



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

„Der Taschenrechner, die Entwicklung von der Antike zur Gegenwart, numerische Hintergründe und Anwendungen im Schulunterricht“

ausgeführt am

Institut für Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.rer.nat. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Claudia Mühlbauer

1100 Wien, Rosiwalgasse 20 / 35

Wien, Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	1
Einleitung	2
Kapitel 1: Historische Entwicklung von Rechengeräten	5
1.1 Abakus	5
1.1.1 Addition	8
1.1.2 Subtraktion	11
1.1.3 Multiplikation	12
1.1.4 Division	14
1.1.5 Wurzelziehen	15
1.2 Rechenschieber	18
1.3 Taschenrechner	23
Kapitel 2: Möglichkeiten der Zahlendarstellung	28
2.1 Zahlensysteme	28
2.2 Zahlendarstellung	29
2.2.1 Festkommazahlen	29
2.2.2 Intervallarithmetik	30
2.2.3 Gleitpunktzahlen	31
2.2.4 Normalisierte / Subnormale Gleitpunktzahlen	32
Kapitel 3: Welche Arten von Fehler gibt es?	35
3.1 Modellfehler	37
3.2 Datenfehler	37
3.3 Verfahrensfehler	42
3.4 Rechen- bzw. Rundungsfehler	43
3.4.1 Fehlerfortpflanzung	44

Kapitel 4: Der Taschenrechner in der Schule	49
4.1 Beispiel aus der Trigonometrie	51
4.2 Wie viele Stellen sind sinnvoll?	54
4.3 Überschlagsrechnung	56
4.4 Taschenrechner versus Kopfrechnen	60
 Kapitel 5: Wie funktioniert der Taschenrechner?	 64
5.1 Mathematische Approximationsverfahren für die Berechnung elementarer Funktionen	64
5.1.1 Die Potenzreihe von MacLaurin	65
5.1.2 Tschebyscheff-Polynome	67
5.1.3 Relaxation von Potenzreihen	72
5.1.4 Die Padé-Approximation	75
5.1.5 Die Methode von Maehly	77
5.2 Beispiele elementarer Funktionen	79
5.2.1 Wie wird e^x approximativ berechnet?	79
5.2.2 Wie wird $\sin x$ approximativ berechnet?	86
 Anhang	 91
A.1 Beispiel für einen Datenfehler bei guter Konditionierung	91
A.2 Beispiel für einen Datenfehler bei schlechter Konditionierung	92
A.3 Beispiel aus der Trigonometrie	94
A.4 Visualisierung der Cosinus-Funktion	96
A.5 Visualisierung der Tschebyscheffpolynome	97
A.6 Berechnung des Grades eines approximierenden Taylorpolynoms	98
A.7 Überprüfung der Approximationsgenauigkeit eines Polynoms mit verschiedenen Graden	99
A.8 HORNER-Schema	100
A.9 Koeffizientenvergleich für e^x	102
A.10 Besselfunktionen 1. Art	103
A.11 Koeffizientenvergleich für $\sin x$	104

Literaturverzeichnis	107
Internet-Linkverzeichnis	109
Bilderverzeichnis	110
Abkürzungsverzeichnis	113
Lebenslauf	115

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Betreuerin Frau Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger bedanken, welche mir während der ganzen Zeit bei allen Fragen mit Rat und Tat zur Seite stand und mir dabei half, meine eigenen Ideen und Vorstellungen umzusetzen.

Ein großer Dank gilt auch meiner Familie, vor allem meinem Vater Josef Mühlbauer, welcher mir dieses Studium ermöglichte und mich in schweren Zeiten immer mit aufmunternden Worten motivierte.

Abschließend möchte ich mich bei Alexander Solar bedanken, der mich auf dem gesamten Weg durch das Studium begleitet hat, immer für mich da war und mich auch in herausfordernden Zeiten unterstützt und mir Halt gegeben hat.

Einleitung

Das Ziel meiner Diplomarbeit ist, Standardfunktionen unter Anwendung verschiedener Methoden für eine Implementierung im Taschenrechner anzunähern. Zu diesem Zweck ist es notwendig, sich Gedanken über die Art der Zahlendarstellung, Fehlerarten aber auch über sinnvolle Genauigkeiten sowie deren Folgen beim Rechnen zu machen.

Neben der mathematisch korrekten Abhandlung versuche ich, auch schulische Aspekte einzuarbeiten und auf die Anwendung in der Schule einzugehen.

