Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

DIPLOMARBEIT

Kontinuumsmechanische Modellierung von Muskelgewebe

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Dr. Thomas Daxner
E317
Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik

und

Univ. Prof. Dr. Philippe K. Zysset
E317
Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Michael Kinzl
0125575
Wigandgasse 8
3400 Klosterneuburg

Wien, am

Abstract

In the current work a continuum mechanical material model for passive and active muscle tissue was derived. The initial points for that were the structural composition of muscle tissue, its mechanical properties and the muscle models proposed in the literature [8, 11, 31, 20]. The muscle tissue was assumed to be transversally isotropic, hyperelastic and nearly incompressible. The material modeling of the active muscle fiber stress and the passive tissue properties in fiber direction was based on Hill's muscle model. Starting from the relation between force and length of Hill's muscle model, the corresponding equations on the level of stresses and strains for the active and passive part of the stress component in fiber direction were derived.

The passive properties of the muscle tissue in fiber direction, in cross-fiber direction and for along-fiber shear were modeled by use of independent strain energy potentials [8], by assuming these components of the strain energy potential as functions of the invariants proposed by Criscione [12] and the fiber stretch. The shape of these functions was chosen on the basis of the data measured from compression experiments on cubical muscle specimens in [31].

The material model was implemented into the finite element program ABAQUS, by use of a UMAT subroutine. For this purpose the material law and the algorithmically consistent material tangent with respect to the Jaumann rate of Cauchy stress, which is consistent with the Hughes-Winget method used in ABAQUS for continuum elements, had to be derived from the strain energy potential.

The material parameters for the passive part of the material model were identified from measured data of compression experiments on cubical muscle specimens [31]. These experimental data was also used to validate the material response of the passive muscle model to compression at different fiber orientations. The identified material parameters were used to simulate a contact problem between two simplified muscles at large deformation of one muscle.

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein kontinuumsmechanisches Materialmodell für passives und aktives Muskelgewebe hergeleitet. Ausgangspunkte dafür waren der Aufbau des Muskelgewebes, seine mechanischen Eigenschaften und in der Literatur vorhandene Muskelmodelle [8, 11, 31, 20]. Das Muskelgewebe wurde als transversal isotrop, hyperelastisch und nahezu inkompressibel angenommen. Die Modellierung des aktiven Verhaltens des Muskelgewebes und seiner passiven Eigenschaften in Faserrichtung erfolgte ausgehend vom Hill'schen Muskelmodell. Aus den Beziehungen zwischen den Kräften und Längen des Hill'schen Muskelmodells wurden die entsprechenden Gleichungen auf der Ebene von Spannungen und Verzerrungen für den aktiven und passiven Anteil der Spannungskomponente in Faserrichtung hergeleitet.

Das passive Verhalten des Muskelgewebes in Faserrichtung, quer zur Faserrichtung und bei Schub längs der Faserrichtung wurde durch voneinander unabhängige Verzerrungsenergie-Potentiale modelliert [8], indem diese Anteile des Verzerrungsenergie-Potentials als Funktionen der von Criscione vorgeschlagenen Invarianten [12] und der Faserstreckung angenommen wurden. Die Form dieser Funktionen wurde so gewählt, dass die in [31] angegebenen experimentellen Daten aus Druckversuchen an würfelförmigen Muskelproben mit verschiedenen Faserorientierungen durch das Materialmodell möglichst exakt wiedergegeben werden können.

Das Materialmodell wurde in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS mittels einer UMAT-Subroutine implementiert. Dazu wurden ausgehend vom Verzerrungsenergie-Potential das Materialgesetz und die algorithmisch konsistente Materialtangente bezüglich der Jaumann-Spannungsrate, welche mit der in ABAQUS für Kontinuumselemente verwendeten Hughes-Winget-Methode konsistent ist, hergeleitet.

Die Materialparameter für den passiven Anteil des Muskelmodells wurden anhand von experimentellen Daten aus Druckversuchen mit verschiedenen Faserorientierungen [31] identifiziert. Diese experimentellen Daten wurden auch für die Validierung des passiven Verhaltens des Muskelmodells bei Druckbelastung in verschiedenen Richtungen verwendet. Mit den identifizierten Materialparametern wurde ein Kontaktprobleme zwischen zwei vereinfachten Muskeln bei großer Deformation simuliert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
- 1.1 Einleitung . . . 1
- 1.2 Aufbau des Muskels . . . 2
- 1.3 Mechanische Eigenschaften des Muskels . . . 5
  - 1.3.1 Passive Eigenschaften . . . 6
  - 1.3.2 Aktive Eigenschaften . . . 6
- 1.4 Kontinuumsmechanische Grundlagen . . . 7
  - 1.4.1 Materielle Objektivität . . . 7
  - 1.4.2 Deformationsgradient . . . 8
  - 1.4.3 Verzerrungsmaße . . . 9
  - 1.4.4 Spannungstensoren . . . 10
  - 1.4.5 Verzerrungsenergie-Potential und Invarianten . . . 11

2 Muskelmodelle **13**
- 2.1 Modelle für passiven Muskel . . . 14
- 2.2 Modelle für Kontraktion . . . 19
  - 2.2.1 Das Muskelmodell nach Hill . . . 20

3 Das Muskelmodell **23**
- 3.1 Beschreibung des Muskelmodells . . . 24
- 3.2 Das Materialgesetz . . . 33
- 3.3 Die Materialtangente . . . 39
  - 3.3.1 Definitionen . . . 39
  - 3.3.2 Materialtangente bezüglich der Ausgangskonfiguration . . . 42
  - 3.3.3 Materialtangente bezüglich der Momentankonfiguration . . . 52

4 Implementierung in ABAQUS **57**

5 Validierung **60**
- 5.1 Vergleich mit analytischen Lösungen . . . 60
- 5.2 Vergleich mit experimentellen Daten . . . 61
- 5.3 Kontakt zwischen Muskeln . . . 65

6 Zusammenfassung und Ausblick **70**

A Mathematische Formeln **V**

B Matrixdarstellung **VII**

C UMAT-Subroutine **X**

Literaturverzeichnis **XX**

1 Einführung

1.1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die kontinuumsmechanische Beschreibung von muskulärem Gewebe in Form eines dreidimensionalen, kontinuumsmechanischen Materialmodells, die Implementierung desselben in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS mittels einer UMAT-Subroutine sowie die anschließende Validierung durch Vergleiche mit in der Literatur angegeben Messergebnissen. Die Finite-Elemente-Methode ermöglicht die hinreichend genaue Erfassung der Geometrie und der Faserorientierung des Muskels. Das Materialmodell muss in Lage sein die passiven und aktiven mechanischen Eigenschaften der verschiedenen, im Muskel vorhandenen Gewebe zu erfassen. Für die Simulation von Skelettmuskeln ist neben der Erfassung der Geometrie und der Faserorientierung der Muskelmasse auch die Modellierung der Sehnen, Faszien und Aponeurosen von Bedeutung, da diese das passive Verhalten des gesamten Muskels beeinflussen.

Durch Materialmodelle für Muskelgewebe können auch diese Komponenten bei entsprechender Anpassung der Materialparameter modelliert werden [8, 7]. Dies ist notwendig da bislang für Faszie und Aponeurose wenige spezielle Materialmodelle existieren. Es ist aber plausibel alle oben genannten Bestandteile mit einem vereinheitlichten Modell zu beschreiben, da sie als Verbund aus leicht deformierbarer Matrix und relativ steifer Faser betrachtet werden können. Dabei muss das unterschiedliche Zugverhalten des Muskelgewebes und des straffen kollagenen Bindegewebes berücksichtigt werden. Weiss et al. [33] verwenden z.B. ein Materialmodell für die Simulation von Bändern, das dem von Humphrey und Yin [18] für Muskelgewebe vorgeschlagenen Modell sehr ähnlich ist. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit Zugversuchen an Bänderproben [32].

Charakteristisch für die Simulation von Muskulatur ist eine Aufspaltung des Materialverhaltens in kontraktilen und passiven Anteil. Diese erfolgt entweder durch das Materialgesetz, indem ein Term eine Spannung in Faserrichtung erzeugt, oder durch den Einsatz unterschiedlicher, mit einander an den Knoten gekoppelter Elemente, wie z.B. Kontinuumselemente für den passiven Muskel und Stabelemente um die Kontraktion ausführen [11, 3, 4]. Ein weiterer Ansatz ist die Aufspaltung in jeweils ein Finite-Elemente-Netz für

die Matrix und die Faser [34, 35]. Ein weiterer wichtiger Aspekt der Modellierung von Muskeln ist die hinreichend genaue Erfassung der Faserorientierung in jedem Punkt des Kontinuums und der Muskelarchitektur. Wie in [8] anhand des *Bizeps brachii* gezeigt wird, wirkt sich die Faserrichtung und die Architektur des Muskels wesentlich auf die Verteilung der Verzerrungen im Muskel aus. Die Krümmung der Muskelfaser entlang der Wirkungslinie des gesamten Muskels, die gesamte Länge der einzelnen Muskelfasern und die Aponeurosen sowie die externe Faszie haben wesentlichen Einfluss und tragen zu einer ungleichförmigen Verteilung der Schubverzerrungen in und quer zur Faserrichtung, sowie der Faserstreckung bei.

1.2 Aufbau des Muskels

Der Muskel ist in der Lage die kontraktilen Einheiten als Reaktion auf einen Nervenimpuls zu verkürzen. Der Grundbaustein der quergestreiften Muskeln sind die Myofibrillen. Diese sind aus seriell angeordneten, durch Z-Scheiben verbundene Sarkomere aufgebaut. Ein Sarkomer besteht aus ineinander geschobenen Aktin- und Myosinfilamenten, wodurch die gestreifte Musterung entsteht (siehe Abb. 1.1). Bei Aktivierung schieben sich die Aktin- und Myosinfilamente weiter ineinander, was zur Kontraktion des gesamten Muskels führt. Die Myofibrillen sind von Sarkoplasma umgeben und in zylindrischen Fasern angeordnet. Die Muskelfasern sind bei den quergestreiften Skelettmuskeln von einer Membran, dem Sarkolemma, umgeben. Die einzelnen Muskelfasern sind in das Endomysium eingebettet und dadurch zu Muskelbündeln zusammen gefasst. Das Perimysium umgibt und verbindet die Faserbündel. Endo- und Perimysium sind von Nerven und Blutgefäßen durchzogenes lockeres kollagenes Bindegewebe. Vom Sarkolemma gehen Bindegewebsfibrillen aus, welche die einzelnen Muskelfasern untereinander und mit dem Endo- und Perimysium locker verbinden. Die Faszie hingegen, welche als äußere Hülle den Muskel umschließt und das Gleiten der verschiedenen Muskelgruppen relativ zueinander erleichtert, ist steifer und weist einen hohen Anteil gekreuzt verlaufender Kollagenfasern auf. An den Muskelenden gehen die Faszie und die Bindegewebsfibrillen des Sarkolemma in die Sehnen über und sind somit für die Kraftübertragung bedeutend.

Lockeres kollagenes Bindegewebe weist wellig angeordnete und in verschiedene Richtungen orientierte Bündel aus Kollagenfasern auf, da die Anordnung der Fasern der Funktion des Gewebes entspricht. Das lockere kollagene Bindegewebe wird im Allgemeinen in mehrere Richtungen belastet und muss dabei den Zusammenhalt der Muskelfasern und Muskelbündel sicherstellen. Es ist daher relativ weich und kann als isotrop beschrieben werden. Im Gegensatz dazu wird das straffe kollagene Bindegewebe meist in

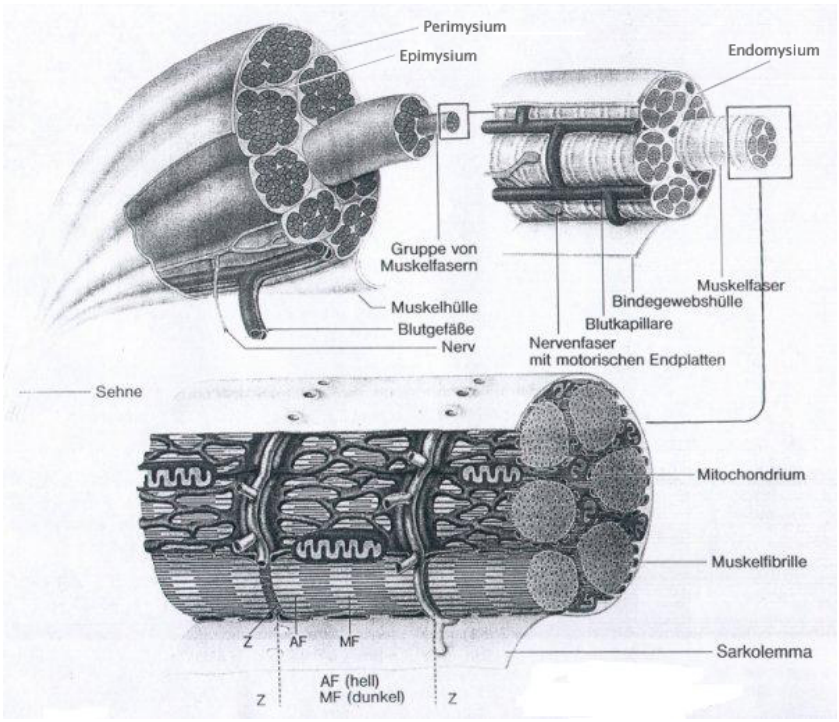

Abbildung 1.1: Aufbau eines Skelettmuskels (aus [24])

einer bestimmten Richtung belastet. Es sind daher die Kollagenfasern, entsprechend der Funktion, weitgehend in diese Richtung orientiert und dabei kaum gewellt. Diese Art Bindegewebe ist deswegen relativ steif und kann als anisotrop beschrieben werden.

Der Herzmuskel zeigt denselben Aufbau der einzelnen Muskelfasern wie der Skelettmuskel, diese sind aber kürzer und verzweigt (siehe Abb. 1.2). Wie beim Skelettmuskel sind die einzelnen Muskelfasern durch lockeres kollagenes Bindegewebe verbunden. Der Herzmuskel ist vom Herzbeutel (Perikard) und dem darunter liegenden Epikard umgeben. Das Epikard besteht aus lockerem kollagenem Bindegewebe und ist zum Perikard durch eine dünne Epithelschicht (Mesothel) abgegrenzt. Zwischen Epi- und Perikard liegt eine dünne Flüssigkeitsschicht, die ein Gleiten dieser gegeneinander während der Kontraktion ermöglicht. Diese Flüssigkeit wird von den Mesothelien des Epi- und Perikard abgesondert. Das Perikard ist außen von straffem Bindegewebe umgeben. Darunter liegt eine weitere Schicht lockeren kollagenen Bindegewebes. Nach innen trennt das Endokard das Muskelgewebe vom Hohlraum. Das Endokard besteht aus einer glatten Haut und lockerem Bindegewebe.

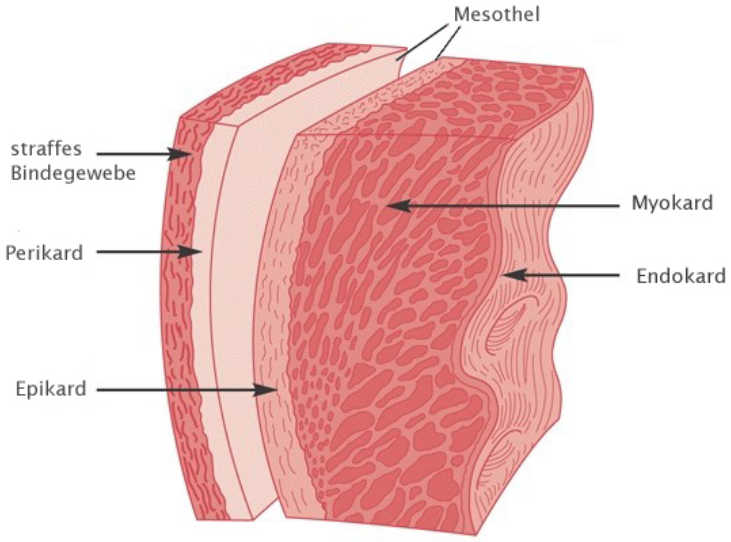

Abbildung 1.2: Aufbau des Herzmuskels

Glatte Muskeln weisen keine regelmäßige Anordnung der Myofilamente, jedoch eine lokal unidirektionale Orientierung der Muskelzellen auf. Die Muskelzellen sind in Schichten oder Bündeln angeordnet und ähnlich dem quergestreiften Muskel durch lockeres kollagenes Bindegewebe verbunden. Zusätzlich hat jede Zelle mechanische und elektrische Verbindungsstellen (siehe Abb. 1.3). Jeweils ein Myosinfilament ist mit bis zu 14 Aktinfilamenten um den Proteinkörper der Zelle gruppiert. Dadurch ist eine stärker Verkürzung des Muskels möglich. Dabei gleiten die Muskelzellen gegen- und aneinander. Dadurch haben glatte Muskeln deutlich ausgeprägtere viskose Eigenschaften als Skelettmuskeln und können bei größeren Dehnungen entspannt sein. Die maximal in der Faser erzeugte Spannung ist geringer, kann aber länger aufrecht erhalten werden.

Aufgrund der oben genannten Unterschiede zwischen glatten und quergestreiften Muskelfasern und der Tatsache, dass diese für die mechanischen Eigenschaften entscheidend sind, ist es nicht klar, ob Materialmodelle für quergestreifte Muskeln zur Simulation glatter Muskeln geeignet sind. Berginsky [5] verwendet beispielsweise ein viskoelastisches Materialmodell zur Simulation des Blasenmuskels von Hasen.

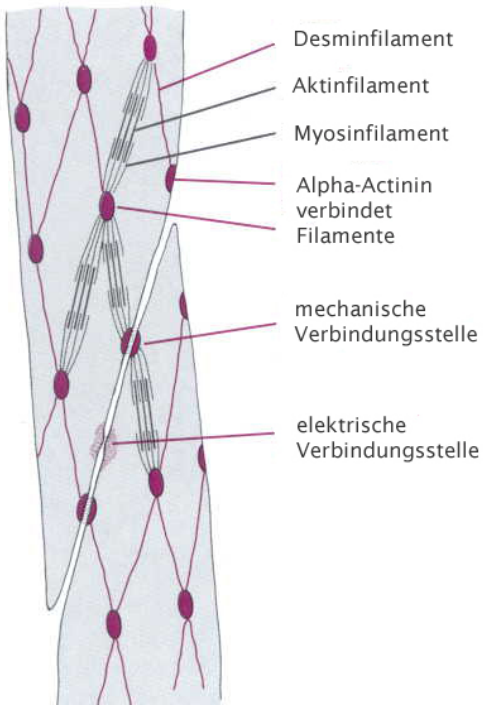

Abbildung 1.3: Glatte Muskelzellen und Verbindungsstellen

1.3 Mechanische Eigenschaften des Muskels

Die mechanischen Eigenschaften des Muskelgewebes werden hauptsächlich durch die Muskelfasern bestimmt. Das Bindegewebe hat die Aufgabe diese zu verbinden, um Kräfte zwischen den Fasern und Bündeln zu übertragen, und die Ausrichtung der Muskelfasern zu erhalten. Betrachtet man den gesamten Muskel, so ist neben der Art und dem Anteil der Muskelfasern auch die Orientierung dieser, sowie die Eigenschaften und Anordnung der Aponeurosen, Faszien und der Sehnen wichtig. Die Aponeurose, welche eine Verlängerung der Sehnen in den Muskel oder an der Oberfläche des Muskels darstellt, ist wie auch die Faszie deutlich steifer als das Muskelgewebe selbst. Faszie und Aponeurose haben durch ihre hohe Steifigkeit die Aufgabe den Muskelbauch in einer bestimmten, für die Kraftentwicklung günstigen Form zu halten. Das Bindegewebe wirkt im Muskel auch als Antagonist, der die ineinander geschobenen Myofilamente nach der Kontraktion, zumindest teilweise, wieder in die ursprüngliche Lage bringt.

1.3.1 Passive Eigenschaften

Straffes Bindegewebe (z.B. Aponeurose, Faszie und Sehnen) zeigt bei Streckung in Faserrichtung einen progressiven Einlaufbereich, der danach in einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung übergeht. Ursache dessen ist die bereits im Ruhezustand weitgehend parallele Ausrichtung der Kollagenfasern. Zu Beginn des linearen Bereichs sind die meisten Fasern gespannt und ausgerichtet, sodass das nahezu lineare Materialverhalten der einzelnen Fasern die Eigenschaften des Gewebes bestimmt.

Im lockeren intramuskulären Bindegewebe (z.B. Endo- und Perimysium) sind die Kollagenfasern in verschiedene Richtungen orientiert und werden erst mit zunehmender Streckung ausgerichtet, rekrutiert und gespannt. Dadurch entsteht ein progressiver Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Aus demselben Grund verhält sich diese Art Bindegewebe bei Druck- und Schubbelastung relativ weich.

Der Muskel zeigt im passiven Zustand bis zu einer Dehnung, die der optimalen Faserlänge entspricht, eine relativ geringe Steifigkeit. Wird er über diesen Punkt hinaus gestreckt, steigt die Spannung über der Dehnung stark nichtlinear an.

Bindegewebe und Muskelfasern haben auch viskoelastische Eigenschaften. Bei zyklischer Belastung ist eine von der Geschwindigkeit der Dehnung abhängige Hysterese vorhanden. Im Fall konstanter Last tritt Kriechen auf und bei konstanter Streckung kommt es zu Spannungsrelaxation.

1.3.2 Aktive Eigenschaften

Für die Kontraktion des Muskels ist der Anteil an schnellen, langsamen und intermediären Muskelfasern von Bedeutung. Für die Schnellen ist eine rasche Anspannung und Erschlaffung zufolge eines Nervenimpulses, sowie eine hohe maximale Kraft charakteristisch. Diese Art von Fasern ist hauptsächlich in kurzzeitig stark beanspruchten Muskelgruppen vorhanden. Die langsamen Fasern entwickeln weniger Kraft und bauen diese langsamer auf, sind aber ausdauernd und daher in langzeitig beanspruchten Muskelgruppen in höherem Anteil vorhanden. Dir intermediäre Typ liegt bezüglich des Kraft- und Geschwindigkeitsverhaltens zwischen den ersten beiden.

Der Anteil dieser unterschiedlichen Fasertypen ist für die maximale Spannung im tetanischen Zustand und die Abhängigkeit der durch die Kontraktion generierten Spannung von der Streckungsgeschwindigkeit verantwortlich. Die tetanische Maximalspan-

nung tritt bei optimaler Faserlänge und maximaler Aktivierung auf und skaliert als Materialparameter die Kennlinien der aktiven Muskelspannung.

Die Theorie der gleitenden Filamente ist wichtig für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Dehnungsgeschwindigkeit und der Streckung der Muskelfasern und der dabei entwickelten aktiven Spannung. Die Myofilamente sind in ihrer Länge konstant und schieben sich zufolge der Bildung von beweglichen Querbrücken von den Myosinfilamenten, durch die seitlichen Fortsätze (Myosinkopf) der Myosinfilamente, zu den Aktinfilamenten ineinander. Wird die Muskelfaser gedehnt, so nimmt der Überlappungsgrad der Myofilamente ab, und es können weniger Querbrücken entstehen. Da sich die einzelnen Myosinköpfe asynchron von einer zur nächsten Andockstelle bewegen und dabei gegenseitig behindern, sinkt die Kontraktionsgeschwindigkeit mit zunehmender Spannung und Anzahl der Querbrücken.

1.4 Kontinuumsmechanische Grundlagen

In biologischen Geweben treten im Allgemeinen große Verzerrungen und Verschiebungen auf. Die mathematische Beschreibung dieser erfordert daher einen entsprechenden kontinuumsmechanischen Rahmen. Die Definition der Spannungen und Verzerrungen, sowie die Formulierung des Materialgesetzes müssen objektiv, d.h. unabhängig vom Bewegungszustand und Standort des Beobachters sein.

1.4.1 Materielle Objektivität

Ein Referenzsystem kann als Beobachter interpretiert werden, der die Position eines Punktes des Kontinuums und die Zeit misst. Eine Tensor $\boldsymbol{A}$ und ein Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ dargestellt in einem Inertialsystem haben die Darstellung $\boldsymbol{A}^*$ und $\boldsymbol{x}^*$ im Referenzsystem. Der Beobachter oder das Referenzsystem führt eine durch den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{Q}(t)$ beschrieben Rotation und eine Translation um den Vektor $\boldsymbol{d}(t)$ gegen das Inertialsystem aus. Die Transformationsvorschrift für den Vektor $\boldsymbol{x}$ lautet dann

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}(t). \tag{1.1}$$

Ein Vektor wird als objektiv bezeichnet, wenn er im bewegten System dargestellt nur eine Rotation und keine Streckung erfährt. Dies trifft nur auf Differenzen zweier Ortsvektoren, aber nicht auf die Ortsvektoren selbst zu.

Ein Tensor $\boldsymbol{A}$ heißt objektiv wenn er einen objektiven Vektor $\boldsymbol{v}$ wieder auf einen objektiven Vektor $\boldsymbol{w}$ abbildet. Die Abbildung ist im Inertialsystem durch $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ gegeben und lautet im Referenzsystem $\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{v}^*$, wobei für die Transformation der objektiven Vektoren $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{w}$ gilt. Daraus folgt als Bedingung für die Objektivität von Tensoren:

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(t)^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit, sieht man dass die Rate des Tensors $\dot{\boldsymbol{A}}^*$ nicht objektiv ist, da die geforderte Transformationsbedingung nicht erfüllt ist.

$$\dot{\boldsymbol{A}}^* = \dot{\boldsymbol{Q}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(t)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}(t)\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}(t)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Q}}(t)^{\mathrm{T}} \tag{1.3}$$

1.4.2 Deformationsgradient

Betrachtet man einen bestimmten Punkt eines Körpers in der Ausgangskonfiguration, so geht dessen Ortsvektor $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_1 + X_3\boldsymbol{e}_1 \tag{1.4}$$

zufolge einer Deformation oder Starrkörperrotation in den Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ über.

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_1 + x_3\boldsymbol{e}_1 \tag{1.5}$$

Vektoren und Koordinaten in der Ausgangskonfiguration werden im Folgenden mit Großbuchstaben und im deformierten Zustand mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Es wird ein kartesische Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ verwendet. Die Abbildungsfunktion $\boldsymbol{\phi}$ ordnet jedem Punkt $\boldsymbol{X}$ in der Ausgangskonfiguration die Position $\boldsymbol{x}$ im deformierten Zustand zum Zeitpunkt t zu.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.6}$$

Der Deformationsgradient $\boldsymbol{F}$ ist die wichtigste Größe zur Beschreibung von Deformationen, da alle objektiven Verzerrungsmaße, sowie die Abbildung von Linien-, Flächen- und Volumselementen durch ihn ausgedrückt werden können. Er ist definiert als die Ableitung der Abbildungsfunktion $\boldsymbol{\phi}$ nach den materiellen Koordinaten $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{1.7}$$

Der Deformationsgradient kann als die lokale Änderung der Geometrie interpretiert werden. Er bildet ein Linienelement $d\boldsymbol{X}$ mit infinitesimaler Länge in den deformierten Zustand $d\boldsymbol{x}$ ab.

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X} \tag{1.8}$$

Für die Längenänderung des Linienelementes erhält man damit

$$d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} - d\boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{X} = d\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})d\boldsymbol{X}. \tag{1.9}$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{I}$ den Einheitstensor zweiter Stufe. Wenn der Deformationsgradient orthogonal ist, kommt es wegen $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{-1}$ lokal zu keiner Verzerrung, sondern nur zu einer Starrkörperrotation. Im allgemeinen Fall kann $\boldsymbol{F}$ in einen orthogonalen Tensor $\boldsymbol{R}$ und einen symmetrischen Tensor $\boldsymbol{U}$ oder $\boldsymbol{V}$ aufgespalten werden.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \tag{1.10}$$

Betrachtet man ein in der Ausgangskonfiguration durch die Vektoren $d\boldsymbol{X}_1$, $d\boldsymbol{X}_2$ und $d\boldsymbol{X}_3$ aufgespanntes, infinitesimales Volumenelement mit dem Anfangsvolumen dV, so werden diese Vektoren durch $\boldsymbol{F}$ auf $d\boldsymbol{x}_1$, $d\boldsymbol{x}_2$ und $d\boldsymbol{x}_3$ abgebildet. Das Volumselement hat dann im deformierten Zustand das Volumen dv und es gilt:

$$dv = \det(\boldsymbol{F})dV \tag{1.11}$$

Die durch $\boldsymbol{F}$ gegebene Deformation des Volumselementes besteht aus einer Gestaltänderung durch den Tensor $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{U}$ und einer Rotation durch $\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{F}$ kann auch in einen deviatorischen Deformationsgradienten $\bar{\boldsymbol{F}}$ und eine skalare Volumenänderung gemäß

$$\boldsymbol{F} = J^{-\frac{1}{3}}\bar{\boldsymbol{F}} \quad \text{mit} \quad J = \det(\boldsymbol{F}) \tag{1.12}$$

zerlegt werden.

