



# **TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN**

## **DIPLOMARBEIT**

### **Barrier Optionen in Jump Diffusion Modellen**

ausgeführt zum Zweck der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Univ.Prof. Mag.rer.soc.oec. Dr.rer.soc.oec. Walter Schwaiger, MBA

E 330

Institut für Managementwissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

Lukas Künstl

Mat.Nr. 0230505

Stolzstrasse 38, 9020 Klagenfurt

Wien, am

## **Abstract**

Ziel dieser Arbeit ist die Bewertung von Single Barrier Optionen mit drei unterschiedlichen Bewertungsmodellen (Black – Scholes, Merton, Bates). Im ersten Teil dieser Arbeit wird nach einer Einführung in Optionen die Theorie zu den verschiedenen Modellen erläutert. Der zweite Teil setzt die Erkenntnisse des ersten Teils praktisch um und schließt diese Arbeit mit einem Test der drei Modelle an gehandelten strukturierten Produkten ab.

## **Danksagung**

Größter Dank gebührt meiner Freundin Christiane für ihre große Geduld, und meinem Sohn Maximilian, der mir zeigte, dass ein Tag am Morgen beginnt aber sonst das bravste Baby der Welt ist.

Weiters dem Betreuer dieser Arbeit, Prof. Walter Schwaiger, für seine maßgebliche Unterstützung.

Lieben Dank auch nach Frankfurt zur Risk And Control Management Abteilung der DWS, die diese Arbeit finanziell unterstützten. Dorthin noch einen ganz speziellen Dank an Andreas Hoffmeister, der mein Interesse für Derivate geweckt hat und meine unzähligen Fragen immer mit einer Engelsgeduld beantwortete.

Ein Dankeschön an meine Schwester Lisa für das Korrekturlesen und meiner Schwester Linda und meinem Vater, für ihre allgemeine Unterstützung.

Und „last but not least“ meiner Mutter, die den ganzen Spaß finanzierte.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Einleitung</b> .....   | <b>1</b>  |
| <i>1.1 Historische Entwicklung der Optionsbewertungsmodelle</i> ..... | 2         |
| <b>2 Optionen und strukturierte Produkte</b> .....                    | <b>3</b>  |
| <b>2.1 Optionen</b> .....   | <b>3</b>  |
| 2.1.1 Auszahlungsfunktionen europäischer Optionen .....               | 4         |
| 2.1.2 Barrier Optionen .....  | 5         |
| 2.1.3 Put – Call – Parität.....                                       | 6         |
| <b>2.2 Strukturierte Produkte</b> .....                               | <b>7</b>  |
| 2.2.1 Bonus Zertifikate .....   | 8         |
| 2.2.2 Reverse Bonus Zertifikate .....                                 | 10        |
| <b>3 Stochastische Prozesse</b> .....                                 | <b>14</b> |
| <b>3.1 Geometrische Brownsche Bewegungen</b> .....                    | <b>14</b> |
| <b>3.2 Compound Poisson Prozess</b> .....                             | <b>15</b> |
| <b>3.3 Jump Diffusion Prozess</b> .....                               | <b>16</b> |
| <b>3.4 Mean – Reversion Prozess</b> .....                             | <b>17</b> |
| <b>4 Monte Carlo und risikoneutrale Welt</b> .....                    | <b>19</b> |
| <b>4.1 Monte Carlo Simulation</b> .....                               | <b>19</b> |
| <b>4.2 Risikoneutrale Bewertung</b> .....                             | <b>19</b> |
| 4.2.1 Definitionen zu stochastischen Prozessen .....                  | 20        |
| <b>4.4 Eigenschaften der risikoneutralen Welt</b> .....               | <b>25</b> |
| <b>5 Optionsbewertungsmodelle</b> .....                               | <b>26</b> |
| <b>5.1 Black – Scholes</b> .....                                      | <b>26</b> |
| 5.1.1 Arbitragefreiheit im Black – Scholes Modell .....               | 27        |
| 5.1.2 Analytische Bewertungsformeln für Barrier Optionen .....        | 30        |
| 5.1.3 Black – Scholes und Monte Carlo Simulation .....                | 32        |
| <b>5.2 Das Modell von Merton</b> .....                                | <b>32</b> |
| 5.2.1 Risikoneutrale Bewertung im Merton Modell .....                 | 33        |
| 5.2.2 Merton und Monte Carlo Simulation.....                          | 36        |
| <b>5.3 Das Modell von Bates</b> .....                                 | <b>37</b> |
| 5.3.1 Risikoneutrale Bewertung im Bates Modell .....                  | 38        |
| 5.3.2 Bates und Monte Carlo Simulation.....                           | 42        |
| 5.3.3 Erweiterung des Modells von Bates .....                         | 42        |
| <b>6 Kalibrierung und Validierung</b> .....                           | <b>44</b> |
| <b>6.1 Kalibrierung</b> .....   | <b>45</b> |
| <b>6.2 Validierung</b> .....  | <b>47</b> |
| <b>7 Conclusio</b> .....  | <b>51</b> |
| <b>8 Abbildungsverzeichnis</b> .....                                  | <b>52</b> |
| <b>9 Tabellenverzeichnis</b> .....                                    | <b>53</b> |
| <b>10 Literaturverzeichnis</b> .....                                  | <b>54</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>11 Anhang .....</b>                     | <b>56</b> |
| <i>11.1 Anhang A: MATLAB - Codes .....</i> | <i>56</i> |
| <i>11.2 Anhang B: Optionsdaten.....</i>    | <i>65</i> |

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit werden Single Barrier Optionen und strukturierte Produkte mit drei verschiedenen Modellen (Black – Scholes, Merton, Bates) bewertet. Da keine geschlossenen Lösungsformeln für Barrier Optionen von *Merton* und *Bates* geliefert werden, wird ein numerisches Verfahren, die Monte Carlo Simulation, gewählt, um eine praktische Umsetzung der Bewertungsaufgabe zu gewährleisten.

Das gleiche Prinzip der Simulation zur Bewertung von Optionen zieht sich in dieser Arbeit durch alle drei Modelle. Es wird der für den Basiswert jeweils zugrunde liegende stochastische Prozess in einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer entsprechend hohen Anzahl an Pfaden entwickelt, die jeweiligen Auszahlungsfunktionen auf jeden einzelnen Pfad angewandt und diese Auszahlungen mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst. Der Durchschnitt der Summe der abgezinsten Auszahlungen ergibt den Wert der Option.

In einem ersten Schritt werden die Parameter des jeweiligen stochastischen Prozesses kalibriert. Dies geschieht durch eine implizite Bestimmung dieser, indem Marktpreise europäischer Optionen herangezogen werden.

Um die Modelle auf ihre Praxistauglichkeit zu prüfen, werden die Modellpreise am Ende dieser Arbeit mit Marktpreisen verglichen. Die Preise für Barrier Optionen werden aus Zertifikaten entnommen, indem diese in ihre Bestandteile zerlegt werden.

Einen Einstieg in dieses Thema gibt Kapitel 2, in welchem europäische Optionen, Barrier Optionen und zwei Arten von Zertifikaten behandelt werden. Im Zuge dessen wird ein (für den praktischen Teil) wichtiger Zusammenhang, die Put – Call – Parität, erläutert.

Das nächste Kapitel umfasst alle für die Bewertungsmodelle benötigten stochastischen Prozesse, die, wie gerade erwähnt, von großer Bedeutung für die spätere Monte Carlo Simulation sind.

Um nach dem *Fundamental Theorem Of Asset Pricing* Arbitragefreiheit zu garantieren, müssen diese Prozesse in einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß modelliert werden, weshalb das Konzept der Risikoneutralität den größten Part aus Kapitel 4 einnimmt.

Näheres zu den unterschiedlichen Bewertungsmodellen im Lichte der risikoneutralen Welt und deren Lösungsformeln für europäische Optionen, die für die Kalibrierung herangezogen werden, ist in Kapitel 5 zu finden.

Kapitel 6 beschäftigt sich ausführlich mit der Kalibrierung und Validierung der Modelle, und Kapitel 7 bildet mit einer *Conclusio* den Abschluss dieser Arbeit.

Alle Grafiken und Tabellen dieser Arbeit stammen vom Autor.

### ***1.1 Historische Entwicklung der Optionsbewertungsmodelle***

Die Anfänge der heutigen Optionsbewertung gehen auf den Franzosen *Bachelier* („*Vater der modernen Optionsbewertung*“<sup>1</sup>) zurück. In seiner Dissertation (1900) entwickelte er noch vor *Einstein* den heute unter dem bekannten Namen „*Brownsche Bewegung*“ stochastischen Prozess, der die Kursbewegungen an der Börse beschreiben sollte. An einer konkreten Formulierung einer Bewertungsformel für Optionen scheiterte er jedoch. Seine Arbeit wurde von der akademischen Welt zunächst weitestgehend ignoriert, bis *Kolmogorov* diese *Levy* näher brachte, was dazu führte, dass *Levy* seitdem die Brownsche Bewegung als *Bachelier – Wiener – Prozess* bezeichnete.<sup>2</sup>

In den 1950ern griff *Samuelson* auf die Erkenntnisse *Bachelier*'s zurück. *Samuelson* war Professor von *Merton*, welcher wiederum eng mit *Black* und *Scholes* zusammenarbeitete. *Black* und *Scholes* bedienten sich in ihrer richtungsweisenden Arbeit *Pricing Of Options And Corporate Liabilities* (1973) einer durch Logarithmieren modifizierten Brownschen Bewegung als stochastischen Prozess für den Basiswert einer Option und entwickelten mit diesem schlussendlich ihre berühmten Bewertungsformeln.

*Merton* gelang es nur drei Jahre später die *Black – Scholes* Formeln auf einen Basiswert mit einem nicht kontinuierlichen Verlauf zu erweitern. In *Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinious* folgt der Basiswert einem *Jump Diffusion* Prozess. Obwohl seine damalige Arbitrage Argumentation heute als sehr umstritten gilt (siehe Kapitel 5), war diese Arbeit trotzdem ein Wegbereiter für das Modell von *Bates* in den 1990ern.

*Bates*' Modell gilt als Verallgemeinerung des *Merton* Modells, mit dem Unterschied, dass es eine stochastische Volatilität in Form eines *Cox – Ingersoll – Ross* Prozesses zulässt.

Diese Entwicklung hatte eine starke Zunahme der Komplexität von Bewertungsformeln zur Folge, und so sind die einfachen *Black – Scholes* Formeln, trotz Kritik, noch heute in der Praxis vorzufinden.

---

<sup>1</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.205

<sup>2</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.205f

## 2 Optionen und strukturierte Produkte

Zertifikate zählen zu den strukturierten Produkten. Heute sind eine große Anzahl unterschiedlicher Varianten von Zertifikaten am Markt erhältlich (Bonus Zertifikat, Bonus Zertifikat mit Cap, Reverse Bonus Zertifikat, Reverse Bonus Zertifikat mit Cap, Index Zertifikat, Twin Win Zertifikat, Diskont Zertifikat, Express Zertifikat etc.).<sup>3</sup> Sie verfügen oft über sehr spezielle Auszahlungsprofile. Was aber steckt hinter diesen Produkten?

Meist sind Zertifikate recht einfache Kombinationen aus verschiedenen Optionsarten.<sup>4</sup> In diesem Kapitel wird das Mysterium des Bonus und Reverse Bonus Zertifikats gelüftet, indem Portfolios aus Optionen gebildet werden, die diese zwei Kategorien von Zertifikaten perfekt replizieren. Für diese Replikation benötigt man zwei unterschiedliche Optionstypen: europäische Optionen und die Barrier Optionen. Diese werden am Anfang dieses Kapitels vorgestellt. Mit diesem Wissen können dann strukturierte Produkte anhand von am Markt gehandelten Zertifikaten erklärt werden.

### 2.1 Optionen

Der Abschluss einer Option beinhaltet das Recht, aber nicht die Pflicht, einen Basiswert (Aktie, Index, Währung, Futures etc.) zu einem vorher festgesetzten Preis, dem Ausübungspreis, und zu einem bestimmten Zeitpunkt zu erwerben oder zu verkaufen. Es wird zwischen zwei verschiedenen Arten des Ausübungsrechtes unterschieden, dem „europäischen“ und dem „amerikanischen“. Im Falle einer Option mit europäischem Ausübungsrecht hat ein Käufer nur am Ende der Laufzeit die Möglichkeit seine Option auszuüben. Im Gegensatz dazu kann ein Käufer einer amerikanischen Option diese zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Laufzeit ausüben.

Optionen werden sowohl an Börsen als auch OTC<sup>5</sup> gehandelt, wobei die Mehrzahl davon amerikanischen Typus ist.<sup>6</sup>

Es gibt Kauf- und Verkaufsoptionen. Mit einer Kaufoption erwirbt der Käufer das Recht einen Basiswert zu einem bestimmten Preis und Zeitpunkt zu erwerben, mit einer Verkaufsoption einen Basiswert zu einem vorher festgelegten Preis und Zeitpunkt zu veräußern.<sup>7</sup>

---

<sup>3</sup> siehe z.B [www.onvista.de](http://www.onvista.de)

<sup>4</sup> siehe HSBC, 7. Auflage, S.91ff

<sup>5</sup> Over the Counter – Handel ist außerbörslicher Handel siehe Hull, 2006, S.29f

<sup>6</sup> siehe Hull, 2006, S.30ff

<sup>7</sup> siehe Hull, 2006, S.228ff

In dieser Arbeit dienen Optionsscheine der BNP Paribas zur Kalibrierung der verschiedenen Modelle. Diese Optionsscheine liefern am Ende ihrer Laufzeit nicht den jeweiligen Basiswert sondern Bargeld.<sup>8</sup> Im weiteren Verlauf werden die üblichen Begriffe für einen Käufer einer Option – long – und einen Verkäufer – short – verwendet.

### 2.1.1 Auszahlungsfunktionen europäischer Optionen

Die Auszahlung einer europäischen Kaufoption am Ende ihrer Laufzeit ist<sup>9</sup>

$$\max(S_T - K, 0) \quad (1)$$

einer Verkaufsoption

$$\max(K - S_T, 0) \quad (2)$$

mit

$S_T$  als Kurs des Basiswertes bei Fälligkeit  $T$  und  $K$  als Ausübungspreis der Option.

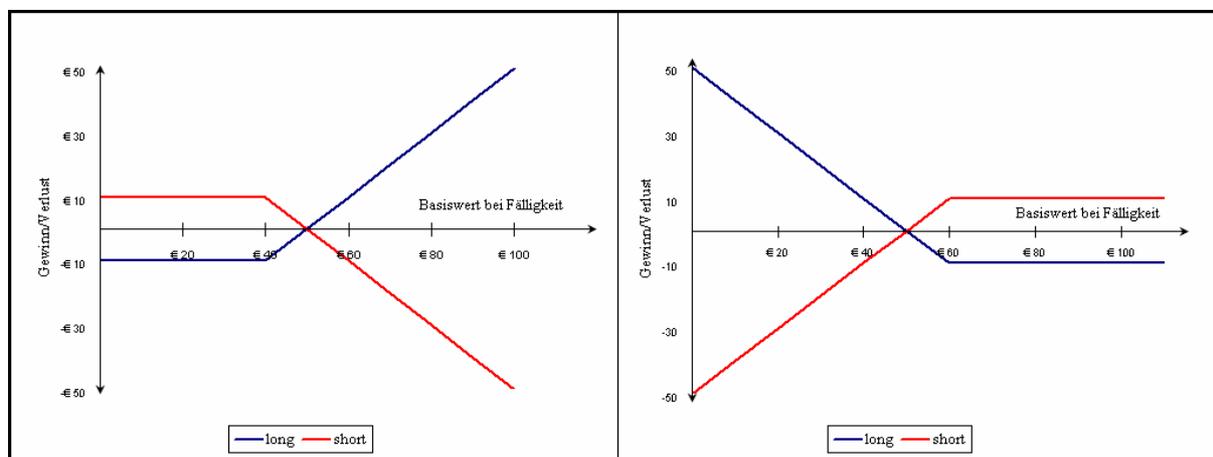


Abbildung 1: Auszahlungsfunktionen von europäischen Optionen

Abbildung 1 veranschaulicht die Auszahlungsprofile europäischer Kauf- und Verkaufsoptionen am Ende ihrer Laufzeit. Die Abszisse bildet den Basiswert, die Ordinate den Wert der Option in Euro ab. Links ist die Auszahlung (long & short) einer Kaufoption mit einem Ausübungspreis von 40 Euro und einem Kaufpreis von 8 Euro abgebildet, rechts die

<sup>8</sup> siehe <http://www.derivate.bnpparibas.com/DE/index.aspx?pageID=1>

<sup>9</sup> siehe Hull, 2006, S.231f

Auszahlung (long & short) einer Verkaufsoption mit einem Ausübungspreis von 60 Euro und einem Kaufpreis von 8 Euro.

### 2.1.2 Barrier Optionen

Barrier Optionen sind europäischen Optionen grundsätzlich sehr ähnlich. Es gibt Kauf- und Verkaufsoptionen. Ihren Namen verdanken sie einem, im Vergleich zu europäischen Optionen zusätzlichen Ausstattungsmerkmal, der Barriere. Die Barriere bezeichnet eine Schranke für den Basiswert. Ein Über- oder Unterschreiten der Barriere durch den Basiswert kann zwei verschiedene Ereignisse auslösen. Entweder der Basiswert muss die Barriere erst einmal über- bzw. unterschreiten, damit die Option zu existieren beginnt (Knock – In) oder eine Verletzung der Barriere bedeutet das sofortige Ende der Option (Knock – Out).