Im **ersten Kapitel** meiner Arbeit gebe ich einen historischen Überblick über die Entwicklung der Rechengeräte vom Abakus, über den Rechenschieber bis hin zum heutigen Taschenrechner. Wenn wir heute vom Abakus sprechen, denken wir immer an ein Rechengerät aus der „Steinzeit“. Dass man dies generell nicht bestätigen kann zeigt ein einfaches Beispiel. Der „Abakus für Blinde“ ist auch heute noch die wichtigste Rechenhilfe für Personen mit Sehbehinderung. Auch die Tatsache, dass der Abakus noch immer in zahlreichen Geschäften z.B. in ländlichen Gebieten Chinas Anwendung findet zeigt, dass er bei weitem nicht ausgedient hat. Der Rechenschieber hat heute keine so große Bedeutung mehr wie sein Vorgänger, jedoch der mathematische Hintergrund, nämlich das Rechnen mit Logarithmen und die damit verbundene Logarithmentafel von Briggs, ist auch heute noch von wesentlicher Bedeutung. Wir müssen zwar die Logarithmen nicht mehr händisch berechnen bzw. aus einer vorgefertigten Liste ablesen, jedoch brauchen wir sie z.B. für die Approximation von e^x . Eine Anwendung könnte der Rechenschieber heutzutage in der Schule finden – etwa zur Einführung der logarithmischen Skalierung, welche z.B. für die Anfertigung von Statistiken benötigt wird. Ein Beispiel hierfür wäre etwa die „altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeit gemäß der Sterbetafel 2000 / 2002“.

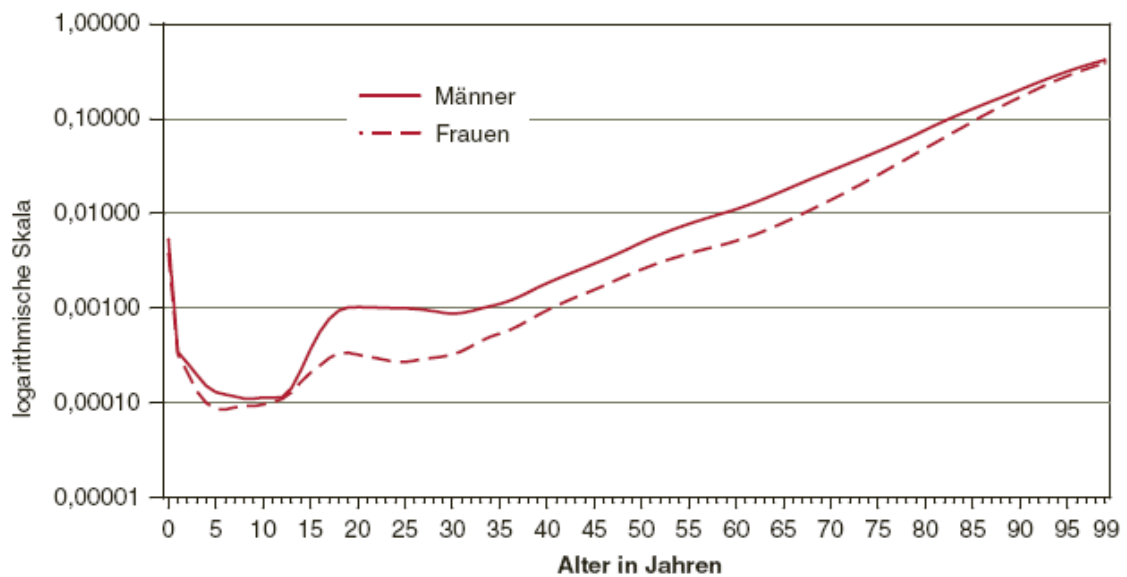


Abb. 1: Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten gemäß Sterbetafel 2000 / 2002¹

Der Taschenrechner hat seit den 70iger Jahren die Aufgabe des am häufigsten verwendeten Rechenhilfsmittels übernommen. Neben der Anwendung in der Schule findet er im täglichen Leben, zumindest mit den einfachsten Funktionen, permanenten Einsatz. Auch die Tatsache, dass ein Taschenrechner heutzutage in vielen technischen Geräten, wie z.B. dem Handy integriert ist, weist auf die enorme Wichtigkeit hin.

Auf die unterschiedlichsten Zahlendarstellungen gehe ich im **zweiten Kapitel** ein, wobei hier speziell auch auf die Anwendung beim Taschenrechner Bezug genommen wird. Für all jene Personen, welche sich mit dem Programmieren von Computern beschäftigen, ist es wichtig zu wissen, welche Eigenschaften die verschiedenen Zahlensysteme und die unterschiedlichen Zahlendarstellungen wie z.B. die Festkomma-, Intervall- und Gleitpunktarithmetik besitzen.

Das **dritte Kapitel** beschäftigt sich mit den verschiedenen Fehlerarten, wobei ich auch darauf geachtet habe, einen Bezug zum täglichen Leben herzustellen sowie passende Beispiele einzubinden. Zu den bekanntesten und bedeutendsten Fehlerarten zählt der Modell-, Daten-, Verfahrens- sowie Rechen- und Rundungsfehler.