1.4.3 Verzerrungsmaße

Die objektive Formulierung eines Materialgesetzes erfordert Verzerrungsmaße, die invariant gegenüber Starrkörperbewegungen sind, d.h. in denen der rotatorische Anteil $\boldsymbol{R}$ des Deformationsgradienten eliminiert ist. Die Starrkörpertranslationen sind aufgrund der Definition nach Gleichung (1.7) aus $\boldsymbol{F}$ bereits eliminiert. Der rechte Cauchy-Green-Tensor $\boldsymbol{C}$ ist definiert als:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{1.13}$$

Aufgrund der Orthogonalität von $\boldsymbol{R}$ (es gilt $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}$) und der Symmetrie des Tensors $\boldsymbol{U}$ erhält man mit Gleichung (1.10)

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^2. \tag{1.14}$$

Der linke Cauchy-Green-Tensor $\boldsymbol{B}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}. \tag{1.15}$$

Analog zu Gleichung (1.14) gilt:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}^2 \tag{1.16}$$

Der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$ kann direkt über $\boldsymbol{C}$ definiert werden und beschreibt die Deformation in Bezug auf die Ausgangskonfiguration.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \tag{1.17}$$

1.4.4 Spannungstensoren

Bei großen Deformationen und Verschiebungen ergeben sich unterschiedliche Spannungstensoren, je nachdem ob man den Spannungsvektor und das zugehörige Flächenelement auf die Referenz- oder Momentankonfiguration bezieht. Für ein Flächenelement mit der Fläche da, dem Normalvektor $\boldsymbol{n}$ und dem Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ im deformierten Zustand kann der symmetrische Cauchy'sche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ über

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}da \tag{1.18}$$

definiert werden. Wird der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ auf das Flächenelement in der Ausgangskonfiguration mit der Fläche dA und dem Normalvektor $\boldsymbol{N}$ bezogen, erhält man den im Allgemeinen unsymmetrischen Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor 1. Art $\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{N}dA \tag{1.19}$$

Der Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor 2. Art $\boldsymbol{S}$ stellt den folgenden Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor $\boldsymbol{T}$ in der Ausgangskonfiguration und dem Flächenelement dA her.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{N}dA \tag{1.20}$$

Dieser Spannungstensor ist symmetrisch, invariant gegenüber Starrkörperrotationen und es gilt folgender Zusammenhang mit dem Cauchy'schen Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.21}$$

Das Materialgesetz als formalen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensoren erhält man aus den folgenden Ableitungen des Verzerrungsenergie-Potentials $W(\boldsymbol{F}) = W(\boldsymbol{C}) = W(\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W(\boldsymbol{F})}{\partial \boldsymbol{F}} \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W(\boldsymbol{E})}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\frac{\partial W(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\frac{\partial W(\boldsymbol{F})}{\partial \boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.24}$$

1.4.5 Verzerrungsenergie-Potential und Invarianten

Hyperelastisches Materialverhalten kann durch sein Verzerrungsenergie-Potential W beschrieben werden. Dies ist die Verzerrungsenergie pro Volumseinheit als Funktion des lokalen Verzerrungszustandes. Um die Forderung nach Objektivität des Materialgesetzes zu erfüllen müssen die Argumente dieser Funktion (und deren partielle Ableitungen, die im Materialgesetz vorkommen [12]) selbst objektiv sein. Eine Möglichkeit dies sicher zu stellen ist W als Funktion der Invarianten $I_{1\text{-}5}$ des rechten Cauchy-Green-Tensors $\boldsymbol{C}$ zu formulieren.

$$I_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}), \quad I_2 = [(\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}))^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2)]/2, \quad I_3 = \det(\boldsymbol{C}), \tag{1.25a}$$

$$I_4 = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}), \quad I_5 = \boldsymbol{C}^2 \cdot\cdot (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \tag{1.25b}$$

Dabei bezeichnen $\mathrm{tr}(\cdot)$ die Spur eines Tensors, $\boldsymbol{A} \cdot\cdot \boldsymbol{B}$ die doppelte Kontraktion zweier Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ die Faserrichtung in der Ausgangskonfiguration, sowie $\otimes$ das dyadische Produkt. Die Invariante I_3 ist das Quadrat der Volumenänderung J gemäß $J = \sqrt{I_3}$. Die Streckung der Faser λ erhält man aus der Invariante I_4 durch $\lambda = \sqrt{I_4}$. Definiert man ein Materialgesetz als Funktion der Invarianten $I_{1\text{-}5}$ in der Form $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$, erhält man den Cauchy'sche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ mit der partiellen Ableitung von W nach $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J}\boldsymbol{F}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{J}\boldsymbol{F}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{C}}\right)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.26}$$

Definiert man die symmetrischen Tensoren $\boldsymbol{A}_i$, aus denen der Cauchy'sche Spannungstensor additiv mit den Faktoren $\frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial I_i}$ aufgebaut ist, wie folgt

$$\boldsymbol{A}_i = 2\boldsymbol{F}\frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.27}$$

und bildet die inneren Produkte $\boldsymbol{A}_i \cdot\cdot \boldsymbol{A}_j$ $(i \neq j)$, sieht man dass die Tensoren $\boldsymbol{A}_i$ nicht orthogonal sind, da für große Deformationen keines der 10 inneren Produkte verschwindet. Bei kleinen Deformationen sind die Antwortterme $\boldsymbol{A}_i$ orthogonal. Die lineare Abhängigkeit der Antwortterme stellt bei der experimentellen Bestimmung von Materialparametern ein Problem dar. Es ist nicht möglich für eine solches Materialgesetz einen Versuch an einer Muskelprobe so durchzuführen, dass eine der Invarianten sich dabei ändert und alle anderen konstant bleiben. Ein weiterer Nachteil so formulierter Materialmodelle ist, dass die Materialparameter nicht immer eine konkrete physikalische Bedeutung haben.

Einen für transversal isotrope oder anisotrope, hyperelastische Materialmodelle vorteilhafteren kontinuumsmechanischen Rahmen zur Formulierung des Verzerrungsenergie-Potentials stellen die von Criscione [12] vorgeschlagenen alternativen Invarianten $B_{1\text{-}5}$ dar. Diese können wie folgt als Funktionen der Invarianten $I_{1\text{-}5}$ angeschrieben werden.

$$B_1 = \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}, \quad B_2 = \cosh^{-1}\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right), \quad B_3 = \frac{\ln(I_3)}{2}, \tag{1.28a}$$

$$B_4 = \frac{3\ln(I_4) - \ln(I_3)}{4} \tag{1.28b}$$

$$B_5 = \frac{I_1 I_4 I_5 + I_1 I_4^3 + 2 I_3 I_4 - I_5^2 - 2 I_2 I_4^2 - I_5 I_4^2}{(I_5 - I_4^2)\sqrt{I_1^2 I_4^2 + I_5^2 - 2 I_1 I_4 I_5 - 4 I_3 I_4}} \tag{1.28c}$$

Wenn eine der Invarianten B_1 oder B_2 verschwindet ist B_5 nicht definiert. Die Invarianten B_1 und B_2 sind ein Maß für den Schub quer zur und längs der Faserrichtung. Die Invariante B_3 kann als logarithmische Volumenänderung interpretiert werden. B_4 ist eine Funktion der Faserstreckung und B_5 ist ein Maß für den Winkel zwischen den Ebenen des Schubs längs und quer zur Faserrichtung (Genauere Beschreibung der Invarianten siehe Kapitel 3). Aufgrund dieser physikalischen Interpretation der Invarianten $B_{1\text{-}5}$ erhält man Parameter, die physikalisch bedeutsam sind, wenn man das Materialgesetz in der Form $W = W(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ definiert. Analog zu den Gleichungen (1.26) und (1.27) kann man für die Invarianten $B_{1\text{-}5}$ die Antwortterme $\hat{\boldsymbol{A}}_i$ wie folgt definieren.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J}\boldsymbol{F}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{J}\boldsymbol{F}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial W}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{C}}\right)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_i = 2\boldsymbol{F}\frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1.30}$$

Von den 10 verschiedenen inneren Produkten $\hat{\boldsymbol{A}}_i \cdot\cdot \hat{\boldsymbol{A}}_j$ $(i \neq j)$ verschwinden 9 ($\hat{\boldsymbol{A}}_4 \cdot\cdot \hat{\boldsymbol{A}}_5 \neq 0$) bei großen Deformationen. Die Orthogonalität der Antwortterme ermöglicht es Materialversuche so zu gestalten, dass jeweils eine der Invarianten $B_{1\text{-}4}$ veränderlich ist und die übrigen konstant, wenn man das Materialgesetz in der Form $W = W(B_1, B_2, B_3, B_4)$ (ohne Berücksichtigung der Invariante B_5) definiert.

2 Muskelmodelle

Biologische Gewebe können als anisotrop, viskoelastisch und nahezu inkompressibel beschrieben werden [31]. Viele dieser Gewebe, besonders der Muskel, weisen einen hohen Anteil orientierter Fasern auf. Die Muskelfasern und das Bindegewebe können als fest miteinander verbunden angesehen werden. Es existiert ein Vielzahl unterschiedlicher Ansätze zur Modellierung und Simulation der aktiven und passiven Eigenschaften von biologischem Gewebe. Diese Modelle können in die folgenden Gruppen unterteilt werden:

- Hyperelastische Modelle: Die viskosen Eigenschaften werden in solchen Modellen im Allgemeinen vernachlässigt. Das Gewebe wird als fester Verbund aus Muskelfasern und Bindegewebe betrachtet, wobei die Faserorientierung durch transversale Isotropie im Materialgesetz [2, 8, 25] oder durch Stabelemente auf der Ebene der Finite-Elemente-Modellierung berücksichtigt wird.
- Isotrope viskoelastische Modelle: Das Gewebe wird als homogen und isotrop angenommen, d.h. die Faserstruktur wird nicht berücksichtigt. Die Zeitabhängigkeit kann durch eine Prony-Reihe für die Spannungsrelaxation eingeführt werden, da dieser Ansatz eine Beschreibung des zeitunabhängigen Verhaltens in Form eines Verzerrungsenergie-Potentials ermöglicht. Solche Modelle werden für Muskulatur [10, 6] oder Fettgewebe und Haut [29] verwendet.
- Anisotrope viskoelastische Modelle: Diese Modelle stellen eine Kombination der ersten beiden Punkte dar. Es kann von einem hyperelastischen, transversal isotropen Materialgesetz, welches durch ein Verzerrungsenergie-Potential beschrieben wird, ausgegangen werden. Die viskosen Eigenschaften werden in diesem Fall, analog zum vorherigen Punkt, in Form einer Prony-Reihe für die Spannungsrelaxation modelliert. Eine weitere Möglichkeit ist die Modellierung mittels orthotroper, viskoelastischer Volumenelemente und eindimensionaler, viskoelastischer Elemente für die Muskelbündel [3].
- Modelle mit verzerrungsabhängigen Materialparametern: Bei derartigen Modellen wird von einem linear elastischen, transversal isotropen Materialgesetz ausgegangen. Die Nichtlinearität wird durch Entwicklung der Materialparameter in ein Polynom der Verzerrungen eingeführt [31, 22].

In diesem Kapitel sind einige der wesentlichen, kontinuumsmechanischen Materialmodelle aus der Literatur in einem kurzen Überblick zusammengefasst.

2.1 Modelle für passiven Muskel

Bei Materialmodellen die auf Verzerrungsenergie-Potentialen basieren kann das Verzerrungsenergie-Potential W in einen deviatorischen und volumetrischen Anteil W_{dev} bzw. W_{vol} aufgespalten werden. Dabei stellt W_{vol} eine Penalty-Funktion dar, welche für nahezu inkompressible Materialien das Volumen näherungsweise konstant hält. W_{dev} kann weiter in einen meist isotropen Anteil für die Matrix W_{m}, sowie Anteile für die aktive und passive Muskelfaser $W_{\text{f,a}}$ bzw. $W_{\text{f,p}}$ aufgeteilt werden. Die aktive Komponente beschreibt das kontraktile Verhalten der Muskelfaser. Der Anteil $W_{\text{f,p}}$ repräsentiert im Allgemeinen die passiven, faserinternen Strukturen, wie die Bindegewebehüllen der Muskelfasern, das Sarkolemma und die Zellmembranen.

$$W = W_{\text{m}} + W_{\text{f,a}} + W_{\text{f,p}} + W_{\text{vol}} \tag{2.1}$$

Verzerrungsenergie-Potentiale für die Matrix:

Das isotrope, gummiartige **Mooney-Rivlin** Materialmodell wird z.B. in [28] zur Modellierung des Matrixmaterials von Skelettmuskeln verwendet.

$$W_{\text{m}} = A(\overline{I}_1 - 3) + B(\overline{I}_2 - 3) \tag{2.2}$$

Dabei bezeichnen A und B Materialparameter, sowie $\overline{I}_1 = J^{-2/3} I_1$ und $\overline{I}_2 = J^{-4/3} I_2$ die deviatorischen Invarianten. Vorteile eines solchen Materialmodells sind die relative Einfachheit und geringe Anzahl der Materialparameter.

Das ebenfalls isotrope **Ogden** Materialmodell stellt eine Verallgemeinerung des Mooney-Rivlin Materials dar und wird z.B. in [29] und [6] im Rahmen eines viskoelastischen Modells mit den deviatorischen Hauptstreckungen $\overline{\lambda}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und den Materialparametern μ_j und α_j $(j = 1, 2, ..., N)$ als Modell für Skelett- und Herzmuskeln verwendet.

$$W_{\text{m}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{\alpha_j} (\overline{\lambda}_1^{\alpha_j} + \overline{\lambda}_2^{\alpha_j} + \overline{\lambda}_3^{\alpha_j} - 3) \tag{2.3}$$

Vorteile sind auch bei diesem Materialmodell die relative Einfachheit und die geringe Anzahl der Materialparameter. In [10] sind für dieses Modell Vergleiche mit experimentellen Daten angegeben. Dabei zeigt sich eine relativ genaue Übereinstimmung zwischen

dem Kraft-Verschiebungs-Verlauf des Kompressionsversuches quer zur Faserrichtung der Muskelprobe und den Ergebnissen des Modells.

Verzerrungsenergie-Potentiale für passive Muskel- und Kollagenfasern:

Aufgrund der in Abschnitt 1.3.1 beschriebenen passiven Eigenschaften des Muskelgewebes kann die passive Spannung in Faserrichtung σ_{p} aus einem exponentiellen Einlaufbereich und einem linearen Bereich zusammengesetzt werden (vgl. [8]). Die Funktion f_{p} skaliert die maximale isometrische Spannung $\sigma_{\max}$ (genauere Beschreibung siehe Kapitel 3.1).

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \sigma_{\max} f_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda}) \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}. \tag{2.4}$$

$$f_{\mathrm{p}} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \overline{\lambda} \leqslant \lambda_0 \\ P_1(e^{P_2(\overline{\lambda}/\lambda_0 - 1)} - 1) & \text{für} \quad \lambda_0 < \overline{\lambda} < \lambda^* \\ P_3 \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_0} + P_4 & \text{für} \quad \lambda^* \leqslant \overline{\lambda} \end{cases} \tag{2.5}$$

P_i (i=1,...,4) und λ^* sind die Materialparameter, λ_0 ist die Streckung bei Ruhelänge der Faser und $\overline{\lambda} = J^{-1/3}\lambda$ der deviatorische Anteil der Faserstreckung $\lambda = \sqrt{I_4}$. In [8] wird λ_0 durch die optimale Faserstreckung λ_{opt}, bei der die maximale isometrische Spannung $\sigma_{\max}$ erzeugt werden kann, ersetzt. Ein ähnlicher Ansatz für die passiven Eigenschaften des Muskelgewebes in Faserrichtung wird von Liang et al. [23] verwendet.

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad e_{\mathrm{f}} \leqslant 0 \\ c_1 {e_{\mathrm{f}}}^{c_2} & \text{für} \quad 0 < e_{\mathrm{f}} < e_{\mathrm{c}} \\ c_3 e_{\mathrm{f}} + c_4 & \text{für} \quad e_{\mathrm{c}} \leqslant e_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{2.6}$$

Dabei bezeichnen c_i (i=1,...,4) und e_{c} die Materialparameter, sowie e_{f} die Komponente des Green-Lagrange'sche Verzerrungstensors $\boldsymbol{E}$ in Richtung der Faser. Die charakteristische Verzerrung e_{c} ist der Punkt an dem die Funktion in den linearen Bereich übergeht. Von Yucesoy et al. [34] wird ein quadratisches Polynom mit den Materialparametern t_0, t_1 und t_2 für σ_{p} angegeben:

$$\sigma_{\mathrm{p}} = t_0 + t_1 e_{\mathrm{f}} + t_2 {e_{\mathrm{f}}}^2. \tag{2.7}$$

Das Verzerrungsenergie-Potential $W_{\mathrm{f,p}}$ kann dann durch das Integral über die partielle Ableitung (vgl. [8]),

$$\frac{\partial W_{\mathrm{f,p}}}{\partial \overline{\lambda}} \overline{\lambda} = \sigma_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda}, \alpha), \tag{2.8}$$

berechnet werden.

Verzerrungsenergie-Potentiale für Matrix und passive Fasern:

Das von Humphrey et al. [17] für den passiven Herzmuskel vorgeschlagene Materialmodell ist transversal isotrop und beschreibt das intramuskuläre Bindegewebe und die Muskelfasern.

$$W_{\mathrm{m}} + W_{\mathrm{f,p}} = c_1(\lambda - 1)^2 + c_2(\lambda - 1)^3 + c_3(I_1 - 3) + \\ c_4(I_1 - 3)(\lambda - 1) + c_5(I_1 - 3)^2 \tag{2.9}$$

Dabei bezeichnen c_i $(i = 1, ..., 5)$ die Materialparameter. Um den deviatorischen und den volumetrischen Anteil des Verzerrungsenergie-Potentials zu entkoppeln, können anstatt der Invarianten I_1 und λ die deviatorischen Invarianten $\overline{I}_1$ und $\overline{\lambda}$ eingesetzt werden.

Von Humphrey und Yin [18] wird das folgende Verzerrungsenergie-Potential für den passiven Herzmuskel angegeben.

$$W_{\mathrm{m}} = c(e^{b(\overline{I}_1 - 3)} - 1) \tag{2.10}$$

$$W_{\mathrm{f,p}} = \begin{cases} A(e^{a(\overline{\lambda}-1)^2} - 1) & \text{für} \quad \overline{\lambda} \geqslant 1 \\ 0 & \text{für} \quad \overline{\lambda} < 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Dabei sind c, b, A und a die Materialparameter des Modells. Dieses Materialmodell wurde in [13] und [25] zur Simulation von Skelettmuskeln als passiver Anteil des gesamten Verzerrungsenergie-Potentials W verwendet. Der von Martins et al. [25] angegebene Vergleich mit experimentellen Daten eines Druckversuchs in Richtung der Faser zeigt eine relativ genaue Übereinstimmung mit analytischen Ergebnissen des Modells.

In [31] sind Ergebnisse von Druckversuchen an würfelförmigen Muskelproben angegeben. Die Muskelproben wurden bei Ausrichtungen der Muskelfasern parallel, senkrecht und mit einem Winkel von 45° zur Kompressionsrichtung zwischen zwei Platten komprimiert. Dabei wurde gezeigt, dass passives Muskelgewebe transversal isotrop ist. Die Steifigkeit ist außerdem bei Kompression der Muskelprobe quer zur Faserrichtung größer als in Richtung der Faser. Dieses Materialverhalten kann mit einem Ogden, Mooney-Rivlin oder Neo-Hooke'schen Materialmodell oder dem Modell von Humphrey und Yin für die Matrix nicht wiedergegeben werden (egal welches Modell für die passiven Muskelfasern verwendet wird). Wie in [31] gezeigt wird, kann das von Humphrey und Yin vorgeschlagene Materialmodell die geringere Steifigkeit in Faserrichtung wiedergeben, ist aber nicht adäquat an die Messergebnisse anpassbar.

Von Huyghe et al. [19] wurde ein anisotropes Materialmodell für intramuskuläres Bindegewebe und Muskelfasern vorgeschlagen, das die Schubsteifigkeit und die Steifigkeit

quer zur Faserrichtung in Form von separaten Anteilen berücksichtigt.

$$W_{\mathrm{m}} + W_{\mathrm{f,p}} = W_{\mathrm{per}} + W_{\mathrm{par}} + W_{\mathrm{shear}} \tag{2.12}$$

$$W_{\mathrm{per}} = \frac{K}{a_{ii}}(e^{a_{ii}e_{ii}} - a_{ii}e_{ii}) \quad \text{für} \quad i = 2,3 \tag{2.13a}$$

$$W_{\mathrm{par}} = \frac{K}{a_{11}}(e^{a_{11}e_{11}} - a_{11}e_{11}) \tag{2.13b}$$

$$W_{\mathrm{shear}} = \frac{K}{a_{ij}}(e^{a_{ij}e_{ij}} - a_{ij}e_{ij}) \quad \text{für} \quad i,j = 1,2,3 \quad \text{und} \quad i \neq j \tag{2.13c}$$

$$W_{\mathrm{shear}}(e_{ij} < 0) = -W_{shear}(|e_{ij}|) \tag{2.13d}$$

Dabei bezeichnen a_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ und K die Materialparameter, W_{per}, W_{par} und W_{shear} die Anteile quer und längs der Faserrichtung (Index 1) und den Schubanteil, sowie e_{ij} die Komponenten des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor. Durch diesen Ansatz können die Materialparameter aufgrund der Orthogonalität der Terme in Gleichung (2.12) einfacher bestimmt werden (vgl. Abschnitt 1.4.5). Dieses Modell wurde in [34] und [20] zur Simulation von Skelettmuskeln als passiver Anteil des Verzerrungsenergie-Potentials der Matrix und Muskelfasern verwendet und mit experimentellen Daten aus Zugversuchen verglichen. Dabei zeigt sich in [20] eine relativ genaue Übereinstimmung zwischen Modell und Messung vor allem in einem Bereich der auf die Ruhelänge bezogenen Muskellänge l/l_0 von $0.85 < l/l_0 < 1.15$. Bei größeren Deformationen ist in [20] das passive Modell deutlich steifer als der experimentelle Verlauf der Kraft-Längen Kurve. Als mögliche Ursache dafür werden eine eventuelle Schädigung der Muskelprobe während des Zugversuchs und numerische Fehler aufgrund von stark deformierten Finiten Elementen angegeben.

Aufgrund der Ähnlichkeiten zwischen dem Aufbau von biologischem Gewebe und faserverstärkten Kunststoffen wird von Li et al. [22] von einem linear elastischen, transversal isotropen Materialgesetz ausgegangen und die Elastizitätsmoduli in (Index L) und quer (Index T und T') zur Faserrichtung ($E_{\mathrm{L}}(\epsilon_{\mathrm{L}})$, $E_{\mathrm{T}}(\epsilon_{\mathrm{T}})$ und $E_{\mathrm{T}'}(\epsilon_{\mathrm{T}'})$) als Funktionen der Komponenten ϵ_{L}, ϵ_{T} und $\epsilon_{\mathrm{T}'}$ des logarithmischen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon} = \ln(\boldsymbol{V})$ beschrieben. Dieser Ansatz wurde von Li et al. zur Modellierung von Herzklappen verwendet und von Van Loocke et al. [31] als Materialmodell für passive Skelettmuskeln adaptiert, indem die Exponentialfunktionen $E_{\mathrm{L}}(\epsilon_{\mathrm{L}})$ und $E_{\mathrm{T}}(\epsilon_{\mathrm{T}})$ in [22] durch ein Polynom ersetzt

wurden. Im Folgenden wird nur das Modell von Van Loocke et al. angegeben.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\mathrm{L}} \\ \epsilon_{\mathrm{T}} \\ \epsilon_{\mathrm{T}'} \\ \epsilon_{\mathrm{LT}} \\ \epsilon_{\mathrm{LT}'} \\ \epsilon_{\mathrm{TT}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\mathrm{L}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{TL}}}{E_{\mathrm{T}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{TL}}}{E_{\mathrm{T}'}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\mathrm{LT}}}{E_{\mathrm{L}}} & \frac{1}{E_{\mathrm{T}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{TT}'}}{E_{\mathrm{T}'}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\mathrm{LT}}}{E_{\mathrm{L}}} & -\frac{\nu_{\mathrm{TT}'}}{E_{\mathrm{T}}} & \frac{1}{E_{\mathrm{T}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\mathrm{LT}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\mathrm{LT}'}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{\mathrm{TT}'})}{E_{\mathrm{T}'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{L}} \\ \sigma_{\mathrm{T}} \\ \sigma_{\mathrm{T}'} \\ \sigma_{\mathrm{LT}} \\ \sigma_{\mathrm{LT}'} \\ \sigma_{\mathrm{TT}'} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$E_{\mathrm{L}} = k_1 + k_2\epsilon_{\mathrm{L}} + k_3{\epsilon_{\mathrm{L}}}^2 \tag{2.15a}$$

$$E_{\mathrm{T}} = k_4 + k_5\epsilon_{\mathrm{T}} + k_6{\epsilon_{\mathrm{T}}}^2 \tag{2.15b}$$

Dabei bezeichnen k_i (i=1,...,6) Materialparameter. Die Poissonzahlen ν_{LT}, ν_{TL} und $\nu_{\mathrm{TT}'}$ können aus experimentellen Daten so bestimmt werden, dass das Materialverhalten näherungsweise inkompressibel ist. Der Schubmodul G_{LT} (und analog $G_{\mathrm{LT}'}$ mit $E_{\mathrm{T}'}$) kann unter der Annahme, dass $E_{\mathrm{L}} \gg E_{\mathrm{T}}$ gilt, aus

$$G_{\mathrm{LT}} = \frac{E_{\mathrm{T}}}{2(1+\nu_{\mathrm{LT}})} \tag{2.16}$$

berechnet werden [22]. Dieses Modell ist in der Lage die oben beschriebenen Ergebnisse der Druckversuche aus [31] parallel, senkrecht und mit einem Winkel von 45° zur Faserrichtung sehr exakt wiederzugeben.

Die von Criscione (vgl. Abschnitt 1.4.5) hergeleiteten Invarianten B_1 und B_2 wurden von Blemker et al. [8] für ein Materialmodell des Skelettmuskels verwendet. Im Folgenden ist nur der deviatorische Anteil des Verzerrungsenergie-Potentials W_{dev} für dieses Modell angegeben.

$$W_{\mathrm{dev}} = W_1 + W_2 \tag{2.17}$$

$$W_1 = G_1(B_1)^2 + G_2(B_2)^2 \tag{2.18}$$

Der Anteil in Faserrrichtung W_2 ist durch die Ableitung

$$\frac{\partial W_2}{\partial \overline{\lambda}}\overline{\lambda} = \sigma_{\mathrm{f}}(\overline{\lambda}, \alpha) \tag{2.19}$$

gegeben. Dabei bezeichnen G_1 und G_2 die Schubmoduli längs und quer der Faserrichtung, α die Aktivierung und σ_{f} die Summe aus aktiver und passiver Spannung in Richtung der Muskelfaser. Aufgrund der Definition der Invariante B_2 bewirkt der Term W_1 in Gleichung (2.17) eine Steifigkeit quer zur Faserrichtung (vgl. Kapitel 3). In Richtung der Faser ist eine Steifigkeit nur durch den Term W_2 vorhanden.

Verzerrungsenergie-Potentiale für den volumetrischen Anteil:

Der volumetrische Anteil des Verzerrungsenergie-Potentials W_{vol} stellt eine Penalty-Funktion dar, welche das Volumen des Gewebes nahezu konstant hält. W_{vol} kann z.B. als quadratische Funktion der Volumenänderung J,

$$W_{\text{vol}} = \frac{K}{2}(J-1)^2, \tag{2.20}$$

oder in logarithmischer Form

$$W_{\text{vol}} = \frac{K}{2}\ln(J)^2 \tag{2.21}$$

gewählt werden. Der Parameter K wird als Kompressionsmodul bezeichnet. Wird dieser zu klein gewählt, ist das Volumen nicht mehr näherungsweise konstant. Im umgekehrten Fall kann es zu numerischen Problemen kommen, da die Elementsteifigkeitsmatrizen und damit auch die globale Steifigkeitsmatrix schlecht konditioniert sind.

2.2 Modelle für Kontraktion

Zur mathematischen Beschreibung der komplexen mechanischen und biochemischen Vorgänge bei der Kontraktion des Muskels existieren vier wesentliche, unterschiedliche Modelltypen:

- Das Muskelmodell nach Hill: Das von Hill 1938 entwickelte Muskelmodell hat bis heute die größte Bedeutung. Es kann auf unterschiedlich abgegrenzte Systeme, wie den gesamten Muskel (Muskelbauch, Sehne und straffes kollagenes Bindegewebe), den Muskelbauch oder einzelne Sarkomere angewandt werden. Im Kapitel 3 ist die Anwendung des Hill'schen Modells auf der Ebene einzelner Muskelfasern in Form von Spannungs-Dehnungs-Beziehungen dargestellt.
- Das Querbrückenmodell nach Huxley: Das Muskelmodell nach Huxley beschreibt die grundlegenden biophysikalischen Prozesse mathematisch auf der mikroskopischen Ebene der Sarkomere basierend auf der Theorie der gleitenden Filamente. Es wird davon ausgegangen, dass die Querbrücken nur zwei Zustände einnehmen können, entweder ist die Verbindung geschlossen oder gelöst. Huxley und Simmons erweiterten dieses Modell 1971, sodass die Querbrücken mehr als nur zwei unterschiedliche Verbindungszustände einnehmen können. Die Verteilung der Brückenbindungen wird durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben, deren Lösung die Bindungsverteilungsfunktion ist. Die wesentlichen Annahmen dieses Modells sind, dass die Myofilamente starr sind und die Querbrücken sich zufällig und unabhängig voneinander bewegen.

- *Distribution-Moment*-Modelle: Diese Modell stellt eine Näherungslösung der Bindungsverteilungsfunktion des Querbrückenmodells von Huxley dar. Ziel ist die Reduktion des mathematischen Aufwandes, indem die partielle Differentialgleichung, welche die zeitliche Entwicklung der Bindungsverteilung beschreibt, durch Integration in eine gewöhnliche Differentialgleichungen umgewandelt wird. Dazu wird davon ausgegangen, dass die Momente $Q_0(t)$, $Q_1(t)$ und $Q_2(t)$ der partiellen Differentialgleichung nach Huxley zur Muskelkraft, Steifigkeit und elastischen Energie proportional sind.
- Neuronale Netze: Das neuronale Netz stellt eine abstrakte, mathematische Beschreibung des Kontraktionsprozesses dar. Durch Kombination von Ansatzfunktionen (Schaltcharakteristik des einzelnen Neurons) mit Gewichten, welche die Modellparameter darstellen, wird ein Netzwerk gebildet. Die Gewichte müssen durch Training des Modells mit Messdaten iterativ angepasst werden. Im Allgemeinen ist ein solches Modell nur in der Lage ein Prozessverhalten wiederzugeben, welches im Rahmen des Trainings „erlernt“ wurde.

2.2.1 Das Muskelmodell nach Hill

Das Modell ist aus drei Arten von Elementen aufgebaut. Auf der Ebene der Sarkomere oder einzelner Muskelfasern können diese drei Elemente keinen histologischen Strukturen eindeutig zugeordnet werden. Das kontraktile Element (CE) beschreibt das Gleiten der Aktin- und Myosinfilamente. Es ist in der Lage sich bei Aktivierung zu verkürzen und kann im passiven Zustand ohne Widerstand gestreckt oder gestaucht werden. Aufgrund dieser Annahme erzeugt in der passiven Muskelfaser nur das parallel elastische Element eine Kraft. Das seriell elastische Element (SE) repräsentiert eine dem kontraktilen Element in Serie geschaltete Steifigkeit in Form einer nichtlinearen, elastischen Feder. Als histologisch dem SE entsprechende Strukturen können die Myofilamente und Z-Scheiben genannt werden [25], obwohl diese Zuordnung nicht eindeutig ist. Durch das parallel elastische Element (PE) werden das Sarkolemma, die Bindegewebehüllen der Muskelfasern und das weiche kollagene Bindegewebe ebenfalls als nichtlineare Feder modelliert (siehe Abb. 2.1). Durch diese Elemente ist in teilweiser Übereinstimmung mit dem mikroskopischen Aufbau des Muskelgewebes dessen Verhalten in Faserrichtung phänomenologisch beschrieben. Es existieren auch Erweiterungen dieses Modells mit viskosen Elementen um die viskoelastischen Eigenschaften des Muskelgewebes zu berücksichtigen.