Ist die Barriere am Emissionstag der Option kleiner als der Basiswert, wird von einer Down – And – In bzw. Down – And – Out Barrier Option gesprochen. Falls die Barriere aber am Tage der Emission über dem Basiswert liegt, bezeichnet man es als eine Up – And – In bzw. Up – And – Out Barrier Option. Es ergeben sich somit acht verschiedene Varianten dieser exotischen Optionen (Call = Kaufoption, Put = Verkaufsoption):<sup>10</sup>

- Down – And – Out – Call ( $c_{do}$ )
- Down – And – Out – Put ( $p_{do}$ )
- Down – And – In – Call ( $c_{di}$ )
- Down – And – In – Put ( $p_{di}$ )
- Up – And – Out – Call ( $c_{uo}$ )
- Up – And – Out – Put ( $p_{uo}$ )
- Up – And – In – Call ( $c_{ui}$ )
- Up – And – In – Put ( $p_{ui}$ )

Es gelten folgende Beziehungen:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}c &= c_{do} + c_{di} = c_{uo} + c_{ui} \\p &= p_{do} + p_{di} = p_{uo} + p_{ui}\end{aligned}\tag{3}$$

---

<sup>10</sup> siehe Hull, 2006, S.640ff

<sup>11</sup> siehe Albanese/Campolieti, 2006, S.162

Hier sind  $p$  bzw.  $c$  die Preise einer europäischen Verkaufs- bzw. Kaufoption. Der große Vorteil von Barrier Optionen wird somit deutlich erkennbar: sie sind billiger als europäische Optionen.

### 2.1.3 Put – Call – Parität

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen europäischen Kauf- und Verkaufsoptionen besteht durch die Put – Call – Parität. Der praktische Einsatz der Put – Call – Parität setzt keine Restriktionen gegenüber der zukünftigen Verteilung des Basiswertes voraus<sup>12</sup>, und so kann Gleichung (4) im zweiten Teil dieser Arbeit zur Bewertung von europäischen Verkaufsoptionen in den Modellen von *Bates* und *Merton* angewandt werden.

Als Voraussetzung zur Gültigkeit der Put – Call – Parität müssen die Kaufoption  $c$  und die Verkaufsoption  $p$  in Gleichung (4) mit einem europäischen Ausübungsrecht, identischer Restlaufzeit, identischem Ausübungspreis und gleichem Basiswert ausgestattet sein. Unter diesen Voraussetzungen wird folgender Zusammenhang gebildet:<sup>13</sup>

$$c - p = S_0 - Ke^{-r(T-t)} \quad (4)$$

mit

$S_0$  ... Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt 0

$K$  ... Ausübungspreis

$r$  ... risikoloser Zinssatz

$T - t$  ... Restlaufzeit

$T$  ... Fälligkeitstermin

Die linke Seite der Gleichung (4) besteht aus einer europäischen Kaufoption long und einer europäischen Verkaufsoption short. Rechts wurde eine Einheit des Basiswertes erworben und eine risikolose Nullkuponanleihe mit einer Restlaufzeit gleich der beiden Optionen mit einem Wert zum heutigen Zeitpunkt von  $Ke^{-r(T-t)}$  verkauft. Die Auszahlung beider Seiten bei Fälligkeit ist in jedem Fall

---

<sup>12</sup> siehe Hull, 2006, S.456

<sup>13</sup> siehe Chriss, 1997, S.40

$$S_T - K \quad (5)$$

denn bei Fälligkeit ist links in Gleichung (4) entweder die Kauf- oder die Verkaufsoption im Geld. Ist die Kaufoption im Geld folgt eine Auszahlung  $S_T - K$ . Bei einem Verfall der Kaufoption liegt die Verkaufsoption im Geld, und die Auszahlung ist  $-(K - S_T)$ . Auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass die rechte Seite in Gleichung (4) immer eine Auszahlung gemäß Gleichung (5) ergibt.

Ist dieser Zusammenhang nicht mehr gegeben eröffnen sich sofort Arbitragemöglichkeiten.<sup>14</sup>

Damit Gleichung (4) in der Realität ihre Gültigkeit bewahrt, muss der Markt drei Bedingungen erfüllen:<sup>15</sup>

1. ausreichende Liquidität
2. eine uneingeschränkte Möglichkeit zur Kreditaufnahme. Die Kreditzinsen sind gleich dem Veranlagungszinssatz
3. Leerverkäufe müssen uneingeschränkt zugelassen sein

## **2.2 Strukturierte Produkte**

Sowohl das Bonus als auch das Reverse Bonus Zertifikat verfügen über eine fixe Laufzeit und eine „europäische“ Auszahlung.

Zertifikate sind rechtlich gesehen Schuldverschreibungen und, sofern im Kaufvertrag nicht ausdrücklich als nachrangiges Kapital bezeichnet, im Falle einer Insolvenz des Emittenten gleich zu behandeln wie jede andere Verbindlichkeit des Unternehmens.<sup>16</sup> Dieser Umstand führt bei jedem Zertifikat am Ende seiner Laufzeit zu einem weiteren möglichen zukünftigen Szenario. Der Emittent meldet Insolvenz an. Dieses Szenario wird der Vollständigkeit halber erwähnt, in der Berechnung aber nicht weiter berücksichtigt, sofern die Preise der Optionsscheine der BNP Paribas nicht bereits eine Kreditrisikoprämie enthalten. Für diesen möglichen Fall wurden bewusst die Optionsscheine zur Kalibrierung und die Zertifikate zur Validierung vom gleichen Emittenten gewählt.

---

<sup>14</sup> Beispiele für Arbitragestrategien bei Verletzung der Put – Call – Parität siehe Hull, 2006, S.264f

<sup>15</sup> siehe Chriss, 1997, S.43f

<sup>16</sup> siehe HSBC, 7. Auflage, S.91ff

### 2.2.1 Bonus Zertifikate

Ein Bonus Zertifikat der BNP Paribas (ISIN: DE000BNP9FK2) hat folgende Ausstattungsmerkmale:<sup>17</sup>

|                    |            |
|--------------------|------------|
| Basiswert $S_t$    | DAX        |
| Bonuskurs $S_B$    | 5000       |
| Barriere $H$       | 3100       |
| Bezugverhältnis    | 0.01       |
| Bewertungstag $T$  | 19.12.2008 |
| Zahltag            | 02.01.2009 |
| Letzter Handelstag | 17.12.2008 |
| Emissionstag       | 31.10.2005 |
| Style              | europäisch |

Tabelle 1: Ausstattung eines Bonuszertifikates

Zur Bewertung eines Bonus Zertifikats wird nur der Bonuskurs, der Kurs des Basiswerts, die Barriere, das Bezugsverhältnis und der Bewertungstag benötigt.

Betrachten wir die drei Auszahlungsszenarien am Ende der Laufzeit:<sup>18</sup>

Szenario1: Die Barriere wurde niemals innerhalb der Laufzeit vom Basiswert unterschritten:

$$\text{Auszahlung} = \max(S_B, S_T) \quad (6)$$

Szenario2: Die Barriere wurde innerhalb der Laufzeit vom Basiswert unterschritten:

$$\text{Auszahlung} = S_T \quad (7)$$

Szenario3: BNP Paribas meldet Insolvenz an:

$$\text{Auszahlung} = 0 \quad (8)$$

<sup>17</sup> Alle Daten der Optionsscheine und Zertifikate in dieser Arbeit sind auf der Homepage des Emittenten (<http://www.derivate.bnpparibas.com/DE/index.aspx?pageID=1>) erhältlich (Wichtig: Seinen dauerhaften Wohnsitz in Deutschland angeben, um zu Derivaten mit dem DAX als Basiswert zu gelangen)

<sup>18</sup> Jede Auszahlung muss noch mit dem Bezugsverhältnis multipliziert werden. So bekommt in diesem Fall ein Käufer dieses Zertifikats z.B. nicht den Bonuskurs von 5000 Euro ausgezahlt, sondern 50 Euro

Dieses Bonus Zertifikat kann aus einem Portfolio mit

1. einer europäischen Kaufoption auf den DAX mit einem Ausübungspreis von 0 Punkten und
2. einer Down – And – Out – Put Barrier Option auf den DAX mit einem Ausübungspreis gleich  $S_B$  und einer Barriere gleich  $H$

repliziert werden.

Eine exemplarische Überprüfung des Portfolios

$$\Pi = c + p_{do} \quad (9)$$

in den zwei verschiedenen Szenarien am Ende der Laufzeit ergibt:

Szenario1:

$$\text{Auszahlung}_p = \max(S_T - 0, 0) + \max(S_B - S_T, 0) \quad (10)$$

Die europäische Kaufoption hat immer die Auszahlung  $S_T - 0$ , weil kein Index negative Werte annehmen kann. Die Barrier Option wird im Szenario1 zu einer europäischen Verkaufsoption mit einer Auszahlung analog Gleichung (2). In diesem Szenario existieren am Ende der Laufzeit zwei verschiedene Möglichkeiten:

$$S_T > S_B$$

$$\text{Auszahlung}_p = S_T - 0 + 0$$

$$S_T < S_B$$

$$\text{Auszahlung}_p = S_T - 0 + S_B - S_T$$

Hier ist sofort ersichtlich, dass die Auszahlung dieses Szenarios einer Auszahlung gemäß Gleichung (6) entspricht.

Szenario2:

$$\text{Auszahlung}_p = \max(S_T - 0, 0) + 0 \quad (11)$$

Durch die Barrierenverletzung in diesem Szenario verfällt die Down – And – Out – Put Barrier Option. Es bleibt lediglich die europäische Kaufoption übrig, mit einer Auszahlung gemäß Gleichung (7).

In Abbildung 2 wird die Auszahlungsfunktion eines Bonus Zertifikats grafisch aufbereitet. Die blaue Linie zeigt die Auszahlung bei Unterschreiten der Barriere innerhalb der Laufzeit, die rote Linie die Auszahlung, wenn innerhalb der Laufzeit keine Barrierenverletzung erfolgt.

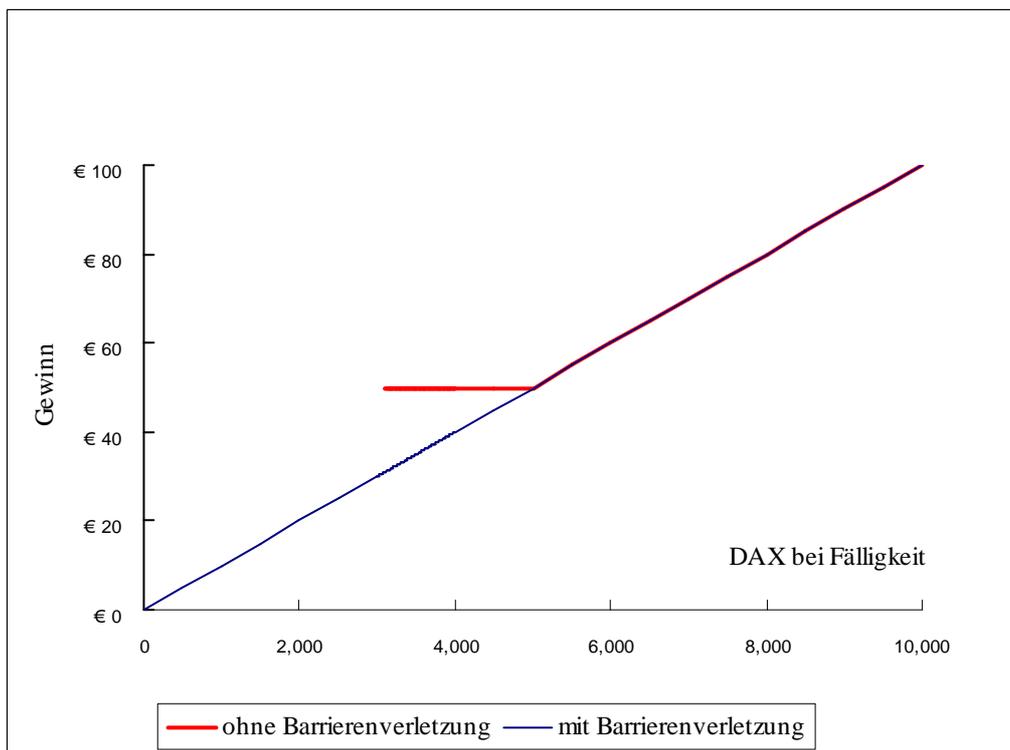


Abbildung 2: Auszahlungsfunktion des Bonuszertifikats

### 2.2.2 Reverse Bonus Zertifikate

Das Reverse Bonus Zertifikat hat, wie der Name bereits verrät, die gleiche Auszahlungsfunktion wie das Bonus Zertifikat, nur dass diese genau umgekehrt ist. Ein Reverse Bonus Zertifikat (ISIN:DE000BN2E852) der BNP Paribas verfügt über folgende Ausstattungsmerkmale:

|                    |            |
|--------------------|------------|
| Basiswert $S_t$    | DAX        |
| Bonuskurs $S_B$    | 3900       |
| Barriere $H$       | 5700       |
| Reverse Kurs $S_R$ | 9400       |
| Bezugverhältnis    | 0.01       |
| Bewertungstag $T$  | 18.09.2009 |
| Zahltag            | 24.09.2009 |
| Letzter Handelstag | 16.09.2009 |
| Emissionstag       | 29.10.2008 |
| Style              | europäisch |

Tabelle 2: Ausstattung des Reverse Bonus Zertifikats

Dieses Zertifikat hat im Vergleich zum normalen Bonus Zertifikat ein zusätzliches Ausstattungsmerkmal, den Reverse Kurs. Weiters liegt die Barriere über dem Bonuskurs.

Betrachten wir nun die vier möglichen Auszahlungsszenarien am Ende der Laufzeit:<sup>19</sup>

Szenario1: Die Barriere wurde innerhalb der Laufzeit vom Basiswert nicht überschritten:

$$\text{Auszahlung} = S_R - \min(S_B, S_T) \quad (12)$$

Szenario2: Die Barriere wurde innerhalb der Laufzeit vom Basiswert überschritten:

$$\text{Auszahlung} = S_R - S_T \quad (13)$$

Szenario3: Der Kurs des Basiswertes liegt über dem Reverse Kurs:

$$\text{Auszahlung} = 0 \quad (14)$$

Szenario4: BNP Paribas meldet Insolvenz an:

$$\text{Auszahlung} = 0 \quad (15)$$

<sup>19</sup> jede Auszahlung muss wie beim Bonuszertifikat wieder mit dem Bezugsverhältnis multipliziert werden

mit  $T$  als Bewertungstag.

Dieses Reverse Bonus Zertifikat kann aus einem Portfolio mit

1. einer europäischen Verkaufsoption auf den DAX mit einem Ausübungspreis gleich  $S_R$
2. und einer Up – And – Out – Call Barrier Option mit einem Ausübungspreis von  $S_B$  sowie einer Barriere gleich  $H$

repliziert werden.

Eine Überprüfung der Auszahlung des Portfolios

$$\Pi = p + c_{uo} \quad (16)$$

ergibt in Szenario1:

$$\text{Auszahlung}_p = \max(S_R - S_T, 0) + \max(S_T - S_B, 0) \quad (17)$$

Wie beim Bonus Zertifikat gibt es auch im Szenario1 des Reverse Bonus Zertifikats zwei verschiedene Möglichkeiten einer Auszahlung:

$$S_T > S_B$$

$$\text{Auszahlung}_p = S_R - S_T + S_T - S_B$$

$$S_T < S_B$$

$$\text{Auszahlung}_p = S_R - S_T + 0$$

Auch hier ist wieder sofort ersichtlich, dass Gleichung (12) für Szenario1 zutrifft.

Im Fall von Szenario2 verfällt die Barrier Option und der rechte Teil aus Gleichung (17) wird Null. Als Auszahlung erhält man:

$$\text{Auszahlung}_p = \max(S_R - S_T, 0) + 0 \quad (18)$$

was konsistent mit Gleichung (13) ist.

Szenario3 impliziert eine Barrierenverletzung, die Auszahlung entspricht somit Gleichung (18). Da jedoch am Ende der Laufzeit  $S_T > S_R$  ist, verfällt die Verkaufsoption, und die Auszahlung ist gemäß Gleichung (14).

Abbildung 3 veranschaulicht diese Ergebnisse noch einmal.

