathbb{E}(U)}{\mathbb{E}(U^2)}$ von $g(r)$ sicher, dass $r_0 \leq r_1$.

b) Die Beweisführung für den zweiten Teil des Satzes erfolgt analog, wobei man die Abschätzung $\exp(rx) \leq \frac{x}{k} \exp(rk) + (1 - \frac{x}{k}) \exp(0)$ verwendet. Es muss noch gezeigt werden, dass r_0 in diesem Fall existiert. Da die Einzelschäden U_i beschränkt sind, existiert die momenterzeugende Funktion $m_U(r)$ für alle $r > 0$. Wähle ein a , sodass $F_U(a) < 1$ dann gilt:

$$m_U(r) = \int_0^\infty \exp(rx) dF_U(x) \geq \int_a^\infty \exp(rx) dF_U(x) \geq \int_a^\infty \exp(ra) dF_U(x) = \exp(ra) \bar{F}_U(a) \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow f(r) = \lambda(m_U(r) - 1) - \beta r \geq \lambda(\exp(ra) \bar{F}_U(a) - 1) - \beta r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$$

Damit ist auch die Existenz des Anpassungskoeffizienten gezeigt. $\square$

1.5 Diffusionsapproximation

Wir werden in diesem Abschnitt eine Diffusionsapproximation des Compound-Poisson Modells motivieren. Die Idee dahinter ist den Schadenüberschussprozess durch Diffusion zu approximieren und dann zum Beispiel durch Anpassung der ersten beiden Momente die Approximation durchzuführen. Als Grundlage dieses Abschnittes wurde Kapitel III des Buches „Ruin Probabilities“ von Soren Asmussen⁵ herangezogen.

Ein mathematisches Werkzeug zur Motivation der Diffusionsapproximation ist Donsker's Theorem: Für eine einfache Irrfahrt $\{S_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ in diskreter Zeit mit Drift $\mu = \mathbb{E}(S_1^*)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbb{V}(S_1^*)$ gilt nämlich:

$$\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{c}}(S_{[tc]}^* - tc\mu) \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t)\}_{t \geq 0} \quad \text{für } c \rightarrow \infty \quad (1.34)$$

, wobei die Konvergenz in der Verteilung gemeint ist und der Prozess $\{W_\zeta(t)\}_{t \geq 0}$ sei eine Brownsche Bewegung mit Drift ζ und Varianz gleich 1.

Wir betrachten also nun ein Compound Poisson Modell der Form

$$R_t = x + \beta t - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k \quad (1.35)$$

mit dem Schadenüberschussprozess

$$S_t = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \beta t \quad (1.36)$$

, wobei β wie im vorigen Abschnitt die Prämienintensität modelliert. Wir werden im Folgenden $\rho > 0$ als die Prämienintensität ohne Sicherheitszuschlag (critical premium rate) bezeichnen, d.h. :

$$\rho = \mathbb{E}(Y_1) = \lambda \mathbb{E}(X_1)$$

, wobei $Y_t = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ bezeichnet.

⁵siehe [3]

Satz 1.12. Für das CP-Modell gilt für $\beta \searrow \rho$ folgende Konvergenz in der Verteilung:

$$\left\{ \frac{|\mu|}{\sigma^2} S_{\frac{t\sigma^2}{\mu^2}}^{(\beta)} \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_{-1}(t)\}_{t \geq 0} \quad (1.37)$$

wobei $\mu = \mu_\beta = \rho - \beta$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}(Y_1) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$.

$\{W_{-1}(t)\}_{t \geq 0}$ bezeichnet eine Brownsche Bewegung mit Drift -1, dh. es gilt $W_{-1}(t) \sim \mathcal{N}(-t, t)$.

Bemerkung: Betrachtet man (1.37), dann erkennt man, dass der Schadenüberschussprozess des CP-Modells bei sinkender Skalierung (d.h. Schadenhöhe sinkt) und immer schnellerem Zeitdurchlauf (impliziert häufigere Schäden) in der Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung mit Drift konvergiert.

Beweis: Im ersten Schritt beobachten wir, dass folgende Konvergenz in der Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} (S_{tc}^{(\beta)} - tc\mu_\beta) \right\}_{t \geq 0} &= \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} \left[\sum_{k=1}^{N(tc)} X_k - \beta tc - tc(\rho - \beta) \right] \right\}_{t \geq 0} \\ &= \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{c}} (S_{tc}^\rho) \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t)\}_{t \geq 0} \end{aligned} \quad (1.38)$$

mit $c = c_\beta \rightarrow \infty$ für $\beta \searrow \rho$.

Diese Verteilungskonvergenz lässt sich mit (1.34) und folgenden Ungleichungen erklären. Für $n \in \mathbb{N}$ und Schrittweiten $h > 0$ gilt:

$$S_{nh}^\rho - \rho h \leq S_t^\rho \leq S_{(n+1)h}^\rho + \rho h \quad (1.39)$$

Um diese Ungleichungen zu zeigen sei $u, v \geq 0$. Dann gilt:

$$S_{u+v}^\rho \geq S_u^\rho - \rho v \quad (1.40)$$

Diese Abschätzung gilt, da $S_{u+v}^\rho - S_u^\rho$ sein Minimum bei $-\rho v$ annimmt (in diesem Fall treten keine Schäden auf). Insbesondere gilt für $t = nh + v$ mit $0 \leq v \leq h$ (d.h. $nh \leq t \leq (n+1)h$):

$$S_{nh}^\rho - h\rho \leq S_{nh}^\rho - v\rho \leq S_{nh+v}^\rho = S_t^\rho$$

Die letzte Abschätzung folgt aus (1.40). Die rechte Ungleichung in (1.39) folgt analog.

Definieren wir nun $c = c_\beta = \frac{\sigma^2}{(\rho - \beta)^2}$, dann gilt die Forderung $c_\beta \rightarrow \infty$ für $\beta \rightarrow \rho$ und Einsetzen in (1.38) liefert:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\sigma |\rho - \beta|} \left[S_{t\sigma^2/(\rho-\beta)^2}^{(\beta)} - t \frac{\sigma^2}{(\rho - \beta)^2} (\rho - \beta) \right] \right\}_{t \geq 0} = \left\{ \frac{|\rho - \beta|}{\sigma^2} \left[S_{t\sigma^2/(\rho-\beta)^2} + t \frac{\sigma^2}{|\rho - \beta|} \right] \right\}_{t \geq 0} \\ & = \left\{ \frac{|\rho - \beta|}{\sigma^2} [S_{t\sigma^2/(\rho-\beta)^2}] + t \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t)\}_{t \geq 0} \\ & \iff \left\{ \frac{|\rho - \beta|}{\sigma^2} [S_{t\sigma^2/(\rho-\beta)^2}] \right\}_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W_0(t) - t\}_{t \geq 0} = \{W_{-1}(t)\}_{t \geq 0} \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Eigenschaft (1.38) impliziert insbesondere die Verteilungskonvergenz $\frac{S_t^\rho}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für $t \rightarrow \infty$. Da der Schadenüberschussprozess des CP-Modells stationäre und unabhängige Inkremente besitzt, kann man für $n \in \mathbb{N}$ und Schrittweiten $h > 0$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes diese Konvergenz folgern. Schließlich kann man diese Eigenschaft durch geeignete Abschätzungen

$$\frac{S_{nh}^\rho}{\sqrt{nh}} \leq \frac{S_t^\rho}{\sqrt{t}} \leq \frac{S_{(n+1)h}^\rho}{\sqrt{(n+1)h}}$$

auf einen stetigen Zeithorizont ausweiten.

Wir haben also den Zusammenhang zwischen dem Schadenüberschussprozess des CP-Modells und einer Brownschen Bewegung mit Drift motiviert. Die Diffusionsapproximation kann nun, wie oben erwähnt, durch Anpassung der ersten beiden Momente erfolgen.

Man betrachtet nun den Reserveprozess $\hat{R}_t = x + \mu t + \sigma W_t$ anstatt des ursprünglichen Prozesses $R_t = x + \beta t - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, wobei die Parameter μ und σ wie folgt hergeleitet werden können:

$$R_t = \hat{R}_t \iff x - S_t = x + \mu t + \sigma W(t)$$

$$\iff -S_t = \mu t + \sigma W(t)$$

$$\xrightarrow{t=1} -S_1 = \mu + \sigma W(1)$$

$$\implies \mu = \mathbb{E}(-S_1) = \mathbb{E}(\beta - Y_1) = \beta - \lambda \mathbb{E}(X_1)$$

$$\implies \sigma^2 = \mathbb{V}(-S_1) = \mathbb{V}(S_1) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$$

Wir werden der hier angeführten Diffusionsapproximation des CP-Modells im Kapitel 4 wieder begegnen, wo wir die optimale Dividendenstrategie in einem Diffusionsmodell bestimmen werden.

Kapitel 2

Stochastische Kontrolltheorie

2.1 Stochastisches Kontrollproblem

Dieses Kapitel behandelt „Stochastische Kontrolltheorie“ auf Basis des Skriptums „Stochastic Control With Applications To Financial Mathematics“ von Jörn Sass¹ und der Vorlesung „Stochastische Kontrolltheorie“ von Dr. Peter Grandits an der TU Wien im Wintersemester 2009/2010.

Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ und eine Filtration $\mathcal{F}$, die die üblichen Bedingungen² erfüllt, gegeben. Sei $T > 0$ der Zeithorizont und $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ eine m -dimensionale Brownsche Bewegung.

Desweiteren verwenden wir folgende Notation:

- Ein Kontrollprozess u_t ist ein $\mathcal{F}$ - progressiv messbarer Prozess mit Werten in $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$.
- Der n - dimensionale Zustandsprozess $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ gegeben durch eine SDE³ der Form

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t \quad \text{mit } X_0 = x_0 \quad , \text{ wobei} \quad (2.1)$$

¹siehe [4]

²Unter „übliche Bedingungen“ versteht man Rechtsstetigkeit und Vollständigkeit.

³SDE bezeichnet eine stochastische Differentialgleichung

$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$

Um die Abhängigkeit des Zustandsprozesses vom Kontrollprozess hervorzuheben, verwendet man oft die Notation: $X_t = X_t^u$

- Das Zielfunktional, welches wir optimieren wollen, ist gegeben durch:

$$J(t, x, u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_T) | X_t = x \right] \quad (2.2)$$

, wobei man φ als laufende Kosten und ψ als Endkosten bezeichnet.

- Die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse wird mit $\mathcal{A}(t, x)$ bezeichnet und beinhaltet alle Kontrollprozesse $(u_s)_{s \in [t, T]}$, für die (2.1) eine eindeutige, starke Lösung hat und das Zielfunktional (2.2) wohldefiniert ist.
- Die Wertfunktion eines Kontrollproblems ist definiert als

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u) \quad (2.3)$$

Unser Ziel ist es nun ein $V(0, x_0)$ und einen zulässigen Kontrollprozess u^* aus $\mathcal{A}(0, x_0)$ zu finden, sodass der optimale Wert erreicht wird, also: $V(0, x_0) = J(0, x_0, u^*)$.

2.2 Dynamische Programmierung

Wir werden in diesem Abschnitt ein sehr wichtiges Werkzeug zum Lösen von stochastischen Kontrollproblemen kennenlernen, das sogenannte Bellman-Prinzip. Doch zuvor werden wir noch einige vorbereitende Erkenntnisse erlangen.

2.2.1 Ito-Diffusionen und ihre Generatoren

Wir gehen wieder von einer n - dimensionalen SDE aus

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (2.4)$$

wobei $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ eine m - dimensionale Brownsche Bewegung beschreibt und die messbaren Diffusions- und Driftkoeffizienten

$b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ für eine Konstante $K > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $s, t \geq 0$

$$\|b(s, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(s, x) - \sigma(t, y)\| \leq K(\|y - x\| + \|t - s\|) \quad (2.5)$$

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2) \quad (2.6)$$

erfüllen. Unter diesen Bedingungen hat die SDE 2.4 eine eindeutige starke Lösung, die wir *Ito Diffusion* nennen.

Wir bezeichnen die Diffusionsmatrix eines Ito-Prozesses bezüglich des Diffusionsterms $\sigma(t, x)$ mit $a(t, x)$:

$$a(t, x) := \sigma(t, x)\sigma(t, x)^T \quad (2.7)$$

Wir führen nun folgende Notation ein:

$$\mathbb{E}_{t,x}(Y) = \mathbb{E}(Y|X_t = x) \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}_x(Y) = \mathbb{E}(Y|X_0 = x)$$

Satz 2.1. *Sei X eine zeithomogene Ito-Diffusion und die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt, dann gilt:*

a) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t](\omega) = \mathbb{E}_{X_t(\omega)}[f(X_s)] \quad \text{für } t, s \geq 0 \quad (2.8)$$

b) Sei τ eine Stoppzeit mit $(\tau < \infty)$

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau+s})|\mathcal{F}_\tau](\omega) = \mathbb{E}_{X_\tau(\omega)}[f(X_s)] \quad \text{für } s \geq 0, \omega \in \Omega \quad (2.9)$$

Beweis:

a) Für $r \geq t$ gilt

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_t^r b(X_u) du + \int_t^r \sigma(X_u) dW_u.$$

Schreiben wir nun aus Gründen der Eindeutigkeit $X_r(\omega) = X_r^{t, X_t}(\omega)$, dann wollen wir damit ausdrücken, dass der Startwert zum Zeitpunkt t gleich X_t ist. Definieren wir uns zusätzlich $F(x, t, r, \omega) := X_r^{t, X_t}(\omega)$ für $r \geq t$, dann gilt:

$$X_r(\omega) = F(X_t, t, r, \omega) \quad \text{für } r \geq t$$

Da $\omega \rightarrow F(x, t, r, \omega)$ unabhängig von der Filtration $\mathcal{F}_t$ ist, können wir (2.8) schreiben als

$$\mathbb{E} [f(F(X_t, t, t+s, \omega)) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{x=X_t} [f(F(x, 0, s, \omega))] \quad (2.10)$$

Setzt man $g(x, \omega) = f \circ F(x, t, t+s, \omega)$, so ist $g(x, \omega)$ als Zusammensetzung messbarer Funktionen messbar. Wir können also g punktweise beschränkt mit Funktionen der Form $\sum_{k=1}^m \phi_k(x) \psi_k(\omega)$ approximieren.

Unter Verwendung der Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [g(X_t, \omega) | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E} \left[\lim \sum \phi_k(X_t) \psi_k(\omega) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \lim \sum \phi_k(X_t) \mathbb{E} [\psi_k(\omega) | \mathcal{F}_t] \\ &= \lim \sum \mathbb{E} [\mathbb{E} [\phi_k(y) \psi_k(\omega) | \mathcal{F}_t] | y = X_t] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [g(y, \omega) | \mathcal{F}_t] | y = X_t] \\ &= \mathbb{E} [g(y, \omega) | y = X_t] \\ &= \mathbb{E}_{y=X_t} [g(y, \omega)] \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also mit der Zeithomogenität von X_t :

$$\mathbb{E} [f(F(X_t, t, t+s, \omega)) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{y=X_t} [f(F(y, t, t+s, \omega))]$$

$$= \mathbb{E}_{y=X_t} [f(F(y, 0, s, \omega))] . \quad (2.11)$$

b) Die Gleichung (2.9) folgt aus analoger Beweisführung wie im ersten Teil. $\square$

Bemerkung: Die Eigenschaft (a) nennt man Markoveigenschaft und (b) nennt man die starke Markoveigenschaft. Die Eigenschaft (a) bedeutet, dass die zukünftige Entwicklung nach dem Zeitpunkt t nicht von der gesamten Information $\mathcal{F}_t$ abhängt, sondern nur vom Wert X_t .

Definition 2.1. Der infinitesimale Generator L von X ist definiert als

$$Lf(s, x) := \lim_{t \searrow s} \frac{\mathbb{E}_{s,x} [f(t, X_t)] - f(s, x)}{t - s} \text{ für alle } s \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

wobei der Definitionsbereich $\mathbb{D}_L = \{f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid Lf(s, x) \text{ existiert für alle } s \text{ und } x\}$

Definition 2.2. Der Partielle Differentialoperator $\mathcal{L}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.13)$$

und wirkt auf $\mathcal{C}^{1,2} := \left\{ f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ sind stetig für } i, j = 1, \dots, n \right\}$

Der Operator erfüllt:

$$\mathcal{L}f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + Df(t, x) \cdot b(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}((D^2 f(t, x)) \cdot a(t, x)) \quad (2.14)$$

wobei Df den Gradienten von f bezeichnet und $D^2 f$ die Hesse-Matrix von f .

Bemerkung:

a) Die Ito-Formel kann geschrieben werden als:

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t)dt + Df(t, X_t) \cdot \sigma(t, X_t)dW_t \quad (2.15)$$

b) Der einfachste Fall: Sei $n = 1$ und Zeitunabhängigkeit vorausgesetzt, dann gilt:

$$\mathcal{L} = b \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

Der nächste Satz beschreibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem infinitesimalen Generator L und dem partiellen Differentialoperator $\mathcal{L}$.

Satz 2.2. Sei $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ und es gelte $\forall u \geq t \geq 0, x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)| ds \right] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^u |Df(s, X_s) \cdot \sigma(s, X_s)|^2 ds \right] < \infty \quad (2.17)$$

Dann ist $f \in \mathcal{D}_L$ und $Lf(t, x) = \mathcal{L}f(t, x)$ für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Man betrachte die Ito-Formel in der Gestalt (2.15) und setze diese für $f(t, X_t)$ in die Definition des infinitesimalen Generators ein. Aufgrund der Bedingungen (2.17) des Satzes ist garantiert, dass alle vorkommenden Integrale existieren und die Behauptung folgt nun unmittelbar. $\square$

Bemerkung: Falls $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ und kompakten Träger besitzt, gilt Satz 2.2 immer.

Der Vollständigkeit halber sei noch folgender wichtiger Darstellungssatz angegeben, der in der Praxis oft sehr nützlich sein kann.

Satz 2.3. (Dynkin Formel): Sei $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ mit kompaktem Träger und τ Stoppzeit, sodass $\mathbb{E}_x(\tau) < \infty$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(\tau, X_\tau)] = f(0, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(s, X_s) ds \right] \quad (2.18)$$

2.2.2 Grundidee der dynamischen Programmierung

Dieser Abschnitt dient zur Motivation der, für uns sehr wichtigen, Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, auf welche wir auch oft in den folgenden Kapiteln zurückgreifen werden.

