DIPLOMARBEIT

KONTROLLIERTE STEUERUNGSMODELLE FÜR OPTIMALE DIVIDENDENAUSZAHLUNG

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Anita Soszynska
Oswald-Redlichstr. 21-22/23/6
1210 Wien

Datum

Unterschrift

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die Betreuung dieser Diplomarbeit und für die kritische und genaue Durchsicht der Ausarbeitung.
Vor allen für seine Ruhe und sein Verständnis bei jeglichen Problemen, die während dieser Diplomarbeit und mit dieser Diplomarbeit anstanden.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken. Für die vielfältigen Arten der Unterstützung, die ich durch jedes einzelne Mitglied mein Leben lang erhalten durfte.

Ich habe zur Kenntnis genommen, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

DIPLOMARBEIT

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Ich erkläre weiters an Eides statt, dass ich meine Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen selbstständig ausgeführt habe und alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur genannt habe.

Wien, im Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

Notation

$:=$	per definition gleich
$\equiv$	kongruent
$\sim$	ungefähr, ähnlich
$\{a, b, c\}$	Menge aus den Elementen a,b,c
(a, b)	geordnetes Paar
(a, b, c)	geordnetes Tripel
$\mathbf{N}$	$=\{1, 2, 3, ...\}$; Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbf{N}_0$	$=\{0, 1, 2, ...\}$; Menge der natürlichen Zahlen mit der Zahl 0
$\mathbf{R}$	Menge der rellen Zahlen
$\mathbf{R}_+$	$=\{x \mid x\epsilon\mathbf{R}, x > 0\}$; Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbf{L}_1$	Menge der integrierbaren Funktionen
$\mathbf{E}$	Erwartungswert
$\mathbf{P}$	Wahrscheinlichkeit
(a_n)	$=(a_1, a_2, ...)$; Folge, Zahlenfolge
$\lim_{x\to a} f(x)$	Grenzwert (Limes) der Funktion f(x) für x gegen a
$f'(x)$	Ableitung der Funktion f(x)

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit führt in ein klassisches Problem der Versicherungsmathematik ein, und zwar die optimale Dividendenauszahlungsstrategie.
Das Hauptziel ist es das Problem zu formulieren und innerhalb eines vernünftigen mathematischen Rahmen zu lösen. Grob gesagt ist die Idee die dynamische Auszahlung (je nach Reservestand) so zu wählen dass die Ertragsfunktion optimiert wird.

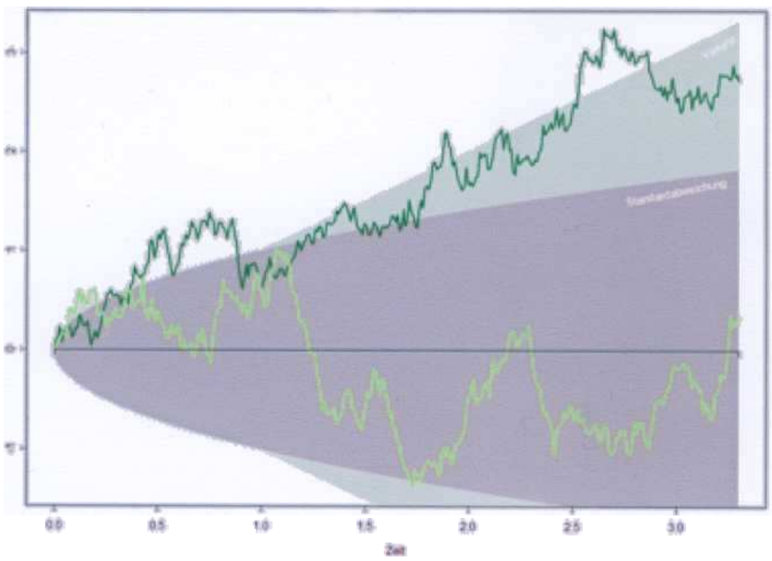
Diese Arbeit gliedert sich in drei Abschnitte.

Im ersten Abschnitt werden alle notwendigen Begriffe und Sätze zur Verfügung gestellt, die für das Verständnis und die Beweise benötigt werden. Diese bewusste Entscheidung zur Ausführlichkeit auch bei grundlegenden Dingen hat zwei Hintergründe: Zum einem bleibt die Arbeit damit auch für Leser mit geringen Vorkenntnissen interessant, zum anderen werden dadurch Verwirrungen aufgrund unterschiedlicher Interpretationen eines Begriffs vermieden.
Im ersten Abschnitt wurde folgende Literatur verwendet: J. Teichmann: A course in mathematical finance; Seydel: Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer; J.Creutzig: Stochastische Analysis; K. Grill: Theorie stochastischer Prozesse.

Im zweiten Abschnitt wird das Problem, die optimale Dividendenauszahlungsstrategie, formuliert und innerhalb eines vernüftigen mathematischen Rahmens gelöst. Die Idee ist es, die dynamische Auszahlung so zu wählen, dass die Ertragsfunktion optimiert wird.
Dieser Arbeit liegt der zweite Abschnitt des im Dezember 1995 in der Reihe 'Insurance: Mathematics and Economics' veröffentlichten Artikels 'Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out' zu Grunde.

Der letzte Abschnitt behandelt die Programmierung einiger Barrieretypen, die untersuchet werden. Hierbei wurde folgende Literatur verwendet: Seydel: Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer; A.Schmidt, K.Hornik, C.Bernscherer, K.Grill: Wahrscheinlichkeitstheorie.

Grundlagen und Begriffsdefinitionen



1 Stochastische Prozesse

1.1 Stochastische Prozesse und Filtration

Definition 1.1 (Stochastischer Prozess) [1]
Ein stetiger stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $X(t)$, die für die stetige Zeit t definiert sind. Das heisst, $t \epsilon \mathbf{R}$ variiert kontinuierlich in einem Zeitintervall I.

Eine häufige Bezeichung für einen stochastischen Prozess ist X_t, oder $(X_t)_{t \epsilon I}$.

Spezielle Eigenschaften bei Stochastischen Prozessen haben zu folgenden Namen geführt:

- Gauß-Prozess: X_t ist normalverteilt für alle $t \epsilon I$.
- Markov-Prozess: Nur der augenblickliche Wert von X ist relevant für das zukünftige Verhalten; das heisst die Vergangenheit ist bereits im augenblicklichen Wert berücksichtigt.

Ein Beispiel für einen Prozess, der sowohl Gauß-Prozess als auch Markov-Prozess ist, ist der Wiener-Prozess (wird später noch erklärt).

Definition 1.2 (Filtration) [2]
Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \epsilon T}$ von Sigmaalgebren heisst eine Filtration, wenn für $s < t$ $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ gilt. Ist insbesondere $X(t_0)_{t \epsilon T}$ ein stochastischer Prozess und $\mathcal{F}_t$ die Sigmaalgebra, die von den Zufallsvariablen $X(s)$ mit $s \leq t$ erzeugt wird, dann nennt man $(\mathcal{F}_t)_{t \epsilon T}$ die natürliche Filtration von X.

Der Prozess $X(t)$ heisst adaptiert[3] an die Filtration $\mathcal{F}_t$, wenn für jedes $t \epsilon T$ die Zufallsvariable $X(t)$ bezüglich $\mathcal{F}_t$ messbar ist.

[1] R.Seydel: Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer
[2] K.Grill: Theorie stochastischern Prozesse
[3] "Adaptiert" bedeutet "mit der Informationsstruktur" verträglich. Bei einem adaptierten Prozess ist X_t zum Zeitpunkt t bekannt.

Definition 1.3 (c*á*dl*à*g-Prozess) [4]

1 *Die Abbildungen* $t \mapsto X_t(\omega)$ *heissen Pfade oder Trajektorien von* X. X *heisst linksseitig stetig, rechtsseitig stetig usw., falls alle Pfade diese Eigenschaft haben.*
X *heisst cádlàg-Prozess (continu á droite avec des limites à gauche), falls* X *rechtsseitig stetig ist und linksseitige Grenzwerte besitzt. In diesem Fall seien*

$$X_{t-} := \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{s \uparrow t} X_s & \text{für } t > 0 \\ X_0 & \text{für } t = 0 \end{array} \right\},$$

$$\Delta X_t := X_t - X_{t-} \quad (\text{Sprung von } X \text{ zum Zeitpunkt } t)$$

und Prozesse

$$X_- := (X_{t-})_{t \epsilon \mathbf{R}_+}$$
$$\Delta X_t := (\Delta X_t)_{t \epsilon \mathbf{R}_+}$$

definiert.

2 *Das Bildmass* $P^X = \mathcal{L}(X)$ *von* $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}^{\mathbf{R}_+}$ *heisst Verteilung von X.* $\{P^{(X_{t_1,\ldots,t_n})} : n \epsilon \mathbf{N}; t_1, \ldots, t_n \epsilon \mathbf{R}_+\}$ *heisst Familie der endlich dimensionalen Randverteilungen von* X.

Definition 1.4 *Zwei stochastische Prozesse* X, Y *heissen*

- *ununterscheidbar, falls*
$$\forall t \epsilon I : X_t = Y_t.$$
- *Modifikationen (Versionen) voneinander, falls*
$$\forall t \epsilon I : \mathbf{P}(\{X_t = Y_t\}) = 1.$$

Definition 1.5 *Ein Prozess heisst progressiv messbar bezüglich einer Filtration* $(\mathcal{F})_{t \epsilon I}$, *falls für alle* $t \geq 0$ *die Abbildung*

$$X : [0, t] \times \Omega \rightarrow S, \quad (s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$$

$\mathcal{B}^5([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$*-messbar ist.*

[4] J.Creutzig: Stochastische Analysis
[5] $\mathcal{B}$ ist eine Borelsche Sigmaalgebra

Stoppzeiten

Stoppzeiten werden auch Optionszeiten oder Markov-Zeiten genannt. Oft wird bei Beobachtungen eines zufälligen Prozesses auf das Eintreten eines vom Prozessverlauf abhängigen Ereignisses gewartet. Zur Modellierung solcher Ereignisse werden Stoppzeiten erklärt und untersucht.

Gegeben sei der Prozess $X = (X_t)_{t\epsilon I}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ und die Abbildungen $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$ werden betrachtet.

Definition 1.6 (Stoppzeit) [6]

(i) *Eine Zufallsvariable T heisst Stoppzeit (bzgl. $\mathcal{F}$), falls $\forall t\epsilon I : \{T \leq t\}\epsilon\mathcal{F}_t$ gilt.*

(ii) *Eine Zufallsvariable T heisst optionale Zeit (bzgl. $\mathcal{F}$), falls $\forall t\epsilon I : \{T < t\}\epsilon\mathcal{F}_t$ gilt.*

Das heisst, die Stoppzeit hängt nur von der Vergangenheit ab. $T \leq t$ ist so zu interpretieren, dass die in T gespeicherte Information keinen Vorgriff auf die Zukunft beinhaltet. Dabei repräsentiert $\mathcal{F}_t$ die Entwicklung des "zufälligen Geschehens bis zum Zeitpunkt T".

1.2 Brownsche Bewegung

1827 wurde die Brownsche Bewegung erstmals von R. Brown beobachtet. Die fundierte erste mathematische Beschreibung "Wiener Prozess" wurde 1923 von Norbert Wiener entwickelt. Brownsche Bewegung wird auch als Wiener Prozess bezeichnet und auch als Abkürzung BB geschrieben.

Definition der Brownschen Bewegung
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, der aus der Grundmenge Ω, der σ-Algebra $\mathcal{F}$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ besteht, und es gelte

- $(B_t)_{t\geq 0}$ sei ein stochastischer Prozess,
- B_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar.

[6] J.Teichmann: A course in mathematical finance

Definition 1.7 (Brownsche Bewegung) [7]
$(B_t)_{t\geq 0}$ heisst Brownsche Bewegung, falls für konstante Varianzen σ^2 folgendes gilt:

1 $B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t) \qquad \forall s \geq 0, \forall t > 0,$

das heisst, dass B_t normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{E}(B_t) = 0$ und Varianz $Var(B_t) = \mathbf{E}(B_t^2) = \sigma^2 t$ ist,

Für $\sigma^2 = 1$ ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard (oder Normale) Brownsche Bewegung.

2 *$\forall n \geq 1$, für alle aufsteigenden Zeitpunkte $t_1, \ldots, t_n : (B_{t_r} - B_{t_{r-1}})$ voneinander unabhängig für $r = 1, \ldots, n$. Die Inkremente sind unabhängig.*

3 *$B_0 = 0$ (Ist eine Konvention),*

4 *B_t ist stetig für alle $t \geq 0$, (folgt aus (1) bis (3)).*

Weitere Eigenschaften der Brownschen Bewegung

- Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist sie nirgends differenzierbar.
- Die Totalvariation ist unendlich.
  Die quadratische Variation ist endlich, die Integration ist schwierig , aber möglich.
- Sie hat "rauhe" Pfade.
- Die Brownsche Bewegung ist ein Fraktal (das heisst, sie ist skalierungsunabhängig).

Starke Markov Eigenschaft

Wenn $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist, dann ist auch $(B_{T+t} - B_T)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung für eine Stoppzeit T.

Definition 1.8 *$B_t^\mu = B_t + \mu t$ ist eine "Brownsche Bewegung mit Drift" mit $\mu \epsilon \mathbf{R}$.*

[7] J.Teichmann: A course in mathematical finance

Transformation und Skalierung der Brownschen Bewegung:
Wenn (B_t) eine Brownsche Bewegung ist, dann auch

1 $(tB_{\frac{1}{t}})_{t\geq 0}$, wobei $tB_{\frac{1}{t}} = 0$ für $t = 0$,

2 $(B_s - B_{s-t}, 0 \leq t \leq s)$ für ein fixes s,

3 $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ für $c\epsilon\mathbf{R}$.

Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung[8]

- **Symmetrie** $(-B_t)_{t\epsilon I}$ ist eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ mit Startwert 0.

- **Skalierungsinvarianz** Für jedes $c > 0$ definiert

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{c\cdot t}, \quad t\epsilon I,$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_{c\cdot t})_{t\epsilon I}$ mit Startwert 0.

- **Projektive Spiegelung bei t=∞** Durch

$$X_t = \left\{ \begin{array}{ll} t \cdot B(\frac{1}{t}) & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{array} \right\}$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F})_{t\epsilon I}$ mit Startwert 0.

- **Zeitumkehr** Für jedes $T > 0$ wird durch

$$X_t = B_T - B_{T-t}, \quad t\epsilon[0, T],$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0, T]$ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon[0,T]}$ mit Startwert 0.

- **Starkes Gesetz der grossen Zahlen**

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad P - f.s.$$

- **Gesetz vom iterierten Logarithmus**

$$\lim sup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \cdot lnlnt}} \quad P - f.s.$$

[8] J. Creutzig: Stochastische Analysis

1.3 Martingal

Die Theorie der Martingale wurde von J.L.Doob begründet. Ein wichtiges Beispiel für ein Martingal ist die Brownsche Bewegung.