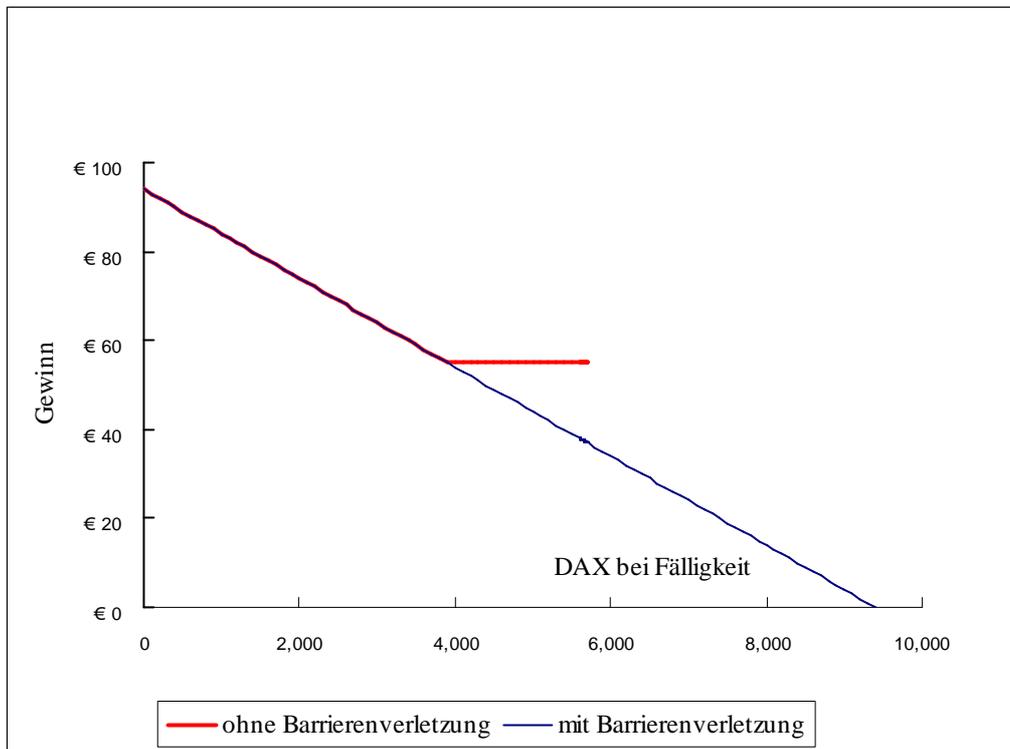


Abbildung 3: Auszahlungsfunktion des Reverse Bonus Zertifikats

### 3 Stochastische Prozesse

„stochastic is just a fancy word for random“<sup>20</sup>

Dieses Kapitel enthält alle für die verschiedenen Bewertungsmodelle notwendigen stochastischen Prozesse. Den Anfang macht die Geometrische Brownsche Bewegung, die als Prozess für den Basiswert im Black – Scholes Modell dient. Es folgt der Compound Poisson Prozess, der Sprungprozess im Jump Diffusion Prozess. Dieser Jump Diffusion Prozess beschreibt im Modell von *Merton* und *Bates* den Basiswert. Schließlich wird noch ein Cox – Ingersoll – Ross Prozess vorgestellt, welchem die stochastische Volatilität im Modell von *Bates* folgt.

Die Zuwächse aller Prozesse sind unabhängig, und im Fall des Jump Diffusion Prozesses sind auch Brownsche Bewegung und Compound Poisson Prozess voneinander unabhängig.

#### 3.1 Geometrische Brownsche Bewegungen

*Black* und *Scholes* modifizierten die Brownsche Bewegung durch einen „harmlosen“ Schritt, indem sie den Prozess logarithmierten. Somit sind die Zuwächse des Prozesses unabhängig log – normalverteilt.<sup>21</sup>

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (19)$$

mit

$S_t$  ...Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$

$dS_t$  ...Differential von  $S$

$\mu$  ...konstanter Driftkoeffizient von  $S$

$\sigma$  ...konstanter Diffusionskoeffizient von  $S$

$W_t$  ...Brownsche Bewegung

$dW_t$  ...Differential von  $W$

und

$\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$

<sup>20</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.36

<sup>21</sup> siehe Schachermayer, 2001, S.9

Etwas modifiziert<sup>22</sup> kann diese Gleichung in eine bekanntere Schreibweise gebracht werden:

$$S_T = S_0 \exp(\mu T + \sigma W_T) \quad (20)$$

Ein großer Vorteil der Geometrischen Brownschen Bewegung gegenüber der Brownschen Bewegung besteht darin, dass der unrealistische Fall - der Basiswert wird negativ - nicht eintreten kann.

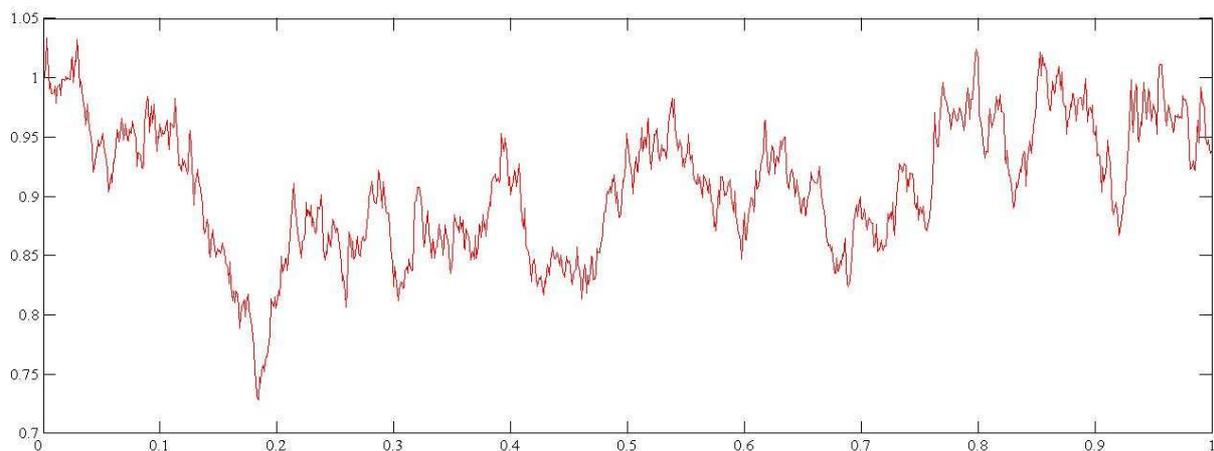


Abbildung 4: Pfad einer Geometrischen Brownschen Bewegung

### 3.2 Compound Poisson Prozess

Dieser Prozess wird in Jump Diffusion Modellen als Sprungprozess angenommen. Wie in Abbildung 5 ersichtlich, handelt es sich hierbei um eine Treppenfunktion. Der Prozess ist wie folgt definiert:<sup>23</sup>

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (21)$$

mit

$Y_i$  ...unabhängig identisch gleichverteilte Sprunghöhe

$N_t$  ...Poisson Prozess mit einer Sprungintensität  $\lambda > 0$  und exponentialverteilten Sprungzeiten  $\tau_i$

<sup>22</sup>  $d \ln(S_t) = \frac{dS_t}{S_t}$ ; siehe Albanese/Campolieti, 2006, S.160

<sup>23</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.70f

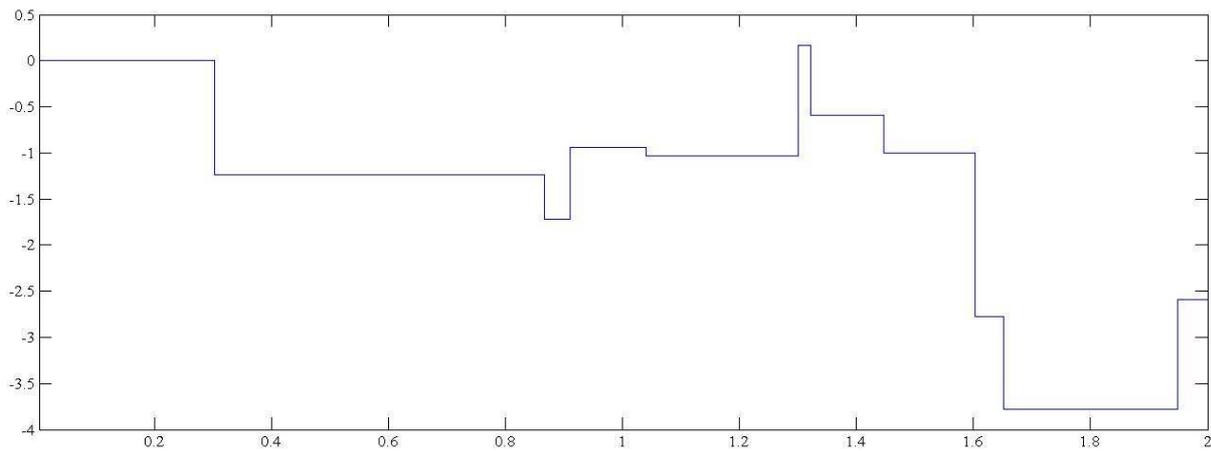


Abbildung 5: Pfad eines Compound Poisson Prozesses

### 3.3 Jump Diffusion Prozess

Der Jump Diffusion Prozess ist eine Kombination aus einer Brownschen Bewegung und einem Compound Poisson Prozess. Er wird folgendermaßen definiert:<sup>24</sup>

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + dZ_t \quad (22)$$

mit

$S_t$  ...Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$

$dS_t$  ...Differential von  $S$

$\mu$  ...Driftkoeffizient von  $S$

$\sigma$  ...Diffusionskoeffizient von  $S$

$W_t$  ...Brownsche Bewegung

$dW_t$  ...Differential von  $W$

$Z_t$  ...Compound Poisson Prozess zum Zeitpunkt  $t$

$dZ_t$  ... Differential von  $Z$

und

$$\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

<sup>24</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.111f

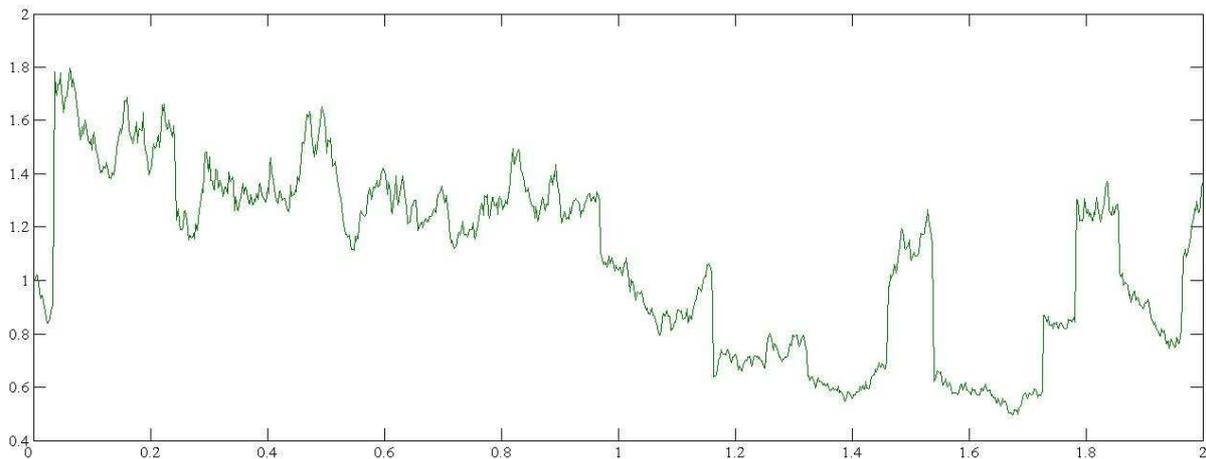


Abbildung 6: Pfad eines Jump Diffusion Prozesses

### 3.4 Mean – Reversion Prozess

In dem von *Bates* verwendeten Modell folgt die stochastische Volatilität dem Prozess

$$dV_t = \xi(\eta - V_t)dt + \theta\sqrt{V_t}dW_t \quad (23)$$

mit

$V_t$  ...Volatilität des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$

$dV_t$  ...Differential von  $V$

$\xi$  ...Mean Reversion – Intensität von  $V$

$\eta$  ...Mean Reversion – Niveau von  $V$

$\theta$  ...Diffusionskoeffizient von  $V$  (Volatilität der Volatilität)

$W_t$  ...Brownsche Bewegung

$dW_t$  ...Differential von  $W$

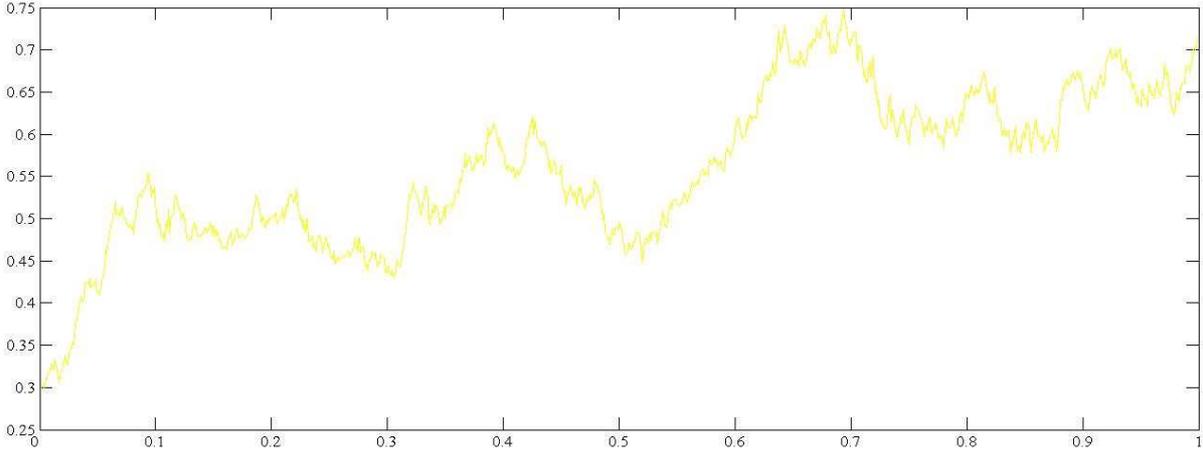


Abbildung 7: Pfad eines Cox – Ingersoll – Ross Prozesses

## 4 Monte Carlo und risikoneutrale Welt

Wie funktioniert eine Monte Carlo Simulation? Was ist die risikoneutrale Welt?

Diese zwei Fragen werden in diesem Kapitel beantwortet, und weiters wird die Verbindung zwischen „risikoneutral“ und „Monte Carlo Simulation“ geschaffen. Den Abschluss von Kapitel 4 bildet ein allgemeines „Kochrezept“ einer Monte Carlo Simulation zur Bewertung von Derivaten.

### 4.1 Monte Carlo Simulation

Der heutige Preis eines Derivates entspricht seinem zukünftigen Erwartungswert. Dieser wird durch folgendes Integral definiert:

$$E[f(x)] = \int f(x)p(x)dx \quad (24)$$

mit

$f(x)$  ...als Auszahlungsfunktion eines Derivats (z.B. (1) (2))

$p(x)$  ...Verteilungsfunktion von  $x$

Integrale wie in Gleichung (24) können mit der Monte Carlo Simulation approximiert werden. Nur der Fall von  $N \rightarrow \infty$  simulierten Pfaden ergäbe ein exaktes Ergebnis. Deshalb erhöht sich mit der Steigerung der Anzahl der Simulationen die Genauigkeit des Ergebnisses.

Im Zuge einer Monte Carlo Simulation wird eine Verteilungsfunktion eines stochastischen Prozesses  $p(x)$  durch die Simulation einer entsprechend hohen Anzahl von Pfaden berechnet und die Funktion  $f(x)$  auf jeden Pfad angewendet. Der Durchschnitt dieser Pfade führt zum Erwartungswert.<sup>25</sup>

### 4.2 Risikoneutrale Bewertung

Die wichtigste Voraussetzung für die Gültigkeit eines Modells zur Bewertung von Derivaten ist, dass es keine Arbitragemöglichkeiten ermöglichen darf.<sup>26</sup>

---

<sup>25</sup> siehe Glasserman, 2004, S.1ff

<sup>26</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.296

Basierend auf dieser Annahme gibt es folgende Möglichkeiten ein Derivat zu bewerten:

1. Besteht die Möglichkeit ein Derivat mit anderen handelbaren Instrumenten zu replizieren, ist der Preis des Derivats gleich den Kosten der replizierenden Handelsstrategie.<sup>27</sup>
2. Der normierte Preis eines Derivats zum Zeitpunkt 0 ist der zukünftige Erwartungswert in Bezug auf ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß des normierten Preises. Der normierte Preis hinsichtlich einer risikoneutralen Wahrscheinlichkeit ist ein Martingal.<sup>28</sup>

Unter normiertem Preis wird allgemein ein Preis eines Instruments bezüglich eines Numeriarees verstanden. Als Numeriarees kann jedes handelbare Instrument herangezogen werden. Typische Beispiele für Numeriarees sind Geldmarktkonten und Nullkuponanleihen.<sup>29</sup> Unter der Anwendung eines Numeriarees wird der Preis des bewerteten Derivates nicht mehr in Geldeinheiten sondern z.B. in Nullkuponanleihen gerechnet (Wie viele Nullkuponanleihen kostet ein Derivat?).

Als Voraussetzung zur vollständigen Umsetzung der obigen Möglichkeiten muss das Derivat in einem vollständigen Markt betrachtet werden.<sup>30</sup> In einem vollständigen Markt gelten die Annahmen, dass es für alle Risiken einen perfekten Hedge und ein eindeutiges Martingalmaß gibt.

In unvollständigen Märkten ist dies nicht mehr gültig. Leider erzeugen Jump Diffusion Modelle aufgrund ihrer Sprünge und Modelle mit stochastischer Volatilität unvollständige Märkte.<sup>31</sup>

#### 4.2.1 Definitionen zu stochastischen Prozessen

Einige grundsätzliche Definitionen zu stochastischen Prozessen sind nötig, um das Konzept der risikoneutralen Bewertung zu verstehen.

