

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



DIPLOMARBEIT

Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen und Anwendungen im Schulunterricht

ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Elisabeth Filler
Jagenbach 72
3923 Jagenbach

Datum

Unterschrift (Student)

Inhaltsverzeichnis

0. Vorwort	1
1. Einige grundlegende Begriffe der linearen Algebra und der numerischen Mathematik	3
1.1. Grundlagen aus linearer Algebra	3
1.2. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	9
1.3. Fehleranalyse	13
1.3.1. Modellfehler	14
1.3.2. Datenfehler	14
1.3.2.1. Kondition.....	15
1.3.3. Verfahrensfehler	15
1.3.4. Rechen- bzw. Rundungsfehler	16
2. Grundlegende Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme im Schulunterricht	22
2.1. Lineare Gleichungssysteme im Lehrplan	22
2.2. Lösungsverfahren für lineare Gleichungen im \mathbb{R}^2	24
2.2.1. Komparationsverfahren (Gleichsetzungsverfahren)	24
2.2.2. Substitutionsverfahren (Einsetzungsverfahren)	27
2.2.3. Eliminationsverfahren (Additionsverfahren)	29
2.2.4. Cramersche Regel (Determinantenmethode)	32
2.2.5. Geometrische Deutung von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen	35
2.3. Lösungsverfahren für lineare Gleichungen im \mathbb{R}^3	42
2.3.1. Eliminationsverfahren nach Gauß	42
2.3.2. Cramersche Regel	45
2.3.3. Geometrische Deutung von linearen Gleichungssystemen in drei Variablen	47

3. Das Eliminationsverfahren nach Gauß.....	54
3.1. Lösung mittels LU-Zerlegung	63
4. Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	68
4.1. Das Gesamtschrittverfahren nach Jacobi	71
4.2. Das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel	77
Anhang	83
Literaturverzeichnis	88

0. Vorwort

Bei der Suche nach einem Thema für meine Diplomarbeit, überlegte ich, welche Vorlesungen an der Universität mein besonderes Interesse geweckt hatten. Dazu kamen mir zuerst „Lineare Algebra und analytische Geometrie“ und „Numerik“ in den Sinn. Daraufhin stellte sich noch die Frage, wie sich diese beiden Themengebiete vereinbaren lassen. Da ich Mathematik auf Lehramt studiere, kam zusätzlich die Anforderung hinzu, dass das Thema der Diplomarbeit auch für meinen späteren Schulunterricht hilfreich sein sollte. Nach längeren Überlegungen entschied ich mich für die numerische Betrachtung linearer Gleichungssysteme.

Zu Beginn meiner Arbeit entschied ich mich, die wichtigsten Begriffe aus der linearen Algebra und der numerischen Mathematik zusammenzufassen, die für den restlichen Verlauf der Arbeit grundlegend sind. Anschließend überlegte ich, welche weiteren Voraussetzungen gegeben sein müssten, damit die Diplomarbeit ein abgeschlossenes Werk sein würde. Dazu zählten einerseits die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und andererseits die unterschiedlichen Fehlerarten bei numerischer Berechnung.

Das zweite Kapitel ist ganz der Schulmathematik gewidmet. Lineare Gleichungssysteme stellen einen entscheidenden Bereich im Lehrplan und somit auch im Schulunterricht dar. Daher durchsuchte ich die Lehrpläne für Mathematik, um mir ein Bild zu machen, in welchen Schulstufen und in welcher Art lineare Gleichungssysteme auftreten. Im Anschluss daran ging ich auf die praktische Umsetzung im Unterricht über, die in diesem Kapitel durch die Diskussion der einfachen direkten Lösungsverfahren repräsentiert wird. An dieser Stelle war es mir auch ein Anliegen, die Geometrie einfließen zu lassen, veranschaulicht durch graphische Darstellungen unterschiedlicher Gleichungssysteme.

Im dritten Kapitel habe ich mich ausführlicher und allgemeiner mit dem Eliminationsverfahren nach Gauß beschäftigt, wodurch der Einfluss der numerischen Mathematik auf diese Thematik leicht ersichtlich wird.

Am Ende der Arbeit legte ich Wert darauf, zu zeigen, dass noch andere – nicht direkte – numerische Verfahren zur Berechnung der Lösung linearer

Gleichungssysteme existieren. Aus diesem Grund ging ich im letzten Kapitel auf zwei wichtige Iterationsverfahren ein: das Gesamtschrittverfahren nach Jacobi und das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel.

Ich denke, durch diese Arbeit eine gute Verbindung zwischen der linearen Algebra, der numerischen Mathematik und dem Schulunterricht gefunden zu haben.

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Frau Prof. Gabriela Schranz-Kirlinger für ihre vorbildliche Betreuung beim Verfassen meiner Diplomarbeit. Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglicht haben, bei meinem Ehemann und meinen Geschwistern sowie bei meinen Freunden für die moralische Unterstützung während meiner Studienzeit.

Elisabeth Filler
Jagenbach, August 2008

1. Einige grundlegende Begriffe der linearen Algebra und der numerischen Mathematik

In diesem Kapitel sollen zuerst einige wichtige mathematische Begriffe aus der linearen Algebra und der numerischen Mathematik angeführt werden. Diese sind für den weiteren Verlauf dieser Arbeit Voraussetzung und werden deshalb hier zu Beginn zusammengefasst.

Zusätzlich wird in diesem Abschnitt auf die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen und auf die Fehleranalyse eingegangen.

1.1. Grundlagen aus linearer Algebra

Matrix: A ist eine reelle $m \times n$ – Matrix, d. h. A besitzt m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Vektor: x ist ein reeller Spaltenvektor, d. h. eine $n \times 1$ – Matrix.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit:

n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig** $\Leftrightarrow \exists n$ Konstante $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$n \in \mathbb{N}, \text{ sodass } c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0$$

mit $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$.

n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig** \Leftrightarrow falls aus

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0$$

notwendig folgt, dass $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$.

Rang einer Matrix:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A besitzt m Zeilenvektoren

$$(a_{11}, \dots, a_{1n})$$

$$(a_{21}, \dots, a_{2n})$$

\vdots

$$(a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

und n Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der Rang $rg(A)$ der Matrix A ist die Maximalanzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren.

Determinante einer Matrix:

Die Determinante einer Matrix im $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird folgendermaßen berechnet:

- Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

$$\text{Dann gilt } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{R}.$$

Zur Berechnung der Determinante einer quadratischen Matrix A im \mathbb{R}^3 verwendet man die „Regel von Sarrus“:

- Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $a_{11}, \dots, a_{33} \in \mathbb{R}$.

Dann gilt
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \in \mathbb{R}.$$

Determinanten von beliebigen $n \times n$ – Matrizen lassen sich durch den „Entwicklungssatz von Laplace“ berechnen:

- Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Entwicklung nach der k -ten Spalte oder der i -ten Zeile:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |A_{ik}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |A_{ik}|$$

wobei A_{ik} die $(n-1) \times (n-1)$ – Untermatrix von A ist, die man erhält, wenn man die i -te Zeile und die k -te Spalte streicht.

Wenn $\det(A) \neq 0$ ist, folgt daraus, dass die Zeilenvektoren und Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind, das heißt, die Matrix hat vollen Rang, also $rg(A) = n$.

Inverse einer Matrix:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für quadratische Matrizen A mit $\det(A) \neq 0$

existiert eine eindeutige Matrix A^{-1} , sodass gilt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

A^{-1} wird als **inverse Matrix** zu A bezeichnet und E ist die $n \times n$ Einheitsmatrix.

Matrizen, die eine Inverse besitzen, bezeichnet man als invertierbar oder regulär.

Falls $\det(A) = 0$, bezeichnet man die Matrix als singulär.

Lineare Gleichung:

Ein Ausdruck der Art $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ heißt **lineare Gleichung** in n Unbekannten, wobei $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ konstant und $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Man bezeichnet a_1, a_2, \dots, a_n auch als Koeffizienten der Gleichung.

Falls $b = 0$, spricht man von einer **homogenen** linearen Gleichung.

Falls $b \neq 0$, spricht man von einer **inhomogenen** linearen Gleichung.

Lineares Gleichungssystem:

Ein System von linearen Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

heißt **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbekannten, wobei

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \text{ konstant } \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ und } A \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $b_i = 0$, spricht man von einem **homogenen** linearen Gleichungssystem.

Falls $b_i \neq 0$, spricht man von einem **inhomogenen** linearen Gleichungssystem.

Die Kurzschreibweise für lineare Gleichungssysteme lautet:

$$Ax = b$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m; m, n$ beliebig aus \mathbb{N} gegeben und

die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht ist.

Man nennt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auch Koeffizientenmatrix.

Bildraum einer linearen Abbildung:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschreibt eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Wenn x den \mathbb{R}^n durchläuft, dann durchläuft die Menge aller Bilder $y = Ax$ einen linearen Teilraum des \mathbb{R}^m . Diese Menge wird als Bildraum $B(A)$ benannt:

$$B(A) := \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Die Dimension des Bildraumes $\dim(B(A))$ entspricht dem Rang der Matrix A .

$$\dim(B(A)) = \text{rg}(A)$$

Kern einer linearen Abbildung:

$$K(A) := \{x : Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Besteht der Kern nur aus dem Nullvektor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so besitzt er die Dimension

Null, also

$$\dim(K) = 0$$

1.2. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Wie man an Hand eines einfachen Beispiels zeigen kann, besitzt nicht jedes lineare Gleichungssystem eine Lösung:

Beispiel:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Hier sind $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$ und $b_1 = 1, b_2 = 2$.

Es existieren kein x_1 und x_2 , sodass beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind.

Man stellt sich nun die Frage, wann ein allgemeines lineares Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, das heißt, die Gleichungen einander nicht widersprechen.

Im Weiteren wird der allgemeine Fall $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachtet.

Bei der Beurteilung der Lösbarkeit spielt der Rang der folgenden Matrix eine wichtige Rolle.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Diese **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A|b)$ ist die Matrix A erweitert um den Vektor b .

Satz 1:

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann **lösbar**, wenn der Rang der Matrix A ident ist mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$.

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Satz 2¹:

Ein homogenes lineares Gleichungssystem ist **immer lösbar**. Es hat stets die triviale

Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Satz 3:

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann **eindeutig lösbar**, wenn gilt²:

$$rg(A) = n$$

(n = Anzahl der Unbekannten)

Satz 4:

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann **universell lösbar**, das heißt, für eine beliebige rechte Seite lösbar, wenn gilt³:

$$rg(A) = m$$

(m = Anzahl der Zeilen)

Satz 5:

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann **universell eindeutig lösbar**, wenn gilt:

$$n = rg(A) = m$$

Es liegt also ein quadratisches System vor, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist. Dieses ist dann für alle rechten Seiten eindeutig lösbar.⁴

¹ [vgl. MER]

² [vgl. PAU]

³ ebd.

Zusammenfassung:

$$rg(A) = rg(A|b) \Rightarrow \text{lösbar}$$

$$rg(A) = m \Rightarrow \text{universell lösbar}$$

$$rg(A) = n \Rightarrow \text{eindeutig lösbar}$$

Satz 6:

Falls $rg(A) < m$ gilt, so gibt es Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$, die nicht in $B(A)$ liegen. Das heißt, das System $Ax = b$ kann widersprüchlich sein.⁵

Nimmt man eine Matrix A mit $rg(A) = r < m$ an, das heißt, o.B.d.A. sind die ersten r Zeilen linear unabhängig, so muss jede weitere Zeile eine Linearkombination der ersten r Zeilen sein. Hierzu muss man zwei Fälle unterscheiden⁶:

- a) Falls nun die Komponenten b_i ($i > r$) Linearkombinationen der ersten r Komponenten von b sind, entsteht kein Widerspruch. Das heißt, das Gleichungssystem bleibt lösbar.

Die weiteren Gleichungen sind redundante Wiederholungen der ersten r Gleichungen und das neue reduzierte Gleichungssystem hat genau dieselben Lösungen wie das ursprüngliche System.

Das heißt, hier gilt: $b \in B(A)$.

$$\text{Es gilt: } rg(A) = rg(A|b)$$

- b) Falls die Komponenten b_i ($i > r$) nicht dieselben Linearkombinationen der ersten r Zeilenvektoren sind, gilt: $b \notin B(A)$. Daraus folgt, dass das System $Ax = b$ widersprüchlich ist.

$$\text{Es gilt: } rg(A) \neq rg(A|b)$$

⁴ [vgl. PAU]

⁵ [vgl. FRA]

⁶ ebd.

In diesem Fall kann es eine Lösung nur im Ausgleichssinn geben. Das bedeutet, dass x so bestimmt wird, dass es in das Gleichungssystem so gut wie möglich „hineinpasst“. x ist dann festgelegt durch: $\|Ax - b\|_2 \dots \min!$

Hierbei ist $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm, also die Länge eines Vektors.

Das heißt, der Lösungsbegriff wird modifiziert.

Satz 7:

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent⁷:

- a) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ hat das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.
- b) Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
- c) Die Matrix A ist invertierbar.
 $\Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Beispiel:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar, da $rg(A) = 2 = rg(A|b)$.

Die dritte Zeile entsteht durch Multiplikation der ersten mit 2 und anschließender Addition mit der zweiten Zeile.

Zusätzlich gilt: $rg(A) = n = \text{Anzahl der Unbekannten}$

\Rightarrow Es existiert eine eindeutige Lösung. Diese lautet: $x_1 = \frac{8}{7}, x_2 = \frac{2}{7}$

⁷ [vgl. PAU]

Beispiel:

$$Ax = b$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar, da $rg(A) = 3 \neq rg(A|b) = 4$.

Der vierte Zeilenvektor von A ergibt sich durch 4*1. Zeile + 2. Zeile - 3. Zeile, jedoch ist $5 \neq 4 \cdot 2 + 4 - 1 = 11$.

1.3. Fehleranalyse

Ein lineares Gleichungssystem kann auf verschiedene Arten verfälscht werden. Statt des wahren Systems entsteht dadurch ein verfälschtes System.

In diesem Abschnitt wird auf die verschiedenen Fehler eingegangen und die Auswirkungen der Störungen auf die Lösungen bei linearen Gleichungssystemen werden abgeschätzt.

Die vier Fehlerarten der Numerik sind:

- Modellfehler
- Datenfehler
- Verfahrensfehler
- Rechenfehler

1.3.1. Modellfehler

Es existiert kein mathematisches Modell eines realen Vorganges, das die Realität voll erfasst. Zu einem realen Vorgang gibt es meistens eine ganze Schar mehr oder weniger feiner mathematischer Modelle, bei denen eine verschiedene Anzahl an Aspekten dieses Vorganges erfasst werden.⁸ Will man also die Wirklichkeit erfassen, muss es zuerst zu Vereinfachungen der entsprechenden Situation kommen, die die Behandlung erst ermöglichen. Wie fein ein Modell eines realen Vorganges sein muss, hängt im Allgemeinen vom Anwendungszweck ab. Die dabei entstehenden Abweichungen zwischen Wirklichkeit und Modell nennt man **Modellfehler**.