Definition 1.9 (Martingal) [9]
Ein Prozess $X(t)$ heisst Martingal, wenn

- $\mathbf{E}(\mid X(t) \mid) \forall t \epsilon I$ *endlich ist,*
- $X(t)$ *apaptiert an die Filtration ist,*
- *für* $s < t : \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s)$ *gilt.*

Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen sind Martingale, wenn die Zuwächse Erwartungswert Null haben.

Gegeben sei eine Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ und ein adaptierter reellwertiger Prozess $X = (X_t)_{t\epsilon I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit

$$\forall t\epsilon I : \mathbf{E}(|X_t|) < \infty.$$

Eine häufige Bezeichnung ist $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$, fall X an $\mathcal{F}$ adaptiert ist.

Definition 1.10 (Submartingal) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *ist ein Submartingal, falls*

$$\forall s, t\epsilon I : s < t \Rightarrow X_s \leq \mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t).$$

Definition 1.11 (Supermartingal) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *ist ein Supermartingal, falls*

$$\forall s, t\epsilon I : s < t \Rightarrow X_s \geq \mathbf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t).$$

[9] K.Grill: Theorie stochatischer Prozesse

Martingale in diskreter Zeit

Zunächst sei $I = \mathbf{N}_0$.

Satz 1.1 *$(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ ist ein Martingal genau dann, wenn für alle beschränkten Stoppzeiten gilt:*

$$\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0).$$

Satz 1.2 *Sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ ein Martingal und T die Stoppzeit mit*

$$\mathbf{P}(T < \infty) = 1, \quad \mathbf{E}(|X_T|) < \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{t \to \infty} \int_{\{T > t\}} |X_t| d\mathbf{P} = 0.$$

Dann gilt

$$\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0).$$

Satz 1.3 (Doobsche Zerlegung) *Für*

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} (X_s - \mathbf{E}(X_s \mid \mathcal{F}_{s-1})) + X_0, \qquad A_t = \sum_{s=1}^{t} (\mathbf{E}(X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) - X_{s-1})$$

gilt

(i) $X_t = M_t + A_t$,

(ii) $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ *ist ein Martingal,*

(iii) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ *ist ein Submartingal* $\Leftrightarrow$ $(A_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ *ist P-f.s monoton wachsend.*

Satz 1.4 *Sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \epsilon \mathbf{N}_0}$ ein Submartingal. Für beschränkte Stoppzeiten $S \leq T$ gilt*

$$X_S \leq \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S)$$

und somit

$$\mathbf{E}(X_S) \leq \mathbf{E}(X_T).$$

Im Martingal-Fall gilt jeweils Gleichheit.

Satz 1.5 (Erster Doobscher Konvergenzsatz)
Jedes Supermartingal $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ welches der Bedingung: $\sup_{t\epsilon I} \mathbf{E}(X_{t^-})$ oder der hierzu äquivalenten Bedingung (der L_1-Beschränktheit): $\sup_{t\epsilon I} \mathbf{E}(|X_t|)$ genügt, konvergiert fast sicher gegen eine integierbare $\mathcal{F}_\infty$-messbare reelle Zufallsvariable X_∞.

Martingale in stetiger Zeit

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

Satz 1.6 (Optional Stopping)
Es sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ ein (Super-)Martingal und T eine beliebige Stoppzeit bezüglich de Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$. Dann ist auch $(X_{T\wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ ein (Super-)Martingal.

Die folgenden Begriffe und Ergebnisse sind grundlegend bei der Einführung des stochastischen Integrals.
Im folgenden bedeutet "$\mathcal{F}$ erfüllt die üblichen Voraussetzungen", falls gilt:

(i) $\mathcal{F}$ rechtsseitig stetig[10] und

(ii) $\{A \subset \Omega : \exists B \epsilon \mathcal{F} : A \subset B \quad \textit{und} \quad \mathbf{P}(B) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

Erfüllt seien

(i) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ Submartingal,

(ii) $t \mapsto \mathbf{E}(X_t)$ rechtsseitig stetig,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert eine *cádlàg* Modifikation Y von X, sodass $(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ ein Submartingal ist.

Definition 1.12 $(A_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *ist wachsend, falls*

(i) $A_0 = 0$,

[10] rechtsseitig stetig bedeutet, dass alle Pfade von X_t rechtsstetig sind

(ii) A besitzt rechtsseitig stetige, monoton wachsende Pfade,

(iii) $\forall t\epsilon I : \mathbf{E}(A_t) < \infty$.

Es wird nun erstmals bezüglich eines stochastischen Prozesses integriert. Sei $(A_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ wachsend und $(X_t)_{t\epsilon I}$ messbar, dann sind die Lebesgue-Stieltjes-Integrale

$$I_t(\omega) = \int_0^t X_s^{\pm}(\omega) dA_s(\omega), \omega\epsilon\Omega,$$

für $t\epsilon I$ wohldefiniert. Sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ progressiv messbar und gelte

$$\forall\omega\epsilon\Omega : I_t^{\pm}(\omega) < \infty.$$

Dann ist

$$I_t(\omega) = I_t^+(\omega) - I_t^-(\omega), \omega\epsilon\Omega,$$

für $t\epsilon I$ wohldefiniert, rechtsseitig stetig und progressiv messbar.

Satz 1.7 (Doob-Meyer-Zerlegung)
Erfüllt seien

(i) $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *stetiges Submartingal,*

(ii) $\forall t\epsilon I : X_t \geq 0$,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert ein stetiges Martingal $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *und ein stetiger wachsender Prozess* $(A_t, \mathcal{F}_t)_{t\epsilon I}$ *mit*

$$\forall t\epsilon I \quad \forall\omega\epsilon\Omega : \quad X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega).$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit[11].

[11]Zwei Prozesse M und A heißen ununterscheidbar, wenn $\mathbf{P}(M_t = A_t, \forall t\epsilon[0,T]) = 1$.

2 Stochastische Differentialgleichungen

2.1 Itô-Prozesse

Der japanische Mathematiker Kiyoshi Itô untersuchte stochastische Prozesse und legte in zwei 1944 und 1946 erschienenen Arbeiten die Grundlage für die Theorie der stochastischen Integration und der stochastischen Differentialgleichungen fest. Deshalb gilt Kiyoshi Itô heute als Begründer der stochastischen Analysis.

Die Ideen Itôs haben in vielen Bereichen der Natur- und Wirtschaftswissenschaften Anwendung gefunden. Nach Itô sind der Itô-Prozess, das Lemma von Itô und die Itô-Isometrie benannt.

Stochastische Differentialgleichung
Der Begriff der stochastischen Differentialgleichung verallgemeinert den Begriff der gewöhnlichen Differentialgleichung auf stochastische Prozesse.

Stochastische Differentialgleichungen werden auf verschiedenen Feldern der mathematischen Modellierung verwendet, um gewöhnliche (das heisst deterministische, vorhersehbare) Prozesse zu simulieren, die zusätzlich von aussen durch stochastische Störfaktoren (Rauschen) beeinflusst werden.

Von der Differential- zur Integralrechnung
Genau wie bei deterministischen Funktionen möchte man auch bei stochastischen Prozessen den Zusammenhang zwischen dem Wert der Funktion und ihrem zukünftigen Verlauf (ihrer Ableitung) in einer Gleichung formulieren. Was in einem Fall zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung führt, ist im anderen Fall problematisch, da Itô-Prozesse im allgemeinen nirgends differenzierbar sind.

Doch lässt sich eine (autonome) Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t))$$

immer auch äquivalent als Integralgleichung

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(\tau))d\tau$$

schreiben, die ohne explizite Erwähung der Ableitung auskommt. Bei der stochastischen Differentialgleichung geht man nun den umgekehrten Weg, das heißt, man erklärt eine Differentialgleichung an Hand der dazugehörigen Integralgleichung.

Die Formulierung
Es seien zwei Funktionen

$$a, b : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$$

sowie eine Brownsche Bewegung

$$(W_t), t \geq 0$$

gegeben. Die dazugehörige stochastische Differentialgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_t, t)dt + \int_0^t b(X_t)dW_t$$

wird durch Einführung der Differentialschreibweise

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t)dW_t$$

zur stochastischen Differentialgleichung. Das Zweite der beiden Integrale ist als It$\hat{o}$-Integral zu lesen. Zu gegebenen Funktionen a und b (auch als Drift und Diffusion bezeichnet) und einer speziellen Brownschen Bewegung W wird hier also ein Prozess X gesucht, der zusammen mit a, b und W die obige Integralgleichung erfüllt. Dieser Prozess ist dann eine Lösung der obigen stochastischen Differentialgleichung.

3 Stochastische Integration

Der Begriff des stochastischen Integrals verallgemeinert die Integralbegriffe von Henri Léon Lebesgue (Lebesgueintetral) und Thomas Jean Stieltjes (Stieltjesintegral) auf eine breitere Menge von Integratoren, da er stochastische Prozesse mit unendlicher Variation, insbesondere den Wiener-Prozess als Integratoren zulässt.

3.1 Integralbegriffe nach Itô und Stratonovich

Seien

$$(X_t), (Y_t), \quad t \epsilon [a, b]$$

zwei (nicht notwendigerweise unabhängige) reellwertige stochastische Prozesse auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Als Itô-Integral von X nach Y über dem Intervall $[a, b]$ bezeichnet man die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} I &:= \int_a^b X_t dY_t \\ &:= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)h}(Y_{ih} - Y_{(i-1)h}) \end{aligned}$$

mit $h = \frac{b-a}{n}$,wobei der Limes im $L^2(\mathbf{P})$-Sinn zu interpretieren ist. Das zugehörige Stratonovich-Integral berechnet sich als

$$\begin{aligned} S &:= \int_a^b X_t \circ dY_t \\ &:= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} X_{(i-0.5)h}(Y_{ih} - Y_{(i-1)h}). \end{aligned}$$

Beim Itô-Integral wird der Integrand X also stets am Anfang des h-Intervalls ausgewertet, bei Stratonovich in der Mitte.

Bei gewöhnlichen (Riemann- oder Lebesgue-)-Integralen von deterministischen (nicht zufälligen) und hinreichend glatten (beispielweise stetigen) Funktionen hat es keinen Einfluss auf das Ergebnis, doch im stochastischen Fall gilt:
Sind X und Y nicht unabhängig, so kann das tatsächlich zu verschiedenen Werten des Integrals führen.

3.2 Einige wichtige Eigenschaften des Itô-Integrals

Voraussetzung: f und g sind reellwertige Funktionen im Intervall $[a, b]$. Dann gilt:

1. $\int_a^b f dW_t = \int_a^c f dW_t + \int_c^b f dW_t \quad$ für $\quad a < b < c$,
2. $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dW_t = \alpha \int_a^b f dW_t + \beta \int_a^b g dW_t \quad \forall \alpha, \beta \epsilon \mathbf{R}$,
3. $\int_a^b dW_t = W_b - W_a$,
4. $\mathbf{E}(\int_a^b f dW_t) = 0$,
5. $\mathbf{E}(|\int_a^b f dW_t|^2) = \mathbf{E}(\int_a^b |f|^2 dt)$,
6. $\int_a^b f dW_t \quad$ ist $\quad F_b^W -$ messbar.

3.3 Martingaleigenschaft

Der entscheidende Vorteil, der letztendlich dazu geführt hatte, dass sich das Itô-Integral weitgehend als Standard durchgesetzt hat, ist die folgende Eigenschaft:
Ist der Integrator Y eine Brownsche Bewegung (der bei weitem am häufigsten verwendete Integrator) oder allgemeiner ein Lévy-Prozess mit konstantem Erwartungswert, und ist X eine nicht vorgreifende beschränkte Funktion von Y und t (das heisst, für jedes $t > 0$ ist X_t messbar bezüglich der Sigmaalgebra $\sigma(Y_s; s < t)$, die von den Zufallsvariablen

$$Y_s, \quad s < t$$

erzeugt wird), so ist der Prozess

$$t \mapsto \int_0^t X_s dY_s$$

ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtrierung von Y.
(Die Bedingung der Beschränktheit von X kann abgeschwächt werden. Im Allgemeinen ist das Itô-Integral jedoch nur ein sogenanntes lokales Martingal.)
Diese nützliche Eigenschaft hat das Stratonovich-Integral nicht.

3.4 Anwendung

Ausgehend vom It$\hat{o}$schen Integralbegriff ist es nun möglich, eine breite Klasse von stochastischen Prozessen zu definieren.
Demnach wird ein Prozess $(X_t), t > 0$, It$\hat{o}$-Prozess genannt, wenn es nicht vorgreifende Prozesse u,v gibt, sodass

$$X_t = \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s W_s.$$

Das Prädikat "X ist ein It$\hat{o}$-Prozess" wird somit zu einem stochastischen Pendant zum Begriff der Differenzierbarkeit. Ausgehend hiervon wurden dann von It$\hat{o}$ selbst die ersten stochastischen Differentialgleichungen definiert.

3.5 IT$\hat{O}$-Formel

Die It$\hat{o}$-Formel (auch Lemma von It$\hat{o}$ genannt) ist eine zentrale Aussage in der stochastischen Analysis. Es ist für stochastische Prozesse das Pendant zur Kettenregel aus der Differentialrechung.

Voraussetzung
Sei

$$(W_t), t \geq 0$$

eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Sei

$$(X_t), t \geq 0$$

ein It$\hat{o}$-Prozess, sodass also

$$X(t) = \int_0^t f(t)dt + \int_0^t g(t)dW_t$$

für adaptierte Prozesse f, g gilt.
In Differentialschreibweise:

$$dX_t = f(t)dt + g(t)dW_t.$$

Das Lemma von Itô besagt: Ist $h(t,x)$ mit

$$h : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

eine in der ersten Komponente einfach und in der zweiten zweifach stetig differenzierbare Funktion, so ist auch $Y_t : h(t, X_t)$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$dY_t = [\frac{\partial h(t,x)}{\partial x} f(t) + \frac{\partial h(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial^2 x} g^2(t)]dt + \frac{\partial h(t,x)}{\partial x} g(t) dW_t.$$

Wiener-Prozess
Ist (W_t) ein Standard-Wiener-Prozess, so nennt man den stochastischen Prozess

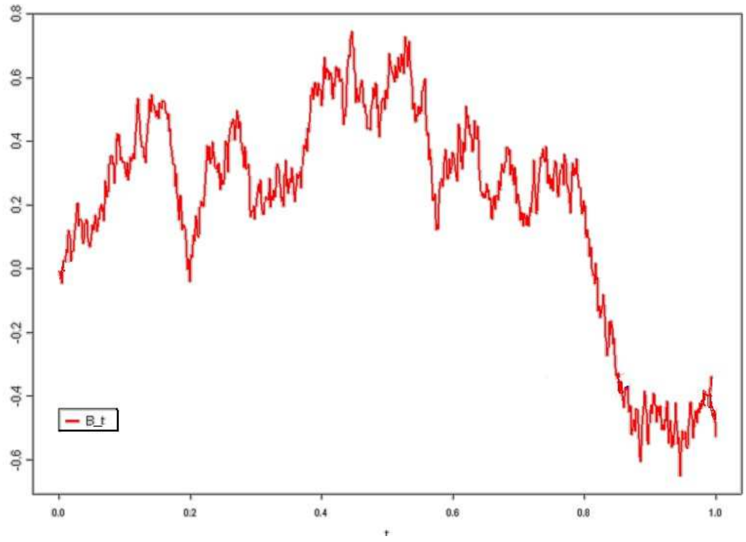
$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ. Damit lassen sich auch stochastische Prozesse darstellen, die tendenziell eher fallen ($\mu < 0$) oder tendenziell eher steigen ($\mu > 0$). Dabei gilt

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)).$$

Wiener-Prozesse sind Markov- und Lévy-Prozesse, aber die Martingaleigenschaft gilt nur noch in abgeschwächter Form:
Ist $\mu < 0$, so ist X_t ein Supermartingal, ist $\mu > 0$, so ist X_t ein Submartingal. Für $\mu = 0$ ist X_t ein Martingal.