¹ Quelle zu Abb.1 siehe Bildverzeichnis

Die Verwendung des Taschenrechners in der Schule wird im **vierten Kapitel** behandelt. In diesem Paragraph wird einerseits das Thema „Genauigkeit beim Rechnen“ behandelt, aber andererseits auch auf den sinnvollen Einsatz von Taschenrechnern im Schulbetrieb eingegangen. Durch Auszüge aus dem Lehrplan soll veranschaulicht werden, in welcher Form und mit welchem Ziel der Taschenrechner bzw. andere elektronische Hilfsmittel zum sinnvollen Einsatz kommen können.

Der letzte Abschnitt handelt schließlich davon, mit welchen Methoden Standardfunktionen im Taschenrechner implementiert werden können. Als Beispiele für elementare Funktionen beschäftigte ich mich in diesem **fünften Kapitel** mit den Funktionen „ e^x “ und „ $\sin x$ “. Zur Beschreibung dieser Funktionen benötigen wir einige Approximationsverfahren. Ich habe versucht, diese teilweise sehr komplizierten Verfahren möglichst einfach aufzubereiten.

Verweise auf andere Kapitel, werden durch das Symbol „[↑ ...]“ gekennzeichnet. Hinweise zu den verwendeten Büchern habe ich mit [I] und Internet-Links mit [i] angegeben. Diverse Abkürzungen habe ich am Ende meiner Arbeit in einem Abkürzungsverzeichnis angeführt. Die von mir selbst angefertigten Grafiken erstellte ich entweder mit dem Zeichenprogramm „*MicroStation*“ oder „*Euklid*“. Nachbearbeitet und beschriftet wurden sie mittels „*CorelDRAW*²“. Mit der Rechensoftware „*Maple*³“ führte ich die angeführten Beispiele rechnerisch durch.

² Version „CorelDRAW 12“

³ Version „Maple 11“

Kapitel 1: Historische Entwicklung von Rechengeräten

1.1 Der Abakus

Der Abakus ist ein Rechengerät, welches ca. 1100 v.Chr. im indo-chinesischen Kulturraum, vermutlich in Madagaskar bzw. Zentralasien, entwickelt wurde. Andere Bezeichnungen für den Abakus sind u.a. Zählrahmen, Rechenbrett, Rechentuch oder auch Rechentisch. Die unterschiedlichen Benennungen kommen wahrscheinlich von den verschiedenen sprachlichen Ableitungen, wie z.B. „abacus“ aus dem lateinischen, was soviel bedeutet wie „Tablett“, „Tisch“ oder „Tafel“.

Aufgrund der Liebe zu Papier, Tinte und Feder in Europa, fand der Abakus in China eine weit höhere Anerkennung. Als weit verbreitete Rechenmaschine wurde er etwa bis ins 18. Jahrhundert verwendet. Heutzutage dient er in Europa vermehrt als Kinderspielzeug, aber auch als Rechengerät für Blinde sowie in kleineren Geschäften vom Balkan bis nach China als Rechenhilfe.



Abb. 2: *Abakus für Blinde*⁴

Im Allgemeinen versteht man unter einem Abakus einen Holzrahmen, in welchem sich senkrecht dünne Holzstäbe befinden, auf welchen Holzkugeln aufgefädelt sind und welche zum Zweck des Rechnens bewegt werden können. Natürlich kann ein solches Rechengerät auch aus einem anderen Material, wie z.B. Gold, Stein oder Messing, sein. Nicht nur allein im Material gibt es Unterschiede. Es gibt eine Vielzahl an unterschiedlichen Modellen, wobei auch die einzelnen Varianten den jeweiligen Bedürfnissen angepasst werden.

⁴ Quelle zu Abb. 2 siehe Bildverzeichnis

Zu diesen zählen u.a.

- der russische Abakus,
- der römische Abakus,
- der japanische Soroban und
- der chinesische Suan Pan.

Der russische Abakus [russ.: stschjot] zeichnet sich durch ein Kugelbrett aus, bei welchem auf den meisten Stäben zehn Kugeln aufgefädelt sind. Dabei ist die fünfte und sechste Kugel andersfärbig. Jene Stäbchen, welche weniger Kugeln besitzen, werden quasi als Kommastelle genutzt.



Abb. 3: Russischer Abakus⁵



Abb. 4: Römischer Taschenabakus⁶

Beim römischen Abakus werden keine Stäbe verwendet, auf welchem die Kugeln aufgefädelt sind, sondern Schlitz, in welchen sich bewegliche Kugeln befinden. Die drei Ritzen auf der rechten Seite stehen jeweils für die Bruchteile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$, wobei diese an der römischen Währungseinheit „As“ gemessen werden.

Der japanische Soroban hat im Gegensatz zum russischen Abakus eine Querstrebe als Trennung zwischen einer fünf-wertigen Kugel und den anderen fünf ein-wertigen Kugeln. Jenen Bereich oberhalb des Querbalkens bezeichnen wir als Himmel, jenen unterhalb als Erde.