Oft können Modellfehler durch Interpretation als Datenfehler abgeschätzt werden. Abschätzungen von Datenfehlereffekten sind für viele mathematische Probleme bekannt.

1.3.2. Datenfehler

Um ein Modell beschreiben zu können, müssen die benötigten Daten oft erst ermittelt werden. Hierbei lassen sich Fehler meist nicht vermeiden. Diese entstehen zum Beispiel durch Messungen, die nur von beschränkter Genauigkeit sind. Manchmal ist es auch notwendig, geschätzte Eingangsdaten zu verwenden, was sich ebenfalls auf die Ungenauigkeit auswirkt. Die Fehler, die bei den Eingangsdaten auftauchen, nennt man **Datenfehler**. Sie wirken sich auf die gesamte Berechnung der Lösung aus.

Die Auswirkungen, die durch Datenfehler entstehen, lassen sich im Allgemeinen ziemlich gut durch Betrachtung der **Kondition** des entsprechenden Problems abschätzen.

⁸ [vgl. FRA]

1.3.2.1. Kondition

Die Kondition liefert uns Aussagen darüber, welche Auswirkungen die Fehler in den Anfangsdaten auf das Ergebnis haben. Eine gute Kondition liegt vor, wenn kleine Fehler der Daten nur zu kleinen Störungen der Lösungen führen. Ein Problem ist gut konditioniert, wenn sich die Lösung etwa so stark ändert wie die Daten selbst.

Von schlechter Kondition spricht man, wenn sich die Lösung bei kleiner Änderung der Daten wesentlich verändert, das heißt, Datenfehler können in diesem Fall extreme Konsequenzen haben.

Man findet in der mathematischen Literatur zahlreiche Konditionsabschätzungen für verschiedene Problemklassen.

Es ist unumgänglich, sich immer Informationen über die Kondition des vorliegenden Problems zu holen, um die Auswirkungen der unvermeidbaren Fehler der Eingangsdaten auf die Genauigkeit der Lösung abschätzen zu können.

1.3.3. Verfahrensfehler

Unter einem Verfahrensfehler versteht man eine computerunabhängige Fehlerquelle, die eine exakte Lösung verhindert. Dieser tritt meistens dort auf, wo mathematische Methoden, die zu einer genauen Problemlösung führen würden, entweder zu zeitintensiv oder zu kostenintensiv sind. Es wird ein Näherungsverfahren herangezogen, das zur Lösung verschiedene Vereinfachungen annimmt. Genau diese Vereinfachungen sind ausschlaggebend, dass die dadurch erhaltenen Ergebnisse nicht der exakten Lösung entsprechen. Die Differenz von numerischer Näherung und exakter Lösung bezeichnet man als **Verfahrensfehler**.

Da einige numerische Näherungsverfahren unendlich viele Rechenschritte benötigen würden, um eine exakte Lösung zu liefern, werden solche Verfahren nach einer gewissen Anzahl an Rechenschritten abgebrochen.

Mittels Abschätzung von Verfahrensfehlern durch Fehlerschranken kann man wichtige Aussagen über Effizienz und Anwendbarkeit dieser Verfahren treffen.

1.3.4. Rechen- bzw. Rundungsfehler

Es besteht der Irrglaube, ein Computer könne alle Zahlen darstellen und fehlerfrei damit rechnen. Jedoch sind auch ihm Grenzen gesetzt, etwa durch die Zahlenlänge. Computer können nur eine endliche Zahlenlänge aufnehmen und müssen daher ab einer gewissen Stelle die restlichen Stellen runden oder abschneiden. Dadurch entstehen Fehler bei der Berechnung und natürlich auch im Endergebnis. Um Rundungsfehler systematisch untersuchen und abschätzen zu können, benötigt man einige Informationen über Computerarithmetik. Diese findet man im Anhang dieser Arbeit.

Um nun Rundungsfehleranalysen durchzuführen, muss noch unterschieden werden, ob vom Rechner „gerundet“ oder „abgeschnitten“ wird.

Da die Mantissenlänge beschränkt ist, kommt es bei der Darstellung von Zahlen, die nicht in M liegen, zu Schwierigkeiten. Die darzustellende Zahl muss nämlich möglichst gut durch eine Maschinenzahl angenähert werden.

Abschneiden⁹:

Es sei $x = m \cdot b^j$ mit $m = 0.a_1a_2\dots$ und zunächst $b = 10$ in normalisierter Gleitkommadarstellung. a_i steht für eine Ziffer der Mantisse der Zahl, also gilt: $0 \leq a_i \leq 9, \forall i = 1, 2, \dots$.

⁹ [vgl. HOF]

Nimmt man an, dass die Anzahl der Stellen für die Mantissendarstellung gleich $k \in \mathbb{N}$ ist, so wird beim Abschneiden die Mantisse m einfach nach der k -ten Dezimalstelle abgeschnitten. Daraus ergibt sich der gerundete Mantissenwert $\hat{m} = 0.a_1a_2 \dots a_k$. Daher kann man bis zur k -ten Dezimalstelle speichern, da die Null und der Dezimalpunkt nicht gespeichert werden müssen.

Runden¹⁰:

Beim Runden wird nicht wie beim Abschneiden nach der k -ten Stelle abgebrochen, sondern es wird die $(k + 1)$ -te Dezimalstelle betrachtet. Ist diese größer oder gleich 5, so wird der Wert der k -ten Stelle um 1 erhöht, andernfalls bleibt er unverändert. Das heißt nun für den gerundeten Mantissenwert \hat{m} :

$$\hat{m} = \begin{cases} 0.a_1a_2 \dots a_k & \text{für } a_{k+1} < 5 \\ 0.a_1a_2 \dots a_k + 10^{-k} & \text{für } a_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Beim Runden von Zahlen treten Fehler auf, die sich auf die weitere Berechnung auswirken. Damit Aussagen über diese Fehler gemacht werden können, muss zuerst einmal der Begriff „Fehler“ in diesem Zusammenhang definiert werden.

Es sei \hat{x} der Näherungswert einer Zahl x , so gilt:

$$\Delta x := \hat{x} - x \quad \dots \quad \text{absoluter Fehler von } \hat{x}$$

$$\varepsilon_x := \frac{\hat{x} - x}{x} \quad \dots \quad \text{relativer Fehler von } \hat{x}$$

Der Absolutbetrag von Δx und ε_x wird oft auch als absoluter bzw. relativer Fehler bezeichnet. Außerdem kann der relative Fehler auch in Prozent von x angegeben werden. Der relative Fehler wäre dann: $\varepsilon_x \cdot 100$

¹⁰[vgl. HOF]

Sei $x = m \cdot 10^j$ die auf k Stellen zu rundende Zahl in normalisierter Gleitkommadarstellung, so treten unter Betrachtung der beiden Rundungsverfahren hierbei folgende Fehler auf:

- **Abschneiden:**

$$|\Delta x| < 10^{j-k}$$

$$|\varepsilon_x| = \left| \frac{\hat{x} - x}{x} \right| = \frac{|\Delta x|}{|x|} < \frac{10^{j-k}}{10^{j-1}} = 10^{-k+1}$$

Bei der normalisierten Gleitkommadarstellung gilt nämlich: $|x| > 10^{j-1}$

- **Runden:**

$$|\Delta x| \leq 5 \cdot 10^{j-k-1}$$

$$|\varepsilon_x| = \left| \frac{\hat{x} - x}{x} \right| = \frac{|\Delta x|}{|x|} \leq \frac{5 \cdot 10^{j-k-1}}{10^{j-1}} = 5 \cdot 10^{-k}$$

Bei dieser Überlegung wurde der größtmögliche Rundungsfehler ermittelt. Das heißt, der relative Fehler ε_x kann höchstens $5 \cdot 10^{-k}$ sein.

Die hier besprochenen Rundungsverfahren und deren Fehler wurden nur für das Dezimalsystem besprochen. Man kann diese aber natürlich auch analog auf andere Basen übertragen. Dazu überlegt man sich folgendes Prinzip: Die zu rundende Zahl x lässt sich eindeutig in ein Intervall $[x_1, x_2]$ zweier benachbarter Maschinenzahlen eingrenzen. Beim Abschneiden der Zahl x wird dann diejenige Maschinenzahl genommen, die näher bei Null liegt. Beim Runden hingegen wird diejenige Maschinenzahl gewählt, die näher bei x liegt.

Eine genaue Beschreibung von Rundungsverfahren und deren Fehler für allgemeine Zahlensysteme findet man bei Überhuber¹¹.

Aufgrund der auftretenden Rundungsfehler bei der Zahlendarstellung gelten Rechengesetze wie Assoziativgesetz, Distributivgesetz, usw. beim Rechnen am Computer im Allgemeinen nicht. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann es bei der Addition zweier etwa gleich großer mit Fehler behafteter Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen zur **Auslöschung** kommen.

Beispiel¹²:

Es sei $x = 0.4962$

$y = 39.84$

$z = -39.77$

Gesucht ist der Wert für $x + y + z$.

Bei genauer Berechnung müsste das Ergebnis 0.5662 sein.

Ist die Mantissenlänge mit $m = 4$ vorgegeben, so sehen die Zahlen x, y, z in normalisierter Gleitkommadarstellung folgendermaßen aus:

$$x = 0.4962 \cdot 10^0$$

$$y = 0.3984 \cdot 10^2$$

$$z = -0.3977 \cdot 10^2$$

Da sich diese Zahlen noch exakt darstellen lassen, kann man leicht erkennen, dass es sich hierbei um Maschinenzahlen handelt.

¹¹ [vgl. UEB]

¹² [vgl. HOF]

Bei der folgenden Addition zeigen sich allerdings schon Probleme, da die Exponenten von x, y und z gleich sein müssen. Zur Berechnung des gesuchten Wertes $x + y + z$ stehen nun zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

1) Um $x + y$ zu berechnen, muss x zu \hat{x} gerundet werden.

$$\Rightarrow \hat{x} = 0.0050 \cdot 10^2$$

$$\Rightarrow \hat{x} + y = 0.4034 \cdot 10^2$$

$$\Rightarrow (\hat{x} + y) + z = 0.0057 \cdot 10^2 = 0.5700 \cdot 10^0$$

2) $y + z = 0.0007 \cdot 10^2 = 0.7 \cdot 10^{-1}$

Nun kann der genaue Wert von x addiert werden.

$$\Rightarrow x + (y + z) = 0.0700 \cdot 10^0 + 0.4962 \cdot 10^0 = 0.5662 \cdot 10^0$$

Fehlerfortpflanzung

In diesem Abschnitt wird sich zeigen, dass es überaus wichtig ist, über die Auswirkungen von Fehlern im Verlauf einer Rechnung informiert zu sein. Die Fehlerfortpflanzung spielt innerhalb einer Berechnung eine wichtige Rolle. Bereits die Ausgangsdaten können mit Fehlern behaftet sein. Daran kann man prinzipiell nichts ändern, aber man kann deren Konsequenzen untersuchen. Im Folgenden zeigt sich, wie sich Fehler in den Anfangsdaten auf die vier Grundrechnungsarten auswirken.

Es seien x und y zwei Zahlen und \hat{x} bzw. \hat{y} deren Näherungswerte. Dann gilt¹³:

- **Addition:**

$$\Delta(x + y) = (\hat{x} + \hat{y}) - (x + y) = (\hat{x} - x) + (\hat{y} - y) = \Delta x + \Delta y$$

$$\varepsilon_{x+y} = \frac{\Delta(x + y)}{x + y} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y} = \frac{(\Delta x) \cdot x}{x \cdot (x + y)} + \frac{(\Delta y) \cdot y}{y \cdot (x + y)} = \varepsilon_x \cdot \frac{x}{x + y} + \varepsilon_y \cdot \frac{y}{x + y}$$

¹³ [vgl. HOF]

- **Subtraktion:**

$$\Delta(x - y) = (\hat{x} - \hat{y}) - (x - y) = (\hat{x} - x) - (\hat{y} - y) = \Delta x - \Delta y$$

$$\varepsilon_{x-y} = \frac{\Delta(x - y)}{x - y} = \frac{\Delta x - \Delta y}{x - y} = \frac{(\Delta x) \cdot x}{x \cdot (x - y)} - \frac{(\Delta y) \cdot y}{y \cdot (x - y)} = \varepsilon_x \cdot \frac{x}{x - y} + \varepsilon_y \cdot \frac{y}{x - y}$$

- **Multiplikation:**

$$\hat{x} = x \cdot (1 + \varepsilon_x)$$

$$\hat{y} = y \cdot (1 + \varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \hat{x} \cdot \hat{y} = x \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot y \cdot (1 + \varepsilon_y) = x \cdot y \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{x \cdot y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

- **Division:**

$$\hat{x} = x \cdot (1 + \varepsilon_x)$$

$$\hat{y} = y \cdot (1 + \varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \frac{x \cdot (1 + \varepsilon_x)}{y \cdot (1 + \varepsilon_y)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{(1 + \varepsilon_x)}{(1 + \varepsilon_y)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_y} = \frac{x}{y} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_x}{\frac{x}{y}} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_y}$$

2. Grundlegende Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme im Schulunterricht

In diesem Kapitel soll eingangs geklärt werden, in welcher Schulstufe lineare Gleichungen und Gleichungssysteme eingeführt werden und in welcher Art und Weise sie behandelt werden. Außerdem werden direkte Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme für den Regelunterricht vorgestellt.

Ein Verfahren heißt dann **direkt**, wenn es nach fehlerfreier Rechnung und endlich vielen Operationen die exakte Lösung liefert¹⁴.

Im Gegensatz dazu stehen die indirekten Verfahren, die später behandelt werden. Hier werden zuerst einmal nur die elementaren Lösungsverfahren im Rahmen des Regelunterrichts dargestellt. Außerdem wird in diesem Kapitel auch die geometrische Interpretation von linearen Gleichungssystemen besprochen.

2.1. Lineare Gleichungssysteme im Lehrplan

Im Lehrplan¹⁵ für die 1. Klasse AHS ist unter Punkt 1.2. schon das Arbeiten mit Variablen angesprochen:

Die Schüler¹⁶ sollen mit Variablen allgemeine Sachverhalte beschreiben können, zum Beispiel gleichartige Rechenabläufe, die sich nur durch unterschiedliche Zahlen unterscheiden, oder allgemeine Beziehungen zwischen Größen darstellen. Sie sollen insbesondere Gleichungen aufstellen und Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können. Außerdem sollen sie Formeln anwenden und interpretieren können.