---

<sup>27</sup> siehe Glasserman, 2004, S.19f

<sup>28</sup> siehe Deutsch, 2004, S.206

<sup>29</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.294

<sup>30</sup> die Black Scholes Welt ist ein vollständiger Markt

<sup>31</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.300

**Martingale**

Ein Martingal ist ein cadlag<sup>32</sup> Prozess  $S_t$  mit einem endlichen Erwartungswert für alle  $t \in [0, T]$  und

$$\forall s > t \quad E[S_s | F_t] = S_t \quad (25)$$

mit

$S_t$  ...Preis eines Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$

$S_s$  ...Preis eines Basiswertes zum Zeitpunkt  $s$

In Worten: Der beste Schätzer für den zukünftigen Erwartungswert eines Assets ist sein heutiger Wert.<sup>33</sup>

**Äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß**

Eine Maßtransformation in der Bewertung von Finanzinstrumenten dient dazu, ein äquivalentes Martingalmaß zu einem stochastischen Prozess zu finden. So sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße  $P$  und  $Q$  äquivalent, wenn sie die gleichen möglichen und unmöglichen Ereignisse beschreiben.<sup>34</sup>

$$P \sim Q : \forall A \in F \quad Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \quad (26)$$

---

<sup>32</sup> eine cadlag Prozess ist eine rechts – kontinuierliche Funktion, mit linksseitigen Limiten. Für eine genauere Definition siehe Cont/Tankov, 2004, S.37f

<sup>33</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.41f

<sup>34</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.297

### 4.3 Der Weg der risikoneutralen Bewertung zur Monte Carlo Simulation

Dieser Abschnitt zeigt, wie der Schluss daraus gezogen werden kann, dass abgezinste, zukünftige Erwartungswerte von Derivaten den heutigen Preis ergeben.

Angenommen wird die Existenz eines stochastischen Diskontfaktors  $Z_t$ , so dass  $\frac{V_t}{Z_t}$  ein Martingal ist. Damit gilt mit (25)<sup>35</sup>

$$\frac{V_t}{Z_t} = E^P \left[ \frac{V_T}{Z_T} \middle| F_t \right] \quad (27)$$

mit

$V_T$  ...Preis eines Derivats zum Zeitpunkt  $T$

$V_t$  ...Preis eines Derivats zum Zeitpunkt  $t$

$Z_t$  ...stochastischer Diskontfaktor zum Zeitpunkt  $t$

$Z_T$  ...stochastischer Diskontfaktor zum Zeitpunkt  $T$

und  $E^P$  als Erwartungswert bezüglich des „objektiven“<sup>36</sup> ( $P$ -) Wahrscheinlichkeitsmaßes. Etwas anschaulicher kann (27) in

$$V_t = E^P \left[ V_T \frac{Z_t}{Z_T} \middle| F_t \right] \quad (28)$$

umgeformt werden. So ist der Preis eines Investments zum Zeitpunkt  $t$  gleich dem Erwartungswert bezüglich des  $P$ -Wahrscheinlichkeitsmaßes mit dem  $\frac{Z_t}{Z_T}$  abgezinsten Wert des Derivats zum Zeitpunkt  $T$ . Mit der Annahme<sup>37</sup>, dass  $Z_0 \equiv 1$ , wird (28) zu

$$V_0 = E^P \left[ \frac{V_T}{Z_T} \middle| F_0 \right] \quad (29)$$

<sup>35</sup> die vollständige Herleitung: siehe Glasserman, 2004, S.26ff

<sup>36</sup> mit „objektiv“ werden die Markt- bzw. vom Investor subjektiven beobachteten Wahrscheinlichkeiten bezeichnet

<sup>37</sup> logischerweise sollte der Startwert eines Zinssatzes immer eins sein

mit

$V_0$  ...Preis eines Derivats zum Zeitpunkt 0

Der stochastische Zins  $\frac{Z_t}{Z_T}$  ist schwer bis gar nicht modellierbar. Aufgrund dessen wird nun ein Geldmarktkonto als Numeraire herangezogen, welches durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann

$$\frac{dR_t}{R_t} = r dt \quad (30)$$

mit der Lösung

$$R_t = R_0 e^{-rt} \quad (31)$$

und

$$R_0 = 1 \quad (32)$$

wobei

$R_T$  ...Wert des Geldmarktkontos zum Zeitpunkt  $T$

$R_t$  ... Wert des Geldmarktkontos zum Zeitpunkt  $t$

$R_0$  ... Wert des Geldmarktkontos zum Zeitpunkt 0

$r$  ...risikoloser Zinssatz

sind.

Falls nun der Markt einen stochastischen Diskontfaktor  $Z_t$  zulässt, ist der Prozess  $\frac{dR_t}{dZ_t}$  ein positives Martingal mit einem Anfangswert von Eins. Da jedes positive Martingal mit einem Anfangswert<sup>38</sup> oder - wegen der Definition eines Martingals - Erwartungswert<sup>39</sup> von Eins eine Maßtransformation definiert<sup>40</sup>, kann dieser Prozess ein neues, äquivalentes risikoneutrales

<sup>38</sup> siehe Glasserman, 2004, S.29

<sup>39</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.292

<sup>40</sup> die Prozesse in den beiden Wahrscheinlichkeitsmaßen teilen sich die gleichen möglichen Pfade, können aber unterschiedliche statistische Eigenschaften besitzen, siehe Cont/Tankov, 2004, S. 292

Martingalmaß  $Q$  in einem fixierten Zeitintervall mit der Radon – Nikodym Ableitung definieren.

$$\left(\frac{dQ}{dP}\right)_t = \frac{R_t}{Z_t} \quad (33)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$E^Q[X|F_t] = E^P\left[X \frac{R_t}{Z_t} | F_t\right] \quad (34)$$

So kann (29) mit (34) umgeschrieben werden in

$$V_0 = E^P\left[\frac{V_T}{Z_T} | F_t\right] = E^Q\left[\frac{V_T}{Z_T} \frac{Z_T}{R_T} | F_t\right] = E^Q\left[\frac{V_T}{R_T} | F_t\right] = e^{-rT} E^Q[V_T | F_t] \quad (35)$$

Durch diese Transformation ist klar ersichtlich, dass „*der heutige Preis eines (handelbaren) Finanzinstruments gleich dem abgezinsten Erwartungswert seines zukünftigen Preises ist, wenn die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Berechnung dieses zukünftigen Erwartungswertes benutzt wird*“.<sup>41</sup>

Wenn nun in einem wie oben beschriebenen risikoneutralen Martingalmaß modelliert wird, ist nach dem *Fundamental Theorem Of Asset Pricing* das Modell arbitragefrei.

Dies führt zu einem allgemeinen „Kochrezept“ einer Monte Carlo Simulation:<sup>42</sup>

1. nimm einen stochastischen Prozess<sup>43</sup> und simuliere eine entsprechend hohe Anzahl an Pfaden;
2. weiters berechne die Auszahlungsfunktionen in jedem Pfad;
3. danach diskontiere alle Auszahlungsfunktionen mit dem risikolosen Zinssatz ab;
4. dann berechne am Ende den Durchschnitt aller Pfade und

voilà, schon ist der Preis des Derivats fertig.

<sup>41</sup> siehe Deutsch, 2005, S.205

<sup>42</sup> siehe Glasserman, 2004, S.30

<sup>43</sup> so dass  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  ein Martingal ist

In dieser Arbeit werden die Preise für alle Barrier Optionen nach diesem Rezept „gebacken“. In unvollständigen Märkten, die Jump Diffusion Prozesse und stochastische Volatilität erzeugen, gibt es kein eindeutiges Martingalmaß, wie bei der Geometrischen Brownschen Bewegung, wo der Driftkoeffizient  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ <sup>44</sup> gewählt werden muss, um ein eindeutiges Martingalmaß zu erhalten.<sup>45</sup> In den Modellen von *Merton* und *Bates* wird ebenfalls nur der Driftkoeffizient angepasst und der Rest des Prozesses unverändert belassen. Dies führt zu einem Martingalmaß, welches weder eindeutig noch optimal ist. Abhilfe bietet in diesem Fall z.B. die Esscher Transformation, mit der ein optimales Martingalmaß eines stochastischen Prozesses gefunden werden kann.<sup>46</sup>

#### ***4.4 Eigenschaften der risikoneutralen Welt***

Die Wahrscheinlichkeiten der risikoneutralen Welt haben nichts mit den Wahrscheinlichkeiten der realen „objektiven“ Welt zu tun.

In einer risikoneutralen Welt hängt der Preis einer Option nicht von einer erwarteten Rendite des Basiswertes ab. Investoren sind in dieser Welt dem Risiko gegenüber neutral. Es wird keine Risikoprämie verlangt, nur der risikolose Zinssatz, der gleichzeitig die erwartete Rendite darstellt, ist von Bedeutung. So ist die Volatilität des Basiswertes hauptverantwortlich für den Preis einer Option.<sup>47</sup>

---

<sup>44</sup> der Term  $\frac{\sigma^2}{2}$  kommt durch eine Anwendung von Ito's Lemma zum Driftkoeffizient des Prozesses hinzu.

Es wird der logarithmierte Prozess -  $S = \ln S$  - ins Lemma von Ito eingesetzt, was dazu führt, dass dieser Term hinzukommt. Vorher muss noch der risikolose Zinssatz als Driftkoeffizient des stochastischen Prozesses gesetzt werden. In der Monte Carlo Simulation werden nur logarithmierte Renditen simuliert.

Dies wird analog beim Jump Diffusion Prozess angewandt.

<sup>45</sup> siehe Deutsch, 2005, S.227

<sup>46</sup> siehe Hubalek/Sgarra, 2006

<sup>47</sup> siehe Chriss, 1997, S.190ff

## 5 Optionsbewertungsmodelle

In diesem Abschnitt werden alle für den praktischen Teil verwendeten Modelle vorgestellt. Angefangen mit dem berühmten Modell von *Black* und *Scholes* folgt der Ansatz von *Merton*, welcher europäische Kaufoptionen unter der Annahme eines nicht-kontinuierlichen Prozesses des Basiswertes bewertet. Am Ende wird das Modell von *Bates* vorgestellt, das als Verallgemeinerung von *Merton* gelten kann, mit dem Unterschied zu *Merton*, dass die Volatilität nicht mehr als konstant angenommen wird, sondern einem Mean - Reversion Prozess folgt.

In den Modellen gelten folgende Annahmen:

1. der kurzfristige Zinssatz ist bekannt und konstant
2. es gibt keine Dividendenzahlung
3. die Option ist „europäisch“
4. es gibt keine Transaktionskosten
5. der Zinssatz zur Geldanlage und zur Kreditaufnahme ist gleich dem risikolosen Zinssatz
6. es gibt keine Einschränkungen zu Leerverkäufen
7. kontinuierliches Handeln ist möglich

Alle MATLAB Codes für die verschiedenen Bewertungsmodelle sind im Anhang zu finden, sowohl die analytischen Lösungen als auch die Monte Carlo Simulation.

### 5.1 *Black – Scholes*

In ihrer wegweisenden Arbeit bewerten *Black* und *Scholes* europäische Optionen mit dem Unterschied zu anderen vor ihnen, dass sie keine erwartete Rendite eines Investors annehmen und nur der risikolose Zinssatz als Rendite von Bedeutung ist. *Black* und *Scholes* bedienen sich einer *No – Arbitrage* Argumentation, in der sie ein für infinitesimale kleine Zeitschritte risikoloses Replikationsportfolio einer Option bilden.

Ihre Modellannahmen lassen die Preise von Optionen nur noch von zwei Variablen, dem Preis des Basiswertes und der Restlaufzeit der Option, abhängen. Alle anderen Faktoren sind über die Lebensdauer einer Option konstant.

Etwas später wurde festgestellt, dass ihr Modell auch bei einem stochastischen Zinssatz, einen Basiswert der Dividenden zahlt und bei amerikanischen Optionen hält. Die kritischen

Vorraussetzungen für die Gültigkeit des Black – Scholes Modells sind, dass der Basiswert einer kontinuierlichen Geometrischen Brownschen Bewegung folgt und dass kontinuierliches Handeln möglich ist, wobei eine Approximation durch diskretes Handeln erlaubt ist. Durch diskretes Handeln hat das Black – Scholes Portfolio anstatt kein Risiko nur ein sehr geringes Risiko.<sup>48</sup>

Der Wert einer europäischen Kaufoption auf einen dividendenlosen Basiswert ergibt

$$c = S_0 N(d1) - Ke^{-rT} N(d2) \quad (36)$$

und für eine europäische Verkaufsoption

$$p = Ke^{-rT} N(-d2) - S_0 N(-d1) \quad (37)$$

mit

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T} \quad (38)$$

und

$S_0$  ...Preis eines Basiswertes zum Zeitpunkt 0

$K$  ...Ausübungspreis einer Option

$\sigma$  ...implizite Volatilität der Option

$T$  ...Restlaufzeit der Option

$r$  ...risikoloser Zinssatz

$N(.)$  ...kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

### 5.1.1 Arbitragefreiheit im Black – Scholes Modell<sup>49</sup>

Um die *No – Arbitrage* Argumente von *Black* und *Scholes* zu verstehen, ist es sinnvoll die Herleitung der Black – Scholes Differentialgleichung etwas näher zu betrachten.

Gegeben ist ein kontinuierlich handelbarer Basiswert, der einer Geometrischen Brownschen Bewegung (19) folgt. Eine europäische Kaufoption  $c = f(S, t)$  auf diesen Basiswert folgt laut Ito's Lemma

<sup>48</sup> siehe Merton, 1975, S.126

<sup>49</sup> siehe Hull, 2006, S.357ff

$$df_t = \left( \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \quad (39)$$

Nun wird ein Portfolio aus einer europäischen Kaufoption (short), welche (39) folgt, und  $\frac{\partial f}{\partial S}$  Anteilen des Basiswertes gebildet. Das Portfolio  $\Pi_t$  hat zum Zeitpunkt  $t$  den Wert

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} S_t \quad (40)$$

Bei einer infinitesimalen Änderung der Zeit wird aus (40)

$$d\Pi_t = -df_t + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} dS_t \quad (41)$$

Aus (41) kann klar herausgelesen werden, dass der Wert des Portfolios  $\Pi_t$  bei kleinen Zeitänderungen konstant ist. Unter der Voraussetzung, dass die Anteile  $\frac{df_t}{dS_t}$ , die auch gleichzeitig die Steigung zwischen der Option und dem Basiswert darstellen, kontinuierlich angepasst werden, kann dieses Portfolio weder an Wert gewinnen noch verlieren. Dieser Hedge wurde als Delta – Hedge bekannt, weil das Delta einer Option genau die Steigung  $\frac{df_t}{dS_t}$  ist. Da, wie früher schon erwähnt, die Geometrische Brownsche Bewegung ein vollständiger Markt ist, kann hier das Delta – Risiko völlig eliminiert werden.

Wenn wir nun (39) und (19) in (41) einsetzen folgt

$$d\Pi_t = - \left( \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt - \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \quad (42)$$

Da die Brownschen Bewegungen  $dW_t$  in (42) identisch sind, können diese aus der Gleichung eliminiert werden, und es ergibt sich

$$d\Pi_t = \left( -\frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \quad (43)$$

Da jedoch in der Realität ein risikoloses Investment mit dem risikolosen Zinssatz wächst, muss das Portfolio die Gleichung

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt \quad (44)$$

erfüllen.

Wenn nun (40) und (43) in (44) eingesetzt werden, ergibt sich die berühmte Black – Scholes Differentialgleichung

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = rf_t \quad (45)$$

Sie kann mit den Randbedingungen (1) (2) und  $t = T$  analog zur Diffusionsgleichung gelöst werden.<sup>50</sup> In Gleichung (45) fehlt der Driftkoeffizient  $\mu$  und nur noch der risikolose Zinssatz ist von Bedeutung.

Ein anderer Ansatz, um (45) zu berechnen, kann mit den Erkenntnissen aus Kapitel 4 gefunden werden.

Wenn wir nun in (39) die Martingalbedingung berücksichtigen, muss der Drift null gesetzt werden. Wurde zuvor in der Geometrischen Brownschen Bewegung der risikolose Zinssatz als Driftkoeffizient gesetzt, ergibt dies

$$\frac{\partial f_t}{\partial S_t} rS_t + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = 0 \quad (46)$$

Mit (46) und der Forderung, dass ein risikoneutrales Investment mit dem risikolosen Zinssatz wächst, wird daraus die berühmte Black – Scholes Differentialgleichung.

---

<sup>50</sup> siehe Black/Scholes, 1973, S.644

### 5.1.2 Analytische Bewertungsformeln für Barrier Optionen

Die folgenden Lösungen für Barrier Optionen sind Lösungen der Black – Scholes Differentialgleichung mit erweiterten Randbedingungen für Barrier Optionen. Eine Herleitung dieser Lösungen ist in *Albanese* (2006) zu finden.

