Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

TU

Technische Universität Wien

DIPLOMARBEIT

Optimierung von Rückversicherungsverträgen am Beispiel der Unfallversicherung

Ausgeführt am Institut für

Wirtschaftsmathematik

Forschungsgruppe: Finanz- und Versicherungsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von **Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Peter Grandits**

durch

Stefan Mikula

Feldgasse 7, 2475 Neudorf

_____ _____

Datum Unterschrift

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die wörtlich oder inhaltlich den im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmitteln entnommenen Stellen sind in der Arbeit als Zitat bzw. Paraphrase kenntlich gemacht.

Diese Diplomarbeit ist noch nicht veröffentlicht worden. Sie ist somit weder anderen Interessenten zugänglich gemacht, noch einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden.

Neudorf, März 2009

Stefan Mikula

Danksagung

Mein Dank gilt allen, die mich während der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben. Besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr. Peter Grandits und Herrn Mag. Christoph Krischanitz, die mir das Verfassen dieser Diplomarbeit unter ihrer Aufsicht ermöglichten.

Ebenso möchte ich mich bei dem analysierten Versicherungsunternehmen bedanken, welches mir sowohl die verwendeten Bestände als auch einen Laptop für die Zeit der Diplomarbeit zur Verfügung gestellt hat.

Recht herzlich möchte ich Frau Theresia Merzinger und Frau DI Beate Spangl danken. Sie standen mir als Korrekturleser und Diskussionspartner stets mit Rat und Tat zur Seite und haben damit zur jetzigen Form dieser Arbeit beigetragen.

Viel Dank gebührt auch meinen Studienkollegen Brigitte Lutz, Roman Schneider sowie Andreas Houska. Durch die eifrige, erfolgreiche und stets herzhafte Zusammenarbeit mit ihnen während meines gesamten Studiums wurde mir das Schreiben dieser Diplomarbeit überhaupt erst möglich.

Ganz besonders danken möchte ich meiner Familie, allen voran meinen geliebten Eltern, die mich auf meinem bisherigen Lebensweg immer unterstützt haben und einen großen Anteil an dem Menschen haben, der ich heute bin.

Neudorf, März 2009

Stefan Mikula

Inhaltsverzeichnis

Ehrenwörtliche Erklärung I

Danksagung II

Inhaltsverzeichnis III

Abbildungsverzeichnis V

Tabellenverzeichnis VII

Abkürzungsverzeichnis IX

1 Problemstellung und Einführung 1
1.1 Problemstellung 1
1.2 Einführung 1

2 Beschreibung des betroffenen Unternehmens 3

3 Berechnung der Gesamtschadenverteilung 4
3.1 Einleitung 4
3.2 Basisdefinitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 4
3.2.1 Verteilungsfunktion 4
3.2.2 Wahrscheinlichkeits(-dichte)funktion 6
3.2.3 Moment- und Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen 8
3.3 Schadenzahlverteilung 10
3.3.1 Poissonverteilung 10
3.3.2 Negative Binomialverteilung 13
3.3.3 Binomialverteilung 16
3.4 Schadenhöhenverteilungen 18
3.4.1 Logarithmische Normalverteilung 19
3.4.2 Gammaverteilung 21
3.5 Berechnung des Gesamtschadens 24
3.6 Schadenreservierungsverfahren 26
3.6.1 Chain-Ladder-Verfahren 27
3.7 Methoden zur Schätzung von Verteilungsparametern 30
3.7.1 Momenten-Methode 30
3.7.2 Maximum-Likelihood-Methode 31
3.7.3 Minimum-Chi-Quadrat-Methode 32

4 Rückversicherung 33
4.1 Grundformen der Rückversicherung 33
4.1.1 Quotenrückversicherung 34
4.1.2 Summenexzedenten-Rückversicherung 35
4.1.3 Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung 36
4.1.4 Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung 37
4.1.5 Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop Loss) 38
4.2 Proportionale RV – Optimale RV-Faktoren 39

5 Bestandsinformationen 41
5.1 Einleitung 41
5.2 Gesamtbestandsentwicklung nach verschiedenen Parametern 41
5.3 Tarifgruppenentwicklung nach verschiedenen Parametern 45
5.4 Bestandsverteilungen per 31.12.2007 51

6 Praktische Analyse des Bestandes 59
6.1 Erwartete Schadenanzahl 59
6.1.1 Unfallinvalidität 61
6.1.2 Unfalltod 63
6.1.3 Taggeld 65
6.1.4 Spitalgeld 67
6.1.5 Unfallkosten 69
6.2 Erwartete Schadenhöhe 71
6.2.1 Unfallinvalidität 72
6.2.2 Unfalltod 75
6.2.3 Taggeld 78
6.2.4 Spitalgeld 81
6.2.5 Unfallkosten 84
6.3 Erwarteter Gesamtschaden 87
6.4 Berechnung der proportionalen RV-Strategie 88

7 Resümee und Ausblick 92

Literaturverzeichnis 94

Abbildungsverzeichnis

Abb. 3.1: (Stetige) Verteilungsfunktionen 5

Abb. 3-2: Dichtefunktionen 7

Abb. 3-3: Poissonverteilung - Wahrscheinlichkeitsfunktion 11

Abb. 3-4: Negative Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I 14

Abb. 3-5: Negative Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II 14

Abb. 3-6: Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I 17

Abb. 3-7: Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II 17

Abb. 3-8: Logarithmische Normalverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I 20

Abb. 3-9: Logarithmische Normalverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II 21

Abb. 3-10: Gammaverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I 23

Abb. 3-11: Gammaverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II 23

Abb. 5-1: Entwicklung der Vertragsanzahl 42

Abb. 5-2: Entwicklung der Anzahl der versicherten Personen 42

Abb. 5-3: Entwicklung der Tarifanzahl 43

Abb. 5-4: Entwicklung der Jahresbestandsprämie 43

Abb. 5-5: Tarifanzahl je Tarifgruppe 50

Abb. 5-6: Jahresbestandsprämie je Tarifgruppe 50

Abb. 5-7: Aufteilung nach Zahlweisen – Vertragsanzahl 51

Abb. 5-8: Aufteilung nach Zahlweisen – Jahresbestandsprämie 52

Abb. 5-9: Aufteilung nach Bundesländern - Vertragsanzahl 52

Abb. 5-10: Aufteilung nach Altersgruppen – Versicherte Personen 54

Abb. 5-11: Aufteilung nach Altersgruppen – Tarife 54

Abb. 5-12: Altersverteilung je GP 55

Abb. 5-13: Aufteilung nach GP – Verträge – Tarife – Prämie 56

Abb. 5-14: Aufteilung nach Beginn – Verträge 57

Abb. 5-15: Aufteilung nach Beginn - Jahresbestandsprämie 57
Abb. 6-1: VF Schadenhöhen Unfallinvalidität-Gesamt 73
Abb. 6-2: VF Schadenhöhen Unfalltod-Gesamt 76
Abb. 6-3: VF Schadenhöhen Taggeld-Gesamt 79
Abb. 6-4: VF Schadenhöhen Spitalgeld-Gesamt 82
Abb. 6-5: VF Schadenhöhen Unfallkosten-Gesamt 85

Tabellenverzeichnis

Tab. 2-1: Vertragsanzahl und Prämie 3

Tab. 3-1: Schadendreieck 27

Tab. 3-2: kumuliertes Schadendreieck 27

Tab. 5-1: Tarifgruppe Unfallinvalidität 45

Tab. 5-2: Tarifgruppe Unfalltod 46

Tab. 5-3: Tarifgruppe Taggeld 47

Tab. 5-4: Tarifgruppe Spitalgeld 47

Tab. 5-5: Tarifgruppe Unfallkosten 48

Tab. 5-6: Tarifgruppe Sonstige Tarife 49

Tab. 6-1: Bestandsentwicklung (Partnernummern – versicherte Personen) 59

Tab. 6-2: Schadenanzahl Unfallinvalidität 61

Tab. 6-3: HR-Faktor Unfallinvalidität 61

Tab. 6-4: Kumulierte Schadenanzahl Unfallinvalidität 62

Tab. 6-5: Schadenfrequenz Unfallinvalidität 62

Tab. 6-6: Schadenanzahl Unfalltod 63

Tab. 6-7: HR-Faktor Unfalltod 63

Tab. 6-8: Kumulierte Schadenanzahl Unfalltod 64

Tab. 6-9: Schadenfrequenz Unfalltod 64

Tab. 6-10: Schadenanzahl Taggeld 65

Tab. 6-11: HR-Faktor Taggeld 65

Tab. 6-12: Kumulierte Schadenanzahl Taggeld 66

Tab. 6-14: Schadenanzahl Spitalgeld 67

Tab. 6-15: HR-Faktor Spitalgeld 67

Tab. 6-16: Kumulierte Schadenanzahl Spitalgeld 68

Tab. 6-17: Schadenfrequenz Spitalgeld 68

Tab. 6-18: Schadenanzahl Unfallkosten 69

Tab. 6-19: HR-Faktor Unfallkosten 69
Tab. 6-20: Kumulierte Schadenanzahl Unfallkosten 70
Tab. 6-21: Schadenfrequenz Unfallkosten 70
Tab. 6-22: Schadenhöhe Unfallinvalidität 72
Tab. 6-23: Parameterschätzer Unfallinvalidität 73
Tab. 6-24: Schadenhöhe Unfalltod 75
Tab. 6-25: Parameterschätzer Unfalltod 76
Tab. 6-26: Schadenhöhe Taggeld 78
Tab. 6-27: Parameterschätzer Taggeld 79
Tab. 6-28: Schadenhöhe Spitalgeld 81
Tab. 6-29: Parameterschätzer Spitalgeld 82
Tab. 6-30: Schadenhöhe Unfallkosten 84
Tab. 6-31: Parameterschätzer Unfallkosten 85
Tab. 6-32: Erwartete Schäden 2008 (Anzahl + mittlere Schadenhöhe) 87
Tab. 6-33: Erwartete Schäden 2008 (Gesamtschaden) 87
Tab. 6-34: RV-Struktur Standardabweichungsprinzip I 89
Tab. 6-35: RV-Struktur Standardabweichungsprinzip II 89
Tab. 6-34: RV-Struktur Varianzprinzip I 89
Tab. 6-35: RV-Struktur Varianzprinzip II 90
Tab. 6-34: RV-Struktur Erwartungswertprinzip I 90
Tab. 6-35: RV-Struktur Erwartungswertprinzip II 90

Abkürzungsverzeichnis

RV (die)	Rückversicherung
RV (der)	Rückversicherer
EV	Erstversicherer
VN	Versicherungsnehmer
VS	Versicherungssumme(n)
VU	Versicherungsunternehmen
HR	Hochrechnung
GP	Geschäftsplan, -pläne
TEUR	Tausend Euro
VF	Verteilungsfunktion(en)
CL	Chain-Ladder
MCQ	Minimum-Chi-Quadrat
MVP	Minimum-Varianz-Prinzip
Stdabw	Standardabweichung
EB	Eigenbehalt
MEF	momenterzeugende Funktion
WEF	wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion
ZV	Zufallsvariable
ML	Maximum-Likelihood
z.B.	zum Beispiel
u.i.v.	unabhängig und identisch verteilt
bspw.	beispielsweise
d.h.	das heißt
bzw.	beziehungsweise
etc.	et cetera
v.a.	vor allem
ca.	cirka
o.ä.	oder ähnliches
inkl.	inklusive
exkl.	exklusive
u.a.	unter anderem

1 Problemstellung und Einführung

1.1 Problemstellung

Wie für einzelne Versicherungsnehmer ist es auch für Versicherungsunternehmen notwendig, sich gegen unvorhergesehene Ereignisse entsprechend abzusichern. Geschieht dies bei Privatpersonen oder Firmen durch Versicherungsverträge, so wird den Unternehmen der Versicherungsbranche diese Möglichkeit durch RV-Verträge geboten. Das Ziel der betroffenen Erstversicherer ist es, für den jeweiligen Versicherungsbestand ein optimales Ertrags– und Risikomatching zu erhalten. Ebenso wird Versicherern dadurch die Möglichkeit geboten, Risiken zu übernehmen, welche für sie im Eigenbehalt zu groß wären, die aber durch geschickte RV-Politik auf ein überschaubares Risiko für das eigene Unternehmen reduziert werden.

Eine zentrale Frage ist stets, welche RV-Strategie am besten für den jeweiligen Bestand geeignet ist. Grob gesagt gibt es sowohl bei proportionalen als auch bei nichtproportionalen Vereinbarungen mehrere Formen. Bei proportionalen Verträgen teilen Erst- und Rückversicherer Prämien und Risiko im gleichen Ausmaß, bei nichtproportionalen Verträgen werden vom Rückversicherer meist nur Risikospitzen abgedeckt. Ein weiterer Aspekt ist auch die generelle Sicherstellung, dass durch die richtige Wahl von RV-Vereinbarungen keine Prämien unnötig vergeudet werden, die natürlich sonst dem eigenen Unternehmen für mögliche Veranlagungsgewinne abgehen würden.

1.2 Einführung

Das für diese Arbeit analysierte Unternehmen hat für die Sparte Unfallversicherung aktuell nur einen RV-Vertrag abgeschlossen. Dieser gilt jeweils für das aktuelle Unfalljahr und wird jährlich neu verhandelt. Es handelt sich um eine Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung, die aktuelle Eigenbehaltsquote beträgt je Unfallereignis EUR 100.000. Alle Leistungen, die diesen Wert übersteigen, werden vom Rückversicherer getragen, welcher für Schäden mit einer Höhe von über EUR 400.000 selbst wieder rückversichert ist, man spricht hier vom ersten und zweiten RV-Layer. Der Eigenbehalt gilt für alle Leistungen, die zu einem Unfallereignis in allen Folgejahren anfallen. Dies kann natürlich mehrere Verträge betreffen und sich beispielsweise bei Unfallrenten sogar über Jahrzehnte erstrecken.

Da in den letzten Jahren aus Sicht des betrachteten Unternehmens stets negative RV-Ergebnisse angefallen sind (die bezahlten Prämien überstiegen die übernommenen Leistungen teilweise recht deutlich), soll mit dieser Arbeit überprüft werden, ob eine Änderung der RV-Struktur zielführend ist. Konkret wird eine proportionale RV angedacht, wobei der jeweilige Proportionalitätsfaktor je Tarifgruppe extra bestimmt wird.

Zunächst ist dafür eine Aufbereitung des Schadenverhaltens nötig, um für das Unfalljahr 2008 eine realistische Schätzung des zu erwartenden Gesamtschadens je Tarifgruppe zu erhalten, welcher in weiterer Folge die Basis für die Berechnung der proportionalen Strategie ist. Die Datenbasis beginnt mit dem Unfalljahr 2002 und ist bis zum Analysezeitpunkt 31.12.2007 (teilweise 30.06.2008) lückenlos vorhanden; somit stehen sechs Beobachtungsjahre zur Verfügung.

2 Beschreibung des betroffenen Unternehmens

[1]Die Unternehmensphilosophie des betrachteten Unternehmens resultiert aus ihrer historischen Entwicklung heraus, wobei sich natürlich die Rahmenbedingungen durch die moderne Kommunikationswirtschaft verändert haben. Es wurde als eine Selbsthilfeorganisation (Sterbekasse) der Gewerkschaften und Verwaltungen des öffentlichen Dienstes in Österreich gegründet und sieht sich daher als Spezialversicherer und Nischenversicherer für die Personengruppe der öffentlich Bediensteten und deren Angehörigen, und hat das Ziel, ihren Kunden, die als Kollegen betrachtet werden, Versicherungsschutz zu besonders günstigen Konditionen zu bieten. Aus dieser historischen Entwicklung heraus besteht das Klientel dieses Versicherungsvereins auf Gegenseitigkeit (was heutzutage eine Rarität in der österreichischen Versicherungswirtschaft ist) auch heute noch hauptsächlich aus Bediensteten des öffentlichen Dienstes (z. B. Österreichische Bundesbahn, Polizei, Lehrer etc.).

Die angebotenen Produkte umfassen Personen- und Sachversicherungen, wobei jedoch nur die Sparten Lebens- und Unfallversicherung auf eigene Rechnung geführt werden. Der Sachversicherungsbereich (u.a. KFZ-, Eigenheim-, Rechtsschutz und Haushaltsversicherung) sowie die Krankenversicherung werden als Ausschließlichkeitsagentur für fremde Rechnung abgeschlossen.

Die Vertragsanzahl sowie das Prämienvolumen gestalteten sich in den letzten Jahren in der Lebens- und Unfallversicherung wie folgt (Betrachtung per 31.12. des jeweiligen Jahres):

Tab. 2-1: Vertragsanzahl und Prämie

	Lebensversicherung		**Unfallversicherung**	
Jahr	**Anzahl**	**Prämie (TEUR)**	**Anzahl**	**Prämie (TEUR)**
2002	299.077	122.846	172.618	17.367
2003	332.409	131.390	166.536	16.959
2004	335.665	131.956	161.135	16.515
2005	337.711	152.242	155.901	16.257
2006	332.120	142.374	148.691	15.934
2007	331.000	152.465	142.519	15.959

[1] Dieser Absatz wurde aus [12] übernommen.

3 Berechnung der Gesamtschadenverteilung

3.1 Einleitung

Um die Verteilung des Gesamtschadens in der Sparte Unfallversicherung des betroffenen Unternehmens ermitteln zu können, ist die Kenntnis von bestimmten Informationen über das Schadenverhalten in jeder der fünf analysierten Tarifgruppen notwendig. Wichtig ist sowohl die Anzahl der zu erwartenden Schäden als auch deren durchschnittliche Höhe, beide anhand von Erfahrungswerten aus dem Schadenverhalten der letzten Jahre sowie anhand geeigneter Modelle gewonnen.

3.2 Basisdefinitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für die folgenden Betrachtungen und Berechnungen ist es nötig, einige grundlegende Punkte bzw. Definitionen näher zu erläutern (aus [1]).

3.2.1 Verteilungsfunktion

Definition Für eine Zufallsvariable[2] X definiert man mit $F_X(x)$ bzw. F(x) die (kumulative) Verteilungsfunktion dieser. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x annimmt, also

$$F_X(x) = P(X \leq x) .$$

Jede Verteilungsfunktion F: R → [0,1] muss folgende Eigenschaften erfüllen:

- $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle x.
- F ist monoton nichtfallend.
- F ist rechtsstetig.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

[2] Eine Funktion X heißt eine (reelle) Zufallsvariable, wenn ihre Werte reelle Zahlen sind und als Ergebnis eines zufälligen Versuchs interpretiert werden können (siehe [8], Seite 117).

VF sind sowohl für stetige als auch in diskrete Verteilungen definiert. Diskrete VF enthalten Sprungstellen, bei diesen ist der Wert der VF die Spitze der Sprungstelle (bedingt durch die Rechtsstetigkeit der VF).

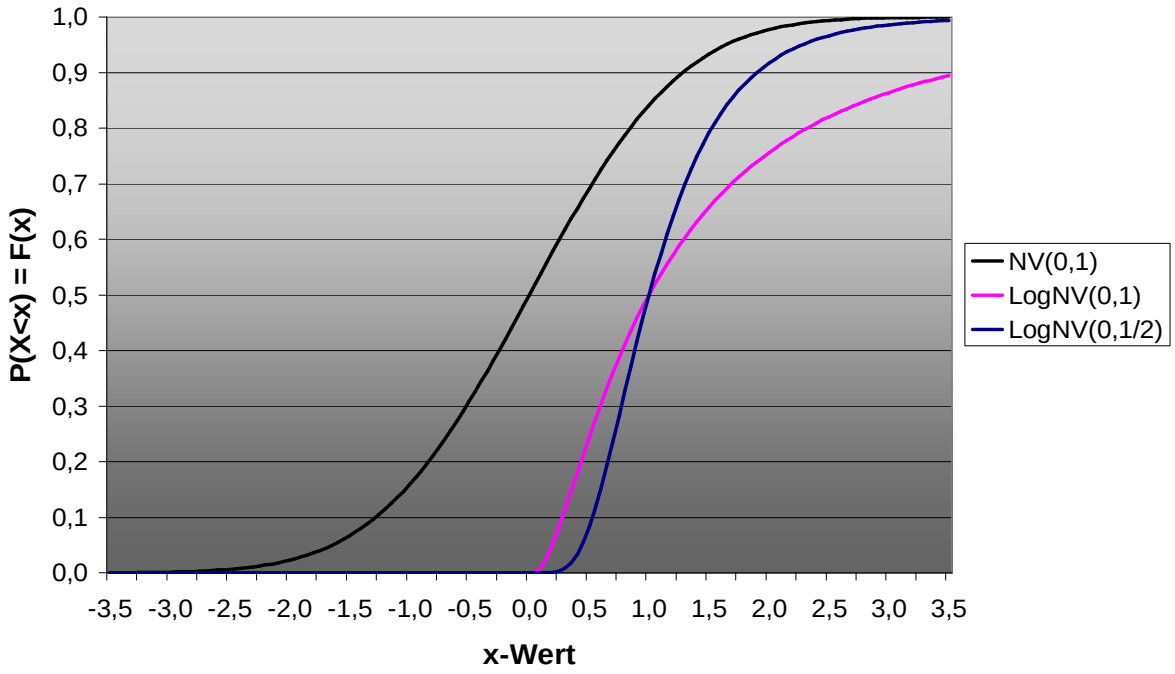

Abb. 3.1: (Stetige) Verteilungsfunktionen

3.2.2 Wahrscheinlichkeits(-dichte)funktion

Definition Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für eine diskrete Zufallsvariable X wird mit $p_X(x)$ bzw. p(x) bezeichnet, sie gibt die jeweilige Punktwahrscheinlichkeit für endlich viele x an und ist durch

$$p_X(x) = P(X = x) \qquad \text{definiert.}$$

Die Summe aller Punktwahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben, und man kann den Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle x wie folgt erhalten:

$$F(x) = \sum_{y \le x} p(y) .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausgang eines Zufallsexperiments zwischen zwei Punkten a und b liegt, kann man somit durch

$$P(a < X \le b) = \sum_{y \le b} p(y) - \sum_{y \le a} p(y)$$

berechnen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bzw. Dichtefunktion $f_X(x)$ einer stetigen Zufallsvariable ist die Ableitung ihrer Verteilungsfunktion. Sie ist nur an jenen Punkten definiert, an denen die entsprechenden Ableitungen existieren. Die Fläche unter der Dichtefunktion muss immer den Inhalt 1 besitzen, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 .$$

Der Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion wird bei stetigen Zufallsvariablen über Integral und Differential definiert, es gilt:

- Die Verteilungsfunktion F erhält man als Integral über die Dichtefunktion, formal als $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ dargestellt.
- Ist die Verteilungsfunktion F differenzierbar, so ist ihre Ableitung die Dichtefunktion der zugehörigen Verteilung, formal $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausgang eines Zufallsexperiments zwischen zwei Punkten a und b liegt, kann man somit in diesem Fall durch

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ berechnen.}$$

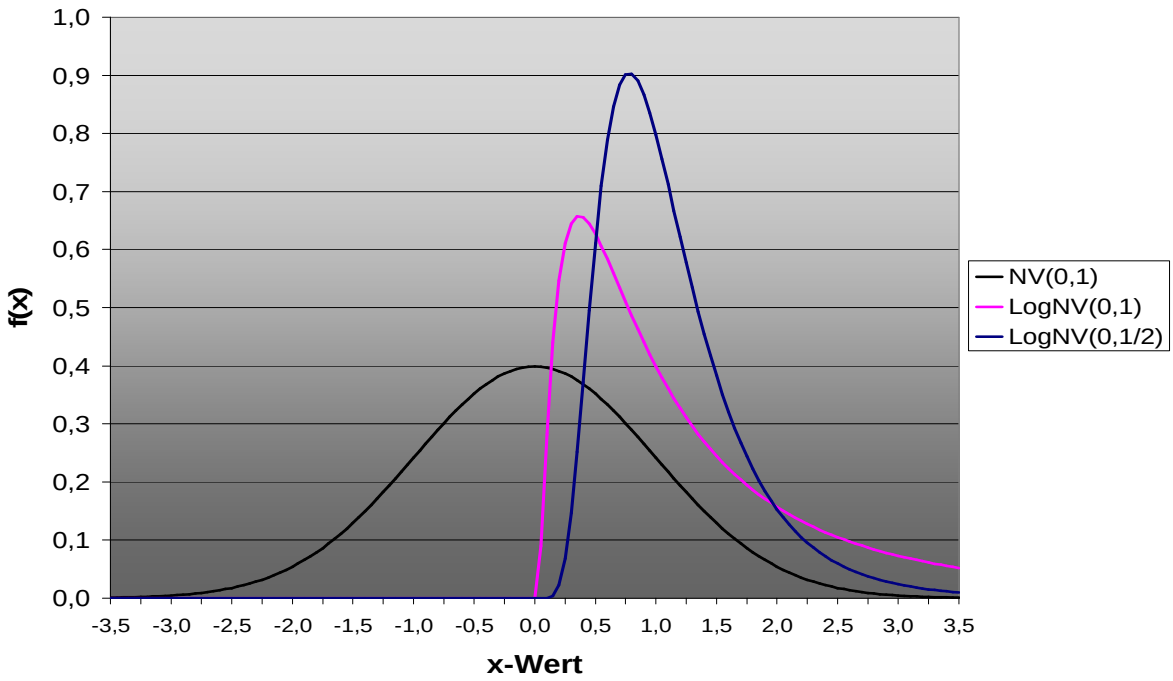

Abb. 3-2: Dichtefunktionen

3.2.3 Moment- und Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen

Zur Berechnung von Erwartungswert, Varianz sowie weiteren (zentralen) Momenten von diskreten und stetigen Verteilungen werden diese beiden Funktionen benötigt. Weitere erzeugende Funktionen sind außerdem die charakteristische Funktion[3] sowie die kumulantenerzeugende Funktion[4], der Logarithmus der momenterzeugenden Funktion.

Definition Für eine ZV X ist die momenterzeugende Funktion definiert als $M_X(t) = E\left[e^{t \cdot X}\right]$, und zwar für alle t, für die der entsprechende Erwartungswert existiert. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist $P_X(z) = E\left[z^X\right]$, für alle z, für die der Erwartungswert existiert.

Die Bezeichnung momenterzeugend rührt daher, dass die k-te Ableitung von M_X im Punkt Null gleich dem k-ten Moment der ZV X ist, also

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = E\left[X^k\right] = m_X^k,$$

wobei m_X^k dem k-ten Moment entspricht (für k=1 bspw. der Erwartungswert). Die MEF bestimmt die Verteilung einer ZV eindeutig. Haben also die ZV X und Y die gleiche MEF, so sind sie ident.

Für N_0-wertige ZV X mit endlichem k-ten Moment ist $E\left[\binom{X}{k}\right] = \frac{P_X^{(k)}}{k!}$.

Damit lassen sich mittels der WEF Erwartungswerte und Varianzen von solchen ZV wie folgt ermitteln:

$$E(X) = P'(1).$$

$$Var(X) = P''(1) + P'(1) - P'(1)^2.$$

---

[3] Die charakteristische Funktion einer Verteilung ist definiert als $\varphi_X(t) = E\left[e^{i \cdot t \cdot X}\right]$, t ϵ R. Sie existiert immer auf ganz R.

[4] Die kumulantenerzeugende Funktion ist definiert durch $L_X(t) = \ln M_X(t) = \ln E\left[e^{t \cdot X}\right]$.

Es gilt der Zusammenhang $M_X(t) = P_X\left(e^t\right)$ und $P_X(z) = M_X(\ln z)$, wobei die MEF meist für stetige, die WEF für diskrete ZV verwendet wird. Beide haben nützliche Eigenschaften für die Berechnung von Summen von ZV. Dies wird nun anhand eines Theorems und eines Beispiels erläutert.

Theorem Sei $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$, wobei die ZV voneinander unabhängig sind. Dann haben MEF und WEF folgenden Gestalt:

$$M_{S_k}(t) = \prod_{j=1}^{k} M_{X_j}(t) \qquad \text{und} \qquad P_{S_k}(z) = \prod_{j=1}^{k} P_{X_j}(z),$$

vorausgesetzt, dass alle MEF und WEF für die einzelnen ZV existieren.

Beweis:

$$M_{S_k}(t) = E\left[e^{t\cdot S_k}\right] = E\left[e^{t\cdot(X_1+X_2+...+X_k)}\right]$$
$$= \prod_{j=1}^{k} E\left[e^{t\cdot X_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} M_{X_j}(t).$$

Dieses Theorem soll nun anhand eines konkreten Beispiels, nämlich von gammaverteilten ZV, welche den gleichen Skalierungsparameter β haben, veranschaulicht werden.

Beispiel: Die MEF einer gammaverteilten ZV X ist definiert durch

$$E\left[e^{t\cdot X}\right] = \frac{\int_0^\infty e^{t\cdot x} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(-t+1/\beta)} dx}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$$
$$= \frac{\int_0^\infty y^{\alpha-1}(-t+1/\beta)^{-\alpha} e^{-y} dy}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)(-t+1/\beta)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot t}\right)^\alpha, t < 1/\beta.$$

Nun seien X_j gammaverteilte ZV mit Parameter α_j und β. Dann ist die MEF ihrer Summe

$$M_{S_k}(t) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{1-\beta\cdot t}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k},$$

was der MEF einer Gammaverteilung mit Parameter $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ und β entspricht.