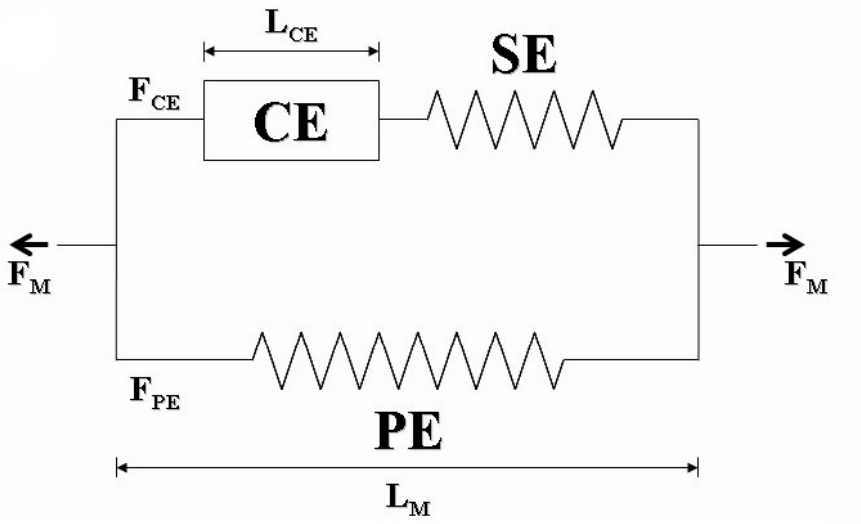

Abbildung 2.1: Komponenten des Hill'schen Muskelmodells (aus [14])

Aus Abbildung 2.1 ist ersichtlich, dass die Muskelkraft F_{M} und die Kräfte F_{SE}, F_{PE} und F_{CE} im seriell elastischen, parallel elastischen und kontraktilen Element die Gleichung

$$F_{\mathrm{M}} = F_{\mathrm{SE}} + F_{\mathrm{PE}} \quad \text{mit} \quad F_{\mathrm{CE}} = F_{\mathrm{SE}} \tag{2.22}$$

erfüllen. Die Länge des Muskels L_{M} ist gleich der des parallel elastischen Elements L_{PE}. Für die Längen F_{SE} und F_{CE} des seriell elastischen und des kontraktilen Elements gilt folgende Beziehung.

$$L_{\mathrm{M}} = L_{\mathrm{SE}} + L_{\mathrm{CE}} \tag{2.23}$$

Differenzieren dieser Gleichung nach der Zeit ergibt den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten

$$v_{\mathrm{M}} = v_{\mathrm{SE}} + v_{\mathrm{CE}}. \tag{2.24}$$

Für die Kraft des kontraktilen Elements F_{CE} wird im Hill'schen Modell angenommen, dass diese als Produkt der maximalen isometrischen Kraft $F_{\max}$ mit der Längenfunktion $f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}})$, der Geschwindigkeitsfunktion $f_{\mathrm{v}}(v_{\mathrm{CE}})$ und dem Aktivierungsgrad $\alpha(t)$ dargestellt werden kann:

$$F_{\mathrm{CE}} = F_{\max} f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}}) f_{\mathrm{v}}(v_{\mathrm{CE}}) \alpha(t). \tag{2.25}$$

Da das parallel elastische Element eine nichtlineare Feder darstellt, wird $F_{\max}$ mit der passiven Funktion $f_{\mathrm{p}}(L_{\mathrm{M}})$ skaliert.

$$F_{\mathrm{PE}} = F_{\max} f_{\mathrm{p}}(L_{\mathrm{M}}) \tag{2.26}$$

Für die Muskelkraft gilt $F_{\mathrm{M}} = F_{\max}$ bei maximaler Aktivierung $\alpha = 1$, für die Geschwindigkeit des Muskels $v_{\mathrm{M}} = 0$ und bei optimaler Muskellänge $L_{\mathrm{M}} = L_{\mathrm{opt}}$. Damit folgt aus den Gleichungen (2.25) und (2.26) die Bedingung für die Skalierungsfunktionen

$$f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{opt}}) f_{\mathrm{v}}(0) + f_{\mathrm{p}}(L_{\mathrm{opt}}) = 1. \tag{2.27}$$

3 Das Muskelmodell

Aufgrund des zuvor beschriebenen Aufbaus der verschiedenen biologischen Gewebe ergibt sich eine Analogie zu faserverstärkten Kunststoffen. Das weiche intramuskuläre Bindegewebe weist in seiner Kollagenstruktur Ähnlichkeiten zu der in Kunststoffen vorhandenen, verzweigten Polymerstruktur auf. Die Muskelfasern werden analog als Faserverstärkung betrachtet [31]. Diese Anteile werden daher für das hier verwendete Modell, unter Vernachlässigung der viskosen Eigenschaften, als hyperelastisches, inkompressibles und transversal isotropes Material angenommen. Weitere Modellannahmen sind:

- Die Myofilamente und das weiche kollagene Bindegewebe (Epi-, Peri- und Endomysium), sowie die Bindegewebehüllen der Muskelfasern (Sarkolemma) und der Muskelbündel sind fest miteinander verbunden und stellen ein homogenes Kontinuum dar.
- Die Sarkomere sind alle gleich, haben denselben Aktivierungsgrad und generieren eine Spannung in Faserrichtung gemäß Gleichung (3.22).
- Die passiven und aktiven Eigenschaften des Muskelgewebes in Faserrichtung können durch das in Abschnitt 2.2.1 dargestellte Hill'sche Muskelmodell beschrieben werden. Dabei wird das seriell elastische Element als starr angenommen. Dies ist eine weit verbreitete Annahme (vgl. [8, 21, 11]) und bewirkt eine deutliche Vereinfachung der Beziehungen für das aktive Muskelverhalten. Da die Längenbeziehung $f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}})$ wegen $L_{\mathrm{M}} = L_{\mathrm{PE}}$ eine Funktion der Länge des parallel elastischen Elements darstellt, ist das seriell elastische Element nur für die Geschwindigkeit des kontraktilen Elements v_{CE} von Bedeutung.
- Die viskosen Eigenschaften und die Dämpfung des Muskelgewebes können wie im ursprünglichen Modell von Hill vernachlässigt werden. Es wird nur die Abhängigkeit der aktiven Muskelkraft von der Geschwindigkeit berücksichtigt.
- Die Aponeurosen, Faszien und Sehnen können bei entsprechender Anpassung der Materialparameter mit dem hier verwendeten Muskelmodell beschrieben werden.
- Es treten keine Ermüdungserscheinungen auf. Da die Dauer der Simulationen in dieser Arbeit sehr kurz sind und Ermüdung erst nach einigen Belastungszyklen bedeutend ist, kann diese vernachlässigt werden.

Verbesserungen des hier verwendeten Materialmodells sind daher vor allem im Bereich der Modellierung der viskosen Eigenschaften und durch Berücksichtigung des seriell elastischen Elements in Form einer Geschwindigkeitsfunktion $f_{\mathrm{v}}(v_{\mathrm{CE}})$, anstatt der Vereinfachung $f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda})$, möglich.

3.1 Beschreibung des Muskelmodells

In diesem Abschnitt wird das in dieser Arbeit verwendete Materialmodell ausführlich dargestellt. Das Materialgesetz wurde so gewählt, dass sowohl die Schubeigenschaften quer und längs der Faserrichtung als auch das Materialverhalten in Faserrichtung durch unabhängige Verzerrungsenergie-Potentiale mit orthogonalen Antworttermen (vgl. Abschnitt 1.4.5) beschrieben sind. Dazu werden die von Criscione vorgeschlagen Invarianten B_1 und B_2 verwendet. Anstatt durch B_3 und B_4 werden die Volumsänderung und die Faserstreckung durch J und $\overline{\lambda}$ beschrieben, da Penalty-Funktionen und Potentiale für die Verzerrungsenergie in der Faser in dieser Form bereits existieren. Die Modellierung des Schubverhaltens ist von Bedeutung, da z.B. im *Bizeps brachii*, wie in [8] gezeigt, vor allem im Bereich der distalen Aponeurose hohe Schubverzerrungen auftreten. Ursache dafür ist, dass die Aponeurose deutlich steifer als das Muskelgewebe ist und die Muskelfasern beinahe senkrecht auf die Wirkungslinie des gesamten Muskels stehen. Das Materialverhalten bei Schub längs der Faserrichtung wird durch das Verzerrungsenergie-Potential

$$W_1 = G_1 {B_1}^2 + G_{13} {B_1}^4 + G_{14} {B_1}^5 \tag{3.1}$$

als Funktion von

$$B_1 = \frac{D}{\lambda} = \sqrt{\frac{I_5}{{I_4}^2} - 1} = \sqrt{\frac{\overline{I}_5}{{\overline{I}_4}^2} - 1} \tag{3.2}$$

mit dem Maß D für die Schubdeformation entlang der Faser (siehe Abbildung 3.1) und den deviatorischen Invarianten

$$\overline{I}_4 = J^{-2/3} I_4, \quad \overline{I}_5 = J^{-4/3} I_5 \tag{3.3}$$

und den Schubmoduli G_1, G_{13} und G_{14} modelliert, wobei die Invariante B_1 ein Maß für die Schubverzerrung längs der Faserrichtung ist. Der Ansatz als Polynom wurde aufgrund der in [31] angegebenen, experimentellen Daten gewählt. Dabei zeigt sich ein schwach progressiver Anstieg der Cauchy'schen Spannung über dem logarithmischen Verzerrungsmaß bei Kompression der Muskelprobe für den Fall, dass die Faserrichtung

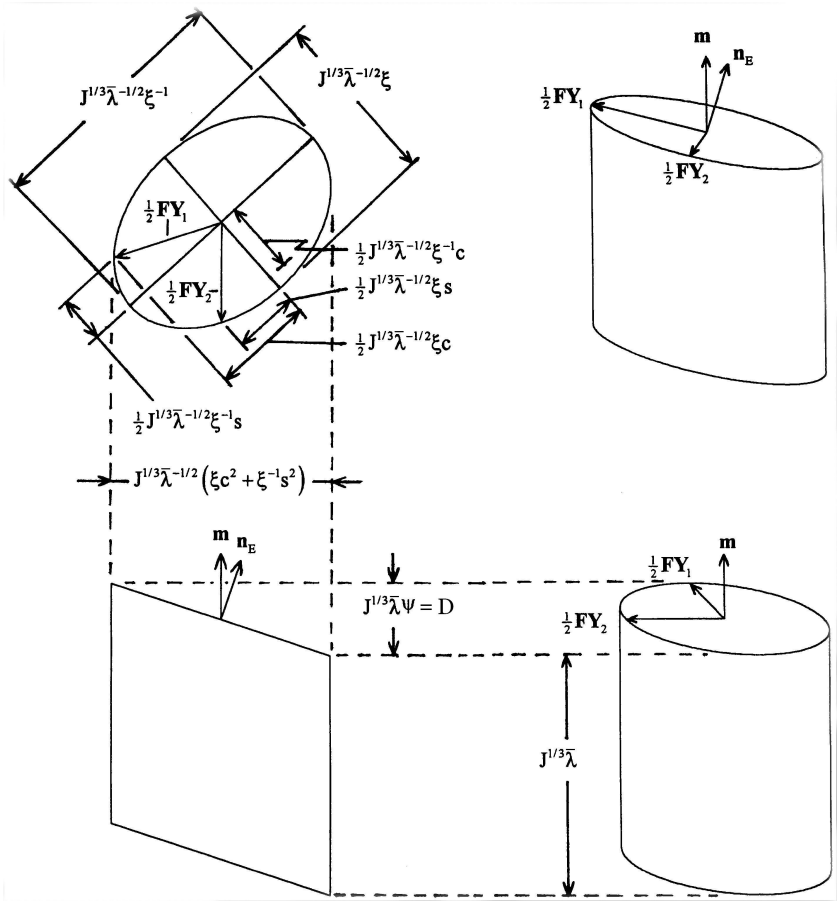

Abbildung 3.1: Physikalische Bedeutung der Invarianten von Criscione anhand der Deformation eines zylindrischen Volumenelements (aus [12]).

mit der Kompressionsrichtung einen Winkel von 45° einschließt. Der Term ${B_1}^3$ in Gleichung (3.1) wurde weggelassen, da dieser für $B_1 = 0$ einen singulären Anteil in der Materialtangente liefert.

In Abbildung 3.1 ist die physikalische Bedeutung der Invarianten B_1 und B_2 dargestellt. In der Ausgangskonfiguration hatte der Zylinder mit der Achse $\boldsymbol{m}$, welche die momentane Faserrichtung darstellt, einen Kreisquerschnitt. Die Symmetrieeigenschaften dieses Volumenelements entsprechen der transversalen Isotropie des Materials. Die Ebene der den Zylinder begrenzenden Ellipse ist durch den Normalvektor $\boldsymbol{n}_\mathrm{E}$ gegeben. Der Vektor $\boldsymbol{FY}_2$ in der Momentankonfiguration ist orthogonal zu $\boldsymbol{m}$. Die in der Ausgangskonfiguration durch die Vektoren $\boldsymbol{Y}_2$ und $\boldsymbol{M}$ aufgespannte Ebene wird durch reinen Schub längs der Faserrichtung per Definition nicht deformiert. Der Vektor $\boldsymbol{FY}_1$ in der Momentankonfiguration weist von der Zylinderachse in Richtung des maximalen Anstiegs in der

Ebene der begrenzenden Ellipse. Durch $\boldsymbol{F}\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{m}$ wird daher die Ebene des Schubs längs der Faserrichtung aufgespannt. Betrachtet man einen Querschnitt des Zylinders der orthogonal zu $\boldsymbol{m}$ ist, so bezeichnen die Vektoren $\boldsymbol{N}_1$ und $\boldsymbol{N}_2$ die Hauptachsen der deformierten Ellipse in der Ausgangskonfiguration, sowie $J^{1/3}\overline{\lambda}^{-1/2}\xi$ und $J^{1/3}\overline{\lambda}^{-1/2}\xi^{-1}$ die zugehörigen Hauptstreckungen. Das Verhältnis der beiden Hauptachsenlängen ist per Definition ξ^2. Der Winkel γ gibt die Richtung von $\boldsymbol{Y}_1$ relativ zu $\boldsymbol{N}_1$ und $\boldsymbol{N}_2$ durch die folgenden Beziehungen an:

$$Y_1 = \cos\gamma \boldsymbol{N}_1 + \sin\gamma \boldsymbol{N}_2 \tag{3.4a}$$

$$Y_2 = -\sin\gamma \boldsymbol{N}_1 + \cos\gamma \boldsymbol{N}_2 \tag{3.4b}$$

Für $B_1 = 0$ sind $\boldsymbol{Y}_1$ und $\boldsymbol{Y}_2$ und für $B_2 = 0$ sind $\boldsymbol{N}_1$ und $\boldsymbol{N}_2$ nicht definiert. Daher ist γ und somit die Invariante $B_5 = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma$ nicht definiert, wenn einer dieser beiden Fälle eintritt. (In Abbildung 3.1 werden die Abkürzungen $c = \cos\gamma$ und $s = \sin\gamma$ verwendet.) Bei Schub quer zur Faserrichtung wird der Querschnitt senkrecht zu $\boldsymbol{m}$ zu einer Ellipse deformiert. Die Elliptizität, also das Verhältnis der beiden Hauptachsenlängen, ist ξ^2 und es gilt die folgende Beziehung zu der Invariante B_2.

$$B_2 = \ln(\xi^2) \tag{3.5}$$

Dieselbe elliptische Deformation des Querschnitts tritt auch bei Kompression oder Streckung des Zylinders senkrecht zur Faserrichtung auf. Daher beschreibt die Invariante B_2, welche ein Maß für die Elliptizität des Querschnitts ist, auch das Verhalten des Materialgesetzes in dieser Richtung. Bei Schub und Zug oder Druck jeweils quer zur Faserrichtung ist also die Deformation des Zylinderquerschnitts gleich. Unterschiedlich ist nur die Ausrichtung der Ellipsenhauptachsen gegen das Referenzsystem. Aufgrund der transversalen Isotropie des Materials ist dies für das Materialgesetz nicht von Bedeutung. Bei Kompression quer zur Faserrichtung zeigen die Versuchsergebnisse in [31] ebenfalls einen schwach progressiven Zusammenhang zwischen der Komponente der Cauchy'schen Spannung und der logarithmischen Verzerrung in Kompressionsrichtung, wobei die Steifigkeit in dieser Richtung größer als in Faserrichtung ist. Daher ist eine unabhängige Modellierung der Eigenschaften in Faserrichtung und des Verhaltens bei Schub und Kompression quer dazu notwendig. Aus diesen Gründen wird das Verzerrungsenergie-Potential W_2, welches die Eigenschaften quer zur Faserrichtung beschreibt, ebenfalls als Polynom angenommen.

$$W_2 = G_2 {B_2}^2 + G_{23} {B_2}^4 + G_{24} {B_2}^5 \tag{3.6}$$

Der Term ${B_2}^3$ wird weggelassen, da dieser einen singulären Anteil in der Materialtangente bei $B_2 = 0$ liefert (siehe Abschnitt 3.3.2). Die Invariante B_2 kann auch mit den deviatorischen Invarianten $\overline{I}_4$, $\overline{I}_5$ und

$$\overline{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \tag{3.7}$$

in der Form

$$B_2 = \cosh^{-1}\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right) = \cosh^{-1}\left(\frac{\overline{I}_1 \overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right) \tag{3.8}$$

angeschrieben werden. Damit sind die deviatorischen Potentiale W_1 und W_2 vom volumetrischen Anteil des Verzerrungsenergie-Potentials W_{vol} unabhängig. Dieses wird durch die logarithmische Penalty-Funktion, welche das Volumen näherungsweise konstant hält, mit dem Kompressionsmodul K

$$W_{\text{vol}} = \frac{K}{2}\ln(J)^2 \tag{3.9}$$

modelliert.

Da die Invarianten B_1 ung B_2 zu keiner Steifigkeit in Faserrichtung führen, beschreibt ein zusätzlicher Potentialterm W_{f} sowohl das weiche kollagene Bindegewebe in der momentanen Faserrichtung $\boldsymbol{m}$ als auch die Muskelfasern. Für eine kontinuumsmechanische Beschreibung der Muskelfasern und der unterschiedlichen Bindegewebe in Faserrichtung ist es notwendig von Beziehungen zwischen den Kräften und Längen des Hill'schen Muskelmodells (vgl. Abschnitt 2.2.1) zu Gleichungen in Form von Spannungen und Dehnungen überzugehen. Anstatt der Faserstreckung λ wird ihr deviatorischer Anteil $\overline{\lambda}$ verwendet, sodass auch W_{f} vom volumetrischen Verzerrungsenergie-Potential W_{vol} unabhängig ist. Dividiert man Gleichung (2.22) durch den momentanen physiologischen Querschnitt $a(\overline{\lambda})$ des Muskels, so erhält man mit der Definition des Cauchy'schen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ nach Gleichung (1.18) und mit

$$\sigma_{\text{f}} = \frac{F_{\text{M}}}{a(\overline{\lambda})} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) \tag{3.10}$$

die Cauchy'sche Spannung σ_{f} in der momentanen Faserrichtung $\boldsymbol{m}$. Entsprechend der Modellannahme, dass das parallel elastische Element eine nichtlineare Feder darstellt, wird für $\sigma_{\text{p}} = F_{\text{PE}}/a(\overline{\lambda})$ der folgende Ansatz gewählt (siehe z.B. [25, 8]).

$$\sigma_{\text{p}} = \frac{F_{\max}}{a(\overline{\lambda})} f_{\text{p}}(\overline{\lambda}) \tag{3.11}$$

Es wird davon ausgegangen, dass σ_{p} nur von der Faserstreckung $\overline{\lambda}$ abhängt und die maximale isometrische Kraft des Muskels $F_{\max}$ durch die Funktion $f_{\text{p}}(\overline{\lambda})$ skaliert wird.

Die maximale isometrische Spannung $\sigma_{\max}$ in der Faser wird bei der optimalen Faserstreckung λ_{opt} erzeugt. Dem zufolge erhält man $\sigma_{\max}$ aus

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{a(\lambda_{\text{opt}})}. \tag{3.12}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (3.11) erhält man

$$\sigma_{\mathrm{p}} = F_{\max} f_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda}) \frac{a(\lambda_{\mathrm{opt}})}{a(\overline{\lambda})}. \tag{3.13}$$

Mit der Annahme, dass die Bedingung für Inkompressibilität $J = 1$ näherungsweise erfüllt ist, gilt für das Verhältnis zwischen momentanem und ursprünglichem Querschnitt die Beziehung

$$\frac{a(\overline{\lambda})}{a(\overline{\lambda} = 1)} = \frac{1}{\overline{\lambda}}. \tag{3.14}$$

Damit erhält man aus Gleichung (3.13) schließlich

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \sigma_{\max} f_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda}) \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}. \tag{3.15}$$

Für σ_{p} und f_{p} sind in Abschnitt 2.1 einige Funktionen aus der Literatur angegeben. Da mit dem in dieser Arbeit verwendeten Materialmodell sowohl Muskelgewebe als auch Sehnen, Aponeurosen und Faszien beschreibbar sein sollen, wird f_{p} bei Streckung der Faser wie folgt definiert (siehe Abbildung 3.2):

$$f_{\mathrm{p}} = \begin{cases} P_1(e^{P_2(\overline{\lambda}/\lambda_0 - 1)} - 1) & \text{für} \quad \lambda_0 < \overline{\lambda} < \lambda^* \\ P_3 \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_0} + P_4 & \text{für} \quad \lambda^* \leqslant \overline{\lambda} \end{cases} \tag{3.16}$$

Dabei bezeichnet λ_0 die der Ruhelänge der Muskelfasern entsprechende Streckung, wobei im Allgemeinen $\lambda_0 = 1$ ist. Aufgrund der viskosen Eigenschaften des Muskels kann dieser bei verschiedenen Streckungen frei von Spannungen sein. Die Materialparameter P_i $(i = 1, ..., 4)$ werden so gewählt, dass die Funktion f_{p} an der Stelle λ^* stetig ist. Das passive Zugverhalten der Muskelfasern und der weichen Bindegewebeanteile in Faserrichtung wird nur durch den exponentiellen Bereich der Funktion f_{p} beschrieben, indem λ^* so angenommen wird, dass man bei physiologischen Werten von $\overline{\lambda}$ nicht in den linearen Bereich kommt. In [20] wird ein ähnlicher exponentieller Ansatz für das Verzerrungsenergie-Potential von Matrix und Muskelfaser in Faserrichtung verwendet, wobei sich eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten aus Zugversuchen zeigt.

Sehnen, Aponeurosen und Faszien können durch Anpassung der Materialparameter in Gleichung (3.16) modelliert werden (vgl. [8]). In [33] wird dieselbe Beziehung zur Beschreibung der Kollagenfasern in Bändern verwendet. Im exponentiellen Einlaufbereich der Funktion f_{p} werden die Kollagenfasern des straffen Bindegewebes, welche bei Ruhelänge bereits nahezu parallel liegen, ausgerichtet und gestreckt (siehe Abschnitt 1.3.1). Der Parameter λ^* bezeichnet die Streckung, bei der die meisten Fasern gespannt sind,

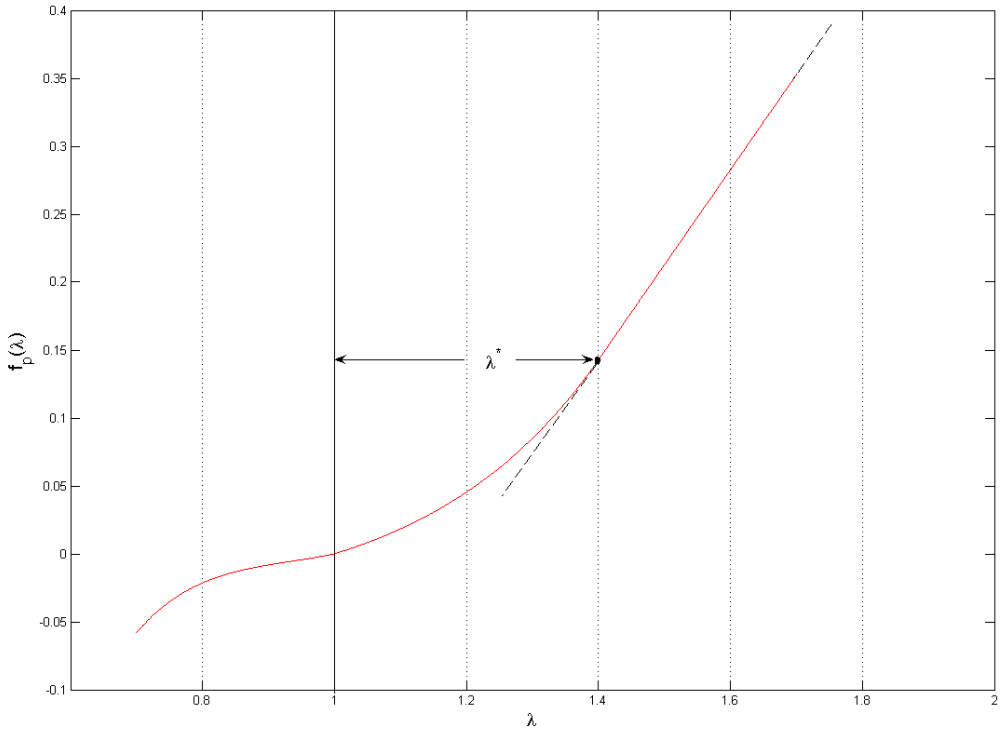

Abbildung 3.2: Passive Skalierungsfunktion $f_{\mathrm{p}}(\lambda)$

sodass dann das näherungsweise linear elastische Verhalten der einzelnen Fasern dominiert.

Aufgrund der in [31] angegebenen, experimentellen Daten bei Kompression von Muskelproben in Faserrichtung wird analog zu den Verzerrungsenergie-Potentialen W_1 und W_2 für die passive Spannung σ_{p} der Ansatz

$$\sigma_{\mathrm{p}} = k_1(\overline{\lambda} - 1) + k_2(\overline{\lambda} - 1)^2 + k_3(\overline{\lambda} - 1)^3 \quad \text{für} \quad \overline{\lambda} \leqslant \lambda_0 \tag{3.17}$$

mit den Materialparametern k_1, k_2 und k_3 gewählt. Der Materialparameter k_1 ist so zu bestimmen, dass die Gleichungen (3.16) und (3.17) eine stetig differenzierbare Funktion für $\sigma_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda})$ ergeben.

Die Kraft des kontraktilen Elements F_{CE} wird im Hill'schen Modell als Produkt der maximalen isometrischen Kraft $F_{\max}$ mit der Längenfunktion $f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}})$, der Geschwindigkeitsfunktion $f_{\mathrm{v}}(v_{\mathrm{CE}})$ und dem Aktivierungsgrad $\alpha(t)$ dargestellt. Die Form dieser Skalierungsfunktionen entspricht den in Abschnitt 1.3.2 beschriebenen Zusammenhängen

der Theorie der gleitenden Filamente.

$$F_{\mathrm{CE}} = F_{\max} f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}}) f_{\mathrm{v}}(v_{\mathrm{CE}}) \alpha(t) \tag{3.18}$$

Die Geschwindigkeit des kontraktilen Elements v_{CE} wird z.B. von Van Leuuwen und Kier [30] gleich der Rate $\dot{\epsilon}_{\mathrm{L,f}}$ des linearen Verzerrungsmaßes $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{L}}$ in Faserrichtung oder von Böl et al. [11] gleich $\dot{\lambda}$ gesetzt. Die darin enthaltene Annahme $v_{\mathrm{CE}} = v_{\mathrm{PE}}$ entspricht einer unendlichen Steifigkeit des seriell elastischen Elements. Die Geschwindigkeitsfunktion $f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda})$ kann im konzentrischen Bereich (Muskel verkürzt sich) durch die Beziehung von Hill [15]

$$f_{\mathrm{v}} = \frac{1 - \frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}}{1 + k_{\mathrm{cc}} \frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}} \quad \text{für} \quad v_{\min} < \dot{\lambda} \leqslant 0 \tag{3.19}$$

beschrieben werden. Im exzentrischen Bereich (Muskel wird länger) kann diese Gleichung durch die Funktion

$$f_{\mathrm{v}} = d - (d-1) \frac{1 + \frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}}{1 - k_{\mathrm{ec}} k_{\mathrm{cc}} \frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}} \quad \text{für} \quad 0 < \dot{\lambda} \tag{3.20}$$

stetig fortgesetzt werden [11, 30]. Die physikalische Bedeutung der Materialparameter k_{cc}, k_{ec}, d und $v_{\min}$ ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Parameter d bezeichnet das Verhältnis zwischen der maximalen isometrischen Spannung $\sigma_{\max}$ und der maximalen exzentrischen Spannung σ_{exz}. k_{cc} ist der Kehrwert des Hill'schen Formfaktors A_{Hill}, der den Anteil der schnellen und langsamen Muskelfasern berücksichtigt.