Diese Differentialgleichung wird analog zur Partiellen Differentialgleichung von *Kolmogorov* gelöst. Somit ergeben sich aus (45) und den Randbedingungen einer Barriere die Lösungen<sup>51</sup> für Barrier Optionen mit einem dividendenlosen Basiswert.<sup>52</sup>

Es werden folgende Notationen verwendet:

|            |  |
|------------|--|
| $S_0$      | ...Preis eines Basiswertes zum Zeitpunkt 0                     |
| $K$        | ...Ausübungspreis einer Option                                 |
| $H$        | ...Barriere einer Option                                       |
| $\sigma$   | ...implizite Volatilität der Option                            |
| $T$        | ...Restlaufzeit der Option                                     |
| $r$        | ...risikoloser Zinssatz  |
| $N(\cdot)$ | ...kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung |

Für eine Down – And – In – Call Barrier Option, wenn  $H \leq K$

$$c_{di} = S_0 \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}) \quad (47)$$

eine Down – And – Out Call Barrier Option, wenn  $H \geq K$

$$c_{do} = S_0 N(x1) - Ke^{-rT} N(x1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda} N(y1) + Ke^{-rT} \left( \frac{H}{S_0} \right)^{2\lambda-2} N(y1 - \sigma\sqrt{T}) \quad (48)$$

eine Up – And – In Call Barrier Option, wenn  $H > K$

<sup>51</sup> siehe Hull, 2006, S.640ff

<sup>52</sup> die Dividendenrendite wurde null gesetzt; siehe Albanese, 2006, S.161 (Fußnote)

$$\begin{aligned}
c_{ui} = & S_0 N(x1) - Ke^{-rT} N(x1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y1)] \\
& + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y1 + \sigma\sqrt{T})]
\end{aligned} \tag{49}$$

eine Down – And – In – Put Barrier Option, wenn  $H < K$

$$\begin{aligned}
p_{di} = & -S_0 N(-x1) + Ke^{-rT} N(-x1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y1)] \\
& + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y1 - \sigma\sqrt{T})]
\end{aligned} \tag{50}$$

eine Up – And – In Put Barrier Option, wenn  $H \geq K$

$$p_{ui} = -S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(-y) + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T}) \tag{51}$$

eine Up – And – Out Put Barrier Option, wenn  $H \leq K$

$$\begin{aligned}
p_{uo} = & -S_0 N(-x1) + Ke^{-rT} N(-x1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(-y1) \\
& - Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y1 + \sigma\sqrt{T})
\end{aligned} \tag{52}$$

mit

$$\lambda = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \quad y = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{S_0 K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad x1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad y1 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \tag{53}$$

Aus den Zusammenhängen (3) können alle weiteren Arten von Barrier Optionen berechnet werden.

### 5.1.3 Black – Scholes und Monte Carlo Simulation

In der Monte Carlo Simulation werden nach dem Kochrezept aus Kapitel 4 Optionen bewertet. Die diskrete Darstellung der Geometrischen Brownschen Bewegung ist

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (54)$$

mit

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

$T$  ...Restlaufzeit der Option

$n$  ...Anzahl der diskreten Zeitschritte<sup>53</sup>

Nun werden für die Monte Carlo Simulation 10000 Pfade gemäß Gleichung (54) simuliert. Auf diese Pfade wird die entsprechende Auszahlungsfunktion des jeweiligen Optionstyps angewandt. Die daraus resultierenden Endwerte werden mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst.

Das Ergebnis sind 10000 abgezinste Auszahlungen, die anschließend aufsummiert werden. Diese Summe dividiert durch die Gesamtanzahl der Pfade ergibt schlussendlich den Preis der Option.

Die Vorgangsweise bleibt bei den zwei weiteren Modellen prinzipiell gleich.

## 5.2 Das Modell von Merton

*Robert C. Merton* entwickelte als erster eine Formel zur Bewertung von europäischen Optionen unter der Annahme, dass der Basiswert einem nicht kontinuierlichen stochastischen Prozess folgt.

Motiviert von an der Börse beobachteten Sprüngen der Aktienkurse, formulierte er einen Jump Diffusion Prozess. Dort ist der kontinuierliche Part eine Geometrische Brownsche Bewegung, die er „das normale Tagesgeschäft an der Börse“ nennt, also die kleinen Änderungen aus Angebot und Nachfrage. Der Compound Poisson Prozess sorgt für unvorhersehbare, unregelmäßige und große Sprünge. Sie sollen wichtige Informationszuflüsse eines

---

<sup>53</sup> es wurden für alle Optionen 1000 Zeitschritte angenommen

Unternehmens an die Börse widerspiegeln, z.B. eine Erdölfirma hat ein neues Ölfeld entdeckt, oder der Jahresbericht eines Unternehmens fällt besonders gut aus. Wichtig für die weitere Argumentation von *Merton* ist, dass diese Informationen unternehmensspezifisch, maximal branchenspezifisch sind und keine Auswirkungen auf den Gesamtmarkt haben.<sup>54</sup>

Damit entsteht ein stochastischer Prozess nach Gleichung (22).

### 5.2.1 Risikoneutrale Bewertung im Merton Modell

Der Fall von nicht kontinuierlichen Preisprozessen stellt einen unvollständigen Markt dar, in dem die Bildung eines risikolosen Duplikationsportfolios unmöglich ist. Deshalb kommt *Merton* in seiner Arbeit zur Erkenntnis, dass die *No – Arbitrage* Argumente von *Black* und *Scholes* zu keinem risikolosen Portfolio führen können.

*Merton* bildet ein Portfolio aus einer europäischen Option einer Aktie und einer risikolosen Veranlagung. Wenn nun alle Risiken des Diffusionsprozesses Delta – gehedged sind, dann ist die Rendite aus diesem Portfolio

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = (E[R_t|F_t] - \lambda k)dt + dZ_t \quad (55)$$

mit

$E[R_t]$  ...erwartete Rendite des Portfolios bezüglich  $F_t$

$\lambda$  ...Sprungintensität

$k$  ...Sprunghöhe

$Z_t$  ...Compound Poisson Prozess

$dZ_t$  ...Differential von  $Z$

Da Sprünge seltene Ereignisse sind, macht ein Halter dieses Portfolios die meiste Zeit einen Gewinn in der Höhe des linken Teils der Gleichung. Durch die Annahme, dass, wie schon oben erwähnt, die Sprünge unternehmensspezifisch sind und keine Korrelation mit dem Gesamtmarkt haben, hat dieses Portfolio ein Beta von Null. Wenn nun das CAPM hält, wächst ein Portfolio mit einem Betafaktor von Null genau mit dem risikolosen Zinssatz. Deshalb wird für das Risiko der Sprünge keine Prämie bezahlt.

---

<sup>54</sup> siehe Merton, 1975, S.127

Diese Annahme, dass die unabhängigen Sprünge im Portfolio diversifizierbar sind, impliziert, dass ein Index nicht springt. Da dies aber nicht zutrifft, kann diese Annahme verworfen werden und macht dieses Modell recht ungeeignet zur Bewertung von Index Optionen.<sup>55</sup>

Damit der Jump Diffusion Prozess eine risikoneutrale Verteilung besitzt, muss der Compound Poisson Prozess ein Martingal sein.<sup>56</sup>

Der Erwartungswert eines Poisson Prozesses  $N_t$  ist laut Definition<sup>57</sup>

$$E[N_t | F_t] = \lambda t \quad (56)$$

mit

$\lambda$  ...Sprungintensität

und somit gilt

$$E[N_t | F_t] - \lambda t = 0 \quad (57)$$

Wenn die Sprunghöhe  $Y_j$  identisch gleichverteilt ist mit einem Erwartungswert  $k = E[Y_j - 1]$  ist

$$dZ_t - \lambda k t \quad (58)$$

ein Martingal.

mit

$\lambda$  ...Sprungintensität

$k$  ...Sprunghöhe

$Z_t$  ...Compound Poisson Prozess

$dZ_t$  ...Differential von  $Z$

Dadurch entsteht ein Preisprozess

<sup>55</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.323

<sup>56</sup> siehe Merton, 1975, S.128

<sup>57</sup> siehe Glassermann, 2004, S.137

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t + dZ_t - k\lambda dt \quad (59)$$

mit

- $S_t$  ...Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$
- $dS_t$  ...Differential von  $S$
- $r$  ...risikoloser Zinssatz
- $\sigma$  ...konstanter Diffusionskoeffizient von  $S$
- $W_t$  ...Brownsche Bewegung
- $dW_t$  ...Differential von  $W$
- $Z_t$  ...Compound Poisson Prozess zum Zeitpunkt  $t$
- $dZ_t$  ...Differential von  $Z$
- $\lambda$  ...Sprungintensität
- $k$  ...Sprunghöhe

In Gleichung (59) ist klar ersichtlich, dass der Prozess genau mit dem risikolosen Zinssatz wächst.

Angenommen die Zufallsvariable für die Sprunghöhe<sup>58</sup>  $Y_i$  ist  $\ln(Y_i) \sim N(m, \delta^2)$  verteilt und kann nur positive Werte annehmen, folgt die Lösung für Gleichung (59)

$$S_T = S_0 \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right] \prod_{j=1}^{N_t} Y_j \quad (60)$$

mit

- $S_T$  ...Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $T$
- $S_0$  ...Preis eines Basiswertes zum Zeitpunkt 0
- $r$  ...risikoloser Zinssatz
- $\sigma$  ...konstanter Diffusionskoeffizient von  $S$
- $W_T$  ...Brownsche Bewegung
- $N_t$  ...Poisson Prozess

---

<sup>58</sup> durch die Annahme ausschließlich positiver Sprünge können diese multipliziert werden, siehe Glassermann, 2004, S.135

$Y_j$  ...Sprunghöhe zum Sprungzeitpunkt  $\tau_j$

Da die Multiplikation von log – Normalverteilten Zufallszahlen wiederum log – Normalverteilte Zufallszahlen ergeben, kann (60) in

$$S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \alpha W_T} \prod_{i=1}^{N_t} Y_i = LN\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + mn, \sigma^2 T + \delta^2 n\right) \quad (61)$$

umgeschrieben werden. Diese Eigenschaft macht sich *Merton* zunutze, indem er log – Normalverteilte Zufallszahlen (Black – Scholes Optionspreise) mit einer Poisson Wahrscheinlichkeit multipliziert.

Dies führt zu folgender Bewertungsformel

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} BS(S_0, K, r_n, T, \sigma_n) \quad (62)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda(1+k) \\ \sigma_n^2 &= \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T} \\ r_n &= r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T} \\ \gamma &= \ln(1+k) \end{aligned} \quad (63)$$

$BS(\ )$  ist die Bewertungsformel (36). Ausgedrückt in Worten ist der Preis einer europäischen Option die gewichtete Summe aus Black – Scholes Preisen, wobei die Gewichte die Poisson Wahrscheinlichkeit, dass genau  $n$  Sprünge während der Laufzeit der Option auftreten, sind.

### 5.2.2 Merton und Monte Carlo Simulation

Die diskrete Darstellung des Prozesses des Basiswertes im Merton Modell ist

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[\left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} + \Delta Z\right] \quad (64)$$

mit

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

$$\Delta Z = \begin{cases} 0, & t_i \neq \tau_i \\ Y_i, & t_i = \tau_i \end{cases}$$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

$T$  ...Restlaufzeit der Option

$n$  ...Anzahl der diskreten Zeitschritte

$\Delta Z$  ...Compound Poisson Prozess

$\tau_i$  ...Sprungzeiten

$Y_i$  ...log – Normalverteilte Sprunghöhe

Die Sprungzeiten in meiner Monte Carlo Simulation bei *Merton* und *Bates* sind nicht exponentialverteilt, sondern als Approximation im Intervall  $[0, T]$  gleichverteilt.<sup>59</sup>

### 5.3 Das Modell von Bates

Dieses Modell kann empirische Verteilungsfunktionen von Renditen recht gut nachbilden. Optionsbewertungsmodelle mit stochastischer Volatilität und ohne Sprünge (*Heston*) sind bei der Verteilung von kurzfristigen Renditen etwas eingeschränkt, und so treffen sie die implizite Volatilität von kurzfristigen Optionen schlechter als das Bates Modell.<sup>60</sup>

Insgesamt gilt dieses Modell als Verallgemeinerung des Merton Modells, mit dem Unterschied der stochastischen Volatilität. Der Basiswert folgt dem Prozess<sup>61</sup>

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^S + dZ_t \quad (65)$$

mit

$S_t$  ...Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt  $t$

$dS_t$  ...Differential von  $S$

$\mu$  ...konstanter Driftkoeffizient

<sup>59</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.174

<sup>60</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.477

<sup>61</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.477

$V_t$  ...stochastische Volatilität zum Zeitpunkt  $t$

$W_t^S$  ...Brownsche Bewegung des Basiswertes

$dW_t^S$  ...Differential von  $W_t^S$

$Z_t$  ...Compound Poisson Prozess zum Zeitpunkt  $t$

$dZ_t$  ...Differential von  $Z$

So ist sofort ersichtlich, dass dieser Prozess gleich dem Jump Diffusion Prozess, mit dem Unterschied der stochastischen Volatilität  $V_t$ , ist. Diese folgt dem Mean – Reversion Prozess (23).

$$dV_t = \xi(\eta - V_t)dt + \theta\sqrt{V_t}dW_t^V \quad (66)$$

Im Compound Poisson Prozess von (65) ist  $k$  die Sprunghöhe, so dass gilt

$$\ln(1+k) \sim N\left(\ln(1+\bar{k}) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right) \quad (67)$$

### 5.3.1 Risikoneutrale Bewertung im Bates Modell

Wie auch *Merton* ändert *Bates* nur den Driftkoeffizienten  $\mu = r - \lambda\bar{k}$  und erhält ein äquivalentes risikoneutrales Martingalmaß, so dass  $\hat{S} = Se^{-rt}$  ein Martingal ist. Wie bereits erwähnt, ist dieses Maß aufgrund des unvollständigen Marktes nicht eindeutig. So kann sowohl die Sprunghöhe als auch die Sprungintensität geändert werden, ohne dieses äquivalente Maß zu verlassen.<sup>62</sup>

Im Bates Modell wird eine Risikoprämie für die stochastische Volatilität gezahlt. Diese ist eine lineare Funktion der Volatilität und im ersten Term von (66) enthalten.<sup>63</sup> Wie wir später sehen werden, existieren analytische Lösungen des Bates Modells für europäische Optionen. Für Barrier Optionen sind diese nicht mehr verfügbar. Um sie zu bewerten, muss auf numerische Verfahren wie die Monte Carlo Simulation zurückgegriffen werden.<sup>64</sup>

<sup>62</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.477

<sup>63</sup> siehe Bates, 1996

<sup>64</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.477

Für die Herleitung der analytischen Lösung für Optionen im Bates Modell ist weiters die Definition der Charakteristischen Funktion erforderlich.

### Charakteristische Funktion

Die Charakteristische Funktion einer Zufallsvariable ist die Fourier – Transformierte ihrer Verteilungsfunktion. Eine Charakteristische Funktion  $\phi_X$  einer Zufallsvariable  $X$  ist

$$\forall z \in R^d, \phi_X(z) = E[\exp(iz \cdot X)] = \int_{R^d} e^{iz \cdot x} dp(x) \quad (68)$$

Außerdem gilt, dass zwei Zufallsvariablen mit der gleichen Charakteristischen Funktion auch eine identische Verteilungsfunktion haben.

### Herleitung der analytischen Lösungen

Der Wert einer europäischen Kaufoption unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß ist<sup>65</sup>

$$c = e^{-rT} E^Q[\max(S_T - K, 0) | F_t] \quad (69)$$

Da der Erwartungswert definitionsgemäß das Integral (27) ist, kann (69) in

$$c = e^{-rT} \left[ \int_K^\infty S_T p^Q(S_T) dS_T - K \int_K^\infty p^Q(S_T) dS_T \right] \quad (70)$$

umgeschrieben werden. Anschaulicher kann daraus der Wert einer europäischen Kaufoption<sup>66</sup>

$$F = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2 \quad (71)$$

dargestellt werden. So sind  $P_j$  Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung, dass sie zwischen 0 und 1 liegen müssen. Da die Verteilungsfunktionen im Bates Modell nicht bekannt sind, wird für die Berechnung von  $P_j$  der Umweg über die Charakteristische Funktion gegangen. Wie

<sup>65</sup> siehe Bates, 1996

<sup>66</sup> siehe Bates, 1996

früher erläutert, ist die Charakteristische Funktion die Fourier – Transformierte der Verteilungsfunktion. Daher kann die kumulative risikoneutrale Verteilungsfunktion durch die inverse Charakteristische Funktion ausgedrückt werden.

$$j = 1,2$$

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(t, S_t, V_t)}{i\phi} \right] d\phi \quad (72)$$

Dieses Integral wird mit Hilfe der Gauss-Quadratur evaluiert. Dieses Verfahren ist in MATLAB integriert und macht keine weiteren Probleme für den praktischen Teil.

Wie wird nun die Charakteristische Funktion  $f_j$  evaluiert, und wie wird die Martingaleigenschaft erfüllt?

Da der Sprungterm und der Diffusionsterm aus (65) unabhängig sind, können ihre Charakteristischen Funktionen getrennt evaluiert werden und am Ende miteinander multipliziert werden.