Dividendenauszahlung



1 Einleitung

1.1 Zentrale Begriffe

Der Geschäftsverlauf eines Versicherungsunternehmens wird sowohl von deterministischen als auch stochastischen Faktoren beeinflusst:[12]

1. **deterministische Kenngrössen** werden durch die Rahmenbedingungen des Versicherungsgeschäftes vorgegeben. Diese sind zum Beispiel
   - die Zeitspanne t
   - das Anfangskapital $u > 0$: Es dient zur Deckung von Schäden in der Anfangsphase des Geschäftes und garantiert die Solvabilität des Unternehmens beim Auftreten von Grossschäden.
   - die Prämieneinnahmen $C(t)$ bis zum Zeitpunkt $t > 0$: Ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe stochastischer Modelle aus der Risikotheorie.

2. **Stochastische Kenngrössen** unterliegen dem Zufall und werden durch Zufallsvariablen modelliert. Zu diesen gehören
   - die Schadenzeitpunkte $\sigma_i; i\epsilon\mathbf{N}$
   - die Schadenhöhen $U_i; i\epsilon\mathbf{N}$

3. **Weitere Kenngrössen** können aus den oben angegebenen, elementaren Kenngrössen abgeleitet werden. Es sind
   - die Zwischenankunftszeiten $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}; i\epsilon\mathbf{N}$: T_i bezeichnet die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Schadenmeldungen.
   - die Schadenanzahl $N(t)$ bis zum Zeitpunkt t
   - der Gesamtschaden $X(t)$ bis zum Zeitpunkt t
   - die Risikoreserve $R(t)$ zum Zeitpunkt t: Sie setzt sich aus den Mitteln zusammen, die dem Versicherungsunternehmen zur Deckung der Schäden zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehen. Es gilt:
     $R(t) = u + C(t) - X(t), t \geq 0$.

[12] Jun.-Prof. Dr. Evgeny Spodarev: Stochastische Risikotheorie

1.2 Gesamtschaden

Der Gesamtschadenprozess ist ein stochastischer Prozess $\{X(t) : T \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

wobei

> $N(t)$ der Prozess der Schadenanzahl bis zur Zeit t ist und
>
> die Einzelrisiken U_i die Schadenhöhen darstellen.

Die Verteilung des Gesamtschadens X spielt in der Versicherungsmathematik eine zentrale Rolle.

Kollektives Modell:
Im Gegensatz zum individuellen Modell wird hier aus einer nicht näher spezifizierten Anzahl von Schäden betrachtet, die nicht einzeln behandelt werden können. Man behandelt alle Schäden gleich und fast die gesamten Schäden als ein einzigen Schäden auf. Sei N die zufällige Anzahl der Schäden, die innerhalb einer Periode t auftreten, und alle Schadenhöhen U_i positiv: $U_i > 0$ und N unabhängig voneinander.

Der Gesamtschaden im kolletiven Modell ist durch

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

gegeben, wobei $X = 0$, falls $N = 0$.

1.3 Prämienkalkulation

Ein Mittel zur Gewährleistung der Solvenz eines Versicherungsunternehmens sind die Prämieneinahmen. Sie dienen der Kostendeckung, wobei unter den Kosten der Schaden, der Gewinn und die Verwaltungskosten im breiteren Sinne gemeint sind. Deshalb setzt sich die sogenannte Bruttoprämie, die von den Versicherungsnehmern entrichtet wird, aus folgenden Bestandteilen zusammen:

$$\text{Bruttoprämie} = \text{Nettorisikoprämie} + \text{Sicherheitszuschlag}$$

$$+\text{Verwaltungskosten} + \text{Inkassokosten}$$
$$+ \text{Gewinnzuschlag}$$

Hierbei ist die Nettoprämie gleich dem mittleren Gesamtschaden. Der Sicherheitszuschlag fängt unerwünschte Schwankungen des tatsächlichen Schadens ab, wenn dieser massgebend vom Mittel abweicht. Das ist ein Aufschlag auf die den erwarteten Schaden gerade deckende Nettoprämie. Die Verwaltungskosten erfassen Abschluss- und Schadenregulierungskosten. Inkassokosten stellen sich aus Bank-, Mahn- sowie Portokosten zusammen. Der Gewinnzuschlag soll der Erwirtschaftung des gewünschten Gewinns dienen.

Befasst wird sich nur mit den beiden ersten Komponenten, da nur diese mathematisch anspruchsvoll sind. In der Bezeichung $C(t)$ ist die Nettoprämie zuzüglich Sicherheitszuschlag. Der gesamte Risikoprozess ist somit gleich:

$$R(t) = u + C(t) - X(t),$$

wobei

u die Anfangsreserve (Anfangskapital) und

$X(t)$ der Gesamtschaden

ist. $R(t)$ wird auch Überschussprozess oder Risikoreserve genannt.

In der kollektiven Risikotheorie vergrössert jede Prämieneinnahme das Kapital und jede Auszahlung einer Versicherungsleistung vermindert es.

Die Prämie $C(t)$ soll ausreichend hoch sein, um den technischen Ruin zu vemeiden, und gleichzeitig nicht zu hoch, um auf dem Markt von ähnlichen Versicherungsprodukten wettbewerbsfähig zu bleiben.

1.4 Der Ruin

Der Ruin eines Unternehmens steht kurz davor, wenn das Kapital negativ ist, dieser wird Ruinzeitpunkt τ bezeichnet.

Ruinwahrscheinlichkeiten
Unter Ruinwahrscheinlichkeiten versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beschränkten ($[0, t)$) beziehungsweise unbeschränkten Zeitintervall

($[0, \infty)$) der technische Ruin eintritt. Grob gesagt, bedeutet Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Versicherungsgesellschaft auf Grund von Zufälligkeiten in der Schadensentwicklung trotz der erhobenen Sicherheitszuschläge und der bereitgestellten Sicherheitsreserve illiquid wird.

Geht man davon aus, dass das Unternehmen an der Ausschüttung möglichst hoher Dividenden interessiert ist, so steht man vor der Aufgabe, die Zahlung pro Zeiteinheit so einzurichten, dass eben nicht frühzeitiger Ruin die Zahlungen beendet.

1.5 Kollektive Risikotheorie

Eine alle Versicherungszweige umfassende mathematische Konzeption ist in der kollektiven Risikotheorie gefunden worden, in der Hand der Verteilung des Gesamtrisikos (= Gesamtheit der Versicherungsleistungen - Gesamtheit der Gegenleistung der Versicherten) Zusammenhänge zwischen Sicherheitszuschlägen, Sicherheitsreserven (Schwankungsrückstellungen) und der Ruinwahrscheinlichkeit untersucht werden.

1.6 Dividenzahlungen

Der Geschäftsverlauf wird durch einen stochastischen Prozess dargestellt, gemäss den Methoden der kollektiven Risikotheorie. Der Einfluss von Dividenzahlungen auf den Geschäftsverlauf wird beschrieben, der vorallen beeinflusst wird durch Prämieneinnahmen und Schadenszahlungen, die Auszahlungen eines Unternehmens.

Das Versicherungsunternehmen kann mit Hilfe des Sicherheitszuschlages die Entwicklung des Kapitals steuern und die Steuerungsmassnahmen beeinflussen die Ruinwahrscheinlichkeit. Bis zum allfälligen Ruin werden c Geldeinheiten pro Zeiteinheit als Prämien eingenommen. Die Höhe des Sicherheitszuschlages ist eine wichtige Grösse zur Steuerung des Kapitalverlaufs.

Ausser durch den Sicherheitszuschlag kann das Unternehmen Geldbeträge entnehmen und als Dividende auszahlen und dadurch den Kapitalverlauf beeinflussen. Das Kapital eines Unternehmens wird durch die Dividende vermindert. Die Dividende nimmt nur positive Werte an, welche höchstens gleich dem vorhandenen Kapital sein dürfen. Das Unternehmen sei ruiniert, sobald das Kapital vor der Dividendenausschüttung negativ wird. Mit dem Eintritt des Ruins sei die Tätigkeit des Unternehmens beendigt: das Unternehmen schüttet dann keine Dividende mehr aus.

2 Kontrollsysteme

Kontrollsysteme[13] sind dynamische Systeme in kontinuierlicher oder diskreter Zeit, die von einem Parameter u abhängen, der sich - abhängig von der Zeit und/oder vom Zustand des Systems - verändern kann.

Er kann entweder als Steuergrösse verstanden werden, also als Grösse, die von aussen aktiv beeinflusst werden kann oder auch als Störung, die auf das System wirkt.

Für das mathematische Fachgebiet, dass sich mit der Analyse dieser Systeme beschäftigt, hat sich im deutschen Sprachgebiet der Begriff "Kontrolltheorie" etabliert, wenngleich er eine etwas missverständliche Übersetzung des englischen Ausdrucks "control theory" darstellt, da es hier nicht um Kontrolle im Sinne von Überwachung sondern im Sinne von Einflussnahme von aussen geht.

Statt von Kontrolle spricht man auch von Steuerung, wenn die Parameter u lediglich von der Zeit abhängen und von Regelung, wenn die Parameter u vom aktuellen Zustand abhängen.

Grundlegende Voraussetzung für die Anwendung der Kontrolltheorie sind Beobachtbarkeit, Beschreibbarkeit und Steuerbarkeit des betrachteten Systems, denn stets müssen Aufgrund von Beobachtungen mathematische Modelle entwickelt werden, die mit Hilfe typischer Parameter das Systemverhalten angemessen beschreiben.

2.1 Optimale Steuerung

Die Theorie der optimalen Steuerungen ist eng verwandt mit der Variationsrechnung und der Optimierung.

Eine optimale Steuerung u ist eine Funktion, welche eine gegebene Zielfunktion unter einer Differentialgleichungs-Nebenbedingungen und eventuell noch weiteren Restriktionen minimiert oder maximiert.

[13] Lars Grüne: Mathematische Kontrolltheorie I: Lineare Systeme

Die Steuerung
Es gibt mehrere mathematische Formulierungen der Aufgabenstellung, wobei hier eine möglichst allgemeine Form angegeben wird.
Die allgemeine Voraussetzung ist, dass $x(t)$ ein Itô-Prozess ist. Die stochastische gesteuerte Differentialgleichung hat die Form

$$dx(t) = \mu(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))d\omega(t)$$

wobei

ω eine Brownsche Bewegung und

$u(t)$ die sogenannte Steuerung ist.

Das Ziel ist es, durch Steuerung einen möglichst hohen Wert des Zielfunktionales (siehe unten) zu erreichen.

Falls der Prozess $x(s)$ die gesteuerte stochastische Differentialgleichung mit Anfangswert x im Startzeitpunkt t löst, dann schreib man für dessen Erwartungswert

$$\mathbf{E}^{t,x}(X(s)).$$

2.2 Lösung des Steuerungsproblems

Das Steuerungsproblem wird in drei Schritten gelöst:[14]

1 Die Minimierungsaufgabe in der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung in Abhängigkeit von der unbekannten Funktion g (und ihren partiellen Ableitungen) wird gelöst.

2 Im zweiten Schritt wird die partielle Differentialgleichung gelöst, wobei $u^*(s) := u^*(s, x, g(s, x), g_t(s, t), g_x(s, t), g_{xx}(s, x))$ eine Lösung der Minimieruangsaufgabe sei.

3 Im drittem und letztem Schritt werden die benötigten (notwendigen und hinreichenden) Voraussetzungen überprüft.

[14] Ralf und Elke Korn: Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung

2.3 Wichtige Definitionen und Sätze

Definition 2.1 (optimales Steuerungsproblem) [15] *Für eine stetige nicht-negative Kostenfunktion g definiert man das Funktional*

$$J(x,u) := \mathbf{E}[\int_0^\infty g(x(t,x,u),u(t))dt].$$

Das optimale Steuerungsproblem ist damit gegeben durch das Optimierungsproblem

$$\textit{Minimiere} \quad J(x,u) \quad \textit{über } u \textit{ für jedes} \quad x.$$

Die Funktion

$$V(x) := \inf_u J(x,u)$$

wird als optimale Wertefunktion dieses optimalen Steuerungsproblems bezeichnet. Ein Paar (x^*,u^*) *mit* $J(x^*,u^*) = V(x^*)$ *wird als optimales Paar bezeichnet.*

Satz 2.1 (Bellman'sches Optimalitätsprinzip) [16]
Für die optimale Wertefunktion gilt für jedes $\tau > 0$

$$V(x) = \inf_u \{\mathbf{E}\int_0^\tau g(x(t,x,u),u(t))dt\} + V(x(\tau))$$

Korollar 2.1 *Sei* (x^*,u^*) *ein optimales Paar. Dann ist* $(x(\tau,x^*,u^*),u^*(\cdot+\tau))$ *für jedes* $\tau > 0$ *ein optimales Paar.*

[15]L.Grüne: Mathematische Kontrolltheorie
[16]oder auch Prinizip der dynamsichen Programmierung

3 Optimale Dividendenauszahlung

3.1 Einführung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einem klassischen Problem der Versicherungsmathematik, und zwar mit der optimalen Dividendenauszahlungsstrategie.

Vorliegendes Problem
Es wird angenommen, dass die Reserve $r(t)$ eines Versicherungsunternehmens zur Zeit t durch eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t)$$

gegeben ist, wobei

W ist eine Standard Brownsche Bewegung,

$\mu, \sigma > 0$ sind Konstanten,

$a(t)$ ist die Rate der Dividendenzahlung zum Zeitpunkt t
(0 dient als absorbierende Barriere für $r(t)$).

Die Variable $a(t)$ wird hier auch als Kontrollvariable bezeichnet. Das Problem wird mit Hilfe der dynamischen Progammierung gelöst.