3.3 Schadenzahlverteilung

Um die erwartete Schadenanzahl bzw. die Schadenfrequenz in einem Zeitintervall zu berechnen, benötigt man sogenannte Zählverteilungen. Dies sind diskrete Verteilungen, die nur ganzzahlige, nichtnegative Werte annehmen (nur definiert bei 0, 1, 2, 3….). Die gängigsten dieser Verteilungen sind[5]:

- Poissonverteilung, N ~ Po(λ)
- Negative Binomialverteilung, N ~ NB(r, β)
- Binomialverteilung, N ~ Bin(m, p).

Für eine geeignete Wahl der Verteilung spielt die jeweilige Varianz der empirischen Daten eine wichtige Rolle. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_k gibt hier die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k Schäden eintreten:

$$p_k = P(N = k), \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

wobei N eine ZV ist, welche die Anzahl der Schäden repräsentiert.

3.3.1 Poissonverteilung

Sie ist die am häufigsten verwendete Verteilung und hat die nützliche Eigenschaft, dass sowohl Erwartungswert als auch Varianz gleich dem Parameter λ der Verteilung sind. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit von genau k eintretenden Schäden wieder. Man sagt, dass die ZV N unter folgenden Bedingungen poissonverteilt ist:[6]

- Die Schadenanzahlen in zwei disjunkten[7] Teilintervallen des betrachteten Zeitraums sind voneinander unabhängig.
- Keine zwei oder mehr Schäden treten zum exakt gleichen Zeitpunkt ein.
- Die Schäden treten nicht bevorzugt an bestimmten Zeitpunkten ein.

[5] Aus [1], Seite 72ff.

[6] Aus [2], Seite 78.

[7] In diesem Fall bedeutet disjunkt, dass es zwischen den Teilintervallen keine Überschneidungen gibt.

Definition Eine ZV N mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_k = P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2\ldots,\ \lambda>0$$

heißt poissonverteilt mit dem Parameter λ, kurz N ~ Po(λ).

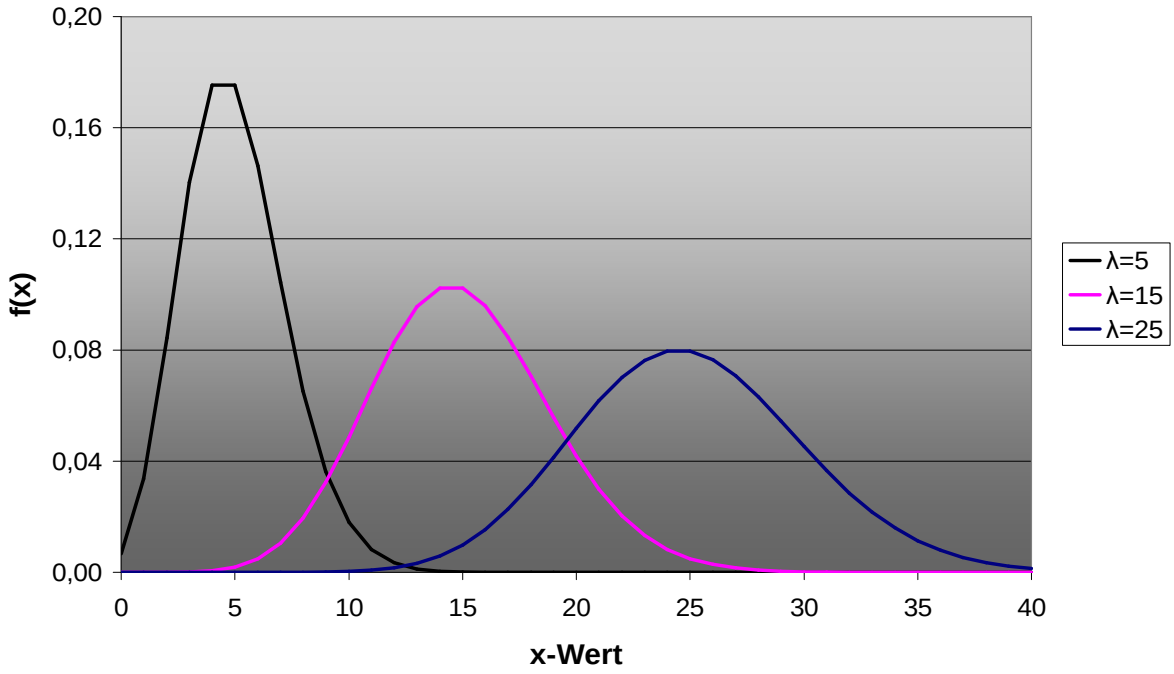

Abb. 3-3: Poissonverteilung - Wahrscheinlichkeitsfunktion

Daraus folgt, dass die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion folgende Gestalt hat:

$$P_X(z) = E(z^X) = e^{\lambda\cdot(z-1)},\qquad \lambda>0.$$

Beweis:

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(z\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{z\cdot\lambda} = e^{\lambda\cdot(z-1)}.$$

Erwartungswert und Varianz erhält man daraus wie folgt:

$$E[N] = P'(1) = \lambda .$$

$$E[N \cdot (N-1)] = P''(1) = \lambda^2 .$$

$$Var[N] = E[N \cdot (N-1)] + E[N] - E[N]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Bei VU werden üblicherweise in einem Unternehmen mehrere Sparten versichert (z.B. Feuer-, Haushalts-, KFZ- und Unfallversicherung). Weiters besteht in jeder Sparte die Möglichkeit unterschiedlicher Schäden (z.B. Sparte Unfallversicherung → Unfallinvalidität, Unfalltod, Taggeld, Spitalgeld etc.). Um den Gesamtschaden in einer Sparte oder im gesamten Unternehmen zu berechnen, sind die folgenden Eigenschaften der Poissonverteilung sehr nützlich:

Theorem Seien $N_1, \ldots, N_n$ unabhängige poissonverteilte Zufallsgrößen mit Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann hat $N = N_1 + \ldots + N_n$ eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Beweis:

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{n} P_{N_j}(z) = \prod_{j=1}^{n} \exp[\lambda_j (z-1)]$$
$$= \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (z-1)\right] = e^{\lambda \cdot (z-1)}.$$

Theorem Angenommen die Anzahl an Ereignissen N ist eine poissonverteilte ZV mit Mittelwert λ. Weiters sei angenommen, dass jedes Ereignis, unabhängig von allen anderen Ereignissen, einer von m Gruppen mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ zugeordnet werden kann. Dann sind die Mengen an Ereignissen $N_1, \ldots, N_m$, entsprechend den Gruppen 1, …, m voneinander unabhängige poissonverteilte ZV mit Mittelwerten $\lambda p_1, \ldots, \lambda p_m$.[8]

[8] Beweis siehe [1], Seite 75.

3.3.2 Negative Binomialverteilung

Neben der Poissonverteilung ist die negative Binomialverteilung jene Verteilung, die am häufigsten zur Messung der Anzahl an Schäden in der Versicherungsmathematik verwendet wird. Da sie im Gegensatz zur Poissonverteilung von 2 Parametern abhängt, ist sie etwas flexibler in ihrer Gestalt. Es gibt 2 mögliche Definitionen, einerseits kann man die Anzahl n der Verträge bis zum r-ten Schaden zählen, in unserer Version zählen wir jedoch die Anzahl der Schäden k bis zum r-ten schadenfreien Vertrag. Über β steuert man die Erfolgswahrscheinlichkeit, in unserem Fall also die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden eintritt. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit von genau k Schäden bis zum r-ten schadenfreien Vertrag wieder.

Definition Eine ZV N heißt negativ binomialverteilt mit den Parametern r und β, in Zeichen N ~ NB(r, β), wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben ist durch

$$p_k = P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2\ldots, r > 0, \beta > 0.$$

Zur Veranschaulichung sieht man auf der nächsten Seite 2 Grafiken zur Wahrscheinlichkeitsfunktion der negativen Binomialverteilung, zuerst mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit und variierender Erfolgsanzahl, in der zweiten Grafik dann genau umgekehrt.

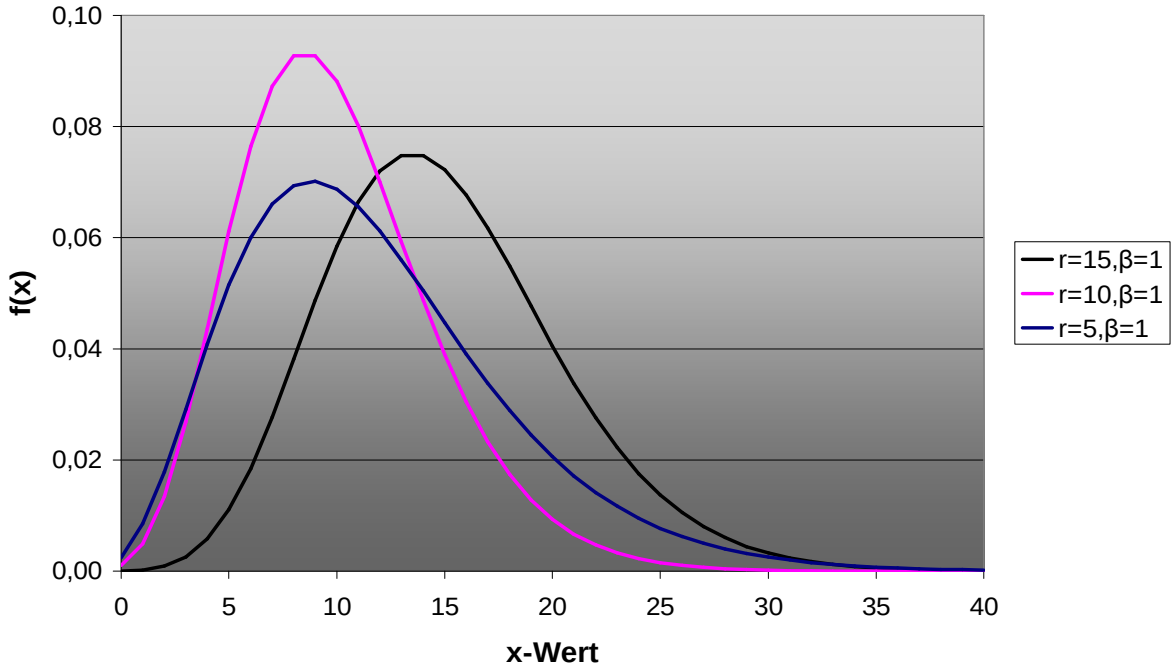

Abb. 3-4: Negative Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I

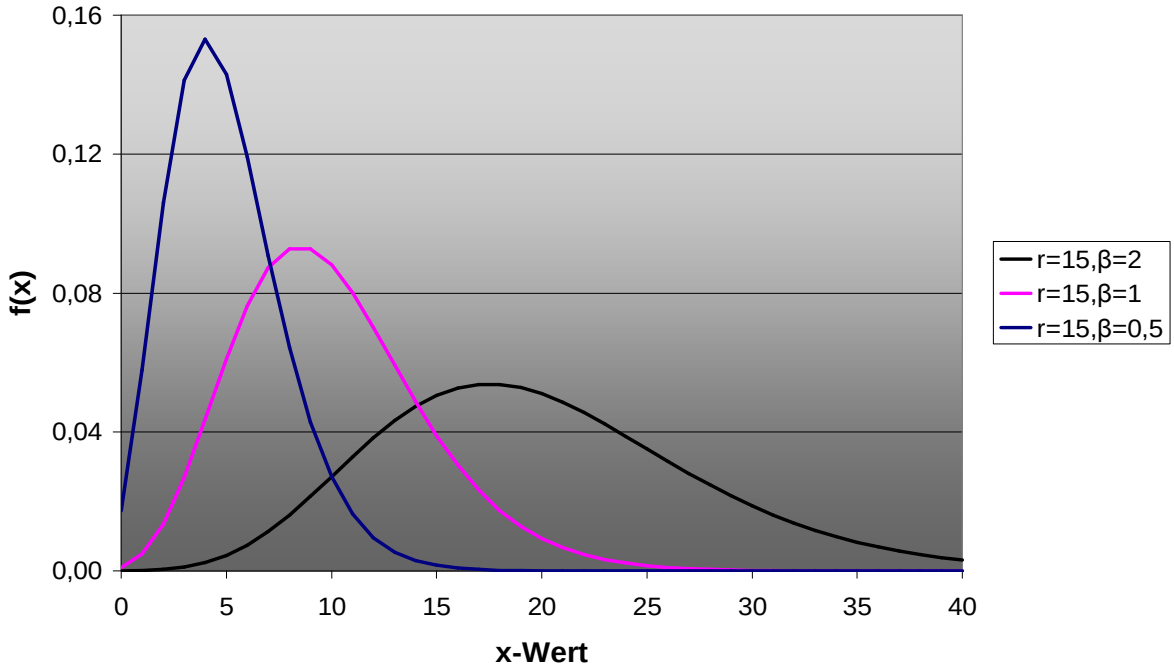

Abb. 3-5: Negative Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion hat folgende Gestalt:

$$P(z) = \left[1 - \beta(z-1)\right]^{-r}.$$

Somit erhält man für den Erwartungswert und die Varianz:

$$E[N] = P'(1) = r \cdot \beta.$$

$$E[N \cdot (N-1)] = P''(1) = r \cdot \beta^2 (1+r).$$

$$Var[N] = E[N \cdot (N-1)] + E[N] - E[N]^2 = r \cdot \beta + r \cdot \beta^2 (1+r) - r^2 \beta^2 = r \cdot \beta \cdot (1+\beta).$$

Da β positiv ist, übersteigt die Varianz der negativen Binomialverteilung ihren Erwartungswert. Dies ist anders als bei der Poissonverteilung, bei welcher Varianz und Erwartungswert ident sind. Hat man also beobachtete Daten, deren empirische Varianz größer als der empirische Erwartungswert ist (man spricht in diesem Fall von Überdispersion), so ist die negative Binomialverteilung als Modell geeignet.

3.3.3 Binomialverteilung

Eine weitere Verteilung zur Modellierung der Schadenanzahl ist die Binomialverteilung. Sie unterscheidet sich von den beiden vorhin genannten dadurch, dass die Varianz bei ihr kleiner als der Erwartungswert ist. Somit ist sie ideal als Modell für Daten, bei denen die empirische Varianz kleiner als der empirische Erwartungswert ist (Unterdispersion). Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit von genau k Schäden bei m Mitgliedern der beobachteten Gruppe wieder.

Definition Die ZV N heißt binomialverteilt mit den Parametern m und p, in Zeichen N ~ Bin(m, p), wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N gegeben ist durch

$$p_k = P(N = k) = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \qquad k = 0, 1, 2\ldots, 0 < q < 1.$$

Zur Veranschaulichung sieht man in den nachfolgend angeführten zwei Grafiken zur Dichte, wie sich zum einen die Variation der Gruppenmitglieder bei konstanter Schadenwahrscheinlichkeit, zum anderen die Variation der Schadenwahrscheinlichkeit bei einer konstanten Gruppengröße auswirken.

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Binomialverteilung hat die Darstellung

$$P(z) = [1 + q \cdot (z-1)]^m .$$

Es gilt in weiterer Folge für Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung:

$$E[N] = P'(1) = m \cdot q .$$

$$E[N \cdot (N-1)] = P''(1) = m \cdot q^2 (m-1) .$$

$$Var[N] = E[N \cdot (N-1)] + E[N] - E[N]^2 = m \cdot q + m \cdot q^2 (m-1) - m^2 q^2 = m \cdot q \cdot (1-q) .$$

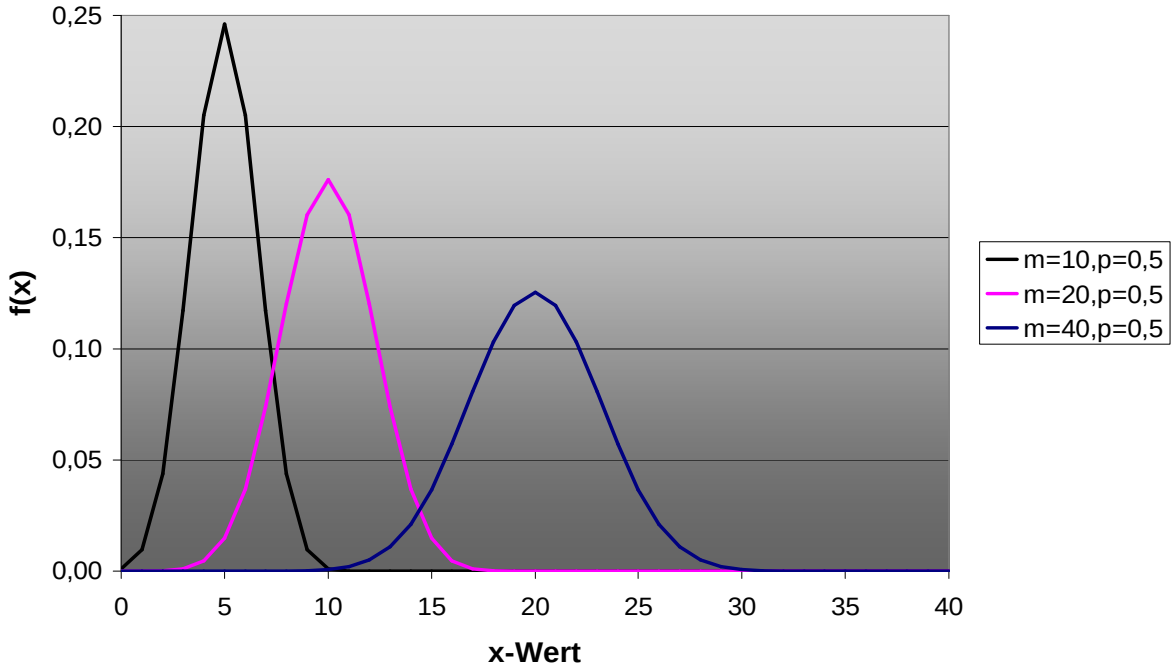

Abb. 3-6: Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I

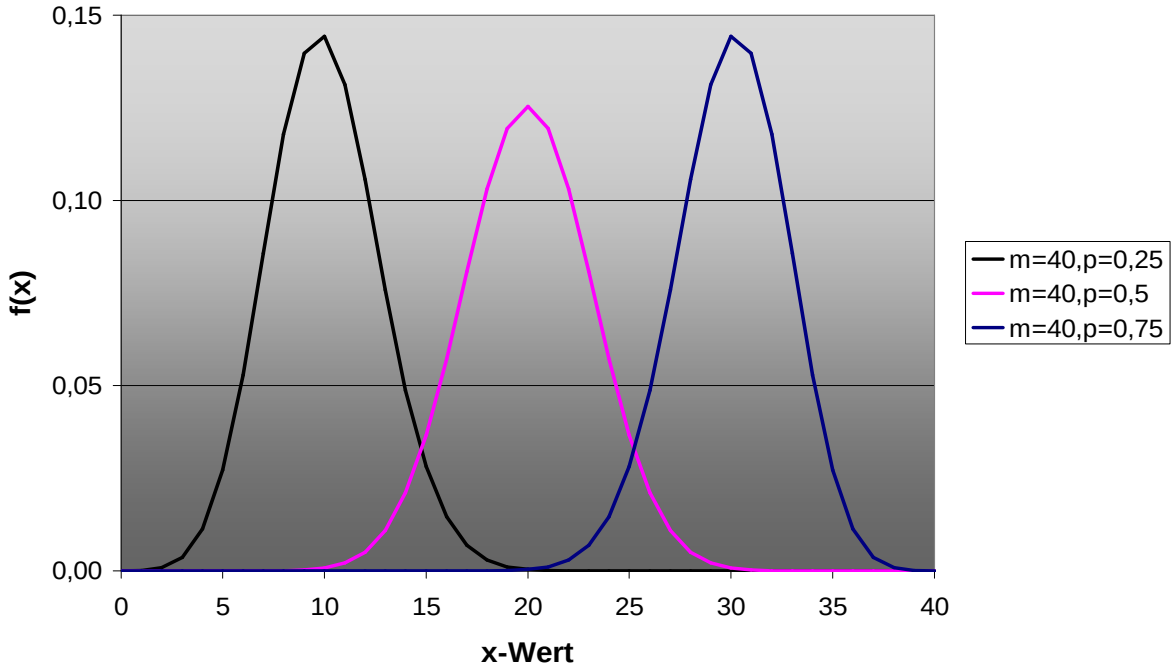

Abb. 3-7: Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II

3.4 Schadenhöhenverteilungen

Neben der Schadenanzahl N ist die Schadenhöhe X die zweite wichtige Komponente bei der Ermittlung des Gesamtschadens. Somit ist es wichtig, möglichst genau über das Verhalten und die Verteilung der auftretenden Schadenhöhen Bescheid zu wissen, da meist wenige Großschäden für einen nicht unerheblichen Part des Gesamtschadens verantwortlich sind.

Die Schadenhöhe X hat folgende Eigenschaften:

- $X > 0$.
- X ist rechtsschief, d.h. die Schiefe[9] von X ist positiv.
- X ist subexponentiell.

Definition[10] Eine Zufallsvariable $X \geq 0$ und ihre zugehörige Verteilungsfunktion F heißen subexponentiell, falls $F(x) < 1$ für alle x und für eine u.i.v.[11] Folge X_n, mit $X_n \sim F$ gilt:

$$P(S_n > x) = P(M_n > x) \cdot (1 + o(1)), \qquad \text{für } x \to \infty, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dabei ist $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ und $M_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

Verteilungen, die diese Eigenschaften erfüllen, sind unter anderem die logarithmische Normalverteilung, die Paretoverteilung sowie die Weibullverteilung. Es kann aber auch interessant sein, andere Verteilungen, wie z.B. die Gamma-Verteilung, als Maß für die Schadenhöhen zu benutzen. Obwohl diese nicht subexponentiell ist, wird sie dennoch manchmal gerne verwendet, wenn etwa keine Schäden in extremer Höhe zu erwarten sind oder wenn bei der Modellierung andere Aspekte im Vordergrund stehen.

---

[9] Die Schiefe v ist das auf die dritte Potenz der Standardabweichung bezogene zentrale Moment 3.Ordnung und gibt die „Neigungsstärke" der Verteilung wieder. Bei rechtsschiefen Verteilungen sind Werte, die kleiner als der Mittelwert sind, häufiger zu beobachten. Bei linksschiefen ist es umgekehrt. Bei der Normalverteilung ist $v = 0$, Verteilungen mit $v > 0$ sind rechtsschief, jene mit $v < 0$ linksschief.

[10] Näheres siehe [3], Seite 109 ff.

[11] Die Abkürzung u.i.v. steht für unabhängig und identisch verteilt.

3.4.1 Logarithmische Normalverteilung

Die logarithmische Normalverteilung ist die einzige der subexponentiellen und somit „richtigen“ Schadenhöhenverteilungen, die im Detail vorgestellt wird. Um ausführliche Informationen zu Pareto- und Weibullverteilung sowie weiteren möglichen Schadenhöhenverteilungen zu erhalten, sei auf [6] (für die Paretoverteilung) und [7] (für die Weibullverteilung) verwiesen.

Definition[12] Eine Zufallsvariable X, die nur Werte größer als 0 annehmen kann, heißt logarithmisch normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, wenn die transformierte ZV $Y = \ln(X)$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ^2. Man schreibt kurz $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

Es gilt die Äquivalenz[13]

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad X := e^Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

d.h. der Logarithmus einer logarithmisch-normalverteilten ZV ist normalverteilt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit von Schäden der Höhe x wieder und ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{für alle } \mu \in R, \sigma \in R^+.$$

Dabei entspricht μ dem Erwartungswert von $\ln(X)$ und σ^2 der Varianz von $\ln(X)$. Die Dichtefunktion nimmt ihren Maximalwert

$$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu \right)$$

an der Stelle $x = \exp(\mu - \sigma^2)$ an.

[12] Siehe [6], Seite 245.

[13] Siehe [4], Seite 45 ff.

Es existieren alle Momente der logarithmischen Normalverteilung, welche mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion der Normalverteilung wie folgt zu erhalten sind:

$$E\left[X^n\right] = E\left[\left(e^Y\right)^n\right] = E\left[e^{n\cdot Y}\right] = \varphi_Y(n) = \exp\left(n\cdot\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right), \quad n \in R.$$

Somit gilt also für Erwartungswert und Varianz von X ~ LN(μ, σ^2):

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

$$Var[X] = \exp\left(2\cdot\mu + \sigma^2\right)\cdot\left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right).$$

In den Grafiken zur Wahrscheinlichkeitsfunktion erkennt man sehr gut die Abhängigkeit der Funktion von den beiden Parametern. So führt ein Anstieg des Parameters μ zu einer flacheren Kurve, wogegen steigendes σ^2 eine steilere, spitzere Kurve zur Folge hat.

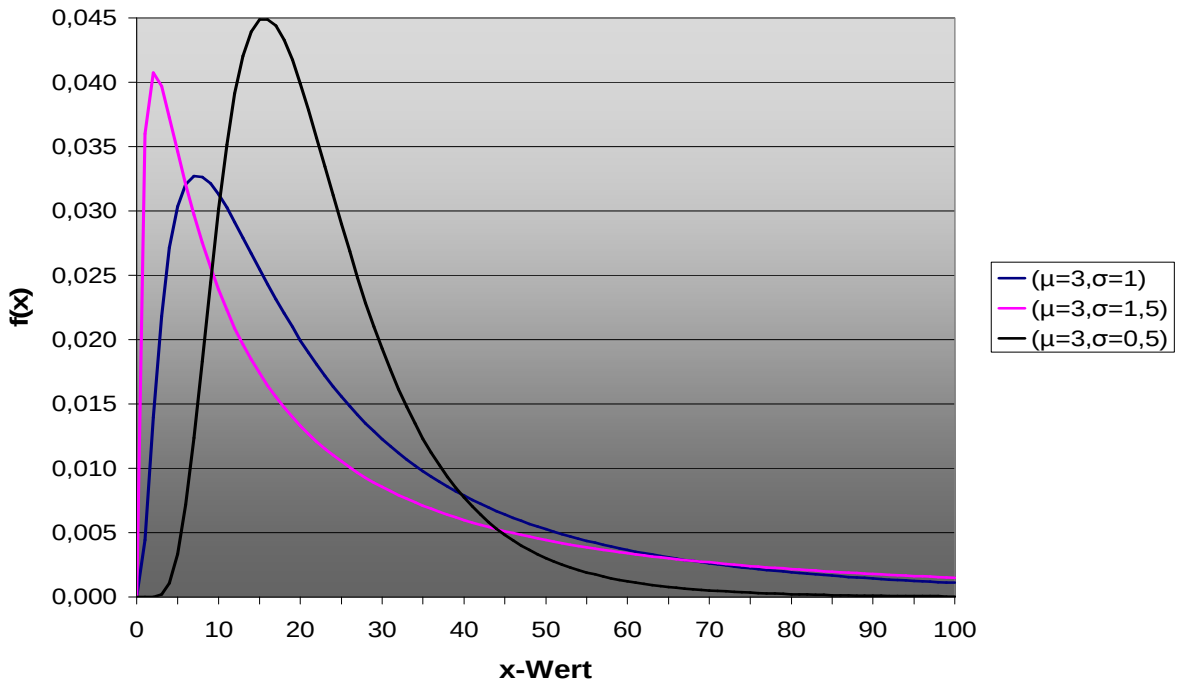

Abb. 3-8: Logarithmische Normalverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I

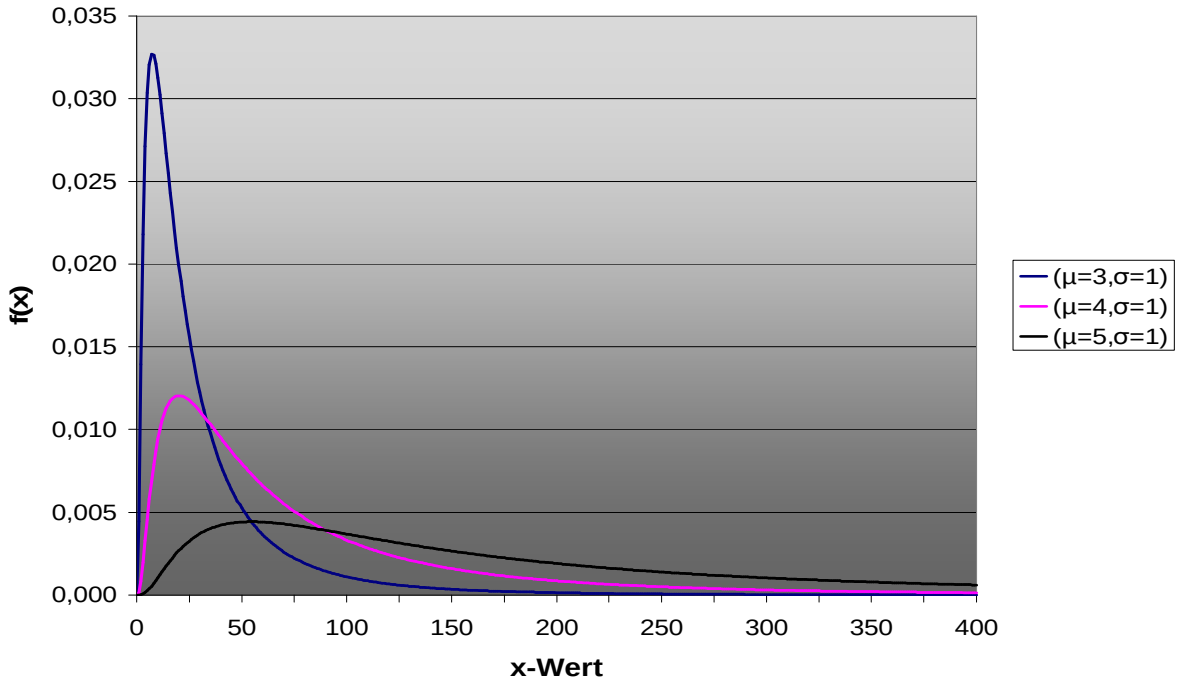

Abb. 3-9: Logarithmische Normalverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II

3.4.2 Gammaverteilung

Wie bereits vorhin erwähnt, ist die Gammaverteilung keine „klassische“ Schadenhöhenverteilung, da sie nicht subexponentiell ist. Da es aber in der Versicherungswirtschaft auch Sparten und in diesen wiederum Branchen gibt, in denen die Höhe der einzelnen Schäden beschränkt ist, wird die Möglichkeit von gammaverteilten Schadenhöhen ebenfalls in Betracht gezogen.