Bellman Prinzip:

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}) \right] \quad (2.19)$$

Das Bellman-Prinzip ist so zu interpretieren, dass optimales Verhalten im Intervall $[t, t_1]$ auch global optimal ist, wenn man sich auch nach t_1 optimal verhält.

Um nun die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung zu motivieren, sei $V(t, X) \in \mathcal{C}^{1,2}$. Wendet man nun die Ito-Formel auf $V(t, X_t)$ an, so folgt:

$$\begin{aligned} V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} & \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t, X_t) + \int_t^{t_1} V_t(s, X_s) ds \right. \\ & + \int_t^{t_1} b(s, x_s, u_s) DV(s, X_s) ds + \int_t^{t_1} \sigma(s, X_s, u_s) DV(s, X_s) dW_s \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D^2 V(s, X_s) ds) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

, wobei a wieder die Diffusionsmatrix des Prozesses X_t bezeichnet:

$$a(s, X_s, u_s) = \sigma(s, X_s, u_s) \sigma(s, X_s, u_s)^T.$$

Desweiteren nehmen wir an, dass $\int_t^{t_1} \sigma(s, X_s, u_s) DV(s, X_s) dW_s$ ein Martingal ist, also Erwartungswert gleich 0 besitzt. Außerdem gilt $V(t, X_t) = V(t, x)$ unter $\mathbb{E}_{t, x}$ und daher lässt sich (2.20) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \int_t^{t_1} V_t(s, X_s) ds \right. \\
 & \left. + \int_t^{t_1} b(s, x_s, u_s) DV(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D^2 V(s, X_s) ds) \right] \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Dividieren wir nun die Gleichung (2.19) durch $t_1 - t$ und gehen zum Limes $t_1 \searrow t$ über, dann gilt - unter der Annahme, dass man den Limes mit Supremum und Limes mit Erwartungswert vertauschen kann:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \varphi(t, x, u) + V_t(t, x) + b(t, x, u) DV(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, x, u) D^2 V(t, x)) \right\} \quad (2.22)$$

Definition 2.3. Der Operator L^u sei definiert durch:

$$\mathcal{L}^u f(t, x) := \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + Df(t, x) \cdot b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr}((D^2 f(t, x)) \cdot a(t, x, u)) \quad (2.23)$$

Das bedeutet die Gleichung (2.20) lässt sich wie folgt darstellen:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u V(t, x) \} \quad (2.24)$$

Man nennt diese Gleichung beziehungsweise äquivalent dazu die Gleichung (2.22) die *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*.

Wir haben also gezeigt, dass unter bestimmten Annahmen die Wertfunktion $V(t, x)$ eine Lösung der HJB-Gleichung ist. Umgekehrt könnte man sich fragen, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen eine Lösung der HJB-Gleichung die Lösung eines Kontrollproblems darstellt. Folgende Verifikationstheoreme liefern uns solche Voraussetzungen.

2.3 Verifikationstheorem für endlichen Zeithorizont

Wir betrachten ein stochastisches Problem, wie wir es im Abschnitt 2.1 eingeführt haben. Der Zustandsprozess ist gegeben durch

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dW_t \quad \text{mit } X_0 = x_0 \quad (2.25)$$

Das Zielfunktional ist beschrieben durch

$$J(t, x, u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(T, X_T) | X_t = x \right]. \quad (2.26)$$

mit der zugehörigen Wertfunktion:

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathbb{A}(t, x)} J(t, x, u). \quad (2.27)$$

Zuerst werden wir spezifizieren welche Bedingungen ein zulässiger Kontrollprozess erfüllen muss.

Der Kontrollprozess u ist zulässig i.e. $u \in \mathcal{A}(t, x)$, wenn gilt:

- $u = (u_s)_{s \in [t, T]}$ ist ein progressiv messbarer Prozess mit Werten in $\mathcal{U}$, sodass $\mathbb{E} \left[\int_t^T \|u_s\|^2 ds \right] < \infty$.
- (2.25) hat eine eindeutige starke Lösung $(X_s)_{s \in [t, T]}$ mit $X_t = x$ und erfüllt $\mathbb{E}_{t, x} [\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2] < \infty$.
- Das Zielfunktional $J(t, x, u)$ ist wohldefiniert.

Satz 2.4. (Verifikationstheorem): Angenommen $\sigma(t, x, u)$ und $\varphi(t, x, u)$ erfüllen

- $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ und
- φ ist stetig und erfüllt $\|\varphi(t, x, u)\|^2 \leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$

für $C_\sigma, C_\varphi > 0$ und für alle $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}$.

Dann gilt:

(i) Falls eine Funktion $\Phi(t, x) \in \mathcal{C}^{1,2}$ stetig auf $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ ist mit $\|\Phi(t, x)\| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$ und die HJB- Gleichung und die Randbedingung erfüllt i.e.

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{\varphi(t, x, u) + L^u \Phi(t, x)\}$$

$$\Phi(T, x) = \Psi(T, x), x \in \mathbb{R}^n$$

dann gilt für alle $t \in [0, T), x \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(t, x) \geq V(t, x)$$

(ii) Falls es einen Maximizer $\hat{u}(t, x)$ der Funktion $u \mapsto \varphi(t, x, u) + L^u \Phi(t, x)$ gibt, sodass gilt $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ und u^* ein zulässiger Kontrollprozess ist, dann gilt:

$$\Phi(t, x) = V(t, x) \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und } x \in \mathbb{R}^n$$

und u^* ist die optimale Strategie i.e. $V(t, x) = J(t, x, u^{t,x})$, wobei $u^{t,x} = (u_s^*)_{s \in [t, T]} \in \mathcal{A}(t, x)$ und X_t^* die Lösung von (2.25) für die Kontrolle u^* ist.

Beweis:

(i) Wir fixieren $t \in [0, T]$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Desweiteren definieren wir uns

$$\tau_n = T \wedge \inf \{s > t : \|X_s - X_t\| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Aus der Ito- Formel für $X_t = x$ folgt für eine beliebige zulässige Strategie u :

$$\Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) = \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} L^{u_s} \Phi(s, X_s) ds + \int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s \quad (2.28)$$

Mit der Beschränktheit von X auf $[t, \tau_n]$, der stetigen Differenzierbarkeit von Φ und der Zulässigkeit von u kann man folgern, dass $\mathbb{E}_{t,x} [\int_t^{\tau_n} \|D\Phi(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds] < \infty$. Genaugenommen ist $D\Phi$ wegen der vorausgesetzten Steigkeit und der Beschränktheit der

Argumente ebenfalls beschränkt. Zusätzlich gilt laut Voraussetzung, dass $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$. Also können wir mit der Zulässigkeit von u wirklich folgern, dass $\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \|D\Phi(s, X_s)\sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds \right] < \infty$.

Damit ist das stochastische Integral in obiger Ito- Formel ein Martingal, für das gilt:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} D\Phi(s, X_s)\sigma(s, X_s, u_s)dW_s \right] = 0$$

Durch Anwendung des Erwartungswertes lässt sich Formel (2.28) schreiben als:

$$\mathbb{E}_{t,x} [\Phi(\tau_n, X_{\tau_n})] = \Phi(t, x) + \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} L^{u_s}\Phi(s, X_s)ds \right] \quad (2.29)$$

Betrachten wir nun:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s)ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] \\ & \stackrel{(2.29)}{=} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) + \Phi(t, x) + \int_t^{\tau_n} L^{u_s}\Phi(s, X_s)ds \right] \\ & = \Phi(t, x) + \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \underbrace{\varphi(s, X_s, u_s) + L^{u_s}\Phi(s, X_s)}_{\leq 0, \text{ siehe HJB-Gleichung}} ds \right] \\ & \leq \Phi(t, x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wir können obige Abschätzung treffen, da $u_s \in \mathcal{U}$ für $s \in [t, T]$ und Φ laut Voraussetzung die HJB- Gleichung erfüllt.

Lassen wir nun n gegen Unendlich gehen, also $\tau_n \rightarrow T$, dann gilt:

$$\left| \int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s)ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right| \leq \int_t^{\tau_n} \|\varphi(s, X_s, u_s)\|ds + \|\Phi(\tau_n, X_{\tau_n})\|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_\varphi \int_t^{\tau_n} (1 + \|x_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi(1 + \|X_{\tau_n}\|^2) \\
 &\leq C_\varphi \int_t^{\tau_n} (1 + \|x_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_\Phi(1 + \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Die zweite Ungleichung gilt aufgrund der Forderungen, die wir an $\varphi(s, X_s, u_s)$ und $\Phi(t, x)$ gestellt haben. Wir erhalten also durch die obigen Abschätzungen eine von n unabhängige Majorante, die aufgrund der geforderten Bedingungen für zulässige Kontrollen integrierbar ist.

Wir können nun mit Hilfe des Satzes der dominierten Konvergenz und der Stetigkeit von Φ folgern, dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] &= \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Phi(T, X_T) \right] \\
 &= \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(T, X_T) \right] \\
 &\stackrel{(\text{siehe 2.24})}{=} J(t, x, u) \leq \Phi(t, x)
 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Randbedingung $\Psi(T, X_T) = \Phi(T, X_T)$. Bildet man nun das Supremum über alle zulässigen Kontrollprozesse u , dann folgt die gesuchte Ungleichung

$$V(t, x) \leq \Phi(t, x).$$

(ii) Der Beweis des zweiten Teil des Theorems ist analog zu beweisen. Es gelten die gleichen Abschätzungen. Man muss nur beachten, dass für den Maximizer $\hat{u}$ gilt:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{\tau_n} \underbrace{\varphi(s, X_s^*, \hat{u}(s, X_s^*)) + \mathcal{L}^{\hat{u}(s, X_s^*)} \Phi(s, X_s^*)}_{=0} ds \right] = 0.$$

und daher Gleichheit in (2.30) folgt. $\square$

2.4 Verifikationstheorem für unendlichen Zeithorizont

In diesem Abschnitt werden wir ein Verifikationstheorem für unendlichen Zeithorizont kennenlernen. Dazu nehmen wir an, dass die Koeffizienten $b(X_t, u_t)$, $\sigma(X_t, u_t)$ des Zustandsprozesses und die laufenden Kosten $\varphi(X_t, u_t)$ nicht explizit von der Zeit abhängen. Der Zustandsprozess sieht also wie folgt aus:

$$dX_t = b(X_t, u_t) dt + \sigma(X_t, u_t) dW_t \quad \text{mit } X_0 = x_0 \quad (2.32)$$

Damit vereinfacht sich der Operator $\mathcal{L}^u$, sodass gilt:

$$\mathcal{L}^u f(t, x) := Df(x) \cdot b(x, u) + \frac{1}{2} \text{tr}((D^2 f(x)) \cdot a(x, u)). \quad (2.33)$$

Unser Zielfunktional, welches maximiert werden soll, sieht wie folgt aus:

$$J(x, u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \exp(-\beta t) \varphi(X_t, u_t) dt \right] \quad (2.34)$$

mit der Zinsintensität $\beta > 0$ und die zugehörige Wertfunktion erfüllt:

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(x)} J(x, u). \quad (2.35)$$

Außerdem verwenden wir für dieses Verifikationstheorem dieselben Forderungen an die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $\mathcal{A}$ wie in Abschnitt 2.3.

Nun schließlich zu einem Verifikationstheorem für unendlichen Zeithorizont:

Satz 2.5. (Verifikationstheorem): *Angenommen $\sigma(x, u)$ und $\varphi(x, u)$ erfüllen*

- $\|\sigma(x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ und

- φ ist stetig und erfüllt $\|\varphi(x, u)\|^2 \leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$

für $C_\sigma, C_\varphi > 0$ und für alle $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}$.

Dann gilt:

(i) Falls eine Funktion $\Phi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ sowohl die Bedingung $\|\Phi(x)\| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$ als auch die HJB- Gleichung

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{\varphi(x, u) + L^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)\} \quad (2.36)$$

mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\exp(-\beta T) \Phi(x)] = 0. \quad (2.37)$$

dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) \geq V(x)$$

(ii) Falls es einen Maximizer $\hat{u}(t, x)$ der Funktion $u \mapsto \varphi(x, u) + L^u \Phi(x) - \beta \Phi(x)$ gibt, sodass gilt $u_t^* = \hat{u}(X_t^*)$ und u^* ein zulässiger Kontrollprozess ist, dann gilt:

$$\Phi(x) = V(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und u^* ist die optimale Strategie i.e. $V(x) = J(x, u^*)$, wobei X_t^* die Lösung von (2.32) für die Kontrolle u_s^* auf $[0, t)$ ist.

Beweisskizze:

Wir werden an dieser Stelle eine Beweisidee anführen. Man betrachtet zuerst endlichen Zeithorizont T , um das Verifikationstheorem für endlichen Zeithorizont anwenden zu können und führt dann den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ durch.

Sei $\hat{\Phi}(t, x)$ die Kandidatenfunktion im Verifikationssatz für endlichen Horizont. Setzen wir nun für $\hat{\Phi}(t, x) = \exp(-\beta t) \Phi(x)$ und $\hat{\varphi}(x, u) = \exp(-\beta t) \varphi(x, u)$ in die HJB- Gleichung (2.22) ein, so erhalten wir:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \exp(-\beta t) \varphi(x, u) - \beta \exp(-\beta t) \Phi(x) + b(x, u) \exp(-\beta t) D\Phi(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, u) \exp(-\beta t) D^2\Phi(x) \right\}$$

Dividieren wir nun diese Gleichung durch $\exp(-\beta t)$, dann erhalten wir die gesuchte HJB-Gleichung:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \varphi(x, u) + L^u \Phi(x) - \beta \Phi(x) \}$$

Der Rest des Beweises erfolgt analog zu dem des Verifikationstheorems für endlichen Zeithorizont, wobei man die Zusatzbedingung (2.35) miteinbeziehen muss. $\square$

Kapitel 3

Lokalzeit der Brownschen Bewegung

3.1 Einleitung

Als Grundlage dieses Kapitels wurde das Buch „Introduction to Stochastic Integration“ von K.L. Chung und R.J. Williams¹ herangezogen. Ziel dieses Abschnittes ist die Herleitung der sogenannten Tanaka-Formel. Diese liefert uns die Erkenntnis, dass man den Prozess $|W_t|$ (wobei W_t eine Brownsche Bewegung darstellt) als Summe einer Brownschen Bewegung $\widehat{W}_t$ und eines stetigen, wachsenden Prozesses L_t darstellen kann:

$$|W_t| = \widehat{W}_t + L_t. \quad (3.1)$$

Da die Betragsfunktion konvex ist und W als Brownsche Bewegung die Martingaleigenschaft erfüllt, lässt sich nach Anwendung der Jensen Ungleichung intuitiv einsehen, dass $|W_t|$ ein Submartingal ist und daher der Prozess L_t wachsend ist.

Die allgemeine Formel von Tanaka lässt sich wie folgt schreiben:

$$|W_t - x| = \widehat{W}_t + L_t(x). \quad (3.2)$$

Der Prozess $L_t(x)$ wird Lokalzeit der Brownschen Bewegung W bei x genannt und lässt sich wie folgt definieren.

¹siehe [6]

Definition 3.1.

$$L(t, x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \quad (3.3)$$

wird als Lokalzeit der Brownschen Bewegung bei x bezeichnet.

$L_t(x)$ kann also als Maß für die Verweildauer der Brownschen Bewegung W in der Umgebung von x bis zum Zeitpunkt t interpretiert werden.

3.2 Tanaka- Formel

Um die Formel von Tanaka herleiten zu können, werden wir zuerst einen vorbereitenden Satz beweisen.

Satz 3.1. Für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt f.s.:

$$(W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ = \int_0^t \mathbb{I}_{[x, \infty)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} L(t, x) \quad (3.4)$$

, wobei der Limes in $L(t, x)$ definiert in (3.3) im $L^2(\mathbb{P})$ - Sinn existiert.

Beweis: Wir werden zuerst die Funktion $f_x(y) := (y - x)^+$ betrachten. Die Ableitungen dieser Funktion existieren nicht im klassischen Sinn, sondern nur im einfachen (distributionellen) Sinn, mit:

$$f'_x(y) = \mathbb{I}_{[x, \infty)}(y)$$

$$f''_x(y) = \delta_x(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(y)$$

Wenden wir nun die Ito- Formel auf $f_x(W_t)$ an, obwohl $f_x(y)$ nicht zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt:

$$f_x(W_t) - f_x(W_0) = \int_0^t \mathbb{I}_{[x, \infty)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \delta_x(W_s) ds$$

Wir werden im Folgenden nun eine Funktion $f_{x\epsilon}(y)$ definieren, die die Funktion $f_x(y)$ approximiert und auf die man nach Anwendung eines Standard- Glättungsverfahrens vorbehaltlos die Ito- Formel anwenden darf.

Sei $f_{x\epsilon}(y)$ also wie folgt definiert:

$$f_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{(y - x + \epsilon)^2}{4\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ y - x & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases} \quad (3.5)$$

$$f'_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{y - x + \epsilon}{2\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ 1 & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases}$$

$$f''_{x\epsilon}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq x - \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & \text{für } x - \epsilon < y < x + \epsilon \\ 0 & \text{für } y \geq x + \epsilon \end{cases}$$

Wir haben also eine einmal stetig- differenzierbare Funktion $f_{x\epsilon}(y)$ konstruiert, die gleichmäßig für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $f_x(y)$ konvergiert.

Wir werden nun, wie vorher beschrieben, ein Standard- Glättungsverfahren auf die Funktion $f_{x\epsilon}(y)$ anwenden. Dies ermöglicht die Anwendung der Ito Formel und schließlich können wir dann mit Hilfe geeigneter Grenzwertargumente die gesuchte Gleichheit (3.4) zeigen.