Die Funktion $a(t)$ soll dynamisch bestimmt werden, um den Erwartungswert

$$\mathbf{E}(J_x(a(\cdot)))$$

zu maximieren, wobei

$J_x = \int_0^\infty e^{-ct} a(t)dt$ ist die Summe aller (abgezinster) Auszahlungen,

x gibt die Anfangsreserve ($r(0) = x$) an.

Man unterscheidet zwei Fälle:

(a) Die Dividendenzahlung ist beschränkt, sodass $a(t)$ im Intervall $[0, a_0]$ ist für ein endliches a_0. Es wird später gezeigt, dass, falls a_0 unter einer kritischen Schranke bleibt, die maximale Dividendenauschüttung als optimale Lösung gewählt werden sollte. Jedoch wird nichts ausgezahlt, falls die Reserve eine kritische Schranke m unterschreitet.

(b) Im anderen Fall ist die Auszahlung unbeschränkt und es wird sich zeigen, dass die optimale Auszahlungsstrategie nicht mehr als Dividendenrate dargestellt werden kann.

Es können folgende Zustände auftreten:

1. - Falls es keine Dividendenauszahlung gibt, entwickelt sich die Reserve $\{r^{(0)}(t)\}_{t\geq 0}$ wie eine Brownsche Bewegung mit Drift μ und Varianz σ^2 mit Absorption in 0 (wobei τ der Zeitpunkt der Absorption ist und als Ruinzeitpunkt bezeichnet werden kann). Insbesondere gilt
   $$dr^{(a)}(t) = \mu dt + \sigma dW(t),$$
   wobei $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist. Weitere Annahmen zu dieser Überlegung findet man im Kapitel 3.4.

   - Für ein festes a als Dividendenrate ergibt sich folgende stochastische Differentialgleichung für die Reserve $\{r^{(a)}(t)\}_{t\geq 0}$
   $$dr^{(a)}(t) = (\mu - a)dt + \sigma dW(t).$$

   - Der Kontrollprozess $\{a(t)\}_{t\geq 0}$, der noch näher betrachtet wird, wird durch eine dynamische Wahl von a konstruiert. Das heißt, dass $a(t)$ von der gesamten Vergangenheit bis zum Zeitpunkt t abhängt. Somit gilt
   $$dr^{(a)}(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t),$$
   wobei $a(t)$ die Rate, mit der die Dividende zum Zeitpunkt t ausbezahlt wird, ist.

   $a(t)$ ist ein d-dimensionaler stochastischer Prozess, der gewählt werden kann zu jedem Zeitpunkt t, die sogenannte "Steuerung", der Controll der dynamsichen Programmierung. $dr^{(a)}(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t)$ heißt eine $''$ gesteuerte stochastische Differentialgleichung$''$. Aufgabenstellung in der stochastischen Steuerung ist es, eine bezüglich einem Kostenfunktional optimale Steuerung $a(t)$ zu bestimmen.

Zur Entscheidung kann die gesamte Vergangenheit herangezogen werden. Mathematisch kann das wie folgt formuliert werden:

Sei begonnen mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ und einer Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, sodass $\mathcal{F}_t$ die Information zum Zeitpunkt t widerspiegelt, und ein Prozess $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, der eine Standard Brownsche Bewegung bezogen auf die Filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ ist (es gilt immer $\sigma(\omega(s) : 0 \leq s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$). Wir fordern nun, dass $a(t) \in \mathcal{F}_t$ gilt, dass heisst $a(t)$ ist adapiert:

$$a(t) \in \mathcal{F}_t$$

Eine Familie von Zufallsvariablen, die $a(t) \in \mathcal{F}_t$ erfüllen, nennt man Kontrollprozess.

2. Der Prozess $a(\cdot)$ ist die 'Entscheidungsvariable'(oder auch Steuerungsvariable genannt) des Problems, bezüglich derer wir optimieren müssen. Ziel ist es, den Erwartungswert des Performanceindexes $J_x(a(\cdot))$ (eine Zufallsvariable) zu einer Anfangsreserve $x = r(0)$ zu maximieren. Es soll die optimale Ertragsfunktion (auch Wertefunktion genannt)

$$V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbf{E} J_x(a(\cdot))$$

bestimmt werden, wobei das Supremum über alle Kontrollfunktionen genommen wird. Die optimale Kontrollfunktion $a^*(\cdot)$ erfüllt nun

$$V(x) = \mathbf{E} J_x(a^*(\cdot))$$

Als Performanceindex in
$V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbf{E} J_x(a(\cdot))$ und $V(x) = \mathbf{E} J_x(a^*(\cdot))$ nimmt man die Summe der diskontierten Dividendenauszahlungen

$$J_x = \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt,$$

wobei

c die Diskontierungsrate (erwarteter Zinssatz) ist,

τ die Absorptionszeit (in Kapitel 3.4 werden Alternativen besprochen) ist.

Es wird zwischen unbeschränktem und beschränktem Fall unterschieden. In beiden Fällen findet man die optimale Strategie. Die wichtigsten Ergebnisse sind die folgenden:

- $a^*(t)$ soll zum Zeitpunkt t von F_t nur durch $r(t)$ abhängen. Diese Annahme ist für solche Probleme typisch und ist eine Folgerung aus der Markov-Eigenschaft.

- In Kapitel 3.2 wird der beschänkte Fall betrachtet. Gezeigt wird folgendes: Angenommen das die maximale Rate $a_0 < \infty$ klein genug ist, sodass
$$\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} < 0$$
gilt.(wobei die Konstante Θ_3 später bestimmt wird). Dann ist die optimale Strategie immer, die maximale Dividende auszuzahlen. Wenn jedoch $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ erfüllt ist, erfolgt keine Auszahlung falls die Reserve unter einem optimalen Stand m fällt. Oberhalb der Schranke wird die maximale Rate ausbezahlt.

- Im Fall, dass die Dividendenauszahlung unbeschränkt ist, wird im Kapitel 3.3 gezeigt, dass die optimale Strategie ist, immer den Betrag, der m übersteigt auszubezahlen. Da darunter keine Auszahlung erfolgt, bezeichnet man m als eine reflektierende obere Schranke.

3.2 Beschränkte Dividendenauszahlung

Der Kontrollprozess $a(t)$ ist die Dividendenauszahlungsrate, und der Performanceindex ist durch $J_x = \int_0^\tau e^{-ct}a(t)dt$ gegeben. Es wird angenommen dass die maximale Auszahlungsrate unter der Schranke $a_0 < \infty$ liegt, sodass $a(t) \in [0, a_0] \quad \forall t > 0$ gilt. Für die Reserve $r(t)$ erhält man folgende Gleichungen

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma d\omega(t)$$

$$r(0) = x.$$

Um die Gleichung $V(x)$ gegeben durch $V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbf{E}J_x(a(\cdot))$ zu verstehen, sollte man anmerken, dass

$$V(0) = 0.$$

Tatsächlich ist man, wenn das Anfangskapital 0 ist, bereits ruiniert und keine Dividende wird ausbezahlt. Man betrachtet nun für jedes y ein Kontrollprozess $a_y(t)$, für den

$$\mathbf{E}J_y(a_y(t)) \geq V(y) - \varepsilon \qquad (\varepsilon - optimal)$$

gilt.

Für ein festes $x > 0$ betrachtet man folgende Strategie: wir zahlen die Dividende u bis zum Zeitpunkt δ oder dem Ruinzeitpunkt τ, je nachdem was vorher eintritt, und wechseln zur $\varepsilon - optimalen$ Strategie. Das führt zu

$$a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} u & 0 \leq t \leq \delta \\ a_{r(\delta)(t-\delta)} & t > \delta \end{array} \right\}.$$

Auf diesem Weg sieht man, dass

$$V(x) \geq u\delta\mathbf{P}_x(\tau > \delta) + e^{-c\delta}[\mathbf{E}_x V(r(\delta)) - \varepsilon].$$

$$\geq u\delta\mathbf{P}_x(\tau > \delta) + (1 - c\delta)[\mathbf{E}_x V(r(\delta)) - \varepsilon]$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, kann man

$$V(x) \geq u\delta\mathbf{P}_x(\tau > \delta) + (1 - c\delta)\mathbf{E}_x V(r(\delta))$$

schreiben. Es wird gefordert, dass $V(x)$ zweimal differenzierbar ist. Man bemerke, dass $\mathbf{P}(\tau > \delta) = 1 + o(1), \quad \delta \downarrow 0$. Subtrahiert man V(x) auf beiden

Seiten in $V(x) \geq u\delta \mathbf{P}_x(\tau > \delta) + (1 - c\delta)\mathbf{E}_x V(r(\delta))$ und wendet man Itôs Formel für $V(r(\delta))$ an, dann erhält man

$$u\delta + [\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x)]\delta + o(\delta) \leq 0,$$

und nach Grenzübergang $\delta \to 0$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u \leq 0,$$

was für $\forall u \in [0, a_0]$ gültig sein soll. Es kann gezeigt werden, dass zumindest für ein $u \in [0, a_0]$ Gleichheit in $\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u \leq 0$ gilt. Damit erhält man die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung für die optimale Returnfunktion V(x),

$$\max_{0 \leq u \leq a_0} [\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0,$$
$$V(0) = 0.$$

Das klassische Hilfsmittel zur Lösung des stochastischen Steuerungsproblems ist die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung.

Um die Lösungsmethode zu verstehen, nimmt man an, $f(x)$ erfüllt die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung
$\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0, V(0) = 0.$

Der Ausdruck auf der linken Seite von $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0$ der maximiert ist, ist eine lineare Funktion von u für jedes x. Offensichtlich wird das Maximum $u^*(x)$ für jedes x entweder in 0 oder a_0 angenommen. Offensichtlich gilt

$$u^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & f'(x) > 1 \\ a_0 & f'(x) \leq 1 \end{array} \right\}$$

Unter der Annahme dass die Lösung konkav ist (der Beweis folgt später), existiert ein Punkt $m \geq 0$, sodass $f'(x) > 1$ oder $f'(x) \leq 1$, abhängig von $x < m$ oder $x \geq m$.

Mit Blick auf $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0$ und $u^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & f'(x) > 1 \\ a_0 & f'(x) \leq 1 \end{array} \right\}$ ergibt sich

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq m$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, \qquad x \geq m.$$

Seien $\theta_1(\lambda)$ und $-\theta_2(\lambda)$ die positiven und negativen Lösungen der Gleichung $\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \lambda s - cs = 0$, dann hat die allgemeine Lösung
$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, 0 \leq x \leq m$ folgende Gestalt

$$C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x},$$

während die allgemeine Lösung von
$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, x \geq m$ wie folgt aussieht

$$\frac{a_0}{c} + C_3 e^{\theta_1(\mu - a_0)x} + C_4 e^{-\theta_2(\mu - a_0)x}.$$

Man merke an, dass für jeden Kontrollprozess $a(\cdot)$ der Performanceindex $J_x(a(\cdot))$ nicht $\frac{a_0}{c}$ übersteigt. Daher wird der Fall $f(x) \leq \frac{a_0}{c}$ betrachtet.

Deshalb ist in $\frac{a_0}{c} + C_3 e^{\theta_1(\mu - a_0)x} + C_4 e^{-\theta_2(\mu - a_0)x}$: $\quad c_3 = 0$,
$c_4 \equiv -d < 0$. Anderer seits gilt $\quad f(x) > 0, \quad x > 0, \quad f(0) = 0$.
Daher haben wir in $C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x}$: $\quad c_1 = -c_2 \equiv c > 0$.

Um C, d und die unbekannte Schranke m zu finden benutzt man das 'Prinzip der glatten Anpassung', dass heisst

$$f(m+) = f(m-)$$

$$f'(m-) = 1$$
$$f'(m+) = 1$$

zu erhalten.

Sei $\theta_1 = \theta_1(\mu), \quad \theta_2 = \theta_2(\mu)$ und $\theta_3 = \theta_2(\mu - a_0)$, dann sind
$f(m+) = f(m-), f(m-) = 1, f(m+) = 1$ äquivalent zu

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}$$

$$C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1$$
$$d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1.$$

Löst man $d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1$ und setzt es in $C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}$ ein, erhält man

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} = \alpha.$$

Damit können Lösungen für $C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}, C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1$ und $d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1$ nur dann existieren, wenn $\alpha > 0$ erfüllt ist.

Ein Bestandteil, der unbedingt zur vollständigen Lösung eines stochastischen Steuerungsproblems mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung gehöhrt, ist die Überprüfung zur Anwendung der Theorie benötigten Vorraussetzungen.

Als nächsten Schritt wird gezeigt, dass $\alpha > 0$ schon eine hinreichende Bedingung ist. Um das zu zeigen, benötigen wir folgendes

Lemma 3.1 $\alpha\theta_1 < 1$.

Beweis Zunächst wird die elementare Ungleichung

$$\sqrt{(a^2 + b)} - a < \frac{b}{2a}, \quad a, b > 0$$

gezeigt. Addiert mit +a ergibt

$$\sqrt{(a^2 + b)} < \frac{b + 2a^2}{2a}$$

jetzt will man die Wurzel entfernen und quadriert die Ungleichung

$$(a^2 + b) < \frac{b^2 + 4a^2 b + 4a^4}{4a^2}$$

multipliziert mit $4a^4$ ergibt

$$4a^4 + 4a^2 b < b^2 + 4a^2 b + 4a^4,$$

$$0 < b^2$$

Aus dieser elementaren Ungleichung folgt

$$\theta_1 \equiv \frac{-\mu + \sqrt{(\mu^2 + 2\sigma^2 c)}}{\sigma^2} < \frac{c}{\mu}.$$

Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{a_0}{c} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}.$$

Sei $a_0 \leq \mu$, dann folgt $\frac{a_0}{c} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}$ aus $\theta_1 \equiv \frac{-\mu + \sqrt{(\mu^2 + 2\sigma^2 c)}}{\sigma^2} < \frac{c}{\mu}$.

Falls $a_0 \geq \mu$, dann gilt

$$\theta_3 \equiv \frac{(\mu - a_0) + \sqrt{((\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2 c)}}{\sigma^2} < \frac{c}{(a_0 - \mu)}.$$

Verwendet man $\theta_1 \equiv \frac{-\mu+\sqrt{(\mu^2+2\sigma^2 c)}}{\sigma^2} < \frac{c}{\mu}$ und $\theta_3 \equiv \frac{(\mu-a_0)+\sqrt{((\mu-a_0)^2+2\sigma^2 c)}}{\sigma^2} < \frac{c}{(a_0-\mu)}$ zusammen, erhält man $\frac{a_0}{c} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}$.

Proposition 3.1 *Falls $\alpha > 0$ gilt, dann existiert ein eindeutiges Lösungstrippel (C, d, m), für das*

$$\begin{aligned} C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) &= \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m} \\ C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) &= 1 \\ d\theta_3 e^{-\theta_3 m} &= 1. \end{aligned}$$

gilt.

Beweis Dividiert man $C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}$ durch $C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1$, so erhählt man

$$\frac{(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m})}{(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m})} = \alpha$$

Da $\alpha\theta_1 < 1$ gilt,ist die eindeutige Lösung für m gegeben durch

$$m = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1} > 0$$

Der Rest ist trivial.