Für die Längenfunktion $f_{\mathrm{l}}(L_{\mathrm{M}})$ oder $f_{\mathrm{l}}(\overline{\lambda})$ als Funktion der Faserstreckung wird von Blemker et al. [8] folgende Beziehung (siehe Abbildung 3.4) mit der optimalen Faserstreckung als einzigem Parameter angegeben:

$$f_{\mathrm{l}} = \begin{cases} 9(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}} - 0{,}4)^2 & \text{für} \quad \overline{\lambda} \leqslant 0{,}6\lambda_{\mathrm{opt}} \\ 9(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}} - 1{,}6)^2 & \text{für} \quad \overline{\lambda} \geqslant 1{,}4\lambda_{\mathrm{opt}} \\ 1 - 4(1 - \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}})^2 & \text{für} \quad 0{,}6\lambda_{\mathrm{opt}} < \overline{\lambda} < 1{,}4\lambda_{\mathrm{opt}} \end{cases} \tag{3.21}$$

Analog zu Gleichung (3.15) erhält man nach Division der Gleichung (3.18) durch $a(\overline{\lambda})$, mit der Beziehung für die Querschnittsflächen (3.14) die aktive Faserspannung

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \sigma_{\max} f_{\mathrm{l}}(\overline{\lambda}) f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda}) \alpha(t) \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}. \tag{3.22}$$

Die Steifigkeit k_{SE} des seriell elastischen Elements kann nach Pandy [26] durch eine lineare Funktion der Kraft F_{SE}

$$k_{\mathrm{SE}} = \frac{100 F_{\mathrm{SE}} + 10 F_{\max}}{L_{\mathrm{opt}}} \tag{3.23}$$

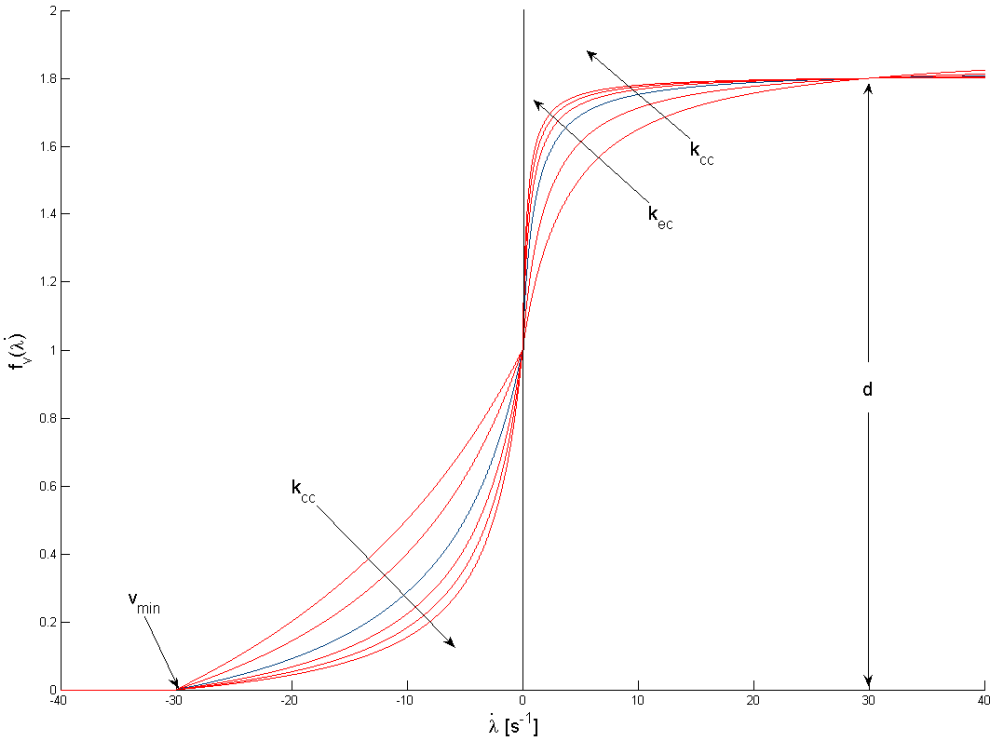

Abbildung 3.3: Geschwindigkeitsfunktion $f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda})$ und Parameter

beschrieben werden, wobei L_{opt} die optimale Faserlänge ist. Dieser Zusammenhang basiert auf experimentellen Daten und ist plausibel, da sowohl die Kraft als auch die Steifigkeit des seriell elastischen Elements (entsprechend der Querbrückentheorie) von der Anzahl der geschlossen Querbrücken abhängen. Das seriell elastische Element ist nur aus dem Grund der Vollständigkeit angegeben und wird im Folgenden nicht berücksichtigt, da $f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda})$ zur Beschreibung der Geschwindigkeitsabhängigkeit verwendet wird. Aus den Gleichungen (2.22), (2.25), (2.26) und (3.10) folgt:

$$\sigma_{\mathrm{f}}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha) = \sigma_{\mathrm{a}}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha) + \sigma_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda}) \tag{3.24}$$

Das Verzerrungsenergie-Potential der Faser W_{f} würde man durch Integration der Beziehung

$$\frac{\partial W_{\mathrm{f}}}{\partial \overline{\lambda}} \overline{\lambda} = \sigma_{\mathrm{f}}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha). \tag{3.25}$$

erhalten. Diese Integration ist nicht notwendig, da die Funktion $W_{\mathrm{f}}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha)$ im Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsmaß nach Gleichung (3.27) nur als Ableitung $\partial W_{\mathrm{f}} / \partial \overline{\lambda}$ vorkommt.

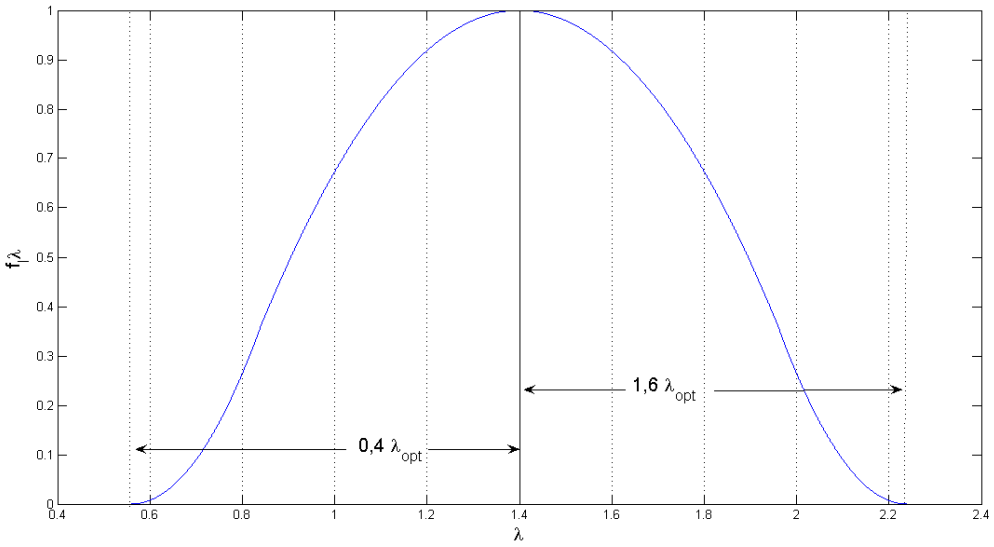

Abbildung 3.4: Längenfunktion $f_\mathrm{l}(\lambda)$

Das gesamte Verzerrungsenergie-Potential W setzt sich somit additiv aus den folgenden Anteilen zusammen:

- W_1 für Schub längs der Faserrichtung nach Gleichung (3.1)
- W_2 für Schub quer zur Faserrichtung nach Gleichung (3.6)
- W_f für die passive und aktive Spannung in Faserrichtung nach Gleichung (3.25)
- W_vol für die Volumsänderung nach Gleichung (3.9)

$$W = W_1 + W_2 + W_f + W_\mathrm{vol} \tag{3.26}$$

Die Antwortterme $\hat{\boldsymbol{A}}_i$ und die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial B_i}$ (für $i = 1, 2$) nach Gleichung (1.30), sowie analog $\boldsymbol{A}_i$ und $\frac{\partial W}{\partial I_i}$ (für $i = 3, 4, 5$) entsprechend der Beziehung (1.27) sind objektiv, wie in [12] gezeigt wird. Damit ist auch das Materialgesetz in Form einer Beziehung zwischen dem Piola-Kirchhoff'schem Spannungstensor 2. Art und dem rechten Cauchy-Green-Tensor (siehe Abschnitt 3.2),

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C}) = 2\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial W}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{C}}\right) + \frac{\partial W}{\partial \overline{\lambda}}\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial W}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}}\right], \tag{3.27}$$

objektiv.

3.2 Das Materialgesetz

In diesem Abschnitt wird das Materialgesetz als Beziehung zwischen Cauchy'schem Spannungstensor und rechtem Cauchy-Green-Tensor hergeleitet.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{m}) \tag{3.28}$$

Dies ist für die Implementierung in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS notwendig, da in diesem $\boldsymbol{\sigma}$ als Spannungsmaß verwendet wird und der UMAT-Subroutine, welche das Materialgesetz enthält, der Deformationsgradient übergeben wird. Im Folgenden wird zuerst der Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor 2. Art hergeleitet und dieser anschließend in die Momentankonfiguration transformiert um den Causchy'schen Spannungstensor zu erhalten. Dieser Umweg wird gewählt, da die Ableitungen der Invarianten I_i nach $\boldsymbol{C}$ einfacher als jene nach $\boldsymbol{F}$ zu berechnen ist. Nach Gleichung (1.23) erhält man die Komponenten $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_\mathrm{f}$ und $\boldsymbol{S}_\mathrm{vol}$ des Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor 2. Art für die Schubterme längs und quer zur Faserrichtung, den Anteil in Faserrichtung und die volumetrische Spannung aus der Ableitung des jeweiligen Verzerrungsenergie-Potentials nach dem rechten Cauchy-Green-Tensor:

$$\boldsymbol{S}_1 = 2\frac{\partial W_1(B_1(\overline{I}_4, \overline{I}_5))}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial W_1}{\partial B_1}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_4}\frac{\partial \overline{I}_4}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_5}\frac{\partial \overline{I}_5}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \tag{3.29a}$$

$$\boldsymbol{S}_2 = 2\frac{\partial W_2(B_2(\overline{I}_1, \overline{I}_4, \overline{I}_5))}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial W_1}{\partial B_1}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_1}\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_4}\frac{\partial \overline{I}_4}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_5}\frac{\partial \overline{I}_5}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \tag{3.29b}$$

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{vol} = 2\frac{\partial W_\mathrm{vol}(J)}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial W_\mathrm{vol}}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{3.29c}$$

Mit Gleichung (3.25) erhält man für die Faserspannung

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{f} = 2\frac{\partial W_\mathrm{f}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial W_\mathrm{f}}{\partial \overline{\lambda}}\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\sigma_\mathrm{f}(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha)\overline{\lambda}^{-1}\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial \boldsymbol{C}}. \tag{3.29d}$$

Der jeweilige Anteil $\boldsymbol{\sigma}_i$ $(i = 1, 2, \mathrm{f}, \mathrm{vol})$ des Cauchy'schen Spannungstensor wird durch die Transformation

$$\boldsymbol{\sigma}_i = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{F}^\mathrm{T} \tag{3.30}$$

von der Ausgangskonfiguration, bezüglich welcher $\boldsymbol{S}_i$ definiert ist, in den momentanen Zustand berechnet.

Die partiellen Ableitungen der deviatorischen Invarianten $\overline{I}_1$, $\overline{I}_4$ und $\overline{I}_5$ nach $\boldsymbol{C}$ lauten

$$\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}}\left(J^{-2/3}\boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{I}\right) = J^{-2/3}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\overline{I}_1\boldsymbol{C}^{-1}, \tag{3.31a}$$

(mit dem Einheitstensor 2. Stufe $\boldsymbol{I}$)

$$\frac{\partial \overline{I}_4}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}}\left(J^{-2/3}\boldsymbol{C}\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\right) = J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\overline{I}_4\boldsymbol{C}^{-1} \quad \text{und} \tag{3.31b}$$

$$\frac{\partial \overline{I}_5}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}}\left(J^{-4/3}\boldsymbol{C}^2\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\right) = J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \frac{2}{3}\overline{I}_5\boldsymbol{C}^{-1}. \tag{3.31c}$$

Für die Volumenänderung J gilt:

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}}\left(\sqrt{\det \boldsymbol{C}}\right) = \frac{1}{2}J\boldsymbol{C}^{-1} \tag{3.32}$$

Für die in Gleichung (3.29a) benötigten partiellen Ableitungen der Invariante B_1 nach $\overline{I}_4$ und $\overline{I}_5$ erhält man

$$\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_4} = \frac{\partial}{\partial \overline{I}_4}\left(\sqrt{\frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^2} - 1}\right) = -\left(\frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^2} - 1\right)^{-1/2}\frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^3} \tag{3.33a}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_5} = \frac{\partial}{\partial \overline{I}_5}\left(\sqrt{\frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^2} - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^2} - 1\right)^{-1/2}\frac{1}{\overline{I}_4{}^2}. \tag{3.33b}$$

Die Ableitungen der Invariante B_2 für Gleichung (3.29b) lauten[1]:

$$\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_1} = \frac{\partial}{\partial \overline{I}_1}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\sqrt{\overline{I}_4} \tag{3.34a}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_4} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\left(\frac{\overline{I}_1}{\sqrt{\overline{I}_4}} + \frac{\overline{I}_5}{\overline{I}_4{}^{3/2}}\right) \tag{3.34b}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_5} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{\overline{I}_4}} \tag{3.34c}$$

Außerdem werden die folgenden Ableitungen der durch die Gleichungen (3.1), (3.6) und (3.9) definierten Verzerrungsenergie-Potentiale

$$\frac{\partial W_1}{\partial B_1} = 2G_1B_1 + 4G_{13}B_1^3 + 5G_{14}B_1^4, \tag{3.35a}$$

[1] mit $\left(\cosh^{-1}(x)\right)' = (x^2-1)^{-1/2}$

$$\frac{\partial W_2}{\partial B_2} = 2G_2B_2 + 4G_{23}B_2^3 + 5G_{24}B_2^4 \qquad \text{und} \tag{3.35b}$$

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial J} = \frac{K}{J}\ln J \tag{3.35c}$$

benötigt.

Einsetzen der Gleichungen (3.31b) und (3.31c) in die Beziehung (3.29a) ergibt für die Schubspannung längs der Faserrichtung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_1 = 2A_4\Big(J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\overline{I}_4\boldsymbol{C}^{-1}\Big) + \\ 2A_5\Big(J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \frac{2}{3}\overline{I}_5\boldsymbol{C}^{-1}\Big)\end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Abkürzungen A_4 und A_5 fassen die partiellen Ableitungen aus den Gleichungen (3.33) und (3.35a) zusammen.

$$A_4 = \frac{\partial W_1}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_4} = -\Big(2G_1 + 4G_{13}{B_1}^2 + 5G_{14}{B_1}^3\Big)\overline{I}_5{\overline{I}_4}^{-3} \tag{3.37a}$$

$$A_5 = \frac{\partial W_1}{\partial B_1}\frac{\partial B_1}{\partial \overline{I}_5} = -\frac{1}{2}\Big(2G_1 + 4G_{13}{B_1}^2 + 5G_{14}{B_1}^3\Big){\overline{I}_4}^{-2} \tag{3.37b}$$

Die Terme mit $\boldsymbol{C}^{-1}$ in Gleichung (3.36) mit den Abkürzungen A_4 und A_5 heben sich auf, da die Invariante B_1 aufgrund der Definition nach Gleichung (3.2) nur deviatorische Anteile enthält. Damit lautet das Ergebnis für die Schubspannung längs der Faserrichtung

$$\boldsymbol{S}_1 = 2A_4J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + 2A_5J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big). \tag{3.38}$$

Für den Schubanteil quer zur Faserrichtung erhält man mit den Ableitungen der Invarianten aus den Gleichungen (3.31) und (3.29b) analog zur vorherigen Herleitung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_2 = 2E_1\Big(J^{-2/3}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\overline{I}_1\boldsymbol{C}^{-1}\Big) + \\ 2E_4\Big(J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\overline{I}_4\boldsymbol{C}^{-1}\Big) + \\ 2E_5\Big(J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \frac{2}{3}\overline{I}_5\boldsymbol{C}^{-1}\Big).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dabei sind die Ableitungen aus den Gleichungen (3.34) und (3.35b) zu den Abkürzungen E_1, E_4 und E_5 zusammengefasst.

$$E_1 = \frac{\partial W_2}{\partial B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_1} = \frac{\partial W_2}{\partial B_2} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_1} = \frac{1}{2}\Big(2G_2B_2 + 4G_{23}{B_2}^3 + 5G_{24}{B_2}^4\Big)\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\sqrt{\overline{I}_4} \tag{3.40a}$$

$$E_4 = \frac{\partial W_2}{\partial B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_4} = \frac{\partial W_2}{\partial B_2} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_4} = \frac{1}{4}\Big(2G_2B_2 + 4G_{23}{B_2}^3 + 5G_{24}{B_2}^4\Big)\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\left(\frac{\overline{I}_1}{\sqrt{\overline{I}_4}} + \frac{\overline{I}_5}{{\overline{I}_4}^{3/2}}\right) \tag{3.40b}$$

$$E_5 = \frac{\partial W_2}{\partial B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_5} = \frac{\partial W_2}{\partial B_2} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_5} = -\frac{1}{2}\Big(2G_2B_2 + 4G_{23}{B_2}^3 + 5G_{24}{B_2}^4\Big)\left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{\overline{I}_4}}. \tag{3.40c}$$

Die weiteren Abkürzungen g und $\overline{g}$ werden später für die Herleitung der Materialtangente benötigt, um die bei $B_2 = 0$ auftretenden Grenzwerte der partiellen Ableitungen von E_i nach $\overline{I}_j$ zu berechnen. Schreibt man B_2 in der Form

$$B_2 = \cosh^{-1}(\overline{g}) \quad \text{mit} \quad \overline{g} = \frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}} \tag{3.41}$$

als Argument an, so bezeichnet g die partielle Ableitung

$$g = \frac{\partial B_2}{\partial \overline{g}} = \left[\left(\frac{\overline{I}_1\overline{I}_4 - \overline{I}_5}{2\sqrt{\overline{I}_4}}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}. \tag{3.42}$$

Die in Gleichung (3.39) auftretenden Ableitungen des Arguments $\overline{g}$ lauten:

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{I}_4} \tag{3.43a}$$

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{I}_1}{\sqrt{\overline{I}_4}} + \frac{\overline{I}_5}{{\overline{I}_4}^{3/2}}\right) \tag{3.43b}$$

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_5} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\overline{I}_4}} \tag{3.43c}$$

Für die Spannung in Faserrichtung entsprechend Gleichung (3.29d) gilt

$$\boldsymbol{S}_f = \sigma_f(\overline{\lambda}, \dot{\lambda}, \alpha)\left(J^{-2/3}\overline{\lambda}^{-2}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{C}^{-1} \right) \tag{3.44}$$

mit der partiellen Ableitung der deviatorischen Faserstreckung

$$\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{1}{2} J^{-2/3}\overline{\lambda}^{-1}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) - \frac{1}{6}\overline{\lambda}\boldsymbol{C}^{-1}. \tag{3.45}$$

Der volumetrische Anteil der Spannung nach Gleichung (3.29c) lautet mit den Beziehungen (3.32) und (3.35c)

$$\boldsymbol{S}_{\text{vol}} = K \ln(J)\boldsymbol{C}^{-1}. \tag{3.46}$$

Transformation in die Momentankonfiguration

Den Cauchy'schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ erhält man durch Anwenden der Transformation nach Gleichung (3.30) auf die einzelnen Anteile des Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors 2. Art. Die ursprüngliche Faserrichtung $\boldsymbol{M}$ wird durch die folgende Beziehung in ihre Momentankonfiguration $\boldsymbol{m}$ abgebildet.

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{J^{1/3}\overline{\lambda}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{M} \tag{3.47}$$

Die Faserrichtungen in der Ausgangskonfiguration $\boldsymbol{M}$ und in der Momentankonfiguration $\boldsymbol{m}$ sind Einheitsvektoren. Damit erhält man für die Transformation von $\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}$

$$J^{-1}\boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}\Big)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = J^{-1/3}\overline{\lambda}^{2}\Big(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}\Big), \tag{3.48}$$

sowie für den Term $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C}$

$$J^{-1}\boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = J^{1/3}\overline{\lambda}^{2}\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big), \tag{3.49}$$

mit dem deviatorischen Anteil des linken Cauchy-Green-Tensors

$$\overline{\boldsymbol{B}} = J^{-2/3}\boldsymbol{B}. \tag{3.50}$$

Wegen der Beziehung[2]

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \Big(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\Big)^{-1} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \tag{3.51}$$

erhält man für die Transformation von $\boldsymbol{C}^{-1}$

$$J^{-1}\boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{C}^{-1}\Big)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}. \tag{3.52}$$

[2] $\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}$ bezeichnet die Transposition der Inversen: $\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-\mathrm{T}}$

Mit den Transformationsbeziehungen (3.48) und (3.49) erhält man für den Cauchy'schen Spannungstensor des Schubanteils längs der Faserrichtung $\boldsymbol{\sigma}_1$ aus Gleichung (3.38)

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{J}\Big[A_4\overline{\lambda}^2\Big(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\Big) + A_5\overline{\lambda}^2\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\Big]. \tag{3.53}$$

Für den Cauchy'schen Spannungstensor des Schubanteils quer zur Faserrichtung $\boldsymbol{\sigma}_2$ lautet die Transformation mit den Gleichungen (3.48), (3.49) und (3.52)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_2 = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{J}\Big[&E_1\overline{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{3}E_1\overline{I}_1\boldsymbol{I} + E_4\overline{\lambda}^2\Big(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\Big) - \frac{1}{3}E_4\overline{\lambda}^2\boldsymbol{I} + \\ &E_5\overline{\lambda}^2\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) - \frac{2}{3}E_5\overline{I}_5\boldsymbol{I}\Big].\end{aligned} \tag{3.54}$$

Analog erhält man mit den Beziehungen (3.48) und (3.52) für die Komponente $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$ in Faserrichtung aus den Gleichungen (3.24) und (3.44)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{J}\sigma_{\max}\Big(f_{\mathrm{l}}(\overline{\lambda})f_{\mathrm{v}}(\dot{\lambda})\alpha(t) + f_{\mathrm{p}}(\overline{\lambda})\Big)\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}\Big[(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\Big] \tag{3.55}$$

und für den volumetrischen Anteil $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{vol}}$ aus (3.46)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{vol}} = J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \frac{K}{J}\ln(J)\boldsymbol{I}. \tag{3.56}$$

Durch die in diesem Abschnitt hergeleiteten Gleichungen (3.53) bis (3.55) und (3.56) ist das Materialgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{vol}} \tag{3.57}$$

bezüglich der Momentankonfiguration festgelegt und kann in dieser Form als Funktion des Deformationsgradienten in der UMAT-Subroutine implementiert werden (genauere Beschreibung in Kapitel 4).

3.3 Die Materialtangente

3.3.1 Definitionen

Das Newton-Raphson-Verfahren (genauere Beschreibung siehe Kapitel 4) des Finite-Elemente-Programmpakets ABAQUS benötigt die algorithmisch konsistente Materialtangente $\mathring{\mathbb{c}}$ um das nichtlineare Gleichungssystem für die Verschiebungen in den Knotenpunkten iterativ zu lösen. Diese ist definiert als die partielle Ableitung des Inkrements des Cauchy'schen Spannungstensors $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ nach dem Inkrement des integrierten Spannungstensors $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\mathring{\mathbb{c}} = \frac{\partial \Delta\boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.58}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathring{\mathbb{c}} \cdot\cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.59}$$

Für Kontinuumselemente wird in ABAQUS/Standard [1] die Jaumann-Spannungsrate $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$ verwendet. Diese ist objektiv und kann über die Rate des Cauchy'schen Spannungstensors $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ durch

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.60}$$

mit dem Wirbeltensor

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right) = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}\right)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \tag{3.61}$$

der den nicht-symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten $\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$ darstellt, berechnet werden. Da die Spannungen in ABAQUS/Standard für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit der Hughes-Winget-Methode

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \Delta\boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma}_i\Delta\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{3.62}$$

integriert werden, ist das Inkrement des mitrotierten Cauchy'schen Spannungstensors frei von Starrkörperrotationen. Dabei bezeichnet $\Delta\boldsymbol{R}$ den inkrementellen Rotationstensor, der in ABAQUS/Standard für Kontinuumselemente mit der Hughes-Winget-Methode durch die Beziehung

$$\Delta\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{W}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{W}\right) \tag{3.63}$$

mit dem inkrementellen Wirbeltensor

$$\Delta\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Delta\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} - \left(\frac{\partial \Delta\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}} \tag{3.64}$$

berechnet wird. Dabei bezeichnet $\Delta \boldsymbol{u}$ das Verschiebungsinkrement und $\boldsymbol{x}_{i+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{x}_i + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{u}$ die räumliche Koordinate in der Mitte des Inkrements.

Da in ABAQUS/Standard die Jaumann-Spannungsrate verwendet wird und aufgrund der Definition nach Gleichung (3.62) wird $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ durch das Integral

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathring{\boldsymbol{\sigma}} \, dt \tag{3.65}$$

von $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$ über ein Inkrement definiert. Diese Definition des Spannungsinkrements ist konsistent mit der Hughes-Winget-Methode [16].

Durch die Hughes-Winget-Methode ist entsprechend Gleichung (3.62) die Änderung der Spannung während eines Inkrements in die Rotation $\Delta \boldsymbol{R}\boldsymbol{\sigma}_i\Delta \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ der Spannung am Anfang des Inkrements und einen Anteil $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ zufolge der reinen Deformation aufgeteilt. Definiert man das Spannungsinkrement als Integral über die Jaumann-Spannungsrate, dann enthält $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ nur die Spannungsänderung zufolge der Deformation, da die Jaumann-Spannungsrate nur von der Deformation und nicht von der Starrkörperrotation abhängt.

Die Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ kann additiv aus der Jaumann-Spannungsrate $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$, welche die Änderung der Spannung zufolge der reinen Deformation beschreibt, und dem Anteil für die Starrkörperrotation $-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{\sigma}$ zusammensetzt werden.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathring{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.66}$$

Für reine Starrkörperrotation gilt daher $\mathring{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0}$. Wird ein lokales, mit der Starrkörperdrehung rotierendes Koordinatensystem verwendet, ist $\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$.

Das Inkrement des integrierten Verzerrungstensors $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ist durch das Integral über ein Inkrement des Verzerrungsratentensors $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\right)$, welcher den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bezeichnet, definiert (siehe [1]).

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{d} \, dt \tag{3.67}$$

Der integrierte Verzerrungstensor am Ende des Inkrements $i+1$ lautet

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \Delta \boldsymbol{R}\boldsymbol{\varepsilon}_i\Delta \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{3.68}$$

Aufgrund dieser Definition gilt für $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$, wenn $\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ für alle Inkremente ist, die Beziehung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \int_{0}^{t_{i+1}} \boldsymbol{d} \, dt. \tag{3.69}$$

In diesem Fall ist der integrierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$ gleich dem logarithmischen Verzerrungsmaß $\boldsymbol{\epsilon}_{i+1}$ am Ende des Inkrements $i+1$ (siehe [1]).

Das Inkrement des mitrotierten Cauchy'schen Spannungstensors $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ ist nach Gleichung (3.65) so definiert, dass es objektiv ist. Dies ist notwendig, da entsprechend Gleichung (3.67) das Inkrement des integrierten Verzerrungstensors $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ebenfalls der Bedingung (1.2) für die Objektivität genügt. Die Rotation von $\boldsymbol{\sigma}_i$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ erfolgt in ABAQUS durch Anwenden der Beziehungen (3.62) und (3.68). Wären $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ und $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ nicht in objektiver Form definiert, würden in der algorithmisch konsistenten Materialtangente $\mathring{\mathbb{c}}$ Anteile auftreten, die nur durch Starrkörperrotationen entstehen.

Da es schwierig ist das Materialgesetz in der Form $\Delta\boldsymbol{\sigma} = f(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})$ anzuschreiben, wird die folgende Vorgehensweise gewählt [27]. Zuerst wird die Materialtangente bezüglich der Ausgangskonfiguration $\mathbb{C}_{i+1}$ aus

$$\mathbb{C}_{i+1} = 2\frac{\partial\Delta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C}_{i+1})}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} \tag{3.70}$$

berechnet. Der Index $i+1$ deutet an, dass die Auswertung an der Stelle $\boldsymbol{C}_{i+1} = \boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}$ erfolgt. Diese inkrementelle Formulierung erhält man wie folgt: Die Materialtangente $\mathbb{C}$ stellt eine Beziehung zwischen der Rate des Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors 2. Art $\dot{\boldsymbol{S}}$ und des rechten Cauchy-Green-Tensors $\dot{\boldsymbol{C}}$ her.

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathbb{C}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{C}} \tag{3.71}$$

Integriert man diese Beziehung mit dem impliziten Euler-Verfahren[3] (vgl. [9] S. 83f), da dieses relativ einfach und stabil ist, erhält man

$$\Delta\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathbb{C}_{i+1}\cdot\cdot\Delta\boldsymbol{C} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{i+1} - \boldsymbol{S}_i. \tag{3.72}$$

Die Materialtangente bezüglich der Momentankonfiguration $\mathbb{c}$ erhält man durch die Transformation

$$\mathbb{c} = \frac{1}{J}\mathbb{F}\mathbb{C}\mathbb{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.73}$$

und in inkrementeller Form

$$\mathbb{c}_{i+1} = \frac{1}{J_{i+1}}\mathbb{F}_{i+1}\mathbb{C}_{i+1}\mathbb{F}_{i+1}^{\mathrm{T}} \tag{3.74}$$

mit

$$\mathbb{F} = \Big(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}. \tag{3.75}$$

[3] Für eine Differentialgleichung in der Form $\dot{x} = f(x,t)$ lautet die approximierte Lösung nach dem impliziten Euler-Verfahren $\Delta x = x_{i+1} - x_i = f(x_{i+1}, t_{i+1})\Delta t$.

Das Transpositionssymbol T_{23} bedeutet eine Vertauschung der Indizes 2 und 3 eines Tensors 4. Stufe[4]. Für $\mathbb{c}$ gilt die folgende Beziehung zwischen der Truesdell-Spannungsrate $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ und dem Verzerrungsratentensor

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{c} \cdot\cdot \boldsymbol{d} \tag{3.76}$$

mit

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J}\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{l}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} + \mathrm{tr}(\boldsymbol{l})\boldsymbol{\sigma}. \tag{3.77}$$

Um die algorithmisch konsistente Materialtangente $\mathring{\mathbb{c}}$ bezüglich der Jaumann-Rate zu zu erhalten, ist daher eine weitere Transformation notwendig. Integration der Gleichung (3.76) ergibt

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \check{\boldsymbol{\sigma}} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{c} \cdot\cdot \boldsymbol{d}\, dt. \tag{3.78}$$

Durch Einsetzen der Definitionen (3.65) und (3.67) in Gleichung (3.59) erhält man

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathring{\boldsymbol{\sigma}} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathring{\mathbb{c}} \cdot\cdot \boldsymbol{d}\, dt. \tag{3.79}$$

Subtrahiert man die oben stehenden Gleichungen (3.78) und (3.79) und führt die Integration mittels explizitem Euler-Verfahren aus erhält man den gesuchten Ausdruck für die Materialtangente bezüglich der Jaumann-Spannungsrate

$$\mathring{\mathbb{c}}_{i+1} = \mathbb{c}_{i+1} + \mathbb{H}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_{i+1} \otimes \boldsymbol{I} \tag{3.80}$$

mit

$$\mathbb{H}_{i+1} = \left(\boldsymbol{\sigma}_{i+1} \otimes \boldsymbol{I}\right)^{\mathrm{T}_{23}} + \left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\right)^{\mathrm{T}_{23}}. \tag{3.81}$$

3.3.2 Materialtangente bezüglich der Ausgangskonfiguration

Die Materialtangente bezüglich der Ausgangskonfiguration $\mathbb{C}_{i+1}$ ist in inkrementeller Form durch Gleichung (3.70) gegeben. Die Komponenten $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ und $\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol}}$ des Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor 2. Art können als Funktionen von $\boldsymbol{C}$ und $\dot{\boldsymbol{C}}$ angeschrieben werden.