¹⁴ [vgl. HUC]

¹⁵ [LP2]

¹⁶ Die Bezeichnung „Schüler“ umfasst im Folgenden beide Geschlechter, also Schüler und Schülerinnen.

Der Lehrplan für die 2. Klasse AHS sieht ebenso vor, dass die Schüler mit Variablen allgemeine Sachverhalte beschreiben können sollen. Zusätzlich sollen unter der Verwendung von Umkehroperationen einfache lineare Gleichungen in einer Variablen gelöst werden.

In der 3. Klasse AHS werden nun die Aufgaben variiert und die Schüler sollen lineare Gleichungen in einer Variablen mit Sicherheit lösen können.

In der 4. Klasse AHS sollen die Schüler noch mehr Sicherheit im Umgang mit Variablen und Gleichungen gewinnen. Außerdem sollen sie lineare Gleichungen in zwei Variablen graphisch darstellen und Lösungen ablesen können. Zusätzlich sollen sie Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen nutzen können¹⁷. Im Lehrplan der 4. Klasse AHS wird zum ersten Mal der Begriff „Gleichungssystem“ verwendet.

Im Lehrplan der 5. Klasse AHS gibt es einen eigenen Punkt mit dem Titel „Gleichungen und Gleichungssysteme“. Unter diesem Abschnitt werden folgende Themen aufgezählt:

- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation
- Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme¹⁸

In der 6. Klasse AHS erhöht sich nun der Schwierigkeitsgrad der Gleichungssysteme. Die Schüler sollen nun drei Gleichungen in drei Unbekannten lösen. Außerdem sollen sie Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen kennenlernen.

¹⁷ [LP2]
¹⁸ ebd.

Anhand des häufigen Auftretens des Themas Gleichungen von der ersten bis zur sechsten Klasse ist leicht ersichtlich, welche wichtige Rolle Gleichungen im Mathematikunterricht einnehmen. Ohne Aneignung der wichtigsten Lösungsverfahren wären auch weiterführende Themen der Oberstufe wie Matrizenrechnung oder lineare Optimierung nicht bewältigbar.

2.2. Lösungsverfahren für lineare Gleichungen im \mathbb{R}^2

Einen Ausdruck der Art $a_1x_1 + a_2x_2 = a_0$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ nennt man lineare Gleichung mit zwei Variablen x_1 und x_2 . Ist $a_0 = 0$, so heißt die Gleichung homogen, andernfalls inhomogen.

Im Folgenden werden das **Komparations-**, das **Substitutions-** und das **Eliminationsverfahren** sowie die **Cramersche Regel** besprochen. Für kleine lineare Gleichungssysteme wie hier im \mathbb{R}^2 reichen diese völlig aus.

2.2.1. Komparationsverfahren (Gleichsetzungsverfahren)

Dieses Verfahren bietet sich insbesondere als Ergänzung des graphischen Verfahrens an, welches im Allgemeinen mit den Hauptformen $x_2 = kx_1 + d$ operiert¹⁹.

¹⁹ [vgl. RE1]

Rechenvorgang:

Es seien zwei lineare Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

$$(2) \quad a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

wobei $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \neq 0$

1. Schritt:

Zuerst wird in beiden Gleichungen x_2 ausgedrückt.

$$(1) \quad x_2 = -\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{c_1}{b_1}$$

$$(2) \quad x_2 = -\frac{a_2}{b_2}x_1 + \frac{c_2}{b_2}$$

2. Schritt:

Da nun die linken Seiten der beiden Gleichungen übereinstimmen, müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Daher gilt:

$$-\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{c_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}x_1 + \frac{c_2}{b_2}$$

3. Schritt:

Das Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen wurde nun auf eine Gleichung in einer Variablen reduziert. Aus dieser Gleichung kann nun leicht x_1 berechnet werden.

4. Schritt:

x_1 wird nun in eine der beiden Gleichungen eingesetzt, wodurch man x_2 erhält.

5. Schritt:

Zur Überprüfung des Ergebnisses ist es immer sinnvoll, eine Probe zu machen.

Hierbei werden x_1 und x_2 in beide Gleichungen eingesetzt und kontrolliert, ob die Gleichungen zu einer wahren Aussage werden.

Beispiel:

Löse mittels Gleichsetzungsverfahren!

$$(1) \quad 9x_1 - x_2 = 15$$

$$(2) \quad 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$(1) \quad x_2 = 9x_1 - 15$$

$$(2) \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 6$$

$$\Rightarrow 9x_1 - 15 = -\frac{3}{2}x_1 + 6$$

$$\Rightarrow x_1 = 2$$

x_1 wird in (1) eingesetzt:

$$x_2 = 9 \cdot 2 - 15$$

$$\Rightarrow x_2 = 3$$

Probe:

$$(1) \quad 9 \cdot 2 - 3 = 15 \quad \text{w. A.}$$

$$(2) \quad 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12 \quad \text{w. A.}$$

$$\Rightarrow L = \{(2|3)\}$$

In analoger Weise kann man auch x_1 aus beiden Gleichungen ausdrücken und gleichsetzen. Hierbei muss nur beachtet werden, dass $a_1, a_2 \neq 0$ gelten muss.

2.2.2. Substitutionsverfahren (Einsetzungsverfahren)

Die Idee hinter diesem Verfahren ist folgende: Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diese dann in die andere Gleichung ein. Dadurch eliminiert man eine Variable und erhält wieder eine Gleichung in einer Variablen.

Rechenvorgang:

Es seien zwei Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

$$(2) \quad a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

wobei $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und b_1 oder $b_2 \neq 0$

1. Schritt:

Bei diesem Verfahren muss nur bei einer der beiden Gleichungen x_2 ausgedrückt werden.

$$(1) \quad a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

$$(2) \quad x_2 = -\frac{a_2}{b_2}x_1 + \frac{c_2}{b_2}$$

2. Schritt:

Der erhaltene Ausdruck für x_2 wird nun in die andere Gleichung eingesetzt.

$$a_1x_1 + b_1\left(-\frac{a_2}{b_2}x_1 + \frac{c_2}{b_2}\right) = c_1$$

3. Schritt:

So wurde wieder ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen auf eine Gleichung in einer Variablen reduziert. Aus der erhaltenen Gleichung kann nun leicht wieder x_1 ermittelt werden.

4. Schritt:

Nun wird x_1 entweder in (1) oder (2) eingesetzt und daraus x_2 berechnet.

5. Schritt:

Am Schluss sollte wieder eine Probe durchgeführt werden, da sich leicht Flüchtigkeitsfehler einschleichen können. Hierzu werden wieder x_1 und x_2 in beide Gleichungen eingesetzt und überprüft, ob es sich um wahre Aussagen handelt.

In analoger Weise kann auch die erste Gleichung umgeformt werden, und es ist natürlich auch möglich, x_1 durch x_2 auszudrücken. Dabei ist aber zu beachten, dass gilt: a_1 oder $a_2 \neq 0$.

Beispiel:

Löse mittels Substitutionsverfahren!

$$(1) \quad 5x_1 + 3x_2 = 8$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$(1) \quad 5x_1 + 3x_2 = 8$$

$$(2) \quad x_1 = 3 - 2x_2$$

x_1 wird in (1) eingesetzt:

$$\Rightarrow 5(3 - 2x_2) + 3x_2 = 8$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

x_2 wird nun zum Beispiel in (2) eingesetzt:

$$x_1 = 3 - 2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Probe:

$$(1) \quad 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 \quad \text{w. A.}$$

$$(2) \quad 1 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \text{w. A.}$$

$$\Rightarrow L = \{(1|1)\}$$

2.2.3. Eliminationsverfahren (Additionsverfahren)

Bei diesem Lösungsverfahren werden die Gleichungen mit geeigneten Zahlen multipliziert und anschließend addiert, sodass eine Variable wegfällt. Das Eliminationsverfahren wird zu einem späteren Zeitpunkt noch genauer besprochen, da es sich bei komplexeren Gleichungssystemen in mehreren Variablen als Lösungsverfahren anbietet.

Rechenvorgang:

Es seien zwei Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

$$(2) \quad a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

wobei $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

1. Schritt:

Im ersten Schritt werden die Gleichungen mit geeigneten Zahlen multipliziert.

$$(1) \quad a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \quad / \cdot a_2$$

$$(2) \quad a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \quad / \cdot (-a_1)$$

2. Schritt:

Nun werden die erhaltenen Gleichungen addiert, sodass x_1 wegfällt.

$$\begin{array}{r} (1)' \quad a_1 a_2 x_1 + a_2 b_1 x_2 = a_2 c_1 \\ (2)' \quad -a_1 a_2 x_1 - a_1 b_2 x_2 = -a_1 c_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} (1)' \\ (2)' \end{array}} \right] +$$

$$a_2 b_1 x_2 - a_1 b_2 x_2 = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

3. Schritt:

Nun wurde das Gleichungssystem wieder auf eine Gleichung in einer Variablen reduziert, wodurch x_2 leicht zu berechnen ist.

4. Schritt:

x_2 wird nun in (1) oder (2) eingesetzt, um x_1 ermitteln zu können.

5. Schritt:

Um die Richtigkeit der Ergebnisse zu überprüfen, wird wieder die Probe gemacht, indem x_1 und x_2 in die Gleichungen (1) und (2) eingesetzt werden, um zu sehen, ob wahre Aussagen entstehen.

In analoger Weise kann auch x_2 durch Multiplikation und anschließender Addition eliminiert werden. In diesem Fall muss aber gelten: $(b_1, b_2) \neq (0,0)$.

Beispiel:

Löse mittels Eliminationsverfahren!

$$(1) \quad 3x_1 + 2x_2 = 5$$

$$(2) \quad 4x_1 - 5x_2 = -1$$

$$(1) \quad 3x_1 + 2x_2 = 5 \quad / \cdot 4$$

$$(2) \quad 4x_1 - 5x_2 = -1 \quad / \cdot (-3)$$

$$\begin{array}{r} (1)' \quad 12x_1 + 8x_2 = 20 \\ (2)' \quad -12x_1 + 15x_2 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} (1)' \\ (2)' \end{array}} \right] +$$

$$23x_2 = 23$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

 x_2 wird nun zum Beispiel in (1) eingesetzt:

$$3x_1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

Probe:

$$(1) \quad 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \quad \text{w. A.}$$

$$(2) \quad 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -1 \quad \text{w. A.}$$

$$\Rightarrow L = \{(1|1)\}$$

2.2.4. Cramersche Regel (Determinantenmethode)

Das Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen ist zwar für alle Schüler Pflichtstoff, die Matrizenrechnung ist hingegen nur für das Realgymnasium vorgesehen. Da die Cramersche Regel ohnehin nur für zwei- und dreidimensionale Gleichungssysteme geeignet ist, bietet sie sich eher für das Wahlpflichtfach an. Bei größeren Gleichungssystemen wäre die Berechnung mit großem Aufwand verbunden und daher in der Praxis ineffizient. Vollständigkeitshalber soll sie dennoch hier angeführt werden.

Im ersten Kapitel wurde schon formuliert, was eine Matrix und die zugehörige Determinante sind. Genauso wurde bereits über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen gesprochen. Hier kann man nun einen weiteren Zusammenhang zwischen der Determinante einer Matrix A und der Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax = b$ erkennen.

Satz²⁰:

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$, wobei A eine quadratische Matrix ist, ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

Bevor man die Cramersche Regel angeben kann, ist es nötig, einen weiteren Begriff anzuführen. $\det(A_i)$ bezeichnet nun im Folgenden jene modifizierte Matrix, deren i -te Spalte durch die rechte Seite ersetzt wird.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
i-te Spalte

²⁰ [vgl. ACK]

Für den Lösungsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gilt nun $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \forall i = 1, \dots, n$ und $\det(A) \neq 0$.

Falls nun gilt, $\det(A) = 0$, ist das lineare Gleichungssystem nicht mit Hilfe der Cramerschen Regel lösbar, da sonst der Nenner gleich 0 wäre.

Für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen soll nun mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung ermittelt werden.

Folgendes Gleichungssystem sei gegeben:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Mit Hilfe des Eliminationsverfahrens kann dieses System gelöst werden. Dadurch erhält man:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Betrachtet man nun diese Brüche genauer, kann man erkennen, dass es sich beim Nenner jeweils um die Determinante $\det(A)$ des Gleichungssystems handelt. Schaut man sich den Zähler näher an, stellt sich heraus, dass es sich hierbei um die Determinante $\det(A_i)$ handelt.

Beispiel²¹:

Löse das Beispiel mittels Cramerscher Regel!

(1) $x_1 + 2x_2 = 17$

(2) $5x_1 - x_2 = -3$

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 = -11 \neq 0 \Rightarrow$ Die Cramersche Regel kann angewendet werden.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -17 + 6 = -11$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 85 = -88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-11}{-11} = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-88}{-11} = 8$$

Probe:

(1) $1 + 2 \cdot 8 = 17$ w. A.

(2) $5 \cdot 1 - 8 = -3$ w. A.

$$\Rightarrow L = \{(1|8)\}$$

²¹ [vgl. SCH]

An diesem Beispiel kann man leicht erkennen, dass die Cramersche Regel für 2×2 -Matrizen mit $\det(A) \neq 0$ eine rasche Lösungsmethode ist. Für größere Matrizen wird der Aufwand jedoch sehr groß. Bei einem linearen Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen müssten schon $n + 1$ Determinanten berechnet werden, was mit großem rechnerischen Aufwand verbunden ist. Daraus ist leicht ersichtlich, dass die Cramersche Regel in der Praxis nicht sehr effizient ist.