Zunächst ist es nötig, die Gamma-Funktion zu definieren (aus [6]).

Definition Für jede reelle Zahl k > 0 ist die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} \cdot e^{-x}\, dx\,.$$

Für sie gilt:

- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$, für alle reellen k > 0.
- $\Gamma(k+1) = k!$, für k = 1, 2, 3,….

Damit erhält man in weiterer Folge:

Definition Eine ZV X heißt gammaverteilt mit den Parametern α und β, in Zeichen X ~ GA(α, β), wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^{\alpha}}, \qquad x > 0,\ \alpha, \beta > 0.$$

Dabei ist α ein Form- und β ein Skalierungsparameter.

Die momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung ist definiert mittels

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \frac{1}{(1-\beta \cdot t)^{\alpha}}, \qquad t > \frac{1}{\beta}.$$

Somit gilt für den Erwartungswert und die Varianz von X ~ Ga(α, β)

$$E[X] = \alpha \cdot \beta.$$

$$Var[X] = \alpha \cdot \beta^2.$$

In den nachfolgenden Grafiken sieht man wiederum die Auswirkung einer Variation der entsprechenden Parameter auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion. Bei der zweiten Grafik handelt es sich um Spezialfälle der Gammaverteilung, nämlich um Exponentialverteilungen. Diese erhält man, wenn der Formparameter α = 1 ist.

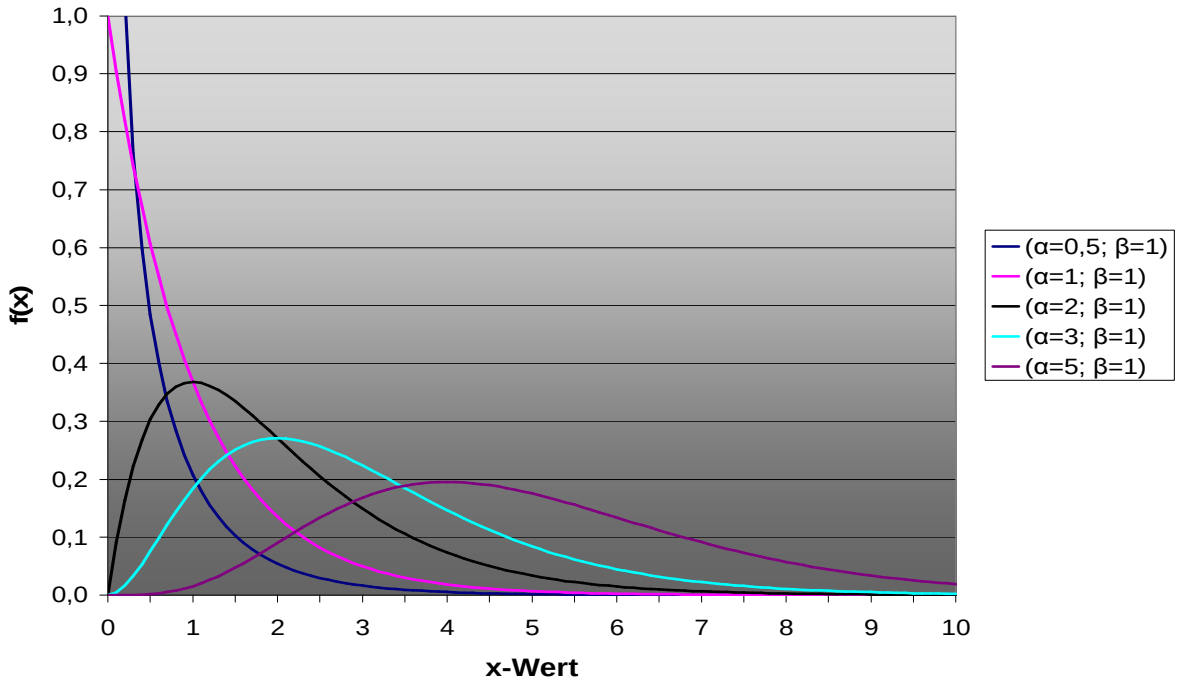

Abb. 3-10: Gammaverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion I

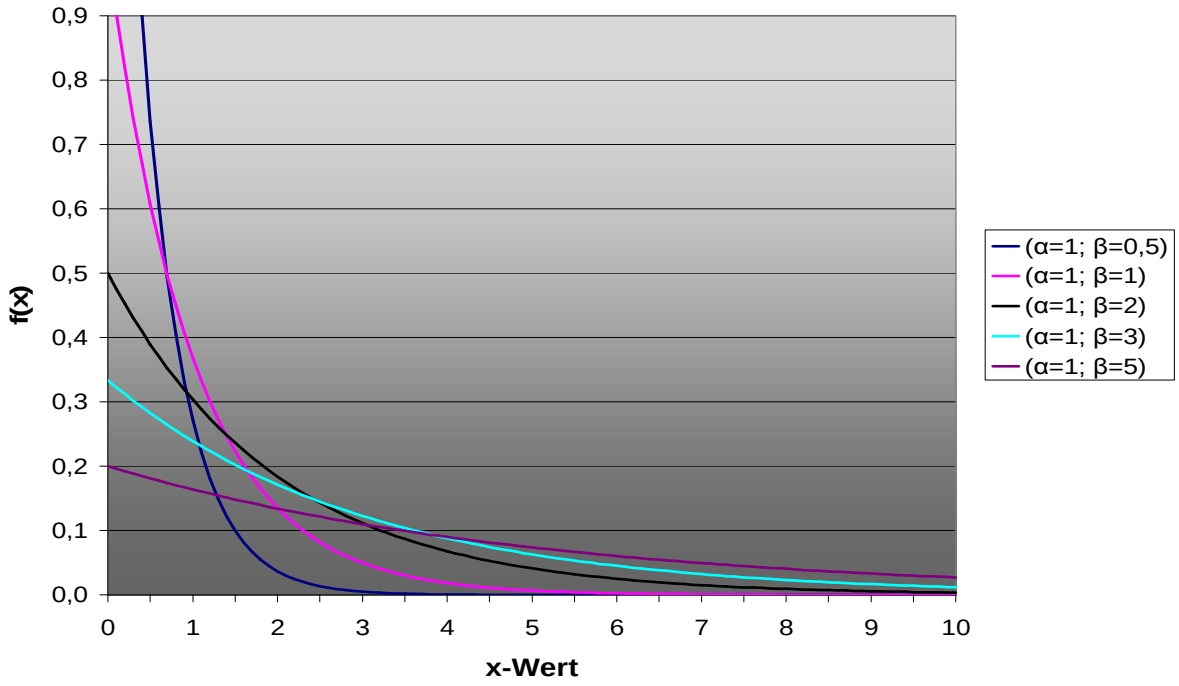

Abb. 3-11: Gammaverteilung – Wahrscheinlichkeitsfunktion II

3.5 Berechnung des Gesamtschadens

Wenn man sowohl über die Verteilung der Schadenanzahl als auch über jene der Schadenhöhen Bescheid weiß, ist es möglich, die Verteilung sowie die Momente des erwarteten Gesamtschadens zu berechnen.

Definition[14] Sei N die Schadenanzahl des gegebenen Portfolios in der jeweiligen Periode (meist ein Jahr). Seien u.i.v. $X_1, X_2, ..., X_N$ die zugehörigen Schadenhöhen, deren Verteilung nicht von N abhängt. Dann ist

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_N$$

(mit der Konvention S = 0, falls N = 0) der Gesamtschaden.

Die Momente von S können aus jenen von N und X wie folgt berechnet werden:

$$E[S] = E_N\left[E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \middle| N\right)\right] = E_N\left[\sum_{n=1}^{N} E(X_n | N)\right]$$

$$= E_N[N \cdot E(X)] = E[N] \cdot E[X].$$

$$Var[S] = E_N[Var(S|N)] + Var_N[E(S|N)]$$

$$= E_N[N \cdot Var(X)] + Var_N[N \cdot E(X)]$$

$$= E[N] \cdot Var[X] + Var[N] \cdot E[X]^2.$$

[14] Siehe [2], Seite 109.

Um die Berechnung der VF des Gesamtschadens vornehmen zu können, ist ein Werkzeug notwendig, welches die Dichte der Summe von 2 ZV berechnen kann.

Definition (Faltung) Seien X, Y zwei unabhängige ZV mit entsprechender VF F beziehungsweise G. Dann hat ihre Summe $Z = X + Y$ die VF $H = F * G$. Für die Dichten gilt:

$$h(x) = \int_0^x f(y) \cdot g(x-y)dy .$$

Die VF des Gesamtschadens ist daher von der Form

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S \le x) = P(N=0) + P(N=1) \cdot P(X_1 \le x) + P(N=2) \cdot P(X_1 + X_2 \le x) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot P(S \le x \mid N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot F_X^{*n}(x), \end{aligned}$$

wobei $F_X(x) = P(X \le x)$ die VF von X ist und F_X^{*n} ihre n-fache Faltung.

Ist die Schadenanzahl bspw. poissonverteilt (d.h. die Varianz ist gleich dem Erwartungswert), so haben Erwartungswert, Varianz und die VF des Gesamtschadens folgende Gestalt:

$$E[S] = E[N] \cdot E[X].$$

$$Var[S] = E[N] \cdot Var[X] + Var[N] \cdot E[X]^2 = E[N] \cdot E[X^2].$$

$$F_S(x) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F_X^{*n}(x).$$

Im Allgemeinen ist die explizite Berechnung der Verteilung des Gesamtschadens sehr schwierig und nur selten möglich (etwa wenn N geometrisch verteilt und die X_i exponentialverteilt sind).[15]

[15] Nähere Ausführungen dazu siehe[3], Seite 115ff.

3.6 Schadenreservierungsverfahren

Ein wichtiger Aspekt bei der Prognose von sogenannten „Endschäden“[16] ist die Handhabung und Methodik der Schadenreservierung. Diese kann individuell (d.h. je Fall) oder pauschal (für ganze Bestände) vorgenommen werden. Meist wird für bereits gemeldete Schäden die Schadenreserve einzeln gebildet, während für bereits eingetretene, jedoch noch nicht gemeldete Schäden, sogenannte Spätschäden (IBNR-Schäden[17]), ein pauschaler Ansatz gewählt wird.

Die Einzelschadenreserven für bereits gemeldete Schäden bedürfen keiner Modellierung. Bei ihnen besteht das Hauptrisiko darin, dass je Fall zu wenig reserviert wurde und der Schaden am Ende der Abwicklung höher als zunächst erwartet ist (sog. IBNER-Schäden[18]).

Für die Ermittlung der adäquaten pauschalen Spätschadenreserven gibt es verschiedene Verfahren, unter anderem sind dies[19]

- Expected-Loss-Verfahren
- Chain-Ladder-Verfahren
- Bornhuetter-Ferguson-Verfahren
- Grossing-Up-Verfahren.

Im Zuge dieser Diplomarbeit wird nur das Chain-Ladder-Verfahren im Detail vorgestellt. Bei diesem handelt es sich um ein Loss-Development-Verfahren, welches auf sogenannten „Schadendreiecken“ bzw. „Abwicklungsdreiecken“ aufbaut. Das Schadendreieck ist eine zweidimensionale Anordnung von Schadendaten (Schadenanzahl, Schadenzahlungen bzw. Schadenaufwand), wobei die eine Dimension das Schadenjahr (Meldejahr, …) und die andere Dimension das Abwicklungsjahr (= Kalenderjahr – Schadenjahr; oder = Kalenderjahr – Meldejahr, …) abbildet. Man versucht in weiterer Folge aus dem Dreieck ein Abwicklungsmuster zu erkennen, welches dann, entweder additiv oder multiplikativ, auf die jüngeren Schadenjahre angewendet wird.

[16] Der Endschaden entspricht dem endgültigen Schaden, der für ein Anfalljahr bezahlt wird, d.h. er steht fest, wenn alle Schäden aus dem jeweiligen Anfalljahr abgewickelt sind.

[17] IBNR = incurred but not reported.

[18] IBNER = incurred but not enough reserved.

[19] Details siehe [9] sowie für Chain-Ladder auch [3].

3.6.1 Chain-Ladder-Verfahren

Tab. 3-1: Schadendreieck

Anfalljahr	**Abwicklungsjahr**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$	$S_{1,3}$	$S_{1,4}$	$S_{1,5}$
2	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	$S_{2,3}$	$S_{2,4}$	
3	$S_{3,1}$	$S_{3,2}$	$S_{3,3}$		
4	$S_{4,1}$	$S_{4,2}$			
5	$S_{5,1}$				

Sei $S_{i,k}$ die Zahlung, welche im Kalenderjahr i+k-1 für das Schadenjahr i geleistet wurde ($1 \le i \le I$, $1 \le k \le K$). Dann bildet die Matrix $(S_{i,k})_{1\le i\le I, 1\le k\le I-i+1}$ das Schadendreieck.

Sei $C_{i,1} = S_{i,1}$ und $C_{i,k} = C_{i,k-1} + S_{i,k}$, dann ist das kumulierte Schadendreieck gegeben durch die Matrix $(C_{i,k})_{1\le i\le I, 1\le k\le I-i+1}$.

Tab. 3-2: kumuliertes Schadendreieck

Anfalljahr	**Abwicklungsjahr**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$		
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$			
5	$C_{5,1}$				

Gesucht ist der Endschaden $C_{i,\infty}$ je Anfalljahr i. Somit gilt für die Reserve des jeweiligen Anfalljahres $R_i = C_{i,\infty} - C_{i,I-i+1}$, und die Gesamtreserve ist die Summe der Reserven für die einzelnen Anfalljahre.

Bei einem multiplikativen Loss-Development-Modell erhält man Abwicklungsfaktoren $F_{i,k}$ dargestellt in Form von:

$$F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}.$$

Dann gilt:

$$C_{i,k+1} = C_{i,k} \cdot F_{i,k} = C_{i,1} \cdot F_{i,1} \cdot F_{i,2} \cdot F_{i,3} \ldots \cdot F_{i,k},$$

wobei die $F_{i,k}$ der multiplikativen Zunahme des Schadenstandes von einem Jahr auf das nächste entsprechen.

Im CL-Modell sind folgende Annahmen zugrunde gelegt:

- die $F_{i,k}$ haben einen vom Anfalljahr unabhängigen Erwartungswert:

  $E[F_{i,k}] = f_k, \qquad (1 \le i \le I,\ 1 \le k \le I-1)$

- $C_{i,\infty} = C_{i,I}$.

Die f_k geben also die durchschnittliche Steigerung des Schadenstandes von Abwicklungsjahr k auf Abwicklungsjahr k+1 an. Im CL-Modell werden diese als ein mit den $C_{i,k}$ gewichtetes arithmetisches Mittel berechnet und Chain-Ladder-Faktoren genannt.

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} F_{i,k} \cdot C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} = \sum_{i=1}^{I-k} \frac{C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \cdot F_{i,k} = \sum_{i=1}^{I-k} W_{i,k}^{CL} \cdot F_{i,k} \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{I-k} W_{i,k}^{CL} = 1.$$

Somit folgt in diesem Modell für die Schadenendstände und für die jeweiligen Reserven:

$$\hat{C}_{i,I} = C_{i,I-i+1} \cdot \hat{f}_{I-i+1} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,I} - C_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} \cdot \left(\prod_{n=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_n - 1 \right).$$

Um in der Praxis gute Ergebnisse liefern zu können, müssen die Schadendreiecke groß und gut befüllt sein. Die Problemzonen sind die rechte obere sowie die linke untere Ecke des Schadendreiecks. In der Regel wird angenommen, dass sich im Laufe der Schadenjahre am Abwicklungsverhalten nichts verändert, in der Realität hat sich jedoch oftmals durch effizientere Schadenabwicklungsprozesse die Abwicklungsgeschwindigkeit verbessert.

Im erweiterten CL-Verfahren trägt man dem Problem Rechnung, dass die Annahme $C_{i,\infty} = C_{i,I}$ nicht immer gilt, etwa in lange abwickelnden Sparten wie der Haftpflichtversicherung. In diesem Fall multipliziert man $C_{i,I}$ außerdem mit einem sogenannten „Tailfaktor“ (=“Sicherheitsfaktor“), um den erwarteten Endschaden zu prognostizieren und um genügend Reserven dafür zu bilden.

Eine realistische Ermittlung von Tailfaktoren ist schwierig: Möglichkeiten dazu bieten unter anderem Benchmarks aus ähnlichen Sparten mit größerer Datenbasis sowie Benchmarks aus anderen Unternehmen.

3.7 Methoden zur Schätzung von Verteilungsparametern

In diesem Kapitel wird erläutert, welche Methoden es zur Schätzung der jeweiligen Parameter für die vorhin genannten Verteilungen gibt. Konkret werden folgende vorgestellt:

- Momenten-Methode
- Maximum-Likelihood-Methode
- Minimum-Chi-Quadrat-Methode.

Bei der Schätzung von Parametern wird anhand der Realisierungen x_1, x_2, x_3,…, x_n von ZV X_1, X_2, X_3,…, X_n eine Funktion $\hat{\theta}(x_1,...,x_n)$ gesucht. Diese soll möglichst nahe oder ident dem wahren Parameter θ (kann auch ein Vektor von Parametern sein, bei der Normalverteilung etwa μ und σ^2) sein. An die Schätzfunktion werden gewisse Anforderungen gestellt, die sie erfüllen sollte[20]. Unter anderem sind dies Erwartungstreue und Konsistenz eines Schätzers, während für die Güte der mittlere quadratische Fehler (MSE) ein aussagekräftiges Kriterium ist.

3.7.1 Momenten-Methode

Man erhält einen Schätzer nach dieser Methode, wenn man die zu schätzenden Parameter der Verteilung durch ihre Momente ausdrückt. Das k-te empirische Moment der Verteilung ist dabei gegeben durch

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k .$$

Somit bekommt man dann einen Schätzer für θ in der Form

$$\theta = f\left(E\left[X^1\right],E\left[X^2\right],...,E\left[X^n\right]\right) .$$

Durch einsetzen der empirischen Momente erhält man

$$\hat{\theta} = f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^1,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2,...,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^n\right).$$

[20] Genaue Definitionen siehe [7], Seite 124ff.

Beispiel anhand der Normalverteilung:

$$\theta_1 = \mu = E[X]$$
$$\theta_2 = \sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2.$$

Nach dem Einsetzen der Schätzfunktionen erhält man folgende Schätzer für Erwartungswert und Varianz:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2.$$

Die Momenten-Methode ist eine relativ einfache Methode für Einzeldaten. Die Nachteile sind jedoch die Ausreißerempfindlichkeit sowie mangelnde Qualitätsaussagen. Außerdem ist es bei gruppierten Daten sensibel, einen Gruppenschwerpunkt zu bestimmen.

3.7.2 Maximum-Likelihood-Methode

Definition[21] X sei eine diskrete bzw. stetige ZV mit der Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion f(x; θ). Der Parameter θ sei unbekannt. Man nimmt eine Zufallsstichprobe $x_1,\ldots, x_n$ aus der Grundgesamtheit, dann heißt

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\cdot f(x_2;\theta)\cdot \ldots \cdot f(x_n;\theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j;\theta)$$

die Likelihood-Funktion (zur Zufallsstichprobe $x_1,\ldots, x_n$).

Der Parameterwert $\hat{\theta}$, bei dem $L(\theta)$ maximal ist,

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(\theta),$$

heißt Maximum-Likelihood-Schätzwert für den unbekannten Parameter θ.

Man sucht also jenen Parameterwert, bei dem die Stichprobenwerte $x_1,\ldots, x_n$ die größte Dichte haben. Häufig wird auch die logarithmierte Likelihood-Funktion (log-likelihood)

$$l(\theta) = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j;\theta)\right) = \sum_{j=1}^{n} \ln f_{X_j}(x_j;\theta)$$

[21] Siehe [6], Seite 291.

genutzt, da ihre Darstellung meist einfacher ist und diese ihre Maxima an den gleichen Stellen hat.

Vorteile dieser Methodik sind, dass sie sowohl für Einzel- als auch für gruppierte Daten anwendbar ist. Außerdem transformieren sich die ML-Schätzer bei Daten- oder Parametertransformationen mit.

3.7.3 Minimum-Chi-Quadrat-Methode

Hierbei werden beobachtete und erwartete Häufigkeiten (z.B. von Schäden etc.) in definierten Intervallen verglichen, wozu Einzeldaten zu gruppieren sind.

Bei dieser Methode werden die Verteilungsparameter derart geschätzt, dass die Teststatistik[22]

$$T = \sum_{i=1}^{I} \frac{(A_i - B_i)^2}{B_i}$$

zwischen den A_i und $B_i = N \cdot (F(c_{i+1}) - F(c_i))$ minimal wird. Dabei sind:

- A_i beobachtete Häufigkeit im jeweiligen Intervall
- B_i erwartete Häufigkeit im jeweiligen Intervall
- N insgesamt beobachtete Anzahl
- c_i jeweilige Intervallgrenze
- $F(c_i)$ Wert der VF des Modells an der entsprechenden Intervallgrenze.

Die Teststatistik hat die gleichen Güteeigenschaften wie der ML-Schätzer. Sie hat aber den Vorteil, dass unmittelbar über die Anpassungsgüte Auskunft gegeben wird, da T bei ausreichend großen A_i Chi-Quadrat-verteilt ist mit I-W-1 Freiheitsgraden[23]. Ein signifikant hoher Wert der Teststatistik spricht in diesem Fall gegen das gewählte Verteilungsmodell. Als Mindestgröße für die A_i wird meist 5 (manchmal auch 1) vorgeschlagen. Bei Unterschreitung der Mindestgröße können mehrere Intervalle zusammengefasst werden. Da für jedes Intervall die Anpassungsgüte bekannt ist, kann die Modellierung sehr flexibel gestaltet werden.

---

[22] Siehe [2], Seite 105.

[23] W entspricht der Anzahl der geschätzten Parameter, ein weiterer Freiheitsgrad geht aufgrund der Bedingung $\sum A_i = \sum B_i$ verloren.

4 Rückversicherung

4.1 Grundformen der Rückversicherung

In diesem Kapitel werden Anmerkungen und Definitionen aus [2] und [5] genutzt.

Rückversicherung (Zession) bedeutet, dass Erstversicherer (=Zedent), das sind jene Unternehmen, bei denen VN ihre Verträge abschließen, Risiken gegen Entgelt an einen Rückversicherer (=Zessionar) übertragen (=zedieren). Grundsätzlich unterscheidet man zwischen obligatorischer und fakultativer sowie zwischen proportionaler und nichtproportionaler RV. Bei der obligatorischen RV werden ganze Bestände rückversichert, bei fakultativen RV-Verträgen besteht die Möglichkeit, einzelne Risiken zu zedieren, wobei aber zumindest teilweise dem Zessionar die Wahl einer Annahme oder Ablehnung zugestanden wird.

Bestandteil dieser Arbeit sind jedoch die Formen proportionaler und nichtproportionaler Zession. Im proportionalen Fall teilen Erst- und Rückversicherer sowohl Prämien als auch Risiken. Im nichtproportionalen Fall werden vom Zessionar nur Risikospitzen, allerdings klarerweise gegen geringere Prämien, abgedeckt.

Auch zwischen VN und Erstversicherer kommen Risikoteilungen vor, zum Beispiel in proportionaler Form bei Prozenttarifen in der Krankenversicherung oder auch wenn Unterversicherung[24] besteht. Ebenso gibt es nichtproportionale Risikoteilungen, wie etwa Selbstbehalte in der KFZ-Kaskoversicherung (Abzugsfranchise[25]). Gründe dafür sind einerseits der Ausschluss von Kleinschäden und andererseits der moralische Aspekt der Risikoverhütung, da der VN in der Regel zu mehr Sorgfalt und Schadenverhütung motiviert sein wird, wenn er an jedem Schaden zu einem gewissen Teil selbst beteiligt ist.

---

[24] Bei Unterversicherung erstattet ein VU Schäden nur anteilig, falls die VS nicht mit dem tatsächlichen Wert der versicherten Sache übereinstimmt, sondern darunter liegt. Wenn die VS nur die Hälfte des Wertes beträgt, braucht das VU auch bei Teilschäden nur die Hälfte des Schadens zu leisten.

[25] Man kann oftmals zwischen verschieden hohen Franchisen wählen, bei Franchise EUR 0,- spricht man von Vollversicherung, also ohne Selbstbehalt. Bei beispielsweise Franchise EUR 500,- müssen alle Schäden bis EUR 500,- vom VN zur Gänze selbst getragen werden. Erst der übersteigende Teil wird vom VU übernommen.

Ob und in welchem Ausmaß sich ein VU rückversichert, ist dem VN nicht bekannt (anders als bei der Mitversicherung[26]) und kann von diesem auch nicht beeinflusst werden. Die gängigsten Formen der proportionalen RV sind Quoten- und Summenexzedenten-RV, nichtproportional sind dies Einzel- und Kumulschadenexzedenten- sowie Stop-Loss-RV. Nun werden diese verschiedenen Möglichkeiten, den Gesamtschaden zwischen Zedent und Zessionar aufzuteilen, nacheinander vorgestellt. Über den eventuell verbleibenden restlichen Teil des Gesamtschadens wird allerdings im Rahmen dieser Diplomarbeit keine Aussage getroffen.

$S = \sum_{j=1}^{N} x_j$ ..... Gesamtschaden in einem Jahr

$\underline{S}$ ..... Anteil des Erstversicherers am Gesamtschaden

$\underline{\underline{S}}$ ..... Anteil des Rückversicherers am Gesamtschaden

4.1.1 Quotenrückversicherung

Bei dieser proportionalen Vertragsform wird der Gesamtschaden im Verhältnis

$\underline{S} = a \cdot S$ und $\underline{\underline{S}} = (1-a) \cdot S$, $0 < a < 1$

aufgeteilt. Der Wert a entspricht jenem Selbstbehalt, der vom EV an jedem Vertrag gehalten wird. Der RV übernimmt einen festen Prozentsatz (1-a) von allen Versicherungspolizzen. Ist dieser zum Beispiel 40 %, so trägt er 40 % eines jeden Schadens, erhält aber im Gegenzug auch 40 % von jeder Prämie, die der EV lukriert. Von dieser Prämie wird vom RV ein Akquisitions- und Verwaltungskostenanteil, die sogenannte RV-Provision, an den EV bezahlt; aber ansonsten teilen sie sowohl Jahresprämie wie auch Jahresgesamtschaden im gleichen Verhältnis.

Daher ist der relative Ablauf sowie das relative Ergebnis bei EV und RV gleich, die absolute Haftung und somit der Eigenkapitalbedarf des EV verringert sich jedoch.

[26] Bei besonders großen Risiken teilen sich mehrere Versicherer ein Risiko und übernehmen es in Mitversicherung. Es wird auf der Polizze festgehalten, in welchem Verhältnis Prämien und Schäden aufgeteilt werden. Somit sind dem VN alle beteiligten Unternehmen bekannt. Die Korrespondenz erfolgt jedoch im Normalfall trotzdem nur zwischen VN und einem „führenden" VU.

Vor- und Nachteile dieser RV-Form aus Sicht des EV sind:

- Einfache und kostengünstige Verwaltung (z.B. keine Maximierung[27] nötig).
- Absolute Haftungsreduzierung.
- Effektiver Schutz gegen Änderungen des Typs bzw. der Struktur der Gesamtschadenverteilung.
- Beteiligung des RV auch am Klein- und Mittelgeschäft.
- Nur bedingter Schutz gegen das Zufallsrisiko (keine Absicherung gegen die Schadenfrequenz).
- Keine Homogenisierung des Portefeuilles.
- Grundsätzlich ist keine Staffelung des Selbstbehalts möglich.

4.1.2 Summenexzedenten-Rückversicherung

Sie ist die zweite jener proportionalen Vertragsformen, die am häufigsten Anwendung finden.

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot X_j \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \min\left(\sum_{j=1}^{N} (1 - a_j) \cdot X_j, m \cdot v_0 \right), \qquad 0 < a_j < 1.$$

Im Gegensatz zur Quoten-RV wird hier der Selbstbehalt des EV für jeden Vertrag einzeln festgelegt. Er variiert in Abhängigkeit von der VS des jeweiligen Risikos derart, dass der Selbstbehaltsanteil $a = a(v) = \min (v / v_0, 1)$ beträgt. Es werden also vom EV Risiken mit einer VS $v \leq v_0$ gänzlich übernommen, bei v_0 übersteigenden Risiken wird der Anteil darüber an den RV abgegeben. Somit hat der EV einen Selbstbehalt v_0, dieser wird als absolute Summe ausgedrückt und heißt Maximum. Meist ist die Haftungsstrecke des RV begrenzt, und zwar durch eine festgelegte Anzahl an Maxima[28] m.