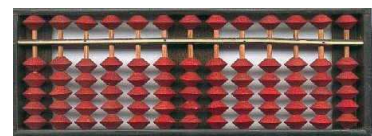


Abb. 5: Japanische Soroban⁷



Abb. 6: Chinesische Suan Pan⁸

Der chinesische Suan Pan hat einen sehr ähnlichen Aufbau wie der japanische Soroban. Sie unterscheiden sich lediglich dadurch, dass der chinesische Suan Pan zwei Kugeln pro Spalte im Himmel besitzt.

⁵ Quelle zu Abb. 3 siehe Bildverzeichnis

⁶ Quelle zu Abb. 4 siehe Bildverzeichnis

⁷ Quelle zu Abb. 5 siehe Bildverzeichnis

⁸ Quelle zu Abb. 6 siehe Bildverzeichnis

Die Darstellungsweise von Zahlen sowie die möglichen Rechenoperationen werden wir an Hand des chinesischen Abakus erklären. Generell gilt, dass die Darstellung analog zur herkömmlichen arabischen Schreibweise ist was bedeutet, dass ganz links die höchste Zehnerpotenz 10^n mit $n \in \mathbb{N}$ und ganz rechts die Einerstelle 10^0 steht. Jede Spalte steht für eine Stelle.

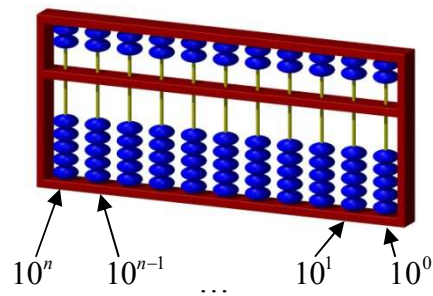


Abb. 7: Veranschaulichung der Zehnerpotenzen

Später werden wir sehen, dass für die Durchführung einer Operation oft eine vorhandene Darstellung einer Zahl nicht ausreicht. Beim Abakus ist es deshalb möglich, eine Zahl auf verschiedene Arten darzustellen. Hierzu nur einige kurze Beispiele:

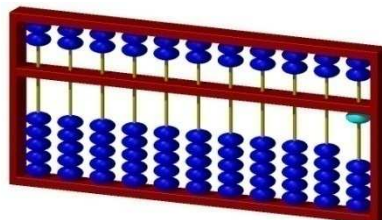


Abb. 8: Darstellung von „1“

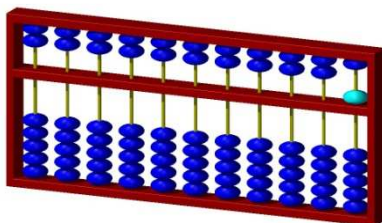


Abb. 9: Darstellung von „5“

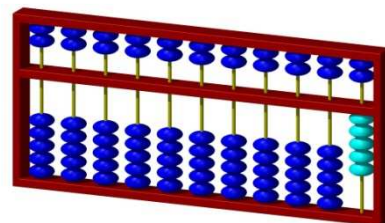


Abb. 10: Darstellung von „5“

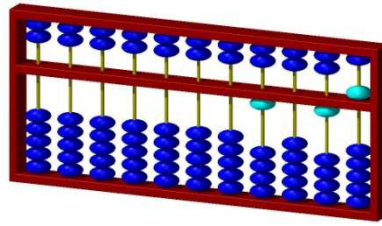


Abb. 11: Darstellung von „1015“

Natürlich ist beim Abakus auch eine Darstellung als Dezimalbruch möglich. Hierbei muss der Benutzer selbst festlegen, an welcher Stelle sich das Komma befindet. Bei der Addition und Multiplikation stellt dies kein Problem dar. Hingegen kann es bei der Division und Multiplikation für unerfahrene Anwender etwas schwieriger sein.

Die Grundidee beim Rechnen mit dem Abakus liegt in der Zerlegung eines umfangreichen Problems in viele kleine Einzelprobleme.

Obwohl der Abakus ein sehr altes und einfaches Rechengerät ist, können wir auf diesem nicht nur die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen, sondern sogar die quadratische und kubische Wurzel ziehen.

Wie diese Operationen genau funktionieren, schauen wir uns jeweils an einem passenden Beispiel an.

1.1.1 Addition

Die Addition ist die einfachste Rechenoperation, welche wir am Abakus durchführen können. Um zwei Zahlen miteinander zu addieren brauchen wir lediglich eine Zahl nach der anderen eingeben und das Ergebnis direkt ablesen.

Wir werden uns diesen Vorgang an einem simplen Beispiel kurz anschauen: „ $9 + 6$ “.

Zuerst überlegen wir uns, wie die einzelnen Zahlen separat im Abakus eingegeben werden.

Die „9“ lässt sich aus „5 + 4“ zusammensetzen, wobei wir zu diesem Zweck eine fünfwertige Kugel aus dem Himmel und vier einwertige Kugeln aus der Erde zum Querbalken schieben. Um die Zahl „6“ darzustellen bewegen wir eine fünfwertige Kugel aus dem Himmel und eine einwertige Kugel aus der Erde zum Querbalken.