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{C}, \dot{\boldsymbol{C}}) = \boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{C}, \dot{\boldsymbol{C}}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{vol}}(\boldsymbol{C}) \tag{3.82}$$

Für die partielle Ableitung nach dem Inkrement des rechten Cauchy-Green-Tensors $\Delta\boldsymbol{C}$ wird $\boldsymbol{C}$ durch $\boldsymbol{C}_{i+1} = \boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}$ und $\dot{\boldsymbol{C}}$ durch $\Delta\boldsymbol{C}/\Delta t$ ersetzt. Damit lauten die Piola-Kirchhoff'schen Spannungen am Ende des Inkrements

$$\boldsymbol{S}_{i+1}(\Delta\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{S}_{1,i+1}(\Delta\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{S}_{2,i+1}(\Delta\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{f},i+1}(\Delta\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{vol},i+1}(\Delta\boldsymbol{C}). \tag{3.83}$$

[4]Für einen Tensor 4. Stufe $\mathbb{A}$ gilt $\left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}_{23}} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}_{23}}\right)^{\mathrm{T}}$

Für die Schubkomponente längs der Faserrichtung folgt aus Gleichung (3.38)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{1,i+1} = {} & 2A_{4,i+1}J_{i+1}^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+ \\ & 2A_{5,i+1}J_{i+1}^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}_{i+1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}_{i+1}\Big).\end{aligned} \tag{3.84}$$

mit

$$A_{4,i+1} = A_{4,i+1}(\overline{I}_{4,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{5,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1})), \tag{3.85a}$$

$$A_{5,i+1} = A_{5,i+1}(\overline{I}_{4,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{5,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1})) \tag{3.85b}$$

und der Volumenänderung am Ende des Inkrements

$$J_{i+1} = J_{i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}) = \sqrt{\det(\boldsymbol{C}_{i+1})}. \tag{3.86}$$

Die Invarianten $\overline{I}_{1,i+1}$, $\overline{I}_{4,i+1}$ und $\overline{I}_{5,i+1}$, sowie die Faserstreckung $\overline{\lambda}_{i+1}$ lauten:

$$\overline{I}_{1,i+1} = J_{i+1}^{-2/3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_{i+1}) \tag{3.87a}$$

$$\overline{I}_{4,i+1} = J_{i+1}^{-2/3}\boldsymbol{C}_{i+1}\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) \tag{3.87b}$$

$$\overline{I}_{5,i+1} = J_{i+1}^{-4/3}\boldsymbol{C}_{i+1}^2\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) \tag{3.87c}$$

$$\overline{\lambda}_{i+1} = J_{i+1}^{-1/3}\Big(\boldsymbol{C}_{i+1}\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\Big)^{1/2} \tag{3.87d}$$

Die Rate der Faserstreckung $\dot{\lambda}_{i+1}$ ist

$$\dot{\lambda}_{i+1} = \frac{1}{2}\lambda_{i+1}^{-1}\frac{\Delta\boldsymbol{C}}{\Delta t}\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}). \tag{3.88}$$

Für die Schubkomponente quer zur Faserrichtung erhält man aus Gleichung (3.39)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{2,i+1} = {} & 2E_{1,i+1}\left(J_{i+1}^{-2/3}\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\overline{I}_{1,i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}\right)+ \\ & 2E_{4,i+1}\left(J_{i+1}^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})-\frac{1}{3}\overline{I}_{4,i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}\right)+ \\ & 2E_{5,i+1}\left(J_{i+1}^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}_{i+1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}_{i+1}\Big)-\frac{2}{3}\overline{I}_{5,i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}\right)\end{aligned} \tag{3.89}$$

mit den Abkürzungen

$$E_{1,i+1} = E_{1,i+1}(\overline{I}_{1,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{4,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{5,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1})) \tag{3.90a}$$

$$E_{4,i+1} = E_{4,i+1}(\overline{I}_{1,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{4,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{5,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1})) \tag{3.90b}$$

$$E_{5,i+1} = E_{5,i+1}(\overline{I}_{1,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{4,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1}), \overline{I}_{5,i+1}(\boldsymbol{C}_{i+1})). \tag{3.90c}$$

Aus den Gleichungen (3.44) und (3.46) erhält man für die Komponente in Faserrichtung

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{f},i+1} = \sigma_{\mathrm{f},i+1}(\overline{\lambda}_{i+1}, \dot{\lambda}_{i+1}, \alpha)\left(J_{i+1}^{-2/3}\overline{\lambda}_{i+1}^{-2}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}\right) \tag{3.91}$$

und für den volumetrischen Anteil

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol},i+1} = K\ln(J_{i+1})\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}. \tag{3.92}$$

Für die partiellen Ableitungen der Invarianten, der Volumenänderung und der Faserstreckung nach $\Delta\boldsymbol{C}$ gelten die folgenden Beziehungen.

$$\frac{\partial\overline{I}_{1,i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = J_{i+1}^{-2/3}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\overline{I}_{i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1} \tag{3.93a}$$

$$\frac{\partial\overline{I}_{4,i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = J_{i+1}^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{3}\overline{I}_{4,i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1} \tag{3.93b}$$

$$\frac{\partial\overline{I}_{5,i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = J_{i+1}^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}_{i+1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}_{i+1}\Big) - \frac{2}{3}\overline{I}_{5,i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1} \tag{3.93c}$$

$$\frac{\partial J_{i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = \frac{1}{2}J_{i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1} \tag{3.93d}$$

$$\frac{\partial\overline{\lambda}_{i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = \frac{1}{2}J_{i+1}^{-2/3}\overline{\lambda}_{i+1}^{-1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \frac{1}{6}\overline{\lambda}_{i+1}\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1} \tag{3.93e}$$

Die partielle Ableitung der Rate der Faserstreckung nach $\Delta\boldsymbol{C}$ lautet

$$\frac{\partial\dot{\lambda}_{i+1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = \left[\frac{1}{2}\lambda_{i+1}^{-1}\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{4}\lambda_{i+1}^{-3}\frac{\Delta\boldsymbol{C}}{\Delta t}\cdot\cdot(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\right](\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}). \tag{3.94}$$

Schubsteifigkeit längs der Faserrichtung

Den Anteil der Materialtangente $\mathbb{C}_{1,i+1}$ für Schub längs der Faserrichtung erhält man aus Gleichung (3.84) durch die partielle Ableitung

$$\mathbb{C}_{1,i+1} = 2\frac{\partial\boldsymbol{S}_{1,i+1}(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial}{\partial\Delta\boldsymbol{C}}\Big(\boldsymbol{S}_{1,i} + \Delta\boldsymbol{S}_1(\Delta\boldsymbol{C})\Big) = 2\frac{\partial\Delta\boldsymbol{S}_1(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial\Delta\boldsymbol{C}}. \tag{3.95}$$

Für die folgende Herleitung werden die Zeitindizes $i+1$ weggelassen, da alle zeitabhängigen Größen am Ende des Inkrements mit $\boldsymbol{C}_{i+1} = \boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}$ ausgewertet sind. Mit den

im Anhang angegebenen Beziehungen (A.5), (A.6) und (A.7) lautet die oben stehende Ableitung der Gleichung (3.84)

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_1 = {} & 4J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\frac{\partial A_4}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}J^{-2/3}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{C}^{-1}+\\ & 4J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)\otimes\frac{\partial A_5}{\partial\Delta\boldsymbol{C}}-\\ & \frac{8}{3}A_5J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)\otimes\boldsymbol{C}^{-1}+\\ & 4A_5J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{I}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}.\end{aligned} \tag{3.96}$$

Mit den Ableitungen der Invarianten aus Gleichung (3.93) und

$$\frac{\partial A_4}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = \frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_4}\frac{\partial\overline{I}_4}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} + \frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_5}\frac{\partial\overline{I}_5}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} \tag{3.97a}$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = \frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_4}\frac{\partial\overline{I}_4}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} + \frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_5}\frac{\partial\overline{I}_5}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} \tag{3.97b}$$

mit

$$\frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_4} = (8G_{13}B_1+15G_{14}B_1^2)B_1^{-1}\overline{I}_5^2\overline{I}_4^{-6}+3(2G_1+4G_{13}B_1^2+5G_{14}B_1^3)\overline{I}_5\overline{I}_4^{-4} \tag{3.98a}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_5} = -(8G_{13}B_1+15G_{14}B_1^2)\frac{1}{2}B_1^{-1}\overline{I}_5\overline{I}_4^{-5}-(2G_1+4G_{13}B_1^2+5G_{14}B_1^3)\overline{I}_4^{-3} \tag{3.98b}$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_4} = \frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_5} \tag{3.98c}$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_5} = \frac{1}{2}(8G_{13}B_1+15G_{14}B_1^2)\frac{1}{2}B_1^{-1}\overline{I}_4^{-4} \tag{3.98d}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_1 = {} & 4J^{-4/3}\frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_4}\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}+\\ & 4J^{-6/3}\frac{\partial A_4}{\partial\overline{I}_5}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)+\\ & 4J^{-6/3}\frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_4}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+\\ & 4J^{-8/3}\frac{\partial A_5}{\partial\overline{I}_5}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big)+\\ & 4A_5J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{I}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

Schubsteifigkeit quer zur Faserrichtung

Den Anteil der Materialtangente $\mathbb{C}_{2,i+1}$ für Schub quer zur Faserrichtung erhält man mit Gleichung (3.89) durch die partielle Ableitung

$$\mathbb{C}_{2,i+1} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}_{2,i+1}(\Delta \boldsymbol{C})}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial \Delta \boldsymbol{S}_2(\Delta \boldsymbol{C})}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} \tag{3.100}$$

mit der Linearisierung

$$\boldsymbol{S}_{2,i+1} = \boldsymbol{S}_{2,i} + \Delta \boldsymbol{S}_2. \tag{3.101}$$

Im Folgenden werden wieder die Zeitindizes $i+1$ weggelassen, und alle zeitabhängigen Größen sind am Ende des Inkrements ausgewertet. Analog zur vorherigen Herleitung erhält man mit den Beziehungen (A.5), (A.6) und (A.7) für die oben angegebene Ableitung der Gleichung (3.84)

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_2 = {} & 4J^{-2/3}\boldsymbol{I} \otimes \frac{\partial E_1}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_1 J^{-2/3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} - \\
& \frac{4}{3}\overline{I}_1 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial E_1}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_1 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_1 \overline{I}_1 \frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} + \\
& 4J^{-2/3}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \frac{\partial E_4}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_4 J^{-2/3}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \boldsymbol{C}^{-1} - \\
& \frac{4}{3}\overline{\lambda}^2 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial E_4}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_4 \overline{\lambda} \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial \overline{I}_4}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{4}{3}E_4 \overline{\lambda}^2 \frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} + \\
& 4J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) \otimes \frac{\partial E_5}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \\
& \frac{8}{3}E_5 J^{-4/3}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) \otimes \boldsymbol{C}^{-1} - \\
& \frac{8}{3}\overline{I}_5 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial E_5}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{8}{3}E_5 \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial \overline{I}_5}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} - \frac{8}{3}E_5 \overline{I}_5 \frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta \boldsymbol{C}}.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Mit den Ableitungen der Invarianten aus Gleichung (3.93) und

$$\frac{\partial E_i}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} = \frac{\partial E_i}{\partial \overline{I}_1}\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} + \frac{\partial E_i}{\partial \overline{I}_4}\frac{\partial \overline{I}_4}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} + \frac{\partial E_i}{\partial \overline{I}_5}\frac{\partial \overline{I}_5}{\partial \Delta \boldsymbol{C}} \tag{3.103}$$

für $i = 1, 4, 5$ lauten die partiellen Ableitungen der Abkürzungen E_i nach den deviatorischen Invarianten $\overline{I}_j$ $(j = 1, 4, 5)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_i}{\partial \overline{I}_j} = \frac{\partial}{\partial \overline{I}_j}\Big(\frac{\partial W_2}{\partial B_2}\frac{\partial B_2}{\partial \overline{I}_i}\Big) = \frac{\partial}{\partial \overline{I}_j}\Big(\frac{\partial W_2}{\partial B_2} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_i}\Big) = \\
\frac{\partial^2 W_2}{\partial {B_2}^2} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_i} g \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_j} + \frac{\partial W_2}{\partial B_2}\Big(\frac{\partial g}{\partial \overline{I}_j}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_i} + g\frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_i \partial \overline{I}_j}\Big).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Dabei sind g, $\overline{g}$ und die partiellen Ableitungen von $\overline{g}$ nach den Invarianten $\overline{I}_i$ durch die Gleichungen (3.42), (3.41) und (3.43) gegeben. Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{I}_i} = -g^3 \overline{g} \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_i} \quad \text{für} \quad i = 1, 4, 5 \tag{3.105}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_1 \partial \overline{I}_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_1 \partial \overline{I}_4} = \frac{1}{4} \overline{\lambda}^{-1} \qquad \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_1 \partial \overline{I}_5} = 0 \\ \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_4 \partial \overline{I}_4} = -\frac{1}{8} \overline{I}_1 \overline{\lambda}^{-3} - \frac{3}{8} \overline{I}_5 \overline{\lambda}^{-5} \\ \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_4 \partial \overline{I}_5} = \frac{1}{4} \overline{\lambda}^{-3} \qquad \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_5 \partial \overline{I}_5} = 0, \end{aligned} \tag{3.106}$$

sowie den Abkürzungen

$$Y = \frac{\partial^2 W_2}{\partial {B_2}^2} g^2 - \frac{\partial W_2}{\partial B_2} g^3 \overline{g} \tag{3.107a}$$

$$Z = \frac{\partial W_2}{\partial B_2} g \tag{3.107b}$$

erhält man schließlich

$$\frac{\partial E_i}{\partial \overline{I}_j} = Y \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_i} \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{I}_j} + Z \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial \overline{I}_i \partial \overline{I}_j}, \tag{3.108}$$

wobei die partiellen Ableitungen des Verzerrungsenergie-Potentials nach B_2

$$\frac{\partial W_2}{\partial B_2} = 2G_2 B_2 + 4G_{23} B_2^3 + 5G_{24} B_2^4 \tag{3.109a}$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial {B_2}^2} = 2G_2 + 12G_{23} B_2^2 + 20G_{24} B_2^3 \tag{3.109b}$$

lauten.

Die Abkürzungen Y und Z sind von Bedeutung, da bei $B_2 = 0$ der Ausdruck $\overline{g} = 1$ ist und daher $g \to \infty$ geht. Der Grenzwert von Y kann wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned} \lim_{\overline{g} \to 1} Y = \; & \lim_{\overline{g} \to 1} (2G_2 + 12G_{23} B_2^2 + 20G_{24} B_2^3) g^2 - (2G_2 B_2 + 4G_{23} B_2^3 + 5G_{24} B_2^4) g^3 \overline{g} = \\ & \lim_{\overline{g} \to 1} 2G_2 (g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) + 4G_{23} B_2^2 (3g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) + 5G_{24} B_2^3 (4g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) \end{aligned} \tag{3.110}$$

Mit der Regel von de L'Hospital erhält man für den Grenzwert

$$\begin{aligned}
&\lim_{\overline{g}\to 1} 2G_2(g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) = 2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{1}{\overline{g}^2 - 1} - \frac{\ln(\overline{g} + \sqrt{\overline{g}^2 - 1})\overline{g}}{(\overline{g}^2 - 1)^{3/2}} = \\
&2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{(\overline{g}^2 - 1)^{1/2} - \ln(\overline{g} + \sqrt{\overline{g}^2 - 1})\overline{g}}{(\overline{g}^2 - 1)^{3/2}} = \\
&2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{(\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}\overline{g} - (\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}\overline{g} - \ln(\overline{g} + \sqrt{\overline{g}^2 - 1})}{3\overline{g}(\overline{g}^2 - 1)^{1/2}} = \\
&2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{(\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}}{3(\overline{g}^2 - 1)^{1/2} + 3\overline{g}^2(\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}} = -\frac{2}{3}G_2.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Die Bestimmung der übrigen Grenzwerte aus Gleichung (3.110) erfolgt analog zur oben stehenden Rechnung. Da alle auftretenden Grenzwerte

$$\begin{gathered}
\lim_{\overline{g}\to 1} g^2 - B_2 g^3 \overline{g} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{\overline{g}\to 1} B_2^2(3g^2 - B_2 g^3)\overline{g} = 2 \quad \text{und} \\
\lim_{\overline{g}\to 1} B_2^3(4g^2 - B_2 g^3)\overline{g} = 0
\end{gathered} \tag{3.112}$$

eigentlich existieren lautet das Ergebnis

$$\lim_{\overline{g}\to 1} Y = \lim_{\overline{g}\to 1} 2G_2(g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) + 4G_{23} B_2^2(3g^2 - B_2 g^3 \overline{g}) = -\frac{2}{3}G_2 + 8G_{24}. \tag{3.113}$$

Da der Grenzwert

$$\lim_{\overline{g}\to 1} B_2 g \tag{3.114}$$

ebenfalls eigentlich existiert erhält man mit der Regel von de L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{\overline{g}\to 1} Z = &\lim_{\overline{g}\to 1}(2G_2 B_2 + 3G_{22} B_2^2 + 4G_{23} B_2^3) g = \lim_{\overline{g}\to 1} 2G_2 B_2 g = \\
&2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{\ln(\overline{g} + \sqrt{\overline{g}^2 - 1})}{(\overline{g}^2 - 1)^{1/2}} = 2G_2 \lim_{\overline{g}\to 1} \frac{(\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}}{\overline{g}(\overline{g}^2 - 1)^{-1/2}} = 2G_2.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (3.93) und (3.103) in die Gleichung (3.102) erhält man schließlich das folgende Ergebnis für den Anteil der Materialtangente bezüglich Schub quer zur Faserrichtung:

$$\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_{21} + \mathbb{C}_{22} + \mathbb{C}_{23} + \mathbb{C}_{24} + \mathbb{C}_{25} + \mathbb{C}_{26} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{21} = {} & 4J^{-4/3}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 4J^{-4/3}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \\ & 4J^{-2}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}\boldsymbol{I}\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \\ & \Big(\frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1} + \frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4} + \frac{8}{3}J^{-2/3}\overline{I}_5\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5} + \frac{4}{3}J^{-2/3}E_1\Big)\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}^{-1}\end{aligned} \tag{3.117a}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{22} = {} & -\frac{4}{3}J^{-2/3}\Big(\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1} + E_1\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{I} - \frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \\ & \frac{4}{3}J^{-4/3}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) + \\ & \overline{I}_1\Big(\frac{4}{9}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1} + \frac{4}{9}\overline{I}_4\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4} + \frac{8}{9}\overline{I}_5\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5} + \frac{4}{9}E_1\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - \\ & \frac{4}{3}E_1\overline{I}_1\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta\boldsymbol{C}}\end{aligned} \tag{3.117b}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{23} = {} & 4J^{-4/3}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{I} + 4J^{-4/3}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \\ & 4J^{-2}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \\ & \Big(\frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_1\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1} + \frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4} + \frac{8}{3}J^{-2/3}\overline{I}_5\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5} + \frac{4}{3}J^{-2/3}E_4\Big)(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{C}^{-1}\end{aligned} \tag{3.117c}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{24} = {} & -\frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{I} - \frac{4}{3}J^{-2/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) - \\ & \frac{4}{3}J^{-4/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C}\Big) - \\ & \frac{4}{3}J^{-2/3}E_4\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \\ & \overline{I}_4\Big(\frac{4}{9}\overline{I}_1\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1} + \frac{4}{9}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4} + \frac{8}{9}\overline{I}_5\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5} + \frac{4}{9}E_4\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - \\ & \frac{4}{3}E_4\overline{I}_4\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta\boldsymbol{C}}\end{aligned} \tag{3.117d}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{25} = {} & 4J^{-2}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)\otimes\boldsymbol{I}+\\ & 4J^{-2}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+\\ & 4J^{-8/3}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)-\\ & \Big(\frac{4}{3}J^{-4/3}\overline{I}_1\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{3}J^{-4/3}\overline{I}_4\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{3}J^{-4/3}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+\frac{8}{3}J^{-4/3}E_5\Big)\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+\\ & (\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)\otimes\boldsymbol{C}^{-1}+4J^{-4/3}E_5\Big(\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{I}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}\end{aligned} \tag{3.117e}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{26} = {} & -\frac{8}{3}J^{-2/3}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{I}-\frac{8}{3}J^{-2/3}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})-\\ & \frac{8}{3}J^{-4/3}\Big(\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+E_5\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big)+\\ & \overline{I}_5\Big(\frac{8}{9}\overline{I}_1\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}+\frac{8}{9}\overline{I}_4\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}+\frac{16}{9}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+\frac{16}{9}E_5\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1}-\\ & \frac{8}{3}E_5\overline{I}_5\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial\Delta\boldsymbol{C}}\end{aligned} \tag{3.117f}$$

Steifigkeit in Faserrichtung

Der Anteil der Materialtangente in Faserrichtung $\mathbb{C}_{\mathrm{f},i+1}$ folgt aus Gleichung (3.91) und $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f},i+1} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{f},i} + \Delta\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ durch die partielle Ableitung

$$\mathbb{C}_{\mathrm{f},i+1} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{f},i+1}(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial\Delta\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial\Delta\boldsymbol{C}} \tag{3.118}$$

Im Folgenden werden wieder die Zeitindizes $i+1$ weggelassen, und alle zeitabhängigen Größen sind am Ende des Inkrements ausgewertet. Mit den Gleichungen (3.94), (3.93e) und (3.24) erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\mathrm{f}} = 2\sigma_{\mathrm{f}}\Big(&- J^{-4/3}\overline{\lambda}^{-4}\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M} - \frac{1}{3}\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \Delta \boldsymbol{C}}\Big) + \\ &\frac{\sigma_{\max}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}\Bigg[\Big(f_{\mathrm{o}} + f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}\alpha + \overline{\lambda}f_{\mathrm{p}}^{'} + \overline{\lambda}f_{\mathrm{l}}^{'}f_{\mathrm{v}}\alpha\Big)\Big(J^{-4/3}\overline{\lambda}^{-3}\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M} - \\ &\frac{1}{3}J^{-2/3}\overline{\lambda}^{-1}(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - \frac{1}{3}J^{-2/3}\overline{\lambda}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \frac{1}{9}\overline{\lambda}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1}\Big) + \\ &\alpha f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}^{'}\Big(-\overline{\lambda}^{-2}\frac{\Delta\boldsymbol{C}}{\Delta t}\cdot\cdot\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \frac{2}{\Delta t}\Big)\Big(J^{-2/3}\overline{\lambda}^{-2}\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M} - \\ &\frac{1}{3}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\Big)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.119}$$

Dabei lauten die Ableitungen der passiven Skalierungsfunktion

$$f_{\mathrm{p}}^{'} = \begin{cases} \frac{P_1P_2}{\lambda_0}(e^{P_2(\overline{\lambda}/\lambda_0-1)} - 1) & \text{für} \quad \lambda_0 < \overline{\lambda} < \lambda^* \\ \frac{P_3}{\lambda_0} & \text{für} \quad \lambda^* \leqslant \overline{\lambda} \end{cases} \tag{3.120a}$$

und

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{p}}^{'} = &\frac{1}{\sigma_{\max}}\frac{\lambda_0}{\overline{\lambda}}\Big(k_1 + 2k_2(\overline{\lambda}-1) + 3k_3(\overline{\lambda}-1)^2\Big) - \\ &\frac{1}{\sigma_{\max}}\frac{\lambda_0}{\overline{\lambda}^2}\Big(k_1(\overline{\lambda}-1) + k_2(\overline{\lambda}-1)^2 + k_3(\overline{\lambda}-1)^3\Big) \quad \text{für} \quad \overline{\lambda} \leqslant \lambda_0, \end{aligned} \tag{3.120b}$$

der Längenfunktion

$$f_{\mathrm{l}}^{'} = \begin{cases} \frac{18}{\lambda_{\mathrm{opt}}}(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}} - 0.4) & \text{für} \quad \overline{\lambda} \leqslant 0.6\lambda_{\mathrm{opt}} \\ \frac{18}{\lambda_{\mathrm{opt}}}(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}} - 1.6) & \text{für} \quad \overline{\lambda} \geqslant 1.4\lambda_{\mathrm{opt}} \\ \frac{8}{\lambda_{\mathrm{opt}}}(1 - \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_{\mathrm{opt}}})^2 & \text{für} \quad 0.6\lambda_{\mathrm{opt}} < \overline{\lambda} < 1.4\lambda_{\mathrm{opt}} \end{cases}, \tag{3.121}$$

sowie der Geschwindigkeitsfunktion

$$f_{\mathrm{v}}^{'} = \begin{cases} \frac{-\frac{1}{v_{\min}}(1+k_{\mathrm{cc}}\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}) - \frac{k_{\mathrm{cc}}}{v_{\min}}(1-\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}})}{(1+k_{\mathrm{cc}}\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}})^2} & \text{für} \quad v_{\min} < \dot{\lambda} \leqslant 0 \\ -(d-1)\frac{\frac{1}{v_{\min}}(1-k_{\mathrm{ec}}k_{\mathrm{cc}}\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}}) + \frac{k_{\mathrm{ec}}k_{\mathrm{cc}}}{v_{\min}}(1+\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}})}{(1-k_{\mathrm{ec}}k_{\mathrm{cc}}\frac{\dot{\lambda}}{v_{\min}})^2} & \text{für} \quad 0 < \dot{\lambda} \end{cases}. \tag{3.122}$$

Volumetrische Steifigkeit

Für den volumetrischen Anteil der Materialtangente $\mathbb{C}_{\mathrm{vol},i+1}$ erhält man aus der Gleichung (3.92) und mit der Linearisierung $\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol},i+1} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{vol},i} + \Delta\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\mathrm{vol},i+1} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}_{\mathrm{vol},i+1}(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial \Delta\boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial \Delta\boldsymbol{S}_{\mathrm{vol}}(\Delta\boldsymbol{C})}{\partial \Delta\boldsymbol{C}} = \\ 2K\ln(J_{i+1})\frac{\partial \boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}}{\partial \Delta\boldsymbol{C}} + K\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}_{i+1}^{-1}.\end{aligned} \tag{3.123}$$

3.3.3 Materialtangente bezüglich der Momentankonfiguration

In diesem Abschnitt ist die Transformation der Materialtangente von der Referenz- in die Momentankonfiguration dargestellt. Die durch die Gleichungen (3.99), (3.117), (3.119) und (3.123) beschriebenen Anteile der Materialtangente werden entsprechend der Beziehung (3.74) transformiert. Die Zeitindizes werden in diesem Abschnitt wegen der Länge der Gleichungen weggelassen.

Schubsteifigkeit längs der Faserrichtung

Mit den im Anhang angegeben Transformationsbeziehungen für die in $\mathbb{C}$ auftretenden Tensoren 4. Stufe (A.10) bis (A.21) erhält man aus der Gleichung (3.99) für den Schubanteil der Materialtangente längs der Faserrichtung bezüglich der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_1 = \frac{1}{J}\mathbb{F}\mathbb{C}_1\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = 4J^{-1}\frac{\partial A_4}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + \\ 4J^{-1}\frac{\partial A_4}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) + \\ 4J^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + \\ 4J^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) + \\ 4A_5J^{-1}\overline{\lambda}^2\Big(\overline{\boldsymbol{B}}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\overline{\boldsymbol{B}}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}.\end{aligned} \tag{3.124}$$

Schubsteifigkeit quer zur Faserrichtung

Analog dazu erhält man nach einiger Rechnung aus der Gleichung (3.117) für den Schubanteil der Materialtangente quer zur Faserrichtung bezüglich der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_2 = \frac{1}{J}\mathbb{F}\Big[\mathbb{C}_{21}+\mathbb{C}_{22}+\mathbb{C}_{23}+\mathbb{C}_{24}+\mathbb{C}_{25}+\mathbb{C}_{26}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \\ \mathbb{c}_{21}+\mathbb{c}_{22}+\mathbb{c}_{23}+\mathbb{c}_{24}+\mathbb{c}_{25}+\mathbb{c}_{26}.\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_{21} = 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^2\overline{\boldsymbol{B}}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+ \\ 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^2\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)- \\ \Big(\frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_4\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{3}J^{-1}\overline{I}_5\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}+\frac{4}{3}J^{-1}E_1\Big)\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{3.126a}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_{22} = -\frac{4}{3}J^{-1}\Big(\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}+E_1\Big)\boldsymbol{I}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^2\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})- \\ \frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^2\boldsymbol{I}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)+ \\ \overline{I}_1\Big(\frac{4}{9}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{9}J^{-1}\overline{I}_4\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{9}J^{-1}\overline{I}_5\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}+\frac{4}{9}J^{-1}E_1\Big)\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}+ \\ \frac{4}{3}J^{-1}E_1\overline{I}_1\mathbb{I}\end{aligned} \tag{3.126b}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_{23} = 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}\overline{\lambda}^2(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+ \\ 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)- \\ \Big(\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_1\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_5\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}+\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2E_4\Big)(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{3.126c}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{c}_{24} = -\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}\boldsymbol{I}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})- \\ \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}\boldsymbol{I}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)- \\ \frac{4}{3}J^{-1}E_4\overline{\lambda}^2\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+ \\ \overline{\lambda}^2\Big(\frac{4}{9}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{9}J^{-1}\overline{I}_4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{9}J^{-1}\overline{I}_5\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}+\frac{4}{9}J^{-1}E_4\Big)\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}+ \\ \frac{4}{3}E_4\overline{\lambda}^2\mathbb{I}\end{aligned} \tag{3.126d}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{c}_{25} = {} & 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\overline{\lambda}^2\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\overline{\boldsymbol{B}}+\\
& 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+\\
& 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)-\\
& \Big(\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_1\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}+\frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_4\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}+\frac{8}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+\frac{8}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2E_5\Big)\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+\\
& (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\boldsymbol{I}+4J^{-1}E_5\overline{\lambda}^2\Big(\overline{\boldsymbol{B}}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\overline{\boldsymbol{B}}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}
\end{aligned}
\tag{3.126e}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{c}_{26} = {} & -\frac{8}{3}J^{-1}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\boldsymbol{I}\otimes\overline{\boldsymbol{B}}-\frac{8}{3}J^{-1}\overline{I}_5\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})-\\
& \frac{8}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\Big(\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+E_5\overline{\lambda}^2\Big)\boldsymbol{I}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)+\\
& \overline{I}_5\overline{\lambda}^2\Big(\frac{8}{9}J^{-1}\overline{I}_1\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}+\frac{8}{9}J^{-1}\overline{I}_4\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}+\frac{16}{9}J^{-1}\overline{I}_5\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}+\frac{16}{9}J^{-1}E_5\Big)\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}+\\
& \frac{8}{3}J^{-1}E_5\overline{I}_5\mathbb{I}
\end{aligned}
\tag{3.126f}
$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{I}=[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})]$ den symmetrischen Einheitstensor 4. Stufe.