Ein zu niedriger Selbstbehalt des EV soll vermieden werden, da sonst ein Großteil der Schäden zu Lasten des RV gehen würde und der EV das Interesse am Verlauf des gezeichneten Geschäftes verlieren könnte. Bei dieser Vertragsform wird der EV von seinen Haftungsspitzen entlastet, während das Basisgeschäft im Selbstbehalt verbleibt.

---

[27] Maximierung bedeutet die Festlegung des Selbstbehalts des EV für jeden einzelnen Vertrag.

[28] Ein Maxima entspricht einer Einheit des Selbstbehaltes v_0, der RV haftet somit für ein ganzzahliges Vielfaches des Selbstbehaltes vom EV.

Vor- und Nachteile dieser RV-Form aus Sicht des EV sind:

- Erhöhung der Zeichnungskapazität[29].
- Homogenisierung des Bestandes.
- Verringerung der Varianz im Schadenverlauf.
- Schutz gegen den Eintritt von zufälligen Großschäden.
- Im Gegensatz zur Quote variablere Haftungsaufteilung.
- Vermeidung von im Vergleich zur Quote unnötigen RV-Abgaben.
- Nur eingeschränkter Schutz gegen eine Häufung kleiner und mittlerer Schäden.
- Hoher Verwaltungsaufwand, da jedes Risiko einzeln maximiert wird.
- Da der RV nur mehr an wenigen Spitzenrisiken beteiligt ist, ist der Verlauf beim RV schwankungsanfälliger und es fehlt der mögliche Ausgleich durch das Basisgeschäft.

4.1.3 Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung

Sie ist die erste vorgestellte nichtproportionale RV-Vertragsform. Hierbei trägt der EV von allen anfallenden Schäden X das Erstrisiko min (X, a_0) bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag. Die Schadengrenze (Priorität) a_0 beschränkt somit den Maximalschaden für den EV, der RV trägt den a_0 übersteigenden Teil max (X – a_0, 0), jedoch meist ebenfalls nur bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag a_1, also min (max (X – a_0, 0), a_1). Die Haftungsstrecke dieses RV nennt man den ersten Layer. Grundsätzlich müsste den a_0 + a_1 übersteigenden Teil des Schadens wiederum der EV tragen. Im Normalfall besteht jedoch eine Vereinbarung mit einem weiteren RV, der sogenannte zweite Layer, der den übersteigenden Schadenteil übernimmt.

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{N} \min\left(X_j, a_0\right) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{j=1}^{N} \min\left(\max\left(X_j - a_0, 0\right), a_1\right), \quad a_0, a_1 > 0.$$

Während bei der proportionalen RV ein quotenmäßiger Anteil rückversichert ist, orientiert sich bei dieser Form der RV-Anteil an der Höhe des eingetretenen Schadens. Die dem RV zustehende Prämie hängt von Anzahl und Höhe der erwarteten Schäden ab und wird stets individuell ermittelt.

[29] Da man Haftungsspitzen, die nicht in das Portefeuille des EV „hineinpassen“, an den RV abgeben kann, kann der EV auch solche Risiken leichter übernehmen.

Vor- und Nachteile dieser RV-Form aus Sicht des EV sind:

- Effektiver Schutz gegen zufällige Großschäden.
- Homogenisierung der Schadenzahlungen.
- Selbsttragung von Klein- und Mittelschäden durch den EV.
- Bei Ansteigen der Schadenhäufigkeit bzw. –höhe besteht nur Schutz für den die Priorität übersteigenden Teil des jeweiligen Schadens.
- Schwierige Preisbestimmung bzw. Plausibilitätskontrolle des bezahlten Preises an den RV.

4.1.4 Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung

Diese RV-Form ist völlig analog zur Einzelschadenexzedenten-RV. Sie unterscheiden sich nur dadurch, dass bei dieser Form der Priorität a_0 die Summe aller Einzelschäden des EV aus einem Schadenereignis (z.B. Sturm, Erdbeben) gegenübergestellt wird. Dies trägt dem Umstand Rechnung, dass z.B. bei einem Sturm viele kleinere Schäden anfallen können, die jedoch in Summe einen hohen Betrag ausmachen.

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{N^*} \min\left(X_j^*, a_0^*\right) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{j=1}^{N^*} \min\left(\max\left(X_j^* - a_0^*, 0\right), a_1^*\right), \; a_0^*, a_1^* > 0$$

Wichtig ist in diesem Fall die Definition, was als einzelnes Schadenereignis zu sehen ist. Nicht jedes Schadenereignis basiert auf einer punktuellen Ursache[30]. Mehrere zusammenhängende Schäden erfordern daher eine Bezugnahme auf eine gemeinsame Ursache[31] und auf einen zeitlichen und räumlichen Zusammenhang.

[30] Punktuell ist z.B. eine Explosion, ein Flugzeugabsturz etc.

[31] Beispielsweise die gleiche meteorologische (z.B. Sturm), technische (z.B. Feuer von einem Brandherd ausgehend), tektonische oder geologische Ursache (Erdbeben oder Vulkanausbruch).

4.1.5 Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop Loss)

Dies ist die Fortsetzung der Schadenexzedenten-RV vom Einzel- über den Kumulschaden auf den Jahresschaden.

$$\underline{S} = \min\left(S, s_0\right) \text{ und } \quad \underline{\underline{S}} = \min\left(\max\left(S - s_0, 0\right), s_1\right), \quad s_0, s_1 > 0$$

Übersteigt der Gesamtschaden des EV aus einem Jahr (und einer Sparte) die vereinbarte Priorität s_0, so wird der übersteigende Teil vom RV übernommen. Meist gehen dieser Form andere RV-Deckungen voraus, sodass nur der Selbstbehalt des EV, welcher nach Abzug gewisser proportionaler und nichtproportionaler RV-Formen übrig bleibt, begrenzt wird. Stop Loss hat eine bilanzschützende Wirkung, da der Jahresschaden begrenzt wird und das versicherungstechnische Risiko fast vollständig auf den RV übergeht. Diese Vertragsform kommt daher praktisch nur zur Absicherung gegen das Frequenzrisiko in jenen Sparten vor, bei denen die Kumulschadenexzedenten-RV aufgrund der Ereignisabgrenzung schwierig ist, z.B. bei Hagel- oder Sturmversicherung.

Vor- und Nachteile dieser RV-Form aus Sicht des EV sind:

- Stop Loss wirkt bilanzschützend, er begrenzt die Schadenbelastung und sorgt für eine Ergebnisglättung beim EV.
- Die Zeitspanne zwischen Eintritt eines zufälligen Großschadens und der Leistung durch den RV ist grundsätzlich höher als bei anderen RV-Deckungen, da zumindest das laufende Geschäftsjahr abgewartet werden muss.
- Das moralische Risiko beim EV ist verhältnismäßig hoch, da ab dem Erreichen der Selbstbehaltgrenze alle Schäden vollständig zu Lasten des RV gehen.

Abschließend sei angemerkt, dass im Rahmen dieser Diplomarbeit nur die gängigsten RV-Formen – sowohl proportionaler als auch nichtproportionaler Natur – vorgestellt worden sind. Es gibt eine Menge spezieller weiterer Möglichkeiten (Open-Cover-RV, Umbrella-RV, Largest-Claims-RV für die k größten Schäden etc…), auf welche hier nicht näher eingegangen wird. Im Normalfall werden die verschiedenen Formen miteinander kombiniert, um einen RV-Schutz zu erhalten, der den Anforderungen des jeweiligen Unternehmens gerecht wird. Ebenso ist auf die Komplexität und Unterschiedlichkeit der verschiedenen Sparten Bedacht zu nehmen.

4.2 Proportionale RV – Optimale RV-Faktoren

Dieses Unterkapitel erklärt, wie bei proportionaler RV die idealen EB-Quoten a_i (multiplikative Konstante) je Risikogruppe nach dem Minimum-Varianz-Prinzip[32] berechnet werden. Die einzelnen a_i sollen von der Form $a_i = C \cdot \lambda_i$ sein, wobei C eine Konstante ist und die Berechnung der λ_i als das „relative retention problem“ von de Finetti bekannt ist[33].

Für ein Portfolio von N Risiken sei für das i-te Risiko (i= 1, 2, …, N) definiert:

$S^{(i)}$ = ZV, die den erwarteten Gesamtschaden des Risikos i in der für die Kalkulation berücksichtigten Periode darstellt.

$P^{(i)}$ = Prämie, die der RV verlangt, um 100 % des Schadens $S^{(i)}$ zu übernehmen.

Werden nun die proportionalen Faktoren a_i angewendet, so verkörpert

$$Z = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot P^{(i)} - \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot S^{(i)}$$

eine stochastische Größe, welche, ohne Berücksichtigung von Kosten, den gesicherten Profit im EB des EV misst. Das MVP sagt, dass die Varianz von Z bei gegebenem Erwartungswert so klein wie möglich werden soll. Intuitiv wird also eine RV-Form gesucht, die den gewünschten Profit bei der kleinstmöglichen Abweichung davon (mit dem geringsten Risiko) garantiert.

In Zeichen:

Var [Z] = Minimum,

unter der zusätzlichen Bedingung, dass

E [Z] = konstant > 0.

[32] Siehe [10], Seite 114ff, weitere Verweise in diesem Buch.

[33] Siehe [11].

Mittels Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist dieses Minimum an jenen Stellen zu finden, an denen die partiellen Ableitungen der Funktion

$$\phi = \mathrm{Var}[Z] + \lambda \cdot (\mathrm{E}[Z] - \text{const.})$$

nach den a_i (i= 1, 2, …, N) und dem λ verschwinden.

Da die Unabhängigkeit der $S^{(i)}$ voneinander vorausgesetzt ist, erhält man

$$\mathrm{Var}[Z] = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \cdot \mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right]$$

sowie

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \left(P^{(i)} - \mathrm{E}\left[S^{(i)}\right]\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot L^{(i)},$$

wobei $L^{(i)}$ dem jeweiligen Prämienaufschlag (Überschuss, Sicherheitszuschlag, Kosten etc.) entspricht.

Somit kann die Funktion ϕ explizit angeschrieben werden als:

$$\phi(a_1, a_2, ..., a_N, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \cdot \mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right] + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot L^{(i)} - \text{const.} \right).$$

Mittels der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 2a_i \cdot \mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right] + \lambda \cdot L^{(i)}, \quad \text{für alle i und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \mathrm{E}[Z] - \text{const.}$$

folgt für die Proportionalitätsfaktoren, dass

$$a_i = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{L^{(i)}}{\mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right]} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\left(L^{(i)}\right)^2}{\mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right]} = \text{const.} > 0, \quad \text{für alle i= 1, 2, …, N.}$$

Also sind die einzelnen a_i von der Form

$$a_i = C \cdot \frac{L^{(i)}}{\mathrm{Var}\left[S^{(i)}\right]} \qquad \text{mit der Konstanten } C = -\frac{\lambda}{2} > 0.$$

Die positive Konstante C hängt von der Höhe des Zuschlags ab.

Ihre Wahl wird dadurch beeinflusst, wie hoch der gewünschte Prämienaufschlag sein soll. Dies betrifft in weiterer Folge auch die Proportionalitätsfaktoren, welche in bestimmten Fällen größer als 1 werden können; in diesem Fall sollen sie auf 1 gesetzt werden.

5 Bestandsinformationen

5.1 Einleitung

Der dieser Arbeit zugrunde liegende Unfallversicherungsbestand enthält Verträge mit Beginnjahren seit 1956 aus mittlerweile 6 verschiedenen Produktgenerationen (=Geschäftspläne, kurz GP), die aktuelle wurde 2006 eingeführt und wird nach wie vor verkauft. Es sind sowohl Einzel- als auch Gruppenversicherungen (v.a. Firmen, Sportvereine, Interessensgemeinschaften) enthalten, wobei jedoch der Anteil der Einzelversicherungen deutlich überwiegt. Im Rahmen dieser sind verschiedene Produkte enthalten, konkret sind dies Kinder-, Jugend-, Erwachsenen-, Senioren-, Partner-, Alleinerzieher- sowie Familienversicherungen.

Es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Tarifen in diesem Bestand. Für diese Arbeit wurden jedoch nur die sowohl anzahl- als auch prämienmäßig größten betrachtet. Dies sind die Tarifgruppen Unfallinvalidität, Unfalltod, Spitalgeld, Taggeld sowie Unfallkosten. Die Vielfalt an verschiedenen Tarifen ist naturgemäß von der Aktualität der jeweiligen Produktgeneration abhängig. In den ältesten Verträgen kommen nur Unfalltod und Unfallinvalidität vor, wogegen im aktuellen GP selbst „exotische“ Tarife wie eine Absicherung gegen HIV-Infektionsrisiken in Form einer Rente vorhanden sind.

5.2 Gesamtbestandsentwicklung nach verschiedenen Parametern

Bei den nachfolgenden Analysen wird stets die Entwicklung seit 2002 betrachtet, wobei der Auswertungszeitpunkt jeweils der Bilanzstichtag, also der 31.12. des jeweiligen Jahres, ist. Es werden verschiedene Aspekte der Entwicklung des Gesamtbestandes dargestellt, nämlich Vertragsanzahl, Tarifanzahl, versicherte Personen sowie Jahresbestandsprämie.

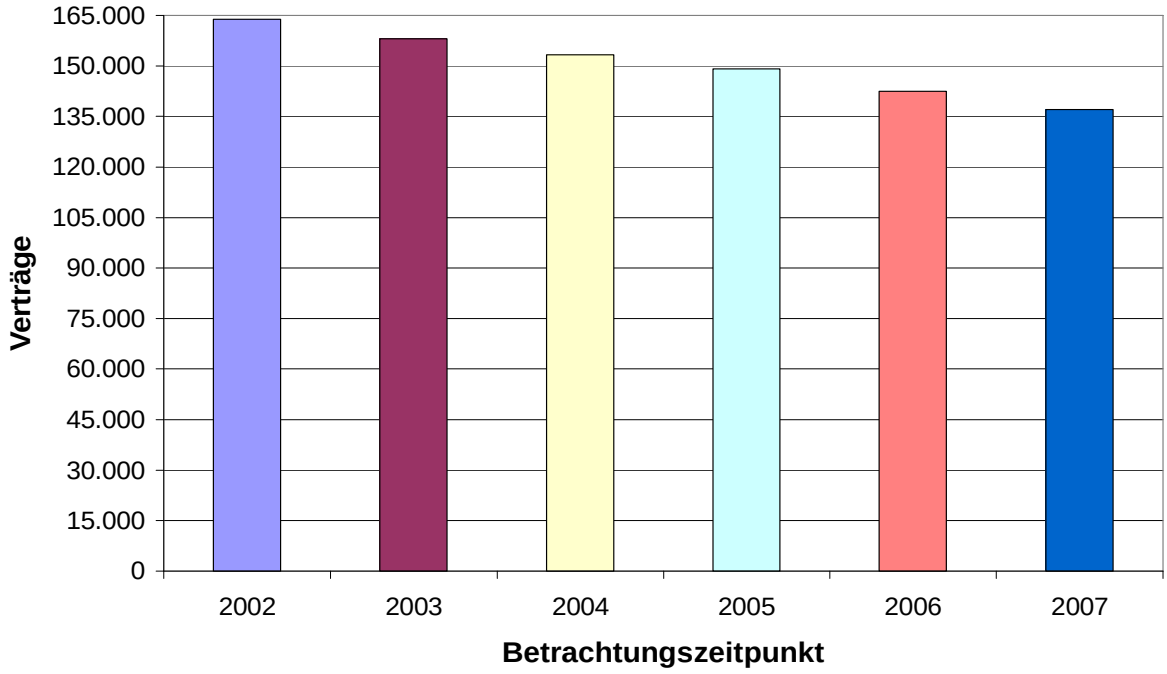

Abb. 5-1: Entwicklung der Vertragsanzahl

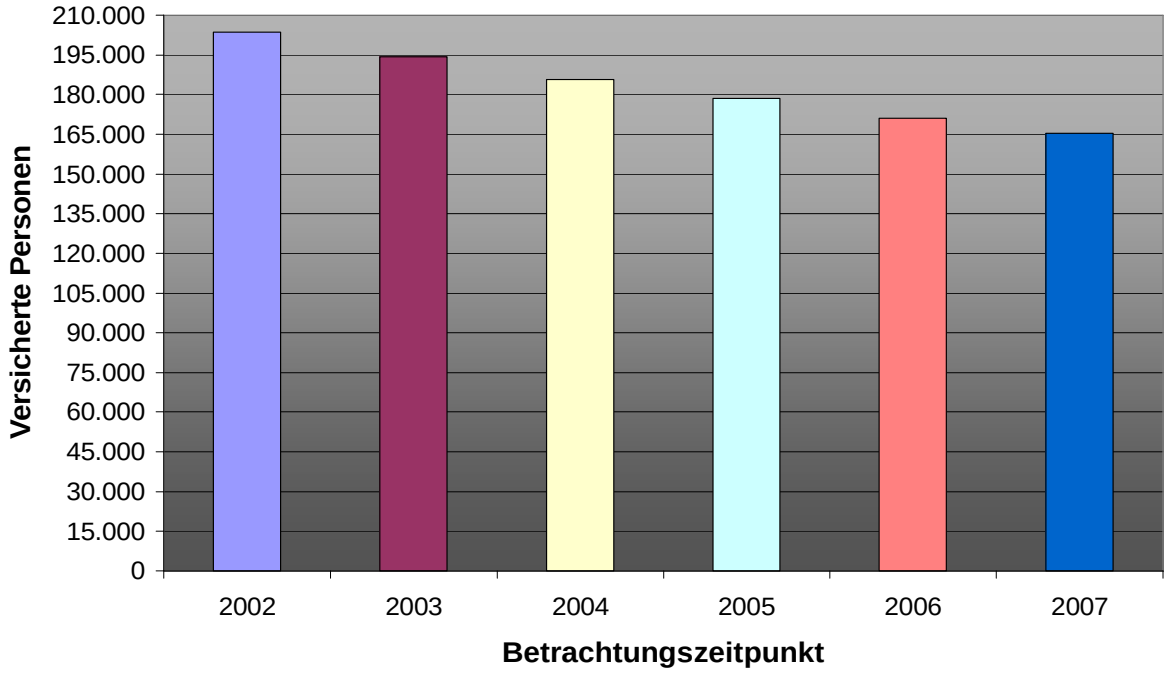

Abb. 5-2: Entwicklung der Anzahl der versicherten Personen

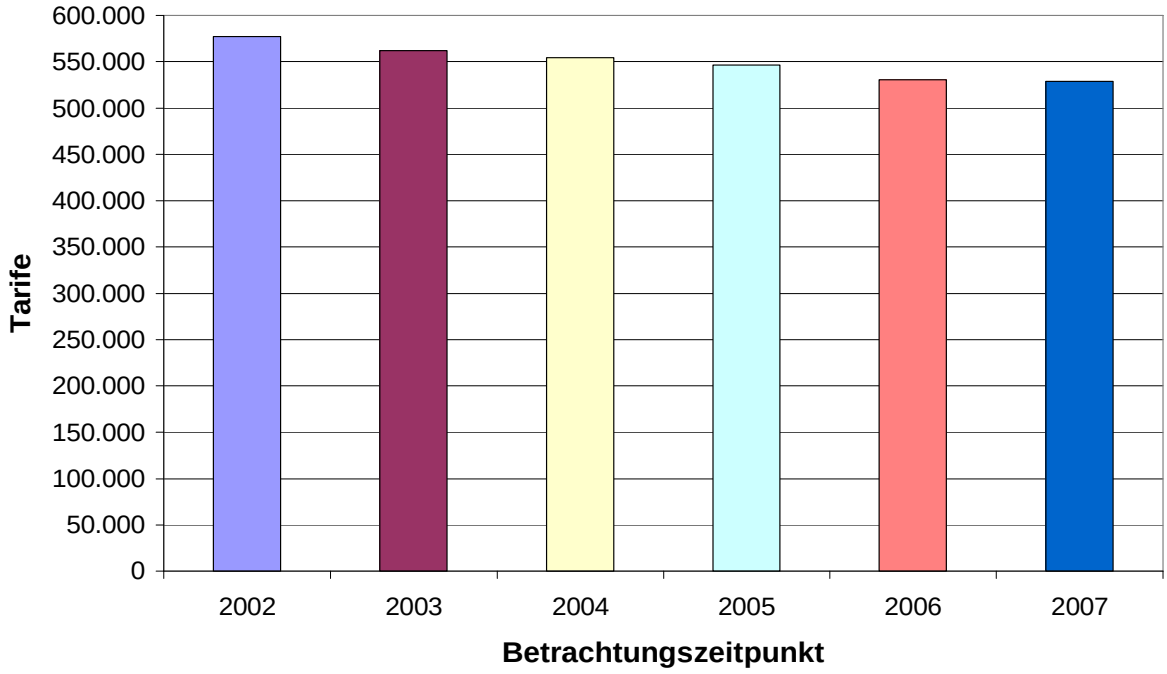

Abb. 5-3: Entwicklung der Tarifanzahl

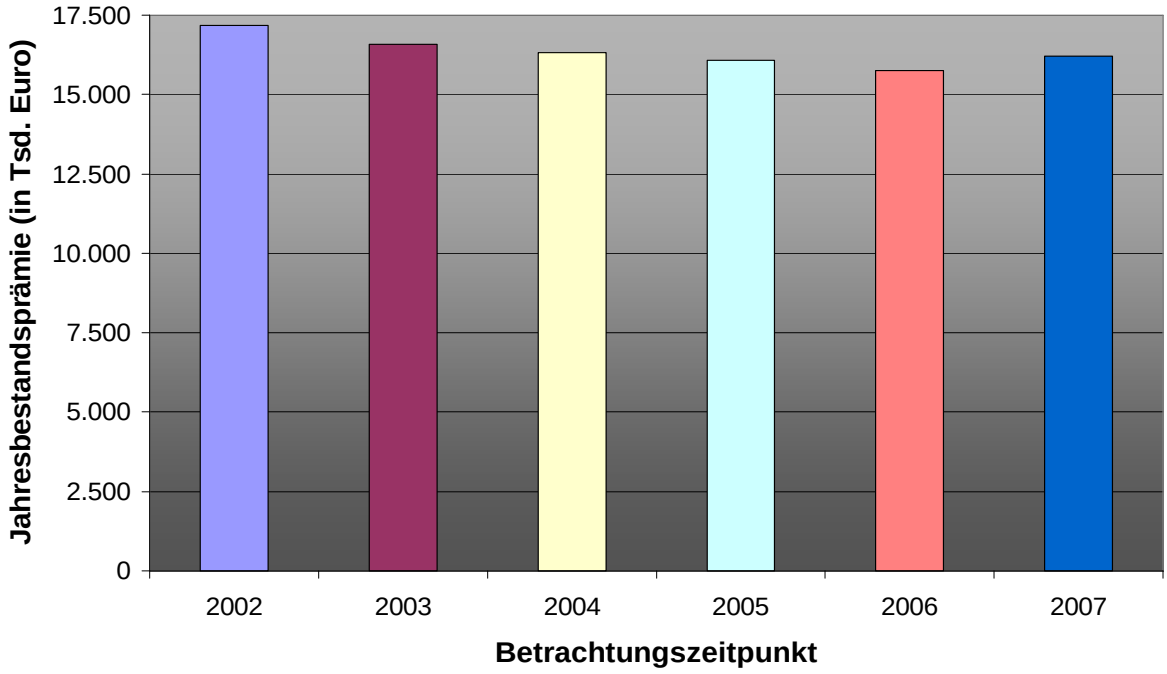

Abb. 5-4: Entwicklung der Jahresbestandsprämie

Die Anzahl der Verträge entspricht der Anzahl der Polizzen. Hier sei angemerkt, dass in den beiden ersten Tarifgenerationen oftmals mehrere (meist zwei) Einzelverträge unter einer Polizzennummer zusammengefasst worden sind, da es zum damaligen Zeitpunkt noch keine Partnerversicherungen gab.

Die Anzahl der versicherten Personen entspricht den insgesamt in allen Verträgen vorkommenden Personen. Wie bei der Vertragsanzahl kann auch hier eine Person mehrmals vorkommen (d.h. in mehreren Verträgen gleichzeitig versichert sein).

Die Tarifanzahl gibt wieder, wie viele Tarife in Summe in den einzelnen Verträgen für die jeweils versicherten Personen vorkommen. Sind zum Beispiel in einem Familienvertrag mit 2 Erwachsenen und 2 Kindern Unfallinvalidität und Spitalgeld versichert, so zählt man 8 Tarife.

Generell ist seit 2002 ein Bestandsabfall zu beobachten, bis 2007 hat sich die Vertragsanzahl um ca. 16 %, die Anzahl der versicherten Personen um ca. 18 %, die Tarifanzahl um ca. 9 % und die Jahresbestandsprämie um knapp 6 % verringert. Die höheren Prozentsätze bei den beiden erstgenannten Rubriken sind darauf zurückzuführen, dass oftmals Konvertierungen aus mehreren Altverträgen in einen einzigen Neuvertrag stattfinden, wobei aber der jeweilige Neuvertrag eine größere Tarifanzahl sowie höhere Prämien aufweist.

Bei der Jahresbestandsprämie wurde im Jahr 2007 der „turn-around“ geschafft. Erstmals seit 5 Jahren konnte wieder eine Steigerung erzielt werden, welche auf der positiven Verkaufsentwicklung des mit März 2006 eingeführten aktuellen Produkts beruht.

5.3 Tarifgruppenentwicklung nach verschiedenen Parametern

Hier wird die Veränderung der einzelnen Tarifgruppen seit 2002 analysiert. Die Aufteilung erfolgt nach 5 Bereichen, nämlich jenen, welche auch für die später durchgeführten Berechnungen interessant sind. Alle anderen Tarife sind nur in zusammengefasster Form dargestellt.

Als erstes wird die Tarifgruppe Unfallinvalidität betrachtet. Hier kommen folgende Invaliditätstarife vor:

- Aus verschiedenen Progressionsmodellen (100%, 150%, 250%, 300%, 500%, 600%).
- Aus einem sogenannten „Bausteinsystem“ (bestehend aus Tarifen, welche ab 1%, 25%, 50% bzw. 75% Invalidität leisten, somit kann der Kunde seinen Progressionstarif individuell zusammenstellen).
- Aus Invaliditäts-Vollversicherungen, welche ab einem Invaliditätsgrad von 50 % die gesamte VS leisten.

Unfallinvalidität ist Grundbestandteil von über 99,9 % aller Verträge und somit das „Herz“ der gesamten Unfallversicherung in diesem Unternehmen.

Tab. 5-1: Tarifgruppe Unfallinvalidität

	Tarifanzahl	**Jahresbestandsprämie (in TEUR)**	**VS (in TEUR)**	**Ø-VS**
2002	229.587	10.012	8.361.377	36.419
2003	227.968	9.689	8.800.076	38.602
2004	228.051	9.512	9.264.324	40.624
2005	227.252	9.401	9.788.125	43.072
2006	220.542	9.283	10.197.176	46.237
2007	218.214	9.637	11.110.626	50.916

Diese Tarifgruppe ist vor allem prämienmäßig die mit Abstand größte. Per 31.12.2007 entfallen knapp 60 % der Gesamtprämie (bei 41 % der Tarife) darauf. Die gegensätzliche Entwicklung der Tarifanzahl und Prämie im Jahr 2007 ist dadurch erklärt, dass die vorletzte Tarifgeneration jene mit dem vorhin erläuterten Bausteinsystem war und mittlerweile durch Vertragskonvertierungen zwar tarifmäßig oft reduziert worden ist, aber in der Regel dadurch

meist prämienmäßige Steigerungen erzielt werden konnten. Somit können jetzt bei eventuellen Konvertierungen aus der Baustein-Tarifgeneration bis zu 4 Invaliditätstarife zugunsten eines neuen weichen. Die starke Steigerung der Durchschnitts-VS kommt durch den vermehrten Abschluss von Invaliditäts-Vollversicherungen (von knappen 9.000 auf ca. 35.000 Tarife) sowie durch die natürliche Bestandsveränderung (Wegfall von „kleinen“ Summen aus Altverträgen und Neuabschluss von höheren, bedarfsgerechten VS) zustande.

Die Tarifgruppe Unfalltod besteht nur aus einem Tarif und ist im Laufe der Jahre ziemlich konstant. Dieser Tarif ist in allen Produktgenerationen vorhanden und neben Unfallinvalidität anzahlmäßig am größten. Ca. 25 % aller Tarife sind dieser Gruppe zuzuordnen und machen seit 2002 stets etwa 9 % der Gesamtprämie aus. Die Prämiensteigerung ist auf die Erhöhung der Durchschnitts-VS zurückzuführen, fällt durch die aktuell günstigeren Prämien jedoch nicht allzu gravierend aus.