2.2.5. Geometrische Deutung von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen

Beispiel²²:

Löse das folgende Gleichungssystem graphisch und rechnerisch!

$$(1) \quad 2x_1 + x_2 = -4$$

$$(2) \quad -x_1 + 3x_2 = 9$$

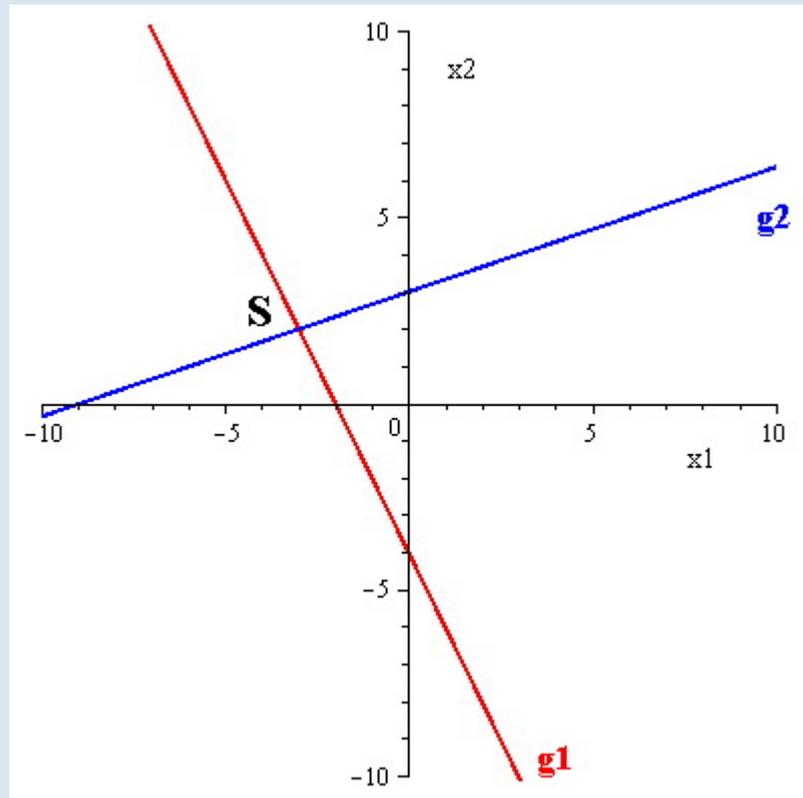
Beide Gleichungen stellen jeweils eine Gerade in einer Ebene dar. Jedem Punkt $(x_1|x_2)$ auf g_1 entspricht eine Lösung der ersten Gleichung und umgekehrt. Jedem Punkt $(x_1|x_2)$ auf g_2 entspricht eine Lösung der zweiten Gleichung und umgekehrt. Der Schnittpunkt S entspricht nun einer gemeinsamen Lösung der ersten und zweiten Gleichung

²² [vgl. BU1]

Graphische Lösung:

(1) $x_2 = -2x_1 - 4$

(2) $x_2 = \frac{1}{3}x_1 + 3$



Rechnerische Lösung:

Mittels des Eliminationsverfahrens können x_1 und x_2 leicht ermittelt werden.

$\Rightarrow x_1 = -3$

$x_2 = 2$

Dieses Beispiel zeigt für $n = 2$ die graphische Lösung eines Gleichungssystems. Es ist - wie in Kapitel 1 bereits erwähnt - aber nicht immer der Fall, dass ein Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt. Deshalb werden hier einige unterschiedliche Beispiele zur Verdeutlichung angeführt.

Beispiel 1²³:

Löse dieses Gleichungssystem graphisch und rechnerisch!

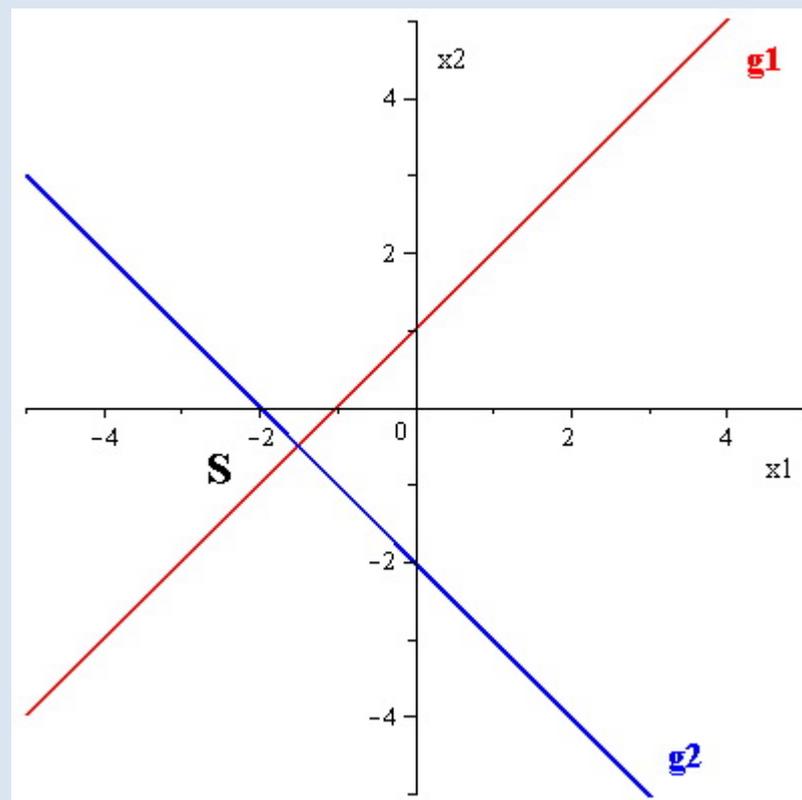
(1) $-x_1 + x_2 = 1$

(2) $-x_1 - x_2 = 2$

Graphische Lösung:

(1) $x_2 = x_1 + 1$

(2) $x_2 = -x_1 - 2$



²³ [vgl. SCH]

Rechnerische Lösung:

Mittels des Eliminationsverfahrens ist das Gleichungssystem leicht zu lösen.

$$\begin{array}{r} (1) \quad -x_1 + x_2 = 1 \\ (2) \quad -x_1 - x_2 = 2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}} \right] +$$

$$-2x_1 = 3$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Wie aus der Zeichnung und aus der Rechnung ersichtlich ist, haben diese beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt. Das heißt, das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Die Lösungsmenge besteht aus genau einem Punkt.

Die eindeutige Lösbarkeit des Systems hätte man auch an der Determinante der Koeffizientenmatrix A erkennen können. Denn es gilt: $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 2²⁴:

Löse dieses Gleichungssystem graphisch und rechnerisch!

$$(1) \quad -x_1 + x_2 = 1$$

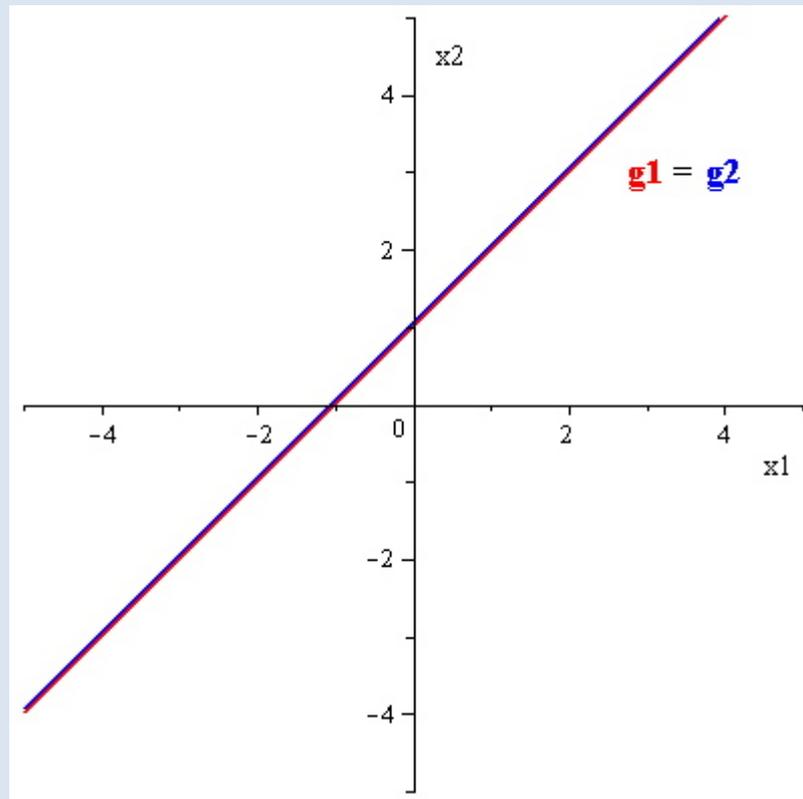
$$(2) \quad -2x_1 + 2x_2 = 2$$

Graphische Lösung:

$$(1) \quad x_2 = x_1 + 1$$

$$(2) \quad x_2 = x_1 + 1$$

²⁴ [vgl. SCH]



Rechnerische Lösung:

Mittels des Eliminationsverfahrens wird das Gleichungssystem umgeformt.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & -x_1 + x_2 = 1 & / \cdot (-2) \\
 (2) & -2x_1 + 2x_2 = 2 & \\
 \hline
 & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 &
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

An der „Lösungsgleichung“ $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ kann man erkennen, dass die beiden Geraden unendlich viele gemeinsame Schnittpunkte haben. Sie fallen zusammen, was bedeutet, dass die beiden Geraden ident sind. Das Gleichungssystem ist linear abhängig. Die Determinante $\det(A)$ der Koeffizientenmatrix A ist in diesem Fall gleich 0, das heißt, das System ist nicht eindeutig lösbar.

Beispiel 3²⁵:

Löse dieses Gleichungssystem graphisch und rechnerisch!

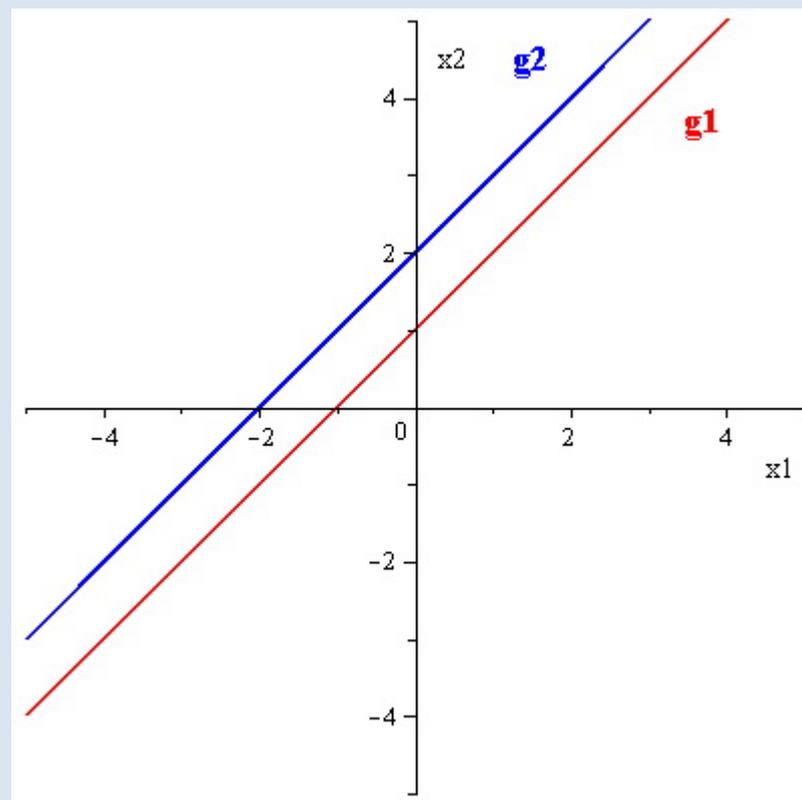
(1) $-x_1 + x_2 = 1$

(2) $-x_1 + x_2 = 2$

Graphische Lösung:

(1) $x_2 = x_1 + 1$

(2) $x_2 = x_1 + 2$



²⁵ [vgl. SCH]

2.3. Lösungsverfahren für lineare Gleichungen im \mathbb{R}^3

Im vorigen Abschnitt wurden einige Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen vorgestellt. Außerdem wurde die geometrische Bedeutung linearer Gleichungssysteme im \mathbb{R}^2 besprochen. Dieser Teil beschäftigt sich nun mit den unterschiedlichen Methoden zur Lösung von linearen Gleichungen im \mathbb{R}^3 .

2.3.1. Eliminationsverfahren nach Gauß

Das Eliminationsverfahren ist wahrscheinlich das wichtigste Verfahren, um ein Gleichungssystem mit n Variablen zu lösen. Es wird hier nur kurz angerissen, da es später in einem eigenen Kapitel erläutert wird.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren beruht im Wesentlichen auf der Anwendung der folgenden drei **elementaren Umformungen**, die die Lösung nicht verändern:

- Vertauschung einer Zeile mit einer anderen
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$
- Addition einer Gleichung mit einer anderen

An dieser Stelle wird angenommen, dass die Matrix vollen Rang besitzt und das System daher eindeutig lösbar ist.

Für drei Gleichungen in drei Variablen sieht das Gaußsche Eliminationsverfahren nun folgendermaßen aus:

Gegeben sei ein Gleichungssystem der Form:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$(3) \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

1. Schritt:

Sofern $a_{11} \neq 0$ ist, eliminiert man x_1 aus allen nachfolgenden Gleichungen und erhält daraus ein Gleichungssystem der Form:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$(2)' \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$

$$(3)' \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3$$

2. Schritt:

Sofern $a'_{22} \neq 0$ ist, eliminiert man x_2 aus der nachfolgenden Gleichung und erhält:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$(2)' \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$

$$(3)'' \quad a''_{33}x_3 = b''_3$$

3. Schritt:

Sofern $a''_{33} \neq 0$ ist, ist dies ein sogenanntes **gestaffeltes** System. Man kann daher aus der Gleichung (3)'' durch einfaches Umformen x_3 berechnen. Danach setzt man x_3 in die Gleichung (2)' ein und bekommt somit das Ergebnis für x_2 . Schlussendlich setzt man x_2 und x_3 in die Gleichung (1) ein und berechnet dadurch die Lösung für x_1 . Man erhält also die Lösung $\{x_1|x_2|x_3\}$.

Beispiel²⁶:

Löse mittels Eliminationsverfahren nach Gauß!

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 & \\
 (2) & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 & \\
 (3) & -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ \\ \end{array} \right] + \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] +$$

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 & \\
 (2)' & -x_1 - 14x_2 = -15 & \\
 (3)'' & x_1 + 9x_2 = 10 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] +$$

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 & \\
 (2)' & -x_1 - 14x_2 = -15 & \\
 (3)'' & -5x_2 = -5 & \\
 \hline
 \end{array}$$

aus (3)'' folgt $x_2 = 1$

Nun wird x_2 in (2)' eingesetzt und x_1 berechnet:

$$\begin{aligned}
 -x_1 - 14 \cdot 1 &= -15 \\
 \Rightarrow x_1 &= 1
 \end{aligned}$$

Anschließend werden x_1 und x_2 in die Gleichung (1) eingesetzt, um daraus x_3 berechnen zu können.

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + x_3 &= 9 \\
 \Rightarrow x_3 &= 1
 \end{aligned}$$

Zum Schluss wird noch die Probe gemacht. Das Ergebnis lautet:

$$L = \{(1|1|1)\}$$

²⁶ [vgl. SCH]

2.3.2. Cramersche Regel

Die Cramersche Regel ist nicht auf Gleichungssysteme in zwei Variablen beschränkt.

Auch im \mathbb{R}^n kann sie zur Berechnung der Lösung verwendet werden.