Theorem 3.1 *Es existiert eine zweifach, stetig differenzierbare konkave Lösung für die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0$ *und* $V(0) = 0$. *Falls* $\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$, *dann ist die Lösung durch*

$$f(x) = \frac{a_0}{c}(1 - e^{-\theta_3 x})$$

gegeben, andernfalls ($\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$) *gilt*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & 0 \leq x \leq m \\ \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 x} & x > m \end{array} \right\},$$

wobei C, d, m *die eindeutige Lösung für* $C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}$, $C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1, d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1$ *ist.*

Beweis

1. Die Funktion $f(x) = \frac{a_0}{c}(1 - e^{-\theta_3 x})$ erfüllt $V(x) = 0$ und ist konkav, weiters gilt $f'(0) = \frac{\theta_3 a_0}{c} \leq 1$. Deshalb ist $f'(x) \leq 1, \forall x > 0$ und

$$(a_0 - u)(f'(x) - 1) \leq 0, \qquad u \in [0, a_0].$$

Wenn man diese zu

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0$$

addiert, erhält man die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - u)f'(x) - cf(x) + u] = 0$.

2. Sei $\alpha > 0$ erfüllt, dann erfüllt f: $f(0) = 0$. Laut Konstruktion ist f stetig mit $f'(m-) = f'(m+)$. Da f erfüllt $\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, 0 \leq x \leq m$ auf $[0, m]$ und $\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, x \geq m$ auf $[m, \infty)$ erhält man

$$f''(m-) = \frac{2}{\sigma^2}(cf(m) - \mu f'(m)),$$

$$f''(m+) = \frac{2}{\sigma^2}(cf(m) - (\mu - a_0)f'(m) - a_0).$$

Da laut Definition $f'(m) = 1$ ist, erhält man $f''(m-) = f''(m+)$ und f ist zweimal differenzierbar. Konkavität auf $[m, \infty)$ folgt sofort. Um die Konkavität auf $[0, m]$ zu prüfen, differenziert man f dreimal, um $f'''(x) > 0$ zu erhalten. Daraus folgt, dass f'' monoton ist. Man sieht sofort, dass $f''(0) < 0$ gilt und weil $f''(m+) < 0$ gilt, folgt $f''(m-) < 0$. Daher letztlich $f'' < 0$ auf $[0, m]$. Daraus folgt die Konkavität auf $[0, \infty)$.

3.
   - Sei $x \leq m$. Dann ist $f'(x) > 1$. Addiert man $-u(f'(x) - 1) \leq 0$ zu $\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, 0 \leq x \leq m$, erhält man die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0$.
   - Ist $x > m$, dann gilt $f'(x) < 1$ und die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $\max_{0 \leq u \leq a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0$ folgt durch die Addition von $(a_0 - u)(f'(x) - 1) \leq 0$ zu $\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, x \geq m$. Dies vervollständigt den Beweis.

Proposition 3.2 *Die Funktion f in Proposition 3.1 maximiert $J_x(a(\cdot))$ für jeden erlaubten Kontrollprozess $a(\cdot)$.*

Beweis Verwendet man Itôs Formel, kann man

$$e^{-c(T\wedge\tau)}f(r(T\wedge\tau))-f(x) = \int_0^{T\wedge\tau}(\frac{1}{2}\sigma^2 f''(r(t))+(\mu-a(t))f'(r(t))-cf(r(t)))e^{-ct}dt$$
$$+\int_0^{T\wedge\tau}e^{-ct}f'(r(t))\sigma dW(t)$$

schreiben. Da f konkav ist, ist $f'(x)$ durch $f'(0)$ beschränkt. Damit ist der letzte Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ein quadratisch integierbares Martingal mit Erwartungswert 0. Aus der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $\max_{0\le u\le a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x)+(\mu-u)V'(x)-cV(x)+u]=0$ erhält man, dass der erste Integrand auf der rechten Seite $-a(t)$ nicht übersteigt. Bildet man auf beiden Seiten der obigen Gleichung den Erwartungswert und ordnet die Terme um, so ergibt sich

$$f(x)\ge \mathbf{E}_x\int_0^{T\wedge\tau}e^{-ct}a(t)dt+\mathbf{E}_x e^{-c(T\wedge\tau)}f(r(T\wedge\tau)).$$

Mit Fatous Lemma und T lässt man gegen unendlich gehen, kommt man zu

$$f(x)\ge \mathbf{E}_x\int_0^{T\wedge\tau}e^{-ct}a(t)dt = J_x(a(\cdot)),$$

was den Beweis vervollständigt.

Korollar 3.1 $f(x)\ge V(x)$.

Proposition 3.3 *Definiert man $u^*(t)=a_0\mathbf{1}_{\{x>m\}}$, und sei $r^*(t)$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dr(t)=(\mu-a(t))dt-\sigma d\omega(t)$, $r(0)=x$ mit $a(t)$ ersetzt durch $a^*(t)=u^*(r(t))$. Dann ist $J_x(a^*(\cdot))=f(x)$.*

Korollar 3.2 $f(x)=V(x)=J_x(a^*(\cdot))$

Hinweis 3.1 *Somit ist die Eindeutigkeit der konkaven und beschränkten Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* $\max_{0\le u\le a_0}[\frac{1}{2}\sigma^2V''(x)+(\mu-u)V'(x)-cV(x)+u]=0$ *und* $V(x)=0$ *gezeigt, da jede solche Lösung mit der optimalen Returnfunktion übereinstimmt.*

3.3 Unbeschränkte Dividendenauszahlung

In Fall der unbeschränkten Dividendenauszahlung kann $a(t) = \infty$ vorkommen. Dies benötigt eine aufwändige mathematische Handhabung.
Sei

$$L(t) = \int_0^t a(t)dt$$

die Summe aller Auszahlungen bis zum Zeitpunkt t. Offensichtlich wächst diese monoton ($L(t) \uparrow$), und wir nennen $L(\cdot)$ zulässig, falls

$L(t) \in \mathcal{F}_t$,

$L(\cdot)$ ist ein nichtfallender und nichtnegativer Prozess.

Anstatt mit $a(\cdot)$ verwendet man den in $L(t) = \int_0^t a(t)dt$ eingeführten Prozess als Kontrollprozess, wobei

$L(t) \in \mathcal{F}_t$, und

$L(\cdot)$ ist ein nichtfallender und nichtnegativer Prozess.

Aus $L(t) \in \mathcal{F}_t$ und der Tatsache, dass $L(\cdot)$ ist ein nichtfallender und nichtnegativer Prozess ist, folgt weder Stetigkeit von $L(t)$ noch absolute Stetigkeit und wird auch nicht angenommen.
Da $L(\cdot)$ Sprungstellen haben kann, wird angenommen, dass $L(\cdot)$ *cádlàg*-Pfade hat.
Die Differenz von $L(t)$ und $L(s)$ ist die Dividendenauszahlung im Intervall $(s, t]$, wobei $L(t) - L(t-)$ der Geldbetrag ist der zum Zeitpunkt t ausbezahlt wird. Da der Kontrollprozess in kumulierter Form definiert ist, muss $L(t) = \int_0^t a(t)dt$ in folgende Form abgeändert werden, um die Dynamik zu erhalten:

$$r(t) = x + \mu t + \sigma W(t) - L(t)$$

Im Allgemeinen gilt $r(0) = x - L(0)$, das heißt, falls zum Zeitpunkt 0 eine Auszahlung stattfindet, reduziert sich der Reservestand r sofort von x auf $x - L(0)$. Daher gelten die Konventionen $r(0-) = x$ und $L(0-) = 0$. Der Ausdruck des Performanceindexes ändert sich auf

$$J_x(L(\cdot)) = \int_0^\tau e^{-ct} dL(t).$$

Die Aufgabe ist es $V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbf{E} J_x(a(\cdot))$ zu finden. Dabei wird das Supremum über alle $a(\cdot)$ durch das Supremum über alle zulässiger L ersetzt, um ein L^* zu erhalten, das

$$V(x) = \mathbf{E}J_x(L^*(\cdot))$$

erfüllt. L^* wird als optimale Kontrolle bezeichnet.

Im beschränkten Fall war das Optimum entweder 0 oder die maximale Rate. Hier ist die maximale Rate jedoch unendlich. Es wird ähnlich wie im vorigen Kapital argumentiert, indem in einen kleinem Intervall $[o, \delta]$ nichts ausgezahlt wird, dann mit ϵ-optimaler Strategie oder "unendlicher Rate". Betrachtet man für jedes y eine Strategie $L^y(\cdot)$ mit

$$\mathbf{E}J_y(L^y(\cdot)) \geq V(y) - \varepsilon.$$

Sei $\delta > 0$ fest und sei $W(t) = x + \mu + \sigma W(t)$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ, Varianz σ^2 und Anfangswert x. Sei

$$L_\varepsilon(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < \delta \\ L^{W(\delta)}(t-\delta) & t \geq \delta \end{array} \right\}.$$

Die Strategie $L_\varepsilon(\cdot)$ schreibt vor, vor dem Zeitpunkt δ nichts zu zahlen. In diesem Zeitraum entwickelt sich die Reserve wie $W(t)$. Wechselt man dann zur Strategie $L^{W(\delta)}(\cdot - \delta)$ erhält man mindestens den Wert $V(W(\delta)) - \epsilon$. Da eine solche Strategie suboptimal ist, kann man

$$V(x) \geq e^{-c\delta}\mathbf{E}[V(W(\delta)) - \epsilon, \tau \geq \delta]$$

schreiben, wobei die Markov Eigenschaft benutzt wurde. Da ϵ beliebig ist, erhählt man

$$V(x) - e^{-c\delta}\mathbf{E}V(W(\delta)) + o(\delta) \geq 0.$$

Unter der Annahme das V zweimal stetig differenzierbar ist, erhält man

$$e^{-c\delta}\mathbf{E}V(W(\delta)) = (1 - c\delta)(V(x) + \delta\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x)\}) + o(\delta).$$

Dividiert man $V(x) - e^{-c\delta}\mathbf{E}V(W(\delta)) + o(\delta) \geq 0$ durch δ, erhält man

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) \leq 0.$$

Das ist eine der sogenannten 'Variationsungleichungen', die V erfüllen soll. Um eine andere zu erhalten, hält man x und $\delta > 0$ fest, sei $L^y(\cdot)$ wie oben definiert mit $y = x - \delta$. Es wird $\mathcal{L}_\epsilon = \delta + L^{x-\delta}(t)$ betrachtet. Diese Strategie schreibt augenblicklich vor, δ auszubezahlen (Reduzierung der Reserve auf $x-\delta$), und dann verwendet man die Kontrollfunktion $L^{x-\delta}(\cdot)$. Mit ähnlichen Argumenten wie oben erhält man

$$V(x) \geq \mathbf{E}\int_0^\tau e^{-ct} d\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + \mathbf{E}\int_0^\tau e^{-ct} dL^{x-\delta}(t) \geq \delta + V(x-\delta) - \epsilon.$$

Da ϵ beliebig ist, erhält man

$$V(x) - V(x-\delta) \geq \delta$$

und

$$V'(x) \geq 1.$$

Es wurde damit hergeleitet, dass V $\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) \leq 0$ und $V'(x) \geq 1$ erfüllt. Ein etwas komplizierteres Argument zeigt, dass eine der beiden Ungleichungen für jedes x zu einer Gleichung wird. Da aus $x = 0$ sofort der Ruin folgt, bleibt die Randbedingung $V(0) = 0$ erfüllt. Zusammenfassend erhalten wir folgendes Ergebnis:

Theorem 3.2 *Die optimale Returnfunktion V erfüllt die folgende Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung:*

$$max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$$

$$V(0) = 0.$$

Lösungsmethode

Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x)+\mu V'(x)-cV(x), 1-V'(x)) = 0$ wird als Lösungsinstrument verwendet. Zuerst konstruiert man eine Lösung f für $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$ aus zwei verschiedenen anlaytischen Teilen. Dann wird gezeigt, dass die Lösung die optimale Returnfunktion majorisiert. Zum Schluss wird eine Kontrollfunktion L^* konstruiert, sodass der entsprechende Performanceindex den Erwartungswert V hat. Das zeigt auch gleichzeitig $f = V$ und dass L^* die optimale Kontrolle ist.

Um eine Lösung für die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$ zu finden, nimmt man an, dass f konkav ist (wird später gezeigt). Damit ist $f'(x)$ nicht wachsend. Sei $m = sup\{x : f'(x) > 1\}$; damit ist

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} > 1 & x < m \\ = 1 & x \geq m \end{array} \right\}$$

mit $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$,

$$\mathcal{A}f(x) = 0, \quad x \leq m$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mu \frac{d}{dx} - c.$$

Sollte nun f aus zwei Teilen bestehen, wobei einer $\mathcal{A}f(x) = 0, x \leq m$ auf $[0, m]$ erfüllt und der andere $f'(x) = 1$ auf $[m, \infty)$. Um die unbekannte Grenze m zu bestimmen, wir wie in Kapitel 3.2 vorgegangen. Dort war f zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$f'(m) = f'(m-) = f'(m+), \qquad f''(m) = f''(m-) = f''(m+).$$

Das Problem ist eine Lösung f von $\mathcal{A}f(x) = 0, x \leq m$ und eine Schranke m zu finden, sodass

$$f(0) = 0$$

$$f'(m) = 0$$

$$f''(m) = 0$$

erfüllt sind.
Im Allgemeinen hat jede Lösung von $\mathcal{A}f(x) = 0, x \leq m$ die Gestalt $C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x}$, wobei θ_1, θ_2 wie in Kapitel 2 definiert sind. C_1, C_2 sind zwei beliebige Konstanten, die 2 Freiheitsgrade geben. Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $C_1 = -C_2$ und somit

$$f(x) = C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x})$$

gilt, wobei C positiv sein muss. Man erhält durch Differenzieren von $f(x) = C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x})$

$$f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} - \theta_2 e^{-\theta_2 x})$$

$$f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}).$$

Aus $f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x})$ und $f''(m) = 0$ folgt

$$m = \frac{2}{\theta_1\theta_2} log|\frac{\theta_1}{\theta_2}| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\mu^2 + 2\sigma^2 c)}} log\frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} + \mu}{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} + \mu}$$

Aus $f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} - \theta_2 e^{-\theta_2 x})$ und $f'(m) = 0$ folgt

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta 2m}}$$

Zusammenfassend erhält man:

Theorem 3.3 *Definiere*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & x \leq m \\ C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) + x - m & x \geq m \end{array} \right\},$$

wobei m und C durch $m = \frac{2}{\theta_1+\theta_2} log|\frac{\theta_1}{\theta_2}| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\mu^2+2\sigma^2 c)}} log\frac{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 c}+\mu}{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 c}+\mu}$ und $C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m}+\theta_2 e^{-\theta_2 m}}$ gegeben sind. Dann ist $f(x)$ eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$.