Tab. 5-2: Tarifgruppe Unfalltod

	Tarifanzahl	**Jahresbestandsprämie (in TEUR)**	**VS (in TEUR)**	**Ø-VS**
2002	147.968	1.665	1.211.694	8.189
2003	142.464	1.593	1.209.076	8.487
2004	137.943	1.547	1.225.720	8.886
2005	134.292	1.345	1.238.901	9.225
2006	132.211	1.346	1.387.191	10.492
2007	132.003	1.383	1.586.207	12.016

Die Tarifgruppe Taggeld besteht wiederum aus mehreren verschiedenen Tarifen und kann mit Ausnahme der ältesten Produktgeneration in allen Produktgenerationen abgeschlossen werden. Der Grundgedanke ist insbesondere bei Berufsgruppen mit teilweise variablen Gehältern ein Ausgleich für entgangene Zulagen o.ä. während des Krankenstandes. Meist ist Taggeld ab dem ersten Krankenstandstag versichert. In den beiden letzten Produktgenerationen wird auch die Möglichkeit von Karenzzeiten (Taggeld ab dem 8., 15., 29. bzw. 43.Tag) angeboten. Die entsprechende VS wird je unfallbedingtem Krankenstandstag für bis zu 365 Tage innerhalb von 4 Jahren ab dem Unfallzeitpunkt bezahlt, wobei es auch Unterbrechungen der Krankenstände geben darf.

Tab. 5-3: Tarifgruppe Taggeld

	Tarifanzahl	Jahresbestandsprämie (in TEUR)	VS (in TEUR)	Ø-VS
2002	35.355	2.095	276	7,81
2003	32.928	1.988	263	7,99
2004	31.237	1.916	256	8,20
2005	29.444	1.824	247	8,39
2006	27.199	1.671	238	8,75
2007	25.670	1.589	238	9,27

Der Bestand ist eindeutig rückläufig, was hauptsächlich auf die relativ hohen Prämiensätze zurückzuführen ist. Machte diese Tarifgruppe im Jahr 2002 noch über 6 % der gesamten Tarifanzahl und mehr als 12 % der Gesamtprämie aus, so sind im Jahr 2007 nur noch weniger als 5 % der Tarifanzahl für knapp 10 % der Gesamtprämie verantwortlich.

Beim Spitalgeld, welches wie Taggeld bis auf die älteste Produktgeneration stets abschließbar ist, wird bei einem Spitalsaufenthalt infolge eines Unfalles geleistet. Die entsprechende VS wird für bis zu 365 Tage innerhalb von 4 Jahren ab dem Unfallzeitpunkt bezahlt, wobei es auch hier Unterbrechungen bei den unfallbedingten Spitalsaufenthalten geben darf (sinngemäß wie beim Taggeld). Seit dem GP 1988 gibt es eine Staffelung der versicherten VS. Für den 1.-10. Tag im Spital wird pro Tag die volle vereinbarte VS, für den 11.-20. Tag werden 75 % der VS, für den 21.-100. Tag werden 62,5 % der VS und ab dem 101. Tag werden 50 % der VS bezahlt. Die Idee dahinter sieht die stets bezahlten 50 % als Teil des eigentlichen Spitalgeldes und den restlichen Teil als zeitraumabhängiges Genesungsgeld, welches im Anschluss an den unfallbedingten Spitalsaufenthalt für maximal 100 Tage geleistet wird.

Tab. 5-4: Tarifgruppe Spitalgeld

	Tarifanzahl	Jahresbestandsprämie (in TEUR)	VS (in TEUR)	Ø-VS
2002	139.245	2.539	2.429	17,44
2003	131.581	2.400	2.354	17,89
2004	128.280	2.338	2.368	18,46
2005	124.397	2.283	2.403	19,32
2006	115.103	2.169	2.514	21,84
2007	109.659	2.140	2.762	25,19

Hier ist ebenfalls ein stark rückläufiger Trend zu erkennen. Da die Tarife der aktuellen Produktgeneration jedoch fix beide Komponenten (Spitalgeld und Genesungsgeld) beinhalten und daher die Durchschnitts-VS bedeutend höher geworden ist, wirkt sich der Negativtrend in der Tarifanzahl stärker als in der Prämie aus.

Die letzte der genauer betrachteten Tarifgruppen ist die der Unfallkosten, welche unter einem Tarif mehrere Sub-Leistungsarten versichert haben. Zusätzlich zu den Heil-, Bergungs- und Rückholkosten (die vom Kunden wählbare VS ist nur für diese Sub-Leistungsarten gültig) sind ebenso Hubschrauberbergungskosten, Nottransportkosten aus dem Ausland sowie Kurkosten- und Rehabilitationsbeihilfen (der Versicherungsschutz jener Sub-Leistungsarten ist jeweils mit einem fix vereinbarten Betrag festgelegt, unabhängig von der vom Kunden gewählten VS) enthalten. Die Leistungspalette ist im Lauf der Produktgeneration gewachsen, beispielsweise sind nun aktuell auch die Kosten für kosmetische Operationen infolge eines Unfalles im Rahmen der Unfallkosten inkludiert, welche früher noch einen eigenen Tarifbaustein darstellten.

Tab. 5-5: Tarifgruppe Unfallkosten

	Tarifanzahl	**Jahresbestandsprämie (in TEUR)**	**VS (in TEUR)**	**Ø-VS**
2002	13.467	473	28.054	2.083
2003	14.381	510	31.117	2.164
2004	16.146	576	36.780	2.278
2005	17.410	619	41.700	2.395
2006	21.353	690	63.897	2.992
2007	27.303	836	93.443	3.422

Bei dieser Tarifgruppe ist ein eindeutig positiver Trend festzustellen. In der aktuellen Tarifgeneration gibt es nur noch wenige Neuabschlüsse, die den Tarifbaustein Unfallkosten nicht enthalten.

Unter „Sonstige Tarife“ sind all jene Tarife zusammengefasst, welche in keiner der 5 soeben beschriebenen Tarifgruppen vorkommen. Konkret handelt es sich dabei um Schmerzengeld, Kosten für kosmetische Operationen, Absicherung gegen HIV-Infektionsrisiken sowie Unfallrententarife, welche eine temporäre oder lebenslängliche Rentenzahlungsdauer beinhalten können. Letztere leisten ab einem Invaliditätsgrad von 50 % die volle vereinbarte monatliche Rente. Sie wurden jedoch aufgrund der unzureichenden Schadenanzahl für die nachfolgenden Auswertungen nicht herangezogen und deshalb in diesen Bereich gesetzt.

Tab. 5-6: Tarifgruppe Sonstige Tarife

	Tarifanzahl	**Jahresbestandsprämie (in TEUR)**	**VS (in TEUR)**	**Ø-VS**
2002	11.736	399	27.350	2.330
2003	12.379	413	34.105	2.755
2004	13.069	431	39.469	3.020
2005	13.514	444	43.702	3.234
2006	14.060	448	37.397	2.660
2007	16.014	488	33.237	2.075

Die Steigerung ist v.a. auf die Unfallrententarife zurückzuführen, welche sich - ähnlich zu den Unfallkosten - bei den Kunden immer mehr an Beliebtheit erfreuen. Die Durchschnitts-VS ist in diesem Fall nur der Vollständigkeit halber angeführt aber nicht aussagekräftig, da unterschiedliche Tarife zusammengefasst sind.

Zusätzlich zu all den erläuterten Tarifen gibt es einige (beitragsfreie) Zusatzleistungen, die teilweise an bestimmte Bedingungen geknüpft sind.

Assistance-Leistungen sind beispielsweise ab einer bestimmten Monatsprämie beitragsfrei mitversichert. Diese enthalten insbesondere diverse Dienstleistungen im Haushalt, die nach einem Unfall nicht selbst durchgeführt werden können, Dolmetscherkosten sowie verschiedene Beratungsfunktionen.

Abschließend zur Tarifgruppenanalyse wird eine Aufstellung zur Verfügung gestellt, wie sich die Anzahl der Tarife sowie die Gesamtprämie von 2002 bis 2007 auf die einzelnen Tarifgruppen verteilt haben.

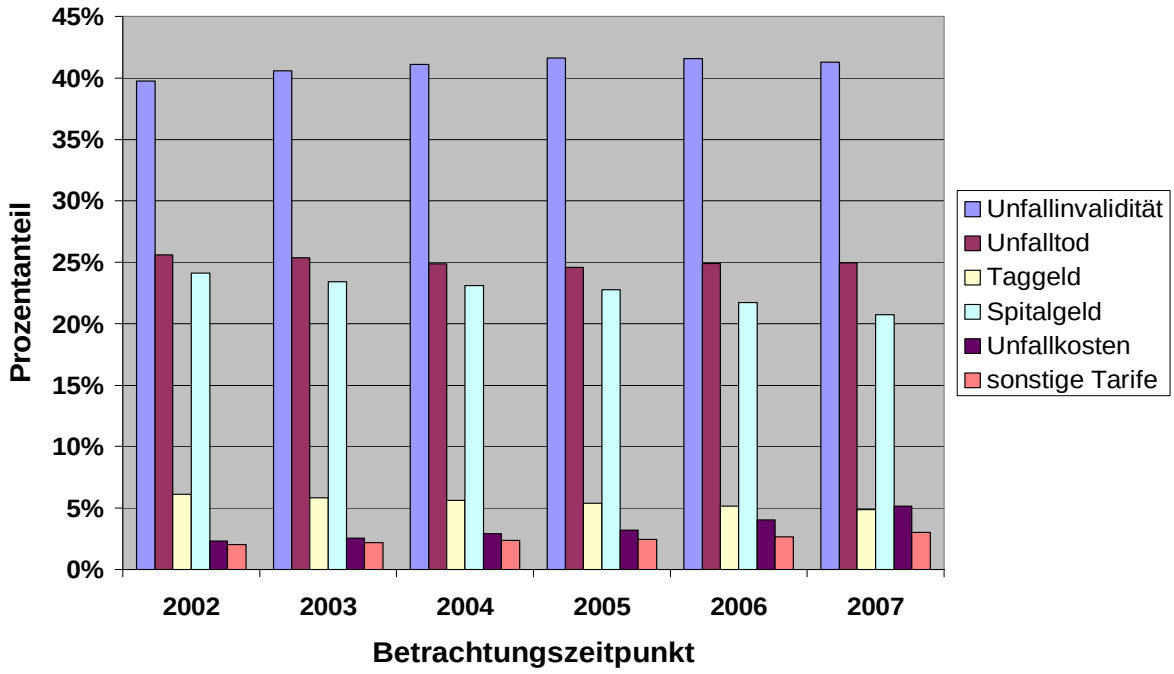

Abb. 5-5: Tarifanzahl je Tarifgruppe

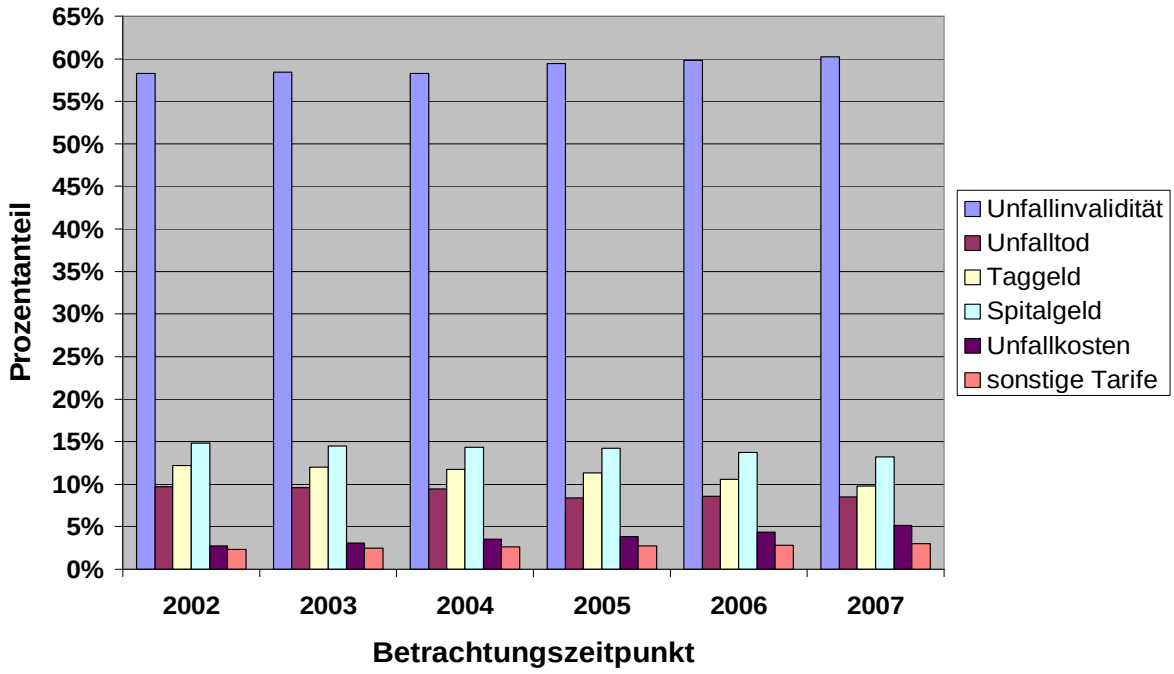

Abb. 5-6: Jahresbestandsprämie je Tarifgruppe

Unschwer zu erkennen ist die bereits erwähnte Dominanz der Tarifgruppe Unfallinvalidität, die sich in den letzten Jahren sogar noch gesteigert hat, sowie der positive Trend bei den Unfallkosten. Ebenso ist beim Taggeld ersichtlich, dass der tarifmäßige Anteil viel geringer als der prämienmäßige ist. Dies ist eine logische Folge, da aufgrund der größeren Eintrittswahrscheinlichkeit für eine Leistung der Prämiensatz ein höherer als bei anderen Tarifgruppen ist.

5.4 Bestandsverteilungen per 31.12.2007

In den nachfolgenden Aufstellungen sieht man weitere Daten hinsichtlich der Bestandsverteilung per 31.12.2007, unter anderem Auswertungen nach Zahlweisen, Bundesländern, Versicherungsbeginnen und dem Alter der versicherten Personen.

Bei der Aufteilung nach Zahlweisen ist klar ersichtlich, dass es einen eindeutigen Trend in Richtung monatliche Zahlweise gibt. Dies ist insofern logisch, da in der Unfallversicherung des analysierten Unternehmens im Gegensatz zu vielen anderen Versicherungsbereichen kein Unterjährigkeitszuschlag verlangt wird. Somit erleidet der Kunde durch diese gestundete Zahlweise keinen Prämiennachteil.

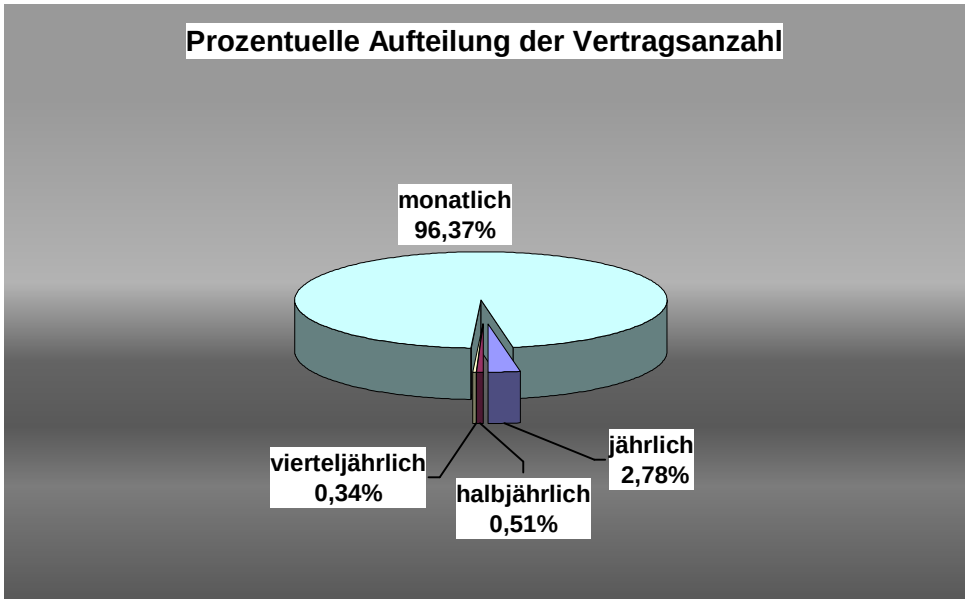

Abb. 5-7: Aufteilung nach Zahlweisen – Vertragsanzahl

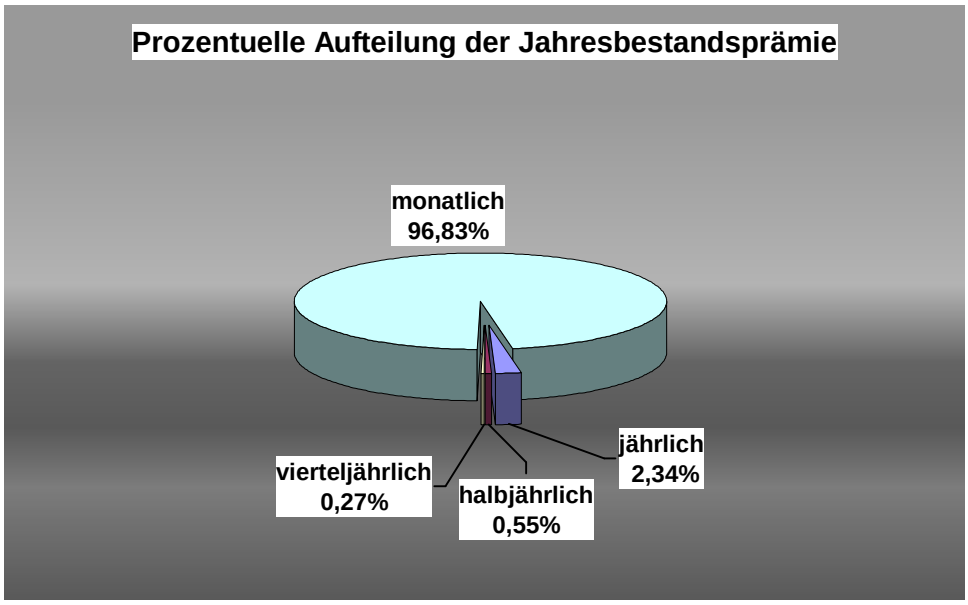

Abb. 5-8: Aufteilung nach Zahlweisen – Jahresbestandsprämie

Als nächstes wird die Aufteilung der Vertragsanzahl nach Bundesländern betrachtet.

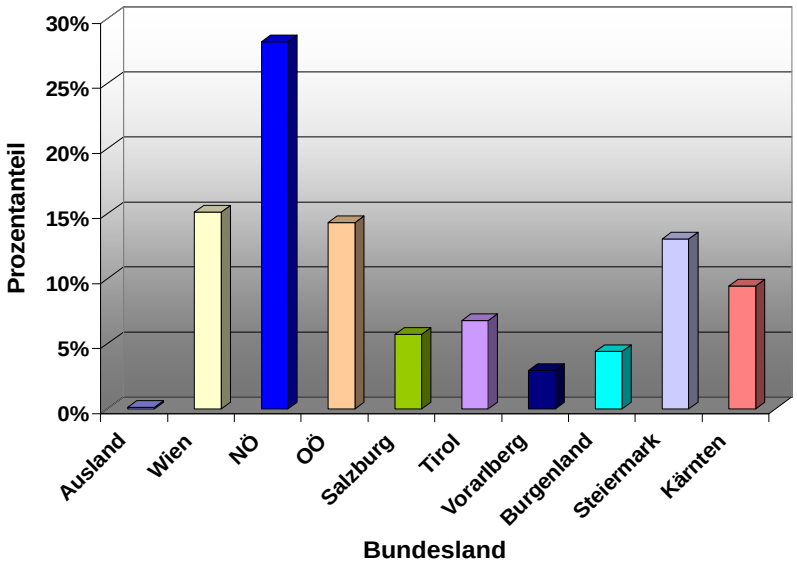

Abb. 5-9: Aufteilung nach Bundesländern - Vertragsanzahl

Unschwer zu erkennen ist ein Ost – West – Gefälle des Bestandes, an die 48 % der Verträge bestehen in Wien, Niederösterreich oder dem Burgenland. Dies ist damit zu erklären, dass die Zentrale des Unternehmens in Wien liegt und die Ausbreitung von Geschäftsstellen bzw. der Aufbau eines adäquaten Außendienstes für ganz Österreich erst nach und nach erfolgt ist. Bei den wenigen VN mit ausländischem Wohnort handelt es sich vorwiegend um Personen, welche in Österreich beschäftigt sind.

In den beiden folgenden Aufstellungen wird die Verteilung der Tarifanzahl sowie der versicherten Personen nach Altersgruppen und nach Geschlecht analysiert. Das Verhältnis zwischen Männern und Frauen liegt seit Jahren konstant bei 60 % - 40 %. Der Versicherungsbestand ist nicht der jüngste, das Durchschnittsalter beträgt 52 Jahre. Es sind über 36 % der versicherten Personen bereits über 60 Jahre alt, dieser Gruppe sind jedoch nur knapp 30 % der Tarife zuordenbar. Der Grund dafür ist der anzahlmäßig noch relativ große Bestand an Altverträgen (knapp 30.000 Personen mit einem Durchschnittsalter von 67 Jahren), welche nur zwei Tarife je versicherter Person versichert haben.

Eine Auswertung der Jahresbestandsprämie nach Alter ist nicht zielführend, da im Bestand sowohl bei Familien- als auch bei Alleinerzieherverträgen technisch bedingt die gesamte Prämie der ersten versicherten Person zugeordnet worden ist und somit keine verlässlichen bzw. korrekten Aussagen möglich sind.

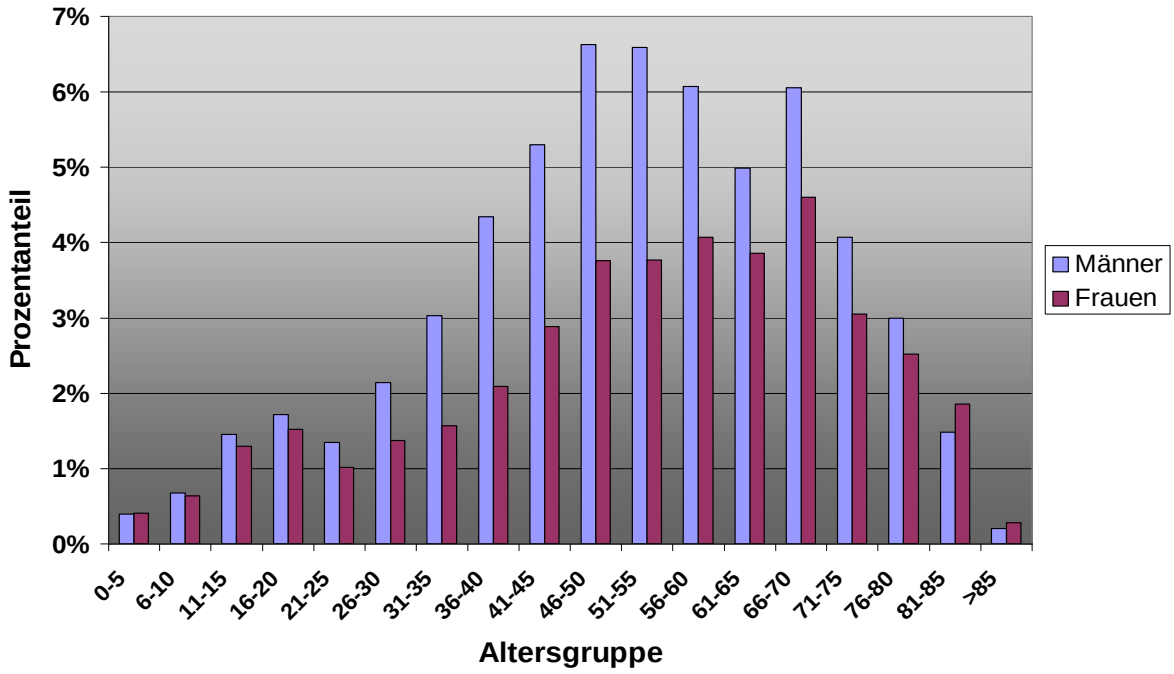

Abb. 5-10: Aufteilung nach Altersgruppen – Versicherte Personen

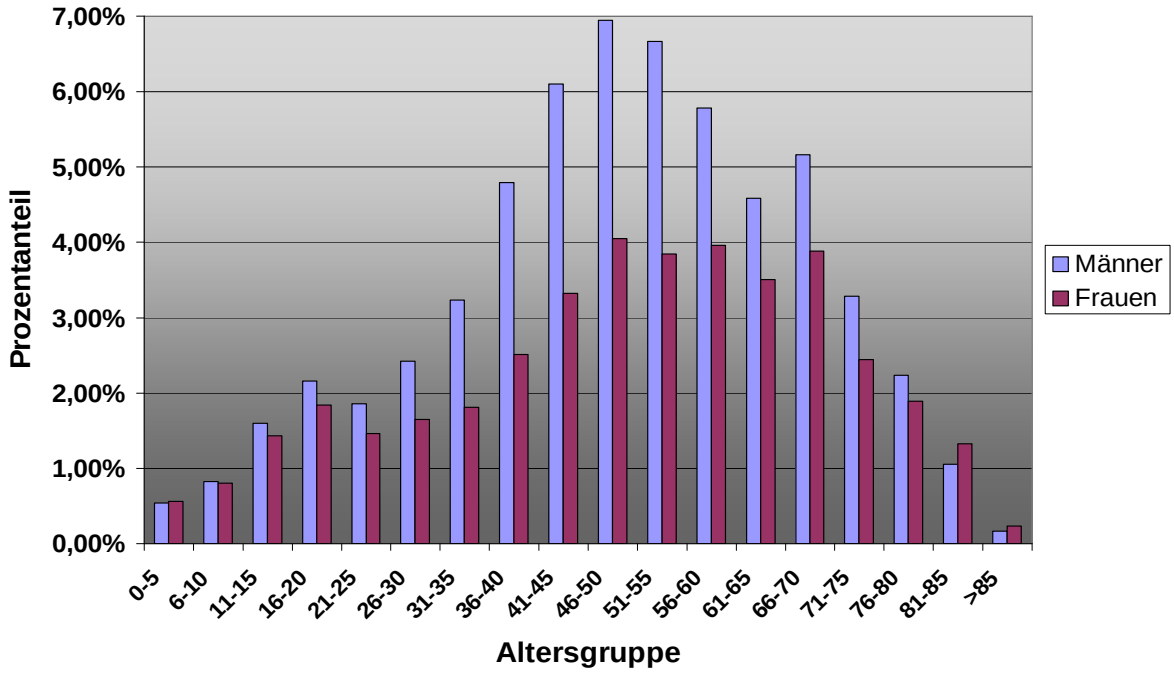

Abb. 5-11: Aufteilung nach Altersgruppen – Tarife

Die nächste Grafik zeigt die VF nach dem Alter der versicherten Personen je GP. Hier ist das hohe Durchschnittsalter in den beiden ältesten Produktgenerationen gut erkennbar. Die GP 1988 und 1995 weisen ab dem Alter von 18 Jahren einen grafischen Knick auf, der als Konsequenz aus dem automatischen Storno von Kindern aus Familienverträgen mit dem Erreichen des 19. Lebensjahres entsteht. Es ist ebenfalls leicht zu erkennen, dass der Bestand des GP 2006 ein sehr junger ist, was wiederum ein Indiz für den vermehrten Abschluss von Familien- und Alleinerzieherverträgen (mit mitversicherten Kindern) ist.

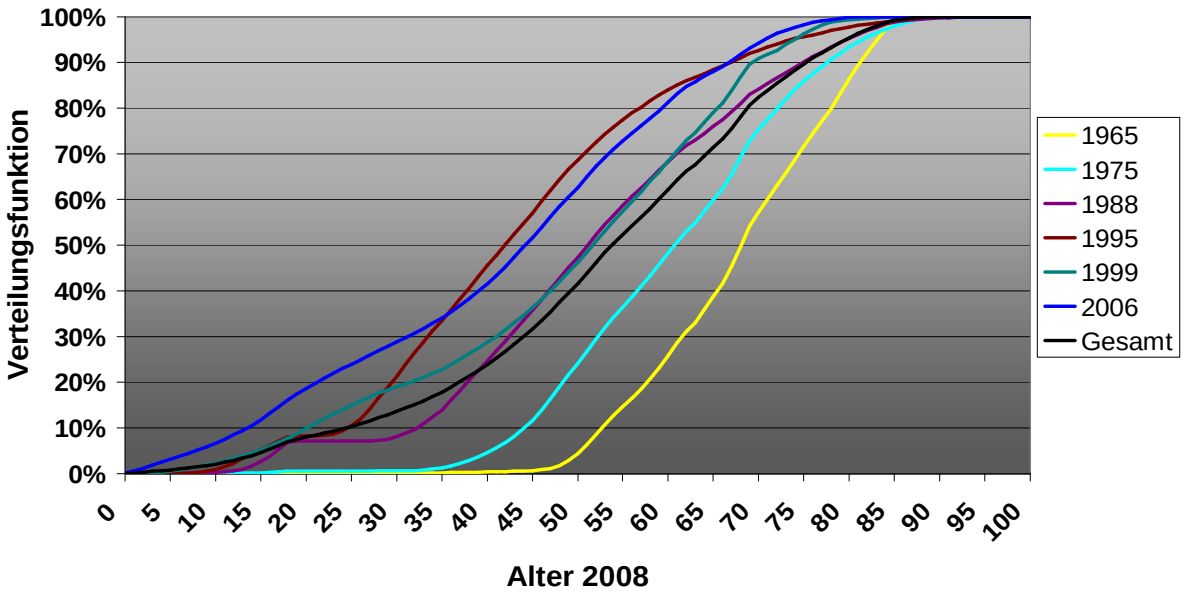

Abb. 5-12: Altersverteilung je GP

In einem weiteren Schritt werden jetzt die einzelnen GP betrachtet, und zwar nach den Kriterien Vertragsanzahl, Tarifanzahl sowie Jahresbestandsprämie.