Aus der Analysis ist bekannt, dass es eine Folge von Funktionen $\Phi_n(y) \in \mathcal{C}^\infty$ existiert, die folgende Eigenschaften besitzt:²

²Träger(f) := $\{x | f(x) \neq 0\}$

- $\text{Träger}(\Phi_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$
- $g_n(y) := \Phi_n * f_{x\epsilon}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x\epsilon}(y-z)\Phi_n(z)dz$
- $g_n(y) \rightarrow f_{x\epsilon}(y)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$
- $g'_n(y) \rightarrow f'_{x\epsilon}(y)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$
- $g''_n(y) \rightarrow f''_{x\epsilon}(y)$ punktweise auf $\mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$ bis auf die Punkte $y = x \pm \epsilon$

Die Funktion Φ_n könnte beispielsweise folgendermaßen aussehen:

$$\Phi_n(y) = n\Phi(ny)$$

mit

$$\Phi(y) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-y^2}\right) & \text{für } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenden wir nun auf, die durch Glättung entstandenen g_n die Ito- Formel an, dann gilt:

$$g_n(W_t) - g_n(W_0) = \int_0^t g'_n(W_s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''_n(W_s)ds \quad (3.6)$$

Jetzt werden wir das Verhalten der einzelnen Terme bei Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ überprüfen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(W_s) = f'_{x\epsilon}(W_s) \text{ gleichmäßig auf } [0, t] \times \Omega$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(W_s) = f'_{x\epsilon}(W_s) \text{ in } L^2(\lambda \times \mathbb{P}) \quad (\lambda \text{ bezeichnet das Lebesgue-Maß})$$

Mit der Ito- Isometrie folgt nun:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g'_n(W_s)dW_s = \int_0^t f'_{x\epsilon}(W_s)dW_s \text{ in } L^2(\mathbb{P})$$

Betrachten wir nun den Term g_n'' . Wegen $\mathbb{P}[W_s = x \pm \epsilon] = 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n''(W_s) = f_{x\epsilon}''(W_s) \quad \text{f.s. für festes } s.$$

Also gilt die Konvergenz insbesondere für λ -fast alle s f.s.. Wir können also den Satz der beschränkten Konvergenz anwenden, da die Funktionen g_n'' für alle $n \in \mathbb{N}$ aufgrund der Konstruktion durch $\frac{1}{2\epsilon}$ beschränkt sind. Es folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g_n''(W_s) ds = \int_0^t f_{x\epsilon}''(W_s) ds.$$

Berücksichtigt man nun zusätzlich die gleichmäßige Konvergenz der von g_n gegen $f_{x\epsilon}$ für $n \rightarrow \infty$, so haben wir also insgesamt gezeigt, dass man die Gleichung (3.6) für $n \rightarrow \infty$ f.s. schreiben kann als:

$$\begin{aligned} f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0) &= \int_0^t f_{x\epsilon}'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{x\epsilon}''(W_s) dW_s \\ &= \int_0^t f_{x\epsilon}'(W_s) dW_s + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) dW_s \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wir werden nun diese Gleichung für den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ untersuchen.

Zuerst betrachten wir die linke Seite der Gleichung. Aufgrund der punktweisen Konvergenz von $f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0)$ gegen $f_x(W_t) - f_x(W_0)$ und da gilt $|f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0)| \leq |W_t - W_0|$ folgt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f_{x\epsilon}(W_t) - f_{x\epsilon}(W_0)) = f_x(W_t) - f_x(W_0) \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

Nun betrachten wir das stochastische Integral in (3.7). Es gilt:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (f_{x\epsilon}'(W_s) - \mathbb{I}_{[x, \infty)}(W_s))^2 ds \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t \mathbb{E} [\mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s)] ds \\
 &= \int_0^t \mathbb{P} [W_s \in (x - \epsilon, x + \epsilon)] ds \\
 &\leq \int_0^t \frac{2\epsilon}{\sqrt{2\pi s}} ds \\
 &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt leicht aus einer geeigneten Skizze. Da W eine Brownsche Bewegung darstellt, gilt $W_s \sim \mathcal{N}(0, s)$ und daher folgt durch Abschätzung der Wahrscheinlichkeit unmittelbar die letzte Abschätzung.

Aus der Ito- Isometrie folgt nun:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t f'_{x\epsilon}(W_s) dW_s = \int_0^t \mathbb{I}_{[x, \infty)}(W_s) dW_s \text{ in } L^2(\mathbb{P})$$

Wir haben also gezeigt, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\epsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds$ als Summe von Termen, die für $\epsilon \rightarrow 0$ in $L^2(\mathbb{P})$ konvergieren, dargestellt werden kann.

Also ist die Lokalzeit $L_t(x)$ wie in (3.3) wohldefiniert und der Limes existiert im $L^2(\mathbb{P})$ -Sinn. $\square$

Bemerkung:

a) Man kann zeigen, dass der Limes in (3.3) auch f.s. existiert.

b) $L(t, x)$ kann man als Dichte der Verweildauer der Brownschen Bewegung in $[0, t]$ interpretiert werden, denn es gilt die „occupation-time-density formula“:

$$\int_a^b L(t, x) dx = \int_0^t \mathbb{I}_{(a, b)}(W_s) ds$$

Satz 3.2. (Tanaka-Formel): Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt f.s.:

$$|W_t - x| - |W_0 - x| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - x) dW_s + L(t, x) \quad (3.8)$$

mit

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ -1 & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

Beweis: Wir betrachten den Prozess $-W_t$, der ebenfalls eine Brownsche Bewegung darstellt und daher bei $-x$ eine Lokalzeit besitzt, die wir mit $L^-(t, -x)$ bezeichnen. Es lässt sich leicht mit Hilfe der Definition der Lokalzeit der Zusammenhang $L(t, x) = L^-(t, -x)$ f.s. zeigen:

$$\begin{aligned} L^-(t, -x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{(-x-\epsilon, -x+\epsilon)}(-W_s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbb{I}_{(x-\epsilon, x+\epsilon)}(W_s) ds \\ &= L(t, x) \end{aligned}$$

Wenden wir nun Satz 3.1 auf die Brownsche Bewegung $-W_t$ und $-x$ an, dann gilt

$$(-W_t + x)^+ - (-W_0 + x)^+ = \int_0^t \mathbb{I}_{[-x, \infty)}(-W_s) d(-W_s) + \frac{1}{2} L^-(t, -x)$$

und aus der Tatsache, dass $(-W_t + x)^+ = (W_t - x)^-$ gilt weiters

$$(W_t - x)^- - (W_0 - x)^- = - \int_0^t \mathbb{I}_{[-\infty, x)}(W_s) dW_s + \frac{1}{2} L(t, x).$$

Addieren wir nun diese Gleichung mit der Gleichung (3.4) und berücksichtigen wir, dass $(W_t - x)^+ + (W_t - x)^- = |W_t - x|$ gilt, dann folgt:

$$\begin{aligned}
 |W_t - x| - |W_0 - x| &= \int_0^t [\mathbb{I}_{[x, \infty)}(W_s) - \mathbb{I}_{(-\infty, x)}(W_s)] dW_s + L(t, x). \\
 &= \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - x) dW_s + L(t, x).
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Definition der sgn - Funktion bei 0 in diesem Fall nicht relevant ist, da $\int_0^t \mathbb{I}_{\{x\}}(W_s) dW_s = 0$ f.s. gilt. Dies kann man mit der Ito-Isometrie und der Eigenschaft $\mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{I}_{\{x\}}(W_s)^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{I}_{\{x\}}(W_s) ds \right] = 0$ begründen. Wobei dieser Erwartungswert gleich Null ist, da die Menge $\{s | W_s = x\}$ Lebesgue-Maß Null besitzt. $\square$

Definition 3.2. Für alle t und x sei

$$\widehat{W}(t, x) = |W_0 - x| + \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s - x) dW_s. \quad (3.9)$$

Der Vollständigkeit halber werden wir nun noch einen Satz angeben, der besagt, dass die Tanaka-Formel nicht nur für festes t sondern sogar pfadweise gilt.

Satz 3.3. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt f.s.:

$$|W(\cdot) - x| = \widehat{W}(\cdot, x) + L(\cdot, x) \quad (3.10)$$

, wobei $\widehat{W}(t, x)$ eine Brownsche Bewegung darstellt und $L(t, x)$ ein stetiger, wachsender Prozess ist, der nur wächst falls $W_t = x$, d.h.

$$\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{t | W_t \neq x\}} dL(t, x) = 0 \text{ f.s..}$$

KAPITEL 3. LOKALZEIT DER BROWNSCHEN BEWEGUNG

Bemerkung: Der Satz besagt also, dass die Tanaka Formel sogar pfadweise und nicht nur für festes t gilt.

Beweis: Der interessierte Leser sei auf Seite 151 in [6] verwiesen.

Bemerkung: Die pfadweise Tanaka-Formel kann als Spezialfall einer Skorohod- Zerlegung gesehen werden. Ein Skorohod-Problem beschreibt das Problem der Darstellung einer stetigen Funktion (in unserem Fall $\widehat{W}_t$) in die Differenz einer nichtnegativen Funktion ($|W_t - x|$) und einer wachsenden Funktion (L_t).

Man kann zeigen, dass das Skorohod-Problem eine eindeutige Lösung hat und dass der nichtfallende Term darstellbar ist als

$$L_t = \sup_{s \in [0, t]} \widehat{W}_s^-. \quad (3.11)$$

Kapitel 4

Optimierung der Dividendenzahlungen im Diffusionsmodell

Diesem Kapitel liegt das Paper „Dividend maximisation under consideration of the time value of ruin“ von Stefan Thonhauser und Hansjörg Albrecher¹ zugrunde. Zusätzlich wurde das Paper „Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out“ von Sören Asmussen und Michael Taksar² verwendet.

4.1 Einleitung

Wir werden in diesem Kapitel versuchen eine optimale Strategie zu finden, die die erwarteten diskontierten Dividendenauszahlungen bis zum Eintritt des Ruins in einem Diffusionsmodell maximiert. Ein oft auftretender Nachteil bei Dividendenoptimierungen ist, dass die Überlebenszeit des Zustandsprozess nicht berücksichtigt wird. Wir werden in diesem Kapitel eine Wertfunktion betrachten, die sowohl die erwarteten diskontierten Dividendenzahlungen beinhaltet, aber auch den Ruinzeitpunkt berücksichtigt. Dazu werden wir einen Term hinzufügen, der frühen Ruin bestrafen soll. Dieser kann als diskontierte, stetige Zahlung mit konstanter Intensität während der Lebenszeit des Zustandsprozess interpretiert werden.

Wir werden zuerst den Fall von beschränkter und danach den Fall von unbeschränkter Di-

¹siehe [8]

²siehe [7]

videndenintensität betrachten. Wir werden sehen, dass es sich bei beschränkter Intensität um eine “Threshold-Strategie“ als optimale Strategie handelt d.h. es wird die maximale Dividendenintensität ausbezahlt, wenn der Zustandsprozess einen bestimmten Wert übersteigt und es wird nichts ausbezahlt, wenn der Zustandsprozess unter diesem Level bleibt. Im Fall von unbeschränkter Dividendenintensität ist die optimale Strategie eine Barrierestrategie d.h. es wird genau der Wert ausbezahlt, um den der Reserveprozess eine bestimmte Barriere übersteigt.

4.2 Das Modell

Wir werden im Folgenden einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, die den Informationsfluss modellieren soll, betrachten. Der Risikoprozess $R = (R_t)_{t \geq 0}$ sei als Diffusionsprozess gegeben:

$$dR_t = \mu dt + \sigma dW_t \text{ mit } R_0 = x \quad (4.1)$$

mit $W = (W_t)_{t \geq 0}$ einer Standard Brownsche Bewegung bezüglich der gegebenen Filtration, dem Driftterm $\mu > 0$, Varianz σ^2 und Anfangskapital x .

Wir nehmen in unserem Modell an, dass der Versicherer Dividenden zahlen darf, wobei die akkumulierten Dividendenzahlungen durch den Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ modelliert werden. Man nennt den Prozess L zulässig, falls er folgende Kriterien erfüllt:

- a) $L_t \geq 0$
- b) L_t ist steigender càdlàg Prozess
- c) adaptiert zur gegebenen Filtration

L_t repräsentiert die gesamten ausbezahlten Dividenden bis zum Zeitpunkt t .

Der Prozess $(l_s)_{s \geq 0}$ modelliert (im Fall von endlicher Dividendenintensität) die Dividendenintensität, also lässt sich L_t wie folgt darstellen:

$$L_t = \int_0^t l_s ds \quad (4.2)$$

Der um die Dividendenzahlungen korrigierte Zustandsprozess ist gegeben durch:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

$$R_t^L = R_t - L_t \quad (4.3)$$

Der Ruinzeitpunkt τ dieses Risikoprozesses ist definiert durch $\tau := \tau^L = \inf\{t \geq 0 \mid R_t^L < 0\}$.

Desweiteren nehmen wir an, dass Dividendenzahlungen keinen Ruin verursachen können d.h. $L_t - L_{t-} \leq R_t^L$ und insbesondere $L_{0-} = 0$. Nach dem Ruinzeitpunkt können keine Dividenden mehr ausbezahlt werden i.e. $(L_t)_{t \geq 0}$ für alle $t \geq \tau$.

Unser Ziel ist es nun eine Dividendenzahlungsstrategie $L = (L_t)_{t \geq 0}$ zu finden, die unser Zielfunktional

$$V(x, L) = \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) dL_t + \int_0^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \mid R_0^L = x \right) \quad (4.4)$$

maximiert für ein $\Lambda > 0$, d.h. wir suchen eine Wertfunktion

$$V(x) = \sup_L V(x, L) \quad (4.5)$$

Wobei das Supremum über alle zulässigen Strategien gemeint ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass verglichen zum klassischen Zielfunktional, zu dem Term, der die erwarteten diskontierten Dividendenzahlungen darstellen soll, ein zusätzlicher Term hinzugefügt wurde. Der Term $\exp(-\beta t)\Lambda$ kann als Vermögen interpretiert werden, das der Versicherer bis zum Eintritt des Ruins verdient. Auf diese Art wird die Überlebenszeit des Portfolios Teil des Zielfunktional und in weiterer Folge der Wertfunktion.

Eine andere Interpretation des Terms wäre, dass die Laplace-Transformierte der Ruinzeit Teil des Zielfunktional ist.

Wir werden im Folgenden das Optimierungsproblem, wie bereits erwähnt, für den Fall mit beschränkter und den Fall mit unbeschränkter Dividendenintensität betrachten.

4.3 Beschränkte Dividendenintensität

In diesem Abschnitt betrachten wir eine beschränkte Dividendenintensität l_t mit $0 \leq l_t \leq M$ für $t \geq 0$. Folglich ist unsere Wertfunktion (4.5) gegeben durch

$$V(x) = \sup_{0 \leq l_t \leq M} \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) (l_t + \Lambda) dt \mid R_0^L = x \right) \quad (4.6)$$

$$V(0) = 0$$

Es ist leicht zu sehen, dass gilt: $V(x) \leq \frac{M + \Lambda}{\beta}$

$$\begin{aligned} V(x) &= \sup_{0 \leq l_t \leq M} \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) (l_t + \Lambda) dt \mid R_0^L = x \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) (M + \Lambda) dt \mid R_0^L = x \right) \\ &= (M + \Lambda) \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) dt \right) \leq \frac{M + \Lambda}{\beta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Also ist $V(x)$ durch $\frac{M + \Lambda}{\beta}$ nach oben beschränkt.

Wir werden uns nun die HJB-Gleichung für unser Problem herleiten, die (zur Wiederholung) wie folgt aussieht:

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \varphi(x, u) + L^u V(x) - \beta V(x) \}$$

Betrachten wir (4.3), so folgern wir aus $dR_t^L = dR_t - dL_t = (\mu - l_t) dt + \sigma dW_t$, dass sich der Differential-Operator schreiben lässt als:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$\mathcal{L}^u V = (\mu - l)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) \quad (4.8)$$

Aus Gleichung (4.6) erkennen wir, dass die laufenden Kosten $\varphi(t) = l_t + \Lambda$. Wir können nun also die HJB-Gleichung angeben:

$$0 = \sup_{0 \leq l \leq M} \left\{ l + \Lambda - \beta V(x) + (\mu - l)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) \right\}$$

oder äquivalent dazu:

Die HJB-Gleichung:

$$0 = -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \Lambda + \sup_{0 \leq l \leq M} \{(1 - V'(x))l\} \quad (4.9)$$

Um die HJB-Gleichung lösen zu können, werden im Folgenden vorerst annehmen, dass V eine strikt konkave Funktion mit $V' > 0$ und $V''(x) < 0$ ist. Wir werden sehen, dass uns diese Annahme in der Tat zur gesuchten Wertfunktion führt.

V erfüllt also $V' > 0$ und $V''(x) < 0$. Daher existiert sicher ein Punkt x_0 mit folgenden Eigenschaften:

$$V'(x) > 1 \text{ für } x < x_0$$

$$V'(x) \leq 1 \text{ für } x \geq x_0$$

Betrachtet man die HJB-Gleichung (4.9) als Funktion von l , dann erkennt man ihre Linearität. Daraus folgt, dass das Maximum für jedem Punkt x entweder bei 0 oder bei M erreicht wird.

$$l^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0, \\ M & \text{für } x \geq x_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

Durch diese Erkenntnisse lässt sich die HJB-Gleichung nun wie folgt schreiben:

$$0 = -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \Lambda \quad \text{für } x < x_0 \quad (4.11)$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

$$0 = -\beta V(x) + (\mu - M) V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) + \Lambda + M \quad \text{für } x \geq x_0 \quad (4.12)$$

$$V(0) = 0$$

Wir werden nun versuchen den Teilungspunkt x_0 mit Hilfe der „Smooth Fit“- Methode zu ermitteln. Wir werden also die Lösung der „linken Seite“ von x_0 und die Lösung der „rechten“ Seite von x_0 glatt am Punkt x_0 zusammenfügen. Dazu führen wir folgende Notation ein:

V_l ist die Lösung der Gleichung (4.11) (linker Teil von V)

V_r ist die Lösung der Gleichung (4.12) (rechter Teil von V)

Da diese Gleichungen jeweils Ableitungen zweiten Grades enthalten, benötigen wir eine zweimal differenzierbare Lösung. Dies führt zu den folgenden „Smooth Fit Bedingungen“ :

- a) $V_l(x_0) = V_r(x_0)$
- b) $V_l'(x_0) = V_r'(x_0)$
- c) $V_l''(x_0) = V_r''(x_0)$

Betrachten wir nun die Gleichung (4.11), so werden wir für diese inhomogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten eine Lösung suchen. Die Gleichung (4.11) ist äquivalent zur folgenden Gleichung:

$$V''(x) + \frac{2\mu}{\sigma^2} V'(x) - \frac{2\beta}{\sigma^2} V(x) = -\frac{2\Lambda}{\sigma^2} \quad \text{für } x < x_0 \quad (4.13)$$

EXKURS: Lösungsansatz für eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten, i.e.: $y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

HOMOGENE LÖSUNG :

Für eine Gleichung der Form $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ mit $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 > 0$ ist die homogene Lösung gegeben durch:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

$$y_h = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) \quad (4.14)$$

$$\text{mit } \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

PARTIELLE LÖSUNG :

Da die Störfunktion von der Form $g(x) = b$ ist und $a_0 \neq 0$ gilt, hat die Ansatzfunktion der partikulären Lösung die Form : $c(x) = c_0$.