Beweis Für die Gültigkeit von $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x)+\mu V'(x)-cV(x), 1-V'(x)) = 0$ muss noch

$$f'(x) \geq 1 \quad \text{für} \quad x \leq m$$
$$\mathcal{A}f(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \geq m$$

gezeigt werden.
Differenziert man $f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x})$, erhält man, dass $f'''(x) \geq 0$, sodass $f''(x)$ eine wachsende Funktion ist. Weiters ist $f''(0) < 0$ (bemerke, dass $|\theta_2| > \theta_1$). Da $f''(m) = 0$ gilt, impliziert die Monotonie von $f''(x) \leq 0$, für $x \leq m$, und $f(x)$ konkav auf $[0, m]$ ist. Weiters gilt $f'(x) \leq f'(m) = 1$. Um$\mathcal{A}f(x) \leq 0$ für $x \geq m$ zu zeigen, sieht man

$$\mathcal{A}f(x) = \mu - cf(x) \leq \mu - cf(m) = \mathcal{A}f(m) = 0$$

Das vervollständigt den Beweis.

Das nächste Ziel ist es zu zeigen, dass die Funktion f aus Theorem 3.2. mit der optimalen Returnfunkiton $V(x) = sup_{a(\cdot)}\mathbf{E}J_x(a(\cdot))$ zusammenfällt. Das wird in zwei Schritten gemacht:

- Der erste Schritt (Proposition 3.1) zeigt, dass f den Erwartungswert des Performanceindexes für jede Strategie beschränkt, dass heisst, dass $f \geq V$ gilt.
- Der zweite Schritt ist es, so eine Kontrollfunktion L^* zu konstruieren, die $\mathbf{E}J_x(L^*(\cdot)) = f(x)$ erfüllt (Proposition 3.2).

Proposition 3.4 *Sei L irgendeine Kontrolle, dann gilt $f(x) \geq \mathbf{E}J_x(L)$.*

Beweis Sei $r(t) = x + \mu t + \sigma W(t) - L(t)$ gegeben und sei τ die entsprechende Ruinzeit. Für jede wachsende Funktion $L(\cdot)$ nimmt man $\Lambda = \{s : L(s-) \neq L(s)\}$. Sei $L^d = \sum_{s\epsilon\Lambda, s\leq t}[L(s) - L(s-)]$ der unstetige Teil von L und $L^c(t) = L(t) - L^d(t)$ der stetige Teil. Verwendet man die allgemeine Itô-Formel, kann man

$$e^{-c(t\wedge\tau)}f(r(t\wedge\tau))$$

$$= f(x) + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}\mathcal{A}f(r(s))ds + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dW(s) - \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dL(s)$$

$$- \sum_{s\epsilon\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(r(s)) - f(r(s-)) - f'(r(s-))(r(s) - r(s-))]$$

$$= f(x) + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}\mathcal{A}f(r(s))ds + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dW(s)$$

$$- \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dL^c(s) - \sum_{s\epsilon\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(r(s)) - f(r(s-))]$$

(= Gleichung 1) schreiben. Mit Blick auf $max(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)) = 0$ ist der Integrand im zweiten Ausdruck auf der rechten Seite nicht positiv. Da f konkav ist, gilt $0 < f'(x) < f'(0) < \infty$. Der dritte Term ist ein quadratisch integierbares Martingal mit Mittelwert 0. Nimmt man den Erwartungswert, erhält man

$$\mathbf{E}[e^{-c(t\wedge\tau)}f(r(t\wedge\tau))]$$

$$\leq f(x) - \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dL^c(s) - \mathbf{E}\sum_{s\epsilon\wedge, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(r(s)) - f(r(s-))].$$

Die linke Seite der Ungleichung ist gleich

$$\mathbf{E}[e^{-ct}f(r(t)); t < \tau] = e^{-ct}\mathbf{E}[f(r(t)); t < \tau].$$

Trivialerweise gilt $r(t) \leq |w(t)|$ wobei $w(t)$ eine allgemeine Brownsche Bewegung mit Parametern (μ, σ^2) ist. Durch die Konkavität von f gilt $f(x) \leq a + bx$ für einige $a, b > 0$.
Damit ist $\mathbf{E}[e^{-ct}f(r(t)); t < \tau] = e^{-ct}\mathbf{E}[f(r(t)); t < \tau]$ beschränkt durch $c^{-ct}(a + b\mathbf{E} \mid W(t) \mid)$, was gegen 0 konvergiert für $t \to \infty$. Man erinnere sich an $f'(x) \geq 1$ und $r(s) - r(s-) = L(s-) - L(s)$. Damit ist $f(r(s)) - f(r(s-)) \leq L(s-) - L(s)$. Mit dem Übergang zum Grenzwert in $f(x) - \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r(s))dL^c(s) - \mathbf{E}\sum_{s\epsilon\wedge, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(r(s)) - f(r(s-))]$ erhält man:

$$0 \leq f(x) - \mathbf{E}\int_0^{\tau} e^{-cs}dL^c(s) - \mathbf{E}\sum_{s\epsilon\wedge, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[L(s) - L(s-)]$$

$$= f(x) - \mathbf{E}\int_0^{\tau} e^{-cs}dL(s).$$

Korollar 3.3 $f(x) \geq V(x)$.

Als nächstes wird das Funktional L^* mit $\mathbf{E}J_x(L) = f(x)$ konstruiert.
Sei m wie in Theorem 3.2 und sei

$$L^*(t) = \max_{s\leq t}(x + \mu s + \sigma W(s) - m]^+$$

$$r^*(t) = x + \mu + \sigma W(t) - L^*(t)$$

$\{L^*(t)\}_{t\geq 0}$ ist ein stetig wachsender Prozess mit $L(0) > 0$, dann und nur dann falls $x > m$. In diesem Fall hat L eine Sprungstelle bei $x - m$ mit Sprunghöhe $t = 0$.
Der Prozess $r^*(t)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, m]$ mit m als reflektierende obere Schranke, und das Funktional $L^*(\cdot)$ wächst nur, wenn $r^*(t) = m$ gilt, genauer gesagt gilt:

$$r^*(t) \leq m \qquad \forall t \geq 0,$$

$$\int_0^{\infty} 1_{r^*(t)<m} dL^*(t) = 0.$$

Proposition 3.5 *Sei f wie in Theorem 3.2, dann gilt $\mathbf{E}J_x(L^*) = f(x)$.*

Beweis Sei $\tau^* = inf\{t : r^*(t) = 0\}$. Mit der Itô-Formel in der Gleichung 1, wobei L, τ durch L^*, τ^* ersetzt wird, ist der zweite Term der rechten Seite der Gleichung 1 0 wegen $r * (t) \leq m$, $t \geq 0$, und $\mathcal{A}f(x) = 0$ falls $x \leq m$. Bildet man den Erwartungswert auf beiden Seiten, dann verschwindet der Martingalteil, und man erhält

$$\mathbf{E}[e^{-ct}f(r^*(t)); t < \tau^*] = f(x) - \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r^*(s))dL^*(s).$$

Da f beschränkt auf $[0, m]$ ist, konvergiert die linke Seite dieser Gleichung gegen 0 für $t \to \infty$. Außerdem führt $\int_0^\infty 1_{r^*(t)<m}dL^*(t) = 0$ und $f'(m) = 1$ zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r^*(s))dL^*(s) &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r^*(s))1_{r^*(s)=m}dL^*(s)\\ &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(m)1_{r^*(s)=m}dL^*(s)\\ &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}1_{r^*(s)=m}dL^*(s)\\ &= \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}dL^*(s)\end{aligned}$$

Setzt man $\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}dL^*(s)$ in
$\mathbf{E}[e^{-ct}f(r^*(t)); t < \tau^*] = f(x) - \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}f'(r^*(s))dL^*(s)$ ein und lässt t gegen unendlich gehen, ergibt

$$f(x) = \mathbf{E}\int_0^{\tau} e^{-cs}dL^*(s) = 0.$$

Korollar 3.4 *$f(x) = V(x)$ und L^* ist die optimale Kontrolle.*

Beweis Man verwendet Korollar 3.1, Proposition 3.2 und die Ungleichung $V(x) \geq \mathbf{E}J_x(L^*)$.

Anmerkung 3.1 *Die Lösung zu unserem Problem kann in verschiedene Teile zerlegt werden. Um zu jedem Zeitpunkt die richtige Dividende auszuzahlen, sollte das Unternehmen den im vorhinein unbekannten optimalen Reservestand m ermitteln und immer den Betrag auszuzahlen der diesen übersteigt ($> m$) und anderenfalls nichts ($\leq m$) auszuzahlen.*

3.4 Abschließende Bemerkungen

(1) Die Annahmen in $dr^{(a)}(t) = \mu t + \sigma dW(t)$ können durch mindestens zwei Ansätze motiviert werden.

1. Entweder modelliert man die Reserve direkt als Brownsche Bewegung oder
2. Man verwendet als Näherung zur Beschreibung der Reserveentwicklung einen Standard Prozess, zum Beispiel einen zusammengesetzten Poisson-Prozess, dass heisst

$$R_t = R_0 + pt - \sum_1^{N_t} U_i,$$

wobei

$\{N_t\}$ ist ein Poisson Prozess mit Intensität β,
U_i (Zahlungshöhen) sind unabhängig identisch verteilt.

Wenn man hier p, β geeignet gegen Unendlich gehen lässt, und U_i geeignet klein werden lässt, so erhält man im Limes eine Brownsche Bewegung mit Drift.

(2) Die Wahl $J_x = \int_0^\tau e^{-ct}a(t)dt$ des Performanceindexes als die Summe aller (diskontierten) Auszahlungen der Dividenden ist nicht die einzig mögliche. Zum Beispiel könnte man den Reichtum des Unternehmens diskontiert mit Rate $c > 0$

$$J_x = \int_0^\infty e^{-ct}r(t)dt = \int_0^\tau e^{-ct}r(t)dt$$

betrachten, oder man verhängt eine Strafe $P\epsilon[0, m]$ für den Ruin, was zu

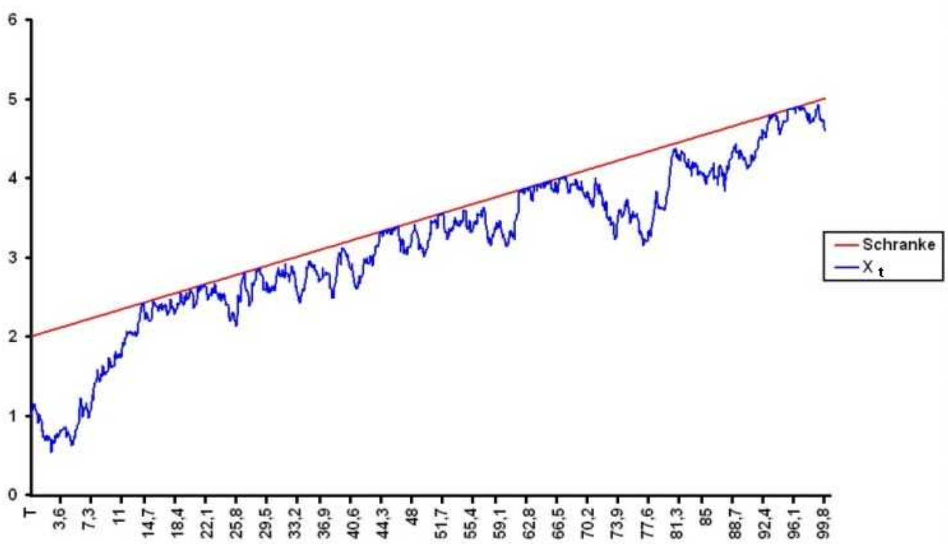
$$J_x = -P1_{\{\tau<\infty\}}$$

führt, wobei $\tau = inf\{t > 0 : r(t) = 0\}$. Ruinwahrscheinlichkeiten können für Diffusionen explizit angegeben werden: Falls $\{r(t)\}$ eine Diffusion mit Drift $\mu(x)$ und Varianz $\sigma^2(x)$ in x ist, dann ist

$$\psi(x) = \frac{\int_x^\infty [\exp -2\int_0^u \frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy]du}{\int_0^\infty [\exp -2\int_0^u \frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy]du}.$$

Auch Linerarkombinationen der oben beschriebenen Perfomance-indizes können interessant sein.

Simulation



6
5
4
3
2
0
Schranke
X_t
T
3,6
7,3
11
14,7
18,4
22,1
25,8
29,5
33,2
36,9
40,6
44,3
48
51,7
55,4
59,1
62,8
66,5
70,2
73,9
77,6
81,3
85
88,7
92,4
96,1
99,8

1 Berechnung von Zahlen nach vorgegebenen Verteilungen

Für die Bewertung und Simulation von Finanzinstrumenten benötigt man Zahlen, die nach bestimmten Vorgaben verteilt sind. Dieser Ablauf verläuft letztendlich deterministisch im Generator. "Pseudo-Zufallszahlen", die entsprechend generiert werden, versuchen die Eigenschaften von wirklichen Zufallszahlen nachzubilden und normalverteilte Zahlen können durch geeignete Transformationen von Gleichverteilten berechnet werden.

1.1 Pseudo-Zufallszahlen

Zahlenfolgen, die zwar zufällig aussehen, es aber nicht sind, bezeichnet man als Pseudo-Zufallszahlen. Die erzeugten "Zufallszahlen" im Generator heißen "Pseudo-Zufallszahlen", da man reproduzierbare, deterministische Methoden verwendet, um diese Zufallszahlen zu berechnen, einen deterministischen Algorithmus (Pseudozufallszahlengenerator). Es wird die gleiche pseudozufällige Zahlenfolge erzeugt, bei jedem Start der Berechnung mit gleichem Startwert.
Beim deterministischen Algorithmus folgt die gleiche Anweisung unter gleichen Voraussetzungen im Algorithmus. Jeder folgende Schritt des Algorithmus ist eindeutig festgelegt.

Die erzeugten Zahlen werden durch statistische Eigenschaften charakterisiert, wie zum Beispiel die erzeugte Verteilung oder die Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden Zahlen.

Definition 1.1 [17] *Eine Folge von Zahlen heißt nach F verteilte Zufallszahlen, wenn sie unabhängige Realisierungen einer nach einer Verteilungsfunktion F verteilten Zufallsvariablen sind.*

Ausgangspunkt sind diejenigen Pseudo-Zufallszahlen, die auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt sind.
Die Anwendung von Pseudo-Zufallszahlen findet man wieder

- in Computersimulationen,
- in der Künstlichen Erzeugung von (weißen) Rauschen,
- bei der Suche nach Fehlern in Computerprogrammen.