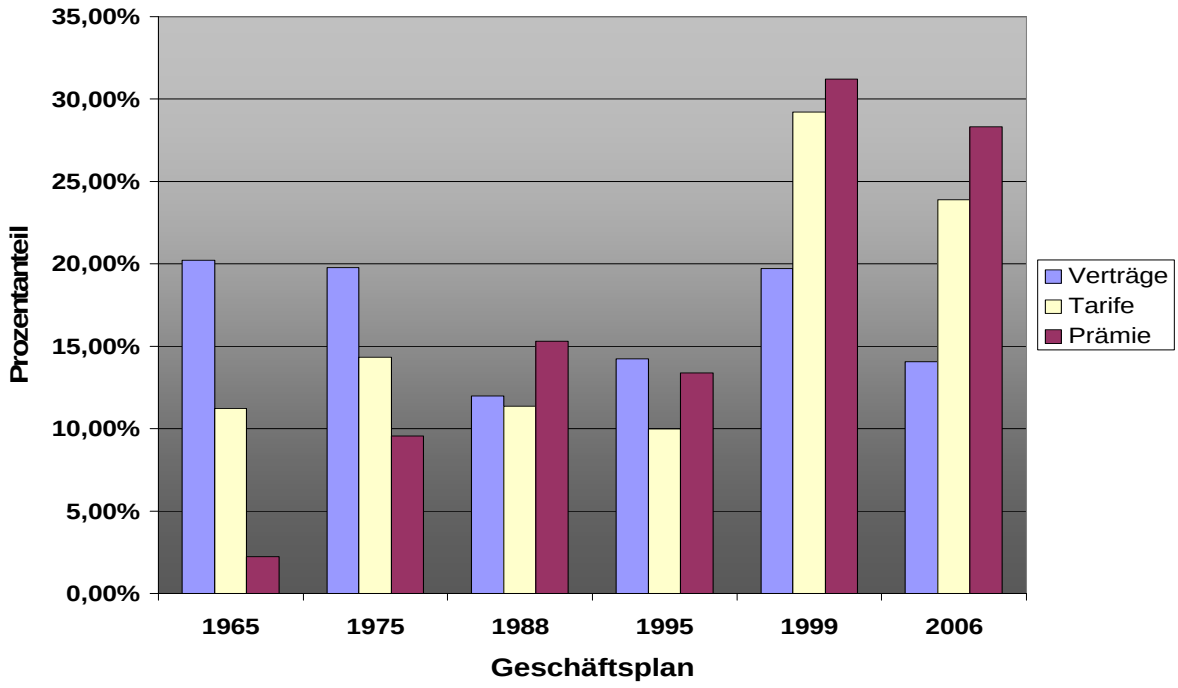

Abb. 5-13: Aufteilung nach GP – Verträge – Tarife – Prämie

In dieser Grafik ist gut zu erkennen, dass die Verträge der ältesten Produktgeneration zwar anzahlmäßig sehr stark vertreten, prämienmäßig jedoch fast keine Auswirkung mehr auf den Bestand haben. In den beiden ersten GP waren die VS und folglich auch die Prämien noch gering. Ab dem GP 1988 kamen bereits höhere Prämien zustande, einerseits durch die Ausweitung der Invaliditätstarife mit Progression auf die Varianten mit einer Maximalleistung von 300 % und 600 %, andererseits durch höhere Taggeld- sowie Spitalgeldsummen. Dadurch übersteigt in der zeitlichen Entwicklung der Produkte der Bestandsanteil der Prämien erstmals jenen der Tarife. Bei den beiden jüngsten GP übersteigt der Bestandsanteil der Tarife jenen der Verträge, was auf die Einführung weiterer neuer Tarifbausteine wie Schmerzengeld, temporäre Unfallrenten, HIV-Rente etc. zurückzuführen ist. Diese beiden Tarifgenerationen sind auch in Bezug auf die Prämienvolumina die stärksten. Daher wird auch versucht, möglichst viele „kleinere“ Altverträge in den aktuellen GP mit einer logischerweise daraus resultierenden Prämiensteigerung zu konvertieren. Die beim GP 2006 am stärksten ausgeprägte Diskrepanz zwischen Verträgen und Tarifen resultiert einerseits aus einer größeren vorhandenen Auswahl an Tarifbausteinen und andererseits aus dem deutlich vermehrten Abschluss von Familien- und Alleinerzieherverträgen, welche im GP 1999 nicht angeboten wurden.

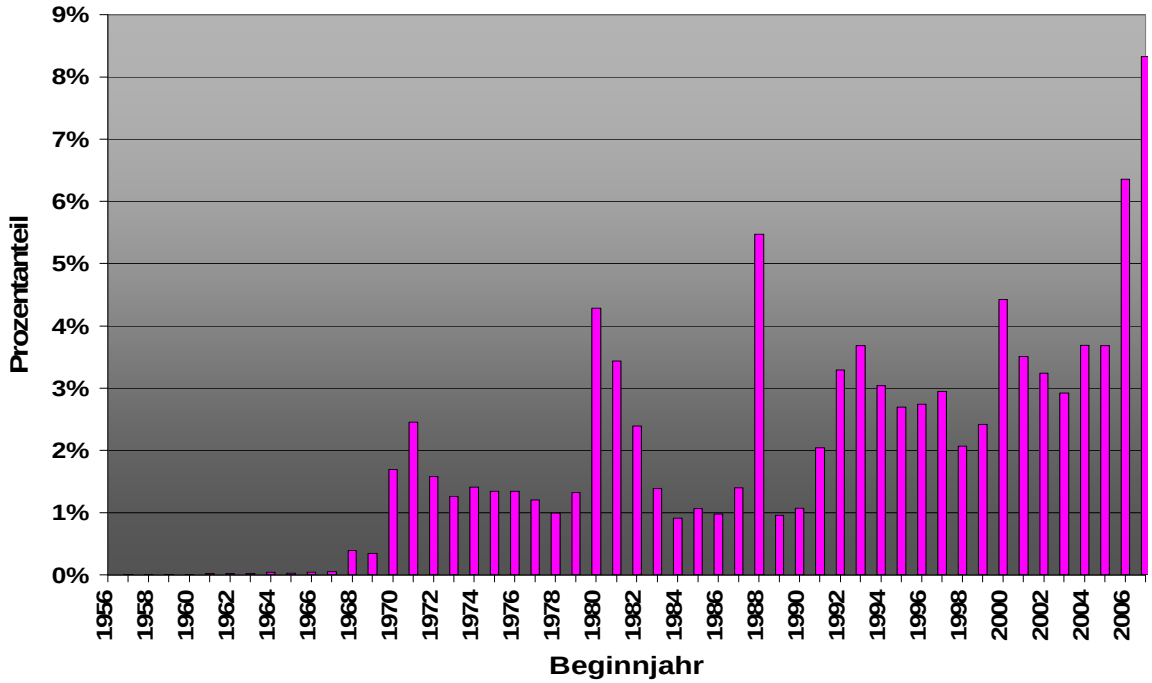

Abb. 5-14: Aufteilung nach Beginn – Verträge

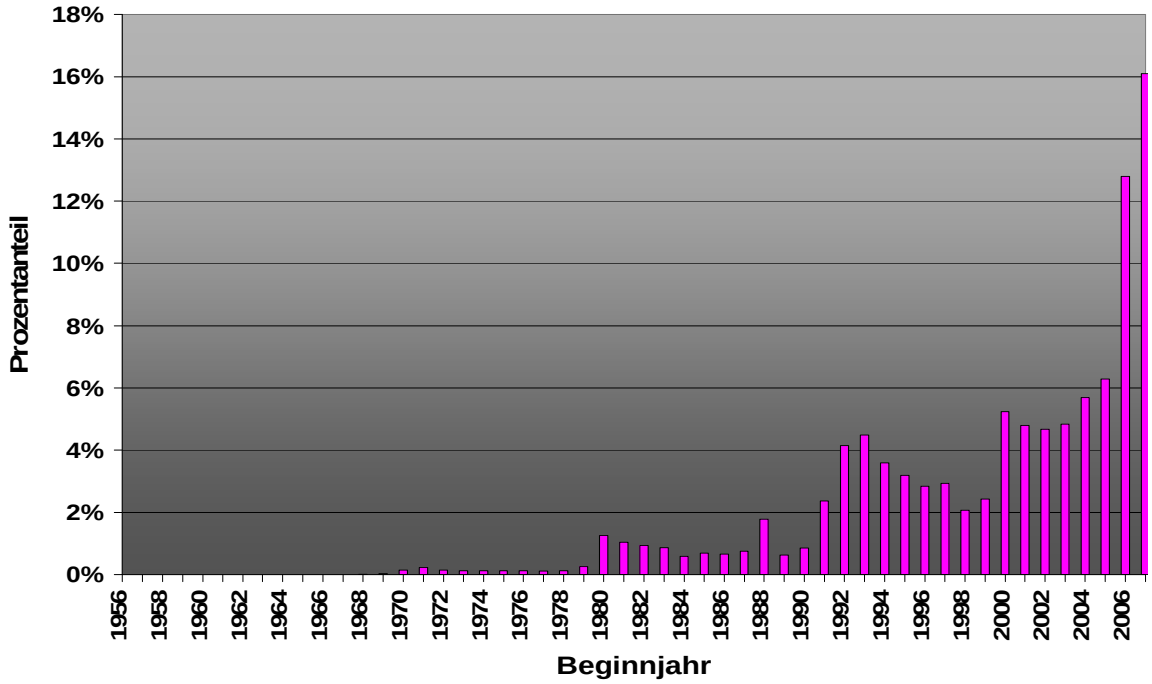

Abb. 5-15: Aufteilung nach Beginn - Jahresbestandsprämie

In den beiden letzten Aufstellungen dieses Kapitels wird auf die Versicherungsbeginne eingegangen und zwar im Blickfeld von Vertragsanzahl bzw. Jahresbestandsprämie. Während 46 % des gesamten Prämienvolumens aus den letzten 5 Beginnjahren resultieren, so fallen im Hinblick der Vertragsanzahl nur 25 % des Bestandes in diesen Zeitraum. Obwohl der älteste GP im Titel die Jahreszahl 1965 trägt, gibt es Verträge mit Beginnen bereits ab 1956. Vor 1968 wurden diese sogenannten Volksunfallverträge für ein anderes VU vertrieben und im Jahr 1968 in den unternehmenseigenen Vertragsbestand eingegliedert. Bei der Vertragsanzahl lassen sich die augenscheinlichen Spitzenwerte in den Jahren 1988, 2000 sowie 2006 und 2007 stets mit der Einführung einer neuen Produktgeneration begründen. Im Speziellen ist 1980 deshalb markant, weil ab diesem Zeitpunkt die Unfallversicherung im Unternehmen selbst stärker forciert wurde. Der fehlende grafische Ausschlag zum Zeitpunkt der Einführung des GP 1995 kann auf den Umstand zurückgeführt werden, dass dieser GP nur aufgrund einer Änderung der tariflich zugrunde liegenden Versicherungsbedingungen notwendig wurde, jedoch produkt- und tariftechnisch komplett ident zu seinem Vorgänger war.

6 Praktische Analyse des Bestandes

Wie schon bei den Bestandsinformationen erläutert wurde, beschränkt sich die praktische Arbeit auf die 5 größten Tarifgruppen Unfallinvalidität, Unfalltod, Taggeld, Spitalgeld sowie Unfallkosten. Es wurde versucht, für diese Tarifgruppen den erwarteten Gesamtschaden für das Jahr 2008, und in weiterer Folge eine nach dem MVP optimale proportionale RV-Struktur zu ermitteln. Als Basis dafür dienten die empirischen Schadendaten, welche seit dem Unfalljahr 2002 lückenlos vorhanden sind.

6.1 Erwartete Schadenanzahl

Tab. 6-1: Bestandsentwicklung (Partnernummern – versicherte Personen)

Bestandsentwicklung (Partnernummern - versicherte Personen)					
Gruppierte Tarifgruppen	**Leistungsart**	**31.12.2002**	**31.12.2003**	**31.12.2004**	**31.12.2005**
Unfallinvalidität	UI	179.466	171.685	165.546	160.224
Unfalltod	UT	139.348	134.323	130.152	126.887
Taggeld	TG	34.000	31.685	30.066	28.341
Spitalgeld	SG	82.808	78.119	75.672	73.111
Unfallkosten	UK	13.372	14.304	16.073	17.361
SUMME		**448.994**	**430.116**	**417.509**	**405.924**
Bestandsentwicklung (Partnernummern - versicherte Personen)					
Gruppierte Tarifgruppen	**Leistungsart**	**31.12.2006**	**31.12.2007**	**30.06.2008**	**HR 31.12.2008**
Unfallinvalidität	UI	154.915	151.554	149.846	148.138
Unfalltod	UT	125.342	125.831	125.977	126.123
Taggeld	TG	26.191	24.801	24.126	23.451
Spitalgeld	SG	71.879	73.675	72.890	72.105
Unfallkosten	UK	21.306	27.247	30.102	32.957
SUMME		**399.633**	**403.108**	**402.941**	**402.774**

Die obige Tabelle zeigt den Bestand, der zur Errechnung der Schadenquote je Tarifgruppe herangezogen wurde. Es handelt sich dabei um die versicherten Risiken (=Partnernummern), die jeweils zum angegebenen Stichtag im Bestand waren.

Dabei ist jeweils der interpolierte Mittelwert[34] zwischen zwei Bilanzendständen angesetzt worden, da dies näherungsweise den im Mittel während des Jahres versicherten Risiken entspricht. Diese Ziffer ist mit keiner der vorhin erläuterten Positionen (Vertragsanzahl, Tarifanzahl, versicherte Personen) zu vergleichen, da hier betonterweise nach der Anzahl der Partnernummern gruppiert wurde, weil eben sowohl mehrere Personen in einem Vertrag als auch eine Person in mehreren Verträgen vorkommen können.

Hatte also eine Person mit mehreren Verträgen einen Unfall, so wurde sie in dieser Auswertung nur einmal gezählt. Die Schadenanzahl entspricht der Anzahl der gemeldeten Schäden je Meldejahr (das sind jene Fälle, die entweder in diesem Jahr ausbezahlt wurden oder für die per 31.12. eine Schadenreserve gebildet war), wobei der Auszahlungszeitpunkt nicht mit dem Meldezeitpunkt ident sein muss. Wurden zu ein und dem selben Unfall zu verschiedenen Zeitpunkten Leistungsansprüche geltend gemacht, so zählt der Unfall mit dem ersten Meldezeitpunkt als gemeldet und wird danach nicht mehr als zusätzliches Stück gezählt (bei der Schadenhöhe fließen die weiteren Beträge natürlich sehr wohl in die Auswertungen ein).

Die allgemeine Vorgangsweise war, dass mittels CL-Modell sowie Tailfaktor die jeweils erwartete Endschadenanzahl für die Unfalljahre 2002 bis 2007 errechnet wurde. Anhand dieser erhält man auch die Schadenquoten je Unfalljahr. Der Mittelwert davon wird als Schätzer der Schadenquote herangezogen. Mittels der Teststatistik

$$\frac{N - \hat{N}}{\sqrt{\hat{N}}}$$

wird gemessen, um wie viele Poisson-Standardabweichungen der jeweilige Echtwert vom Schätzwert entfernt liegt. Als Richtwert gilt ja hier, dass die Schadenanzahl als poissonverteilt angenommen werden kann, wenn diese Abweichung in der Regel nicht größer als +/- 3 ist.

[34] Für 2002 wurde infolge vom fehlenden Vorjahreswert vom Wert per 31.12.2002 der gleiche Absolutwert abgezogen wie für 2003, d.h. es wurde angenommen, dass von 2001 auf 2002 die gleiche Entwicklung wie von 2002 auf 2003 stattfand.

6.1.1 Unfallinvalidität

Tab. 6-2: Schadenanzahl Unfallinvalidität

Unfalljahr	Meldejahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	547	467	105	15	4	2
2003	0	527	462	80	36	7
2004	0	0	550	421	87	29
2005	0	0	0	465	453	93
2006	0	0	0	0	548	442
2007	0	0	0	0	0	396

Die gemeldete Schadenanzahl für das Unfalljahr 2007 wirkt im ersten Meldejahr etwas zu gering (eine mögliche Begründung dafür ist der schneearme Winter 2006/07). Um nicht die Gesamtanzahl durch unmittelbare Benützung der CL-Faktoren ab dem 1. Meldejahr eklatant zu unterschätzen, wurde die erwartete Anzahl an gemeldeten Schäden im zweiten Meldejahr auf anderem Wege ermittelt. Es wurde zusätzlich für die Unfalljahre 2004 – 2006 das Verhältnis der im zweiten Meldejahr gemeldeten Schäden von Jahresmitte bis Jahresende analysiert. Dies geschah aus dem Grund, da die Daten für 2007 per 30.06.2008 bereits vorhanden sind. Für die Berechnung der im Jahr 2007 eingetretenen und 2008 gemeldeten Schäden wird die Gesamtanzahl per 31.12. aus 2004 – 2006 durch die Gesamtanzahl per 30.06. dividiert und dann mit dem Wert per 30.06.2008 multipliziert.

Für das Unfalljahr 2007 ist die absolute Schadenanzahl am geringsten. Dieser Trend zieht sich konsequent durch alle Tarifgruppen (außer bei den bestandsmäßig stark steigenden Unfallkosten) durch.

Tab. 6-3: HR-Faktor Unfallinvalidität

Unfalljahr	Gemeldet im 2. Meldejahr		
	Per 30.06.	Per 31.12.	Faktor
2004	271	418	1,54
2005	309	446	1,44
2006	310	442	1,43
2007	272	**399**	**1,47**

Unter Berücksichtigung dieser im Jahr 2008 für das Unfalljahr 2007 gemeldeten Schäden sowie durch Berechnung und Anwendung der jeweiligen CL-Faktoren ergeben sich folgendes kumuliertes Schadendreieck sowie die erwarteten Endschadenanzahlen. Die Indexdauer entspricht der Differenz in Jahren zwischen Unfalljahr und Meldejahr, sie ist die sogenannte Meldedauer.

Tab. 6-4: Kumulierte Schadenanzahl Unfallinvalidität

Unfalljahr	Indexdauer						Tail-F.
	0	1	2	3	4	5	0,2 %
2002	547	1.014	1.119	1.134	1.138	1.140	1.142
2003	527	989	1.069	1.105	1.112	1.114	1.116
2004	550	971	1.058	1.087	1.092	1.094	1.096
2005	465	918	1.011	1.036	1.041	1.043	1.045
2006	548	990	1.083	1.110	1.115	1.117	1.119
2007	396	795	870	891	895	897	899
CL-Faktoren			1,0938	1,0246	1,0049	1,0018	

Somit erhält man für die Tarifgruppe Unfallinvalidität folgenden Schätzer für die Schadenfrequenz (θ). $\hat{N}$ ergibt sich als Multiplikation des Schätzwertes für θ mit den jeweils im entsprechenden Jahr versicherten Risiken. Gut erkennbar ist die gerechtfertigte Annahme einer Poissonverteilung, da der Richtwert von 3 Poisson-Standardabweichungen nur einmal geringfügig überschritten wird.

Tab. 6-5: Schadenfrequenz Unfallinvalidität

Unfalljahr	Risiken	N	θ	$\hat{N}$	Abweichung
2002	183.357	1.142	0,00623	1.175	-0,96
2003	175.576	1.116	0,00636	1.125	-0,27
2004	168.616	1.096	0,00650	1.081	0,48
2005	162.885	1.045	0,00642	1.044	0,03
2006	157.570	1.119	0,00710	1.010	3,44
2007	153.235	899	0,00587	982	-2,66
Gesamt	1.001.237	6.418	**0,00641**	6.418	

Die hier angenommene Invalidisierungswahrscheinlichkeit ist mit ca. 6 ‰ abzulesen, d.h. dass bei 1.000 Versicherten pro Jahr mit 6 Fällen zu rechnen ist, bei denen eine dauernde Invalidität festgestellt wird. Auf den durchschnittlichen Grad der Invalidisierung (=Invaliditätsgrad) wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

6.1.2 Unfalltod

Tab. 6-6: Schadenanzahl Unfalltod

Unfalljahr	Meldejahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	43	7	1	1	0	0
2003	0	30	9	0	0	0
2004	0	0	30	9	1	0
2005	0	0	0	33	7	0
2006	0	0	0	0	37	4
2007	0	0	0	0	0	25

Ebenso wie bei der Tarifgruppe Unfallinvalidität wird auch hier für das Unfalljahr 2007 mittels der HR per 30.06.2008 das 2. Meldejahr miteinbezogen. Da zur Faktorberechnung die Summen per 30.06. und 31.12. benutzt wurden, wirkt sich der hohe Faktor von 2006 wegen der geringen Anzahl nicht so stark aus. Die absolute Anzahl ist 2007 am geringsten seit Beginn der Datenbasis.

Tab. 6-7: HR-Faktor Unfalltod

Unfalljahr	Gemeldet im 2. Meldejahr		
	Per 30.06.	Per 31.12.	Faktor
2004	8	9	1,13
2005	5	7	1,40
2006	2	4	2,00
2007	5	**7**	1,33

Unter Berücksichtigung dieser im Jahr 2008 für das Unfalljahr 2007 gemeldeten Schäden sowie durch Berechnung und Anwendung der jeweiligen CL-Faktoren ergeben sich folgendes kumuliertes Schadendreieck sowie die erwarteten Endschadenanzahlen.

Tab. 6-8: Kumulierte Schadenanzahl Unfalltod

Unfalljahr	Indexdauer						Tail-F.
	0	1	2	3	4	5	0,0 %
2002	43	50	51	52	52	52	52
2003	30	39	39	39	39	39	39
2004	30	39	40	40	40	40	40
2005	33	40	40	40	40	40	40
2006	37	41	41	42	42	42	42
2007	25	32	32	33	33	33	33
CL-Faktoren			1,0119	1,0077	1,0000	1,0000	

Der Schätzer θ für die Schadenfrequenz ist beim Unfalltod klarerweise von allen analysierten Tarifgruppen am geringsten. Durch die geringe und relativ konstante Schadenanzahl sind auch die Abweichungen nicht sehr groß, und die Schäden dieser Tarifgruppe können als poissonverteilt erachtet werden.

Tab. 6-9: Schadenfrequenz Unfalltod

Unfalljahr	Risiken	N	θ	$\hat{N}$	Abweichung
2002	141.861	52	0,00037	44	1,20
2003	136.836	39	0,00029	43	-0,54
2004	132.238	40	0,00030	41	-0,17
2005	128.520	40	0,00031	40	0,06
2006	126.115	42	0,00033	39	0,42
2007	125.587	33	0,00026	39	-1,02
Gesamt	791.154	246	**0,00031**	246	

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit eines Unfalltodes bei ca. 0,3 ‰, was 3 Fällen bei 10.000 Versicherten entspricht.

6.1.3 Taggeld

Tab. 6-10: Schadenanzahl Taggeld

Unfalljahr	Meldejahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	2.503	613	24	3	0	0
2003	0	2.305	555	37	8	2
2004	0	0	1.991	485	32	11
2005	0	0	0	1.661	464	35
2006	0	0	0	0	1.520	424
2007	0	0	0	0	0	1.279

Analog zu den vorangegangen Tarifgruppen wird für das Unfalljahr 2007 mittels der HR per 30.06.2008 das 2. Meldejahr miteinbezogen. Das Verhältnis zwischen den Werten per 30.06. und 31.12. ist hier sehr konstant, bloß die absolute Anzahl ist, wie auch im 1. Meldejahr, von Unfalljahr zu Unfalljahr stark fallend.

Tab. 6-11: HR-Faktor Taggeld

Unfalljahr	Gemeldet im 2. Meldejahr		
	Per 30.06.	Per 31.12.	Faktor
2004	420	485	1,15
2005	403	464	1,15
2006	381	424	1,11
2007	298	**340**	1,14

Unter Berücksichtigung dieser im Jahr 2008 für das Unfalljahr 2007 gemeldeten Schäden sowie durch Berechnung und Anwendung der jeweiligen CL-Faktoren ergeben sich folgendes kumuliertes Schadendreieck und somit die erwarteten Endschadenanzahlen. Aufgrund der generellen, vergleichsweise kürzeren Abwicklungsdauer ist der Tail-Faktor gering, obwohl schon auch manche Fälle erst nach 4 oder mehr Jahren gemeldet wurden.

Tab. 6-12: Kumulierte Schadenanzahl Taggeld

Unfalljahr	Indexdauer						Tail-F.
	0	1	2	3	4	5	0,1 %
2002	2.503	3.116	3.140	3.143	3.143	3.143	3.146
2003	2.305	2.860	2.897	2.905	2.907	2.907	2.910
2004	1.991	2.476	2.508	2.519	2.520	2.520	2.522
2005	1.661	2.125	2.160	2.166	2.166	2.166	2.168
2006	1.520	1.944	1.968	1.973	1.973	1.973	1.975
2007	1.279	1.619	1.639	1.643	1.643	1.643	1.645
CL-Faktoren			1,0121	1,0026	1,0003	1,0000	

Der Schätzer θ für die Schadenfrequenz (die beim Taggeld übrigens den höchsten Wert im Vergleich zu allen Tarifgruppen einnimmt) unterliegt beim Taggeld einem eindeutig fallenden Trend[35]. Somit kann der ermittelte Wert nicht in dieser Form für 2008 übernommen werden. Die Schadenfrequenz wird daher mittels linearer Trendfunktion

$$y = -0{,}0052x + 0{,}0966$$

modelliert, wobei x für Unfalljahr 2002 gleich 1 ist und danach mit jedem Jahr um 1 ansteigt. Der prognostizierte Wert für 2008 wäre somit 0,0602. Da jedoch 2007 als ungewöhnlich schwaches Jahr gesehen wird, wird als Fortsetzung ein gemilderter Trend angenommen. Deshalb wird für 2008 der lt. Trendfunktion für 2007 vorgesehene Wert von 0,0654 verwendet. Die Schäden werden dennoch als poissonverteilt angenommen, da der Trend klar ist.

Tab. 6-13: Schadenfrequenz Taggeld

Unfalljahr	Risiken	N	θ	$\hat{N}$	Abweichung
2002	35.158	3.146	0,08949	2.793	6,68
2003	32.843	2.910	0,08860	2.609	5,89
2004	30.876	2.522	0,08169	2.453	1,40
2005	29.204	2.168	0,07425	2.320	-3,15
2006	27.266	1.975	0,07244	2.166	-4,10
2007	25.496	1.645	0,06452	2.026	-8,46
Gesamt	180.841	14.367	**0,07945**	14.367	

[35] Dies ist eine Folge von zwei Dingen, zum einen der vermehrte Abschluss von Taggeld-Tarifen mit einer gewissen Karenzzeit, zum anderen ist der Bestand an Versicherten zum jetzigen Zeitpunkt breiter gefächert und beinhaltet schon viele Personen, die weniger „Taggeld-anfällig“ sind.

6.1.4 Spitalgeld

Tab. 6-14: Schadenanzahl Spitalgeld

Unfalljahr	Meldejahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	912	333	28	2	1	0
2003	0	902	290	27	9	2
2004	0	0	775	267	25	6
2005	0	0	0	731	282	31
2006	0	0	0	0	765	313
2007	0	0	0	0	0	688

Den bisherigen Auswertungen entsprechend wird auch in dieser Tarifgruppe für das Unfalljahr 2007 mittels der HR per 30.06.2008 das 2. Meldejahr miteinbezogen. Das Verhältnis zwischen den Werten per 30.06. und 31.12. ist analog zum Taggeld konstant. Der geringe Absolutwert der Schadenanzahl ist hier für das Unfalljahr 2007 ebenso vorhanden.

Tab. 6-15: HR-Faktor Spitalgeld

Unfalljahr	Gemeldet im 2. Meldejahr		
	Per 30.06.	Per 31.12.	Faktor
2004	229	267	1,17
2005	241	282	1,17
2006	265	313	1,18
2007	216	**253**	1,17

Unter Berücksichtigung dieser im Jahr 2008 für das Unfalljahr 2007 gemeldeten Schäden sowie durch Berechnung und Anwendung der jeweiligen CL-Faktoren ergeben sich folgendes kumuliertes Schadendreieck und somit die erwarteten Endschadenanzahlen. Obwohl die Abwicklungsdauer generell eher kürzer ist, wird wie beim Taggeld dennoch ein geringer Tail-Faktor angenommen.

Tab. 6-16: Kumulierte Schadenanzahl Spitalgeld

Unfalljahr	Indexdauer						Tail-F.
	0	1	2	3	4	5	0,1 %
2002	912	1.245	1.273	1.275	1.276	1.276	1.277
2003	902	1.192	1.219	1.228	1.230	1.230	1.231
2004	775	1.042	1.067	1.073	1.074	1.074	1.075
2005	731	1.013	1.044	1.049	1.050	1.050	1.051
2006	765	1.078	1.105	1.110	1.111	1.111	1.112
2007	688	941	964	969	970	970	971
CL-Faktoren			1,0247	1,0048	1,0012	1,0000	

Der Schätzer θ für die Schadenfrequenz ist beim Spitalgeld nahezu gleichbleibend. Obwohl der Wert für das Unfalljahr 2007 aufgrund der geringen Schadenanzahl knapp am Referenzwert der 3 Poisson-Standardabweichungen liegt, ist auch in diesem Fall die Annahme der Poissonverteilung gerechtfertigt.