Wir wenden nun diesen Lösungsansatz auf unsere Gleichung (4.13) an:

$$V_h = A_1 \exp(R_1 x) + A_2 \exp(R_2 x) \quad (4.15)$$

$$\text{mit } R_{1,2} = -\frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}$$

Betrachten wir nun die Ansatzfunktion für die partikuläre Lösung, so gilt:

$$V_p = c_0 + A_1 \exp(R_1 x) + A_2 \exp(R_2 x) = c_0 + V_h \quad (4.16)$$

Setzt man diese Lösung V_p in Gleichung (4.11) ein, dann folgt:

$$0 = -\beta(c_0 + V_h(x)) + \mu V_p'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V_p''(x) + \Lambda$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\beta c_0 - \underbrace{\beta V_h(x) + \mu V_h'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V_h''(x)}_{=0} + \Lambda$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\beta c_0 + \Lambda \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = \frac{\Lambda}{\beta} \quad (4.17)$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

Bemerkung:

- a) An dieser Stelle sei auf die triviale Tatsache hingewiesen, dass $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ und $|R_2| > R_1$.
- b) Aus der Bedingung $V(0) = 0$ folgt außerdem unmittelbar, dass
- $$A_2 = -\left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right)$$

Also haben wir für die Gleichung (4.11) folgende Lösung gefunden:

$$V_l = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) \exp(R_2 x) \quad (4.18)$$

$$\text{mit } R_{1,2} = -\frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}. \quad (4.19)$$

Die Lösung der Gleichung (4.12) wird auf analoge Weise berechnet. Man erhält schließlich:

$$V_r = \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_1 \exp(S_1 x) + B_2 \exp(S_2 x) \quad (4.20)$$

$$\text{mit } S_{1,2} = -\frac{(\mu - M)}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu - M}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}. \quad (4.21)$$

Da dies die Lösung von V_r für $x \geq x_0$ darstellt, folgt aus der Beschränktheit der Wertfunktion (siehe (4.7)), dass für den Exponenten $S_1 > 0$, der dazugehörige Koeffizient B_1 gleich 0 sein muss. Das heißt V_r ist von der Gestalt:

$$V_r = \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_2 \exp(S_2 x) \quad (4.22)$$

Setzen wir nun die neu gewonnenen Formeln für V_l und V_r in die drei „smooth fit Bedingungen“ zusammen, dann bekommen wir nun die Bedingungen:

$$(i) \quad \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) \exp(R_2 x_0) = \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_2 \exp(S_2 x_0) \quad (4.23)$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$(ii) \quad A_1 R_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) R_2 \exp(R_2 x_0) = B_2 S_2 \exp(S_2 x_0) = 1 \quad (4.24)$$

$$(iii) \quad A_1 R_1^2 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) R_2^2 \exp(R_2 x_0) = B_2 S_2^2 \exp(S_2 x_0) \quad (4.25)$$

Nun werden wir den Teilungspunkt x_0 und die fehlenden Koeffizienten A_1 und B_2 bestimmen. Zuerst widmen wir uns der Bestimmung von x_0 und B_2 .

Satz 4.1. *Der Teilungspunkt x_0 erfüllt folgende Gleichung:*

$$x_0 = \frac{1}{R_1 - R_2} \ln \left(\frac{A_1(x_0) + \frac{\Lambda}{\beta}}{A_1(x_0)} \frac{1 - R_2 \delta(M)}{1 - R_1 \delta(M)} \right) \quad (4.26)$$

Der Koeffizient $B_2(x_0)$ erfüllt:

$$B_2(x_0) = \frac{1}{S_2} \left(\frac{A_1(x_0) + \frac{\Lambda}{\beta}}{A_1(x_0)} \frac{1 - R_2 \delta(M)}{1 - R_1 \delta(M)} \right) \frac{-S_2}{R_1 - R_2} \quad (4.27)$$

wobei $\delta(M) := \frac{M}{\beta} + \frac{1}{S_2}$ erfüllt.

Beweis: Um Gleichung (4.26) zu zeigen, setzen wir die rechte Gleichung von (4.24) in (4.23) ein. Wir definieren $\delta(M) := \frac{M}{\beta} + \frac{1}{S_2}$ und erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) \exp(R_2 x_0) &= \frac{\Lambda}{\beta} + \delta(M) \\ \Rightarrow A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) \exp(R_2 x_0) &= \delta(M) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Wir werden uns nun durch Einsetzen dieser Gleichung in (4.24) Formeln für $\exp(R_1 x_0)$ und $\exp(R_2 x_0)$ bestimmen.

Formel für $\exp(R_2 x_0)$:

$$\begin{aligned}
 R_1 \left(\delta(M) + \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) \exp(R_2 x_0) \right) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) R_2 \exp(R_2 x_0) &= 1 \\
 \Leftrightarrow R_1 \delta(M) + \exp(R_2 x_0) \left((R_1 - R_2) \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) \right) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \exp(R_2 x_0) = \frac{1 - R_1 \delta(M)}{\left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) (R_1 - R_2)} & \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Nun die Formel für $\exp(R_1 x_0)$:

$$\begin{aligned}
 R_1 A_1 \exp(R_1 x_0) + R_2 \left(\delta(M) - A_1 \exp(R_1 x_0) \right) &= 1 \\
 \Leftrightarrow A_1 \exp(R_1 x_0) (R_1 - R_2) = 1 - \delta(M) R_2 \\
 \Leftrightarrow \exp(R_1 x_0) = \frac{1 - \delta(M) R_2}{(R_1 - R_2) A_1} & \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der beiden Gleichungen (4.29) und (4.30) können wir nun den Teilungspunkt x_0 bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \exp \left((R_1 - R_2) x_0 \right) &= \frac{\exp(R_1 x_0)}{\exp(R_2 x_0)} = \frac{\frac{\Lambda}{\beta} + A_1}{A_1} \frac{1 - R_2 \delta(M)}{1 - R_1 \delta(M)} \\
 \Leftrightarrow x_0 &= \frac{1}{R_1 - R_2} \ln \left(\frac{A_1(x_0) + \frac{\Lambda}{\beta}}{A_1(x_0)} \frac{1 - R_2 \delta(M)}{1 - R_1 \delta(M)} \right) \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Um die Gleichung (4.27) zu zeigen, betrachte man zuerst die rechte Gleichheit in (4.24). Es gilt nämlich

$$B_2(x_0) = \frac{1}{S_2} \exp(-S_2 x_0)$$

Setzt man nun die Dartstellung (4.26) für x_0 in diese Gleichung ein, so folgt die zweite Aussage des Satzes unmittelbar.

Bemerkung: Wir verwenden die Notation $A_1(x_0)$ und $B_2(x_0)$, um die Abhängigkeit der Koeffizienten vom Teilungspunkt auszudrücken.

Wir werden nun einen Satz anführen, der uns später hilfreich sein wird.

Satz 4.2. *Für alle $M > 0$ gilt:*

$$\frac{1}{R_2} < \delta(M) < \frac{1}{R_1} \tag{4.32}$$

Beweis: Zuerst beweisen wir die rechte Ungleichung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} - \delta(M) &= \frac{1}{-\frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2\beta}{\sigma^2}}} - \frac{M}{\beta} - \frac{1}{-\frac{(\mu-M)}{\sigma^2} \sqrt{\frac{(\mu-M)^2}{\sigma^4} + \frac{2\beta}{\sigma^2}}} \\ &= \frac{\sigma^2}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} - \frac{\sigma^2}{-(\mu-M) - \sqrt{(\mu-M)^2 + 2\beta\sigma^2}} - \frac{M}{\beta} \\ &= \frac{\sigma^2 \left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} \right)}{-\mu^2 + (\mu^2 + 2\beta\sigma^2)} - \frac{\sigma^2 \left(-(\mu-M) + \sqrt{(\mu-M)^2 + 2\beta\sigma^2} \right)}{(\mu-M)^2 - (\mu-M)^2 - 2\beta\sigma^2} - \frac{M}{\beta} \\ &= \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{(\mu-M)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2\beta} - \frac{M}{\beta} + \frac{M}{2\beta} \\ &= \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{(\mu-M)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2\beta} - \frac{M}{2\beta} \end{aligned} \tag{4.33}$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

Die dritte Gleichheit folgt durch geschicktes Erweitern der Brüche. Um die rechte Ungleichung in (4.32) zu zeigen, müssen wir also nur noch zeigen, dass der letzte Term größer Null ist. Da der Nenner laut Definition von β sicher größer Null ist, muss für den Zähler gelten:

$$\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} > M - \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} \quad (4.34)$$

Definieren wir uns nun die Funktion $G(M) := M - \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2}$, dann können wir nun zeigen, dass $G(M)$ eine monoton wachsende Funktion ist und der Grenzwert für $M \rightarrow \infty$ tatsächlich unter der geforderten Schranke (siehe (4.34)) liegt.

$$G'(M) = 1 + \frac{\mu - M}{\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2}} > 0 \quad (4.35)$$

Weiters gilt für den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} G(M) &= \lim_{M \rightarrow \infty} M - \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(M + \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2})(M - \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2})}{(M + \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2})} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-\mu^2 + 2M\mu - 2\beta\sigma^2}{M + \sqrt{M^2 + \mu^2 - 2M\mu + 2\beta\sigma^2}} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2\mu - \frac{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}{M}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\mu}{M} + \frac{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}{M^2}}} \\ &= \frac{2\mu}{2} = \mu \end{aligned}$$

Wir haben also gesehen, dass $G(M)$ eine monoton steigende Funktion mit $\lim_{M \rightarrow \infty} G(M) = \mu < \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}$. Damit ist die rechte Ungleichung von (4.32) gezeigt.

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

Im Folgenden werden wir nun die linke Ungleichung des Satzes beweisen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
 \delta - \frac{1}{R_2} &= \frac{M}{\beta} + \frac{1}{-\frac{(\mu - M)}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{(\mu - M)^2}{\sigma^4} + \frac{2\beta}{\sigma^2}}} - \frac{1}{-\frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2\beta}{\sigma^2}}} \\
 &= \frac{M}{\beta} + \frac{\sigma^2}{-(\mu - M) - \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2}} - \frac{\sigma^2}{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \\
 &= \frac{M}{\beta} + \frac{\sigma^2 \left(-(\mu - M) + \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} \right)}{(\mu - M)^2 - (\mu - M)^2 - 2\beta\sigma^2} - \frac{\sigma^2(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2})}{-\mu^2 - \mu^2 - 2\beta\sigma^2} \\
 &= \frac{M}{\beta} - \frac{1}{2\beta} \left(-(\mu - M) + \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} + \mu - \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} \right) \\
 &= \frac{M}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \left(\underbrace{\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2}}_{\sqrt{G}:=} - \underbrace{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}}_{\sqrt{H}:=} \right) \\
 &= \frac{M}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{(\sqrt{G} - \sqrt{H})(\sqrt{G} + \sqrt{H})}{(\sqrt{G} + \sqrt{H})} \right) \\
 &= \frac{M}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{G - H}{(\sqrt{G} + \sqrt{H})} \right) \\
 &= \frac{M}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{M(M - 2\mu)}{\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \right) \\
 &= \frac{M}{2\beta} \left(1 - \frac{M - 2\mu}{\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit folgt durch geschickte Erweiterung der Brüche. Wir müssen jetzt also nur noch zeigen, dass dieser Ausdruck größer 0 ist. Diese Forderung ist äquivalent zu

$$1 - \frac{M - 2\mu}{\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} + \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} > M - 2\mu$$

Diese letzte Ungleichung stimmt aufgrund der Tatsachen, dass $\sqrt{(\mu - M)^2 + 2\beta\sigma^2} > M - \mu$ und $\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} > \mu > 0$ sind. $\square$

Wir wollen jetzt den Koeffizienten A_1 als Lösung einer nicht-linearen Gleichung herleiten. Dafür formulieren wir Gleichung (4.24) etwas um:

$$A_1(R_1 \exp(R_1 x_0) - R_2 \exp(R_2 x_0)) = 1 + \frac{\Lambda}{\beta} R_2 \exp(R_2 x_0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1 + \frac{\Lambda}{\beta} R_2 \exp(R_2 x_0)}{R_1 \exp(R_1 x_0) - R_2 \exp(R_2 x_0)} - A_1$$

Wir setzen nun (4.26) in obige Gleichung ein und erhalten $A(x_0)$ mit

$$F(H) = \frac{1 + \frac{\Lambda}{\beta} R_2 \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1} \right) \frac{R_2}{R_1 - R_2}}{R_1 \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1} \right) \frac{R_1}{R_1 - R_2} - R_2 \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1} \right) \frac{R_2}{R_1 - R_2}} - H \quad (4.36)$$

als Lösung der Gleichung $F(H) = 0$.

Satz 4.3. Für $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} \leq 0$ gilt

$$V^*(x) = \frac{M + \Lambda}{\beta} (1 - \exp(S_2 x)) \quad (4.37)$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

und V^* ist eine zweimal stetig differenzierbare, strikt konkave Lösung der HJB-Gleichung (4.9).

Für $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} > 0$ gilt: $x_0 > 0$ und

$$V^*(x) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}\right) \exp(R_2 x) & \text{für } x < x_0, \\ \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_2 \exp(S_2 x) & \text{für } x \geq x_0, \end{cases} \quad (4.38)$$

und V^* ist eine zweimal stetig differenzierbare, strikt konkave Lösung der HJB-Gleichung (4.9). Die Koeffizienten x_0 und B_2 sind gegeben durch (4.26) und (4.27). A_1 ist eine positive Lösung von $F(H)$ (definiert in (4.36)).

Beweis: Zuerst betrachten wir den Fall $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} > 0$. Wir werden vorab untersuchen welche Eigenschaften der Koeffizient A_1 besitzt. Aus Satz 4.2 wissen wir bereits, dass $1 - \delta R_2 > 0$ und $1 - \delta R_1 > 0$. Außerdem müssen wir sicherstellen, dass $\frac{A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}}{A_1} > 0$ ist, denn sonst wäre x_0 (siehe 4.26) nicht definiert. Also erfüllt A_1 entweder $A_1 > 0$ oder $A_1 < -\frac{\Lambda}{\beta}$. Der zweite Fall kann nicht eintreten, da dies zu einer fallenden Funktion V^* für $x < x_0$ führen würde. Das heißt A_1 erfüllt $A_1 > 0$. Wir suchen also eine positive Lösung von $F(H)$. Betrachten wir dazu (4.36) etwas umgeformt

$$F(H) = \frac{\frac{\Lambda}{\beta} R_2 + \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1}\right) \frac{-R_2}{R_1 - R_2}}{R_1 \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1}\right) - R_2} - H \quad (4.39)$$

, dann können wir aus $0 < \frac{-R_2}{R_1 - R_2} < 1$ schließen, dass $\lim_{H \rightarrow 0} F(H) = 0$ und $\lim_{H \rightarrow \infty} F(H) = -\infty$. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob es ein $H > 0$ gibt mit $F(H) = 0$.

Tatsächlich gilt für ein ausreichend kleines $H > 0$:

$$\frac{\Lambda}{\beta} R_2 + \left(\frac{H + \frac{\Lambda}{\beta}}{H} \frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1}\right) \frac{-R_2}{R_1 - R_2} > -R_2 H + R_1 \left(H + \frac{\Lambda}{\beta}\right) \left(\frac{1 - \delta R_2}{1 - \delta R_1}\right) > 0$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Dies impliziert unmittelbar, dass $F(H) > 0$ für ein hinreichend kleines H gilt. Es folgt nun mit der Stetigkeit von $F(H)$, dass es eine strikt positive Lösung gibt, welche den gewünschten Koeffizient A_1 darstellt.

Nun werden wir ein Kriterium suchen, sodass für den Teilungspunkt x_0 gilt $x_0 > 0$. Betrachtet man (4.26), so muss jedenfalls gelten:

$$\frac{A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}}{A_1} \frac{1 - R_2\delta}{1 - R_1\delta} > 1$$

oder äquivalent dazu

$$A_1\delta(R_1 - R_2) + \frac{\Lambda}{\beta}(1 - \delta R_2) > 0 \quad (4.40)$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

$\delta \geq 0$: Die Ungleichung stimmt, da $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ und $(1 - \delta R_2) > 0$ gilt. (laut Satz 4.2)

$\delta < 0$: Die Ungleichung (4.40) lässt sich auch schreiben als $A_1 < -\frac{\Lambda}{\beta} \frac{1 - \delta R_2}{\delta(R_1 - R_2)}$. Der Koeffizient A_1 erfüllt diese Forderung sicher, wenn

$$F\left(-\frac{\Lambda}{\beta} \frac{1 - \delta R_2}{\delta(R_1 - R_2)}\right) = \frac{\beta + (M + \Lambda)S_2}{2(\beta + MS_2)\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2\beta}{\sigma^2}}} < 0 \quad (4.41)$$

erfüllt. Da dann aufgrund der oben diskutierten Eigenschaften (siehe Grenzwerte) von $F(H)$ für die positive Lösung A_1 sicher die Forderung erfüllt ist.

Die Ungleichung in (4.41) ist äquivalent zu:

$$\frac{\beta + (M + \Lambda)S_2}{\beta + MS_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta + MS_2}{\beta + MS_2} + \frac{\Lambda S_2}{\beta + MS_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda S_2}{\beta + MS_2} < -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta + MS_2 \quad < \quad -\Lambda S_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta + MS_2 + \Lambda S_2 \quad < \quad 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} \quad > \quad 0 \tag{4.42}$$

Das heißt die geforderte Bedingung $A_1 < -\frac{\Lambda}{\beta} \frac{1 - \delta R_2}{\delta(R_1 - R_2)}$ ist garantiert durch die Bedingung (4.42).