In Analogie zu Gleichungssystemen in zwei Variablen gilt:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Die Bedeutung der Symbole hat sich nicht geändert. Wie eine dreizeilige Determinante gelöst wird, wurde bereits in Kapitel 1 angeführt. Daher soll das folgende Beispiel gleich den Rechengang zeigen.

Beispiel²⁷:

Löse mittels Cramerscher Regel!

(1) $7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$

(2) $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$

(3) $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$

$$Ax = b$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

²⁷ [vgl. SCH]

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-(-5) \cdot (-2) \cdot (-4) - 4 \cdot 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 3 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$

⇒ Die Cramersche Regel kann angewendet werden.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -12 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -72 + 12 - 25 - 10 + 48 + 45 = -2$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 7 & -12 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -105 + 192 + 5 - 100 - 28 + 36 = 0$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14 - 60 + 12 + 96 - 35 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2}{2} = 1$$

Probe:

$$(1) \quad 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad \text{w. A.}$$

$$(2) \quad -(-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad \text{w. A.}$$

$$(3) \quad -4 \cdot (-1) + 0 - 3 \cdot (1) = 1 \quad \text{w. A.}$$

$$\Rightarrow L = \{ \langle -1 | 0 | 1 \rangle \}$$

2.3.3. Geometrische Deutung von linearen Gleichungssystemen in drei Variablen

Im dreidimensionalen Raum stellt eine Gleichung eine Ebene dar. Daher gibt es auch hier – so wie im \mathbb{R}^2 – unterschiedliche Möglichkeiten, wie die Ebenen zueinander liegen können. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Fälle besprochen werden.

Der häufigste generisch vorkommende Fall soll durch das folgende Beispiel dargestellt werden:

Beispiel:

Bestimme die Lösungsmenge der drei Ebenen!

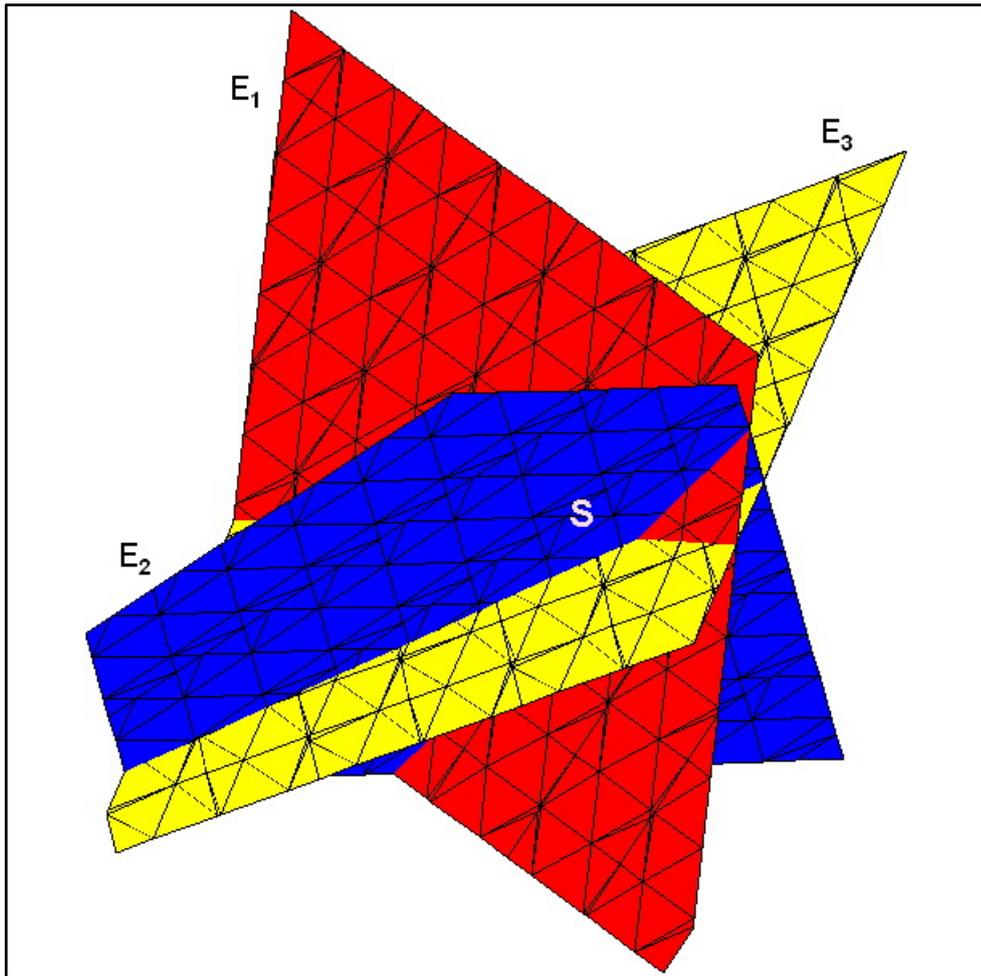
$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 & \\
 (2) & 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 & \left. \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-1) \end{array} \right\} + \\
 (3) & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 & \left. \begin{array}{l} \\ \cdot (-1) \end{array} \right\} +
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 & \\
 (2)' & 7x_1 - x_3 = 13 & \left. \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot (-2) \end{array} \right\} + \\
 (3)' & 2x_1 - 2x_3 = 2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 & \Rightarrow x_2 = 3 \\
 (2)' & 7x_1 - x_3 = 13 & \Rightarrow x_3 = 1 \\
 (3)'' & -12x_1 = -24 & \Rightarrow x_1 = 2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \{(2|3|1)\}$$

In diesem Beispiel ergibt der Schnitt der drei Ebenen einen Punkt. Je zwei Ebenen schneiden einander in einer Geraden, welche die dritte Ebene in dem Schnittpunkt durchstößt.



Beispiel:

Ermittle die Lösungsmenge des Gleichungssystems!

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 & / \cdot (-3) \\
 (2) & 6x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 2 & \\
 (3) & -2x_1 - 4x_2 + x_3 = 13 & \\
 \hline
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \left. \right] + \\ \left. \right] + \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\
 (2)' & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -22 \\
 (3)' & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 21
 \end{array}$$

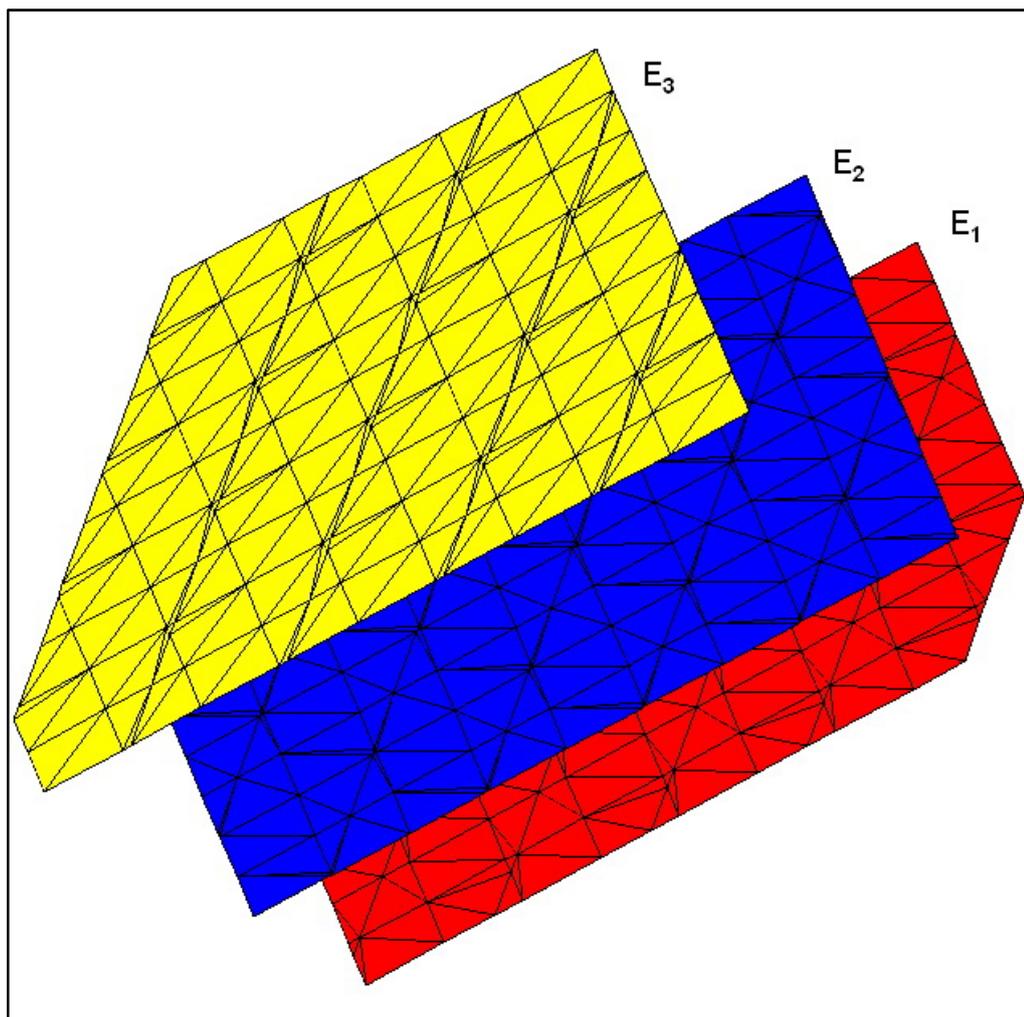
$\Rightarrow L = \{ \}$, also die leere Menge

Dass dieses System nicht lösbar ist, kann man schon daran erkennen, dass der Rang der Matrix A nicht gleich dem Rang der erweiterten Matrix $(A|b)$ ist. Denn es gilt:

$$rg(A) = 1 \neq 2 = rg(A|b)$$

Da die homogenen Gleichungen von (1), (2) und (3) zueinander proportional sind, nicht jedoch die inhomogenen Gleichungen, sind die zugehörigen Ebenen von (1), (2) und (3) zueinander parallel.

Die Gesamtlösung des linearen Gleichungssystems ist leer. Die drei Ebenen liegen parallel zueinander.



Das Gleichungssystem wird auf zwei Gleichungen in drei Variablen reduziert, weil die Gleichungen (2)' und (3)' ident sind. Der Schnitt der zugehörigen Ebenen besteht nun aus einer gemeinsamen Schnittgeraden.

Es liegt nach dem Kürzen folgendes Gleichungssystem vor:

$$(1) \quad 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$$

$$(2) \quad x_2 - x_3 = -1$$

Nun wird x_3 als Parameter t gesetzt. Das heißt, es gilt: $x_3 = t$.

$$\Rightarrow x_2 = -1 + t$$

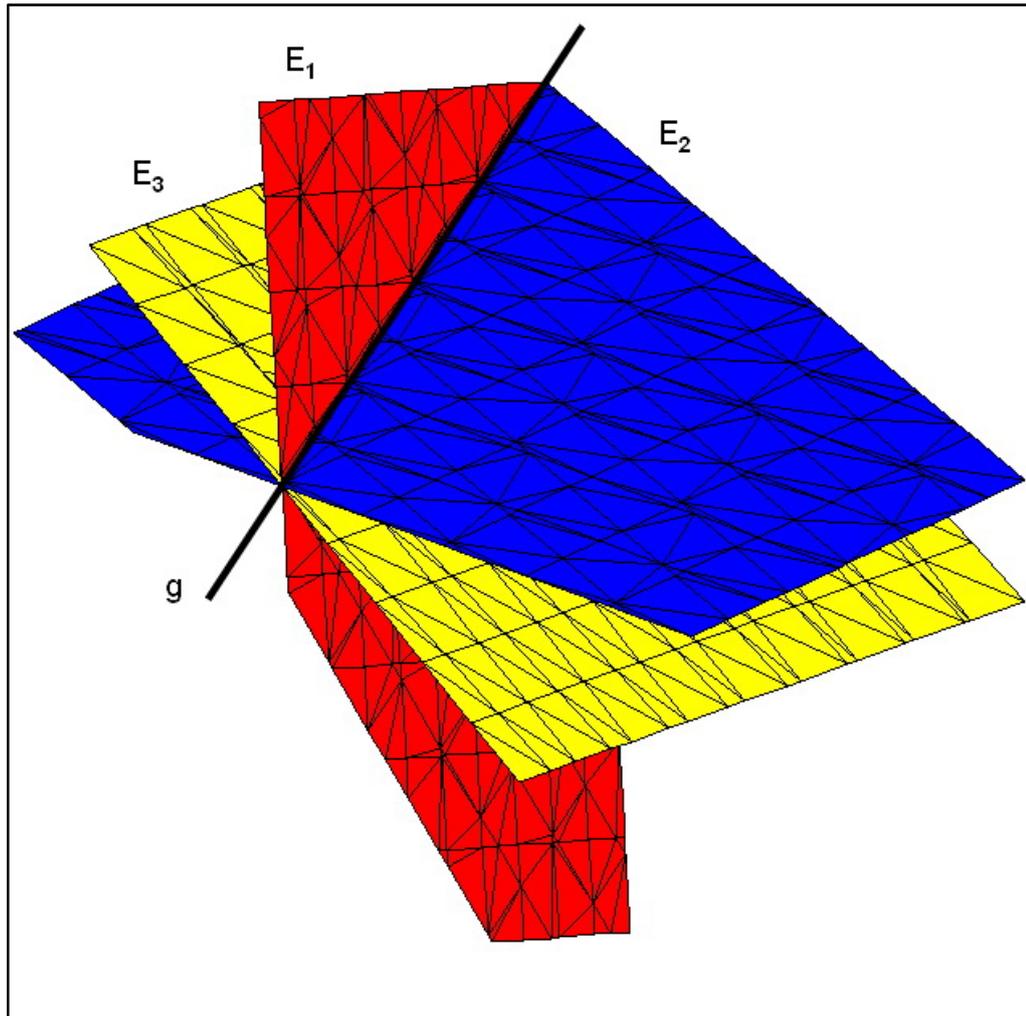
$$\Rightarrow x_1 = 3 - \frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \langle x_1 | x_2 | x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw. nach Erweiterung des Richtungsvektors

$$L = \left\{ \langle x_1 | x_2 | x_3 \rangle \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgrund der linearen Abhängigkeit der Gleichungen (1), (2) und (3), entsteht durch den Schnitt der drei Ebenen eine Schnittgerade. Graphisch dargestellt sieht das folgendermaßen aus:



In diesem Kapitel wurden die wichtigsten Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 besprochen und deren Bedeutung auch graphisch dargestellt. Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist das am häufigsten verwendete Verfahren und wird daher im nächsten Kapitel genauer und für beliebige Koeffizientenmatrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diskutiert.