[17] Seydel: Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten, Springer

1.2 Verteilungen

Verteilung und Verteilungsfunktion einer Zufallsgrösse

Definition 1.2 [18] *Sei X eine Zufallsgrösse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Das über der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbf{R}$ mittels*

$$\mu(B) = \mu_X(B) = \mathbf{P}(X \epsilon B), \qquad B \epsilon \mathcal{B}$$

definierte Lebesgue-Stieltjes Maß mit $\mu(\mathbf{R}) = 1$ heißt die zu X gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung oder einfacher die Verteilung von X; die Funktion

$$F(x) = F_X = \mathbf{P}(X \leq x), \qquad x \epsilon \mathbf{R}$$

heißt die Verteilungsfunktion von X.

Die Verteilungsfunktion F ist ein überaus brauchbares Werkzeug zur Beschreibung der möglicherweise komplizierten Struktur von μ. Es gilt dann stets

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

und allgemeiner $\mu(B) = \mathbf{P}(X \epsilon B) = \int_B dF(x)$. Man beachte, dass es eine Bijektion zwischen den Verteilungen und den Verteilungsfunktionen auf $\mathbf{R}$ gibt. Man kann daher F und μ quasi "identifizieren".

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Satz 1.1 *Sei F die Veteilungsfunktion einer Zufallsgrösse X. Dann gilt:*

1. *für alle x in $\mathbf{R}$ ist $0 \leq F(x) \leq 1$,*
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,
4. *F ist nicht fallend und rechtsstetig.*

Diskrete Verteilungen

Eine Zufallsgrösse beziehungsweise ihre Verteilung heißt diskret, wenn die Verteilungsfunktion bis auf höchstens abzählbar unendlich viele Sprünge konstant ist.

[18] A.Schmidt, K.Hornik, C.Bernscherer, K.Grill: Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiele für diskrete Verteilungen

- Binominalverteilung:
  Ist X eine Zufallsgröße mit $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, so sagt man, dass X einer Binomialverteilung $B_{n,p}$ mit Parametern n und p folgt (oder einfacher, dass X binomialverteilt mit Paramtern n und p ist).

- negative Binomialverteilung:
  Für $n \geq 1$ und $0 < p < 1$ nennt man eine Zufallsgröße X mit $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k, \quad k = 0, 1, \ldots$ negativ binomialverteilt oder pascalverteilt mit Parametern n und p; der Spezialfall $n = 1$ wird Üblicherweise als geometrische Verteilung bezeichnet.

- hypergeometrische Verteilung:
  Es gilt $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Man sagt, dass X eine hypergeometrische Verteilung $H_{M,N,n}$ mit Parametern N, M und n besitzt.

- Multinomialverteilung:
  Es gilt $\mathbf{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$. Diese Verteilung des Zufallsvektors $(X_1, \ldots, X_r)$ ist die sogenannte Multinomialveteilung mit Parametern n und $p_1, \ldots, p_r$.

- Poisson-Verteilung:
  Sei $\lambda > 0$. Eine Zufallsgröße X ist poissonverteilt mit Parameter λ, wenn $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$. Die Poissonverteilung ist von großer Bedeutung in Gebieten wie Elementarteilchenphysik, Biologie, Astronomie und Qualitätskontrolle.

Stetige Verteilungen

Eine Zufallsgröße beziehungsweise ihre Verteilung heißt stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion eine stetige Funktion ist.
In diesem Fall existiert für alle $0 < p < 1$ ein minimales x_p, sodass $F(x_p) = p$. Man nennt x_p das p-Quantil (Fraktil) von F; insbesondere heißt $x_{\frac{1}{2}}$ der Median von F.

Beispiele für stetige Verteilungen

- Gleichverteilung:
  Sei $a < b$. Die Gleichveteilung $U_{a,b}$ im Intervall (a, b) ist gegeben durch die Dichte $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{b-a} & 0 < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$ und der Verteilungsfunktion $F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{array} \right\}$.

- eindimensionale Normalverteilung:
  Sei $\nu \epsilon \mathbf{R}$ und $\sigma > 0$. Die Verteilung mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\tau\sigma}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\nu}{\sigma})^2)$ heißt die eindimensionale Normalverteilung $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$ mit Parametern ν und σ^2.
  Von besonderer Bedeutung ist jene Normalverteilung mit $\nu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, die als Standardnormalverteilung bezeichnet wird.

- Gammaverteilung:
  Seien $a, \lambda > 0$. Die Gammaverteilung der gamma(a,λ) oder auch $\psi(a, \lambda)$ mit Parametern a und λ ist gegeben durch die Dichte $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda^a e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} & x > 0 \\ 0 & sonst \end{array} \right\}$.

- Exponentialverteilung:
  Die Exponentialverteilung E_λ ist eine Gammaverteilung mit Parametern $a = 1$ und λ.

- Die Chiquadrat-Verteilung = $\mathcal{X}^2$-Verteilung
  Die Chiquadrat-Verteilung $\mathcal{X}_n^2$ mit n Freiheitsgraden ist eine Gammaverteilung mit Parametern $n/2$ und $1/2$. Sie ist von fundamentaler Bedeutung als Testverteilung in der Statistik.

1.3 Transformation von Verteilungen

Satz 1.2 *Sei $U \ldots$ gleichverteilt und sei $F \ldots$ die Verteilungsfunktion, dann folgt dass $X = F^{-1}(U)$ gleichverteilt ist mit Verteilungsfunktion $F(t)$.*

Beweis

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leq z) &= \mathbf{P}(F^{-1}(U) \leq z) \\ &= \mathbf{P}(U \leq F(z)) \\ &= F(z)\end{aligned}$$

2 Die Simulation

2.1 Was ist zu simulieren

Wir wollen nun folgendes Funktional maximieren:

$$J := \mathbf{E}[\int_0^\infty e^{-ct}a(t)dt] - \alpha\mathbf{P}(\tau < \infty), \quad \alpha > 0$$

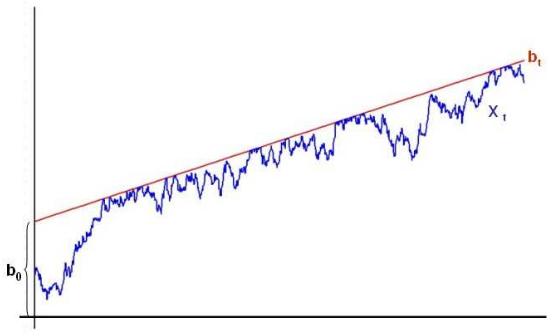
Der 2.Term wird als sogennanter Penaltyterm (= Strafterm für Ruin) bezeichnet, das heißt je höher der Parameter α ist, desto stärker wird ein auftretender Ruin bestraft.

Als Barriere wählen wir eine lineare Funktion der Gestalt

$$b_t = b_0 + b_1 t$$

Oberhalb dieser Barriere wird alles ausbezahlt.

Man erhält also in etwa folgendes Bild

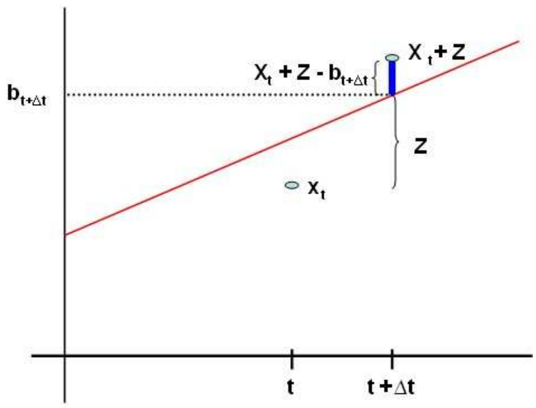


- Es wird ein großer Zeithorizont T angenommen, weil ∞ nicht genommen werden kann.
- Um zu simulieren wird der Prozess $\mu t + \sigma W_t$ diskretisiert. In jedem Zeitpunkt wird also die Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ simuliert.
- Die Zuwächse Z sind normalverteilt mit Mittelwert $\mu\Delta t$ und Varianz $\sigma^2\Delta t$, wobei μ und σ auf ein Jahr betrachtet werden und Δt ein Teilwert des Jahres ist.

Zu jeden Zeitpunkt gibt es 2 Möglichkeiten:

Mögl. 1: Der Zuwachs bringt uns über die Schranke, das heißt das die Differenz ausbezahlt wird. Der auszuzahlende Betrag wird wie folgt berechnet:
$X_t + Z \geq b_{t+\Delta t}$
$\mapsto$ Auszahlung von $X_t + Z - b_{t+\Delta t}$, und man erhält für den neuen Startwert $x_{t+1} = b_{t+\Delta t}$

Den Auszahlungsbetrag $X_t + Z - b_{t+\Delta t}$ diskontiert man mit $e^{-c(t+\Delta t)}$ und erhält den Beitrag zum Zielfunktional: $e^{-c(t+\Delta t)}(X_t + Z - b_t)$



Mögl. 2: Die Schranke wird nicht überschritten und es erfolgt keine Auszahlung. $X_t + Z < b_{t+\Delta t}$
$\mapsto$ keine Auszahlung, neuer Startwert $x_{t+\Delta t} = x_t + Z$ und kein Beitrag zum Zielfunktional.

Wir lassen zuerst μ, σ und c konstant, zum Beispiel:

$$\mu = 0.05$$

$$\sigma = 0.2$$

$$c = 0.03$$

Weiters sei nun α=konstant=1, b_0=konstant=1 und auch $X_0 = 1$ und wir variieren die Steigung b_1 (nur die Steigung der Barriere lassen wir steigen.)

Für die Simulation wurde $\Delta t = 0,1$ und $T = 100$ gesetzt. Es wurden 1000 Simulationen durchgeführt und der Mittelwert bebildet.

In der Tabelle scheinen sowohl b_1, Barwert, Ruinwahrscheinlichkeit als auch das J auf.

Alpha = 1

B1	Barwert	Ruinwahrscheinlichkeit	J
0,01	1,35	44%	0,91
0,02	1,19	29%	0,90
0,03	1,01	26%	0,75
0,04	0,85	25%	0,60
0,05	0,71	24%	0,47
0,06	0,59	21%	0,38
0,07	0,49	20%	0,29
0,08	0,41	19%	0,22
0,09	0,34	18%	0,16
0,1	0,29	17%	0,12

2.2 Das Ergebnis

2.2.1 Simulationsergebnis für verschiedene Werte von α

Konstante Werte:

- $\mu = 0.05$
- $\sigma = 0.2$
- $c = 0.03$

Alpha = 1

B1	Barwert	Ruinwahrscheinlichkeit	J
0,01	1,35	44%	0,91
0,02	1,19	29%	0,90
0,03	1,01	26%	0,75
0,04	0,85	25%	0,60
0,05	0,71	24%	0,47
0,06	0,59	21%	0,38
0,07	0,49	20%	0,29
0,08	0,41	19%	0,22
0,09	0,34	18%	0,16
0,1	0,29	17%	0,12

Wie mam hier erkennen kann, liegt das Maximum bei einem b_1 von $0,01$. Bei einem Wert des $\alpha's$ von 0 liegt der Wert auch bei $0,01$. Dies macht aber langfristig wenig Sinn, weil man bei einer hohen Ruinwahrscheinlichkeit nur kurzfristig überlebt.

Es wurden noch andere Werte für α untersucht und folgende Ergebnisse erhalten:

Alpha = 3

B1	Barwert	Ruinwahrscheinlichkeit	J
0,01	1,35	44%	0,03
0,02	1,19	29%	0,32
0,03	1,01	26%	0,23
0,04	0,85	25%	0,10
0,05	0,71	24%	-0,01
0,06	0,59	21%	-0,04
0,07	0,49	20%	-0,11
0,08	0,41	19%	-0,16
0,09	0,34	18%	-0,20
0,1	0,29	17%	-0,22

Das Maximum liegt bei einem b_1 von $0,02$, anlag dazu wie bei den Werten für die $\alpha's$ von 2 bis 5.

Alpha = 10

B1	Barwert	Ruinwahrscheinlichkeit	J
0,01	1,35	44%	-3,05
0,02	1,19	29%	-1,71
0,03	1,01	26%	-1,59
0,04	0,85	25%	-1,65
0,05	0,71	24%	-1,69
0,06	0,59	21%	-1,51
0,07	0,49	20%	-1,51
0,08	0,41	19%	-1,49
0,09	0,34	18%	-1,46
0,1	0,29	17%	-1,41

Hier sieht man das bei $0,04$ das Maximum liegt, das Gleiche folgt auf die darauf folgenden Werte der $\alpha's$.

Alpha = 100

B1	Barwert	Ruinwahrscheinlichkeit	J
0,01	1,35	44%	-42,65
0,02	1,19	29%	-27,81
0,03	1,01	26%	-24,99
0,04	0,85	25%	-24,15
0,05	0,71	24%	-23,29
0,06	0,59	21%	-20,41
0,07	0,49	20%	-19,51
0,08	0,41	19%	-18,59
0,09	0,34	18%	-17,66
0,1	0,29	17%	-16,71

Man beobachtet das das Maximum bei $0,1$ liegt, wie schon bei den Werten der $\alpha's$ wie 50.

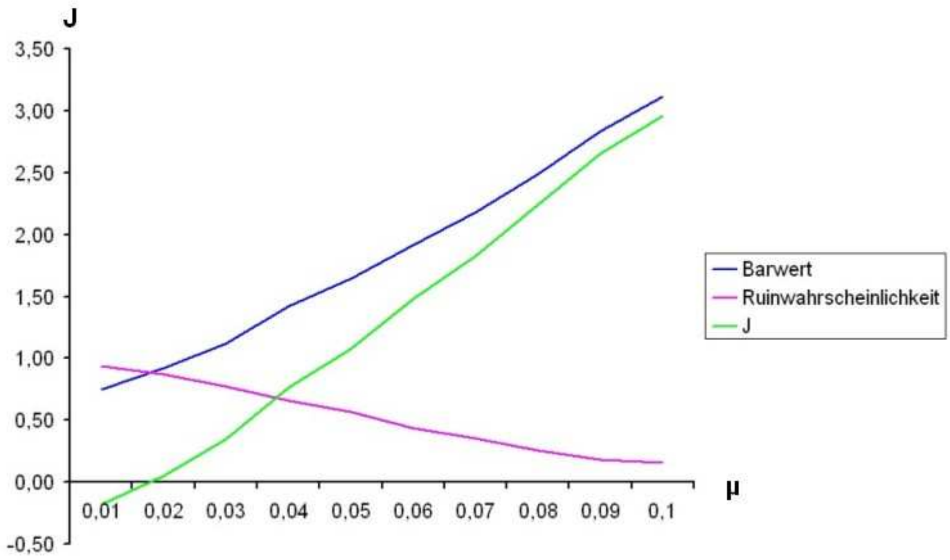
Resultat
Der Wert von α sollte am Anfangskapital x_0 angepasst werden. Mit der Wahl von α kann man den Einfluss der Ruinwahrscheinlichkeit steuern.
Je größer das α gewählt wird, desto größer wird Gewicht auf die Ruinwahrscheinlichkeit gelegt.
In der Praxis wird die Ruinwahrscheinlichkeit sehr bestrafft, da man langfristig das Überleben des Portfolios sicherstellen möchte.