Zusammenfassend will ich festhalten, dass $x_0 > 0$ unter folgenden Kriterien sicher erfüllt ist:

- (i) $\delta \geq 0$: Erfüllt immer $x_0 > 0$.
- (ii) $\delta < 0$: Die Bedingung (4.42) garantiert, dass gilt $x_0 > 0$.

$V^*(x)$ ist klarerweise zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ (also insbesondere in x_0). Da für V_l und V_r aufgrund ihrer Konstruktion gilt, dass $V_l(x_0) = V_r(x_0)$ und $V'_l(x_0) = V'_r(x_0) = 1$ ist, erkennt man durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (4.11) und (4.12), dass $V''_l(x_0) = V''_r(x_0)$, denn es gilt:

$$0 = -\beta V_l(x_0) + \underbrace{\mu V'_l(x_0)}_{=1} + \frac{1}{2} \sigma^2 V''_l(x_0) + \Lambda \quad (\text{siehe 4.11})$$

$$= -\beta V_l(x_0) + \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 V''_l(x_0) + \Lambda$$

und

$$0 = -\beta V_r(x) + (\mu - M) \underbrace{V'_r(x)}_{=1} + \frac{1}{2} \sigma^2 V''_r(x) + \Lambda + M \quad (\text{siehe 4.12})$$

$$= -\beta V_r(x_0) + \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 V''_r(x_0) + \Lambda.$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Also folgt unmittelbar $V_l''(x_0) = V_r''(x_0)$.

Als nächstes werden wir zeigen, dass $V^*(x)$ eine streng konkave Funktion ist.

Für $x < x_0$:

$$V^{*'} = A_1 R_1 \exp(R_1 x) - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) R_2 \exp(R_2 x) > 0$$

$$V^{*''} = A_1 R_1^2 \exp(R_1 x) - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) R_2^2 \exp(R_2 x)$$

$$V^{*'''} = A_1 R_1^3 \exp(R_1 x) - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) R_2^3 \exp(R_2 x) > 0$$

Die Ungleichungen gelten aufgrund der bereits erwähnten Eigenschaften der Koeffizienten $A_1 > 0$, $A_1 + \frac{\Lambda}{\beta} > 0$, $R_1 > 0$ und $R_2 < 0$.

Das bedeutet $V^{*''}$ ist streng monoton wachsend. Desweiteren gilt:

$$V^{*''}(0) = A_1 R_1^2 - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) R_2^2 < 0 \quad \text{und} \quad V^{*''}(x_0) = S_2 < 0.$$

Zusammengefasst ist $V^{*''}$ also eine streng monoton wachsende, negative Funktion auf $[0, x_0]$ und daher $V^{*'}$ streng monoton fallend.

Da $V^{*'} > 0$ und streng monoton fallend auf $[0, x_0]$ ist, folgt, dass $V^{*'}(x_0) = 0$ eine untere Schranke für $V^{*'}(x_0)$ auf $[0, x_0]$ ist.

Wir haben also die Konkavität für den Fall $x < x_0$ die Konkavität gezeigt.

Für $x \geq x_0$:

In diesem Fall lässt sich die Konkavität direkt verifizieren. Man betrachtet:

$$V^{*'}(x) = B_2 S_2 \exp(S_2 x) > 0$$

$$V^{*''}(x) = B_2 S_2^2 \exp(S_2 x) < 0$$

Außerdem ist $V^{*'}(x_0) = 1$ eine obere Schranke auf $[x_0, \infty)$.

Schlussendlich werden wir nun den Fall $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} < 0$ betrachten.

Zuerst werden wir uns den Koeffizienten B_2 berechnen indem wir in (4.23) für $x_0 = 0$ einsetzen (Aufgrund des obigen Teiles des Beweises folgt eben genau, dass für den Fall $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} < 0$ unmittelbar $x_0 = 0$ folgt.):

$$\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) = \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_2 \exp(S_2 x_0)$$

$$\stackrel{x_0 \rightarrow 0}{\Rightarrow} \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 - (A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}) = \frac{M + \Lambda}{\beta} + B_2$$

$$\Leftrightarrow B_2 = -\frac{M + \Lambda}{\beta}$$

Also folgt für $V^*(x) = \frac{M + \Lambda}{\beta}(1 - \exp(S_2 x))$

Wir können nun direkt die Konkavität der Funktion V^* nachweisen:

$$V^{*'}(x) = -\frac{M + \Lambda}{\beta} S_2 \exp(S_2 x) \stackrel{S_2 < 0}{\leq} -\frac{M + \Lambda}{\beta} S_2 < 1$$

Die zweite Abschätzung folgt unmittelbar aus der Voraussetzung des betrachteten Falles $\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} < 0$, denn:

$$\frac{M + \Lambda}{\beta} + \frac{1}{S_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{M + \Lambda}{\beta} < -\frac{1}{S_2} \Leftrightarrow -\frac{M + \Lambda}{\beta} S_2 < 1.$$

Außerdem ist $V^{*'}$ natürlich strikt positiv für $x \geq 0$.

Für die zweite Ableitung $V^{*''}(x)$ gilt:

$$V^{*''}(x) = -\frac{M + \Lambda}{\beta} S_2^2 \exp(S_2 x) < 0$$

Also haben wir gezeigt, dass die Funktion V^* auch in diesem Fall tatsächlich eine konkave Funktion ist. □

Bemerkung: Abschließend möchte ich noch anmerken, dass die Höhe der Barriere x_0 steigt, wenn Λ steigt (siehe 4.26). Dies spiegelt das reduzierte Risiko wider, das man unter Berücksichtigung der Lebenszeit des Portfolios bernimmt.

Um schlussendlich zeigen zu können, dass die Funktion V^* , wie sie in Satz (4.3) definiert ist, wirklich optimal ist, werden wir im Folgenden ein Verifikationstheorem beweisen.

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Satz 4.4. *Sei L eine beliebige zulässige Dividendenauszahlungsstrategie, dann erfüllt die Funktion V^* (wie in Satz 4.3 definiert):*

$$V^*(x) \geq V(x, L) \quad \text{und} \quad V^*(x) = V(x, L^*)$$

Die Strategie L^* ist gegeben durch:

$$L_t^* = \int_0^t l_s^* ds$$

$$\text{mit } l^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0, \\ M & \text{für } x \geq x_0, \end{cases}$$

Beweis: Sei L eine beliebige Strategie mit beschränkter Intensität $0 \leq (l_t)_{t \geq 0} \leq M$. Wir werden zuerst beweisen, dass $V^*(x) \geq V(x, L)$. Ich möchte an dieser Stelle die Gestalt des Zielfunktionalen nochmals anführen:

$$V(x, L) = \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) dL_t + \int_0^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \middle| R_0^L = x \right)$$

Wenden wir die Ito- Formel auf $(V^*(R_t^L) \exp(-\beta t))$ an, dann gilt:

$$\begin{aligned} V^*(R_{(T \wedge \tau)}^L) \exp(-\beta(T \wedge \tau)) - V^*(x) = \\ \int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 V^{*''}(R_s^L) + (\mu - l_s) V^{*'}(R_s^L) - \beta V^*(R_s^L) \right) \exp(-\beta s) ds + \int_0^{T \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^L) \sigma dW_s \end{aligned} \quad (4.43)$$

Wir haben bereits im Beweis von Satz 4.3 gesehen, dass $V^{*'}$ eine monoton fallende Funktion ist, die durch $V^{*'}(0)$ beschränkt ist. Also ist das stochastische Integral in (4.43) quadratisch integrierbar mit Erwartungswert gleich Null.

Aus der HJB- Gleichung 4.9:

$$0 = -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) + \Lambda + \sup_{0 \leq l \leq M} \{(1 - V'(x)) l\} \quad (4.44)$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) + \Lambda + (1 - V'(x)) l \\ \Leftrightarrow -\Lambda - l_t &\geq -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) - l V'(x) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Das heißt der Integrand des ersten Integrals in (4.43) ist durch $-(\Lambda + l_t) \exp(-\beta t)$ beschränkt. Also folgt schließlich nach Anwendung des Erwartungswertes :

$$\mathbb{E} \left(\exp(-\beta(T \wedge \tau)) V^*(R_{(T \wedge \tau)}^L) \middle| R_0^L = x \right) + \mathbb{E} \left(\int_0^{T \wedge \tau} (\Lambda + l_s) \exp(-\beta s) ds \middle| R_0^L = x \right) \leq V^*(x) \quad (4.46)$$

Der zweite Erwartungswert ist beschränkt durch $\frac{M + \Lambda}{\beta}$. Dies ist aber auch eine Schranke für $V^*(x)$ (siehe 4.7). Lassen wir nun $T \rightarrow \infty$ gehen, dann folgt mit dem Satz der dominierten Konvergenz, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\tau (\Lambda + l_s) \exp(-\beta s) ds \middle| R_0^L = x \right) = V(x, L) \leq V^*(x) \quad (4.47)$$

Wir haben also den ersten Teil des Satzes bewiesen.

Betrachten wir nun L^* wie oben definiert, so folgt aus der Ito- Formel angewendet auf $\left(V^*(R_t^{L^*}) \exp(-\beta t) \right)$ wie oben:

$$V^*(R_{(T \wedge \tau)}^{L^*}) \exp(-\beta(T \wedge \tau)) - V^*(x) =$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 V^{*''}(R_s^{L^*}) + (\mu - l_s) V^{*'}(R_s^{L^*}) - \beta V^*(R_s^{L^*}) \exp(-\beta s) \right) ds \\
&+ \int_0^{T \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^{L^*}) \sigma dW_s
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Mit der selben Argumentation wie oben ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals gleich Null. Aus der HJB- Gleichung (4.9) folgt:

folgt

$$\begin{aligned}
0 &= -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) + \Lambda + (1 - V'(x)) l_t^* \\
&\Leftrightarrow -\Lambda - l_t^* = -\beta V(x) + \mu V'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) - l_t^* V'(x)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Die Gleichheit beruht auf der Konstruktion von l_t^* , denn l_t^* ist so gewählt, dass sie die HJB- Gleichung maximiert. Also gilt

$$\mathbb{E} \left(\exp(-\beta(T \wedge \tau)) V^*(R_{(T \wedge \tau)}^{L^*}) \middle| R_0^{L^*} = x \right) + \mathbb{E} \left(\int_0^{T \wedge \tau} (\Lambda + l_s^*) \exp(-\beta s) ds \middle| R_0^{L^*} = x \right) = V^*(x) \tag{4.50}$$

Wie oben ist sowohl das Integral im zweiten Erwartungswert als auch $V^*(x)$ durch $\frac{M + \Lambda}{\beta}$ beschränkt. Lassen wir nun $T \rightarrow \infty$ gehen, dann folgt mit dem Satz der dominierten Konvergenz, dass

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\tau (\Lambda + l_s^*) \exp(-\beta s) ds \middle| R_0^{L^*} = x \right) = V(x, L^*) = V^*(x) \tag{4.51}$$

□

Abschließend will ich noch die nachfolgenden Abbildungen anführen. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\mu = 0.08$, $\sigma^2 = 0.15$, $\beta = 0.05$ und $M = 1$.

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Die Abbildung 4.1 zeigt also, dass das optimale Threshold-Level x_0 mit dem Parameter Λ steigt. Dies zeigt eben das verminderte Risiko, dass durch die Berücksichtigung der Überlebenszeit des Portfolios, also durch Einbeziehung der stetigen Zahlung mit Intensität Λ entsteht.

Abbildung 4.2 zeigt die Wertfunktion als Funktion des Anfangskapitals x für verschiedene Werte von Λ .

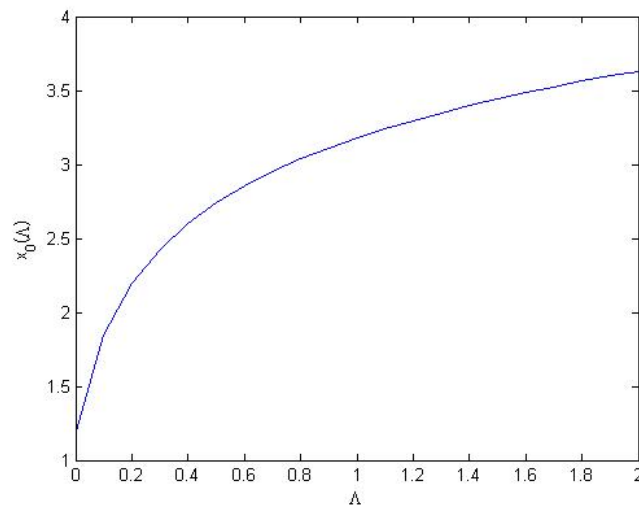


Abbildung 4.1: Threshold-Level x_0 als Funktion von Λ

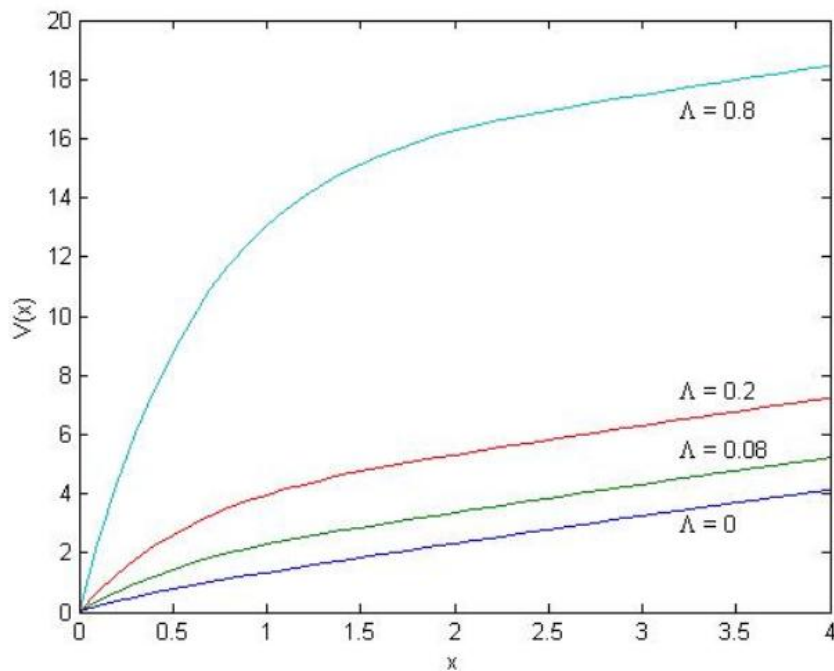


Abbildung 4.2: Wertfunktion $V(x)$

4.4 Unbeschränkte Dividendenintensität

Wir betrachten nun den Fall von unbeschränkter Dividendenintensität. In diesem Abschnitt betrachten wir nicht absolut stetige akkumulierte Dividendenzahlungen $(L(t))_{t \geq 0}$, es können also auch Sprünge (Unstetigkeitsstellen) von L auftreten. Diese Sprünge sollen Einmalzahlungen repräsentieren. Wir benötigen daher Werkzeuge der „Singulären Kontrolltheorie“.

Das Modell sieht ähnlich wie im beschränkten Fall aus: $L = (L_t)_{t \geq 0}$ beschreibt wieder die akkumulierten Dividendenzahlungen. An dieser Stelle sei eine wichtige Eigenschaft von L erwähnt. L ist nämlich ein càdlàg Prozess: d.h. die Pfade sind rechtsstetig und linksseitige Limiten existieren.

Das Zielfunktional unseres Modells ist gegeben durch

$$V(x, L) = \mathbb{E} \left(\int_0^\tau \exp(-\beta t) dL_t + \int_0^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \middle| R_0^L = x \right) \quad (4.52)$$

Die Wertfunktion $V(x)$ unseres Optimierungsproblems ist gegeben durch

$$V(x) = \sup_L V(x, L) \quad (4.53)$$

wobei das Supremum wieder über alle zulässigen Strategien gebildet wird. Unser Ziel ist nun eine Dividendenstrategie mit unbeschränkter Dividendenintensität zu finden, die unser Zielfunktional maximiert. Wir werden uns nun Variationsungleichungen herleiten, die unsere Wertfunktion erfüllt, um schließlich die HJB-Gleichung unseres Kontrollproblems zu erhalten.

Um die erste Ungleichung motivieren zu können betrachten wir eine Strategie, die fordert, dass man im Intervall $[0, \delta)$ keine Dividenden ausbezahlt und danach die optimale ϵ -optimale Strategie verwendet. Es könnte zum Zeitpunkt δ zu einer Einmalzahlung kommen, was aus einer unendlichen Dividendenintensität resultiert.

Wir definieren uns also für jedes Anfangskapital y die ϵ -optimale Strategie L^y , welche folgende Eigenschaft besitzt:

$$V(y, L^y(\cdot)) \geq V(y) - \epsilon$$

Fixieren wir nun $\delta > 0$ und sei $R(t) = x + \mu t + \sigma W(t)$ der Risikoprozess (Dividendenzahlungen nicht berücksichtigt), dann können wir die Strategie wie folgt angeben:

$$L_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \delta \\ L^{R(t)}(t - \delta) & \text{für } t \geq \delta \end{cases}$$

Die Strategie empfiehlt also keine Dividende bis zum Zeitpunkt δ auszubezahlen und danach die ϵ -optimale Strategie zum Anfangskapital $R(\delta)$ anzuwenden.