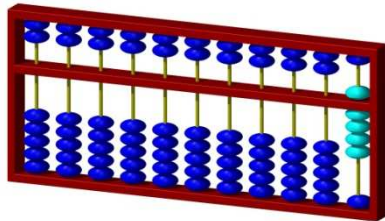


Abb. 12: Darstellung von „9“

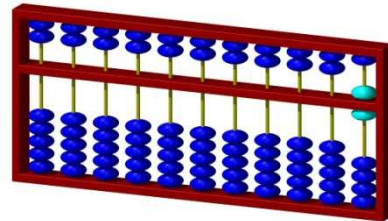


Abb. 13: Darstellung von „6“

Nachdem wir uns nun darüber im Klaren sind, wie die einzelnen Zahlen dargestellt werden, können wir beide Darstellungen vereinen und das Endergebnis direkt ablesen.

Um ein übersichtlicheres Ergebnis zu erhalten, kann man einen sogenannten Übertrag machen. In unserem Beispiel könnten wir zwei fünfwertigen Kugeln der Einerspalte in eine einwertige Kugel der Zehnerspalte sowie die fünf einwertigen Kugeln der Einerspalte zu einer fünfwertigen Kugel der Einerspalte zusammenfassen.

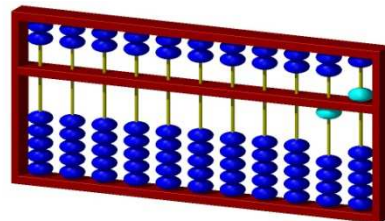
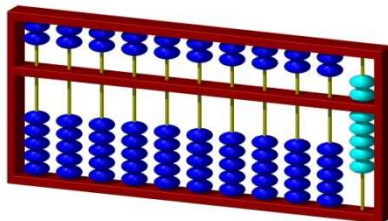


Abb. 14: Das Ergebnis von $9 + 6$ auf zwei verschiedene Arten dargestellt.

In unserem Beispiel von vorhin war es ohne Probleme möglich, die sechs Kugeln zu den neun bereits vorhandenen Kugeln dazuzugeben. Doch wie verhält man sich, wenn man z.B. in der Einerspalte „zu wenig“ Kugeln zur Verfügung hat? Man benötigt eine sogenannte „Hilfskonstruktion“. Wie diese genau aussieht, schauen wir uns am Beispiel „ $17 + 29$ “ an.

Wir beginnen wieder damit, die erste Zahl in den Abakus einzugeben.

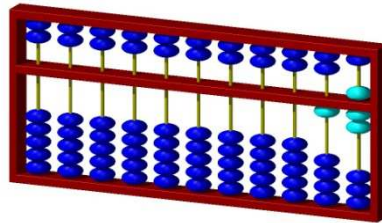


Abb. 15: Darstellung von „17“

Als nächstes wollen wir die neun Kugeln von „29“ in die Einerspalte eintragen. Da uns aber nicht mehr genügend Kugeln zur Verfügung stehen, müssen wir eine einwertige Kugel in der Zehnerspalte zum Querbalken schieben, also zehn dazu addieren, und eine einwertige Kugel der Einerspalte wieder von der Querverstrebung entfernen, also eins abziehen. Diesen Vorgang bezeichnen wir als „Hilfskonstruktion“.

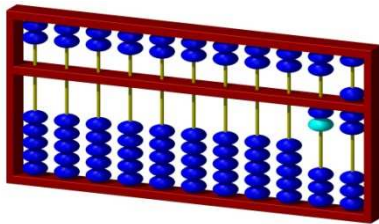


Abb. 16: „ $17 + 10$ “

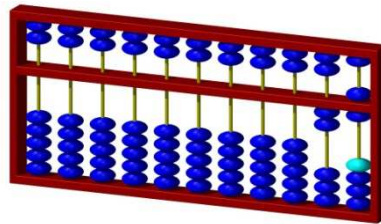


Abb. 17: „ $(17 + 10) - 1$ “

Zu guter letzt müssen wir lediglich noch die ausständigen zwanzig der „29“ hinzufügen und können das Ergebnis direkt ablesen.

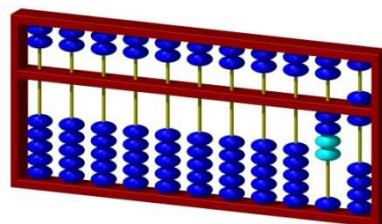


Abb. 18: „ $26 + 20 = 46$ “

Für den Fall, dass wir eine Addition bei Dezimalbrüchen durchführen müssen, gehen wir analog zur zuvor beschriebenen Addition vor. Der einzige Unterschied liegt darin, dass wir uns merken müssen, an welcher Stelle sich das von uns gesetzte Komma befindet. Beim chinesischen Abakus gibt es nämlich keine dafür vorgesehene Stelle.

1.1.2 Subtraktion⁹

Um die Subtraktion beim Abakus durchführen zu können, geht man in der umgekehrten Weise vor wie bei der Addition. Die konkrete Vorgehensweise werden wir uns an Hand eines Beispiels, „ $37 - 19$ “, überlegen.