3. Das Eliminationsverfahren nach Gauß

Das Eliminationsverfahren nach Gauß ist das wahrscheinlich bekannteste Verfahren, um lineare Gleichungssysteme numerisch zu lösen. Zwar wird dieses Verfahren im Lehrplan nicht immer explizit unter dem Namen „Eliminationsverfahren nach Gauß“ erwähnt, dennoch findet man es im Mathematikunterricht in allgemeiner Form. Es wird meist als Additionsverfahren oder auch Eliminationsverfahren im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 angewandt. Das Eliminationsverfahren nach Gauß für den \mathbb{R}^n empfiehlt sich als Thema im Wahlpflichtfachunterricht, da die mathematischen Grundlagen im Regelunterricht behandelt werden und die Schüler so ihre Kenntnisse vertiefen können.

Im Folgenden soll das Eliminationsverfahren ausführlicher besprochen werden. Wir nehmen an dieser Stelle an, dass die Matrix A vollen Rang hat und das System daher eindeutig lösbar ist.

Man betrachtet nun das folgende lineare quadratische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Man kann natürlich auch die Schreibweise $Ax = b$ verwenden, wobei A wieder die Koeffizientenmatrix und b die rechte Seite ist.

Gauß erkannte die Einfachheit des Problems, lineare Gleichungssysteme zu lösen, deren Koeffizientenmatrix die Gestalt einer **oberen Dreiecksmatrix** hat²⁸. Sie sieht folgendermaßen aus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei gilt: $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$ und $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.

Für das lineare Gleichungssystem heißt das:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Im vorigen Kapitel wurde erwähnt, dass ein Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Ist A eine obere Dreiecksmatrix, dann ist $\det(A)$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente. (Daraus ergibt sich eine sehr effiziente Möglichkeit, die Determinante einer solchen Matrix zu berechnen, ohne sie aufwendig zu entwickeln.)

Da oben vorausgesetzt wurde, dass die Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$ sind, ist auch das Produkt der Diagonalelemente $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Daher ist das System in diesem Fall eindeutig lösbar.

Aus der letzten Gleichung $a_{nn}x_n = b_n$ ergibt sich nun $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Dieses Ergebnis kann nun in die darüberliegende Gleichung eingesetzt werden, um x_{n-1} zu berechnen. Dieser Vorgang wird bis zur ersten Gleichung wiederholt und liefert nach n Schritten den gesamten Lösungsvektor x . Man spricht hier von **Rückwärtssubstitution**. Das folgende Beispiel soll die Rückwärtssubstitution besser veranschaulichen.

²⁸ [vgl. HOF]

Beispiel²⁹:

Es sei folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{17}{2}x_3 &= -\frac{49}{2} \\ \frac{129}{14}x_3 &= \frac{387}{14} \end{aligned}$$

Die Determinante ist leicht zu berechnen: $3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{129}{14} \neq 0$. Daher ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Aus der letzten Gleichung erhält man: $x_3 = 3$. Setzt man dieses Ergebnis in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $x_2 = 2$. Setzt man nun diese beiden Lösungen in die erste Gleichung ein, ergibt sich $x_1 = 1$.

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese Rückwärtssubstitution ist im Grunde die Idee, die hinter dem Gaußschen Eliminationsverfahren steckt. Es wird versucht, jede Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems auf eine Dreiecksgestalt zu bringen.

Zur übersichtlicheren Darstellung eines linearen Gleichungssystems wird auch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ verwendet. Ist A eine $n \times n$ -Matrix, so lässt sich die Matrix A durch elementare Umformungen in endlich vielen Schritten auf eine Matrix A' in Dreiecksgestalt bringen, das heißt auf folgende Form:

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{ii} & \cdots & a'_{in} & b'_i \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

wobei gilt: $a'_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

²⁹ [vgl. OEZ]

Durch diese Umformungen ist es möglich, jede quadratische Koeffizientenmatrix mit $\det(A) \neq 0$ in eine Dreiecksmatrix zu bringen. Es kann gezeigt werden, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und das transformierte System $A'x = b'$ dieselben Lösungen haben.

Das heißt, die Hauptaufgabe bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren beschränkt sich darauf, die Koeffizientenmatrix A auf eine Dreiecksgestalt zu bringen.

Um die Suche nach einer Dreiecksgestalt zu vereinfachen, muss ein Algorithmus entwickelt werden, der jederzeit anwendbar ist. In diesem Fall sieht eine Vorschrift zur Berechnung in etwa so aus³⁰:

(1) Man bestimmt ein a_{j1} aus $(A|b)$ mit $a_{j1} \neq 0$, für $j = 1, \dots, n$. Falls $j \neq 1$, vertausche die j -te mit der ersten Zeile. Findet man kein $a_{j1} \neq 0$, so ist $\det(A) = 0$ und das Verfahren kann gestoppt werden, denn es existiert keine eindeutige Lösung. Dieser Fall wurde hier aber ausgeschlossen, da angenommen wurde, dass die Matrix A vollen Rang besitzt.

(2) Für $i = 2, \dots, n$ subtrahiert man von der i -ten Zeile von $(A|b)$ den Faktor $\frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot 1.$ Zeile von $(A|b)$. Die neue Matrix nennt man $(A^{(1)}|b^{(1)})$ und sieht folgendermaßen aus:

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \dots & \dots & a_{3n}^{(1)} b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & \dots & a_{nn}^{(1)} b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

³⁰ [vgl. HOF]

(3) Man betrachtet $(A|b)$ als jene $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man erhält, wenn man in $(A^{(1)}|b^{(1)})$ die erste Zeile und die erste Spalte streicht. Man führt nun mit der neuen Matrix wieder die Schritte (1) und (2) durch. Jetzt verwendet man statt des Index $^{(1)}$ den Index $^{(2)}$. So erhält man die Matrix $(A^{(2)}|b^{(2)})$.

Im nächsten Durchgang erhält man $(A^{(3)}|b^{(3)})$, usw., bis das Verfahren schlussendlich nach dem $(n-1)$ -ten Schritt beendet ist und man die letzte 2×2 -Matrix erhält:

$$(A^{(n-1)}|b^{(n-1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & a_{n,n}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

Wird das Verfahren nicht während des Schrittes (1) abgebrochen, so hat die transformierte Koeffizientenmatrix A' jetzt die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix.

Es kann mit der oben bereits erwähnten Rückwärtssubstitution begonnen werden, wobei der zugehörige Vektor der rechten Seite b' ist. Löst man das System $A'x = b'$, so erhält man die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Für die allgemeine Gültigkeit dieses Algorithmus ist es unbedingt erforderlich, Schritt (1) durchzuführen und nicht einfach mit dem ersten Element der ersten Zeile zu beginnen und anschließend das zweite Element der zweiten Zeile zur Elimination zu verwenden, usw. In diesem Fall wäre nämlich dieses Verfahren nicht immer anwendbar, wie man leicht anhand der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erkennen kann.

Für den Computereinsatz ist dieser Algorithmus noch etwas riskant, wie man an folgendem Beispiel sehen kann:

Beispiel³¹:

Es sei folgendes Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Lösung x ist mit 3-stelliger normalisierter Gleitkommadarstellung zu berechnen!

Da $a_{11} \neq 0$ ist, folgt nach obigem Algorithmus für $A^{(1)} = A'$:

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^{-2} & 0.100 \cdot 10^1 \\ 0.000 \cdot 10^1 & -0.100 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$, denn die 2. Zeile von $A^{(1)}$ ist die 2. Zeile von $A - 1000 \cdot 1.$ Zeile von A :

$$A = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^{-2} & 0.100 \cdot 10^1 \\ 0.100 \cdot 10^1 & 0.100 \cdot 10^1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{21}^{(1)} = 0.100 \cdot 10^1 - 0.100 \cdot 10^1 = 0$$

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= 0.100 \cdot 10^1 - 0.100 \cdot 10^4 = && \text{(runden)} \\ &= 0.000 \cdot 10^4 - 0.100 \cdot 10^4 = -0.100 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Für $b^{(1)}$ folgt durch diese Überlegung: $b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.100 \cdot 10^1 \\ -0.100 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$.

Durch Rückwärtssubstitution erhält man als Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obwohl man die Lösung ohne Schwierigkeiten berechnen konnte, zeigt sich jedoch ein Problem, wenn man die Probe durchführt, indem man x_1 und x_2 in die zweite Gleichung einsetzt: $x_1 + x_2 = 0 + 1 \neq 2$. Berechnet man aber die Lösung genau, erhält man für $x_1 = 1.001001 \dots$ und für $x_2 = 0.998998 \dots$. Man kann erkennen, dass die zuvor näherungsweise berechnete Lösung nicht einmal als gute Näherung gelten kann. Sie ist schlichtweg falsch.

³¹ [vgl. HOF]

Bei der Suche nach dem Fehler in der Berechnung kommt man leicht zu der Erkenntnis, dass das Problem bei dem kleinen Wert von a_{11} liegt, weil dieser zu einer Multiplikation mit 1000 führt. Da im Folgenden auf gleiche Exponenten bei der Subtraktion geachtet werden musste, entstand die ungünstige Rundung $0.000 \cdot 10^4$ für $a_{21}^{(1)}$. Numerisch ist die Division durch einen sehr kleinen Wert kritisch.

Um diesem Fehler vorzubeugen, kann das Gaußsche Eliminationsverfahren um die sogenannte **Pivotsuche** erweitert werden. Dabei heißt das Element a_{ii} , das zur Elimination der Variablen x_i aus der $(i + 1)$ -ten Gleichung verwendet wird, **Pivotelement**.

Wie im Schritt (1) des Algorithmus bereits beschrieben, kann jedes Element $a_{j1} \neq 0$ der Matrix A als Pivotelement fungieren, wenn es durch Zeilenvertauschungen an die entsprechende Stelle gesetzt wird.

Um nun den Fehler aus dem obigen Beispiel zu vermeiden, verwendet man im Eliminationsschritt (1) nicht irgendeine von Null verschiedene Zahl aus der Matrix A , sondern den betragsgrößten Wert aus jener Spalte, aus der eliminiert werden soll und verwendet diesen als Pivot. Diese Methode nennt man **partielle Pivotsuche = Spaltenpivotsuche**.

Dazu entsprechend existiert auch die **vollständige Pivotsuche**. Hierbei übernimmt nicht das betragsgrößte Spaltenelement die Rolle des Pivots, sondern das vom Betrag her größte Element der Matrix A . Hierbei ist wichtig, dass neben den Zeilenvertauschungen auch Spaltenvertauschungen durchgeführt werden dürfen, damit alle Elemente aus A an die für das Pivotelement vorgesehene Stelle a_{11} gelangen können. Diese verändern ebenfalls nicht die Lösung. Spaltenvertauschungen führen aber zu einer Änderung der Reihenfolge der Variablen in den Gleichungen, welche in den schon berechneten $A^{(l)}$ auch durchgeführt werden muss.

Die vollständige Pivotsuche erfordert weit mehr Vergleichsoperationen als die partielle Pivotsuche. Zusätzlich müssen die Vertauschungen der Unbekannten protokolliert werden. Deshalb wird in der Praxis meist nur die Spaltenpivotsuche angewendet.

Beispiel³²:

Es sei folgendes Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.005 & 1 & 0.5 \\ & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Die exakte Lösung des Systems lautet:

$$x_1 = \frac{500}{995} = 0.50251 \dots$$

$$x_2 = \frac{495}{995} = 0.49748 \dots$$

Man rechnet nun auf zwei Stellen gerundet.

(1) Lösung ohne Pivotsuche

Beim ersten Eliminationsschritt subtrahiert man $\frac{1}{0.005} \cdot 1.$ Zeile von der zweiten Zeile und erhält:

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.005 & 1 & 0.5 \\ & 0 & -199 \end{array} \right)$$

Rundung auf zwei Stellen ergibt:

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.005 & 1 & 0.5 \\ & 0 & -200 \end{array} \right)$$

Daraus lassen sich folgende Werte errechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.495 && \rightarrow \text{exaktes Divisionsergebnis} \\ &= 0.50 && \rightarrow \text{auf zwei Stellen gerundet} \end{aligned}$$

³² [vgl. FRA]

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

Wie man leicht erkennen kann, stimmt nur x_2 mit der exakten Lösung überein. x_1 hat mit der exakten Lösung nichts gemein.

(2) Lösung mit Spaltenpivotsuche

Die Rechnung ist nun wieder zweistellig, aber dieses Mal mit Spaltenpivotsuche.

Daher werden vor dem ersten Eliminationsschritt die Zeilen vertauscht:

$$(A|b)' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0.005 & 1 & 0.5 \end{array} \right)$$

Nun wird die erste Zeile mit 0.005 statt mit $\frac{1}{0.005}$ multipliziert und von der zweiten subtrahiert:

$$(A^{(1)}|b^{(1)})' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.995 & 0.495 \end{array} \right)$$

Rundung auf zwei Stellen ergibt:

$$(A^{(1)}|b^{(1)})' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{array} \right)$$

Daher ergibt sich folgende Lösung:

$$x_2 = 0.5$$

$$x_1 = 0.5$$

Rundet man das exakte Ergebnis auch auf zwei Stellen, so erhält man ebenfalls $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 0.5$.

Daran erkennt man die Überlegenheit der Variante (2) mit Spaltenpivotsuche.

3.1. Lösung mittels LU-Zerlegung

Für diese Vorgangsweise ist folgender Satz von Bedeutung:

Satz³³:

Besteht die Möglichkeit, das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ohne Anwendung³⁴ von Zeilenvertauschungen zu lösen, so lässt sich die Matrix A in eindeutiger Weise als Produkt aus einer unteren Dreiecksmatrix $L = (l_{ij})$ und einer oberen Dreiecksmatrix $U = (u_{ij})$ darstellen, das heißt $A = LU$, wobei $l_{ii} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Hierbei ist U die obere Dreiecksmatrix, die durch die Gaußsche Elimination entsteht. L dient dem Speichern der benötigten Umformungsschritte und sieht folgendermaßen aus:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

wobei gilt: $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$. Die l_{ik} sind die Multiplikatoren bei der Gauß-Elimination.

Die $a_{ik}^{(k)}$ sind die Koeffizienten jener Matrix $A^{(k)}$, die man nach dem k -ten Eliminationsschritt erhält. Insbesondere gilt $A^{(0)} = A$.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es eine einfache Möglichkeit liefert, ein Gleichungssystem der Art $Ax = b$ für verschiedene b zu lösen, ohne immer das Eliminationsverfahren anwenden zu müssen.

³³ [vgl. HOF]

³⁴ Dieser Satz gilt auch, falls Zeilenvertauschungen notwendig sind bei Betrachtung von PA mit P $n \times n$ – Permutationsmatrix.

Gilt $A = LU \Rightarrow L U x = b$.

Definiert man nun $y := Ux \Rightarrow Ly = b$.