Man kann aus obiger Konstruktion also folgende Ungleichung herleiten:

$$V(x) = \sup_{L(\cdot)} V(x, L(\cdot)) \geq V(x, L_\epsilon)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta t) dL_\epsilon(t) + \int_0^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_\delta^\tau \exp(-\beta t) dL^{R(\delta)}(t - \delta) + \int_0^\delta \exp(-\beta t) \Lambda dt + \int_\delta^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \exp(-\beta\delta) \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_\delta^\tau \exp(-\beta(t - \delta)) dL^{R(\delta)}(t - \delta) + \int_\delta^\tau \exp(-\beta(t - \delta)) \Lambda dt \right]}_{=V(R(\delta), L^{R(\delta)}(\cdot)) \geq V(R(\delta)) - \epsilon} \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\int_0^\delta \exp(-\beta t) \Lambda dt \right] \\
&\geq \exp(-\beta\delta) \mathbb{E} [V(R(\delta)) - \epsilon] + \mathbb{E} \left[\int_0^\delta \exp(-\beta t) \Lambda dt \right]
\end{aligned}$$

Die Gleichheit (*) folgt aus der Markov Eigenschaft. Da ϵ in der Konstruktion als beliebig positiv gewählt wurde, können wir folgern:

$$V(x) \geq \exp(-\beta\delta) \mathbb{E} [V(R(\delta))] + \mathbb{E} \left[\int_0^\delta \exp(-\beta t) \Lambda dt \right]$$

Betrachten wir nun $\exp(-\beta\delta)V(R(\delta))$ und setzen die zweifache stetige Differenzierbarkeit von V voraus, dann folgt mit der Formel von Ito:

$$\begin{aligned}
\exp(-\beta\delta)V(R(\delta)) &= V(x) + \int_0^\delta \exp(-\beta s) \left[\mu V'(R(s)) + \frac{\sigma^2}{2} V''(R(s)) - \beta V(R(s)) \right] ds \\
&\quad + \int_0^\delta \exp(-\beta s) \sigma V'(R(s)) dW_s
\end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Erkenntnis in obige Ungleichung ein, dann folgt unmittelbar:

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\delta \exp(-\beta s) \left[\mu V'(R(s)) + \frac{\sigma^2}{2} V''(R(s)) - \beta V(R(s)) \right] ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^\delta \exp(-\beta t) \Lambda dt \right]$$

*KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL*

Dividieren durch δ und der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ liefert uns die erste Ungleichung:

$$0 \geq \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) + \Lambda$$

Um die zweite Ungleichung zu motivieren, betrachten wir die Dividendenstrategie der Form $\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + L^{(x-\delta)}(t)$. Das bedeutet man tätigt eine Einmalzahlung in der Höhe von δ zu Beginn und verwendet dann die ϵ -optimale Strategie $L^{(x-\delta)}(t)$ zum Anfangskapital $x - \delta$.

Mit dieser Konstruktion folgt nun:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq V(x, \mathcal{L}_\epsilon(\cdot)) = \delta + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta t) dL^{(x-\delta)}(t) \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta t) \Lambda dt \right] \\ &= \delta + V(x - \delta, L^{(x-\delta)}(\cdot)) \\ &\geq \delta + V(x - \delta) - \epsilon \end{aligned}$$

Da wir $\epsilon > 0$ beliebig gewählt haben, folgt

$$V(x) \geq \delta + V(x - \delta) \iff \frac{V(x) - V(x - \delta)}{\delta} \geq 1.$$

Also folgt unmittelbar

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V(x) - V(x - \delta)}{\delta} - 1 = V'(x) - 1 \geq 0.$$

Die zweite Variationsungleichung lautet also

$$1 - V'(x) \leq 0.$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Wir haben also gezeigt, dass die Wertfunktion V die beiden Ungleichungen erfüllt und insgesamt erhalten wir daher:

$$\max \left\{ \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) + \Lambda, 1 - V'(x) \right\} \leq 0$$

Man kann sogar zeigen, dass in dieser Ungleichung für die Wertfunktion V sogar Gleichheit gilt.

Die Wertfunktion unseres Kontrollproblem erfüllt also folgende HJB-Gleichung:

$$0 = \max \left\{ \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) + \Lambda, 1 - V'(x) \right\} \quad (4.54)$$

$$V(0) = 0$$

Die Randbedingung $V(0) = 0$ gilt, da das Unternehmen ruiniert ist, falls das Anfangskapital gleich Null ist und es daher keine Dividenden auszahlen kann.

Um die HJB-Gleichung lösen zu können, werden wir im Folgenden (wie im beschränkten Fall) annehmen, dass V eine konkave Funktion ist. Wir werden sehen, dass uns diese Annahme tatsächlich zur gesuchten Wertfunktion führt.

Wir nehmen wieder an, es gäbe einen Teilungspunkt x_0 , der folgende Bedingungen erfüllt.

$$V'(x) > 1 \text{ für } x < x_0$$

$$V'(x) \leq 1 \text{ für } x \geq x_0$$

Wir werden sehen, dass der Teilungspunkt x_0 die Rolle einer klassischen Dividendenbarriere einnimmt.

Wir können unter Berücksichtigung der letzten Annahme für die HJB-Gleichung (4.54) nun folgern, dass gilt:

$$0 = \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) + \Lambda \quad \text{für } x < x_0 \quad (4.55)$$

$$0 = 1 - V'(x) \quad \text{für } x \geq x_0 \quad (4.56)$$

Wir werden im Folgenden versuchen die Funktionen V_l und V_r mit Hilfe der „Smooth Fit“-Methode an der Stelle x_0 glatt zusammenfügen.

Dazu verwenden wir wie im beschränkten Fall folgende Notation:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

V_l ist die Lösung der Gleichung (4.55) (linker Teil von V)

V_r ist die Lösung der Gleichung (4.56) (rechter Teil von V)

Da die Gleichung (4.55) Ableitungen zweiten Grades enthält, benötigen wir eine zweimal differenzierbare Lösung. Die Wertfunktion muss also folgende Bedingungen erfüllen:

- a) $V_l(x_0) = V_r(x_0)$
- b) $V_l'(x_0) = V_r'(x_0) = 1$
- c) $V_l''(x_0) = V_r''(x_0)$

Wir erinnern uns an den mathematischen Exkurs, den wir im letzten Kapitel betrachtet haben. Unter Berücksichtigung des dort angeführten Lösungsansatzes für inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich V_l wie folgt darstellen:

$$V_l(x) = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) + A_2 \exp(R_2 x)$$

$$\text{mit } R_{1,2} = -\frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}.$$

Analog zum beschränkten Fall folgt aus der Bedingung $V(0) = 0$ unmittelbar, dass $A_2 = -\left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right)$. Also folgt für V_l :

$$V_l(x) = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1\right) \exp(R_2 x) \quad (4.57)$$

$$\text{mit } R_{1,2} = -\frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}.$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass auch in diesem Fall gilt $R_2 < 0$, $R_1 > 0$ und $|R_2| > R_1$.

Betrachtet man die Gleichung (4.56), so erkennt man, dass ihre Lösung V_r eine Gerade darstellt. Sie ist gegeben durch:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$V_r(x) = B_1 + x \quad (4.58)$$

Unter Berücksichtigung der eben hergeleiteten Darstellungen von V_l und V_r lassen sich die „Smooth Fit“-Bedingungen a) - c) wie folgt anschreiben:

$$(i) \quad \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) \exp(R_2 x_0) = B_1 + x_0 \quad (4.59)$$

$$(ii) \quad A_1 R_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) R_2 \exp(R_2 x_0) = 1 \quad (4.60)$$

$$(iii) \quad A_1 R_1^2 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) R_2^2 \exp(R_2 x_0) = 0 \quad (4.61)$$

Aus diesen drei Bedingungen werden wir nun im nächsten Satz die Koeffizienten A_1 , B_1 und den Teilungspunkt x_0 ermitteln.

Satz 4.5. *Der Teilungspunkt x_0 ist gegeben durch*

$$x_0 = \frac{1}{R_1 - R_2} \ln \left(\frac{\frac{\Lambda}{\beta} + A_1(x_0)}{A_1(x_0)} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right). \quad (4.62)$$

Der Koeffizient B_1 erfüllt

$$B_1 = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) \exp(R_2 x_0) - x_0. \quad (4.63)$$

Der Koeffizient A_1 ist die positive, eindeutige Lösung der Gleichung $F(H) = 0$, mit:

$$F(H) := H R_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + H \right) R_2 \exp(R_2 x_0) - 1$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

Beweis: Aus (4.61) folgt unmittelbar:

$$A_1 R_1^2 \exp(R_1 x_0) = \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) R_2^2 \exp(R_2 x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\exp(R_1 x_0)}{\exp(R_2 x_0)} = \frac{\frac{\Lambda}{\beta} + A_1}{A_1} \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = (R_1 - R_2) \ln \left(\frac{\frac{\Lambda}{\beta} + A_1}{A_1} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)$$

Der Koeffizient B_1 erfüllt $B_1 = V_l(x_0) - x_0$ (siehe 4.59). Also lässt sich B_1 darstellen als:

$$B_1 = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \right) \exp(R_2 x_0) - x_0$$

Durch Umformung der Gleichheit (4.60) kann man den Koeffizienten A_1 darstellen als Lösung der Funktion:

$$F(H) := H R_1 \exp(R_1 x_0) - \left(\frac{\Lambda}{\beta} + H \right) R_2 \exp(R_2 x_0) - 1$$

Betrachten wir die Darstellung (4.62) von x_0 , so erkennen wir, dass $\frac{\Lambda}{\beta} + A_1 > 0$ erfüllen muss, um die Existenz von x_0 zu gewährleisten. Es gibt zwei mögliche Fälle $A_1 > 0$ oder $A_1 < -\frac{\Lambda}{\beta}$. Der zweite Fall ist jedoch auszuschließen, da er zu einer fallenden Wertfunktion $V(x)$ führen würde. Also gilt $A_1 > 0$.

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob es eine positive Lösung der Gleichung $F(H) = 0$ gibt. Da $F(0) = -1$ und $F(\infty) = \infty$ folgt mit der Stetigkeit von $F(H)$, dass es tatsächlich eine positive Lösung der Gleichung $F(H) = 0$ gibt. Um die Eindeutigkeit von A_1 zeigen zu können, betrachten wir die Ableitung von $F(H)$.

Setzt man für x_0 die Gleichung (4.62) in $F(H)$ ein, dann gilt:

$$F(H) := H \frac{-R_2}{R_1 - R_2} \left(H + \frac{\Lambda}{\beta} \right) \frac{R_1}{R_1 - R_2} \left(R_1 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_1}{R_1 - R_2} - R_2 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{R_1 - R_2} \right) - 1 \quad (4.64)$$

$$F'(H) := \frac{H \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(H + \frac{\Lambda}{\beta} \right) \frac{R_1}{R_1 - R_2} \left(H \beta R_1 - R_2 (H \beta + \Lambda) \right)}{(R_1 - R_2)(H \beta + \Lambda)}.$$

$$\cdot \left(R_1 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_1}{R_1 - R_2} - R_2 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{R_1 - R_2} \right) > 0$$

Also ist $F(H)$ streng monoton steigend und daher der Koeffizient A_1 eindeutig. □

Bemerkung: Der Teilungspunkt erfüllt : $x_0 > 0 \Leftrightarrow A_1 > 0$. Da $A_1 > 0$ stets gewährleistet ist, ist der Teilungspunkt also stets positiv.

Satz 4.6. *Die Funktion V^**

$$V^*(x) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta} \right) \exp(R_2 x) & \text{für } x < x_0, \\ x - x_0 + \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x_0) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta} \right) \exp(R_2 x_0) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases} \quad (4.65)$$

ist eine zweimal differenzierbare, konkave Lösung der HJB- Gleichung (4.54). Für $x < x_0$ ist die Funktion sogar strikt konkav.

Beweis: Die Konkavität der Funktion V^* für $x \geq x_0$ ist klar, da sie eine Gerade darstellt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$V_l^*(x) = \frac{\Lambda}{\beta} + A_1 \exp(R_1 x) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta} \right) \exp(R_2 x) \quad (4.66)$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

strikt konkav ist. Für die erste Ableitung gilt wegen $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ und $A_1 > 0$ sicher:

$$V_l^{*'}(x) = A_1 R_1 \exp(R_1 x) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}\right) R_2 \exp(R_2 x) > 0. \quad (4.67)$$

Um zu überprüfen, ob $V_l^{*''}(x) < 0$ für $x < x_0$ gilt, werden wir auch $V_l^{*'''}(x)$ betrachten.

Es gilt

$$V_l^{*''}(0) = A_1 R_1^2 - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}\right) R_2^2 < 0$$

$$V_l^{*''}(x_0) = 0$$

$$V_l^{*'''}(x) = A_1 R_1^3 \exp(R_1 x) - \left(A_1 + \frac{\Lambda}{\beta}\right) R_2^3 \exp(R_2 x) > 0.$$

Also folgt, dass $V_l^{*''}(x)$ stets negativ ist für $x < x_0$ und damit ist auch die strikte Konkavität von V_l^* gezeigt. $\square$

Satz 4.7. Für jede beliebige zulässige Dividendenstrategie L erfüllt die Funktion $V^*(x)$ (definiert in (4.65)):

$$V^*(x) \geq V(x, L).$$

Sei L^* die Barriere-Strategie gegeben durch die Barriere x_0 (definiert in 4.62). Dann gilt

$$V^*(x) = V(x, L^*).$$

Beweis: Sei $L = (L_t)_{t \geq 0}$ eine beliebige, zulässige Strategie. Wir betrachten also den Risiko-reserveprozess $R_t^L = x + \mu t + \sigma W_t - L_t$. Im Folgenden werden wir nun die verallgemeinerte Ito-Formel anwenden und dazu werden wir den wachsenden Prozess L_t in einen stetigen Teil L_t^c und einen Teil L_t^d , der die Sprungstellen (Unstetigkeitsstellen) modelliert, zerlegen.

Es gilt also:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$L^d(t) = \sum_{\Delta L_s \neq 0, 0 \leq s \leq t} (L_s - L_{s-}) \quad \text{wobei } \Delta L_s = L_s - L_{s-}$$

Die verallgemeinerte Ito-Formel liefert uns:

$$\begin{aligned} \exp(-\beta(t \wedge \tau))V^*(R_{t \wedge \tau}^L) &= \\ &= V^*(x) - \int_0^{t \wedge \tau} \beta \exp(-\beta s) V^*(R_s^L) ds + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^L) dR_s^{L,c} \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \frac{\sigma^2}{2} V^{*''}(R_s^L) ds \\ &\quad + \sum_{\Delta R_s^L \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) [V^*(R_{s-}^L + \Delta R_s^L) - V^*(R_{s-}^L)] \\ &= V^*(x) + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \left[\mu V^{*'}(R_s^L) + \frac{\sigma^2}{2} V^{*''}(R_s^L) - \beta V^*(R_s^L) \right] ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^L) dW_s - \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^L) dL_s^c \\ &\quad + \sum_{\Delta R_s^L \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) [V^*(R_{s-}^L + \Delta R_s^L) - V^*(R_{s-}^L)] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Wir können aus der Konkavität von V^* schließen, dass $0 \leq V^{*'}(x) \leq V^{*'}(0) < \infty$ und daher der Integrand des stochastischen Integrals in (4.68) quadratisch integrierbar ist. Also erfüllt das stochastische Integral die Martingaleigenschaft und insbesondere hat es Erwartungswert Null.

Wir können aus der HJB-Gleichung (4.54) schließen, dass der erste Integrand auf der rechten Seite der Gleichung (4.68) nach oben durch $-\exp(-\beta s)\Lambda$ beschränkt ist, da gilt:

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$\begin{aligned} \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) + \Lambda &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \mu V'(x) + \frac{\sigma^2}{2} V''(x) - \beta V(x) &\leq -\Lambda \end{aligned}$$

Außerdem gilt $V^* \geq 1$ und daher ist der Integrand des zweiten Integrals nach unten beschränkt durch $\exp(-\beta s)$.

Also folgt aus diesen Erkenntnissen für Gleichung (4.68) nach Anwendung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\beta(t \wedge \tau)) V^*(R_{t \wedge \tau}^L)] &\leq V^*(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} -\exp(-\beta s) \Lambda \, ds \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) dL_s^c \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{\Delta R_s^L \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) [V^*(R_{s-}^L + \Delta R_s^L) - V^*(R_{s-}^L)] \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Wir wollen nun zeigen, dass die linke Seite gegen 0 konvergiert für den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$.

Es gilt wegen $V^*(R_\tau^L) = V^*(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\beta(t \wedge \tau)) V^*(R_{t \wedge \tau}^L)] &= \mathbb{E} [\exp(-\beta t) V^*(R_t^L) \mathbb{I}_{\{t < \tau\}}] \\ &= \exp(-\beta t) \mathbb{E} [V^*(R_t^L) \mathbb{I}_{\{t < \tau\}}] \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die Konkavität von V^* impliziert, dass es Koeffizienten $k, x > 0$ gibt mit $V^*(x) \leq kx + d$ gibt. Es gilt zusätzlich

$$R_t^L = x + \mu t + \sigma W_t - L_t \leq |x + \mu t + \sigma W_t|$$

und daher gilt

$$\begin{aligned} \exp(-\beta t) \mathbb{E} [V^*(x + \mu t + \sigma W_t - L_t) \mathbb{I}_{\{t < \tau\}}] &\leq \exp(-\beta t) \mathbb{E} [V^*(|x + \mu t + \sigma W_t|)] \\ &\leq \exp(-\beta t) \mathbb{E} [V^*(d + k|x + \mu t + \sigma W_t|)] \end{aligned}$$

Da die rechte Seite für den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht folgt mit (4.70), dass die linke Seite in (4.69) gegen Null geht für $t \rightarrow \infty$.

Natürlich können Sprungstellen des Reserveprozesse R_t nur bei Sprüngen der Dividenstrategie L_t auftreten, d.h. es gilt

$$R_s^L - R_{s-}^L = L_s - L_{s-}$$

Es lässt sich also mit der Konkavität von V^* folgern, dass gilt:

$$\begin{aligned} V^*(R_s^L) - V^*(R_{s-}^L) &= V^{*'}(\theta)(R_s^L - R_{s-}^L) \quad \text{für ein } \theta \in [R_{s-}, R_s] \\ &= -V^{*'}(\theta)(L_s - L_{s-}) \\ &\leq -(L_s - L_{s-}) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $V^{*'} \geq 1$.