Tab. 6-17: Schadenfrequenz Spitalgeld

Unfalljahr	Risiken	N	θ	$\hat{N}$	Abweichung
2002	85.153	1.277	0,01500	1.238	1,12
2003	80.464	1.231	0,01530	1.170	1,80
2004	76.896	1.075	0,01398	1.118	-1,27
2005	74.392	1.051	0,01413	1.081	-0,92
2006	72.495	1.112	0,01534	1.054	1,80
2007	72.777	971	0,01334	1.058	-2,67
Gesamt	462.175	6.719	**0,01454**	6.719	

Die Wahrscheinlichkeit eines Spitalgeld-Bezuges ist mit ca. 1,5 % nach jener für Taggeld (zwischen 7 % und 9 %) die zweithöchste aller Tarifgruppen. Auch hier sind die Daten aus 2007 als Ausreißer nach unten zu betrachten, weswegen eine Fortsetzung dieses Trends nicht erwartet wird.

6.1.5 Unfallkosten

Tab. 6-18: Schadenanzahl Unfallkosten

Unfalljahr	Meldejahr					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2002	56	27	3	1	0	0
2003	0	76	32	3	0	1
2004	0	0	68	34	4	1
2005	0	0	0	70	30	8
2006	0	0	0	0	100	55
2007	0	0	0	0	0	85

Für das Unfalljahr 2007 wird wie schon zuvor mittels der HR per 30.06.2008 das 2. Meldejahr miteinbezogen. Das Verhältnis zwischen den Werten per 30.06. und 31.12. ist stärker schwankend als etwa beim Spitalgeld. Der hohe Wert aus 2005 hat jedoch wegen der in Summe geringen Stückzahl nicht so viel Gewicht. Der Trend des schwachen Schadenjahres 2007 ist auch hier vorhanden. Aufgrund der Bestandsentwicklung müsste die Schadenanzahl im Normalfall ansteigen.

Tab. 6-19: HR-Faktor Unfallkosten

Unfalljahr	Gemeldet im 2. Meldejahr		
	Per 30.06.	Per 31.12.	Faktor
2004	26	34	1,31
2005	21	30	1,43
2006	44	55	1,25
2007	46	**60**	1,31

Unter Berücksichtigung dieser im Jahr 2008 für das Unfalljahr 2007 gemeldeten Schäden sowie durch Berechnung und Anwendung der jeweiligen CL-Faktoren ergeben sich folgendes kumuliertes Schadendreieck und somit die erwarteten Endschadenanzahlen. Die Abwicklungsdauer ist ähnlich jener bei Tag- bzw. Spitalgeld. Aufgrund der geringen absoluten Schadenanzahl würde hier ein Tail-Faktor keine Auswirkung haben, weswegen darauf verzichtet wurde.

Tab. 6-20: Kumulierte Schadenanzahl Unfallkosten

Unfalljahr	Indexdauer						Tail-F.
	0	1	2	3	4	5	0,0 %
2002	56	83	86	87	87	87	87
2003	76	108	111	111	112	112	112
2004	68	102	106	107	108	108	108
2005	70	100	108	109	109	109	109
2006	100	155	162	163	164	164	164
2007	85	145	152	153	153	153	153
CL-Faktoren			1,0458	1,0066	1,0051	1,0000	

Der Schätzer θ für die Schadenfrequenz ist bei den Unfallkosten durchaus konstant. Durch die geringe absolute Schadenanzahl liegen auch die Abweichungen in einem Bereich, der die Annahme einer Poissonverteilung für diese Tarifgruppe rechtfertigt.

Tab. 6-21: Schadenfrequenz Unfallkosten

Unfalljahr	Risiken	N	θ	$\hat{N}$	Abweichung
2002	12.906	87	0,00674	93	-0,58
2003	13.838	112	0,00809	99	1,28
2004	15.189	108	0,00708	109	-0,13
2005	16.717	109	0,00654	120	-0,97
2006	19.334	164	0,00848	139	2,15
2007	24.277	153	0,00632	174	-1,57
Gesamt	102.260	733	**0,00717**	733	

Die Unfallkosten-Wahrscheinlichkeit liegt mit ca. 7 ‰ nahe an jener für den Eintritt von Unfallinvalidität. Möglicherweise sind hier gewisse Korrelationen vorhanden.

Somit wurden für alle 5 Tarifgruppen plausible Schätzwerte für die Schadenfrequenz errechnet. Auch die Annahme der Poissonverteilung hat sich bei allen als gerechtfertigt erwiesen. Der Trend einer sinkenden Schadenfrequenz beim Taggeld ist eindeutig erkennbar und wird auch durch nachvollziehbare Veränderungen im Bestand erklärt.

6.2 Erwartete Schadenhöhe

Zur Ermittlung der erwarteten Gesamtschadenhöhe je Tarifgruppe werden zunächst Erwartungswert und Varianz der Einzelschäden (= alle Leistungen, die zu einem Unfall in der entsprechenden Tarifgruppe, auch zu verschiedenen Zeitpunkten, gezahlt wurden bzw. konkret eingeschätzt waren) ermittelt. Der Betrachtungszeitpunkt für die Unfalljahre 2002 – 2005 liegt zwei Jahre nach dem Unfalljahr per 31.12., bzw. für 2006 wird der 31.12.2007 sowie für 2007 der 30.06.2008 herangezogen. Dieser Ansatz soll möglichst vergleichbare und konsistente Daten schaffen, da sonst z.B. für das Unfalljahr 2002 eine Datenbasis von 6 Abwicklungsjahren vorhanden wäre, während für die nachfolgenden Unfalljahre entsprechend weniger Daten zur Verfügung stehen würden. Klarerweise sind für jene Unfalljahre mit geringerem Betrachtungszeitraum auch weniger Daten vorhanden und viele Schäden (v.a. in der Unfallinvalidität) befinden sich zum Analysezeitpunkt noch in der Reservephase. Auch bei den Tarifgruppen Taggeld und Spitalgeld, bei denen der Anspruch auf bis zu 365 Tagsätze Leistung in den dem Unfalltag folgenden vier Jahren besteht, ist für die Großschäden die vorhandene Leistung etwas zu gering.

In weitere Folge wird versucht, die empirische Verteilung je Tarifgruppe und Unfalljahr sowie je Tarifgruppe insgesamt (Daten zu den Unfalljahren 2002 – 2006) durch theoretische Verteilungsannahmen möglichst gut zu rekonstruieren. Dies wird mit der logarithmischen Normalverteilung sowie mit der Gammaverteilung getestet. Die verwendeten Methoden zur Parameterschätzung sind für beide Verteilungen die Momenten-Methode sowie für erstgenannte die MCQ-Methode.

6.2.1 Unfallinvalidität

Bei dieser Tarifgruppe, der sowohl anzahl- als auch prämienmäßig größten, sind auch die höchsten Schäden vorhanden. Bei den Schadenhöhen gibt es immer wieder Spitzen, die sich aufgrund von gängigen VS- und Invaliditätsgradkombinationen ergeben[36]. Diese machen bei der Modellierung Schwierigkeiten und führen auch zu den größten Abweichungen bei der Chi-Quadrat-Teststatistik.

Tab. 6-22: Schadenhöhe Unfallinvalidität[37]

		Momenten-M.		Min.-Chi-Quadrat-M.		
Unfalljahr	**Analysierte Anzahl**	**E[X]**	**Var[X]**	**E[X]**	**Var[X]**	**max[X]**
2002	1.095	6.412	289.365.309	6.466	127.888.493	436.037
2003	1.033	6.691	375.733.898	5.998	112.706.466	249.172
2004	1.023	5.153	60.710.513	5.198	57.703.956	109.009
2005	973	5.656	232.690.264	5.371	77.434.350	230.000
2006	972	5.397	135.183.675	5.270	68.862.083	221.600
Gesamt	5.096	5.878	220.925.281	**5.662**	**86.313.974**	436.037
Werte per 30.06.2008						
2007	671	5.397	162.069.391	5.009	48.335.314	168.731

Die Unterschiede zwischen der analysierten und der gemeldeten Schadenanzahl ergeben sich aus dem Umstand, dass in dieser Tarifgruppe für manche Fälle zwar eine Schadenreserve gebildet, letztendlich aber keine Leistung erbracht wird. Somit ist die hier deklarierte Anzahl immer geringer als die gemeldete. Seit 2002 gab es nur einen Schaden über EUR 400.000, welcher auch den verhältnismäßig hohen Erwartungswert für das Unfalljahr 2002 zur Folge hat. Die hohe Varianz im Jahr 2003 erklärt sich durch 6 Schäden über EUR 200.000, wogegen 2004 kein augenscheinlicher Großschaden (über EUR 200.000) vorliegt. Die Daten zum Unfalljahr 2007 sind nur der Vollständigkeit halber angeführt und nicht repräsentativ (und werden daher auch nicht für die Gesamtwerte miteinbezogen), da die Anzahl aufgrund der Melde- und Abwicklungsgeschwindigkeit noch zu gering ist und vor allem Großschäden oft eine relativ lange Einschätzdauer haben.

[36] Häufige VS sind etwa aus früheren Verträgen Vielfache von ATS 100.000 (Schilling), gängige Invaliditätsgrade bei vielen Arm- und Beinverletzungen bewegen sich bei 10 bzw. 15 %.

[37] Außer der analysierten Anzahl handelt es sich bei allen angegebenen Werten um Beträge in Euro.

Tab. 6-23: Parameterschätzer Unfallinvalidität

	LN (μ, σ^2)		LN (μ, σ^2)		GA(α, β)	
Unfalljahr	**Momenten-M.**		**Min.-Chi-Quadrat-M.**		**Momenten-M.**	
	μ	**σ^2**	**μ**	**σ^2**	**α**	**β**
2002	7,724	2,084	8,074	1,401	0,142	45.128,713
2003	7,689	2,240	7,990	1,419	0,119	56.155,119
2004	7,952	1,190	7,985	1,143	0,437	11.781,586
2005	7,584	2,113	7,937	1,304	0,137	41.140,429
2006	7,729	1,730	7,946	1,247	0,215	25.047,929
Gesamt	7,679	2,001	**7,988**	**1,306**	0,156	37.585,111
Werte per 30.06.2008						
2007	7,653	1,882	7,982	1,074	0,180	30.029,533

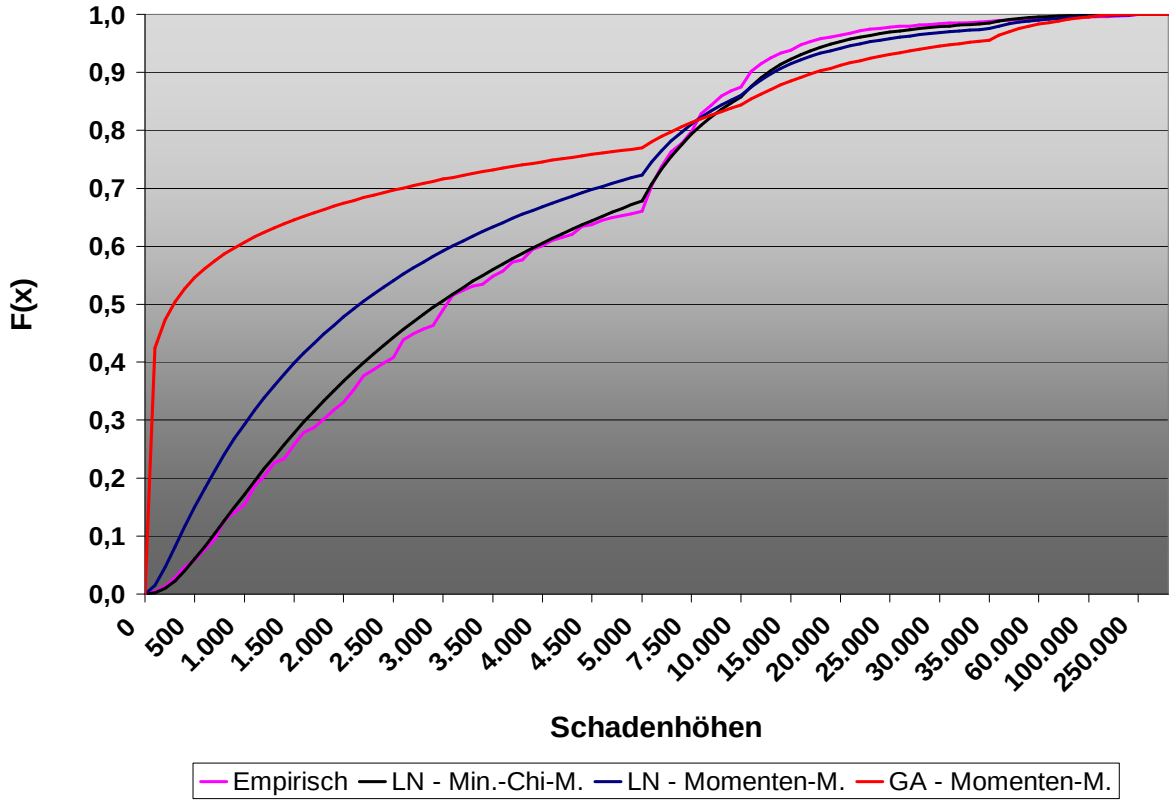

Abb. 6-1: VF Schadenhöhen Unfallinvalidität-Gesamt

Aus obiger Tabelle sowie Grafik ist erkennbar, dass die mittels MCQ-Methode angepasste logarithmische Normalverteilung die empirischen Daten sehr gut repliziert. Bei den Kleinschäden wird etwas überschätzt, bei den größeren ein wenig unterschätzt. Die beiden mittels Momenten-Methode generierten Verteilungen überschätzen die empirische Verteilung bis zu Schadenhöhen von EUR 7.500 enorm und sind daher nicht geeignet.

Als gewählte Parameter für das Unfalljahr 2008 werden die MCQ-Schätzer für die Gesamtbetrachtung (Unfalljahr 2002 bis 2006) genommen. Obwohl der Trend in den letzten Jahren eher niedrigere Durchschnittsschäden gebracht hat, geschieht dies aufgrund der Annahme, dass durch die stark steigende mittlere VS (inkl. Vollversicherungen ist von 2002 auf 2007 eine VS-Steigerung von ca. 40 % zu beobachten) höhere Schäden zu erwarten sind.

Die Anpassung im Großschadenbereich ist nicht optimal. Mit einer überlagerten Verteilung, welche Großschäden besser approximiert, z.B. der Paretoverteilung, könnte für die Schäden über EUR 50.000 eine Verbesserung erreicht werden.

6.2.2 Unfalltod

Diese Tarifgruppe, anzahlmäßig am zweitgrößten, hat die höchsten Durchschnittsschäden. Da es im Gegensatz zur Unfallinvalidität keine prozentuelle Abstufung der Leistung gibt, wird im Schadenfall immer die volle VS fällig. Die geringe Anzahl lässt eine genaue Anpassung einer theoretischen Verteilung nicht zu, wie an der nachfolgenden Grafik abzulesen ist.

Tab. 6-24: Schadenhöhe Unfalltod

		Momenten-M.		Min.-Chi-Quadrat-M.		
Unfalljahr	**Analysierte Anzahl**	**E[X]**	**Var[X]**	**E[X]**	**Var[X]**	**max[X]**
2002	49	7.616	21.451.783	8.488	83.732.813	15.721
2003	38	8.368	55.072.536	8.668	71.882.764	43.604
2004	39	10.147	77.569.235	10.855	150.247.089	40.875
2005	38	13.214	1.184.935.363	10.912	225.381.541	218.019
2006	40	7.519	20.855.518	7.960	47.609.290	20.000
Gesamt	204	9.264	254.086.348	**9.198**	**97.322.341**	218.019
Werte per 30.06.2008						
2007	30	11.666	114.541.969	11.905	167.950.901	40.000

Die Unterschiede zwischen der analysierten und der gemeldeten Schadenanzahl ergeben sich analog zur Unfallinvalidität daraus, dass in dieser Tarifgruppe für manche Fälle zwar eine Schadenreserve gebildet, in späterer Folge aber keine Leistung erbracht wird. Deshalb ist die hier deklarierte Anzahl immer geringer als die gemeldete. Der für den hohen Erwartungswert sowie die hohe Varianz im Jahr 2005 verantwortliche Fall ist ein absoluter Ausreißer[38] (die erbrachte Leistung ist fünf Mal so hoch wie beim zweithöchsten Schaden). Die Daten zum Unfalljahr 2007 sind nur der Vollständigkeit halber angeführt und nicht repräsentativ (und werden daher auch nicht für die Gesamtwerte miteinbezogen), da die Anzahl aufgrund der Melde- und Abwicklungsgeschwindigkeit noch zu gering ist.

[38] Ohne diesen Fall würde sich der Erwartungswert bei der Momenten-Methode für das Unfalljahr 2005 auf EUR 7.700 sowie die Varianz ca. um den Faktor 50 reduzieren (bei der MCQ-Methode auf EUR 8.400 und um den Faktor 3). Selbst der Erwartungswert Gesamt (nach Momenten-M.) wäre ohne diesen Fall um EUR 1.000 geringer.

Tab. 6-25: Parameterschätzer Unfalltod

	LN (μ, σ^2)		LN (μ, σ^2)		GA(α, β)	
Unfalljahr	**Momenten-M.**		**Min.-Chi-Quadrat-M.**		**Momenten-M.**	
	μ	**σ^2**	**μ**	**σ^2**	**α**	**β**
2002	8,781	0,315	8,661	0,771	2,704	2.816,673
2003	8,742	0,580	8,732	0,671	1,271	6.581,326
2004	8,944	0,562	8,881	0,822	1,327	7.644,549
2005	8,463	2,052	8,766	1,062	0,147	89.672,723
2006	8,768	0,314	8,702	0,560	2,711	2.773,709
Gesamt	8,446	1,376	**8,744**	**0,766**	0,338	27.427,283
Werte per 30.06.2008						
2007	9,059	0,611	8,994	0,782	1,188	9.818,444

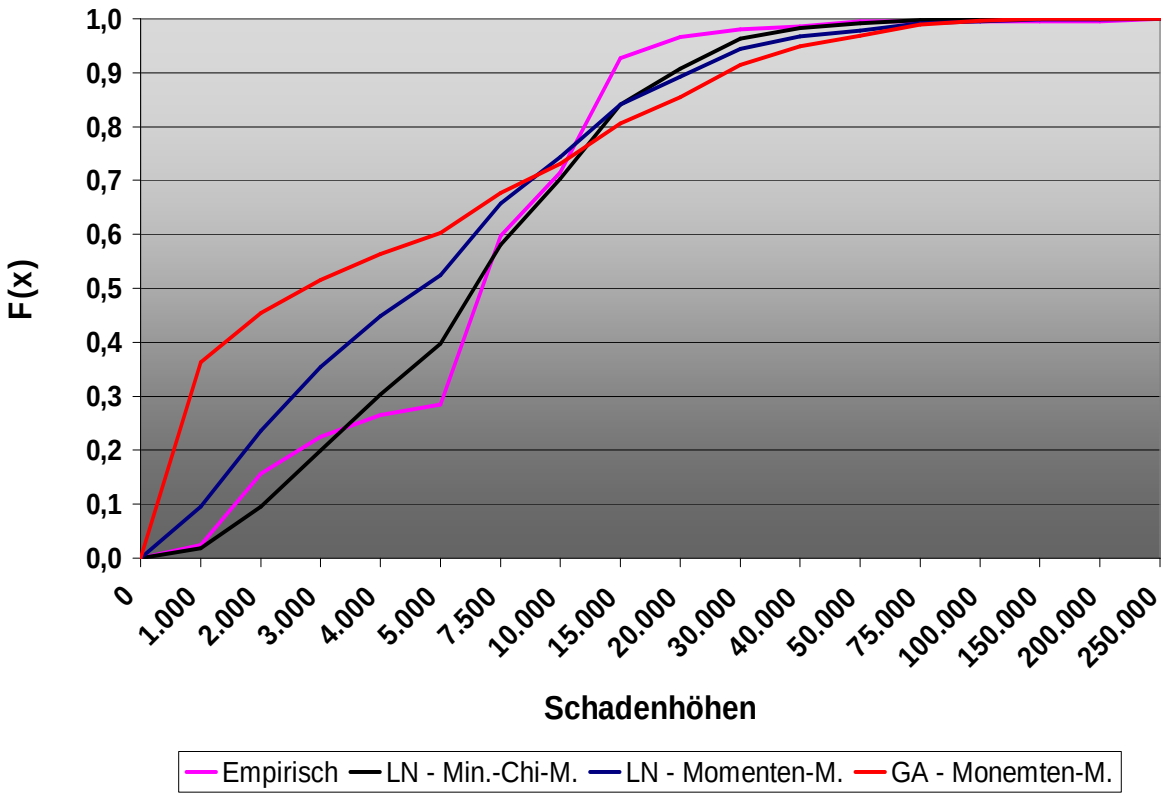

Abb. 6-2: VF Schadenhöhen Unfalltod-Gesamt

Aus obiger Tabelle sowie Grafik ist abzulesen, dass die empirischen Daten durch die logarithmische Normalverteilung mit nach der MCQ-Methode erhaltenen Parametern im Mittel am besten approximiert werden. Die beiden anderen Verteilungen weichen vor allem im Bereich der Schäden bis EUR 15.000,- viel stärker ab.

Als gewählte Parameter für das Unfalljahr 2008 werden die MCQ-Schätzer für die Gesamtbetrachtung genommen. Durch den erwähnten Ausreißer im Unfalljahr 2005 werden zwar Erwartungswert und Varianz signifikant höher, jedoch ist auch die mittlere VS von 2002 bis 2007 um 46 % gestiegen, weshalb höhere Schäden zu erwarten sind.

Ein weiterer Großschaden im Bereich über EUR 200.000 ist ziemlich unwahrscheinlich, da es insgesamt nur 34 Versicherte mit solch einer hohen VS gibt und die Eintrittswahrscheinlichkeit für diese Tarifgruppe nur 3 ‰ beträgt.

6.2.3 Taggeld

Bei dieser Tarifgruppe gibt es immer wieder Spitzen, die durch gängige Taggeld-Sätze und typische Bezugsdauern (bspw. 2 Wochen Krankenstand) zustande kommen. Die genügend große Schadenanzahl sowie die im Vergleich zu Unfallinvalidität und Unfalltod geringen Höchstschäden führen dazu, dass die empirischen Daten durch die Verteilungsmodelle der logarithmischen Normalverteilung nahezu perfekt approximiert werden können.

Tab. 6-26: Schadenhöhe Taggeld

		Momenten-M.		Min.-Chi-Quadrat-M.		
Unfalljahr	**Analysierte Anzahl**	**E[X]**	**Var[X]**	**E[X]**	**Var[X]**	**max[X]**
2002	3.140	339	305.190	320	192.004	11.205
2003	2.897	349	254.574	336	213.653	6.148
2004	2.508	345	269.504	334	197.447	9.125
2005	2.160	364	320.932	347	222.986	7.994
2006	1.944	394	314.534	385	306.866	6.632
Gesamt	12.649	355	290.891	341	219.312	11.205
Werte per 30.06.2008						
2007	1.578	361	206.637	361	229.517	6.470

Nach dem dritten Meldejahr werden nur mehr sehr wenige Schäden gemeldet. Allerdings kommt es öfters vor, dass sich der Schaden für einen Unfall nachträglich erhöht (durch weitere unfallbedingte Krankenstände) und somit der Durchschnittsschaden im Lauf der Zeit steigt. War in dieser Tarifgruppe bei der Schadenanzahl ein Trend nach unten erkennbar, so ist bei der Schadenhöhe ein Trend nach oben absehbar. Daher hat sich der mit MCQ-Methode errechnete Erwartungswert von 2002 bis 2006 im Mittel um knapp 5 % erhöht. Unter der Hypothese, dass sich dieser Trend fortsetzt, werden somit für 2008 folgende Werte als Erwartungswert bzw. Varianz (nach MCQ-Methode) geschätzt:

$$E[X]_{2008} = E\left[(1+a_i)^2 \cdot X\right]_{2006} = (1+a_i)^2 \cdot E[X]_{2006} = 428,$$

$$Var[X]_{2008} = Var\left[(1+a_i)^2 \cdot X\right]_{2006} = (1+a_i)^4 \cdot Var[X]_{2006} = 372.998, \quad \text{wobei } a_i = 5\ \% \text{ ist.}$$

Die Daten zum Unfalljahr 2007 sind nur der Vollständigkeit halber angeführt und nicht repräsentativ (und werden daher auch nicht für die Gesamtwerte miteinbezogen), da die Anzahl aufgrund der Melde- und Abwicklungsgeschwindigkeit noch zu gering ist.

Tab. 6-27: Parameterschätzer Taggeld

	LN (μ, σ^2)		LN (μ, σ^2)		GA(α, β)	
Unfalljahr	**Momenten-M.**		**Min.-Chi-Quadrat-M.**		**Momenten-M.**	
	μ	**σ^2**	**μ**	**σ^2**	**α**	**β**
2002	5,178	1,296	5,242	1,055	0,377	900,265
2003	5,291	1,128	5,288	1,061	0,478	729,438
2004	5,252	1,183	5,304	1,017	0,442	781,171
2005	5,282	1,230	5,326	1,047	0,413	881,681
2006	5,423	1,107	5,392	1,122	0,494	798,310
Gesamt	5,274	1,196	5,302	1,060	0,433	819,411
Werte per 30.06.2008						
2007	5,414	0,950	5,380	1,016	0,631	572,402

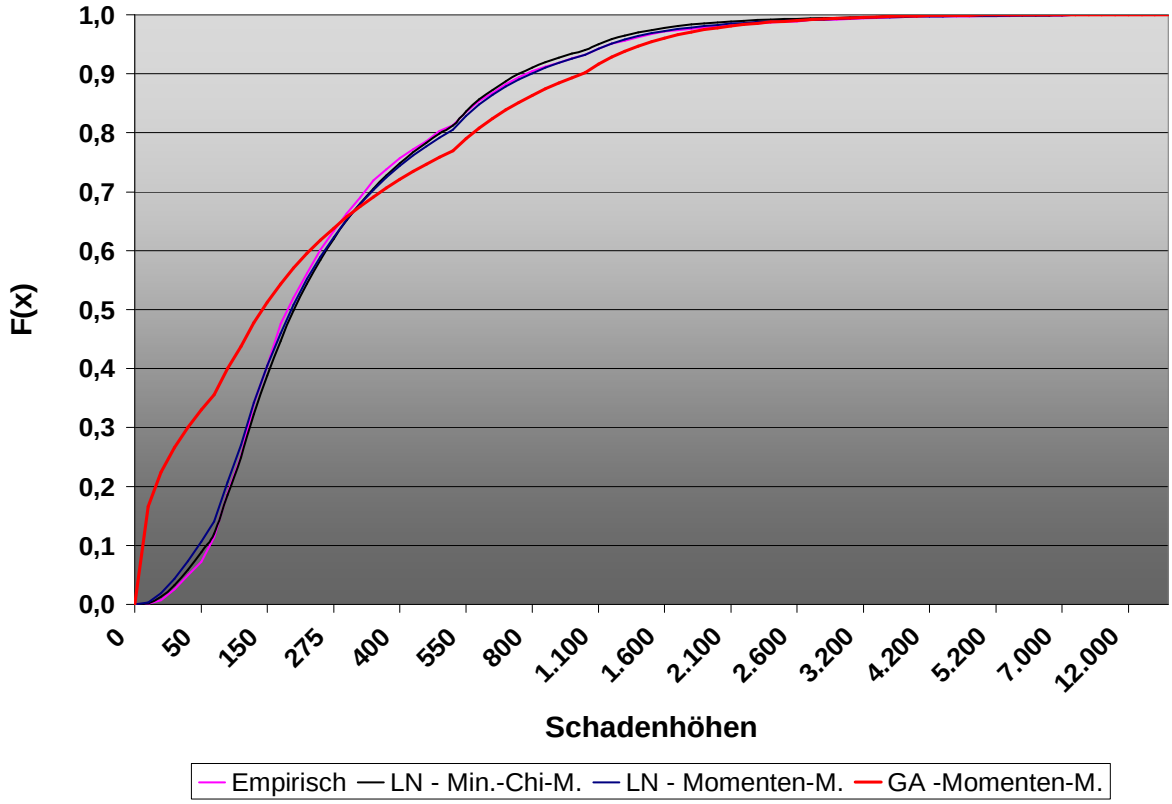

Abb. 6-3: VF Schadenhöhen Taggeld-Gesamt

Aus obiger Tabelle sowie Grafik sieht man, dass die empirischen Daten sowohl durch die logarithmische Normalverteilung mit nach der MCQ-Methode als auch nach der Momenten-Methode erhaltenen Parametern sehr genau repliziert werden können. Die Gammaverteilung überschätzt, wie bei den anderen Tarifgruppen auch, die Kleinschäden übermäßig.

Als gewählte Parameter für das Unfalljahr 2008 werden die MCQ-Schätzer gewählt, da sie im Gegensatz zu den Momentenschätzern die geringere Varianz aufweisen. Für Erwartungswert und Varianz des Unfalljahres 2008 wurde von 2006 hochgerechnet.