Nun wird das lineare System $Ly = b$ nach y gelöst. Anschließend wird aus $Ux = y$ der Lösungsvektor x berechnet.

Dabei ist zu beachten, dass L und U jeweils Dreiecksgestalt haben und die Gleichungssysteme daher durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution gelöst werden können.

Beispiel:

Es sei folgendes Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zuerst wird die obere Dreiecksmatrix U durch den Gauß-Algorithmus berechnet.

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = U$$

Anschließend soll die untere Dreiecksmatrix L ermittelt werden. Dazu betrachtet man die l_{ik} . Da die Diagonalelemente gleich 1 sein müssen und alle Werte oberhalb der Diagonale den Wert 0 annehmen, braucht man nur mehr l_{21} , l_{31} und l_{32} berechnen.

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Man weiß, es gilt: $A = LUx = b$

$$y := Ux \Rightarrow Ly = b$$

$$Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Durch Vorwärtssubstitution kann nun leicht der Vektor y berechnet werden:

$$y = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Nun weiß man, dass gilt $Ux = y$, das heißt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Daraus kann durch einfache Rückwärtssubstitution der Lösungsvektor x ermittelt

werden: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vorgangsweise bei allgemeinen Matrizen:

Bis jetzt wurde angenommen, dass die Matrix A vollen Rang besitzt und daher war das System immer eindeutig lösbar. Nun soll der andere Fall besprochen werden, wenn der Rang der Matrix A nicht voll ist. Man geht von einem Gleichungssystem der Art $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ aus. Das heißt, das System besitzt mehr Gleichungen als Variablen. In diesem Fall geht man genauso vor wie bei einem quadratischen System, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ nach dem k -ten Eliminationsschritt folgendermaßen aussieht:

$$(A^{(k)} | b^{(k)}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1r}^{(k)} & a_{1,r+1}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r}^{(k)} & a_{2,r+1}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r,r+1}^{(k)} & \cdots & a_{rn}^{(k)} & b_r^{(k)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{r+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_m^{(k)} \end{array} \right)$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

(a) $b_i^{(k)} \neq 0$ für mindestens ein i mit $r + 1 \leq i \leq m$.

Es gilt: $rg(A|b) \geq r + 1 \neq r \Rightarrow$ Das System ist nicht lösbar.

(b) $b_{r+1}^{(k)} = \cdots = b_m^{(k)} = 0 \Rightarrow r = rg(A) = rg(A|b)$

Das somit erhaltene gestaffelte System sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{1r}^{(k)} x_r &= b_1^{(k)} - a_{1,r+1}^{(k)} x_{r+1} - \cdots - a_{1n}^{(k)} x_n \\ x_2 + \cdots + a_{2r}^{(k)} x_r &= b_2^{(k)} - a_{2,r+1}^{(k)} x_{r+1} - \cdots - a_{2n}^{(k)} x_n \\ x_r &= b_r^{(k)} - a_{r,r+1}^{(k)} x_{r+1} - \cdots - a_{rn}^{(k)} x_n \end{aligned}$$

Um eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Gleichungssystems zu erhalten, werden $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ gesetzt. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems erhält man, indem man x_{r+1}, \dots, x_n beliebig wählt

$$x_{r+1} = t_1, x_{r+2} = t_2, \dots, x_n = t_{n-r}$$

mit $t_i \in \mathbb{R}$ und die restlichen Variablen durch die Parameter t_1, t_2, \dots, t_{n-r} ausdrückt. So erhält man $n - r$ linear unabhängige Lösungsvektoren v_1, v_2, \dots, v_{n-r} , durch die sich jede Lösung des homogenen Gleichungssystems in folgender Form darstellen lässt:

$$x_h = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-r} v_{n-r}$$

mit beliebigen $t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Die **allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems** der Art $Ax = b$ ist gegeben durch:

$$x_p + \text{Kern}(A)$$

wobei x_p eine beliebige Partikulärlösung ist und $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

In der bisherigen Arbeit wurden einige direkte Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme diskutiert. Es existieren noch andere Möglichkeiten, ein solches System zu lösen. Eine andere Art von Lösungsverfahren soll im nächsten Kapitel genauer erklärt werden.

4. Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Ein **iteratives Verfahren** ist eine Lösungsmethode, die beginnend mit einer Anfangsnäherung nach einer Anzahl an Iterationsschritten eine Näherungslösung liefert.³⁵ Im Unterschied zu den direkten Lösungsverfahren liefert ein Iterationsverfahren nach endlich vielen Schritten keine exakte Lösung. Solche Verfahren zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass ein bereits berechneter Näherungswert dazu verwendet wird, eine neue bessere Näherung der Lösung zu ermitteln.

Das wahrscheinlich bekannteste Beispiel für ein Iterationsverfahren ist das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer nichtlinearen Funktion $f(x)$. Man geht von einem Startwert $x^{(0)}$ aus und die Iterationsvorschrift lautet:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})$$

Hier sollen nun zwei Verfahren zur näherungsweise Berechnung der Lösung linearer Gleichungssysteme vorgestellt werden.

Eine häufige Aufgabenstellung der Mathematik befasst sich mit dem Bestimmen von Nullstellen, das heißt, mit dem Lösen von (nichtlinearen) Gleichungen der Form $f(x) = 0$. Die Berechnung der Lösung stellt sich oft als sehr schwierig dar, weshalb die Problemstellung äquivalent umformuliert wird. Sie wird auf die Ermittlung eines Fixpunktes einer anderen Funktion modifiziert. Das heißt, man bestimmt jene Punkte x , für die gilt: $F(x) = x$.

Die Frage nach den Nullstellen einer Funktion $f(x)$, das heißt $f(x) = 0$, lässt sich umformulieren zu $x - f(x) = x$. Man erhält ein Fixpunktproblem der Form $F(y) = y - f(y)$.

Es gilt: x ist eine Nullstelle von $f \Leftrightarrow y$ ist ein Fixpunkt von F .

³⁵ [vgl HUC]

Solche Problemstellungen lassen sich nicht exakt berechnen, daher benutzt man hierfür Näherungsverfahren, um die Fixpunkte von F zu berechnen. Dazu werden meist Iterationsverfahren verwendet, die folgende Form besitzen: Man geht von einem Startwert $x^{(0)}$ aus und definiert eine Folge $(x^{(k)})$ durch die Vorschrift $x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \quad \forall k = 1, 2, \dots$. Unter entsprechenden Voraussetzungen konvergiert die Folge $(x^{(k)})$ gegen einen Fixpunkt der Funktion $F(x)$.

Es spielt nun auch eine wichtige Rolle, ob ein gegebenes Iterationsverfahren einen Fixpunkt liefert oder nicht. Hierbei tritt der Begriff der **Lipschitz-Stetigkeit**³⁶ auf:

Es sei D eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n .

Eine Funktion $F: D \rightarrow D$ heißt **Lipschitz-stetig** auf D , wenn gilt:

$$\exists L > 0 \in \mathbb{R}, \text{ sodass } \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

L heißt dann **Lipschitz-Konstante** für F .

Ist $L < 1$, so nennt man F **kontrahierend**.

Der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit ist Grundlage für einen Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten einer gegebenen Funktion F . Gleichzeitig erlaubt dieser Satz eine Aussage über die Konvergenz und eine Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$.

Banachscher Fixpunktsatz³⁷:

Ist D eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $F: D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung mit Lipschitz-Konstante $L < 1$, so gelten folgende Aussagen:

(1) F besitzt genau einen Fixpunkt x^* .

(2) Für jeden Startwert $x^{(0)} \in D$ konvergiert die durch $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ definierte Folge gegen x^* .

(3) Als Fehlerabschätzung gilt: $\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{L^{k-m}}{1-L} \|x^{(m+1)} - x^{(m)}\| \quad \forall 0 \leq m < k$.

³⁶ [vgl. HOF]

³⁷ ebd.

Die Iterationsverfahren, die in diesem Kapitel besprochen werden, stützen sich auf folgendes Prinzip:

Man geht von einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $rg(A) = n$ aus und entwickelt daraus ein Iterationsverfahren, indem die Matrix A in die Form $A = B + C$ mit $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ umgeformt wird. Wenn B invertierbar ist, lässt sich das Lösen des linearen Gleichungssystems zu einem Fixpunktproblem umformen:

$$A = B + C \Leftrightarrow (B + C)x = b \Leftrightarrow Bx + Cx = b \Leftrightarrow Bx = b - Cx \Leftrightarrow x = B^{-1}b - B^{-1}Cx$$

Das bedeutet, dass nun der Fixpunkt der Iterationsfunktion $F(x) = B^{-1}b - B^{-1}Cx$ zu bestimmen ist.

Satz³⁸:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt:

(1) Das Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = B^{-1}b - B^{-1}Cx^{(k)}$ konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)}$ gegen die Lösung x^* von $Ax = b$, wenn eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ mit $L = \|B^{-1}C\| < 1$ existiert.

(2) Für den Fehler im i -ten Iterationsschritt gilt:

$$\|x^{(i)} - x^*\| \leq \frac{L^i}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Die Verwendung eines iterativen Verfahrens ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn es schwierig ist, die Lösung durch ein direktes Verfahren zu ermitteln. Daher sollte das System so verändert werden, folglich B so gewählt werden, dass die Berechnung der Lösung möglichst einfach wird.

³⁸ [vgl. OEZ]

Wenn man davon ausgeht, dass A eine quadratische, invertierbare Matrix ist, so bieten sich für das Aussehen der Matrix B zwei Möglichkeiten an:

$$(1) B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Das heißt, } B \text{ enthält nur die}$$

Diagonalelemente von A .

$$(2) B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \text{Das heißt, } B \text{ ist eine untere}$$

Dreiecksmatrix und enthält alle a_{ij} der Matrix A mit $i \geq j$.

4.1. Das Gesamtschrittverfahren nach Jacobi

Dieses Verfahren ist eines der einfachsten Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, da die Matrix B in seiner einfachsten Form, nämlich als Diagonalmatrix, angenommen wird:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Aus $A = B + C$ ergibt sich für die Matrix C folgende Form:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = B^{-1}b - B^{-1}Cx^{(k)}$ ist hier leicht durchzuführen, da sich B^{-1} einfach berechnen lässt:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für $B^{-1}b$ und für $B^{-1}Cx$:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B^{-1}Cx &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus erhält man für die jeweiligen Komponenten des Lösungsvektors x :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Durch diese Iterationsvorschrift wird eine verbesserte Lösung des gesamten Vektors berechnet. Diese ist dann Ausgangswert für den nächsten Durchlauf des Systems.

Bei dieser Vorschrift tritt eine Einschränkung auf: Die Diagonalelemente von A müssen alle ungleich 0 sein, damit B^{-1} berechnet werden kann. Diesem Problem kann man entgegenwirken, indem die Matrix A durch Zeilen- und Spaltenumformungen so modifiziert wird, dass die Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$ sind.

Die Konvergenz des Verfahrens spielt eine wichtige Rolle.

Gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

so nennt man A **stark diagonaldominant**.

Das Jacobi-Verfahren konvergiert für jeden Startwert gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn A stark diagonaldominant ist.

Beispiel:

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die exakte Lösung des Systems lautet: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B beinhaltet nur die Diagonalelemente von A und sieht daher folgendermaßen aus:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Für C ergibt sich folgende Darstellung:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}Cx = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

Man nimmt zum Beispiel den Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

Nach $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n$ gilt nun für die Komponenten:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 a_{1j} x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{3} \left[1 - (a_{12} x_2^{(0)} + a_{13} x_3^{(0)}) \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} x_2^{(0)}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 a_{2j} x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{3} [5 - (a_{21} x_1^{(0)} + a_{23} x_3^{(0)})] =$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} x_1^{(0)} - \frac{1}{3} x_3^{(0)}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 a_{3j} x_j^{(0)} \right) = \frac{1}{3} [7 - (a_{31} x_1^{(0)} + a_{32} x_2^{(0)})] = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} x_2^{(0)}$$

Das heißt für die **erste Näherung** gilt nun:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \approx 0.33333 \dots$$

$$x_2^{(1)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{5}{3} \approx 1.66666 \dots$$

$$x_3^{(1)} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{7}{3} \approx 2.33333 \dots$$

Die **zweite Näherung** lautet:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{3} - \frac{5}{9} = -\frac{2}{9} \approx -0.22222 \dots$$

$$x_2^{(2)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{9} - \frac{7}{9} = \frac{7}{9} \approx 0.77777 \dots$$

$$x_3^{(2)} = \frac{7}{3} - \frac{5}{9} = \frac{16}{9} \approx 1.77777 \dots$$

Für die **dritte Näherung** ergibt sich daraus:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} = \frac{2}{27} \approx 0.07407 \dots$$

$$x_2^{(3)} = \frac{5}{3} + \frac{2}{27} - \frac{16}{27} = \frac{31}{27} \approx 1.14814 \dots$$

$$x_3^{(3)} = \frac{7}{3} - \frac{7}{27} = \frac{56}{27} \approx 2.07407 \dots$$

Man sieht hier, dass die dritte Näherung schon näher an der exakten Lösung liegt.

Das Verfahren konvergiert gegen die Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.2. Das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel

Bei diesem Verfahren wird die Matrix B folgendermaßen angenommen:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Daher ergibt sich für C folgende Bauart:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A lässt sich daher folgendermaßen darstellen:

$$A = B + C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier könnte man zwar die Inverse zu B berechnen und in die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = B^{-1}b - B^{-1}Cx^{(k)}$ einsetzen, jedoch erweist es sich als einfacher, den Ansatz $Bx^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$ zu betrachten.

Durch Ausmultiplizieren von $Bx^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$ erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} &= b_1 \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n-1,1}x_1^{(k+1)} + a_{n-1,2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1,n}x_n^{(k)} &= b_{n-1} \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k+1)} &= b_n \end{aligned}$$

Aus diesem System lässt sich $x^{(k+1)}$ ermitteln, indem man zuerst $x_1^{(k+1)}$ aus der ersten Gleichung errechnet und dieses Ergebnis dann zur Berechnung von $x_2^{(k+1)}$ verwendet usw.

Daraus ergibt sich folgende Iterationsvorschrift:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Beim Einzelschrittverfahren wird jede Komponente der neuen Näherungslösung einzeln unter Einbeziehung der bereits neu errechneten Komponenten von $x^{(k+1)}$ ermittelt. Damit steht es im Gegensatz zum Gesamtschrittverfahren von Jacobi, bei dem jeweils der gesamte Näherungsvektor aus der vorhergehenden Näherung berechnet wird.