Lässt man nun in (4.69) den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ laufen und benutzt man die eben gewonnenen Erkenntnisse, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq V^*(x) - \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) dL_s^c \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\sum_{\Delta R_s^L \neq 0, 0 \leq s \leq \tau} \exp(-\beta s) (L_s - L_{s-}) \right] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) dL_s \right] &\leq V^*(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) \Lambda ds + \int_0^\tau \exp(-\beta s) dL_s \right] \leq V^*(x)$$

$$\Leftrightarrow V(x, L) \leq V^*(x)$$

Wir haben also den ersten Teil des Satzes gezeigt.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, betrachten wir nun die Barrierestrategie L^* mit der Barrierehöhe x_0 . Wir wissen, dass $R_t^{L^*} \leq x_0$ für $t \geq 0$ und dass Dividenden nur ausbezahlt werden, wenn gilt $R_t^{L^*} = x_0$. Wie im ersten Teil des Beweises folgt aus der verallgemeinerten Ito- Formel (siehe 4.68):

$$\begin{aligned} \exp(-\beta(t \wedge \tau))V^*(R_{t \wedge \tau}^{L^*}) = \\ V^*(x) + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \left[\mu V^{*'}(R_s^{L^*}) + \frac{\sigma^2}{2} V^{*''}(R_s^{L^*}) - \beta V^*(R_s^{L^*}) \right] ds \\ + \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^{L^*}) dW_s - \int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) V^{*'}(R_s^{L^*}) dL_s^{*c} \\ + \sum_{\Delta R_s^{L^*} \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) [V^*(R_{s-}^{L^*} + \Delta R_s^{L^*}) - V^*(R_{s-}^{L^*})] \end{aligned} \quad (4.71)$$

Zusätzlich wissen wir aber, dass $V^{*'}(x)\mathbb{I}_{\{x=x_0\}} = \mathbb{I}_{\{x=x_0\}}$ gilt. Mit der selben Argumentation wie oben folgern wir, dass das stochastische Integral Erwartungswert gleich Null besitzt. Wie bereits erwähnt gilt $R_t^{L^*} \leq x_0$ und daher folgt mittels HJB-Gleichung nach Anwendung des Erwartungswertes für (4.71) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\beta(t \wedge \tau))V^*(R_{t \wedge \tau}^{L^*})] = \\ V^*(x) - \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \mathbb{I}_{\{R_s^{L^*} = x_0\}} dL_s^{*c} \right] \end{aligned}$$

$$+ \mathbb{E} \left[\sum_{\Delta R_s^{L^*} \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) [V^*(R_{s-}^{L^*} + \Delta R_s^{L^*}) - V^*(R_{s-}^{L^*})] \right] \quad (4.72)$$

Da wegen der Konstruktion von V^* und L^* Sprünge nur dann auftreten, wenn $R_{s-}^{L^*} > x_0$ gilt, lässt sich nun wie im ersten Teil des Beweises folgern, dass gilt:

$$\begin{aligned} V^*(R_s) - V^*(R_{s-}^{L^*}) &= V^{*'}(\theta)(R_s^{L^*} - R_{s-}^{L^*}) \quad \text{für ein } \theta \in [R_{s-}, R_s] \\ &= -V^{*'}(\theta)(L_s^* - L_{s-}^*) \\ &= -(L_s^* - L_{s-}^*) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $V^{*'} = 1$ (siehe 4.56).

Mit der selben Argumentation wie im ersten Teil des Beweises geht die linke Seite in (4.72) gegen Null. Insgesamt folgt nun für Gleichung 4.72:

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \mathbb{I}_{\{R_s^{L^*} = x_0\}} dL_s^{*c} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{\Delta R_s^{L^*} \neq 0, 0 \leq s \leq t \wedge \tau} \exp(-\beta s) (L_s^* - L_{s-}^*) \right] \\ \iff V^*(x) &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} \exp(-\beta s) dL_s^* \right] \end{aligned}$$

Wir erhalten nach Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ das gewünschte Resultat:

$$V^*(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) \Lambda ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \exp(-\beta s) dL_s^* \right] = V(x, L^*)$$

Wir haben also gezeigt, dass die optimale Dividendenstrategie bei unbeschränkter Dividendenintensität einer Barrierestrategie mit der Barriere x_0 , wie in (4.62) definiert, folgt d.h. man zahlt Dividenden sofort aus, wenn der Reserveprozess die Barriere x_0 übersteigt, und es wird keine Auszahlung getätigt, wenn sich der Reserveprozess unterhalb dieser Schranke befindet. Die Auszahlung entspricht genau der Höhe, die der Reserveprozess die Barriere x_0 übersteigt. $\square$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

Abschließend will ich noch die nachfolgenden Abbildungen anführen. Es wurden folgende Parameter gewählt: $\mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.1$ und $\beta = 0.03$.

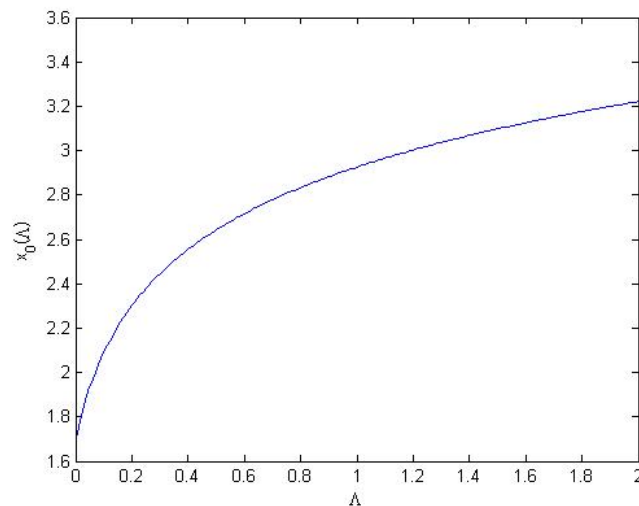


Abbildung 4.3: Barriere x_0 als Funktion von Λ

Abbildung 4.3 zeigt also, dass die Barriere x_0 mit dem Parameter Λ steigt. Dies zeigt eben (wie im Fall von beschränkter Dividendenintensität) das verminderte Risiko, das durch die Berücksichtigung der Überlebenszeit des Portfolios (also durch Einbeziehung einer stetigen Zahlung mit Intensität Λ) entsteht.

Abbildung 4.4 zeigt die optimale erwartete Dividendenauszahlung als Funktion des Anfangskapitals x für verschiedene Werte von Λ . Man kann hier sehr gut den konkaven Verlauf der Wertfunktion für $x < x_0$ erkennen, der sich ab der optimalen Barriere x_0 zu einer linearen Funktion entwickelt.

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM DIFFUSIONSMODELL

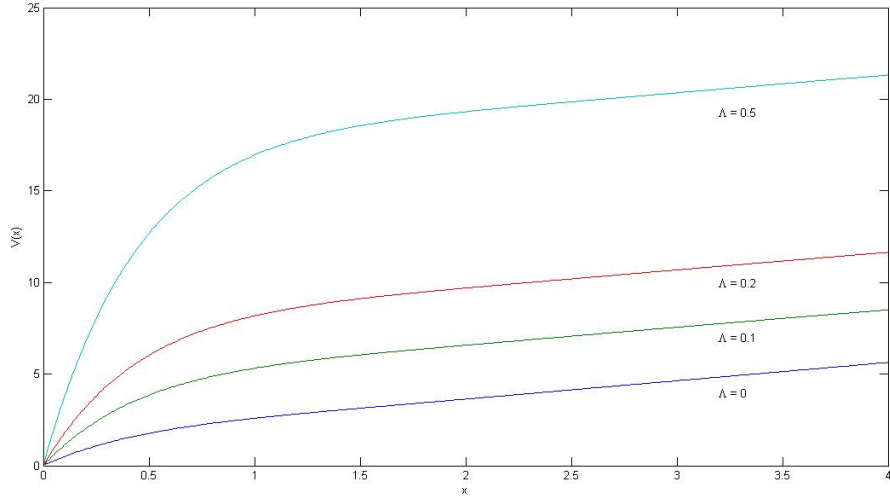


Abbildung 4.4: Wertfunktion $V(x)$

Bemerkung: Der Prozess $(R_t^{L^*})_{t \geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, x_0]$, wobei x_0 die Rolle einer oberen reflektierenden Schranke einnimmt. Wir versuchen nun einen Zusammenhang der Dividendenstrategie L^* mit der Lokalzeit der Brownschen Bewegung herzustellen.

Erinnern wir uns an die Tanaka-Formel (3.10):

$$|W(\cdot) - x| = \widehat{W}(\cdot, x) + L(\cdot, x)$$

, die für $x = 0$ eine Zerlegung einer Brownschen Bewegung, die an einer unteren Schranke reflektiert wird, angibt.

Betrachten wir nun eine Brownsche Bewegung $x + B_t$ mit $B_t = \mu t + \sigma W_t$, die an der oberen Schranke x_0 reflektiert wird, so können wir den Prozess wie folgt darstellen:

$$(x_0 - |B_t + x - x_0|)_{t \geq 0}.$$

Wendet man auf den Prozess $B_t - (x_0 - x)$ die Tanaka-Formel an, dann gilt:

$$x_0 - |B_t - (x_0 - x)| = x_0 - \left[\widehat{B}(t, x_0 - x) + L(t, x_0 - x) \right]$$

KAPITEL 4. OPTIMIERUNG DER DIVIDENDENZAHLUNGEN IM
DIFFUSIONSMODELL

$$= x_0 - \widehat{B}(t, x_0 - x) - L(t, x_0 - x).$$

Wir könnten den Risikoreserveprozess R_t unseres Modells nun als $x_0 - \widehat{B}(t, x_0 - x)$ interpretieren, da es sich bei $x_0 - \widehat{B}(t, x_0 - x)$ um eine Brownsche Bewegung mit Drift μ , Volatilität σ und Startwert x handelt. In diesem Fall folgt mit der Darstellung (3.11) für die Lokalzeit der Brownschen Bewegung:

$$\begin{aligned} L(t, x_0 - x) &= \sup_{s \leq t} (\widehat{B}(t, x_0 - x))^- \\ &= \sup_{s \leq t} (\widehat{B}(t, x_0 - x) - x_0 + x_0)^- \\ &= \sup_{s \leq t} (x_0 - \widehat{B}(t, x_0 - x) - x_0)^+ \\ &= \sup_{s \leq t} (R_t - x_0)^+ \end{aligned}$$

Also handelt es sich bei der Lokalzeit der Brownschen Bewegung gerade um unsere optimale Strategie L^* . Der Verlauf von L^* bis auf eine mögliche Einmalzahlung zum Zeitpunkt 0 (falls $x > x_0$) als der Verlauf einer Lokalzeit der Brownschen Bewegung interpretiert werden.

Kapitel 5

Simulation

5.1 Einleitung

Wir werden in diesem Kapitel versuchen die gewonnenen theoretischen Kenntnisse zur Optimierung von Dividendenzahlungen in einem Diffusionsmodell durch Simulation zu bestätigen. Dazu werden wir mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulation die Pfade des Risiko-reserveprozesses und die damit erzeugten Dividendenzahlungen simulieren. Es wurde der Zeithorizont $T = 10000$ sehr groß gewählt, um unendlicher Zeit sehr nahe zu kommen und trotzdem den Rechenaufwand einigermaßen absehbar zu gestalten. Der Zeithorizont T wurde in n äquidistante Intervalle der Länge $h = T/n$ diskretisiert.

Da die Inkremente einer Brownschen Bewegung die Eigenschaft $W_{ih} - W_{(i+1)h} \sim \mathcal{N}(0, h)$ erfüllen, lässt sich der Risikoreserveprozess wie folgt simulieren:

$$\begin{aligned} R_{(i+1)h} &= R_{ih} + \mu h + \sqrt{h}\sigma X & \text{für } i &= 0, \dots, n-1 \\ R_0 &= x \end{aligned} \tag{5.1}$$

, wobei X eine simulierte standardnormalverteilte Zufallsvariable darstellt.

Der um die ausbezahlten Dividenden korrigierte Reserveprozess lässt sich nun wie folgt darstellen:

$$\hat{R}_{(i+1)h} = \min \left\{ R_{ih} + \mu h + \sqrt{h}\sigma X, B \right\} \quad \text{für } i = 0, \dots, n-1$$

$$\widehat{R}_0 = \min \{x, B\} \quad (5.2)$$

, wobei die zugehörigen diskontierten ausbezahlten Dividenden zu jedem Zeitpunkt $i \cdot h$ mit $i = 1, \dots, n$ gemäß der Barrierstrategie mit Barriere B wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} D(ih) &= (\widehat{R}_{(i-1)h} + \mu h + \sqrt{h}\sigma X - B)^+ \cdot \exp(-ih\beta) \\ D(0) &= (x - B)^+ \end{aligned} \quad (5.3)$$

Außerdem wird die stetige Zahlung mit Intensität Λ während der Lebenszeit des Portfolios zu den Zeitpunkten $i \cdot h$ mit $i = 1, \dots, n$ wie folgt berechnet:

$$L(ih) = \Lambda \cdot \exp(-ih\beta) \quad (5.4)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Zahlung nur solange getätigt wird solange noch nicht Ruin eingetreten ist.

Die Zielfunktion eines simulierten Pfades lässt sich also wie folgt darstellen:

$$\widehat{V}(x) = \sum_{i=0}^n (L(ih) + D(ih)) \quad (5.5)$$

5.2 Simulationsergebnisse

Es wurde ein Matlab-Programm verfasst, um die Zielfunktion laut obiger Konstruktion zu simulieren. Dieses Programm befindet sich im Anhang. Die Parameter der nachfolgenden Ergebnisse wurden wie folgt gewählt: $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.08$, $\beta = 0.1$, $T = 10000$, $n = 100000$ und $x = 1$. Der Simulationsvorgang wurde $N = 1000$ -mal durchgeführt und es wurde jeweils das arithmetische Mittel von allen erhaltenen simulierten Zielfunktionen $\hat{V}(1)$ berechnet.

Die Zinsintensität β wurde bewusst sehr hoch gewählt, damit die Dividendenzahlungen, die nach $T=10000$ Jahren ausbezahlt werden, keinen zu hohen Einfluss auf die gesamten Dividendenzahlungen haben und daher vernachlässigbar sind. Im Folgenden wurde überprüft, ob die durch die Theorie erhaltenen optimalen Barrieren durch Simulation bestätigt werden können. Wir betrachten dazu für Λ die Werte 0.01 und 0.05.

Die theoretisch optimale Barriere x_0 und die dazugehörige Wertfunktion für $\Lambda = 0.01$ und für die gewählten Modellparametern lässt sich mit Hilfe von Gleichung 4.63 berechnen:

$$x_0 = 0.2507 \quad \text{mit} \quad V(1) = 1.3493 \quad (5.6)$$

Die folgende Abbildung zeigt nun die simulierte Zielfunktion $\hat{V}(1)$ als Funktion der getesteten Barrierehöhen B . Man erkennt, dass unter allen getesteten Barrieren B das Maximum tatsächlich bei $B = 0.2507 = x_0$ liegt.

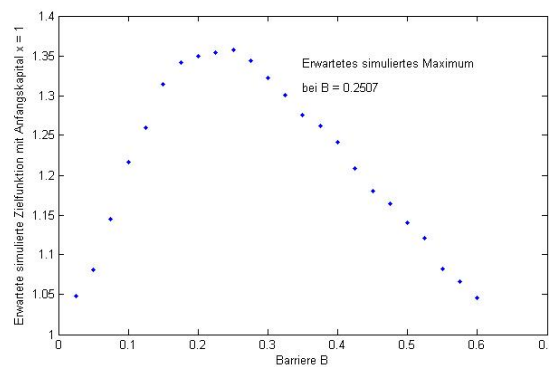


Abbildung 5.1: Simulierte Zielfunktion $\hat{V}(1)$ unter allen getesteten Barrierehöhen B für $\Lambda = 0.01$

Die simulierte Wertfunktion bei der optimalen Barriere $x_0 = 0.2507$ beträgt $\widehat{V}(1) = 1.3570$. Vergleicht man diese nun mit der theoretisch erwarteten Wertfunktion $V(1) = 1.3493$, dann erhält man den relativen Fehler:

$$\frac{|\widehat{V}(1) - V(1)|}{V(1)} \approx 0.0057 = 0.57\%$$

Wir erhalten also für $N = 1000$ Simulationswiederholungen eine durchaus akzeptable relative Abweichung von 0.57 %. Erhöhen wir nun die Anzahl der Simulationen auf $N = 5000$, dann erhält man für die simulierte Wertfunktion $\widehat{V}(1) = 1.3531$. Die relative Abweichung sinkt also sogar auf ungefähr 0.28 %.

Die entsprechenden Werte der Abbildung 5.1 sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

B	Simulierte Zielfunktion	B	Simulierte Zielfunktion
0,025	1,0481	0,325	1,3001
0,050	1,0816	0,350	1,2751
0,075	1,1452	0,375	1,2619
0,100	1,2168	0,400	1,2413
0,125	1,2594	0,425	1,2084
0,150	1,3142	0,450	1,1796
0,175	1,3414	0,475	1,1641
0,200	1,3491	0,500	1,1404
0,225	1,3542	0,525	1,1212
0,2507	1,3570	0,550	1,0827
0,275	1,3436	0,575	1,0665
0,300	1,3225	0,600	1,0460

Um die Theorie für einen anderen Wert von Λ zu testen, betrachten wir $\Lambda = 0.05$. Die theoretisch optimale Barriere x_0 und die zugehörige Wertfunktion für $\Lambda = 0.05$ und für die gewählten Modellparametern lässt sich mit Hilfe von Gleichung 4.63 berechnen:

$$x_0 = 0.2875 \text{ mit } V(1) = 1.7125 \quad (5.7)$$

Abbildung 5.2 zeigt nun die simulierten Zielfunktionen $\hat{V}(1)$ für alle getesteten Barrieren B . Man erkennt, dass unter allen getesteten Barrieren B das Maximum tatsächlich bei $B = 0.2875 = x_0$ liegt.