Steifigkeit in Faserrichtung

Für den Anteil der Materialtangente in Faserrichtung bezüglich der Momentankonfiguration erhält man aus der Gleichung (3.119)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{c}_{\mathrm{f}} = {} & \frac{1}{J}\mathbb{F}\mathbb{C}_{\mathrm{f}}\mathbb{F}^{\mathrm{T}}=\\
& 2\sigma_{\mathrm{f}}\Big(-J^{-1}\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\frac{1}{3}\mathbb{I}\Big)+\\
& \frac{\sigma_{\max}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}\Bigg[\Big(f_{\mathrm{p}}+f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}\alpha+\overline{\lambda}f_{\mathrm{p}}^{'}+\overline{\lambda}f_{\mathrm{l}}^{'}f_{\mathrm{v}}\alpha\Big)\Big(J^{-1}\overline{\lambda}\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}-\\
& \frac{1}{3}J^{-1}\overline{\lambda}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}J^{-1}\overline{\lambda}\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+\frac{1}{9}J^{-1}\overline{\lambda}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\Big)+\\
& \alpha f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}^{'}\Big(-\overline{\lambda}^{-2}\frac{\Delta\boldsymbol{C}}{\Delta t}\cdot\cdot\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})+\frac{2}{\Delta t}\Big)\Big(J^{-1/3}\overline{\lambda}^2\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}-\\
& \frac{1}{3}J^{-1/3}\overline{\lambda}^2\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\Big)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

Volumetrische Steifigkeit

Aus der Gleichung (3.123) ergibt sich für den volumetrische Anteil der Materialtangente bezüglich der Momentankonfiguration

$$\mathbb{c}_{\mathrm{vol}} = \frac{1}{J}\mathbb{F}\mathbb{C}_{\mathrm{vol}}\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = KJ^{-1}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} - 2KJ^{-1}\ln(J)\mathbb{I}. \tag{3.128}$$

Gesamte Steifigkeit

Die algorithmisch konsistente Materialtangente $\mathring{\mathbb{c}}$ bezüglich der Jaumann-Rate lautet mit Gleichung (3.80) und nach Zusammenfassen der durch (3.124), (3.126), (3.127) und (3.128) gegebenen einzelnen Anteile

$$\mathring{\mathbb{c}}_{i+1} = \mathbb{c}_{i+1} + \mathbb{H}_{i+1} + \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\otimes\boldsymbol{I} \tag{3.129}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{c}_{i+1} = {} & a_1\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + a_2\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + a_3\mathbb{I} + \\
& a_4\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{I} + a_5\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + a_6\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) + \\
& a_7\boldsymbol{I}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) + \\
& a_8\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + a_9\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + a_{10}\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + \\
& a_{11}\Big(\overline{\boldsymbol{B}}\otimes(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\otimes\overline{\boldsymbol{B}}\Big)^{\mathrm{T}_{23}} + a_{12}\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + \\
& a_{13}\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big) + a_{14}\overline{\boldsymbol{B}}\otimes\boldsymbol{I} + a_{15}\boldsymbol{I}\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + \\
& a_{16}\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\overline{\boldsymbol{B}} + a_{17}\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\boldsymbol{I} + \\
& a_{18}\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)\otimes\Big(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}}\Big)
\end{aligned} \tag{3.130}$$

und den Abkürzungen

$$h_1 = \frac{\sigma_{\max}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}\Big(f_{\mathrm{p}} + f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}\alpha + \overline{\lambda}f_{\mathrm{p}}' + \overline{\lambda}f_{\mathrm{l}}'f_{\mathrm{v}}\alpha\Big) \tag{3.131a}$$

$$h_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\lambda_{\mathrm{opt}}}\alpha f_{\mathrm{l}}f_{\mathrm{v}}'\Big(-\overline{\lambda}^{-2}\frac{\Delta\boldsymbol{C}}{\Delta t}\cdot\cdot\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \frac{2}{\Delta t}\Big) \tag{3.131b}$$

$$h_{\mathrm{E}i} = \overline{I}_1\frac{\partial E_i}{\partial\overline{I}_1} + \overline{I}_4\frac{\partial E_i}{\partial\overline{I}_4} + 2\overline{I}_5\frac{\partial E_i}{\partial\overline{I}_5} \quad \text{für} \quad i = 1,4,5 \tag{3.131c}$$

sowie den Termen

$$a_1 = KJ^{-1} + \frac{1}{9}J^{-1}\overline{\lambda}h_1 + \frac{4}{9}J^{-1}\overline{I}_1(h_{\mathrm{E}1} + E_1) + \frac{4}{9}J^{-1}\overline{\lambda}^2(h_{\mathrm{E}4} + E_4) + \frac{8}{9}J^{-1}\overline{I}_5(h_{\mathrm{E}5} + 2E_5)$$

$$a_2 = -2J^{-1}\sigma_{\mathrm{f}} + J^{-1}\overline{\lambda}h_1 + J^{-1/3}\overline{\lambda}^2 h_2 + 4J^{-1}\frac{\partial A_4}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4 + 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4$$

$$a_3 = -2KJ^{-1}\ln(J) + \frac{1}{3}J^{-1}\sigma_{\mathrm{f}} + \frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1 E_1 + \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2 E_4 + \frac{8}{3}J^{-1}\overline{I}_5 E_5$$

$$a_4 = -\frac{1}{3}J^{-1}\overline{\lambda}h_1 - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2(h_{\mathrm{E}4} + E_4)$$

$$a_5 = -\frac{1}{3}J^{-1}\overline{\lambda}h_1 - \frac{1}{3}J^{-1/3}\overline{\lambda}^2 h_2 - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4} - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\Big(\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^2 + E_4\Big) - \frac{8}{3}J^{-1}\overline{I}_5\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}$$

$$a_6 = 4J^{-1}\frac{\partial A_4}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4 + 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4$$

$$a_7 = -\frac{4}{3}J^{-1}\overline{I}_1\overline{\lambda}^2\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5} - \frac{4}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^4\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_5} - \frac{8}{3}J^{-1}\overline{\lambda}^2\Big(\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}\overline{I}_5 + E_5\Big)$$

$$a_8 = 4J^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4 + \quad 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^4 \quad a_9 = 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_4}\overline{\lambda}^2 \quad a_{10} = 4J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}\overline{\lambda}^2$$

$$a_{11} = 4A_5 J^{-1}\overline{\lambda}^2 \quad a_{12} = 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1} \quad a_{13} = 4J^{-1}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^2 \quad a_{14} = -\frac{4}{3}J^{-1}(h_{\mathrm{E}1} + E_1)$$

$$a_{15} = -\frac{4}{3}J^{-1}\Big(\frac{\partial E_1}{\partial \overline{I}_1}\overline{I}_1 + E_1\Big) - \frac{4}{3}J^{-1}\frac{\partial E_4}{\partial \overline{I}_1}\overline{\lambda}^2 - \frac{8}{3}J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\overline{I}_5$$

$$a_{16} = 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_1}\overline{\lambda}^2 \quad a_{17} = -\frac{4}{3}J^{-1}(h_{\mathrm{E}5} + 2E_5)\overline{\lambda}^2 \quad a_{18} = 4J^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4 + 4J^{-1}\frac{\partial E_5}{\partial \overline{I}_5}\overline{\lambda}^4 \,. \tag{3.132}$$

Durch die Gleichungen (3.129) bis (3.132) ist die algorithmisch konsistente Materialtangente als Tensor 4. Stufe gegeben. Die Elemente des Tensors werden für die Implementierung als UMAT-Subroutine, wie im Anhang beschrieben, entsprechend der in ABAQUS verwendeten Konventionen in einer Matrix angeordnet.

4 Implementierung in ABAQUS

Die Implementierung des in Kapitel 3.2 beschriebenen und durch die Gleichung (3.57) gegebenen Materialgesetzes in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS erfolgte durch eine UMAT-Subroutine. Diese ist eine Schnittstelle mit ABAQUS und ermöglicht es ein beliebiges Materialverhalten in Form einer Fortran-Funktion zu definieren. Die UMAT (siehe Anhang C) beginnt mit der Deklaration der von ABAQUS übergebenen Variablen. Da für das hier verwendete Materialgesetz nicht alle dieser Variablen benötigt werden, sind im Folgenden nur die Wichtigsten angegeben. Im eindimensionalen Array `STRESS` mit der Dimension `NTENS` wird der Spannungszustand im Integrationspunkt `KSPT` am Anfang des Inkrements `KINC` übergeben. Mit `NDI` und `NSHR` ist die Anzahl der Spannungskomponenten für Normal- und Schubbelastung bezeichnet. Der Deformationszustand des jeweiligen Integrationspunktes wird durch die eindimensionalen Arrays `STRAN` und `DSTRAN` mit der Dimension `NTENS` als Verzerrung am Anfang des Inkrements, Verzerrungsinkrement, sowie in Form der Deformationsgradienten `DFGRD0` und `DFGRD1` zu Beginn und am Ende des Inkrements übergeben. Die Variablen `TIME` und `DTIME` enthalten die totale Zeit zu Beginn des Schrittes `KSTEP`, die Zeitspanne vom Anfang des aktuellen Schrittes bis zum aktuellen Inkrement, sowie die Dauer des Inkrements. Zur schrittweisen Steigerung der Aktivierung des Muskels kann z.B. `DTIME` integriert werden um α als Funktion der Zeit in jedem Inkrement langsam zu erhöhen. Die Materialparameter `PROPS` und deren Anzahl `NPROPS` werden in der Eingabedatei durch die folgende Materialdefinition festgelegt:

```
*SOLID SECTION, MATERIAL=<MATERIAL>, ELSET=<NAME>
*MATERIAL, NAME=<MATERIAL>
*USER MATERIAL, CONSTANTS=<NPROPS>, UNSYMM
    <PROPS(1)>, <PROPS(2)>, <PROPS(3)> ...
```

Die Option `UNSYMM` wird verwendet, da `DDSDDE` im Allgemeinen nicht symmetrisch ist. Der Deklaration der Variablen folgt das Inkludieren der Informationen über das System, auf dem ABAQUS ausgeführt wird, durch die Anweisung

```
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
```

und die Definition der Dimensionen der übergebenen und intern verwendeten Arrays. Dies ist in FORTRAN erforderlich um den Speicherplatz für die Array-Elemente zu reservieren.

Die UMAT-Subroutine übergibt an ABAQUS die algorithmisch konsistente Materialtangente bezüglich der Jaumann-Spannungsrate `DDSDDE` entsprechend der Gleichung (3.129) als zweidimensionales Array mit der Dimension `NTENS` und den aktualisierten Spannungszustand `STRESS` am Ende des Inkrements. Die Transformation der Materialtangente von einem Tensor 4. Stufe in eine Matrix, sowie der Spannungs- und Verzerrungstensoren in Vektoren ist im Anhang B angegeben. Die spezifische Verzerrungsenergie `SSE` am Beginn des Inkrements wird an die UMAT übergeben und der Wert am Ende des Inkrements berechnet.

Der Ablauf des Newton-Raphson-Verfahrens ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt und innerhalb des durch die gestrichelten Linien angedeuteten Bereiches sind die Berechnungen der UMAT angegeben. Zum Zeitpunkt t_i sind die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_i$ und der Deformationszustand in Form von $\boldsymbol{F}_i$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ als Ergebnisse des vorherigen Inkrements durch die entsprechenden Variablen `STRESS`, `DFGRD0` und `STRAN` gegeben. Das Zeitinkrement Δt und das Inkrement der Knotenlasten $\Delta \boldsymbol{f}$ werden in ABAQUS durch eine automatische Inkrementierung vorgegeben und je nach den Konvergenzeigenschaften der Gleichgewichtsiteration vergrößert oder verkleinert. Das Residuum $\boldsymbol{R}_{i+1}$ (siehe Gleichung (4.5)) und die Knotenlasten $\boldsymbol{f}_{i+1}$ sind zu Beginn des Inkrements durch

$$\boldsymbol{R}_{i+1} = \boldsymbol{R}_i - \Delta \boldsymbol{f} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{f}_{i+1} = \boldsymbol{f}_i + \Delta \boldsymbol{f} \tag{4.1}$$

gegeben. In jedem Schritt m der Gleichgewichtsiterationen zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_i + \Delta \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

für die inkrementellen Verschiebungen $\Delta \boldsymbol{u}$ der Knotenpunkte müssen die linearisierten Gleichungen

$$\boldsymbol{K}_{i+1}^{(m)} d\Delta \boldsymbol{u}^{(m)} = -\boldsymbol{R}_{i+1}^{(m)} \tag{4.3}$$

für die Änderung des Verschiebungsinkrements $d\Delta \boldsymbol{u}^m$ gelöst werden. Dabei bezeichnen $\boldsymbol{K}_{i+1}^{(m)}$ die globale Steifigkeitsmatrix und $\boldsymbol{R}_{i+1}^{(m)}$ das Residuum der Iteration m. Die globale Steifigkeitsmatrix wird mit der Materialtangente `DDSDDE` aus der UMAT-Subroutine berechnet. Die inkrementellen Verschiebungen werden mit $d\Delta \boldsymbol{u}^{(m)}$ gemäß

$$\Delta \boldsymbol{u}_{i+1}^{(m)} = \Delta \boldsymbol{u}_{i+1}^{(m-1)} + d\Delta \boldsymbol{u}^{(m)} \tag{4.4}$$

aktualisiert. Damit werden der Deformationsgradient $\boldsymbol{F}_{i+1}$ und das Verzerrungsinkrement $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}$ berechnet. Mit den entsprechenden Variablen `DFGRD1` und `DSTRAN` wird der

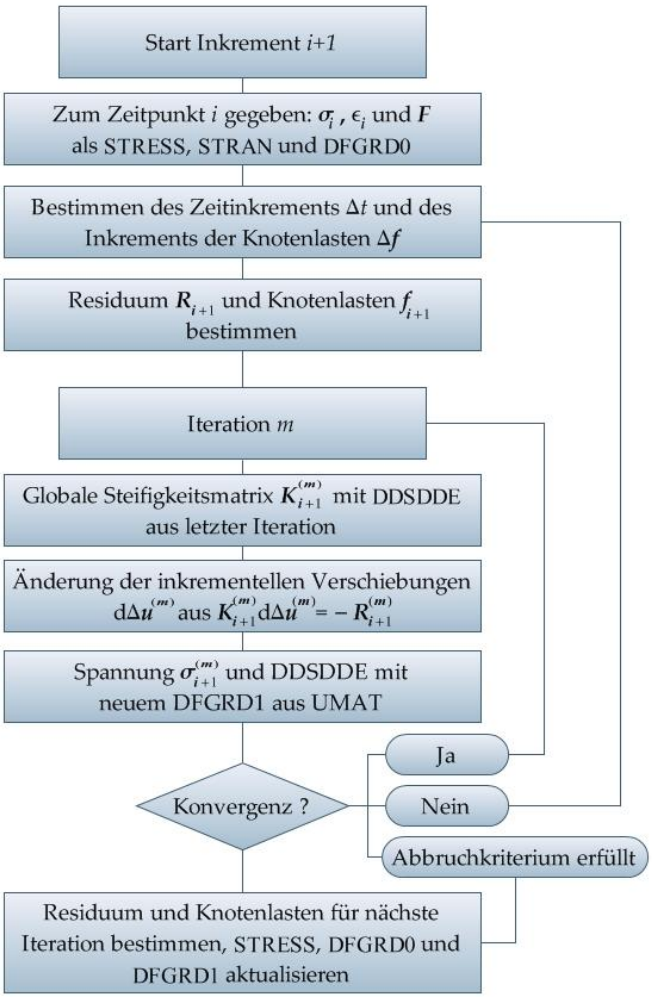

Abbildung 4.1: Schematischer Ablauf des Newton-Raphson-Verfahrens

aktuelle Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(m)}$ und die Materialtangente mit der UMAT-Subroutine bestimmt und damit die internen, konsistenten Knotenlasten $\boldsymbol{T}_{i+1}^{(m)}$ berechnet. Das Residuum für den nächsten Schritt der Gleichgewichtsiteration lautet

$$\boldsymbol{R}_{i+1}^{(m+1)} = \boldsymbol{T}_{i+1}^{(m)} - \boldsymbol{f}_{i+1}. \tag{4.5}$$

Die Gleichgewichtsiterationen werden beendet, wenn ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Dies wäre im Fall der Konvergenz des Verfahrens z.B. wenn der Betrag des Residuums kleiner als eine vorgegebene Toleranz ist. Divergiert die Lösung wird in ABAQUS das Inkrement verkleinert und ein erneuter Versuch zur Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen (4.2) gestartet.

5 Validierung

In diesem Kapitel ist die Identifikation der Materialparameter für das passive Muskelverhalten aus Druckversuchen [31] und die anschließende Validierung des Materialmodells durch Vergleich mit diesen Experimenten dargestellt. Die Implementierung in ABAQUS wird durch Vergleiche von FE-Ergebnissen mit analytischen Lösungen anhand einfacher Problemstellungen überprüft.

5.1 Vergleich mit analytischen Lösungen

Der Vergleich mit analytischen Lösungen für einachsige Belastungen längs und quer zur Faserrichtung erfolgte anhand des in Abbildung 5.1 dargestellten, würfelförmigen Modells einer fiktiven Muskelprobe. Die Randbedingungen wurden so gewählt, dass die Querdehnung unbehindert ist. Auf der gegenüber liegenden Seite des Würfels wurde die Gesamtkraft im Sinne einer homogenen Zugspannung in Form von konsistenten Knotenlasten aufgebracht. Das Modell besteht aus 8 Elementen des Typs C3D8 und 27 Knoten. Die verwendeten Materialparameter für das passive Muskelverhalten sind in Tabelle 5.1 angegeben und wurden, wie im folgenden Abschnitt beschrieben, aus experimentellen Daten identifiziert. Die Materialparameter für die Längenfunktion $f_{\mathrm{l}}(\overline{\lambda})$ wurden aus [8] übernommen und $\lambda_{\mathrm{opt}} = 1{,}4$ gewählt.

Die Implementierung des Materialgesetzes und das Konvergenzverhalten, welches von der algorithmisch konsistenten Materialtangente $\mathring{\mathbb{c}}$ abhängig ist, wurden anhand von Zug- und Druckbelastungen längs der Faserrichtung für den passiven und aktiven Muskel mit $\alpha = 1{,}0$, sowie quer zur Faserrichtung im passiven Zustand untersucht. Die Aktivierung α wurde zu Beginn des ersten Lastschrittes vollständig aufgebracht. Das Newton-Raphson-Verfahren in ABAQUS konvergiert für diesen Schritt in 6 Inkrementen bei einer logarithmischen Dehnung $\varepsilon_{\mathrm{x}} = -0{,}37$ in Faserrichtung. Die analytische Lösung und die Ergebnisse der FE-Berechnung sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Es zeigt sich eine sehr genaue Übereinstimmung der FE-Ergebnisse und der analytischen Lösung für die Cauchy'sche Spannung über der logarithmischen Dehnung, sowie für die gesamte Last F über der Verschiebung u der belasteten Seite des Würfels.

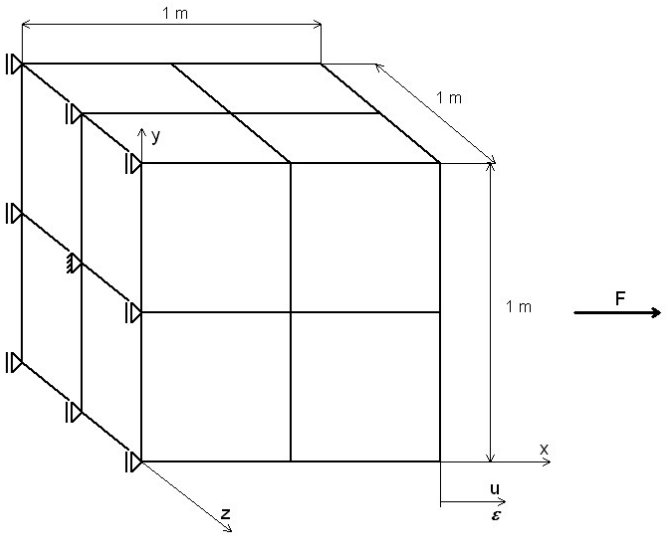

Abbildung 5.1: Schematisches FE-Modell der Muskelprobe

5.2 Vergleich mit experimentellen Daten

Die Validierung des Materialmodells für Druckbelastungen unter verschiedenen Winkeln erfolgte anhand von experimentellen Daten aus [31]. Van Loocke et al. führten Druckversuche an würfelförmigen Muskelproben mit unterschiedlichen Faserrichtungen durch. Die Muskelproben wurden zwischen zwei mit PTFE beschichteten Platten komprimiert um die Reibung an den Druckflächen und damit die Behinderung der Querdehnung sowie der Schubdeformation senkrecht zur Kompressionsrichtung zu minimieren. Die Kompression erfolgte quasistatisch und die Faserrichtung der Muskelproben wurde so gewählt, dass für die verschiedenen Experimente der Winkel zur Kompressionsrichtung 0°, 30°, 45°, 60° und 90° betrug. Die für die unterschiedlichen Faserorientierungen gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven (Cauchy'sche Spannung über logarithmischer Dehnung) zeigen, dass die Steifigkeit bei Kompression quer zur Faserrichtung größer ist als in Richtung der Faser.

Die Materialparameter für die Validierung wurden aus den in [31] angegebenen Ergebnissen wie folgt identifiziert. Das Materialgesetz nach Gleichung (3.57) wurde in Matlab als Funktion $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ des logarithmischen Verzerrungsmaßes programmiert. Aus dieser Funktion wird für einen gegebenen Spannungszustand das Argument $\boldsymbol{\varepsilon}$ numerisch berechnet. Man erhält also die Beziehung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{f}(\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}) \tag{5.1}$$

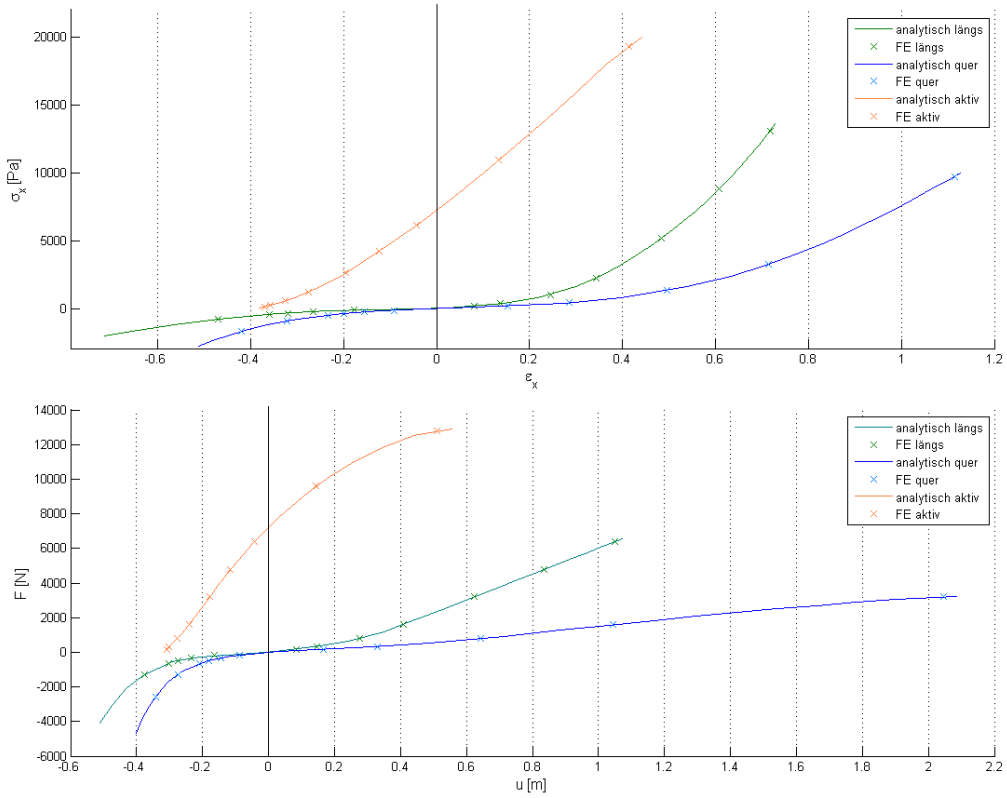

Abbildung 5.2: Analytische Lösung und FE-Ergebnisse für den einachsigen Zugversuch.

mit der vorgegebenen Spannung σ_x in Kompressionsrichtung. Diese ist durch die experimentellen Spannungs-Dehnungs-Kurven gegeben. Die geringe Reibung zwischen Muskelprobe und PTFE-Auflage wird, wie auch bei der FE-Berechnung (siehe später), bei der nur die Verschiebung der Auflagefläche in Kompressionsrichtung vorgegeben wird, vernachlässigt und somit die Randbedingungen quer zur Kompressionsrichtung als frei angenommen. Gleichung (5.1) enthält die Annahme, dass die Spannungen und Dehnungen räumlich konstant sind. Die FE-Berechnung zeigt, dass durch die Schubdeformation quer zur Kompressionsrichtung und die Reaktionskräfte in den Auflageflächen ein Moment entsteht. Dieses kann für die Identifikation der Materialparameter, wie die Ergebnisse der FE-Berechnungen zeigen, vernachlässigt werden.

Die oben beschriebene Beziehung (5.1) stellt eine Schätzung $\hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}}(i) = \hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \sigma_{\mathrm{x}}(i))$ für die logarithmische Verzerrung in Kompressionsrichtung für das Levenberg-Marquardt-Verfahren dar. Die Argumente $\sigma_{\mathrm{x}}(i)$ und

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{13} & \hat{G}_{14} & \hat{G}_{21} & \hat{G}_{23} & \hat{G}_{24} & \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \hat{k}_3 & \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \end{bmatrix}' \tag{5.2}$$

bezeichnen die gemessene Cauchy'sche Spannung bei einer Dehnung $\varepsilon_{\mathrm{x}}(i)$ und den Vektor der geschätzten Parameter. Der Datensatz $\boldsymbol{Z}_N$ für die Identifikation enthält die N Messpunkte der Experimente mit den Winkeln 0°, 30°, 45° und 90° zur Kompressionsrichtung:

$$\boldsymbol{Z}_N(i) = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{x}}(i) \\ \varepsilon_{\mathrm{x}}(i) \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, ..., N \tag{5.3}$$

Diese vier Experimente genügen um die 11 Parameter für Schub längs und quer zur Faserrichtung, sowie für Zug- und Druckverhalten in Faserrichtung zu identifizieren. Die Ergebnisse des Experiments mit 60° Winkel zur Kompressionsrichtung werden verwendet um die Prädiktionseigenschaften des Materialmodells zu untersuchen. Die Materialparameter für die aktive Spannungskomponente in Faserrichtung σ_{a} werden nicht benötigt. Für die maximale, isometrische Muskelspannung $\sigma_{\max}$ musste eine Annahme getroffen werden, da sonst redundante Parameter in $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ vorhanden wären, wodurch die Hesse-Matrix singulär wird. Für die Ruhestreckung wurde $\lambda_0 = 1{,}0$ angenommen. Der Parameter λ^* wurde so gewählt, dass die passive Skalierungsfunktion f_{p} für die auftretenden Faserstreckungen exponentiell ist.

Das Levenberg-Marquardt-Verfahren minimiert das quadratische Gütekriterium

$$V_{\mathrm{N}}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \boldsymbol{Z}_N) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \Big(\varepsilon_{\mathrm{x}}(i) - \hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}}(i) \Big)^2 \tag{5.4}$$

über dem Vektor der geschätzten Parameter durch Iteration der Vorschrift

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(j+1)} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(j)} + \Big(\boldsymbol{H}^{(j)} + \mu \boldsymbol{I} \Big)^{-1} \boldsymbol{g}^{(j)} \tag{5.5}$$

mit

$$\boldsymbol{\psi}(i) = \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}}(i)}{\partial \hat{\boldsymbol{\Theta}}} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(j)}}, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{g}^{(j)} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi}(i) \hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}}(i) \tag{5.7}$$

und der approximierten Hesse-Matrix

$$\boldsymbol{H}^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi}(i) \boldsymbol{\psi}(i)^{\mathrm{T}} \tag{5.8}$$

Mit einem Datensatz von $N = 362$ Messpunkten erhält man nach 1000 Iterationen die in Tabelle 5.1 angegeben Materialparameter. Die Messpunkte wurden aus den Abbildungen in [31] entnommen.

G_1 $[Pa]$	G_{13} $[Pa]$	G_{14} $[Pa]$	G_2 $[Pa]$	G_{23} $[Pa]$	G_{24} $[Pa]$
59,5	32,6	275,5	236,3	259,4	419,7
$\sigma_{\max}$ $[Pa]$	k_1 $[kPa]$	k_2 $[kPa]$	k_3 $[kPa]$	P_1 $[-]$	P_2 $[-]$
15000	1,495	6,773	28,60	0,039	3,84

λ_0 $[-]$	λ^* $[-]$	K $[Pa]$
1,0	1,4	10^7

Tabelle 5.1: Identifizierte Materialparameter

Das Finite-Elemente-Modell der würfelförmigen Muskelprobe mit 10mm Seitenlänge besteht aus 1331 Knoten und 100 Elementen des Typs C3D8. Die Reibung zwischen den beiden mit PTFE beschichteten Druckplatten wurde vernachlässigt. Die Freiheitsgrade der Knoten der unteren Auflagefläche bei $x = 0$ wurden in Kompressionsrichtung (x-Richtung) gesperrt und für die Knoten der gegenüber liegenden Fläche die Verschiebung in x-Richtung vorgegeben.

In Abbildung 5.3 ist die Cauchy'sche Spannung über der logarithmischen Dehnung in Kompressionsrichtung der Finite-Elemente-Berechnung und der zugehörigen Messergebnisse für die verschiedenen Faserrichtungen dargestellt. Da durch die Schubdeformation ein Moment entsteht, wurde die Spannung in der Mitte der Auflagefläche gemessen. Es zeigt sich für die Versuche mit den Winkeln 0°, 30°, 45° und 90° zwischen Faserrichtungen und Kompressionsrichtung eine sehr genaue Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Bei einer logarithmischen Verzerrung von -0.3 beträgt der relative Fehler zwischen Simulation und Messung in diesen Fällen 2,0% bis 3,2%. Die Prädiktion der Messung mit einem Winkel von 60° zwischen Faserrichtungen und Kompressionsrichtung weist einen relativen Fehler von 15,0% auf.