Der kontinuierliche Part wird nach Ito's Lemma entwickelt, so dass  $M_t = f(X_t^k, V_t, t)$ <sup>67</sup>

$$dM_t = \left( \frac{1}{2} V_t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho \theta V_t \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left( r - \lambda \bar{k} - \frac{V_t}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi (\eta - V_t) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt$$

$$+ \sqrt{v} \frac{\partial f}{\partial x} dW^S + \theta \sqrt{v} \frac{\partial f}{\partial v} dW^V \quad (73)$$

Da der Prozess ein Martingal sein muss, wird analog zur alternativen Herleitung der Black – Scholes Differentialgleichung aus Kapitel 5 der Drift Null gesetzt. Mit der Endbedingung

$$f(x, \phi, T) = e^{i\phi x} \quad (74)$$

kann aus dieser Gleichung eine charakteristische Funktion evaluiert werden, wenn man für die Funktion  $f$  die Form<sup>68</sup>

<sup>67</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.478

<sup>68</sup> die Restlaufzeit  $T = T - t$

$$f(x, \phi, t) = \exp(C(T-t) + vD(T-t) + i\phi x) \quad (75)$$

annimmt. Dann können explizit berechenbare Differentialgleichungen für  $C$  und  $D$  gebildet werden. Insgesamt führt dies zu den Charakteristischen Funktionen<sup>69</sup>

$$\begin{aligned} f_1 = \exp & \left\{ i\phi rT - \frac{\xi\eta}{\theta^2} \left[ 2 \ln \left( 1 - \frac{[\gamma_1 - \xi + (1+i\phi)\rho\theta](1-e^{-\gamma_1 T})}{2\gamma_1} \right) \right] \right. \\ & - \frac{\xi\eta}{\theta^2} [\gamma_1 - \xi + (1+i\phi)\rho\theta]T + i\phi \ln S_0 \\ & + \lambda(1+\bar{k})T \left[ (1+\bar{k})^{i\phi} e^{\frac{i\phi}{2}(1+i\phi)\delta^2} - 1 \right] - \lambda i\phi \bar{k}T \\ & \left. + \frac{i\phi(i\phi+1)(1-e^{-\gamma_1 T})}{2\gamma_1 - [\gamma_1 - \xi + (1+i\phi)\rho\theta](1-e^{-\gamma_1 T})} V_0 \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

mit

$$\gamma_1 = \sqrt{[\xi - (1+i\phi)\rho\theta]^2 - i\phi(i\phi+1)\theta^2} \quad (77)$$

und

$$\begin{aligned} f_2 = \exp & \left\{ i\phi rT - \frac{\xi\eta}{\theta^2} \left[ 2 \ln \left( 1 - \frac{[\gamma_2 - \xi + i\phi\rho\theta](1-e^{-\gamma_2 T})}{2\gamma_2} \right) \right] \right. \\ & - \frac{\xi\eta}{\theta^2} [\gamma_2 - \xi + i\phi\rho\theta]T + i\phi \ln S_0 \\ & + \lambda T \left[ (1+\bar{k})^{i\phi} e^{\frac{i\phi}{2}(i\phi-1)\delta^2} - 1 \right] - \lambda i\phi \bar{k}T \\ & \left. + \frac{i\phi(i\phi-1)(1-e^{-\gamma_2 T})}{2\gamma_2 - [\gamma_2 - \xi + i\phi\rho\theta](1-e^{-\gamma_2 T})} V_0 \right\} \end{aligned} \quad (78)$$

mit

$$\gamma_2 = \sqrt{[\xi - i\phi\rho\theta]^2 - i\phi(i\phi-1)\theta^2} \quad (79)$$

<sup>69</sup> siehe Bakshi/Cao/Chen, 1997, S.50

### 5.3.2 Bates und Monte Carlo Simulation

Die diskrete Darstellung des Prozesses des Basiswertes im Merton Modell ist

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[ \left( r - \lambda \bar{k} - \frac{1}{2} V_{t-1} \right) \Delta t + \sqrt{V_{t-1}} \varepsilon^S \sqrt{\Delta t} + \Delta Z \right] \quad (80)$$

$$V_{t-1} = \xi (\eta - V_{t-2}) \Delta t + \theta \sqrt{V_{t-2}} \varepsilon^V \sqrt{\Delta t} \quad (81)$$

mit

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

$$\Delta Z = \begin{cases} 0, & t_i \neq \tau_i \\ Y_i, & t_i = \tau_i \end{cases}$$

$$\varepsilon^{VS} \sim N(0,1)$$

$\varepsilon^V$  und  $\varepsilon^S$  korrelieren miteinander<sup>70</sup>

$T$  ...Restlaufzeit der Option

$n$  ...Anzahl der diskreten Zeitschritte

$\Delta Z$  ...Compound Poisson Prozess

$\tau_i$  ...Sprungzeiten

$Y_i$  ...log – normalverteilte Sprunghöhe

### 5.3.3 Erweiterung des Modells von Bates

Wie früher erwähnt nimmt *Bates* eine log – Normalverteilung für die Sprunghöhe im Compound Poisson Prozess an. *Kou* (2002) bevorzugt aus verschiedenen Gründen eine doppelte exponentialverteilte Sprunghöhe.

Das Modell von Bates setzt für die Verteilung der Sprunghöhe nur eines voraus; die Charakteristische Funktion dieser Verteilung muss berechenbar sein.<sup>71</sup>

Wenn nun in den Charakteristischen Funktionen (76) und (78)  $\lambda = 0$  gesetzt wird, ergeben sich die Charakteristischen Funktionen für ein Modell mit stochastischer Volatilität ohne Sprünge.<sup>72</sup>

<sup>70</sup> damit kann das Phänomen Volatility Clustering modelliert werden

<sup>71</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.477

<sup>72</sup> siehe Bakshi/Cao/Chen S.50

Die Charakteristische Funktion einer doppelten Exponentialverteilung ist<sup>73</sup>

$$f_J = \exp\left\{i\phi\lambda T\left(\frac{p}{\eta_1 - i\phi} - \frac{1-p}{\eta_2 + i\phi}\right)\right\} \quad (82)$$

mit

$p$  ...Wahrscheinlichkeit für einen positiven Sprung

$\lambda$  ...Sprungintensität

$\frac{1}{\eta_1}$  ...Mittelwert der positiven Sprünge

$\frac{1}{\eta_2}$  ...Mittelwert der negativen Sprünge

Nachdem die Charakteristischen Funktionen (76) und (78) angepasst wurden, können sie mit (82) multipliziert werden, und man erhält die Charakteristischen Funktionen für ein Modell mit stochastischer Volatilität und doppelt exponentialverteilter Sprünge nach Kou.<sup>74</sup>

Der Erwartungswert von doppelt exponentialverteilter Sprünge ist<sup>75</sup>

$$\frac{p}{\eta_1} - \frac{1-p}{\eta_2} \quad (83)$$

Mit (83) kann gemäß Gleichung (58) ein Martingal gebildet werden, was zu einem diskreten Prozess für die Monte Carlo Simulation

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[\left(r - \lambda\left(\frac{p}{\eta_1} - \frac{1-p}{\eta_2}\right) - \frac{1}{2}V_{t-1}\right)\Delta t + \sqrt{V_{t-1}}\varepsilon^S\sqrt{\Delta t} + \Delta Z\right] \quad (84)$$

führt.

<sup>73</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.112

<sup>74</sup> Da hier nur in vorhandene Charakteristische Funktionen substituiert wird, könnten die Ergebnisse falsch sein!

<sup>75</sup> siehe Kou, 2002, S.1088

## 6 Kalibrierung und Validierung

Um für alle drei Modelle die gleichen Voraussetzungen zu gewährleisten, wird zur Kalibrierung dieser dieselbe Methode verwendet, obwohl beispielsweise im Modell von Black – Scholes nur die implizite Volatilität zu bestimmen ist und sicherlich kein so aufwendiges Optimierungsverfahren notwendig wäre, wie im Modell von Bates. Es wurden die Parameter durch die Minimierung einer nicht linearen Funktion

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^N \omega_i |C^\theta(T_i, K_i) - C_i|^2 \quad (85)$$

mit

$C^\theta$  ...Durchschnittspreise<sup>76</sup> der Optionsscheine von BNP Paribas

$T_i$  ...Restlaufzeit des i – ten Optionsscheines

$K_i$  ...Ausübungspreis des i – ten Optionsscheines

$C_i$  ...Modellpreis der Option mit der i – ten Restlaufzeit und dem i – ten Ausübungspreis

und mit den Gewichten  $\omega_i$ <sup>77</sup>

$$\omega_i = \frac{1}{|C_i^{Geld} - C_i^{Brief}|} \quad (86)$$

mit

$C_i^{Geld}$  ...Geldkurs des Optionsscheines der BNP Paribas

$C_i^{Brief}$  ...Briefkurs des Optionsscheines der BNP Paribas

kalibriert. Es gibt mehrere Optimierungsverfahren, um diese Funktion zu minimieren. Ein gewisser Moodley (2005) erzielt im Zuge seiner Uni Abschlussarbeit *The Heston Model: A practical approach* bei der Kalibrierung mit dem *Adaptive Simulated Annealing* sehr gute Ergebnisse. Da dieser Algorithmus im Internet frei verfügbar ist und leicht in MATLAB zu

<sup>76</sup> Durchschnittspreis =  $(C^{Geld} + C^{Brief})/2$

<sup>77</sup> siehe Cont/Tankov, 2004, S.439

implementieren ist, benütze auch ich ihn zur Parameterbestimmung. Weiters ist dieses Verfahren in der Lage, ein globales Minimum zu finden, wodurch es recht unempfindlich gegenüber den Startwerten der Parameter ist.

*Adaptive Simulated Annealing* ist ein Optimierungsverfahren, welches durch Zufall Werte für die verschiedenen Parameter im vorgegebenen Raum „aussucht“. Anschließend wird mit diesen Parametern die zu minimierende Kostenfunktion berechnet. Das Ergebnis wird entweder verworfen oder angenommen. Dieser Schritt wird so oft wiederholt, bis eine Abbruchbedingung zum Tragen kommt.<sup>78</sup>

Nicht alle Parameter wurden durch dieses Optimierungsverfahren bestimmt.

- als risikoloser Zinssatz dienen die Renditen von Deutschen Staatsanleihen mit etwa identischer Restlaufzeit gleich den jeweiligen Optionsscheinen
- im Bates Modell gibt es einen Startwert der stochastischen Volatilität. Dieser ist die Standardabweichung einer historischen Zeitreihe der letzten 250 Renditen des DAX Index

## 6.1 Kalibrierung

Es ist eine spezielle Auswahl von Optionsscheinen getroffen worden, welche zur Kalibrierung herangezogen wurden. So bewegen sich die Restlaufzeiten und Ausübungspreise recht nahe an den Restlaufzeiten und Ausübungspreisen der in den zur Validierung verwendeten Barrier Optionen. Tabelle 3 und 4 zeigen die vier Zertifikate<sup>79</sup>, aus welchen die Barrier Optionen extrahiert wurden.

| WKN    | Bonuskurs | Barriere | Bezugsverhältnis | Ø-Preis | Restlaufzeit |
|--------|-----------|----------|------------------|---------|--------------|
| BNP9FR | 5,800     | 3,800    | 0.01             | 49.62   | 1.01         |
| BN2FCN | 5,700     | 3,400    | 0.01             | 49.34   | 2.03         |

Tabelle 3: Ausstattung der Bonus Zertifikate

| WKN    | Bonuskurs | Barriere | Bezugsverhältnis | Ø-Preis | Restlaufzeit | Reverse Kurs |
|--------|-----------|----------|------------------|---------|--------------|--------------|
| BN60S2 | 3,430     | 8,576    | 0.01             | 94.4    | 1.02         | 12,930       |
| BN2E9H | 4,000     | 6,700    | 0.01             | 44.55   | 2.03         | 9,400        |

Tabelle 4: Ausstattung der Reverse Bonus Zertifikate

<sup>78</sup> siehe Ingber, 1993, S.8

<sup>79</sup> der Basiswert dieser Zertifikate ist der DAX

Alle Preise stammen vom 16.12.2008 und sind der Homepage des Emittenten, der BNP Paribas, entnommen.

Zur Parameterbestimmung wurden 49 europäische Kaufoptionen mit einer Restlaufzeit zwischen einem halben und drei Jahren gewählt. Ihre Ausübungspreise liegen zwischen 3500 und 6000 DAX Punkten. Sie haben ebenfalls ein Bezugsverhältnis von 1:100. In Anhang B sind alle Daten dieser Optionen in einer Tabelle zusammengefasst.

Die Ergebnisse der Kalibrierung zeigt Tabelle 5. Die Ergebnisse des Merton Modells entsprechen den Erwartungen, da ich, wie schon früher erwähnt, Optionen auf einen Index bewerte und dieses Modell für Index – Optionen recht ungeeignet ist. Die Varianz der Sprunghöhe  $\delta$  ist Null und der Mittelwert  $m$  der Sprunghöhe gerade einmal 3.37%. Diese kleinen Werte für die Sprunghöhe können keine „bedeutenden“ Sprünge erzeugen. Somit stimmen die Ergebnisse des Merton Modells mit den Ergebnissen des Modells von Black – Scholes recht genau überein.

|                      |        |
|----------------------|--------|
| <b>Black Scholes</b> |        |
| $\sigma$             | 44.32% |
| <b>Merton</b>        |        |
| $\sigma$             | 43.48% |
| $\delta$             | 0.00%  |
| $\lambda$            | 9.25   |
| $m$                  | 3.37%  |
| <b>Bates</b>         |        |
| $\xi$                | 1.65   |
| $\eta$               | 0.19   |
| $\theta$             | 0.90   |
| $\rho$               | -1     |
| $\lambda$            | 1      |
| $k^-$                | 2.14%  |
| $\delta$             | 5.00%  |

Tabelle 5: Ergebnisse der Kalibrierung

Ein Qualitätsmerkmal der Modelle ist das Ergebnis der Höhe der Kostenfunktion  $S(\theta)$ .

Tabelle 6 zeigt diese *in sample* und einmal *in sample out of time*.

|                      |       |
|----------------------|-------|
| <b>Black Scholes</b> |       |
| S(0) (16.12.08)      | 42.15 |
| S(0) (23.01.09)      | 51.46 |
| <b>Merton</b>        |       |
| S(0) (16.12.08)      | 42.63 |
| S(0) (23.01.09)      | 54.21 |
| <b>Bates</b>         |       |
| S(0) (16.12.08)      | 5.43  |
| S(0) (23.01.09)      | 18.47 |

Tabelle 6: Wert der Kostenfunktionen

Aus dieser Tabelle ist sofort ersichtlich, dass das Bates Modell die beiden anderen um Längen schlägt und mit einem Wert von 5.43 die Preise der Optionsscheine nahezu perfekt trifft. Dies ist nicht verwunderlich, weil das Modell durch die große Anzahl an Parametern über mehr Flexibilität verfügt.

Auffällig ist weiters die fehlende Robustheit des Bates Modells im Zeitablauf, was eine tägliche Neukalibrierung der Parameter erfordert. Da die Kalibrierung dieses Modells jedoch in etwa 35 Stunden gedauert hat, kann dies nicht gewährleistet werden.

Als Alternative könnten die Parameter aber einmalig mit ASA bestimmt werden und, sofern keine großen Veränderungen im DAX passieren, eine tägliche Anpassung mit einem weniger aufwendigen Verfahren durchgeführt werden.

## 6.2 Validierung

Im ersten Schritt der Validierung wird die Konsistenz zwischen der Monte Carlo Simulation und den analytischen Lösungen geprüft. Da 10000 Pfade recht wenig für eine Simulation sind, schwingen die Preise noch recht stark.

Die Monte Carlo Simulation ist so programmiert, dass sie in jedem Modell jeweils den Wert der Knock – In, Knock – Out Barrier Option und der dazugehörigen<sup>80</sup> europäischen Option berechnet, um den Preis der europäischen Option der Monte Carlo Simulation sofort mit dem Preis der analytischen Lösung zu vergleichen. Sofern die Preise zwischen Monte Carlo und analytischer Lösung zu stark abweichen, kann mit einem neuen Simulationslauf sofort gegengesteuert werden. In den Reverse Bonus Zertifikaten ist, wie schon in Kapitel 2 besprochen, eine Up – And – Out – Call Barrier Option enthalten. Die *out of sample* Preise

<sup>80</sup> eine „dazugehörige“ europäische Option verfügt über die gleiche Ausstattung wie die Barrier Option (gleiche Restlaufzeit, gleicher Ausübungspreis, gleicher Basiswert)

von Monte Carlo<sup>81</sup> und analytischer Lösung der dazugehörigen europäischen Kaufoptionen sind in Tabelle 7 abgebildet.

|                              | <b>Black Scholes</b> | <b>Merton</b> | <b>Bates</b> |
|------------------------------|----------------------|---------------|--------------|
| <b>Kaufoption analytisch</b> | 15.574               | 15.795        | 16.997       |
| <b>Kaufoption MC</b>         | 15.620               | 15.933        | 16.932       |

Tabelle 7: Gegenüberstellung zwischen der Monte Carlo Simulation und den analytischen Lösungen

Die Ergebnisse sind aus meiner Sicht recht passabel.