Wir beginnen wieder damit die erste Zahl, nämlich „37“, in den Abakus ordnungsgemäß einzutragen.

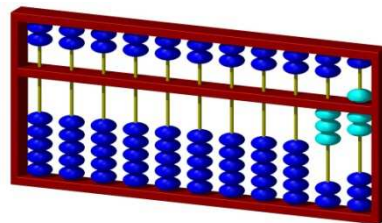


Abb. 19: Darstellung von „37“

Um im nächsten Schritt die „9“ von den bereits eingegebenen „37“ abziehen zu können, müssen wir die zuvor kennengelernte Hilfskonstruktion anwenden. Das bedeutet, dass wir zuerst eine einwertige Kugel der Zehnerspalte abziehen und eine einwertige Kugel der Einerspalte dazugeben müssen.

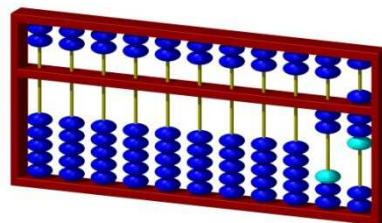


Abb. 20: Darstellung von „ $37 - 10 + 1$ “

Nach Anwendung dieses kleinen Tricks können wir wie gewohnt die noch ausstehenden zehn vom Zwischenergebnis abziehen und erhalten „18“ als Endergebnis, welches wir direkt im Abakus ablesen können.

⁹ Bei der Subtraktion betrachten wir nur jene Variante, wo der Minuend größer ist als der Subtrahend, also jene Fälle, wo kein negatives Ergebnis auftreten kann.

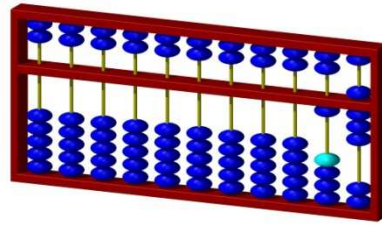


Abb. 21: Darstellung von „ $28 - 10$ “

Im Fall, dass in der Einerspalte keine Kugeln zur bisherigen Rechnung verwendet wurden, wir aber z. B. für die Hilfskonstruktion darauf zurückgreifen müssen, können wir gegebene Zahlen jederzeit anders darstellen, sodass eine bestimmte Anzahl an Kugeln abgezogen werden können.

Analog zur Addition müssen wir uns auch bei der Subtraktion von Dezimalbrüchen merken, an welche Stelle wir das Komma gesetzt haben. Unter dieser Voraussetzung können wir wie gewohnt zwei Zahlen voneinander subtrahieren.

1.1.3 Multiplikation

Bei der Multiplikation wird der Abakus in seiner Größe besser ausgenutzt als bei den beiden zuvor beschriebenen Rechenoperationen. Ganz links befindet sich der Multiplikand, mit einer Strebe Abstand der Multiplikator und ganz rechts wird das Produkt eingetragen. Ebenso wie bei der Addition und Subtraktion wird von rechts nach links gerechnet. Die Kenntnis des kleinen Einmaleins bleibt uns bei diesem Rechengerät allerdings nicht erspart.

Den genauen Rechengang werden wir uns wieder an einem konkreten Beispiel überlegen. An dieser Stelle werden wir uns ausrechnen, wie viel „ $62 \cdot 3$ “ ist. Wir beginnen damit, sowohl den Multiplikand, in unserem Beispiel ist das „62“, als auch mit einer Spalte Abstand den Multiplikator, hier „3“, in den Abakus einzutragen.

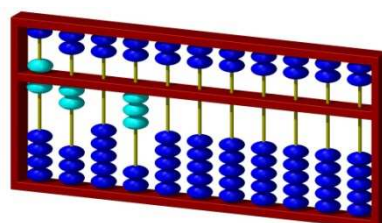


Abb. 22: Darstellung von „ $62 \cdot 3$ “

Nachdem wir die Vorarbeit geleistet und die Angabeelemente eingetragen haben, können wir mit der eigentlichen Multiplikation beginnen. Zuerst multiplizieren wir die Einerziffer des Multiplikanden mit dem Multiplikator und tragen das erhaltene Produkt ganz rechts ein.

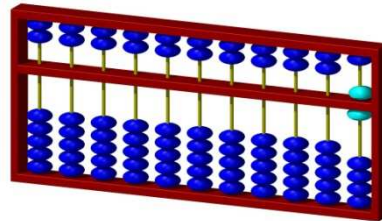


Abb. 23: Darstellung des Produkts von „ $2 \cdot 3$ “

Danach können wir bereits die Zehnerziffer des Multiplikanden mit dem Multiplikator multiplizieren. Beim Eintragen des Produkts muss darauf geachtet werden, dass wir um eine Stelle weiter nach links rücken müssen, da sich die Zehnerziffer schließlich auch eine Spalte links von der Einerziffer befindet. Das Ergebnis kann danach bereits direkt abgelesen werden.