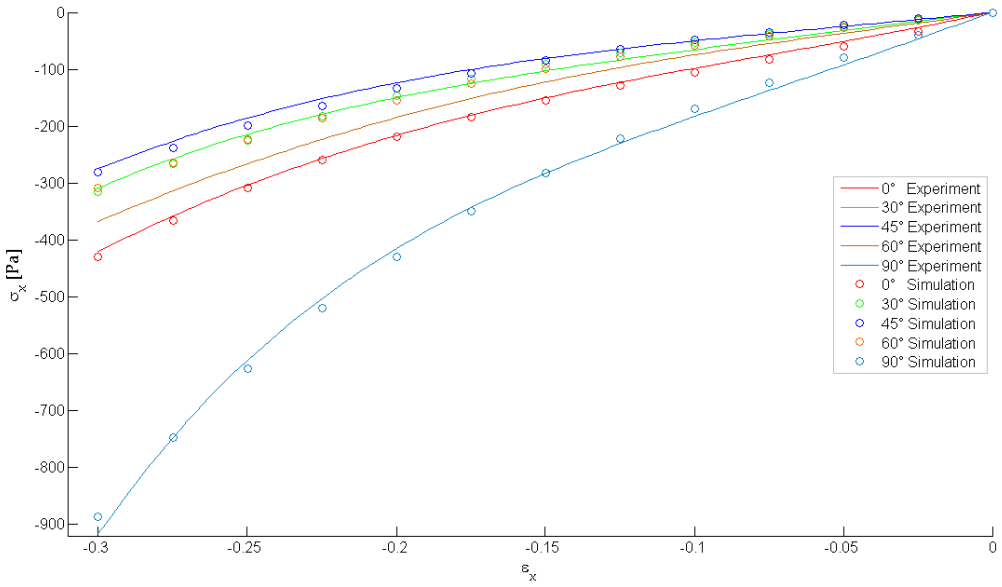

Abbildung 5.3: Vergleich der FE-Simulation mit Messergebnissen

5.3 Kontakt zwischen Muskeln

Bei jeder Bewegung interagiert der Muskel mit den ihn umgebenden Muskeln, Knochen und verschiedenen Arten von Bindegewebe. Dieser Kontakt zwischen dem Muskel und dem umliegenden Gewebe erfolgt über die Faszien, welche die Reibung zwischen den anatomischen Komponenten reduzieren und so ein Gleiten relativ zueinander erleichtern. Für die Simulation einzelner Muskelgruppen oder Gelenksysteme ist diese Interaktion von großer Bedeutung. Daher wurde anhand des folgenden geometrisch einfachen Beispiels überprüft, ob mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Materialmodell eine Simulation des Kontakts zwischen zwei Muskeln numerisch möglich ist und wie die beiden in Kontakt stehenden Muskeln interagieren.

Die beiden stilisierten Muskeln haben die Form von Kreisringsegmenten mit rechteckigem Querschnitt. Die Unterseite des unten liegenden Muskels und die linke Querschnittsfläche beider Muskeln sind eingespannt. Alle Abmessungen und Randbedingungen sind in Abbildung 5.4 angegeben. Auf den rechten Querschnitt des oben liegenden Muskels wurden konsistenten Knotenlasten in x-Richtung aufgebracht. Beide Muskeln sind im passiven Zustand und die in Tabelle 5.1 angegebenen Materialparameter wurden verwendet. Die Faserorientierung in der Ausgangskonfiguration $\boldsymbol{M}$ ist für jeden Punkt des Muskelvolumens die Tangente an den konzentrischen Kreis durch diesen Punkt.

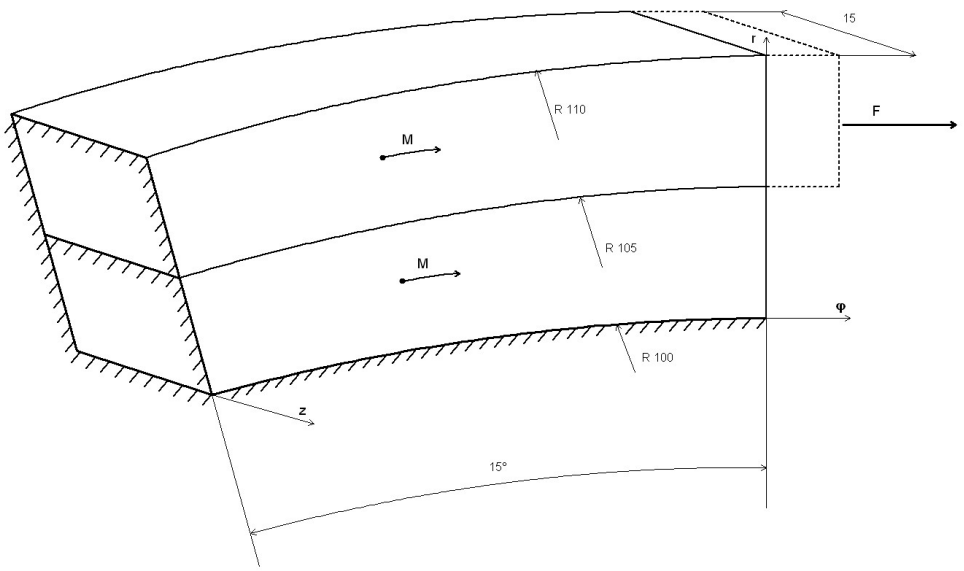

Abbildung 5.4: Geometrie des Kontaktproblems

Die Geometrie wurde mit 432 linearen Hexaeder-Elementen vernetzt. Aufgrund der oben beschriebenen Faserorientierung wird für jedes Element ein lokales, mit der Starrkörperrotation des Materialpunktes rotierendes Koordinatensystem für die Berechnung des Materialgesetzes durch die Option `*ORIENTATION` in der ABAQUS-Eingabedatei definiert. Der Ursprung dieser lokalen Koordinatensysteme fällt mit dem Mittelpunkt der Kreisringsegmente zusammen. Der UMAT-Subroutine wird $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ als Materialparameter übergeben, sodass die Faserorientierung der Ausgangskonfiguration in Richtung der Umfangskoordinate des lokalen Koordinatensystems des jeweiligen Materialpunktes zeigt. Die Faserorientierung in der Momentankonfiguration $\boldsymbol{m}$ setzt sich aus der Starrkörperrotation des lokalen Koordinatensystems und der Richtungsänderung zufolge der Schubdeformationen nach Gleichung (3.47) zusammen. Der zweite Anteil wird in der UMAT-Subroutine mit dem Deformationsgradienten am Ende des Inkrements `DFGRD1` berechnet, welcher im lokalen Koordinatensystem dargestellt übergeben wird.

Die interagierenden Flächen der beiden stilisierten Muskeln wurden jeweils als Elementbasierende Kontaktflächen definiert. Als Kontaktformulierung wurde das *Augmented-Lagrange*-Verfahren mit den in ABAQUS vorgegeben Standardparametern verwendet. Die Reibung zwischen den beiden Muskeln wurde vernachlässigt.

Die Verteilung der logarithmischen Dehnung und der Spannung in x-Richtung sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 dargestellt. Der Kontaktdruck und die Krümmung der interagierenden Flächen bewirken eine Rotation des belasteten Querschnitts um die z-Achse. In diesem Querschnitt tritt auch die maximale Spannung in x-Richtung auf. Aufgrund des durch den Kontaktdruck entstehend Widerstandes gegen die Verschiebung in x-Richtung der Unterseite des oben liegenden Muskels, ist die x-Komponente der Spannung im Bereich der Einspannung am geringsten und nimmt in Richtung des belasteten Querschnitts zu.

Aufgrund der Einspannung am linken Rand entsteht eine Einschnürung des oberen Muskels in diesem Bereich und die Kontaktflächen werden getrennt. Die Verteilung des Kontaktdruckes ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Der maximale Kontaktdruck tritt im rechten Drittel der Kontaktfläche auf. Der Kontaktdruck bewirkt eine relativ gleichmäßige Verteilung der Spannung in radialer Richtung (siehe Abbildung 5.7) im Kontaktbereich. Aufgrund der Randbedingungen ist die Spannung in radialer Richtung im Bereich der Einspannung maximal.

Bei einer maximalen logarithmischen Dehnungen in x-Richtung im Bereich von etwa 0.25 bis 0.35 nimmt die Inkrementgröße ab. Eine mögliche Ursache dessen ist, dass die Kontaktbedingung am rechten Rand der Kontaktfläche ab einer maximalen logarithmischen Verzerrung in x-Richtung von etwa 0.25 nicht mehr exakt erfüllt werden kann.

Die Implementierung des Materialmodells liefert physikalisch sinnvolle Ergebnisse und ist bei großen Deformationen sowie für Kontaktprobleme zwischen zwei Muskeln bezüglich des Konvergenzverhaltens robust.

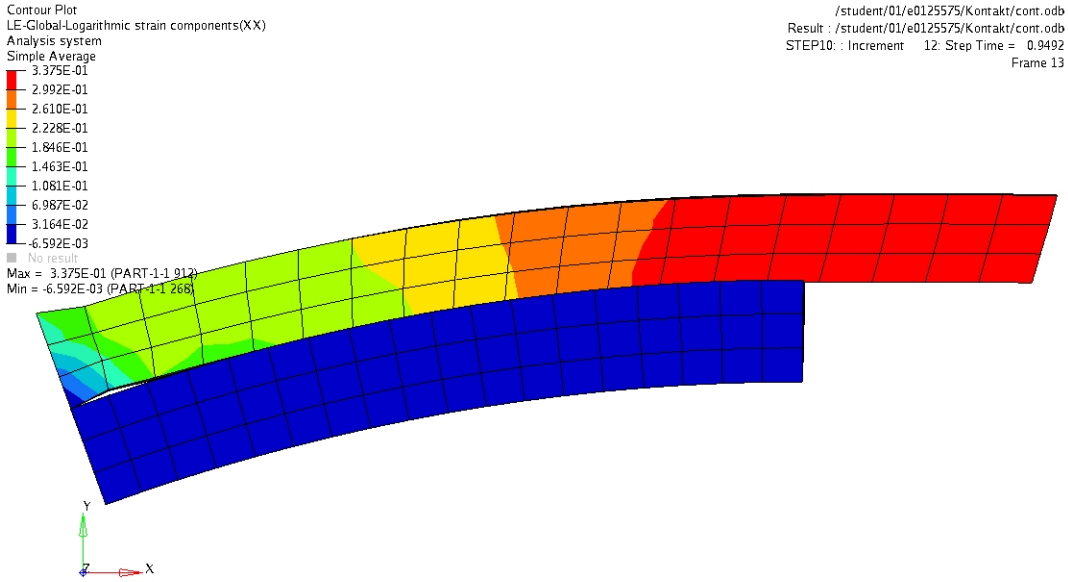

Abbildung 5.5: Logarithmische Verzerrung in x-Richtung

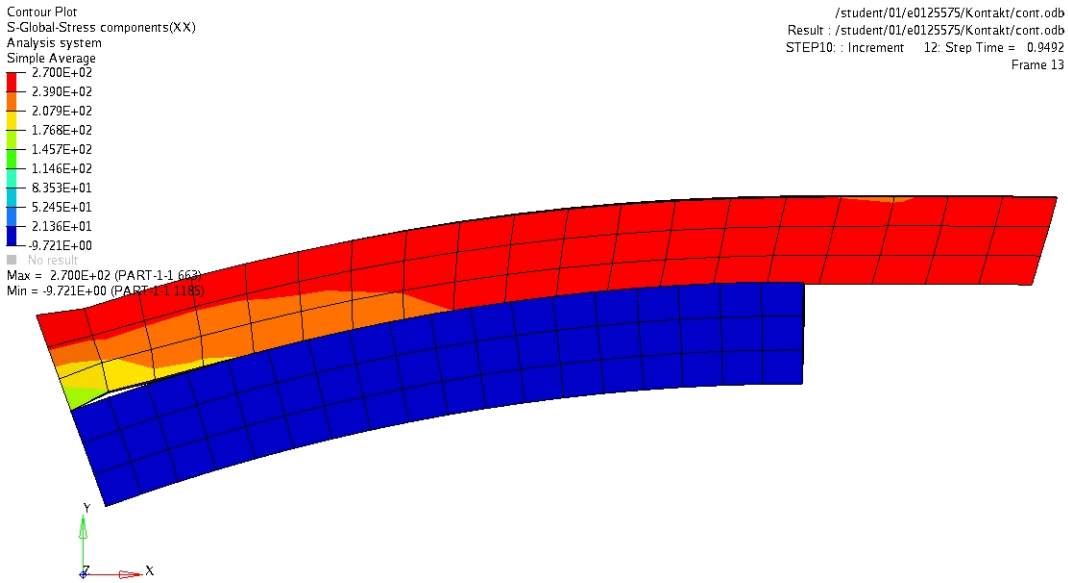

Abbildung 5.6: Spannung in x-Richtung

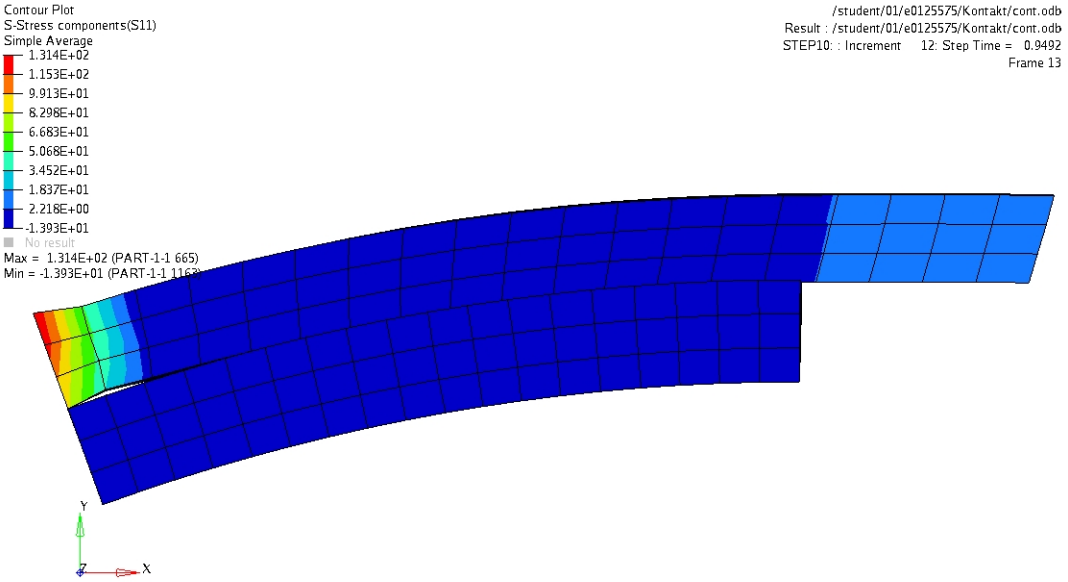

Abbildung 5.7: Spannung in radialer Richtung

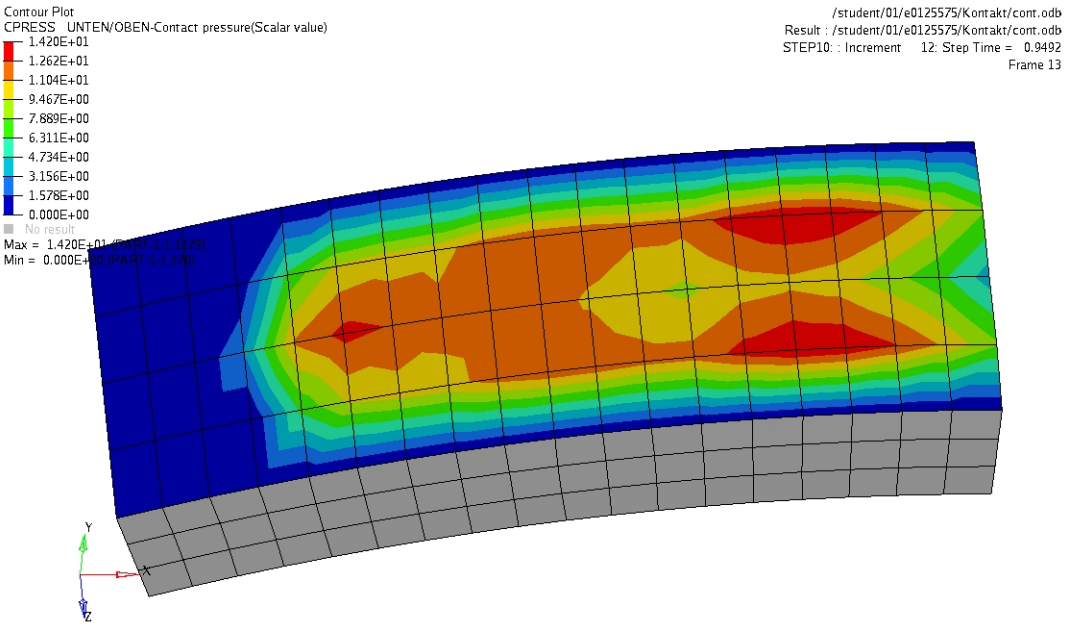

Abbildung 5.8: Kontaktdruckverteilung

6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ausgehend vom Aufbau des Muskels, seinen bekannten mechanischen Eigenschaften und den in der Literatur vorhanden Muskelmodellen ein Materialmodell hergeleitet, welches das passive und aktive Verhalten des Muskelgewebes durch Verzerrungsenergie-Potentiale mit orthogonalen Antworttermen (siehe Abschnitt 1.4.5) beschreibt. Das Materialmodell wurde in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS implementiert, die algorithmisch konsistente Materialtangente für das Materialgesetz hergeleitet, die Implementierung getestet und der passive Anteil des Materialmodells anhand von Druckversuchen validiert.

Die von Criscione [12] vorgeschlagenen Invarianten bieten einen günstigen kontinuumsmechanischen Rahmen für die Modellierung von Muskelgewebe. Die Verwendung dieser Invarianten ermöglichte das Materialverhalten in Faserrichtung, quer zur Faserrichtung und für Schubbelastung längs der Faserrichtung durch voneinander unabhängige Verzerrungsenergie-Potentiale zu modellieren. Die Materialparameter für das passive Materialmodell konnten anhand von 4 Druckversuchen mit unterschiedlicher Faserorientierung identifiziert werden. Es konnte gezeigt werden, dass das in dieser Arbeit hergeleitete Modell in der Lage ist das Materialverhalten des Muskelgewebes bei Druckbelastung für die verschiedenen Faserorientierungen gut wiederzugeben.

Die Implementierung in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS wurde getestet und zeigte eine sehr genaue Übereinstimmung mit analytischen Ergebnissen. Es konnte gezeigt werden, dass mit dem hier verwendeten Materialmodell Kontaktprobleme zwischen zwei Muskeln bei großer Deformation simuliert werden können. Das Materialmodell lieferte für das Kontaktproblem physikalisch sinnvolle Ergebnisse und war bezüglich des Konvergenzverhaltens robust.

Die kontinuumsmechanische Modellierung von Muskelgewebe erfordert eine relativ große Anzahl an Materialparametern zur Beschreibung des passiven und aktiven Verhaltens. Da bislang wenige experimentelle Daten z.B. für das Zugverhalten längs und quer zur Faserrichtung oder für das aktive Verhalten des Muskelgewebes (ohne Faszien, Aponeurosen und Sehnen) existieren, mussten einige Parameter geschätzt oder der Literatur

entnommen werden. Für eine umfassendere Validierung des Materialmodells, vor allem das aktiven Anteils, wären solche experimentelle Daten ebenfalls erforderlich.

Neben der Identifikation der Materialparameter ist für die Simulation eines gesamten Muskels vor allem die genaue Erfassung der Faserorientierung, der Muskelarchitektur, sowie der Faszien, Sehnen und Aponeurosen für die Finite-Elemente-Modellierung wichtig. In diesem Zusammenhang sind auch die räumliche Verteilung der Muskelfasern, des weichen kollagenen Bindegewebes, der Aktivierung und der optimalen Faserstreckung über den Muskelquerschnitt für die Materialmodellierung von Bedeutung.

Verbesserungen des hier verwendeten Materialmodells sind im Bereich der Modellierung des aktiven Verhaltens durch die Berücksichtigung des seriell elastischen Elements und der viskosen Eigenschaften, welche hier vernachlässigt wurden, möglich. Für die dynamische Simulation von Muskulatur muss außerdem der zeitliche Verlauf der Aktivierung abhängig vom Anteil der schnellen, langsamen und intermediären Muskelfasern berücksichtigt werden [11].

A Mathematische Formeln

Tensorbeziehungen:

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D})^{\mathrm{T}_{23}} = (\boldsymbol{AC} \otimes \boldsymbol{BD})^{\mathrm{T}_{23}} \tag{A.1}$$

Das Transpositionssymbol T_{23} bezeichnet eine Vertauschung der Indizes 2 und 3 eines Tensors 4. Stufe [1].

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{F})^{\mathrm{T}_{23}} = (\boldsymbol{AC} \otimes \boldsymbol{BD})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{F})^{\mathrm{T}_{23}} = \\ (\boldsymbol{ACE} \otimes \boldsymbol{BDF})^{\mathrm{T}_{23}}\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{E}) \boldsymbol{ACB}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{ACB}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{D}) \boldsymbol{E} \tag{A.3}$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}_{23}} (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D})^{\mathrm{T}_{23}} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{ACED}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AC} \otimes \boldsymbol{BD})^{\mathrm{T}_{23}} \boldsymbol{E} \tag{A.4}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}} \Big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) f(\boldsymbol{C}) \Big) = f(\boldsymbol{C}) \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{C}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}} \Big(g(\boldsymbol{C}) f(\boldsymbol{C}) \boldsymbol{A}) \Big) = f(\boldsymbol{C}) \boldsymbol{A} \otimes \frac{\partial g(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} + g(\boldsymbol{C}) \boldsymbol{A} \otimes \frac{\partial f(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}} \Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \boldsymbol{C}) \Big) = \Big(\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \boldsymbol{I} \Big)^{\mathrm{T}_{23}} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}} \Big(\boldsymbol{C}^2 \cdot\cdot (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \Big) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \boldsymbol{C} \tag{A.8}$$

[1] Für einen Tensor 4. Stufe $\mathbb{A}$ gilt $\left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}_{23}} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}_{23}}\right)^{\mathrm{T}}$

Transformation in die Momentankonfiguration:

$$\mathbb{F} = \Big(\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}. \tag{A.9}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \tag{A.10}$$

$$\mathbb{F}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \boldsymbol{C}}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = -\mathbb{I} \tag{A.11}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = J^{4/3}\overline{\lambda}^{4}\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} \tag{A.12}$$

$$\mathbb{F}\Big[(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \boldsymbol{C}^{-1}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = J^{2/3}\overline{\lambda}^{2}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \otimes \boldsymbol{I} \tag{A.13}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{C}^{-1} \otimes (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = J^{2/3}\overline{\lambda}^{2}\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \tag{A.14}$$

$$\mathbb{F}\Big[\Big((\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \boldsymbol{I}\Big)^{\mathrm{T}_{23}}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = J^{2/3}\overline{\lambda}^{2}\Big((\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \otimes \boldsymbol{B}\Big)^{\mathrm{T}_{23}} \tag{A.15}$$

$$\mathbb{F}\Big[\Big(\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\Big)^{\mathrm{T}_{23}}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = J^{2/3}\overline{\lambda}^{2}\Big(\boldsymbol{B} \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\Big)^{\mathrm{T}_{23}} \tag{A.16}$$

$$\begin{gathered}\mathbb{F}\Big[\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big) \otimes (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \\ J^{4/3}\overline{\lambda}^{4}\Big[\Big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\boldsymbol{B})\Big) \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\Big]\end{gathered} \tag{A.17}$$

$$\begin{gathered}\mathbb{F}\Big[\Big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{C})\Big) \otimes \boldsymbol{C}^{-1}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \\ J^{4/3}\overline{\lambda}^{4}\Big[\Big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\boldsymbol{B})\Big) \otimes \boldsymbol{I}\Big]\end{gathered} \tag{A.18}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} \tag{A.19}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{C}^{-1}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I} \tag{A.20}$$

$$\mathbb{F}\Big[\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}\Big]\mathbb{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{B} \tag{A.21}$$

B Matrixdarstellung

Im Folgenden werden die einzelnen, in der Gleichung (3.130) für die in der algorithmisch konsistente Materialtangente auftretenden, Tensoren 4. Stufe in Matrizen mit der Dimension 6×6 angeordnet. Aus

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathring{\mathbb{c}} \cdot\cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{B.1}$$

folgt, unter Berücksichtigung der in ABAQUS verwendeten Konventionen, und wegen der Symmetrie von $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ und $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ die Matrixdarstellung von $\mathring{\mathbb{c}} = [c_{ijkl}]$.

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{13} \\ \Delta\sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112}+c_{1121} & c_{1113}+c_{1131} & c_{1123}+c_{1132} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212}+c_{2221} & c_{2213}+c_{2231} & c_{2223}+c_{2232} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312}+c_{3321} & c_{3313}+c_{3331} & c_{3323}+c_{3332} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212}+c_{1221} & c_{1213}+c_{1231} & c_{1223}+c_{1232} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312}+c_{1321} & c_{1313}+c_{1331} & c_{1323}+c_{1332} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312}+c_{2321} & c_{2313}+c_{2331} & c_{2323}+c_{2332} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{12} \\ \Delta\varepsilon_{13} \\ \Delta\varepsilon_{23} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Die in Gleichung (3.130) auftretenden Tensoren 4. Stufe können, abgesehen von $\mathbb{I}$ und $(\overline{\boldsymbol{B}} \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \otimes \overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}_{23}}$, als dyadisches Produkt $\mathbb{c} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ der beiden symmetrischen Tensoren 2. Stufe $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ und $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ aufgefasst werden. Durch Einführen der Matrix

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

und Anordnen der Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ in der Form

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

erhält man die Matrixdarstellung $\boldsymbol{C}$ von $\mathbb{c}$ entsprechend Gleichung (B.2).

$$\mathbb{c} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C} = \underline{a}\underline{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} \tag{B.5}$$

Entsprechend dieser Beziehung werden die folgenden Tensoren 2. Stufe in der durch die Gleichung (B.4) gegebenen Form angeordnet.

$$\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} = [m_i m_j] \quad \Rightarrow \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 m_1 & m_2 m_2 & m_3 m_3 & m_1 m_2 & m_1 m_3 & m_2 m_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{B.6a}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = [B_{ij}] \quad \Rightarrow \quad \underline{\overline{b}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{12} & B_{13} & B_{23} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{B.6b}$$

$$\boldsymbol{I} = [\delta_{ij}] \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{B.6c}$$

$$\left(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})\overline{\boldsymbol{B}})\right) = [d_{ij}] \quad \Rightarrow \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{22} & d_{33} & d_{12} & d_{13} & d_{23} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{B.6d}$$

Durch diese Beziehungen können alle in der Gleichung (3.130) auftretenden Tensoren 4. Stufe, abgesehen von $\mathbb{I}$ und $(\overline{\boldsymbol{B}} \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \otimes \overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}_{23}}$, in der Form (B.5) als Matrizen dargestellt werden.

Für diese beiden Tensoren 4. Stufe erhält man durch Anordnen ihrer Komponenten entsprechend der durch Gleichung (B.2) gegebenen Matrixform die folgende Matrixdarstellung.

$$\mathbb{I} = [\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I_S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.7a}$$

$$\left(\overline{\boldsymbol{B}} \otimes (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) \otimes \overline{\boldsymbol{B}}\right)^{\mathrm{T}_{23}} = [e_{ijkl}] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_{1111} & e_{1122} & e_{1133} & e_{1112} + e_{1121} & e_{1113} + e_{1131} & e_{1123} + e_{1132} \\ e_{2211} & e_{2222} & e_{2233} & e_{2212} + e_{2221} & e_{2213} + e_{2231} & e_{2223} + e_{2232} \\ e_{3311} & e_{3322} & e_{3333} & e_{3312} + e_{3321} & e_{3313} + e_{3331} & e_{3323} + e_{3332} \\ e_{1211} & e_{1222} & e_{1233} & e_{1212} + e_{1221} & e_{1213} + e_{1231} & e_{1223} + e_{1232} \\ e_{1311} & e_{1322} & e_{1333} & e_{1312} + e_{1321} & e_{1313} + e_{1331} & e_{1323} + e_{1332} \\ e_{2311} & e_{2322} & e_{2333} & e_{2312} + e_{2321} & e_{2313} + e_{2331} & e_{2323} + e_{2332} \end{bmatrix} \tag{B.7b}$$

Für den in Gleichung (3.130) auftretenden Tensor 4. Stufe $\mathbb{c}_{\mathrm{J}} = \mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{I}$ lautet die Matrixdarstellung

$$\mathbb{c}_{\mathrm{J}} = \mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{J}}$$

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{11} & -\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 0 \\ -\sigma_{22} & \sigma_{22} & -\sigma_{22} & 2\sigma_{12} & 0 & 2\sigma_{23} \\ -\sigma_{33} & -\sigma_{33} & \sigma_{33} & 0 & 2\sigma_{13} & 2\sigma_{23} \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} & \sigma_{11}+\sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ 0 & -\sigma_{13} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{11}+\sigma_{33} & \sigma_{13} \\ -\sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12} & \sigma_{22}+\sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

.