Im nächsten Schritt der Validierung werden nun die Modellpreise mit den Marktpreisen verglichen. Den Anfang macht das Bonus Zertifikat. Tabelle 8 fasst die Ergebnisse zusammen.<sup>82</sup>

|                      | <b>Bonus Zertifikat</b> | <b>16.12.2008</b> |               | <b>23.01.2009</b> |               |
|----------------------|-------------------------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|
|                      |                         | <b>BNP9FR</b>     | <b>BNP9FT</b> | <b>BNP9FR</b>     | <b>BNP9FT</b> |
| <b>BNP Paribas</b>   | <b>Zertifikat</b>       | <b>49.62</b>      | <b>49.34</b>  | <b>43.76</b>      | <b>43.45</b>  |
| <b>Black Scholes</b> | Wert der Kaufoption     | 47.10             | 47.10         | 41.79             | 41.79         |
|                      | Wert der DAOP           | 2.52              | 2.24          | 1.97              | 1.66          |
|                      | Verkaufsoption MC       | 14.86             | 16.68         | 18.14             | 19.67         |
|                      | DAOP analytisch         | 0.97              | 0.91          | 0.52              | 0.64          |
|                      | DAOP MC                 | 0.97              | 0.97          | 0.59              | 0.70          |
|                      | <b>Zertifikat</b>       | <b>48.08</b>      | <b>48.07</b>  | <b>42.38</b>      | <b>42.49</b>  |
| <b>Merton</b>        | Verkaufsoption MC       | 14.94             | 16.96         | 18.30             | 19.65         |
|                      | DAOP MC                 | 1.06              | 0.89          | 0.60              | 0.71          |
|                      | <b>Zertifikat</b>       | <b>48.17</b>      | <b>48.00</b>  | <b>42.39</b>      | <b>42.50</b>  |
| <b>Bates</b>         | Verkaufsoption MC       | 14.15             | 15.33         | 17.37             | 18.16         |
|                      | DAOP MC                 | 0.54              | 0.45          | 0.37              | 0.44          |
|                      | <b>Zertifikat</b>       | <b>47.64</b>      | <b>47.55</b>  | <b>42.16</b>      | <b>42.23</b>  |

Tabelle 8: Gegenüberstellung der Marktpreise mit den Modellpreisen des Bonus Zertifikats

Die Preise von *Merton* und *Black – Scholes* sind beinahe gleich, was eine getrennte Behandlung der Ergebnisse nicht mehr für nötig erscheinen lässt. Deshalb werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur noch die Unterschiede zwischen den Ergebnissen *Black – Scholes* und *Bates* diskutiert.

*Out of sample* sind sowohl *Black – Scholes* Preise als auch *Bates* Preise niedriger als die des Emittenten. *Bates* ist durchwegs noch billiger als *Black – Scholes*. Dieser Trend setzt sich beim Bonus Zertifikat auch in der *out of universe* Probe fort.

<sup>81</sup> diese Preise wurden jeweils beim ersten Simulationslauf errechnet

<sup>82</sup> DAOP = Down – And – Out – Put Barrier Option, MC = Monte Carlo Simulation

Ein gegenläufiges Bild offenbaren die Ergebnisse des Reverse Bonus Zertifikats, wie Tabelle 9 verdeutlicht.<sup>83</sup>

|                      | Reverse Bonus Zertifikat  | 16.12.2008   |              | 23.01.2009   |              |
|----------------------|---------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|                      |                           | BN60S2       | BN2E9H       | BN60S2       | BN2E9H       |
| <b>BNP Paribas</b>   | <b>Zertifikat</b>         | <b>94.40</b> | <b>44.55</b> | <b>97.20</b> | <b>53.12</b> |
| <b>Black Scholes</b> | Verkaufsoption analytisch | 79.89        | 46.13        | 86.03        | 51.65        |
|                      | Kaufoption MC             | 15.62        | 15.79        | 10.93        | 11.56        |
|                      | UAOC analytisch           | 8.58         | 0.82         | 7.73         | 0.99         |
|                      | UAOC MC                   | 8.64         | 0.90         | 7.69         | 1.09         |
|                      | <b>Zertifikat</b>         | <b>88.53</b> | <b>47.03</b> | <b>93.72</b> | <b>52.74</b> |
| <b>Merton</b>        | Verkaufsoption analytisch | 79.89        | 46.03        | 86.01        | 51.44        |
|                      | Kaufoption MC             | 15.93        | 15.47        | 11.20        | 11.36        |
|                      | UAOC MC                   | 8.67         | 0.85         | 7.79         | 1.04         |
|                      | <b>Zertifikat</b>         | <b>88.57</b> | <b>46.88</b> | <b>93.80</b> | <b>52.48</b> |
| <b>Bates</b>         | Verkaufsoption analytisch | 79.37        | 44.08        | 85.94        | 49.90        |
|                      | Kaufoption MC             | 16.93        | 15.76        | 11.91        | 10.94        |
|                      | UAOC MC                   | 15.81        | 2.03         | 11.91        | 2.90         |
|                      | <b>Zertifikat</b>         | <b>95.19</b> | <b>46.11</b> | <b>97.85</b> | <b>52.80</b> |

Tabelle 9: Gegenüberstellung der Marktpreise mit den Modellpreisen des Reverse Bonus Zertifikats

Hier verfehlt *Black Scholes* die Marktpreise recht deutlich. Das Modell von *Bates* hingegen trifft die Preise sowohl *out of sample* als auch *out of universe* besser.

Aus diesem Schritt der Validierung kann der Schluss gezogen werden, dass sich der Aufwand für das Bates Modells gelohnt hat.

Werden nun die Modelle Bates und Black – Scholes erneut gegenübergestellt, kann ein kleiner Schluss bezüglich ihrer „Prognose“ zum weiteren Verlauf des DAX gezogen werden.

|                      |                   | 16.12.2008 |        | 23.01.2009 |        |
|----------------------|-------------------|------------|--------|------------|--------|
|                      |                   | BN60S2     | BN2E9H | BN60S2     | BN2E9H |
| <b>Black Scholes</b> | Kaufoption MC     | 15.62      | 15.79  | 10.93      | 11.56  |
|                      | UAOC MC           | 8.64       | 0.90   | 7.69       | 1.09   |
| <b>Bates</b>         | Kaufoption MC     | 16.93      | 15.76  | 11.91      | 10.94  |
|                      | UAOC MC           | 15.81      | 2.03   | 11.91      | 2.90   |
|                      |                   | BNP9FR     | BNP9FT | BNP9FR     | BNP9FT |
| <b>Black Scholes</b> | Verkaufsoption MC | 14.86      | 16.68  | 18.14      | 19.67  |
|                      | DAOP MC           | 0.97       | 0.97   | 0.59       | 0.70   |
| <b>Bates</b>         | Verkaufsoption MC | 14.15      | 15.33  | 17.37      | 18.16  |
|                      | DAOP MC           | 0.54       | 0.45   | 0.37       | 0.44   |

Tabelle 10: Black – Scholes vs. Bates

<sup>83</sup> UAOC = Up – And – Out – Call Barrier Option, MC = Monte Carlo Simulation

Die Up – And – Out – Call Barrier Optionen sind im Bates Modell deutlich teurer, obwohl die Preise der dazugehörigen europäischen Optionen relativ gesehen weniger von den Black – Scholes Preisen abweichen. Ein konträres Bild ist bei den Down – And – Out – Put Barrier Optionen zu erkennen.

*Bates'* Einstellung zum DAX ist somit pessimistischer, weil die Wahrscheinlichkeit, dass die Up – And – Out – Call Barrier Option verfällt geringer, und die Wahrscheinlichkeit, dass die Down – And – Out – Put Barrier Option „ausgeknockt“ wird höher ist, als im Black – Scholes Modell.

## 7 Conclusio

Ein großer Vorteil von *Bates* ist, dass die kurzfristige implizite Volatilität mit den Sprüngen und die längerfristige mit der Korrelation zwischen Basiswert und Volatilität getrennt gesteuert werden kann. Dies kann durch zwei Durchläufe in der Kalibrierung der Parameter realisiert werden. Zuerst werden die Sprungparameter mit Hilfe von Optionen mit extrem kurzen Restlaufzeiten bestimmt und alle anderen Parameter fixiert. Im zweiten Durchlauf werden dann die Sprungparameter fixiert und die noch ausstehenden Parameter mit Optionen, die eine längere Restlaufzeit besitzen, kalibriert. Durch diese Flexibilität kann das Modell von *Bates* auch in solch turbulenten Zeiten die empirischen impliziten Volatilitätsmiles und Verteilungen der Renditen nachbilden, sofern die Parameter in einem recht kurzen Intervall neu kalibriert werden. Ein großer Kritikpunkt dieses Modells bleibt aber seine Komplexität, weshalb keine geschlossenen Lösungsformeln für exotische Optionen existieren.

Die Annahme, dass die Zuwächse der Basiswerte unabhängig sind, ist aus meiner Sicht nicht hundertprozentig nachvollziehbar. Ein Blick auf die kurzfristigen Kursbewegungen an der Börse in Krisenzeiten zeigt, dass ein Abwärtstrend durch eine steigende Verstimmung der Anleger beschleunigt wird. *Bates'* Modell trifft in diesen Zeiten zwar die Optionspreise, geht aber von nicht aktuellen Annahmen wie beispielsweise dem gleichen Zinssatz für eine Geldanlage und Kreditaufnahme oder uneingeschränkte Leerverkäufe. Dies wird vermutlich auch ein Grund sein, dass das *Bates* Modell durch schlechte Robustheit im Zeitverlauf auffällt.

Für die Kalibrierung wurden die Optionsscheine der BNP Paribas gewählt, weil sie als eine der wenigen am Markt erhältlichen Optionen mit europäischem Ausübungsrecht ausgestattet sind. Von meiner Seite wurde nie überprüft, wie liquide die Märkte für diese Optionsscheine sind. Theoretisch könnte der Markt illiquid sein, was „falsche“ Optionspreise zur Folge hätte. Da sich aber die Preise der Zertifikate während der Handelszeit beinahe sekundlich ändern, vermute ich, dass ein bestimmtes Bewertungsmodell hinter diesen Produkten steckt. Ich vermute, dass die BNP Paribas diese Produkte aus liquideren Finanzinstrumenten repliziert und dem Kunden einfach die Kosten dieser Handelsstrategie plus eine Prämie für ihre Arbeit verrechnen.

## 8 Abbildungsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| Abbildung 1: Auszahlungsfunktionen von europäischen Optionen.....    | 4  |
| Abbildung 2: Auszahlungsfunktion des Bonuszertifikats .....          | 10 |
| Abbildung 3: Auszahlungsfunktion des Reverse Bonus Zertifikats ..... | 13 |
| Abbildung 4: Pfad einer Geometrischen Brownschen Bewegung .....      | 15 |
| Abbildung 5: Pfad eines Compound Poisson Prozesses .....             | 16 |
| Abbildung 6: Pfad eines Jump Diffusion Prozesses.....                | 17 |
| Abbildung 7: Pfad eines Cox – Ingersoll – Ross Prozesses .....       | 18 |

## 9 Tabellenverzeichnis

|   |    |
|---|----|
| Tabelle 1: Ausstattung eines Bonuszertifikates .....  | 8  |
| Tabelle 2: Ausstattung des Reverse Bonus Zertifikats.....   | 11 |
| Tabelle 3: Ausstattung der Bonus Zertifikate.....   | 45 |
| Tabelle 4: Ausstattung der Reverse Bonus Zertifikate.....   | 45 |
| Tabelle 5: Ergebnisse der Kalibrierung.....   | 46 |
| Tabelle 6: Wert der Kostenfunktionen .....  | 47 |
| Tabelle 7: Gegenüberstellung zwischen der Monte Carlo Simulation und den analytischen<br>Lösungen .....   | 48 |
| Tabelle 8: Gegenüberstellung der Marktpreise mit den Modellpreisen des Bonus Zertifikats                  | 48 |
| Tabelle 9: Gegenüberstellung der Marktpreise mit den Modellpreisen des Reverse Bonus<br>Zertifikats ..... | 49 |
| Tabelle 10: Black – Scholes vs. Bates.....  | 49 |

## 10 Literaturverzeichnis

### Literatur

- Albanese, Claudio/Campolieti, Guisepe (2006):** “Advanced derivatives pricing and risk management”, Elsevier Academic Press, Burlington
- Bates, David S. (1996):** “Jumps and stochastic volatility: the exchange rate processes implicit In Deutschemark Options”, Rev. Fin. Studies, Vol. 9, S.69-107
- Black, Fischer/ Scholes, Myron (1973):** “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy, Vol. 3
- Cao, Charles Quanwei/ Bakshi, Gurdip S./ Chen, Ziwu (1997):** „Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models“, The Journal of Finance, Vol. 52, No. 5, S.2003-2049
- Chriss, Neil A. (1997):** “Black-Scholes and beyond”, Irwin, Chicago
- Cont, Rama/Tankov, Peter (2004):** “Financial Modelling With Jump Processes”, Chapman & Hall, London
- Deutsch, Hans-Peter (2004):** „Derivate und Interne Modelle: Modernes Risikomanagement“, 3. Auflage, Schäffer – Poeschel, Stuttgart
- Glasserman, Paul (2004):** “Monte Carlo methods in financial engineering”, Springer, New York
- HSBC Trinkhaus Investment Products (2007):** „Optionsscheine, Zertifikate und strukturierte Produkte: Ein Standardwerk für die zeitgemäße Geldanlage“, 7. Auflage
- Hubalek, Friedrich/ Sgarra, Carlo (2006):** “Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Levy models”, Quantitative Finance, Vol. 6, S.125 – 145
- Hull, John C. (2006):** „Optionen, Futures und andere Derivate“, 6. Auflage, Pearson Studium, München
- Ingber, Lester A. (1995):** “Adaptive simulated annealing (asa): Lessons learned”, Control Cybernetics
- Kou, Steven G. (2001):** “A Jump Diffusion Model For Option Pricing”, Management Science, Vol. 48, S.1086-1101
- Merton, Robert C. (1976):** “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous”, Journal of Financial Economics, Vol. 3, No 1-2, S.125-144
- Schachermayer, Walter (2001):** “Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten“, Vorträge auf dem Weltkongress der Mathematik, Berlin, S.99-111

## **Internetquellen**

[www.onvista.de](http://www.onvista.de)

[www.ariva.de](http://www.ariva.de)

[www.derivate.bnpparibas.com](http://www.derivate.bnpparibas.com)

## 11 Anhang

### 11.1 Anhang A: MATLAB - Codes

Die Codes für die Monte Carlo Simulation für Verkaufs bzw. Kaufoptionen in den Modellen sind bis auf den letzten Teil gleich. So ist bei der Kaufoption jeweils der gesamte Code abgedruckt und bei der Verkaufsoption nur der unterschiedliche Teil.

#### Black – Scholes

##### Variablen

```
%S0      = Startwert des Basiswertes
%K       = Ausübungspreis
%r       = risikoloser Zinssatz
%T       = Restlaufzeit
%vola    = implizite Volatilität
%Anzsim  = Anzahl der Zeitschritte
```

##### Kaufoption

```
function CallBS = BlackScholesCall(S0,K,r,T,vola)

    d1=(log(S0/K)+(r+vola^2/2)*T)/(vola*sqrt(T));
    d2=d1-vola*sqrt(T);

    CallBS=S0*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2);

return
```

##### Kaufoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation

```
function BlackScholesMCCall(S0,K,r,T,vola,Anzsim,H)

n=1000;
deltat=T/n;
Z=randn(n-1,Anzsim);
my=(r-vola^2/2);

S(1,1:Anzsim)=S0;
for j = 1:Anzsim
    for i=2:n
        S(i,j)=S(i-1,j)*exp(my*deltat+Z(i-1,j)*vola*sqrt(deltat));
    end
end

%Preis einer Kaufoption
Callpreis=exp(-r*T)*sum(max(S(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And In Call
C=S;
for j=1:Anzsim
    k=1;
    while C(k,j)<H
```

```

        C(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end
end
%Preis der Up And In Call Option
upandincall=exp(-r*T)*sum(max(C(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And Out Call
D=S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if D(i,j)>H
            D(i:end,j)=0;
        else
            D(i,j)=D(i,j);
        end
    end
end
end
%Preis der Up And Out Call Option
upandoutcall=exp(-r*T)*sum(max(D(n,:)-K,0))/Anzsim
return

```

### Verkaufsoption

```

function PutBS = BlackScholesPut(S0,K,r,T,vola)

    d1=(log(S0/K)+(r+vola^2/2)*T)/(vola*sqrt(T));
    d2=d1-vola*sqrt(T);

    PutBS=-S0*normcdf(-d1)+K*exp(-r*T)*normcdf(-d2);

Return

```

### Verkaufsoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation

```

function BlackScholesMCPut(S0,K,r,T,vola,Anzsim,H)

%Preis einer Verkaufsoption
Putpreis=exp(-r*T)*sum(max(K-S(n,:),0))/Anzsim

%Down And In Put Option
A=K-S;
for j=1:Anzsim
    k=1;
    while A(k,j)<(K-H)
        A(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end
end
end
%Preis der Down And In Put Option
downandinput=exp(-r*T)*sum(max(A(n,:),0))/Anzsim

```

```

%Down And Out Put Option
B=K-S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if B(i,j)>(K-H)
            B(i:end,j)=0;
        else
            B(i,j)=B(i,j);
        end
    end
end

%Preis der Down And Out Put Option
downandoutput=exp(-r*T)*sum(max(B(n,:),0))/Anzsim
return