Beispiel:

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die exakte Lösung lautet: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Matrizen B und C sehen in diesem Fall so aus:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun:

$$Bx^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$4x_1^{(k+1)} + x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} = 7$$

$$2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 7$$

$$x_2^{(k+1)} + 2x_3^{(k+1)} = 3$$

Für die einzelnen Komponenten heißt das nun:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=1}^0 a_{1j} x_j^{(1)} - \sum_{j=2}^3 a_{1j} x_j^{(0)} \right) = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} x_2^{(0)} - \frac{1}{2} x_3^{(0)}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{j=1}^1 a_{2j} x_j^{(1)} - \sum_{j=3}^3 a_{2j} x_j^{(0)} \right) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} x_1^{(1)} - \frac{1}{4} x_3^{(0)}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - \sum_{j=1}^2 a_{3j} x_j^{(1)} - \sum_{j=4}^3 a_{3j} x_j^{(0)} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_2^{(1)}$$

Wenn man für den Startwert zum Beispiel $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählt, bedeutet das für die

erste Näherung:

$$x_1^{(1)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$x_3^{(1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

Die **zweite Näherung** sieht dann folgendermaßen aus:

$$x_1^{(2)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{16} = 1$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{16} = \frac{63}{64} = 0.984375$$

$$x_3^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{64} = \frac{129}{128} = 1.0078125$$

Für die **dritte Näherung** bedeutet das:

$$x_1^{(3)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{63}{64} - \frac{1}{2} \cdot \frac{129}{128} = 1$$

$$x_2^{(3)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{129}{128} = \frac{511}{512} \approx 0.9980468 \dots$$

$$x_3^{(3)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{511}{512} = \frac{1025}{1024} \approx 1.0009765 \dots$$

Hier ist bereits gut erkennbar, wie das Gauß-Seidel-Verfahren gegen den exakten

Wert $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Bei dem Gauß-Seidel-Verfahren gilt für die Konvergenz des Verfahrens ebenfalls das Kriterium der starken Diagonaldominanz von A . Das Gauß-Seidel Verfahren konvergiert für jeden Startwert gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn A stark diagonaldominant ist.

Man kann aber eine zusätzliche Aussage über die Konvergenz machen, die sich auf eine spezielle Art von Matrizen bezieht.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Eine Matrix A heißt **positiv definit**, wenn $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^T A x > 0, x \neq 0.$$

Satz³⁹:

Ist A eine reelle, symmetrische und positiv definite Matrix, so konvergiert das Einzelschrittverfahren.

Solche speziellen Matrizen treten in den Anwendungen häufig auf. Daher ist dieser Satz in seiner Bedeutung nicht zu unterschätzen.

³⁹ [vgl. HOF]

Abbruchkriterium:

Da ein Iterationsverfahren im Allgemeinen keine exakte Lösung liefert, stellt sich die Frage, wann ein Verfahren abgebrochen und das Ergebnis als hinreichend genau akzeptiert wird. Meist gibt man hierzu vor Beginn der Berechnung eine Schranke ε - den sogenannten Toleranzparameter - vor, die den maximalen Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte angibt.

Ist der Unterschied kleiner als ε , das heißt $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$, so bricht man das Verfahren ab und akzeptiert den Näherungswert.

Anhang

Computerarithmetik

In diesem Kapitel wird darauf eingegangen, dass das Vertrauen in den Computer nicht grenzenlos sein sollte. Rechenmaschinen sind genauso - wie dem Rechnen per Hand - Grenzen gesetzt.

Zahldarstellung

Den Menschen fällt es oft nicht leicht oder es ist für sie unmöglich, sich sehr große oder auch sehr kleine Zahlen vorzustellen. Der Computer hat in gewisser Weise dasselbe Problem. Er kann sehr große und sehr kleine Zahlen nicht verarbeiten.

Fehler bei der Computerrechnung können dadurch entstehen, dass der Computer nicht alle Zahlen darstellen kann und es ihm nicht möglich ist, mit jeder beliebigen Zahl exakt zu rechnen.

Genauso wie sich der Mensch nur eine gewisse Anzahl von Ziffern merken kann, kann der Computer nur eine bestimmte Anzahl speichern und weiterverarbeiten. Grund dafür ist, dass der Computer nur endlich viele Zahlen darstellen kann, im Gegensatz zu der (überabzählbar) unendlichen Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, wie man am folgenden Beispiel sieht.

Beispiel⁴⁰:

Man nehme einen Computer an, der nur Zahlen mit acht Ziffern verarbeiten kann. Das heißt, er hat für jede Zahl einen Speicherplatz reserviert, der entweder acht Ziffern oder sieben Ziffern und einen Dezimalpunkt aufnehmen kann.

Die darstellbaren Zahlen befinden sich daher im Bereich zwischen 0.000001 und 99 999 999. Dabei bleibt aber das Vorzeichen unberücksichtigt.

⁴⁰ [HOF]

An diesem Beispiel sieht man sofort, dass die Menge der darstellbaren Zahlen endlich ist. Es lassen sich nicht alle beliebigen Zahlen am Computer darstellen. Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, um zehn verschiedene Ziffern und den Dezimalpunkt auf die acht freien Plätze zu verteilen. Diese endliche Menge M der Zahlen, die sich am Computer darstellen lassen, nennt man **Maschinenzahlen**. Man versucht natürlich diese Menge der Maschinenzahlen so groß wie möglich zu machen. Daher muss man sich überlegen, wie man die Zahlen darstellt, um möglichst viele unterzubringen. Auf die wichtigsten Darstellungsformen wird nun näher eingegangen.

Festkommadarstellung

Bei der Festkommadarstellung ist die Anzahl an Ziffern und auch die Position des Dezimalkommas vorgegeben, daher auch die Bezeichnung „Festkommadarstellung“. Heutzutage findet diese Darstellung nur mehr im Wirtschaftswesen Einsatz. Aufgrund der geringen Anzahl an Maschinenzahlen und auch der Inflexibilität wird diese Darstellung kaum mehr verwendet.

Am folgenden Beispiel kann man auch leicht erkennen, dass die Festpunktdarstellung nicht besonders effizient ist. Problematisch wird es hier auch im wissenschaftlichen Bereich, wo es oft Zahlen gibt, die sehr groß sind.

Beispiel⁴¹:

Man nehme wieder einen Computer oder auch einen Taschenrechner an, der acht Stellen einer Zahl darstellen kann. Legt man nun fest, dass die Zahlen auf zwei Dezimalstellen genau gespeichert werden sollen, so kann man sich den Speicherplatz so vorstellen: `_____·__`

Jeder Strich steht für eine Ziffer, wobei der erste Strich auch für Vorzeichen verwendet werden kann. Es gibt nun zwei Möglichkeiten für größte darstellbare Zahlen: 99 999.99 oder +9 999.99

⁴¹ [ACK]

Gleitkommadarstellung

Die Gleitkommadarstellung ist die am häufigsten verwendete Art, Zahlen im Computer darzustellen. Dabei wird folgendes Prinzip zu Grunde gelegt:

Jede Zahl $x \in M$, sofern sie nicht eine periodische oder unendliche Dezimalzahl ist, lässt sich darstellen als $x = (-1)^v \cdot m \cdot b^j$.

v ... Vorzeichen, das nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann, um + oder - darzustellen.

b ... Basis, die festlegt, in welchem Zahlensystem die Zahl dargestellt wird.

Taschenrechner: Basis $b = 10$

j ... Exponent

m ... Mantisse, die die Anzahl der Stellen von x in Bezug auf die Basis b und den Exponenten j darstellt.

Der Computer verwendet im Allgemeinen bei der Zahlendarstellung das Binärsystem, das heißt, die Basis $b = 2$. Der Computer unterscheidet zwischen „Strom“ und „kein Strom“, was durch die Zahlen 0 und 1 dargestellt wird.

Für die bessere Anschauung in den weiteren Beispielen wird aber weiterhin das Dezimalsystem mit der Basis $b = 10$ verwendet.

Beispiel⁴²:

Es sei $x = 123.456$ und $b = 10$.

x lässt sich dann auch darstellen als:

$$x = (-1)^{\underbrace{0}_v} \cdot \underbrace{1.23456}_m \cdot \underbrace{10^2}_{b^j}$$

oder $x = (-1)^0 \cdot 123456 \cdot 10^{-3}$

oder $x = (-1)^0 \cdot 0.123456 \cdot 10^3$

⁴² [vgl. ACK]

An diesem Beispiel kann man schon erkennen, dass der Dezimalpunkt keinen festen Platz hat, denn seine Position hängt vom gewählten Exponenten j ab. Wäre nun der Exponent j gegeben, hätte man wieder die Festkommadarstellung.

Die beschriebene Schreibweise wird bei der Gleitkommadarstellung verwendet, wobei m fix und j aus einem bestimmte Bereich ist. Die Basis b steht fest und für das Vorzeichen v wird ein Zeichen reserviert.

Die Darstellung einer Zahl $x = (-1)^v \cdot m \cdot b^j$ nennt man **Gleitkommadarstellung**. b , m und j sind die vom Rechner abhängigen Größen.

Gleitkommazahlen werden heutzutage im Computer meist mit 32 Bit oder 64 Bit dargestellt.

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass beim Exponenten j ein Feld für das Vorzeichen reserviert werden muss.

Im obigen Beispiel hat sich gezeigt, dass die Eindeutigkeit bei der Gleitkommadarstellung keineswegs gegeben ist.

Beispiel⁴³:

Es sei $x = 123.456$ und $b = 10$. Bei vorgegebener Mantisse $m = 6$, ergeben sich folgende Darstellungen x' von $x = 123.456$:

$$x = (-1)^0 \cdot 1.23456 \cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad x' = (-1)^0 \cdot 1.2345 \cdot 10^2 (= 123.450)$$

$$x = (-1)^0 \cdot 123456 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad x' = (-1)^0 \cdot 123456 \cdot 10^{-3} (= 123.456)$$

$$x = (-1)^0 \cdot 0.123456 \cdot 10^3 \quad \Rightarrow \quad x' = (-1)^0 \cdot 0.1234 \cdot 10^3 (= 123.400)$$

An diesem Beispiel ist leicht zu erkennen, dass die verschiedenen Darstellungen unterschiedlich genaue Ergebnisse beim Weiterverarbeiten liefern. Um nun Eindeutigkeit zu erlangen, verwendet man die **normalisierte Gleitkommadarstellung**.

Man spricht bei der Gleitkommadarstellung $x = (-1)^v \cdot m \cdot b^j$ dann von einer normalisierten Gleitkommadarstellung, wenn gilt: $0.1 \leq m < 1$.

⁴³ [vgl. ACK]

Diese Darstellung findet im Computer bei der Zahlendarstellung Verwendung. Der große Vorteil liegt darin, dass die Null vor dem Dezimalpunkt und der Dezimalpunkt selbst nicht gespeichert werden müssen. Daher werden zwei Stellen gewonnen. Außerdem können durch die normalisierte Gleitkommadarstellung auch sehr große Zahlen dargestellt werden. Das hat zur Folge, dass mehr Maschinenzahlen existieren.

Bei der Festkommadarstellung besteht die Menge M der Maschinenzahlen bei N Speicherplätzen ohne Dezimalpunkt und der Basis b aus b^N Elementen. Hingegen ist bei der normalisierten Gleitkommadarstellung die Menge M bestimmt durch:

$$2 \cdot (b - 1) \cdot b^{m-1} \cdot (j_{max} - j_{min} + 1)$$

b ... Basis

m ... Mantissenlänge

j_{min} ... kleinster darstellbarer Exponent (< 0)

j_{max} ... größter darstellbarer Exponent (> 0)

Literaturverzeichnis

Die nicht fettgedruckten Quellen sind zwar inhaltlich, aber nicht explizit in diese Arbeit eingeflossen.

[ACK]: Ackermann, Elisabeth: Numerische Mathematik im Schulunterricht. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien, Wien (2006)

[ALF]: Alfan, Margit: Problemlösen im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit konkreten Beispielen. Diplomarbeit an der Universität Wien (1998)

[AUZ]: Auzinger, Winfried u.a.: Skriptum zur Vorlesung „Lineare Algebra für Technische Physik“. Technische Universität Wien (2005)

[BLA]: Blankenagel, Jürgen: Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 2. B.I. – Wissenschaftsverlag, Mannheim – Wien – Zürich (1985)

[BU1]: Bürger, Heinrich u.a.: Mathematik Oberstufe 1. Hölder-Pichler-Tempsky Verlag, Wien (1999)

[BU2]: Bürger, Heinrich u.a.: Mathematik Oberstufe 2. Hölder-Pichler-Tempsky Verlag, Wien (1999)

[DIR]: Dirschmid, Hans Jörg: Höhere Mathematik – Matrizen und lineare Gleichungen. Manz Verlag Schulbuch, Wien (1998)

[FRA]: Frank, Reinhard und Schranz-Kirlinger, Gabriela: Skriptum zur Vorlesung „Numerische Mathematik für LehramtskandidatInnen“. Technische Universität Wien (2005)

[HAR]: Feldmann, Harry: Eine iterative Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme und Fehlerabschätzungen zum Einzelschrittverfahren. Dissertation an der Universität Hamburg (1962)

[HOF]: Hofbauer, Peter: Grundlegende Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme aus der Sicht der numerischen Mathematik. Diplomarbeit an der Universität Wien (1995)

[HUC]: Huckle, Thomas und Schneider, Stefan: Numerik für Informatiker. Springer, Berlin (2002)

[LP1]: Allgemeiner Teil des Lehrplans

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/lp_ahs_neu_allg.pdf (16.06.2008)

[LP2]: Lehrplan AHS-Unterstufe Mathematik

<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf> (26.06.2008)

[LP3]: Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (16.06.2008)

[MER]: Merziger, Gerhard und Wirth, Thomas: Repetitorium der höheren Mathematik. Binomi Verlag, Hannover (2002)

[OEZ]: Özelt, Daniela: Pädagogische und methodische Überlegungen zum Computereinsatz im Mathematikunterricht am Beispiel linearer Gleichungssysteme. Diplomarbeit an der Universität Wien (1996)

[PLA]: Plato, Robert: Numerische Mathematik kompakt. Vieweg Verlag, Wiesbaden (2006).

[PAU]: Paukowitsch, Peter: Skriptum zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie für LA“. Technische Universität Wien (2002/2003)

[RE1]: Reichel, Hans-Christian und Müller, Robert: Lehrbuch der Mathematik für 5. Klasse. ÖBV, Wien (2002)

[RE2]: Reichel, Hans-Christian u.a.: Lehrbuch der Mathematik für 6. Klasse. ÖBV, Wien (2002)

[SCH]: Schalk, Heinz-Christian u.a.: Mathematik 1 für höhere technische Lehranstalten. Reniets Verlag, Wien (1993)

[UEB]: Überhuber, Ch.: Skriptum zur Vorlesung „Grundlagen der Numerik“. Technische Universität Wien (1997)