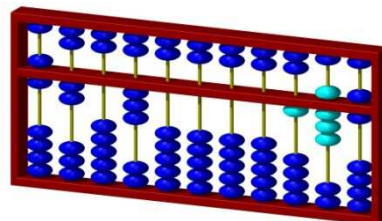


Abb. 24: Darstellung des Produkts von „ $6 \cdot 3$ “

Bei schwierigeren Multiplikationen kann es sein, dass die Anwendung der zuvor erklärten Hilfskonstruktion notwendig ist. Dies ändert jedoch nichts an der üblichen Vorgehensweise. Rechnen wir mit zwei „großen“ Zahlen also jenen, wo sich einige Nullen am Schluss befinden, werden diese gestrichen und erst dem Ergebnis wieder angehängt. Wichtig ist zu beachten, dass es bei der Multiplikation zur Verschiebung eines eventuell „gesetzten“ Kommas kommen kann.

1.1.4 Division

Der erste Schritt bei der Division ist der gleiche wie bei der Multiplikation - wir tragen in der Spalte ganz links den Divisor und mit einer Strebe Abstand den Dividenten ein. Wie nun genau die Division von statten geht, werden wir uns am Beispiel „165:11“ anschauen. In unserem Fall ist der Divisor „11“ und der Divident „165“. Aufgrund der Tatsache, dass wir eine drei-stellige durch eine zwei-stellige Zahl dividieren, können wir, sofern ein ganzzahliges Ergebnis entsteht, einen zwei-stelligen Quotienten erwarten.

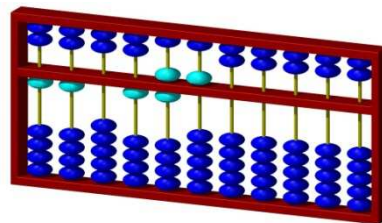


Abb. 25: Darstellung von „165 : 11 “

Ebenso wie bei der schriftlichen Division rechnen wir, bezogen auf den Dividenten, von links nach rechts. Da sich die Hunderterziffer des Dividenten nicht durch den Divisor teilen lässt, wird die Zehnerziffer des Dividenten dazu genommen – „16“ ist nun durch „11“ einmal teilbar. Aufgrund der Tatsache, dass wir von einem zwei-stelligen Endergebnis ausgehen, wird das ganzzahlige Ergebnis dieser Division in die zweite Spalte von rechts eingetragen. Nun muss der Quotient mit dem Divisor multipliziert und anschließend vom Dividenten subtrahiert werden.

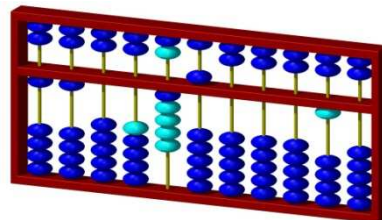


Abb. 26: Darstellung von „ $16 - (1 \cdot 11) = 16 - 10 - 5 + 4$ “

Somit ist noch die Einerziffer des Dividenten zu berücksichtigen. Diese wird zum Rest der ersten Division dazu genommen und durch den Divisor geteilt.

Das Ergebnis dieser Rechnung wird in die äußerste rechte Spalte eingetragen, sodass nun das Ergebnis der Division ablesbar ist.

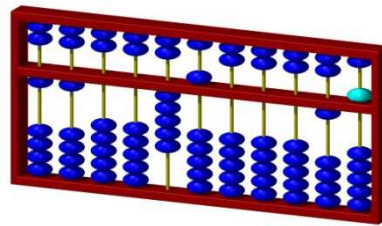


Abb. 27: Darstellung von „55:11“

Hätte man „größere“ Zahlen, also z. B. einen zweistelligen Divisor, würde es zu einer stückweisen Multiplikation kommen.

Bei der Division mit Rest geht man analog zur herkömmlichen Division vor. Der einzige Unterschied liegt darin, dass man den Quotienten nicht möglichst nahe am rechten Rand anschreibt, sondern mit nur einer Strebe Abstand gleich rechts vom Dividenden beginnt. Während der Rechnung kann es auch hier zu notwendigen Verschiebungen der einzelnen Komponenten kommen – dies stellt allerdings keinerlei Schwierigkeiten dar.

1.1.5 Wurzelziehen¹⁰

Die aufwendigste Rechenoperation beim Abakus ist das Quadratwurzelziehen. Grundidee dieser Operation ist die Zerlegung einer Zahl x in zwei Komponenten a und b , wobei $x = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist. Auch an dieser Stelle ist es sinnvoll, die Idee an Hand eines Beispiels zu erklären. Wir werden „ $\sqrt{529}$ “ berechnen.

Begonnen wird mit dem eintragen des Radikanden ganz rechts im Abakus, wobei nach je zwei Ziffern, ausgehend von einem eventuellen Komma, ein fiktives Komma (Apostroph) gesetzt wird.