2.2.2 Mittelwert und Varianz

Bei Änderung des Mittelwertes μ:

Konstante Werte:

- $\alpha = 1$
- $\sigma = 0.2$
- $c = 0.03$

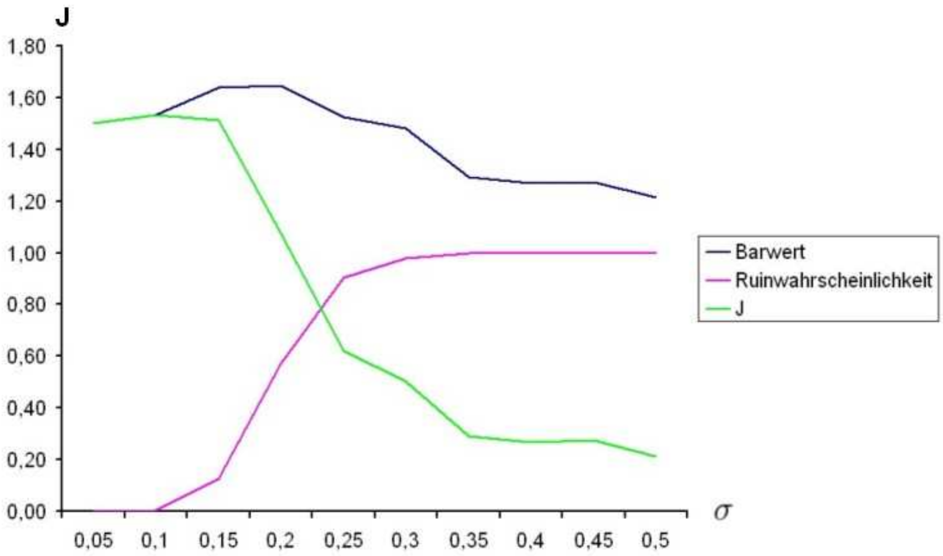


- Wie man hier erkennen kann steigt mit dem Erwartungswert logischerweise auch der Barwert.
- Weiters sinkt natürlich auch die Ruinwahrscheinlichkeit.
- Man erkennt dass das Zielfunktional J erst im Minus ist, aber dann indirekt proportional zur Ruinwahrscheinlichkeit steigt, wobei auch die Steigung des Barwertes miteinfließt.

Bei Änderung der Varianz σ:

Konstante Werte:

- $\alpha = 1$
- $\mu = 0.05$
- $c = 0.03$



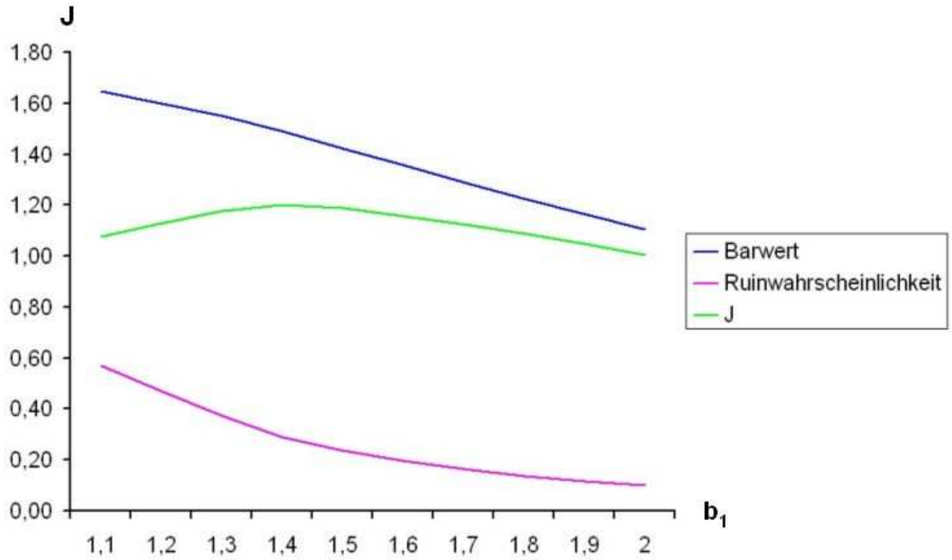
Das Diagramm zeigt das bei steigender Varianz (Volatilität) folgende Effekte auftretten:

- höherer Barwert
- durch die höhere Volatiltiät steigt natürlich auch die Ruinwahrscheinlichkeit.
- Je stärker die Schwankung umso größer ist die Ruinwahrscheinlichkeit und desto geringer das Zielfunktional J.

Bei Änderung der Schranke b_1:

Konstante Werte:

- $\alpha = 1$
- $\mu = 0.05$
- $\sigma = 0.2$



- Wie man sieht wird die Steigung der Barriere erhöht sinkt logischerweise der Barwert da weniger ausgezahlt wird.

- Wird weniger ausbezahlt bleiben mehr Reserven für schlechtere Ergebnisse, dadurch sinkt die Ruinwahrscheinlichkeit.

- Die Steigung von J ist indirekt proportional zur Steigung der Ruinwahrscheinlichkeit, jedoch hat der Barwert einen Einfluß.

2.2.3 Vergleich zwischen Variabel und Fix

Wir vergleichen nun noch den Fall

- einer konstanten Schranke: $b = b_0$ und
- einer linear wachsenden Schranke: $b = 1 + b_1 t$

wobei wir für unser Beispiel die unten stehenden Werte verwenden:

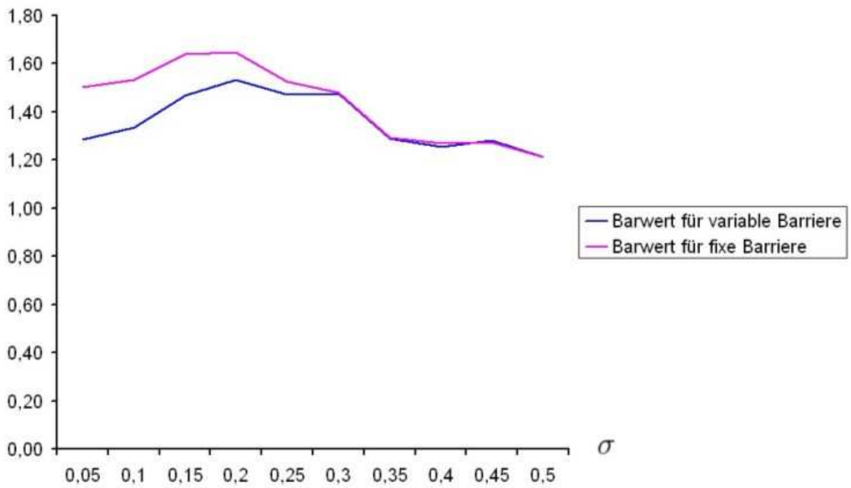
- $b_0 = 1.1$
- $b_1 = 0.01$

Konstante Werte:

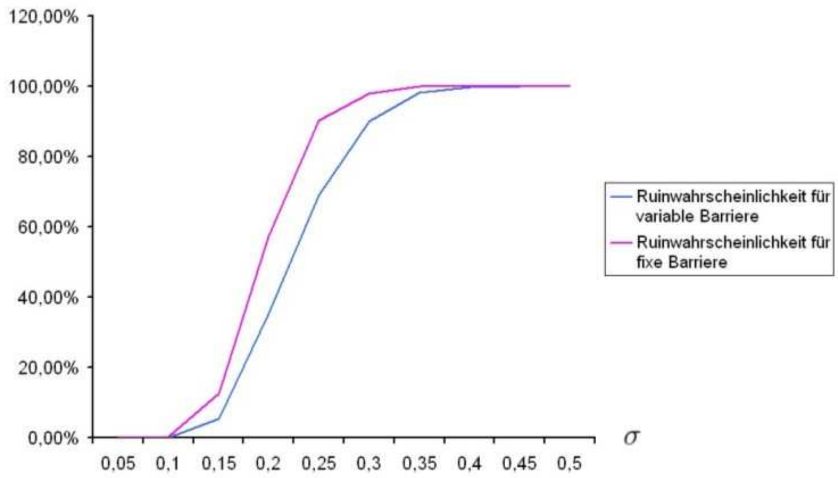
- $\alpha = 1$
- $\mu = 0.05$
- $c = 0.03$

Die unteren Diagramme zeigen, dass der Verlauf grundsätzlich gleich bleibt. Je geringer die Schwankung umso mehr hängt es von den Schranken ab. Je größer das σ umso ähnlicher verhalten sie sich, nur bei geringeren σ gibt es Abweichungen.

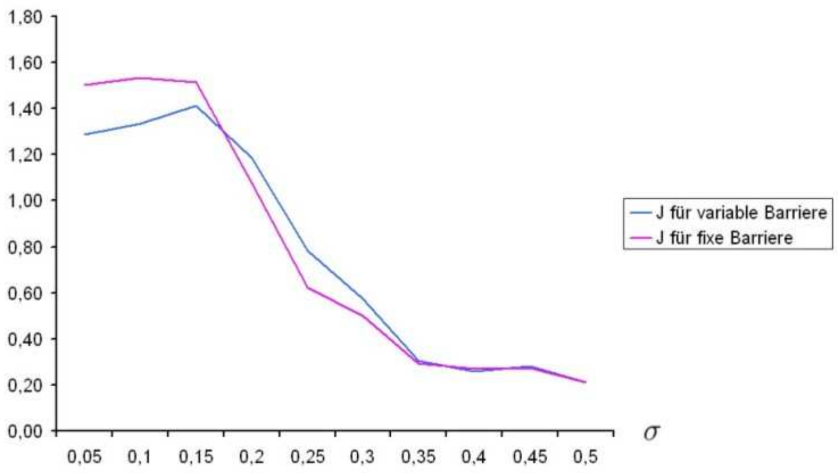
Barwert



Ruinwahrscheinlichkeit



Zielfunktional J



Anhang

1 Der Source-Code

```
rm(list=ls(all=TRUE))


sim<-function(mu,sig,delta){

z=rnorm(1000,mu*delta,sig*delta^0.5)
result=z
}


sim2<-function(b0,b1,c){


x=c(rep(0,1001))
a=c(rep(0,1000))
x[1]=1

t=1
ruin=0

while (t<=1000) {
x[t+1]=x[t]+z[t]
a[t]=max(x[t+1]-b0-b1*t*delta,0)
x[t+1]=x[t+1]-a[t]
if (x[t+1]<=0) {
ruin=1
t=1001}
t=t+1
}

t=c(1:1000)

bw=t(a)%*%exp((-c)*t*delta)

erg=c(0,0)
erg[1]=ruin
erg[2]=bw
result=erg
}
```

```
mu=0.05
sig=0.2
b0=1
alpha=1
c=0.03
n=1000
delta=0.1

lsg=matrix(rep(0,40),ncol=4)


z=sim(mu,sig,delta)


for (k in 1:10) {b1=k/100
lsg[k,1]=b1
erg=sim2(b0,b1,c)
lsg[k,2]=lsg[k,2]+erg[2]
lsg[k,3]=lsg[k,3]+erg[1]
}



for (k in 1:10) {
lsg[k,2]=lsg[k,2]/n
lsg[k,3]=lsg[k,3]/n
lsg[k,4]=lsg[k,2]-alpha*lsg[k,3]
}


write.table(lsg,'test.csv',append=FALSE,sep=";")
```

Unterschied Fix/Variabel

```
rm(list=ls(all=TRUE))



alpha=1
c=0.03
n=1001
delta=0.1


sim<-function(mu,sig,delta){

z=rnorm(1000,mu*delta,sig*delta^0.5)
result=z
}


sim2<-function(b0,b1,c){


xv=c(rep(0,1001))
av=c(rep(0,1000))
xv[1]=1

xf=c(rep(0,1001))
af=c(rep(0,1000))
xf[1]=1


t=1
ruinv=0

while (t<=1000) {
xv[t+1]=xv[t]+z[t]
av[t]=max(xv[t+1]-b1*t*delta-1,0)
xv[t+1]=xv[t+1]-av[t]
if (xv[t+1]<=0) {
ruinv=1
t=1001}
```

```
t=t+1
}

t=1
ruinf=0

while (t<=1000) {
xf[t+1]=xf[t]+z[t]
af[t]=max(xf[t+1]-b0,0)
xf[t+1]=xf[t+1]-af[t]
if (xf[t+1]<=0) {
ruinf=1
t=1001}
t=t+1
}

t=c(1:1000)

bwv=t(av)%*%exp((-c)*t*delta)
bwf=t(af)%*%exp((-c)*t*delta)

erg=c(0,0,0,0)
erg[1]=ruinv
erg[2]=bwv
erg[3]=ruinf
erg[4]=bwf
result=erg
}




for (m in 1:10) { mu=m/100

for (s in 1:10) { sig=s/20

lsg=matrix(rep(0,100),ncol=10)
```

```
for (i in 1:n) {

z=sim(mu,sig,delta)


for (k in 1:10) {b1=k/100
b0=1+k/10
lsg[k,1]=b1
lsg[k,5]=b0
erg=sim2(b0,b1,c)
lsg[k,2]=lsg[k,2]+erg[2]
lsg[k,3]=lsg[k,3]+erg[1]
lsg[k,6]=lsg[k,6]+erg[4]
lsg[k,7]=lsg[k,7]+erg[3]


}

}

for (k in 1:10) {
lsg[k,2]=lsg[k,2]/n
lsg[k,3]=lsg[k,3]/n
lsg[k,4]=lsg[k,2]-alpha*lsg[k,3]
lsg[k,6]=lsg[k,6]/n
lsg[k,7]=lsg[k,7]/n
lsg[k,8]=lsg[k,6]-alpha*lsg[k,7]
lsg[k,9]=mu
lsg[k,10]=sig
}


write.table(lsg,'out.csv',append=TRUE,sep=";",row.names=FALSE,col.na
mes=FALSE)


}
}
```

Literaturverzeichnis

[1] A.M. Schmidt, C. Bernscherer, K. Hornik, K. Grill, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Version 0.99-1, 2002

[2] A. Taha, A.Soszynska, *Stochastische Differentialgleichungen - ITÔ-Prozesse*; 2006

[3] E.H.E. Kranz; *Optimale Dividendenzahlung einer Versicherungsgesellschaft bei nicht konstantert Dividende*; Dissertation, 1973

[4] Jun.-Prof.Dr. Evegeny Spodarev; *Stochastische Risikotheorie*

[5] J. Creutzig, *Stochastische Analysis*; Version vom 04.05.1004

[6] J. Teichmann, *A course in mathematical finance*, 2005

[7] K. Grill, *Theorie Stochastischer Prozesse*, 2005

[8] L. Grüne, *Mathematische Kontrolltheorie I*, 2005/2006

[9] Ralf und Elke Korn, *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung; Moderne Methoden der Finanzmathematik*, 1999

[10] S. Amussen, M. Taksar, *Controlled diffusion models for optimal divided pay-out*, Insurance: Mathematics and Economics 20 (1997) 1-15

[11] Seydel, *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*, Springer