C UMAT-Subroutine

```
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
     2 STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
     3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
     4 CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 CMNAME
      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
     1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
      DIMENSION XMM(NTENS),BM(NTENS),SM(NTENS,NTENS),BMT(NTENS,NTENS),
     1 DM(NTENS),EM(NTENS),CST(3,3),BST(3,3),DIR0(3),
     2 DIR(3),ZEROS(3,3),EYE(3,3),BSTDEV(3,3),CSTDEV(3,3),
     3 DIAGM(NTENS,NTENS),XMATR(NTENS,NTENS),
     4 DELTACST(3,3),XMM0(3,3),DSVOL(NTENS),DSF(NTENS),DSM(NTENS)
C
C
C     MATERIALPARAMETER
C
      PKB    = PROPS(1)
      G1     = PROPS(2)
      G13    = PROPS(3)
      G14    = PROPS(4)
      G2     = PROPS(5)
      G23    = PROPS(6)
      G24    = PROPS(7)
      SMAX   = PROPS(8)
      CLAM0  = PROPS(9)
      CLAMOPT= PROPS(10)
      CLAMST = PROPS(11)
      P1     = PROPS(12)
      P2     = PROPS(13)
      PKCC   = PROPS(14)
      PKEC   = PROPS(15)
      VMIN   = PROPS(16)
      ALPHA  = PROPS(17)
      PK1    = PROPS(18)
      PK2    = PROPS(19)
      PK3    = PROPS(20)
C
      CALL ZEROSEYE(EYE,ZEROS)
```

```
      CALL DIAGMAT(DIAGM,NTENS,NDI,NSHR)
C
C     GESCHWINDIGKEITSFUNKTION SV: VYN=1 (EIN)     VYN=0 (AUS)
      VYN=PROPS(24)
C
C     FASERRICHTUNG IN DER REFERENZKONFIGURATION DIR0
C
      DIR0(1)=PROPS(21)
      DIR0(2)=PROPS(22)
      DIR0(3)=PROPS(23)
C
C
C     DEVIATORISCHE INVARIANTEN: CI1 CLAM CI5, CAUCHY TENSOR: CST BST
C     JACOBIAN: CJAC
C
      CALL GETSTRAIN(DFGRD0,DFGRD1,CST,BST,DELTACST)
      CALL GETCJAC(CST,CJAC)
      SCAL1=1.0D0/CJAC**(2.0D0/3.0D0)
      CALL MATSCAL(BST,SCAL1,BSTDEV,3)
      CALL MATSCAL(CST,SCAL1,CSTDEV,3)
      CALL GETINVARS(CSTDEV,EYE,DIR0,CI1,CI4,CI5,CLAM)
      CALL GETDCLAM(DFGRD0,DFGRD1,DIR0,DCLAM,CLAM01)
C
C
C     MOMENTANE FASERRICHTUNG DIR
C
      CALL MATVEC(DFGRD1,DIR0,DIR,3)
      SCAL2=1.0D0/(CJAC**(1.0D0/3.0D0)*CLAM)
      CALL MATSCAL(DIR,SCAL2,DIR,3)
C
C     MATRIX: XMM BM DM EM SM
C
      CALL EYEMAT(SM,NTENS)
      CALL GETEM(EM,NTENS,NDI,NSHR)
      CALL GETXMM(XMM,DIR,NTENS,NDI,NSHR)
      CALL GETBM(BM,BSTDEV,NTENS,NDI,NSHR)
      CALL GETDM(DM,BSTDEV,DIR,NTENS,NDI,NSHR)
      CALL GETBMT(BMT,BSTDEV,DIR,NTENS,NDI,NSHR)
C
C
C     MATERIALTANGENTE DDSDDE
C
      B1=SQRT(CI5/CI4**2-1.0D0)
      X=(CI1*CI4-CI5)/(2.0D0*CLAM)
      CALL ACOSH(X,B2)
C
C     GRENZWERTE BEI B1=0 UND B2=0
C
      IF (X .LE. 1.0D0) THEN
         BG= 0.0045366D0*X**6-0.038657D0*X**5+0.15063D0*X**4-
     1       0.36381D0*X**3+0.63952D0*X**2-0.95739D0*X+1.5652D0
         Y1 = 0.017575D0*X**6-0.084227D0*X**5+0.10111D0*X**4+
     1       0.18784D0*X**3-0.76295D0*X**2+1.1403D0*X-0.93298D0
         BG=1.0D0
         Y1=-1.0D0/3.0D0
```

```
         BG=2.0D0*G2*BG
         Y=2.0D0*G2*Y1 + 4.0D0*G23*2.0D0
         DP2G=BG
      ELSE
         G=1.0D0/SQRT(X**2-1.0D0)
         DP2DB2=2.0D0*G2*B2+4.0D0*G23*B2**3+5.0D0*G24*B2**4
         DP2DB22=2.0D0*G2+12.0D0*G23*B2**2+20.0D0*G24*B2**3

         BG=DP2DB2*G
         Y=(DP2DB22*G**2-DP2DB2*G**3*X)

         DP2G=2.0D0*G2*B2*G + 4.0D0*G23*B2**3*G + 5.0D0*G24*B2**4*G
      END IF
C
C     ABKÜRZUNGEN
C
      DXDI1=0.5D0*CLAM
      DXDI4=0.25D0*CI1/CLAM+0.25D0*CI5/CLAM**3
      DXDI5=-0.5D0/CLAM
C
      DDXD11=0.0D0
      DDXD14=0.25D0/CLAM
      DDXD15=0.0D0
C
      DDXD41=0.25D0/CLAM
      DDXD44=-0.125D0*CI1/CLAM**3-0.375D0*CI5/CLAM**5
      DDXD45=0.25D0/CLAM**3
C
      DDXD51=0.0D0
      DDXD54=0.25D0/CLAM**3
      DDXD55=0.0D0
C
      DD1=BG*DXDI1
      DD4=BG*DXDI4
      DD5=BG*DXDI5
C
      D1D1=Y*DXDI1*DXDI1+BG*DDXD11
      D1D4=Y*DXDI4*DXDI1+BG*DDXD14
      D1D5=Y*DXDI5*DXDI1+BG*DDXD15
C
      D4D1=Y*DXDI1*DXDI4+BG*DDXD41
      D4D4=Y*DXDI4*DXDI4+BG*DDXD44
      D4D5=Y*DXDI5*DXDI4+BG*DDXD45
C
      D5D1=Y*DXDI1*DXDI5+BG*DDXD51
      D5D4=Y*DXDI4*DXDI5+BG*DDXD54
      D5D5=Y*DXDI5*DXDI5+BG*DDXD55
C
      A4=-(2.0D0*G1 + 4.0D0*G13*B1**2 + 5.0D0*G14*B1**3)*CI5/CI4**3
      A5=0.5D0*(2.0D0*G1 + 4.0D0*G13*B1**2 + 5.0D0*G14*B1**3)/CI4**2
C
      A4D4=(8.0D0*G13+15.0D0*G14*B1)*CI5**2/CI4**6 +
     1  3.0D0*(2.0D0*G1+4.0D0*G13*B1**2+5.0D0*G14*B1**3)*CI5/CI4**4
      A4D5=-(8.0D0*G13+15.0D0*G14*B1)*0.5D0*CI5/CI4**5 -
```

```
     1      (2.0D0*G1+4.0D0*G13*B1**2+5.0D0*G14*B1**3)/CI4**3
      A5D4=A4D5
      A5D5=(8.0D0*G13+15.0D0*G14*B1)*0.25D0/CI4**4
C
C     FASERSPANNUNG
C
      CALL VECDYAD(DIR0,DIR0,XMM0,3)
      CALL DBLCONTR(DELTACST,XMM0,DCMM,3)
      CLAMDOT=0.5D0/(CJAC**(1.0D0/3.0D0)*CLAM01)*DCMM/DTIME
C
      CALL GETFP(CLAM,CLAM0,CLAMST,P1,P2,FP,PK1,PK2,PK3,SMAX)
      CALL GETFL(CLAM,CLAMOPT,FL)
      CALL GETFV(CLAMDOT,VMIN,PKCC,PKEC,FV)
C
      CALL GETDFP(CLAM,CLAM0,CLAMST,P1,P2,DFP,PK1,PK2,PK3,SMAX)
      CALL GETDFL(CLAM,CLAMOPT,DFL)
      CALL GETDFV(CLAMDOT,VMIN,PKCC,PKEC,DFV)
C
      H1=SMAX/CLAMOPT*(FP+FL*FV*ALPHA+CLAM*DFP+CLAM*DFL*FV*ALPHA)
C     KORREKTUR 1.0/CLAM ANSTATT 0.5/CLAM WEGEN ABLEITUNG dC/dDELTA_C
      IF (VYN .EQ. 1) THEN
         H2=SMAX/CLAMOPT*FL*DFV*ALPHA*(-1.0D0/CLAM**2*DCMM/
     1  DTIME+2.0D0/DTIME)
      ELSE
         H2=0.0D0
         FV=1.0D0
      END IF
      HD1=CI1*D1D1+CI4*D1D4+2.0D0*CI5*D1D5
      HD4=CI1*D4D1+CI4*D4D4+2.0D0*CI5*D4D5
      HD5=CI1*D5D1+CI4*D5D4+2.0D0*CI5*D5D5
      SF=SMAX*CLAM/CLAMOPT*(FP+FL*FV*ALPHA)
C
C     DDSDDE BERECHNEN
C
C     TERM #1
      CALL MULTABTM(EM,EM,DIAGM,XMATR,NTENS)
      TERM=0.5D0*PKB/CJAC + 1.0D0/9.0D0*H1*CLAM/CJAC +
     1 4.0D0/9.0D0/CJAC*CI1*(HD1+DD1) +
     2 4.0D0/9.0D0/CJAC*CLAM**2*(HD4+DD4) +
     3 8.0D0/9.0D0/CJAC*CI5*(HD5+2.0D0*DD5)
      CALL MATSCAL(XMATR,TERM,DDSDDE,NTENS)
C     TERM #2
      CALL MULTABTM(XMM,XMM,DIAGM,XMATR,NTENS)
      TERM=-2.0D0*SF/CJAC + H1*CLAM/CJAC +
     1 H2*CLAM**2/CJAC**(1.0D0/3.0D0) +
     2 4.0D0/CJAC*A4D4*CLAM**4 + 4.0D0/CJAC*CLAM**4*D4D4
      CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C     TERM #3
      TERM=-PKB/CJAC*LOG(CJAC)+
     1 2.0D0/3.0D0*SF/CJAC +
     2 4.0D0/3.0D0/CJAC*CI1*DD1 +
     3 4.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**2*DD4 + 8.0D0/3.0D0/CJAC*CI5*DD5
      CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,SM,NTENS)
C     TERM #4
      CALL MULTABTM(XMM,EM,DIAGM,XMATR,NTENS)
```

```
       TERM=-1.0D0/3.0D0*H1*CLAM/CJAC -
      1 4.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**2*(HD4+DD4)
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #5
       CALL MULTABTM(EM,XMM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=-1.0D0/3.0D0*(H1*CLAM/CJAC+H2*CLAM**2/CJAC**(1.0D0/3.0D0))-
      1 4.0D0/3.0D0/CJAC*CI1*CLAM**2*D1D4 -
      2 4.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**2*(CLAM**2*D4D4+DD4) -
      3 8.0D0/3.0D0/CJAC*CI5*CLAM**2*D5D4
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #6
       CALL MULTABTM(XMM,DM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*A4D5*CLAM**4 + 4.0D0/CJAC*CLAM**4*D4D5
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #7
       CALL MULTABTM(EM,DM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=-4.0D0/3.0D0/CJAC*CI1*CLAM**2*D1D5 -
      1 4.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**4*D4D5 -
      2 8.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**2*(CI5*D5D5+DD5)
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #8
       CALL MULTABTM(DM,XMM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*A5D4*CLAM**4 + 4.0D0/CJAC*CLAM**4*D5D4
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #9
       CALL MULTABTM(BM,XMM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*CLAM**2*D1D4
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #10
       CALL MULTABTM(XMM,BM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*CLAM**2*D4D1
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #10.5
       TERM=4.0D0/CJAC*A5*CLAM**2 + 4.0D0/CJAC*DD5*CLAM**2
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,BMT,NTENS)
C      TERM #11
       CALL MULTABTM(BM,BM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*D1D1
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #12
       CALL MULTABTM(BM,DM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=4.0D0/CJAC*CLAM**2*D1D5
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #13
       CALL MULTABTM(BM,EM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=-4.0D0/3.0D0/CJAC*(HD1+DD1)
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #14
       CALL MULTABTM(EM,BM,DIAGM,XMATR,NTENS)
       TERM=-4.0D0/3.0D0/CJAC*(CI1*D1D1+DD1) -
      1 4.0D0/3.0D0/CJAC*CLAM**2*D4D1 -
      2 8.0D0/3.0D0/CJAC*CI5*D5D1
       CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C      TERM #15
       CALL MULTABTM(DM,BM,DIAGM,XMATR,NTENS)
```

```
      TERM=4.0D0/CJAC*CLAM**2*D5D1
      CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C     TERM #16
      CALL MULTABTM(DM,EM,DIAGM,XMATR,NTENS)
      TERM=-4.0D0/3.0D0/CJAC*(HD5+2.0D0*DD5)*CLAM**2
      CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C     TERM #17
      CALL MULTABTM(DM,DM,DIAGM,XMATR,NTENS)
      TERM=4.0D0/CJAC*A5D5*CLAM**4 + 4.0D0/CJAC*CLAM**4*D5D5
      CALL ADDMATTAN(DDSDDE,TERM,XMATR,NTENS)
C
C
C     SPANNUNGSZUSTAND STRESS
C
      IF (NTENS .EQ. 3) THEN
         DO I=1,NDI
            DSVOL(I)=0.5D0*PKB*LOG(CJAC)*EM(I)/CJAC
            DSF(I)=1.0D0/CJAC*SF*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))
            DSM(I)=2.0D0/CJAC*A4*CLAM**2*XMM(I) +
     1             2.0D0/CJAC*A5*CLAM**2*DM(I) +
     2    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI1*(BM(I)-1.0D0/3.0D0*CI1*EM(I))+
     3    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI4*CLAM**2*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))+
     4    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI5*(CLAM**2*DM(I)-2.0D0/3.0D0*CI5*EM(I))
            STRESS(I)=DSVOL(I)+DSF(I)+DSM(I)
         END DO
         I=3
         DSVOL(I)=0.5D0*PKB*LOG(CJAC)*EM(I)/CJAC
         DSF(I)=1.0D0/CJAC*SF*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))
         DSM(I)=2.0D0/CJAC*A4*CLAM**2*XMM(I) +
     1          2.0D0/CJAC*A5*CLAM**2*DM(I) +
     2    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI1*(BM(I)-1.0D0/3.0D0*CI1*EM(I))+
     3    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI4*CLAM**2*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))+
     4    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI5*(CLAM**2*DM(I)-2.0D0/3.0D0*CI5*EM(I))
         STRESS(I)=DSVOL(I)+DSF(I)+DSM(I)
      ELSE
         DO I=1,6
            DSVOL(I)=0.5D0*PKB*LOG(CJAC)*EM(I)/CJAC
            DSF(I)=1.0D0/CJAC*SF*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))
            DSM(I)=2.0D0/CJAC*A4*CLAM**2*XMM(I) +
     1             2.0D0/CJAC*A5*CLAM**2*DM(I) +
     2    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI1*(BM(I)-1.0D0/3.0D0*CI1*EM(I))+
     3    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI4*CLAM**2*(XMM(I)-1.0D0/3.0D0*EM(I))+
     4    2.0D0/CJAC*DP2G*DXDI5*(CLAM**2*DM(I)-2.0D0/3.0D0*CI5*EM(I))
            STRESS(I)=DSVOL(I)+DSF(I)+DSM(I)
         END DO
      END IF
C
C
C     TRANSFORMATION BEZÜGLICH JAUMANN-RATE
C
      IF (NTENS .EQ. 6) THEN
         DDSDDE(1,1)=DDSDDE(1,1) + STRESS(1)
         DDSDDE(1,2)=DDSDDE(1,2) - STRESS(1)
         DDSDDE(1,3)=DDSDDE(1,3) - STRESS(1)
         DDSDDE(1,4)=DDSDDE(1,4) + 2.0D0*STRESS(4)
```

```
         DDSDDE(1,6)=DDSDDE(1,5) + 2.0D0*STRESS(5)
C
         DDSDDE(2,1)=DDSDDE(2,1) - STRESS(2)
         DDSDDE(2,2)=DDSDDE(2,2) + STRESS(2)
         DDSDDE(2,3)=DDSDDE(2,3) - STRESS(2)
         DDSDDE(2,4)=DDSDDE(2,4) + 2.0D0*STRESS(4)
         DDSDDE(2,5)=DDSDDE(2,6) + 2.0D0*STRESS(6)
C
         DDSDDE(3,1)=DDSDDE(3,1) - STRESS(3)
         DDSDDE(3,2)=DDSDDE(3,2) - STRESS(3)
         DDSDDE(3,3)=DDSDDE(3,3) + STRESS(3)
         DDSDDE(3,5)=DDSDDE(3,5) + 2.0D0*STRESS(5)
         DDSDDE(3,6)=DDSDDE(3,6) + 2.0D0*STRESS(6)
C
         DDSDDE(4,3)=DDSDDE(4,3) - STRESS(4)
         DDSDDE(4,4)=DDSDDE(4,4) + STRESS(1)+STRESS(2)
         DDSDDE(4,5)=DDSDDE(4,5) + STRESS(6)
         DDSDDE(4,6)=DDSDDE(4,6) + STRESS(5)
C
         DDSDDE(5,2)=DDSDDE(5,2) - STRESS(5)
         DDSDDE(5,4)=DDSDDE(5,4) + STRESS(6)
         DDSDDE(5,5)=DDSDDE(5,5) + STRESS(1)+STRESS(3)
         DDSDDE(5,6)=DDSDDE(5,6) + STRESS(4)
C
         DDSDDE(6,1)=DDSDDE(6,1) - STRESS(6)
         DDSDDE(6,4)=DDSDDE(6,4) + STRESS(5)
         DDSDDE(6,5)=DDSDDE(6,5) + STRESS(4)
         DDSDDE(6,6)=DDSDDE(6,6) + STRESS(2)+STRESS(3)
      END IF
C
C
      IF (NTENS .EQ. 3) THEN
         DDSDDE(1,1)=DDSDDE(1,1) + 2.0D0*STRESS(1)
         DDSDDE(1,3)=DDSDDE(1,3) + 2.0D0*STRESS(3)
C
         DDSDDE(2,2)=DDSDDE(2,2) + 2.0D0*STRESS(2)
         DDSDDE(2,3)=DDSDDE(2,3) + 2.0D0*STRESS(3)
C
         DDSDDE(3,1)=DDSDDE(3,1) + STRESS(3)
         DDSDDE(3,2)=DDSDDE(3,2) + STRESS(3)
         DDSDDE(3,3)=DDSDDE(3,3) + STRESS(1)+STRESS(2)
      END IF
C
C
C     SPEZIFISCHE VERZERRUNGSENERGIE SSE (MITTELPUNKTSREGEL)
C
      CALL GETFP(CLAM01,CLAM0,CLAMST,P1,P2,FP,PK1,PK2,PK3,SMAX)
      CALL GETFL(CLAM01,CLAMOPT,FL)
C
      IF (VYN .EQ. 1) THEN
         CALL GETFV(CLAMDOT,VMIN,PKCC,PKEC,FV)
      ELSE
         FV=1.0D0
      END IF
      SF01=SMAX*CLAM01/CLAMOPT*(FP+FL*FV*ALPHA)
```

```
C
      SPD=SPD + DCLAM*SF01/CLAM01
      SSE=0.5D0*PKB*LOG(CJAC)**2+G1*B1**2+G2*B2**2+SPD
C
C
      RETURN
      END
C     ------------------------------------------------------------------
C
C     SUBROUTINEN FÜR MATRIZEN
C
C     ------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE MULTAB(A,B,X,N)
C     MULTIPLIZIERT A UND B MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE MULTATB(AT,B,X,N)
C     MULTIPLIZIERT A TRANSPONIERT UND B MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE MULTABT(A,BT,X,N)
C     MULTIPLIZIERT A UND B TRANSPONIERT MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE DBLCONTR(A,B,X,N)
C     DOPPELTE KONTRAKTION VON A UND B MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE MATDET(A,X)
C     DETERMINANTE EINER MATRIX A MIT DIMENSION 3*3
C
      SUBROUTINE MATSCAL(A,C,X,N)
C     PRODUKT VON SKALAR C UND MATRIX A MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE MATVEC(A,C,X,N)
C     PRODUKT VON VEKTOR C UND MATRIX A MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE ZEROSEYE(E,Z)
C     NULLMATRIX Z UND EINHEITSMATRIX MIT DIMENSION 3*3
C
      SUBROUTINE DIAGMAT(X,N,ND,NS)
C     DIAGONALMATRIX M DIAG(1 .. 1 2 .. 2)
C
      SUBROUTINE EYEMAT(E,N)
C     EINHEITSMATRIX E MIT DIMENSION N*N
C
      SUBROUTINE MATADD(A,B,X,N)
C     ADDIERT MATRIX A UND B MIT DIMENSION N
C
      SUBROUTINE MATADDSC(C,A,DE,B,X,N)
C     ADDIERT MATRIX A*C UND B*D MIT DIMENSION N*N MIT SKALAREN C D
C
      SUBROUTINE ADDMATTAN(DDS,TE,XMAT,N)
C     ADDIERT DDSDDE UND XMAT*TE MIT DIMENSION N*N UND SKALAR TE
C
      SUBROUTINE VECDYAD(A,B,X,N)
C     DYADISCHES PRODUKT AB' DER VEKTOREN A UND B MIT DIMENSION N*1
C
      SUBROUTINE MULTABTM(A,B,Z,X,N)
```

```
C     DYADISCHES PRODUKT AB'Z DER VEKTOREN A UND B MIT MATRIX Z
C     ------------------------------------------------------------------
C
C     SUBROUTINEN FÜR KONTINUUMSMECHANIK
C     ------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE GETSTRAIN(DE0,DE1,C1,B1,DC)
C     BERECHNET L/R CAUCHY TENSOR C1 UND B1 BEI t+dt, INKREMENT DC VON C1
C
      SUBROUTINE GETCJAC(C,CJAC)
C     JACOBIAN
C
      SUBROUTINE GETINVARS(C,EYE,DM0,CI1,CI4,CI5,CLAM)
C     BERECHNET INVARIANTEN CI1, CLAM=SQRT(CI4) UND CI5 OF C
C
      SUBROUTINE GETDCLAM(DE0,DE1,DM0,DL,CL01)
C     BERECHNET INKREMENT DL=CLAM1-CLAM0 VON CLAM
C
      SUBROUTINE GETEM(X,N,ND,NS)
C     VEKTOR EM NACH (B.6c)
C
      SUBROUTINE GETXMM(X,D,N,ND,NS)
C     VEKTOR XMM NACH (B.6a)
C
      SUBROUTINE GETBM(X,B,N,ND,NS)
C     VEKTOR BM NACH (B.6b)
C
      SUBROUTINE GETDM(X,B,D,N,ND,NS)
C     VEKTOR DM NACH (B.6d)
C
      SUBROUTINE GETBMT(X,B,D,N,ND,NS)
C     MATRIX BMT NACH (B.7b)
C
      SUBROUTINE ACOSH(X,Y)
C     OBERER AST VON ACOSH
C     ------------------------------------------------------------------
C
C     FUNKTIONEN FP FL FV UND DEREN ABLEITUNGEN DFP DFL DFV
C     ------------------------------------------------------------------
C
      SUBROUTINE GETFP(CLAM,CLAM0,CLAMST,P1,P2,FP,PK1,PK2,PK3,SMAX)
      SUBROUTINE GETDFP(CLAM,CLAM0,CLAMST,P1,P2,DFP,
      SUBROUTINE GETFL(CLAM,CLAM0,FL)
      SUBROUTINE GETDFL(CLAM,CLAM0,DFL)
      SUBROUTINE GETFV(CLAMDOT,VMIN,PKCC,PKEC,FV)
      SUBROUTINE GETDFV(CLAMDOT,VMIN,PKCC,PKEC,DFV)
```

Definition der Materialparameter in der UMAT-Subroutine

PROPS(1)	PROPS(2)	PROPS(3)	PROPS(4)	PROPS(5)
$K\ [Pa]$	$G_1\ [Pa]$	$G_{13}\ [Pa]$	$G_{14}\ [Pa]$	$G_2\ [Pa]$
PROPS(6)	PROPS(7)	PROPS(8)	PROPS(9)	PROPS(10)
$G_{23}\ [Pa]$	$G_{24}\ [Pa]$	$\sigma_{\max}\ [Pa]$	$\lambda_0\ [-]$	$\lambda_{\text{opt}}\ [-]$
PROPS(11)	PROPS(12)	PROPS(13)	PROPS(14)	PROPS(15)
λ^*	$P_1\ [-]$	$P_2\ [-]$	$k_{\text{cc}}\ [-]$	$k_{\text{ec}}\ [-]$
PROPS(16)	PROPS(17)	PROPS(18)	PROPS(19)	PROPS(20)
$v_{\min}\ [ms^{-1}]$	$\alpha\ [-]$	$k_1\ [kPa]$	$k_2\ [kPa]$	$k_3\ [kPa]$
PROPS(21)	PROPS(22)	PROPS(23)	PROPS(24)	
$M(1)$	$M(2)$	$M(3)$	VYN	

Tabelle C.1: Zuordnung der Materialparameter zu PROPS

Für quasistatische Simulationen kann mit $VYN = 0$ die Geschwindigkeitsfunktion $f_{\text{v}} = 1.0$ gesetzt werden.

Materialdefinition in der ABAQUS-Eingabedatei:

```
*SOLID SECTION, MATERIAL=<MATERIAL>, ELSET=<NAME>
*MATERIAL, NAME=<MATERIAL>
*USER MATERIAL, CONSTANTS=<NPROPS>, UNSYMM
   <K>, <G1>, <G13>, <G14>, <G2>, <G23>, <G24>, <σmax>,
   <λ0>, <λopt>, <λ*>, <P1>, <P2>, <kcc>, <kec>, <vmin>,
   <α>, <k1>, <k2>, <k3>, <M(1)>, <M(2)>, <M(3)>, <VYN>
```

Literaturverzeichnis

[1] *ABAQUS/Standard User Manual, Version 6.6.* Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc. Pawtucket, RI, 2006.

[2] Augenstein, K.F., B.R. Cowan, I.J. LeGrice und A.A. Young: *Estimation of cardiac hyperelastic material properties from MRI tissue tagging and diffusion tensor imaging.* LNCS, 4190:625–635, 2006.

[3] Behr, M., P.J. Arnoux, T. Serre, K. Kayvantash und C. Brunet: *Modeling active muscle behavior for emergency braking simulations.* Computational Fluid and Solid Mechanics, Seiten 60–64, 2005.

[4] Behr, M., P.J. Arnoux, T. Serre, L. Thollon und C. Brunet: *Tonic finite element model of the lower limb.* Journal of Biomechanical Engineering, 128:223–228, 2006.

[5] Berginsky, M.: *Modeling bladder muscle: A finite element approach.* VCU BBSI Summer Institute, 2005.

[6] Bettendorff-Bakman, D.-E., P. Schmid, P.P. Lunkenheimer und P. Niederer: *A finite element study relating to the rapid filling phase of the human ventricles.* Journal of Theoretical Biology, 238:303–316, 2006.

[7] Blemker, S.S. und S.L. Delp: *Rectus femoris and vastus intermedius fiber excursions predicted by three-dimensional muscle models.* Journal of Biomechanics, 39:1383–1391, 2006.

[8] Blemker, S.S., P.M. Pinsky und S.L. Delp: *A 3D model of muscle reveals the causes of nonuniform strains in the biceps brachii.* Journal of Biomechanics, 38:657–665, 2005.

[9] Bonet, J. und R.D. Wood: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis.* Cambridge University Press, 2. Auflage, 2008.

[10] Bosboom, E.M.H., M.K.C. Hesselink, C.W.J. Oomens, C.V.C. Bouten und M.R. Drost: *Passive transverse mechanical properties of skeletal muscle under in vivo compression.* Journal of Biomechanics, 34:1365–1368, 2001.

[11] Böl, M. und S. Reese: *A new approach for the simulation of skeletal muscles using the tool of statistical mechanics.* Materialwissenschaft und Werkstofftechnik, 38, No. 12:955–964, 2007.

[12] Criscione, J.C., A.S. Douglas und W.C. Hunter: *Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49:871–897, 2001.

[13] d'Aulignac, D., J.A.C. Martins, T. Mascarenhas, R.M. Natal Jorge und E.B. Pires: *A shell finite element model of the pelvic floor muscles.* Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 8, No. 5:339–347, 2005.

[14] Henning, B.: *Analyse und Vergleich von Muskelmodellen zum Einsatz in der Mehrkörperdynamiksimulation.* Diplomarbeit, Technischen Universität Darmstadt, 2006.

[15] Hill, A.V.: *The heat of shortening and the dynamic constants of muscle.* Proceedings of the Royal Society, B 126:136–195, 1938.

[16] Huang, Y.: *User material subroutine incorporating single crystal plasticity in the ABAQUS finite element program.* Division of Applied Sciences Harvard University, Cambridge, Massachusetts, Mech Report 178, 1991.

[17] Humphrey, J.D., R.K. Strumpf und F.C.P. Yin: *Determination of a constitutive relation for passive myocardium.* Journal of Biomechanical Engineering, 112:333–346, 1990.

[18] Humphrey, J.D. und F.C.P. Yin: *On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudostrain-energy function.* Journal of Biomechanics, 109:298–304, 1987.

[19] Huyghe, J.M., D.H. van Campen, T. Arts und R.M. Heethaar: *The constitutive behaviour of passive heart muscle tissue: A quasilinear viscoelastic formulation.* Journal of Biomechanics, 24:841–849, 1991.

[20] Jenkyn, T.R., B. Koopman, P. Huijing, R.L. Lieber und K.R. Kaufman: *Finite element model of intramuscular pressure during isometric contraction of skeletal muscle.* Physics in Medicine and Biology, 47:4043–4061, 2002.

[21] Johansson, T., P. Meier und R. Blickhan: *A finite-element model for the mechanical analysis of skeletal muscles.* Journal of Theoretical Biology, 206:131–149, 2000.

[22] Li, J., X.Y. Luo und Z.B. Kuang: *A nonlinear anisotropic model for porcine aortic heart valves.* Journal of Biomechanics, 34:1279–1289, 2001.

[23] Liang, Y., R.M. McMeeking und A.G. Evans: *A finite element simulation scheme for biological muscular hydrostats.* Journal of Theoretical Biology, 242:142–150, 2006.

[24] Linder, H.: *Biologie.* Schroedel Verlag, 21. Auflage, 1997.

[25] Martins, J.A.C., E.B. Pires, R. Salvado und P.B. Dinis: *A numerical model of passive and active behavior of skeletal muscles.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151:419–433, 1998.

[26] Pandy, M.G., F.E. Zajac, E. Sim und W.S. Levine: *An optimal control model for maximum-height human jumping.* Journal of Biomechanics, 23:1185–1198, 1990.

[27] Prot, V., B. Skallerud und G.A. Holzapfel: *Transversely isotropic membrane shells with application to mitral valve mechanics. Constitutive modelling and finite element implementation.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71, No. 8:987–1008, 2007.

[28] Teran, J., S.S. Blemker, V. Ng Thow Hing und R. Fedkiw: *Finite volume methods for the simulation of skeletal muscle.* Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation July 26-27, 2003, San Diego, California.

[29] Tham, L.M., H.P. Lee und C. Lu: *Cupping: From a biomechanical perspective.* Journal of Biomechanics, 39:2183–2193, 2006.

[30] Van Leeuwen, J.L. und W.M. Kier: *Functional design of tentacles in squid: linking sarcomere ultrastructure to gross morphological dynamics.* Philosophical Transactions of the Royal Society, 352:551–571, 1997.

[31] Van Loocke, M., C.G. Lyons und C.K. Simms: *A validated model of passive muscle in compression.* Journal of Biomechanics, 39:2999–3009, 2006.

[32] Weiss, J.A. und J.C. Gardiner: *Computational modeling of ligament mechanics.* Critical Reviews in Biomedical Engineering, 29(4):1–70, 2002.

[33] Weiss, J.A., J.C. Gardiner und C. Bonifasi-Lista: *Ligament material behavior is nonlinear, viscoelastic and rate-independent under shear loading.* Journal of Biomechanics, 35:943–950, 2002.

[34] Yucesoy, C.A., B.H.F.J.M. Koopman, P.A. Huijing und H.J. Grootenboer: *Three-dimensional finite element modeling of skeletal muscle using a two-domain approach: linked fiber-matrix mesh model.* Journal of Biomechanics, 35:1253–1262, 2002.

[35] Yucesoy, C.A., H. Maas, B.H.F.J.M. Koopman, P.A. Huijing und H.J. Grootenboer: *Mechanisms causing effects of muscle position on proximo-distal*

muscle force differences in extra-muscular myofascial force transmission. Medical Engineering and Physics, 28:214–226, 2006.