Im Gegensatz zu den vorhin behandelten Tarifgruppen hat sich die mittlere VS beim Taggeld von 2002 bis 2007 mit knapp 19 % unterdurchschnittlich stark erhöht. Die steigenden Durchschnittsschäden zeigen jedoch, dass durch die Einführung von Karenzzeiten bei dieser Tarifgruppe die Anzahl an Kleinschäden (mit kurzer Bezugsdauer) zurückgeht.

6.2.4 Spitalgeld

Bei dieser Tarifgruppe, welche prämienmäßig am zweitgrößten ist, stellt sich das Verhalten der Schadenhöhen ähnlich wie beim Taggeld dar. Die genügend große Schadenanzahl sowie die im Vergleich zu Unfallinvalidität niedrigen Höchstschäden führen dazu, dass die empirischen Daten durch die Verteilungsmodelle der logarithmischen Normalverteilung sehr gut approximiert werden können.

Tab. 6-28: Schadenhöhe Spitalgeld

		Momenten-M.		Min.-Chi-Quadrat-M.		
Unfalljahr	**Analysierte Anzahl**	**E[X]**	**Var[X]**	**E[X]**	**Var[X]**	**max[X]**
2002	1.273	346	438.158	319	205.000	12.647
2003	1.219	362	510.497	329	263.308	8.540
2004	1.067	309	223.684	298	178.085	6.906
2005	1.044	374	583.140	345	255.191	16.640
2006	1.078	240	184.547	221	98.938	5.542
Gesamt	5.681	327	393.902	**303**	**201.126**	16.640
Werte per 30.06.2008						
2007	904	329	202.428	319	168.455	4.585

Die hier analysierten Schäden weisen keine besonderen Merkmale und auch keinen speziellen Trend auf. Einzig das Unfalljahr 2006 scheint ein Ausreißer nach unten zu sein, wofür keine stichhaltige Erklärung bekannt ist. Im Jahr 2005 ist der größte Schaden doppelt so hoch wie der zweitgrößte, wodurch der Erwartungswert um einige Einheiten angestiegen ist. Die Daten zum Unfalljahr 2007 sind nur der Vollständigkeit halber angeführt und nicht repräsentativ (und werden daher auch nicht für die Gesamtwerte miteinbezogen), da die Anzahl aufgrund der Melde- und Abwicklungsgeschwindigkeit noch zu gering ist.

Tab. 6-29: Parameterschätzer Spitalgeld

	LN (μ, σ^2)		LN (μ, σ^2)		GA(α, β)	
Unfalljahr	**Momenten-M.**		**Min.-Chi-Quadrat-M.**		**Momenten-M.**	
	μ	**σ^2**	**μ**	**σ^2**	**α**	**β**
2002	5,077	1,539	5,213	1,104	0,273	1.266,353
2003	5,157	1,469	5,181	1,232	0,299	1.210,381
2004	5,130	1,207	5,145	1,102	0,427	723,896
2005	5,103	1,643	5,272	1,144	0,240	1.559,198
2006	4,763	1,436	4,844	1,108	0,312	768,946
Gesamt	5,018	1,544	**5,134**	**1,160**	0,271	1.204,593
Werte per 30.06.2008						
2007	5,269	1,054	5,278	0,976	0,535	615,283

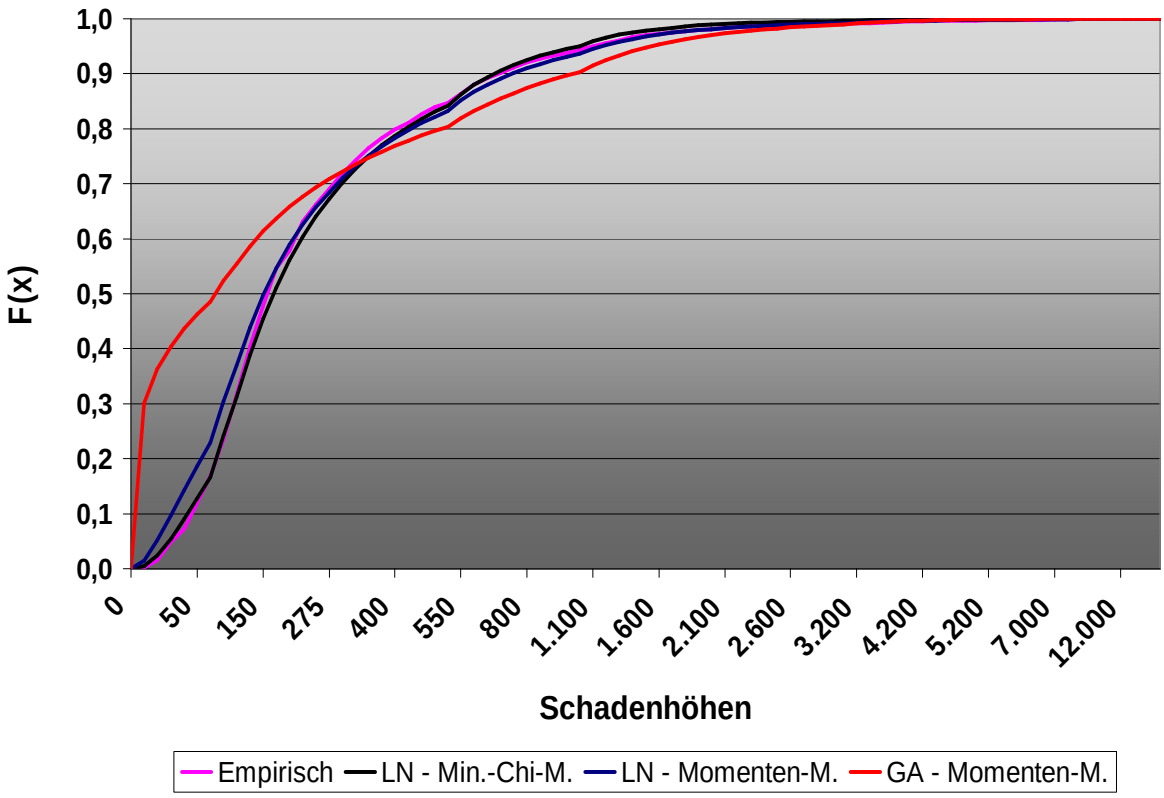

Abb. 6-4: VF Schadenhöhen Spitalgeld-Gesamt

Sehr gut aus obiger Grafik abzulesen ist, dass die empirischen Daten durch die logarithmische Normalverteilung mit nach der MCQ-Methode erhaltenen Parametern nahezu perfekt approximiert werden. Auch die logarithmische Normalverteilung nach der Momenten-Methode wäre mit Ausnahme einer geringfügigen Überschätzung bei den Kleinschäden akzeptabel. Die Gammaverteilung ist auch für diese Tarifgruppe nicht passend.

Als gewählte Parameter für das Unfalljahr 2008 werden die MCQ-Schätzer für die Gesamtbetrachtung gewählt. Diese passen im Vergleich der VF mit den empirischen Daten am besten und liefern außerdem im Gegensatz zu den Momentenschätzern nur die halbe Varianz.

Die mittlere VS ist beim Spitalgeld im Zeitraum von 2002 bis 2007 ähnlich zum Taggeld unterdurchschnittlich stark gestiegen. Bei dieser Tarifgruppe ist aus der Entwicklung der Durchschnittsschäden kein spezieller Trend erkennbar.

6.2.5 Unfallkosten

Diese Tarifgruppe ist von den fünf betrachteten zwar die anzahlmäßig kleinste, jedoch die mit dem stärksten Wachstum. Dies spiegelt sich auch in der deutlich ansteigenden Anzahl der eintretenden Schäden wieder. Die bis dato noch geringe Schadenanzahl erschwert die genaue Anpassung einer theoretischen Verteilung, was anhand der nachfolgenden Grafik im Detail hervorgeht.

Tab. 6-30: Schadenhöhe Unfallkosten

		Momenten-M.		Min.-Chi-Quadrat-M.		
Unfalljahr	**Analysierte Anzahl**	**E[X]**	**Var[X]**	**E[X]**	**Var[X]**	**max[X]**
2002	86	452	365.187	559	2.533.478	3.064
2003	111	404	373.051	475	2.635.879	3.296
2004	106	502	853.786	566	3.637.601	7.006
2005	108	368	313.083	471	2.491.840	3.599
2006	155	502	1.059.330	576	4.131.495	8.582
Gesamt	566	450	637.695	519	2.886.932	8.582
Werte per 30.06.2008						
2007	131	374	1.039.065	314	727.012	10.103

Die Schadenhöhen weisen bezüglich Erwartungswert und Varianz weder besondere Merkmale noch spezielle Trends auf. Im Unterschied zu allen anderen Tarifgruppen werden hier bei der durch die MCQ-Methode ermittelten Verteilung Erwartungswert und Varianz im Gegensatz zum Echtwert relativ stark überschätzt. Im Vergleich der VF ist diese Verteilung jedoch viel passender. Die Daten zum Unfalljahr 2007 sind nur der Vollständigkeit halber angeführt und nicht repräsentativ (und werden daher auch nicht für die Gesamtwerte miteinbezogen), da die Anzahl aufgrund der Melde- und Abwicklungsgeschwindigkeit noch zu gering ist.

Tab. 6-31: Parameterschätzer Unfallkosten

	LN (μ, σ^2)		LN (μ, σ^2)		GA(α, β)	
Unfalljahr	**Momenten-M.**		**Min.-Chi-Quadrat-M.**		**Momenten-M.**	
	μ	**σ^2**	**μ**	**σ^2**	**α**	**β**
2002	5,601	1,025	5,222	2,209	0,559	807,936
2003	5,407	1,190	4,893	2,541	0,438	923,394
2004	5,479	1,479	5,083	2,513	0,295	1.700,769
2005	5,309	1,198	4,901	2,506	0,433	850,769
2006	5,394	1,649	5,058	2,598	0,238	2.110,219
Gesamt	5,398	1,423	5,020	2,462	0,318	1.417,100
Werte per 30.06.2008						
2007	4,858	2,132	4,689	2,123	0,135	2.778,249

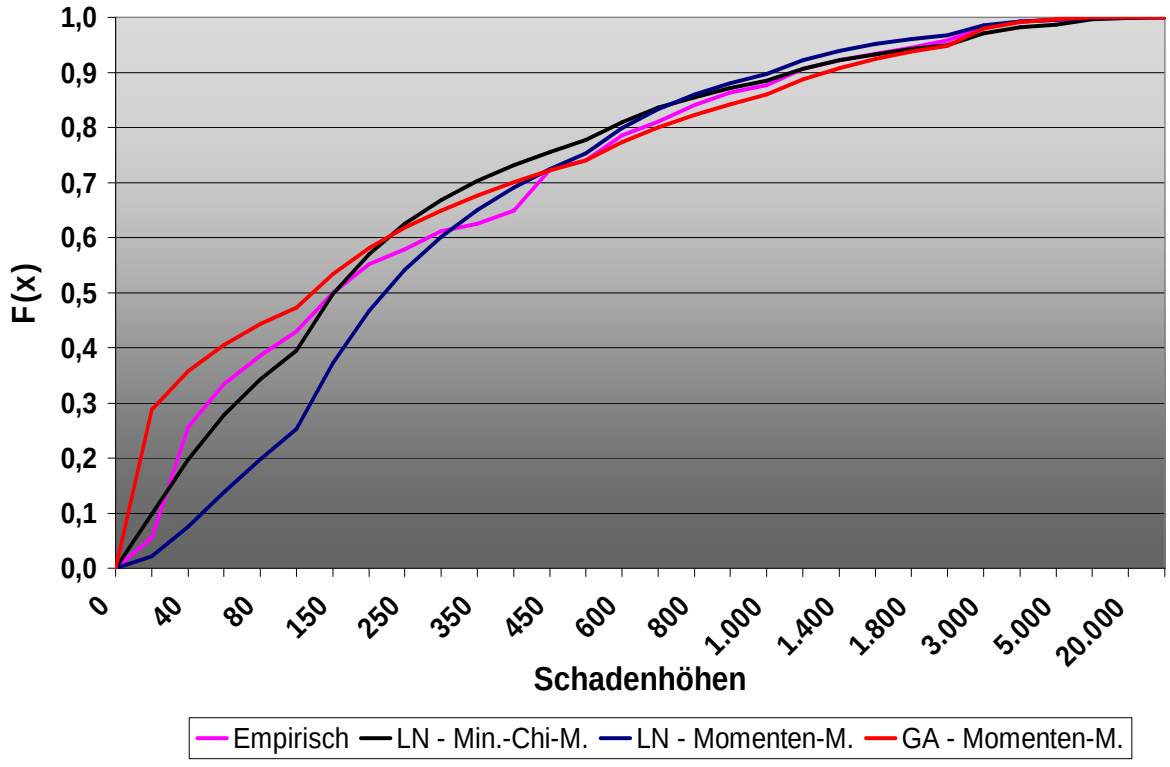

Abb. 6-5: VF Schadenhöhen Unfallkosten-Gesamt

Die obige Grafik veranschaulicht gut, dass die empirischen Daten durch die logarithmische Normalverteilung mit nach der MCQ-Methode erhaltenen Parametern am besten approximiert werden. Die logarithmische Normalverteilung nach der Momenten-Methode unterschätzt im Kleinschadenbereich sehr stark, weswegen für diese Tarifgruppe sogar ausnahmsweise die Gammaverteilung besser entsprechen würde. Somit werden erneut, analog zu den anderen Tarifgruppen, wieder die MCQ-Schätzer für die Gesamtbetrachtung als Parameter für das Unfalljahr 2008 gewählt.

Die mittlere VS ist bei den Unfallkosten von 2002 bis 2007 um knapp 65 % gestiegen. Allerdings wirkt sich dies auf das Schadenverhalten nicht so stark aus, da einige versicherte Leistungsbausteine bei jedem abgeschlossenen Unfallkosten-Tarif (unabhängig von der gewählten VS) mit einer fixen Maximal-VS (bei den Hubschrauberbergungskosten beispielsweise EUR 10.000) automatisch eingeschlossen sind.

Somit können für jede der 5 Tarifgruppen Erwartungswert und Varianz der Schadenhöhen für das Unfalljahr 2008 durch eine logarithmische Normalverteilung, deren Parameter mittels MCQ-Methode geschätzt wurden, approximiert werden. Insbesondere beim Taggeld sowie Spitalgeld passen diese Verteilungsannahmen außergewöhnlich genau. Bei Unfalltod sowie Unfallkosten liegen aufgrund der geringen Schadenanzahl etwas größere Abweichungen (gemessen an der VF) vor. Als Basis für die Berechnung der Schätzer dienen außer beim Taggeld alle Schäden der Unfalljahre 2002 – 2006, für die Tarifgruppe Taggeld wird allerdings aufgrund steigender Schadenhöhen extrapoliert.

6.3 Erwarteter Gesamtschaden

Somit sind nun Schätzwerte sowohl für die Schadenfrequenz als auch für die mittlere Schadenhöhe je Tarifgruppe vorhanden. Damit kann der erwartete Gesamtschaden je Tarifgruppe für das Unfalljahr 2008 sowie dessen Varianz berechnet werden. In weiterer Folge ergibt sich daraus der erwartete Gesamtschaden insgesamt, wobei angenommen wird, dass die einzelnen Tarifgruppen voneinander unabhängig seien.

Tab. 6-32: Erwartete Schäden 2008 (Anzahl + mittlere Schadenhöhe)

Tarifgruppe	Risiken	θ	E[N]	E[X]	Var[X]
UI	149.846	0,00641	960	5.662	86.313.974
UT	125.977	0,00031	39	9.198	97.322.341
TG	24.126	0,06540	1.578	428	372.998
SG	72.890	0,01451	1.060	303	201.126
Unfallkosten	30.102	0,00717	216	519	2.886.932

Tab. 6-33: Erwartete Schäden 2008 (Gesamtschaden)

Tarifgruppe	E[S]	Var[S]
UI	5.435.520	113.637.329.280
UT	358.722	7.095.096.255
TG	675.384	877.655.196
SG	321.180	310.511.100
UKO	112.104	681.759.288
Gesamt	**6.902.910**	**122.602.351.119**

Diese Tabelle veranschaulicht gut, wie stark der Gesamtschaden von der Tarifgruppe Unfallinvalidität abhängt. Beim Erwartungswert des Gesamtschadens macht diese Tarifgruppe über 78 %, bei der Varianz über 92 % der gesamten Unfallsparte aus. Ist beim Erwartungswert Taggeld mit knapp 10 % am zweitgrößten, so ist bei der Varianz neben der Unfallinvalidität die Tarifgruppe Unfalltod (ca. 6 %) die einzige weitere mit Bedeutung. Die restlichen Tarifgruppen sind aufgrund ihrer beschränkten Maximalschadenhöhe ziemlich gut einschätzbar, da größere Abweichungen unwahrscheinlich sind.

6.4 Berechnung der proportionalen RV-Strategie

Für den erwarteten Gesamtschaden soll an dieser Stelle eine nach dem MVP optimale proportionale RV-Struktur berechnet werden, wobei ein konstanter erwarteter Überschuss im EB zu berücksichtigen ist. Die analysierten Prämienkalkulationsprinzipien sind das Erwartungswert-, Standardabweichungs- sowie das Varianzprinzip. Bei den Prämien handelt es sich um sogenannte Tarifprämien, also Nettoprämien inkl. Sicherheitszuschlag, jedoch exkl. Kosten und Steuern. Abhängig vom gewählten Prinzip ergeben sich unterschiedliche Proportionalitätsfaktoren. Wird der gewünschte Überschuss im EB vorgegeben, so folgen verschiedene Gesamtprämien wie auch Varianzen im EB.

Die Prämien werden wie folgt berechnet:

$P = E[S] + \alpha \cdot \sqrt{Var[S]}$ beim Standardabweichungsprinzip,

$P = E[S] + \alpha \cdot Var[S]$ beim Varianzprinzip sowie

$P = (1 + \alpha) \cdot E[S]$ beim Erwartungswertprinzip.

Nachfolgend wird jeweils ein Beispiel für jedes Kalkulationsprinzip dargelegt, wobei beim Standardabweichungs- sowie Erwartungswertprinzip als Bedingung gilt, dass der erwartete Überschuss im EB EUR 100.000 beträgt. Beim Varianzprinzip gilt die zusätzliche Bedingung, dass die Gesamtprämie den gleichen Wert wie die nach dem Standardabweichungsprinzip errechnete Prämie hat[39].

[39] Dies geschieht aus Gründen der Vergleichbarkeit. Beim Varianzprinzip kann man die EB-Quote über die Konstante C beliebig steuern. Somit wäre bei geringerer Prämie durch eine höhere EB-Quote der vorgegebene Überschuss ebenfalls erreichbar.

Tab. 6-34: RV-Struktur Standardabweichungsprinzip I

Tarifgruppe	$P^{(i)}$	$E[S^{(i)}]$
UI	5.817.095	5.435.520
UT	454.067	358.722
TG	708.918	675.384
SG	341.126	321.180
UKO	141.659	112.104
Gesamt	**7.462.865**	**6.902.910**
EB	**1.261.764**	**1.161.764**
%EB	**16,91%**	**16,83%**
	α = 113,19%	**C = 15.576**

Tab. 6-35: RV-Struktur Standardabweichungsprinzip II

Tarifgruppe	$L^{(i)}$	$Var[S^{(i)}]$	$Stdabw[S^{(i)}]$	a_i
UI	381.575	113.637.329.280	337.101	5,30%
UT	95.345	7.095.096.255	84.232	20,87%
TG	33.534	877.655.196	29.625	59,50%
SG	19.946	310.511.100	17.621	100,00%
UKO	29.555	681.759.288	26.111	67,60%
Gesamt	**559.955**	**122.602.351.119**	**350.146**	**62,53%**
EB	**100.000**	**1.561.009.684**	**39.510**	**39,51%**
%EB	**17,86%**	**1,27%**		

Tab. 6-34: RV-Struktur Varianzprinzip I

Tarifgruppe	$P^{(i)}$	$E[S^{(i)}]$
UI	5.954.530	5.435.520
UT	391.127	358.722
TG	679.392	675.384
SG	322.598	321.180
UKO	115.218	112.104
Gesamt	**7.462.865**	**6.902.910**
EB	**1.332.757**	**1.232.757**
%EB	**17,86%**	**17,86%**
	α = 0,000456725%	**C = 38.823**

Tab. 6-35: RV-Struktur Varianzprinzip II

Tarifgruppe	$L^{(i)}$	$Var[S^{(i)}]$	$Stdabw[S^{(i)}]$	a_i
UI	519.010	113.637.329.280	337.101	17,86%
UT	32.405	7.095.096.255	84.232	17,86%
TG	4.008	877.655.196	29.625	17,86%
SG	1.418	310.511.100	17.621	17,86%
UKO	3.114	681.759.288	26.111	17,86%
Gesamt	**559.955**	**122.602.351.119**	**350.146**	**62,53%**
EB	**100.000**	**3.910.116.942**	**62.531**	**62,53%**
%EB	**17,86%**	**3,19%**		

Tab. 6-34: RV-Struktur Erwartungswertprinzip I

Tarifgruppe	$P^{(i)}$	$E[S^{(i)}]$
UI	5.925.358	5.435.520
UT	391.049	358.722
TG	736.248	675.384
SG	350.124	321.180
UKO	122.207	112.104
Gesamt	**7.524.986**	**6.902.910**
EB	**1.209.657**	**1.109.658**
%EB	**16,08%**	**16,08%**
	α = 9,0118%	**C = 10.730**

Tab. 6-35: RV-Struktur Erwartungswertprinzip II

Tarifgruppe	$L^{(i)}$	$Var[S^{(i)}]$	$Stdabw[S^{(i)}]$	a_i
UI	489.838	113.637.329.280	337.101	4,61%
UT	32.327	7.095.096.255	84.232	4,94%
TG	60.864	877.655.196	29.625	74,36%
SG	28.944	310.511.100	17.621	100,00%
UKO	10.103	681.759.288	26.111	15,88%
Gesamt	**622.076**	**122.602.351.119**	**350.146**	**56,29%**
EB	**100.000**	**1.072.123.640**	**32.743**	**32,74%**
%EB	**16,08%**	**0,87%**		

Aus den obigen Tabellen ist erkennbar, dass das Varianzprinzip für diesen Bestand nicht geeignet ist, da für den gleichen Überschuss ein viel höheres Risiko (ablesbar an der Varianz bzw. Standardabweichung) eingegangen werden müsste. Dies ist dadurch zu begründen, dass aufgrund der Berechnungsformel alle Proportionalitätsfaktoren den gleichen Wert haben, weshalb die risikoreicheren Tarifgruppen mehr Gewicht bekommen und somit das erhöhte Risiko verursachen.

Bei den beiden anderen Prinzipien ist die Konstante C derart zu wählen, dass von der risikoärmsten Tarifgruppe maximal 100 % im Eigenbehalt verbleiben. Die Ergebnisse sind beide vertretbar, wobei beim Standardabweichungsprinzip die geringere Gesamtprämie notwendig ist. Beim Erwartungswertprinzip ist zwar die Gesamtprämie um ca. EUR 60.000 höher, allerdings reduziert sich dadurch auch das Risiko im Eigenbehalt um weitere knappe 33 %.

Die Standardabweichung des erwarteten Überschusses beträgt ohne RV 62,53 % (56,29 % beim Erwartungswertprinzip). Durch Anwendung der vorgeschlagenen RV-Strukturen verbessert sich diese (bei einem erwarteten Überschuss im EB von EUR 100.000) beim Standardabweichungsprinzip auf 39,51 %, beim Erwartungswertprinzip auf 32,74 %, während sie beim Varianzprinzip gleich bleibt. Somit verringert sich das Risiko durch die proportionale RV beim Standardabweichungsprinzip um knapp 37 %, beim Erwartungswertprinzip um ca. 42 %. Ist diese Kenngröße als Entscheidungsbasis gewünscht, so wäre trotz der etwas höheren Prämie letztgenanntes anzuwenden.

Wird ein anderer (höherer) Ertrag im EB gewünscht, so erhöht sich in unmittelbarer Folge die Prämie. Dies zieht ein Sinken der Standardabweichung (bleibt als Absolutwert immer gleich) und des Risikos in Relation zum Überschuss nach sich. Die Veränderung des Risikos im EB bleibt jedoch bei allen vorgestellten Prinzipien immer gleich, d.h. auch bei einem erwarteten Überschuss von EUR 500.000 im EB würde sich bspw. beim Erwartungswertprinzip das Risiko durch die RV-Abgabe um die oben genannten 42 % reduzieren.

7 Resümee und Ausblick

Im Zuge der Erstellung dieser Diplomarbeit wurden viele neue Erkenntnisse gewonnen, die für das analysierte Unternehmen auf jeden Fall interessant sind, insbesondere der völlig neue Zugang, um die erwartete Gesamtschadenhöhe zu approximieren. Bisher wurde nämlich nie der gesamte Schaden je Unfall betrachtet, sondern im besten Fall der Gesamtschaden je Polizze zu einem Unfall. Außerdem wurde erstmals getestet, ob die Unfalldaten für Anzahl und Höhe der Schäden in theoretische Verteilungsmodelle passen. Dies lieferte durchwegs zufriedenstellende Ergebnisse, bei den Tarifgruppen Taggeld und Spitalgeld können vor allem die Schadenhöhen fast exakt repliziert werden.

Als Basis für die entsprechenden Auswertungen wurden detaillierte Schadenbestände erstellt, die empfehlenswerterweise auch künftig in dieser Form jährlich ergänzt und weitergeführt werden sollten. Bei genügend langem Beobachtungszeitraum könnte der Betrachtungszeitpunkt (in dieser Arbeit war dies für die Schadenhöhen der Bilanzstichtag 2 Jahre nach dem Unfalljahr) weiter nach hinten gelegt werden. Ebenso wäre die Veränderung der Schadenanzahl beim Übergang der Betrachtungsweise von Melde- auf Auszahlungsjahr interessant.

Die Ergebnisse der proportionalen RV-Strategie sind interessante Erkenntnisse, wohl jedoch nicht unmittelbar auf den Bestand umzulegen. Problematisch ist hier die Dominanz der Tarifgruppe Unfallinvalidität, vor allem bei den Momenten (Erwartungswert und Varianz) des Gesamtschadens. Durch die mit Abstand größte Varianz dieser Tarifgruppe wird zur Verringerung des Risikos eine starke Reduktion des Eigenbehaltes an dieser Tarifgruppe empfohlen, da die proportionalen EB-Faktoren nach dem MVP berechnet werden. Direkte Folge wäre eine enorme Prämienreduktion im EB, die für das Unternehmen sicher nicht erstrebenswert ist.

Ein Überdenken der derzeitigen RV-Vertragsform (Kumulschadenexzedent) des Unternehmens wäre jedenfalls ratsam. Momentan wird die RV-Prämie pauschal von der Gesamtprämie über alle Tarifgruppen berechnet. Aus obiger Arbeit ist erkennbar, dass dies für die risikoarmen und gut prognostizierbaren Tarifgruppen (Taggeld, Spitalgeld, Unfallkosten) mit geringen Höchstschäden nicht unbedingt nötig ist. Eine mögliche Variante wäre also auch eine tarifgruppenabhängige RV, für welche nur Unfallinvalidität, Unfalltod und Unfallrente (die allerdings aufgrund der geringen Schadenanzahl in dieser Arbeit nicht analysiert wurde) relevant wären.

Interessante weiterführende Aspekte sind unter anderem eine mögliche Kombination von mehreren RV-Formen, sowohl von proportionaler als auch nicht-proportionaler Natur. Speziell bei der Tarifgruppe Unfallinvalidität könnte ein übergeordneter Einzelschadenexzedent zu einer Homogenisierung der Schadenhöhen führen. Durch dieses „Wegschneiden“ von Großschäden wären die Basisdaten (Erwartungswert und Varianz) für die proportionale RV geringer und die sich ergebenden Proportionalitätsfaktoren eventuell akzeptabler.

Des Weiteren unberücksichtigt blieben die zum Teil gewiss vorhandenen Korrelationen zwischen den einzelnen Tarifgruppen sowie mögliche Inflationseffekte im Laufe der Jahre.

Literaturverzeichnis

[1] Klugman Stuart, Panjer Harry, Willmot Gordon: Loss Models – From Data to Decision, Verlag John Wiley & Sons, 2004.

[2] Mack Thomas: Schadenversicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft, 2002.

[3] Mikosch Thomas: Non-Life Insurance Mathematics, Springer Verlag, 2004.

[4] Schröter Klaus Jürgen: Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung, Verlag Versicherungswirtschaft, 1995.

[5] Liebwein Peter: Klassische und moderne Formen der Rückversicherung, Verlag Versicherungswirtschaft, 2000.

[6] Schlittgen Rainer: Einführung in die Statistik – Analyse und Modellierung von Daten, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2003.

[7] Hartung Joachim, Elpet Bärbel, Klösener Karl-Heinz: Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2002.

[8] Toutenburg Helge u.a.: Arbeitsbuch zur deskriptiven und induktiven Statistik, Springer Verlag, 2006.

[9] Schmidt Klaus, Radtke Michael: Handbuch zur Schadenreservierung, Verlag Versicherungswirtschaft, 2004.

[10] Bühlmann Hans: Mathematical Methods in Risk Theory, Springer Verlag, 1996.

[11] Finetti Bruno de: Il Problema die pieni, Giornale de'll Istituto degli Attuari, 11, 1940.

[12] Spangl Beate: Magisterarbeit – Bestandsanalyse in der Lebensversicherung mit Hilfe multivariater statistischer Methoden, 2005.