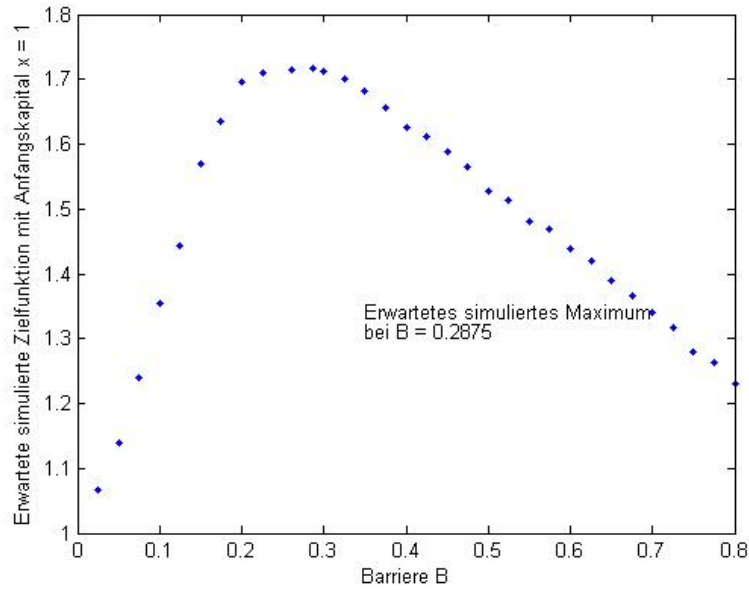


Abbildung 5.2: Simulierte Zielfunktion $\hat{V}(1)$ unter allen getesteten Barrieren B für $\Lambda = 0.05$

Die simulierte Wertfunktion bei der optimalen Barriere $x_0 = 0.2875$ beträgt $\hat{V}(1) = 1.7177$. Vergleicht man diese nun mit der theoretisch erwarteten Wertfunktion $V(1) = 1.7125$, dann erhält man den relativen Fehler:

$$\frac{|\hat{V}(1) - V(1)|}{V(1)} \approx 0.003 = 0.3\%$$

Wir erhalten für $N = 1000$ Simulationswiederholungen also auch für $\Lambda = 0.05$ eine durchaus akzeptable relative Abweichung von 0.3 %. Erhöhen wir nun die Anzahl der

Simulationen auf $N = 5000$, dann erhält man für die simulierte Wertfunktion $\widehat{V}(1) = 1.7157$. Die relative Abweichung sinkt also sogar auf ungefähr 0.19 %.

Die entsprechenden Werte der Abbildung 5.2 sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

B	Simulierte Zielfunktion	B	Simulierte Zielfunktion
0,025	1,0673	0,425	1,6122
0,050	1,1381	0,450	1,5880
0,075	1,2399	0,475	1,5647
0,100	1,3540	0,500	1,5280
0,125	1,4442	0,525	1,5135
0,150	1,5703	0,550	1,4807
0,175	1,6364	0,575	1,4689
0,200	1,6951	0,600	1,4386
0,225	1,7108	0,625	1,4190
0,250	1,7173	0,650	1,3887
0,2875	1,7177	0,675	1,3651
0,300	1,7131	0,700	1,3399
0,325	1,7012	0,725	1,3166
0,350	1,6812	0,750	1,2791
0,375	1,6566	0,775	1,2636
0,400	1,6260	0,800	1,2307

Wir haben also durch obige Ergebnisse gesehen, dass die Theorie der optimalen Barrierestrategie für ein festes Anfangskapital durch Simulation bestätigt werden kann. Natürlich ist nun interessant, wie sich die erwartete simulierte Zielfunktion für verschiedene Barrierehöhen als Funktion des Anfangskapitals entwickelt. Dabei betrachten wir die Barrierehöhen $B = x_0 = 0.2507$, $B = 0.15$ und $B = 0.25$, wobei $x_0 = 0.2507$ die theoretisch optimale Barriere darstellt. Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf der simulierten Zielfunktionen für $\Lambda = 0.01$:

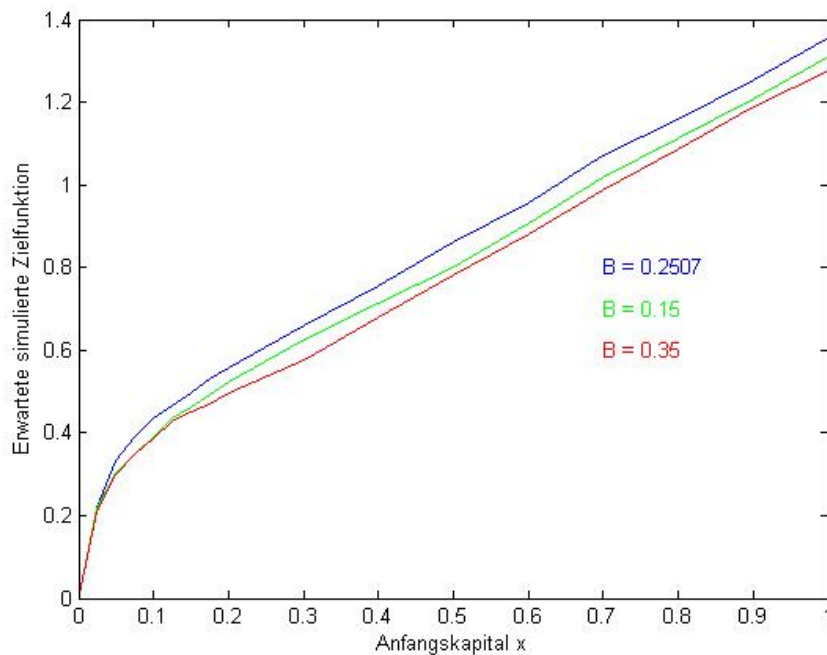


Abbildung 5.3: Simulierte Zielfunktion $\hat{V}(x)$ für die Barrierehöhen $B = x_0 = 0.2507$, $B = 0.15$ und $B = 0.35$ mit $\Lambda = 0.01$

Betrachtet man nun Abbildung 5.3 und vergleicht diese 3 Barrierestrategien, dann kann man erkennen, dass wie erwartet die theoretisch optimale Barrierestrategie tatsächlich die Wertfunktion für beliebiges Anfangskapital x liefert. Man kann außerdem sehr gut beobachten, dass die Wertfunktion bis zum Anfangskapital x_0 konkav verläuft und sich danach zu einer linearen Funktion entwickelt.

Die entsprechenden Werte der Abbildung 5.3 sind in der folgenden Tabelle angeführt:

x	$\widehat{V}(x)$		
	$B = x_0 = 0.2507$	$B = 0.15$	$B = 0.35$
0.025	0.2185	0.2174	0.2104
0.05	0.3327	0.3013	0.2969
0.075	0.3912	0.3477	0.3466
0.1	0.4360	0.3907	0.3869
0.125	0.4645	0.4366	0.4296
0.15	0.4955	0.4623	0.4526
0.175	0.5325	0.4934	0.4715
0.2	0.5564	0.5238	0.4976
0.3	0.6583	0.6258	0.5776
0.4	0.7540	0.7115	0.6773
0.5	0.8623	0.8022	0.7802
0.6	0.9556	0.9073	0.8790
0.7	1.0695	1.0192	0.9871
0.8	1.1596	1.1115	1.0862
0.9	1.2554	1.2061	1.1886
1	1.3573	1.3105	1.2751

Wir betrachten nun den Fall $\Lambda = 0.05$. Auch in diesem Fall werden wir sehen, dass sich die Theorie durch Simulation bestätigen lässt. Wir verwenden wieder drei Barrierenhöhen $B = x_0 = 0.2875$, $B = 0.18$ und $B = 0.38$ und beobachten den Verlauf der simulierten Zielfunktion als Funktion des Anfangswertes in der Abbildung 5.4.

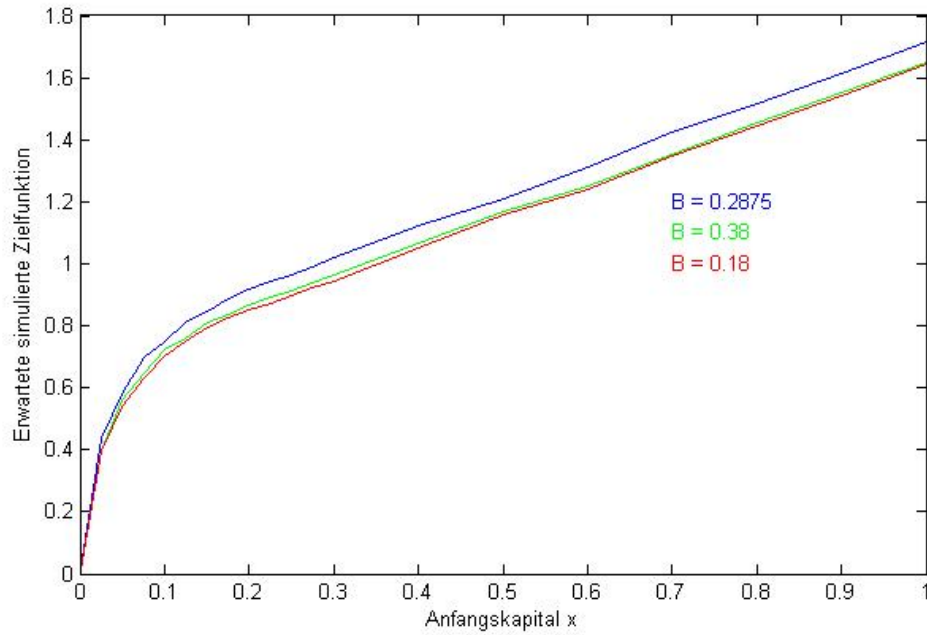


Abbildung 5.4: Simulierte Zielfunktion $\hat{V}(x)$ für die Barrierenhöhen $B = x_0 = 0.2875$, $B = 0.18$ und $B = 0.38$ mit $\Lambda = 0.05$

Betrachtet man Abbildung 5.4 und vergleicht diese 3 Barrierestrategien, dann kann man auch für den Fall $\Lambda = 0.05$ erkennen, dass wie erwartet die theoretisch optimale Barrierestrategie tatsächlich die Wertfunktion für beliebiges Anfangskapital x liefert. Die entsprechenden Werte der Abbildung 5.4 sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

x	$\widehat{V}(x)$		
	$B = x_0 = 0.2875$	$B = 0.18$	$B = 0.38$
0.025	0.4360	0.3939	0.3986
0.05	0.5781	0.5406	0.5598
0.075	0.6964	0.6304	0.6472
0.1	0.7498	0.7012	0.7237
0.125	0.8118	0.7517	0.7585
0.15	0.8468	0.7932	0.8104
0.175	0.8879	0.8249	0.8353
0.2	0.9190	0.8522	0.8687
0.225	0.9424	0.8734	0.8911
0.25	0.9645	0.8984	0.9137
0.275	0.9916	0.9244	0.9375
0.3	1.0203	0.9460	0.9661
0.4	1.1221	1.0530	1.0654
0.5	1.2108	1.1605	1.1697
0.6	1.3137	1.2405	1.2501
0.7	1.4224	1.3449	1.3547
0.8	1.5177	1.4459	1.4532
0.9	1.6140	1.5439	1.5535
1	1.7177	1.6446	1.6483

Kapitel 6

Anhang

In diesem Kapitel werde ich der Vollständigkeit wegen die geschriebenen Matlab-Programme, die zur Simulation verwendet wurden, anführen.

6.1 Matlab-Code zur Berechnung der Wertfunktion im beschränkten Fall

Die folgende Matlab-Funktion „run“ berechnet die Wertfunktion im beschränkten Fall unter der Verwendung von weiteren Matlab-Programmen, die nachfolgend angeführt werden.

```
function r=run()

R1 = -(mu/sigma2) + sqrt(((mu)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
R2 = -(mu/sigma2) - sqrt(((mu)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
S2 = -(mu - m)/(sigma2) - sqrt(((mu - m)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
delta = m/beta + 1/S2;
lambda = 0.08;

for i=0:40

z = i/10;

if ((m + lambda)/beta + 1/S2 <= 0)
```

```

V(z + 1) = (m + lambda)/beta * (1 - exp(S2 * z));
else

A1 = koeff(R1, R2, beta, delta, lambda);
x0 = 1/(R1 - R2) * log((A1 + lambda/beta)/A1 * (1 - delta * R2)/(1 - delta * R1));
B2 = 1/S2*((A1+lambda/beta)/A1*(1-delta*R2)/(1-delta*R1))^(1-delta*S2/(R1-R2));

if (z < x0)
V(i + 1) = (lambda)/beta + A1 * exp(R1 * z) - (A1 + lambda/beta) * exp(R2 * z);
else
V(i + 1) = (m + lambda)/beta + B2 * exp(S2 * z);
end

end

end

```

Die Funktion „koeff($R_1, R_2, \beta, \delta, \lambda$)“ beschreibt die Berechnung des Koeffizienten A_1 :

```

function A1=koeff(R1, R2, beta, delta, lambda)

global b d la R1 R2
b = beta;
R1 = R1;
R2 = R2;
la = lambda;
d = delta;
x=fzero(@Gleichung,1);
A1=x;

```

Die oben angeführte Funktion „Gleichung“ enthält lediglich die Gleichung 4.36, die zur Berechnung des Koeffizienten A_1 notwendig ist:

```

function F = Gleichung(x)

global b d la R1 R2

```

% F beschreibt die Gleichung 4.36

$$F = (1 + la/b \cdot R2 \cdot ((x + la/b)/(x) \cdot ((1 - d \cdot R2)/(1 - d \cdot R1)))^{R2/(R1-R2)}) / (R1 \cdot ((x + (la/b))/x \cdot ((1 - d \cdot R2)/(1 - d \cdot R1)))^{R1/(R1-R2)} - R2 \cdot ((x + (la/b))/x \cdot ((1 - d \cdot R2)/(1 - d \cdot R1)))^{R2/(R1-R2)}) - x ;$$

6.2 Matlab-Code zur Berechnung der Wertfunktion im unbeschränkten Fall

Die folgende Funktion „run“ berechnet die Wertfunktion im beschränkten Fall unter der Verwendung von anderen Matlab-Programmen die nachfolgend angeführt werden.

```
function r=run()
```

```

R1 = -(mu/sigma2) + sqrt(((mu)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
R2 = -(mu/sigma2) - sqrt(((mu)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
S2 = -(mu - m)/(sigma2) - sqrt(((mu - m)^2)/(sigma2^2) + (2 * beta)/sigma2);
delta = m/beta + 1/S2;
lambda = 0.1;
```

```
for i=0:400
```

```

    z=i/100;
```

```

    A1 = koeff(R1, R2, beta, delta, lambda);
    x0 = 1/(R1 - R2) * log((A1 + lambda/beta)/A1 * ((R2)^2/(R1)^2));
```

```

    if (z < x0)
        V(i+1) = (lambda)/beta + A1 * exp(R1 * z) - (A1 + lambda/beta) * exp(R2 * z);
    else
        V(i+1) = z - x0 + (lambda)/beta + A1 * exp(R1 * x0) - (A1 + lambda/beta) * exp(R2 * x0);
    end
```

```
end
```

Die Funktion „*koeff*($R_1, R_2, beta, delta, lambda$)“ beschreibt die Berechnung des Koeffizienten A_1 :

```
function A1=koeff(R1, R2, beta, delta, lambda)
```

```
global b d la R1 R2
```

```
b = beta;
```

```
R1 = R1;
```

```
R2 = R2;
```

```
la = lambda;
```

```
d = delta;
```

```
x=fzero(@Gleichung,2);
```

```
A1=x;
```

Die oben angeführte Funktion „Gleichung“ enthält lediglich die Gleichung 4.64, die zur Berechnung des Koeffizienten A_1 notwendig ist:

```
function F = Gleichung(x)
```

```
global b d la R1 R2
```

```
% F beschreibt die Gleichung 4.64
```

```
F = x-R2/(R1-R2)*(x+la/b)R1/(R1-R2)*(R1*(R22/R12)R1/(R1-R2)-R2*(R22/R12)R2/(R1-R2))-1 ;
```

6.3 Matlab-Code zur Simulation der Zielfunktion

Mit Hilfe der nachfolgenden Programme ist es möglich die Zielfunktion zu simulieren und die Werte der im Kapitel 5 angeführten Abbildungen und Tabellen zu berechnen.

```
function V=Simulation(x,N,n,T,mu,sigma,beta,B,lambda)
```

```
R(1)=x;
```

```
X(1)= min(x,B);
```



```

if ( $R(1) < B$ )
D(1)= 0;
else
D(1)=  $R(1) - B$ ;
end

for j=1:N

L=0;
Z = boxmuller(n);           % Berechnung der standardnormalverteilten Zufallsvaria-
blen

for i=1:n

if ( $X(i) > 0$ )

    if ( $X(i) + \mu * T/n + \text{sqrt}(T/n) * \sigma * Z(i) < B$ )
    D(i+1)= 0;
    else
    % Diskontierte Dividendenzahlung zu ZP (T/n)*i
     $D(i+1) = (X(i) + \mu * T/n + \text{sqrt}(T/n) * \sigma * Z(i) - B) * (\exp(-\beta * (T/n) * i));$ 
    end

     $X(i+1) = \min(X(i) + \mu * T/n + \text{sqrt}(T/n) * \sigma * Z(i), B);$ 
    % Stetige Zahlung zum ZP (T/n)*i
     $L = \exp(-T/n * i * \beta) * (T/n) + L;$ 

else

    X(i+1)=0;
    D(i+1)=0;

end

end

end

 $C(j) = \text{sum}(D) + L * \lambda;$ 

end

```

$$V = \text{sum}(C)/N;$$

Die oben verwendete Funktion „boxmuller(n)“ beschreibt die Erzeugung von standard-normalverteilten Zufallsvariablen:

```
function Z = boxmuller(n)
```

```
rand(n,1);
```

```
Z=sqrt(-2*log(rand(1,n))).*cos(2*pi*rand(1,n));
```

Literaturverzeichnis

- [1] T. Rolski, H. P. Schmidli, V. Schmidt und J. Teugels: Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley: Chichester 1999
- [2] Gerber, Hans U.: An introduction to Mathematical Risk Theory, Irwin: Homewood 1979
- [3] Asmussen, Soren: Ruin Probabilities - Advanced series on statistical science and applied probability vol. 2., World Scientific Publishing: Singapore [u.a.] 2000
- [4] Sass, Jörn: Stochastic Control With Applications to Financial Mathematics, JKU Linz 2007. Abruf am 19. 10. 2010 <http://www.ricam.oeaw.ac.at/people/page/sass/teaching/stochcontrol/>
- [5] Oksendal, Bernt: Stochastic Differential Equations, Springer: Berlin 2007 (6.Auflage)
- [6] K. L. Chung , R. J. Williams: Introduction to stochastic integration, Birkhäuser: Boston 1990 (2.Auflage)
- [7] Soren Asmussen, Michael Taksar: Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. Department of Mathematical Statistics, University of Lund. SUNY, Stony Brook, USA 1996.
- [8] Stefan Thonhauser, Hansjörg Albrecher: Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Linz Austria. Graz University of Technology, Graz. Austria 2006