```

### Barrier Optionen

#### Down – And – Out Put Option

```

function BSdownandinput = BSdownandinputanalytisch(S0,K,r,T,vola,H)

    lambda=(r+vola^2/2)/vola^2;
    y=(log(H^2/(S0*K)))/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);
    y1=log(H/S0)/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);
    x1=log(S0/H)/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);

    if H<K
        BSdownandinput=-S0*normcdf(-x1)+K*exp(-r*T)*normcdf...
            (-x1+vola*sqrt(T))+S0*(H/S0)^(2*lambda)*...
            (normcdf(y)-normcdf(y1))-K*exp(-r*T)*(H/...
            S0)^(2*lambda-2)*(normcdf(y-vola*sqrt(T))-normcdf(...
            y1-vola*sqrt(T)))
        BSdownandoutput=BlackScholesPut(S0,K,r,T,vola)-BSdownandinput
    else
        BSdownandoutput=0
        BSdownandinput=BlackScholesPut(S0,K,r,T,vola)
    end
end

```

#### Up – And – Out Call Option

```

function BSupandincall = BSupandincallanalytisch(S0,K,r,T,vola,H)

    lambda=(r+vola^2/2)/vola^2;
    y=(log(H^2/(S0*K)))/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);
    y1=log(H/S0)/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);
    x1=log(S0/H)/(vola*sqrt(T))+lambda*vola*sqrt(T);

    if H>K
        BSupandincall=S0*normcdf(x1)-K*exp(-r*T)*normcdf...
            (x1-vola*sqrt(T))-S0*(H/S0)^(2*lambda)*...
            (normcdf(-y)-normcdf(-y1))+K*exp(-r*T)*(H/...
            S0)^(2*lambda-2)*(normcdf(-y+vola*sqrt(T))-normcdf(...
            -y1+vola*sqrt(T)))
        BSupandoutcall=BlackScholesCall(S0,K,r,T,vola)-BSupandincall
    else
        BSupandoutcall=0
        BSupandincall=BlackScholesCall(S0,K,r,T,vola)
    end
end

```

## Merton

### Variablen

```
%S0      = Anfangswert des Basiswertes
%K       = Ausübungspreis der Option
%r       = risikoloser Zinssatz der Option
%T       = Restlaufzeit der Option
%vola    = Volatilität des Basiswertes
%delta   = Varianz der Sprunghöhe
%k       = Sprunghöhe
%lambda  = Sprungintensität
%Anzsim  = Anzahl der Simulationsläufe
```

### Kaufoption

```
function Call=MertonCall(S0,K,r,T,vola,delta,m,lambda,N)

k=exp(m+1/2*delta^2)-1;
lambdanorm=lambda*(1+k);
gamma=log(1+k);

Preis=0;
for i = 1:N
    volan = sqrt(vola^2 + i *delta^2/ T);
    rn=r-lambda*k+i*gamma/T;
    Preis = Preis + exp(-lambdanorm*T)*(lambdanorm*T)^i/...
        (factorial(i)).*BlackScholesCall(S0,K,rn,T,volan);
end

Call=Preis;
Return
```

### Kaufoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation

```
function MertonMCCall(S0,K,r,T,vola,delta,m,lambda,Anzsim,H)
n=1000;
deltat=T/n;

S=zeros(n,Anzsim);
S(1,1:Anzsim)=S0;

Wt=vola*randn(n-1,Anzsim);
my=r-vola^2/2-m*lambda;

Poiss=poissrnd(lambda*T,Anzsim,1);

sprungzeiten=zeros(max(Poiss),1);
sprung=zeros(size(sprungzeiten));
for j = 1:Anzsim
    Normrand=randn(Poiss(j),1);
    sprungzeiten(1:Poiss(j),j)=sort(round(n*rand(Poiss(j),1)))+1;
    sprung(1:Poiss(j),j)=exp(log(1+m)-delta^2/2+delta^2.*Normrand)-1;
end

Compound=zeros(size(S));
for i=1:Anzsim
    for j=1:Poiss(i)
        Compound(sprungzeiten(j,i),i)=sprung(j,i);
    end
end
```

```

    end
end

for j = 1:Anzsim
    for i=2:n
        S(i,j)=S(i-1,j)*exp(my*deltat+Wt(i-1,j)*sqrt(deltat)+...
            Compound(i-1,j));
    end
end

%Preis der Kaufoption
mertoncall=exp(-r*T)*sum(max(S(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And In Call
C=S;
for j=1:Anzsim
    k=1;
    while C(k,j)<H
        C(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end
end
%Preis der Up And In Call Option
upandincall=exp(-r*T)*sum(max(C(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And Out Call
D=S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if D(i,j)>H
            D(i:end,j)=0;
        else
            D(i,j)=D(i,j);
        end
    end
end
end
upandoutcall=exp(-r*T)*sum(max(D(n,:)-K,0))/Anzsim
return

```

### Verkaufsoption

```

function Put=MertonPut(S0,K,r,T,vola,delta,m,lambda,N)

    Put=MertonCall(S0,K,r,T,vola,delta,m,lambda,N)+K*exp(-r*T)-S0;

return

```

### Verkaufsoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation

```

function MertonMCPut(S0,K,r,T,vola,delta,m,lambda,Anzsim,H)

%Preis der Put Option
mertonput=exp(-r*T)*sum(max(K-S(n,:),0))/Anzsim

%Down And In Put Option
A=K-S;
for j=1:Anzsim

```

```

    k=1;
    while A(k,j)<(K-H)
        A(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end

%Preis der Down And In Put Option
downandinput=exp(-r*T)*sum(max(A(n,:),0))/Anzsim

%Down And Out Put Option
B=K-S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if B(i,j)>(K-H)
            B(i:end,j)=0;
        else
            B(i,j)=B(i,j);
        end
    end
end

%Preis der Down And Out Put Option
downandoutput=exp(-r*T)*sum(max(B(n,:),0))/Anzsim
return

```

## Bates

### Variablen

```

%S0 = Wert des Basiswertes zum Zeitpunkt 0
%K = Ausübungspreis
%r = risikoloser Zinssatz
%T = Restlaufzeit
%V0 = Startwert der Volatilität
%xi = Mean Reversion-Intensität der Volatilität
%eta = Mean Reversion-Niveau der Volatilität
%theta = Diffusionskoeffizient der Volatilität
%rho = Korrelation
%lambda = Sprungintensität des Poisson Prozesses
%kquer, so dass die Sprunghöhe k
%delta = Varianz der lognormalverteilten Sprunghöhe

```

### Kaufoption

```

function Call = BatesCall(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta)

    Call = S0*BatesP(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,1) -
    K*exp(-r*T)*BatesP(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,2);

return

function ret = BatesP(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,typ)

    ret = 1/2+1/pi*quadr1(@Batesintegral,0,100,[],[],S0,K,r,T,V0,xi,eta,...

```

```

theta,rho,lambda,kquer,delta,typ);

return

function ret = Batesintegral(phi,S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,...
kquer,delta,typ)

ret = real(exp(-i*phi*log(K)).*Batesf(phi,S0,r,T,V0,xi,eta,...
theta,rho,lambda,kquer,delta,typ)./(i*phi));

return

function f = Batesf(phi,S0,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,typ)

if typ ==1
gamma = sqrt((xi-(1+phi.*i)*rho*theta).^2-phi.*i.*(phi.*i+1)*theta.^2);
f = exp(-phi.*i*log(exp(-r*T))-xi*eta/theta^2.*(2*log...
(1-(gamma-xi+(1+phi.*i).*rho*theta).*(1-exp(-gamma*T))./...
(2*gamma)))-T*xi*eta/theta^2.*(gamma-xi+(1+phi.*i).*rho...
*theta)+phi.*i*log(S0)+lambda*(1+kquer)*T.*(1+kquer).^...
(phi.*i).*exp(phi.*i./2.*(1+phi.*i).*delta^2)-1)...
-phi.*lambda*i*kquer*T+(phi.*i.*(phi.*i+1).*(1-exp(-...
gamma*T)))./(2*gamma-(gamma-xi+(1+i.*phi).*rho*...
theta).*(1-exp(-gamma*T))).*V0);
else
gamma = sqrt((xi-phi.*rho*theta*i).^2-phi.*i.*(phi.*i-1).*theta^2);
f = exp(-phi.*i*log(exp(-r*T))-xi*eta/theta^2.*(2*log...
(1-(gamma-xi+phi.*i*rho*theta).*(1-exp(-gamma*T))./(2*gamma)))...
-T*xi*eta/theta^2.*(gamma-xi+phi.*i*rho*theta...
)+phi.*i*log(S0)+lambda*T.*(1+kquer).^(phi.*i).*exp...
(phi.*i./2.*(phi.*i-1).*delta^2)-1)-phi.*lambda*i*kquer*T...
+(phi.*i.*(phi.*i-1).*(1-exp(-gamma*T)))./(2*gamma...
-(gamma-xi+i.*phi*rho*theta).*(1-exp(-gamma*T))).*V0);
end

return

```

### Verkaufsoption

```

function Put = BatesPut(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta)

Put=BatesCall(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta)+...
K*exp(-r*T)-S0;

```

Return

### Kaufoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation

```

function
BatesMCCall(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,Anzsim,H)

n=1000;
deltat=T/n;
S=zeros(n,Anzsim);
S(1,1:Anzsim)=S0;
V=zeros(n,Anzsim);
V(1,1:Anzsim)=V0;
Z1=randn(n-1,Anzsim);
Z2=rho.*Z1+sqrt(1-rho*rho).*Z1;

```

```

Poisson=poissrnd(lambda*T,Anzsim,1);
sprungzeiten=zeros(max(Poisson),1);
sprung=zeros(size(sprungzeiten));

for j = 1:Anzsim
    sprungzeiten(1:Poisson(j),j)=sort(round(n*rand(Poisson(j),1)))+1;
    Normrand=randn(Poisson(j),1);
    sprung(1:Poisson(j),j)=exp(log(1+kquer)-delta^2/2+delta^2.*Normrand)-1;
end

Compound=zeros(size(S));
for i=1:Anzsim
    for j=1:Poisson(i)
        Compound(sprungzeiten(j,i),i)=sprung(j,i);
    end
end

for j=1:Anzsim
    for i=2:n
        V(i,j)=V(i-1,j)+xi*(eta-V(i-1,j))*deltat+theta*sqrt(V(i-1,j))*...
            *sqrt(deltat)*Z2(i-1,j);
    end
end

V=abs(V);

my=r-lambda*kquer;

for j = 1:Anzsim
    for i=2:n
        S(i,j)=S(i-1,j)*exp((my-1/2*V(i-1,j))*deltat+...
            sqrt(V(i-1,j))*Z1(i-1,j)*sqrt(deltat)+ Compound(i-1,j));
    end
end

%Preis einer Kaufoption
Callpreis=exp(-r*T)*sum(max(S(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And In Call
C=S;
for j=1:Anzsim
    k=1;
    while C(k,j)<H
        C(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end

%Preis der Up And In Call Option
UAIC=exp(-r*T)*sum(max(C(n,:)-K,0))/Anzsim

%Up And Out Call
D=S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if D(i,j)>H

```

```

        D(i:end,j)=0;
    else
        D(i,j)=D(i,j);
    end
end
end
end
%Preis der Up And Out Call Option
UAOC=exp(-r*T)*sum(max(D(n,:)-K,0))/Anzsim
Return

```

### *Verkaufsoption und Barrier Option mit Monte Carlo Simulation*

```

function
BatesMCCall(S0,K,r,T,V0,xi,eta,theta,rho,lambda,kquer,delta,Anzsim,H)

%Preis einer Verkaufsoption
Putpreis=exp(-r*T)*sum(max(K-S(n,:),0))/Anzsim

%Down And In Put Option
A=K-S;
for j=1:Anzsim
    k=1;
    while A(k,j)<(K-H)
        A(k,j)=0;
        k=k+1;
        if k==n+1;
            break
        end
    end
end
end

%Preis der Down And In Put Option
downandinput=exp(-r*T)*sum(max(A(n,:),0))/Anzsim

%Down And Out Put Option
B=K-S;
for j=1:Anzsim
    for i=1:n
        if B(i,j)>(K-H)
            B(i:end,j)=0;
        else
            B(i,j)=B(i,j);
        end
    end
end
end

%Preis der Down And Out Put Option
downandoutput=exp(-r*T)*sum(max(B(n,:),0))/Anzsim
return

```

**11.2 Anhang B: Optionsdaten**

| <b>S0</b> | <b>K</b> | <b>r</b> | <b>T</b> | <b>ø - Preis</b> | <b>Geld</b> | <b>Brief</b> |
|-----------|----------|----------|----------|------------------|-------------|--------------|
| 47.1      | 35       | 1.80%    | 0.51     | 15.41            | 15.4        | 15.42        |
| 47.1      | 38       | 1.80%    | 0.51     | 13.06            | 13.05       | 13.07        |
| 47.1      | 40       | 1.80%    | 0.51     | 11.57            | 11.56       | 11.58        |
| 47.1      | 43       | 1.80%    | 0.51     | 9.46             | 9.45        | 9.47         |
| 47.1      | 45       | 1.80%    | 0.51     | 8.14             | 8.13        | 8.15         |
| 47.1      | 47       | 1.80%    | 0.51     | 6.91             | 6.9         | 6.92         |
| 47.1      | 49       | 1.80%    | 0.51     | 5.77             | 5.76        | 5.78         |
| 47.1      | 50       | 1.80%    | 0.51     | 5.23             | 5.22        | 5.24         |
| 47.1      | 52       | 1.80%    | 0.51     | 4.25             | 4.24        | 4.26         |
| 47.1      | 55       | 1.80%    | 0.51     | 2.98             | 2.97        | 2.98         |
| 47.1      | 58       | 1.80%    | 0.51     | 2.02             | 2.01        | 2.02         |
| 47.1      | 60       | 1.80%    | 0.51     | 1.53             | 1.52        | 1.53         |
| 47.1      | 35       | 1.82%    | 0.77     | 16.12            | 16.11       | 16.13        |
| 47.1      | 38       | 1.82%    | 0.77     | 13.87            | 13.86       | 13.88        |
| 47.1      | 40       | 1.82%    | 0.77     | 12.45            | 12.44       | 12.46        |
| 47.1      | 43       | 1.82%    | 0.77     | 10.42            | 10.41       | 10.43        |
| 47.1      | 45       | 1.82%    | 0.77     | 9.33             | 9.32        | 9.34         |
| 47.1      | 47       | 1.82%    | 0.77     | 8.14             | 8.13        | 8.15         |
| 47.1      | 49       | 1.82%    | 0.77     | 7.02             | 7.01        | 7.03         |
| 47.1      | 50       | 1.82%    | 0.77     | 6.75             | 6.74        | 6.76         |
| 47.1      | 52       | 1.82%    | 0.77     | 5.76             | 5.75        | 5.77         |
| 47.1      | 55       | 1.82%    | 0.77     | 4.44             | 4.43        | 4.45         |
| 47.1      | 58       | 1.82%    | 0.77     | 3.46             | 3.45        | 3.47         |
| 47.1      | 60       | 1.82%    | 0.77     | 2.83             | 2.82        | 2.84         |
| 47.1      | 35       | 1.89%    | 1.02     | 16.78            | 16.77       | 16.79        |
| 47.1      | 38       | 1.89%    | 1.02     | 14.61            | 14.6        | 14.62        |
| 47.1      | 40       | 1.89%    | 1.02     | 13.22            | 13.21       | 13.23        |
| 47.1      | 43       | 1.89%    | 1.02     | 11.25            | 11.24       | 11.26        |
| 47.1      | 45       | 1.89%    | 1.02     | 10.09            | 10.08       | 10.1         |
| 47.1      | 47       | 1.89%    | 1.02     | 8.92             | 8.91        | 8.93         |
| 47.1      | 49       | 1.89%    | 1.02     | 7.81             | 7.8         | 7.82         |
| 47.1      | 50       | 1.89%    | 1.02     | 7.29             | 7.28        | 7.3          |
| 47.1      | 52       | 1.89%    | 1.02     | 6.30             | 6.29        | 6.31         |
| 47.1      | 55       | 1.89%    | 1.02     | 4.96             | 4.95        | 4.97         |
| 47.1      | 58       | 1.89%    | 1.02     | 3.83             | 3.82        | 3.84         |
| 47.1      | 60       | 1.89%    | 1.02     | 3.18             | 3.17        | 3.19         |
| 47.1      | 35       | 2.10%    | 2.03     | 19.24            | 19.23       | 19.25        |
| 47.1      | 38       | 2.10%    | 2.03     | 17.34            | 17.33       | 17.35        |
| 47.1      | 40       | 2.10%    | 2.03     | 16.24            | 16.23       | 16.25        |
| 47.1      | 43       | 2.10%    | 2.03     | 14.50            | 14.49       | 14.51        |
| 47.1      | 45       | 2.10%    | 2.03     | 13.39            | 13.38       | 13.4         |
| 47.1      | 47       | 2.10%    | 2.03     | 12.33            | 12.32       | 12.34        |
| 47.1      | 49       | 2.10%    | 2.03     | 11.52            | 11.51       | 11.53        |
| 47.1      | 50       | 2.10%    | 2.03     | 11.03            | 11.02       | 11.04        |
| 47.1      | 52       | 2.10%    | 2.03     | 10.08            | 10.07       | 10.09        |
| 47.1      | 55       | 2.10%    | 2.03     | 8.76             | 8.75        | 8.77         |
| 47.1      | 58       | 2.10%    | 2.03     | 7.54             | 7.53        | 7.55         |
| 47.1      | 60       | 2.10%    | 2.03     | 6.79             | 6.78        | 6.8          |