¹⁰ Wir beschäftigen uns an dieser Stelle ausschließlich mit dem Ziehen der quadratischen Wurzel.

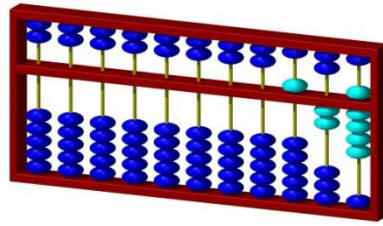


Abb. 28: Darstellung von „529“

Nun suchen wir die nächst kleinere Quadratzahl des ersten, von links betrachteten, Zweierpaares und tragen diese mit etwas Abstand zum zuvor eingetragenen Radikanden ein.

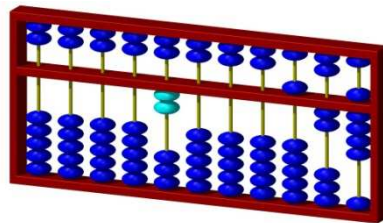


Abb. 29: Eintragen der nächst kleineren Quadratzahl „ $\sqrt{5} = 2, \dots$ “

Die erste Stelle des Arguments unter der Wurzel erhalten wir durch die Subtraktion der Quadratzahl von der Hunderterziffer des Radikanden. Das gesamte Argument lautet nun „129“.

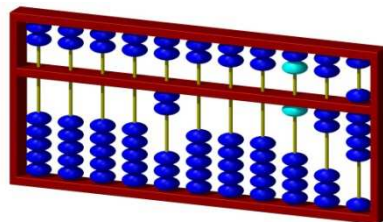


Abb. 30: Darstellung der ersten Stelle des Arguments „ $5 - 4 = 1$ “

Anschließend verdoppeln wir die Quadratzahl von vorhin und tragen diese mit einer Strebe Abstand in den Abakus ein – dies stellt eigentlich nur eine Nebenrechnung dar.

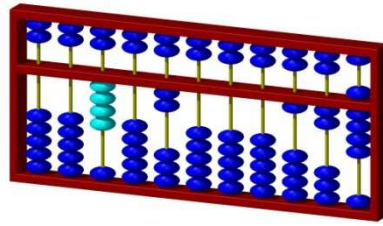


Abb. 31: Darstellung von „ $2 \cdot 2$ “

Da die Division der ersten Ziffer des Argument (= „1“) durch die verdoppelte Quadratzahl (= „4“) nicht möglich ist, wird die zweite Ziffer des Arguments (= „2“) dazu genommen. Das Ergebnis dieser Rechnung (= „3“) tragen wir neben die zuvor eingetragene Quadratzahl ein.

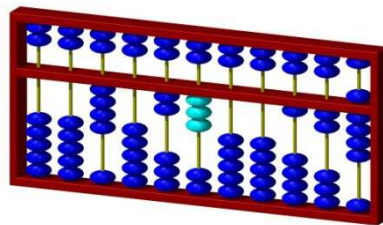


Abb. 32: Darstellung vom Wert des Quotienten

Wir müssen nun noch den Wert des Quotienten mit dem Quadrat der Quadratzahl multiplizieren und den ersten beiden Stellen des Arguments subtrahieren („ $3 \cdot 4 - 12 = 0$ “).

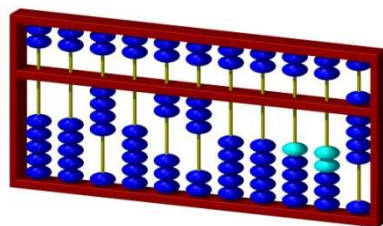


Abb. 33: Darstellung von „ $3 \cdot 4 - 12 = 0$ “

Das neue Argument ist nun „9“. Zu guter Letzt muss noch der Wert des Quotienten quadriert und vom aktuellen Argument abgezogen werden.

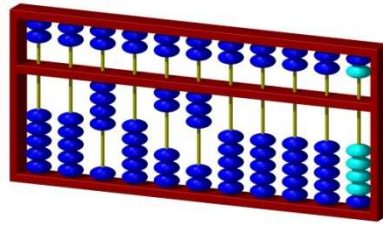


Abb. 34: Darstellung von „ $9 - 3^2 = 0$ “

Das zuvor eingetragene Ergebnis der Zwischenrechnung kann formhalber noch gelöscht werden, sodass man das Endergebnis ohne Probleme ablesen kann. Die Lösung von „ $\sqrt{529}$ “ ist „23“.

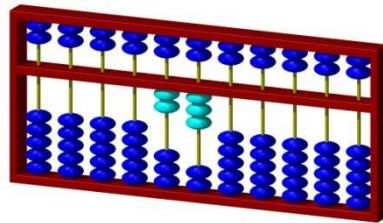


Abb. 35: Darstellung des Endergebnisses

1.2 Der Rechenschieber

Bei dem Rechenschieber handelt es sich um ein wissenschaftliches Rechengenrät, welches auf den Regeln logarithmischen Rechnens basiert, wobei alle Rechenoperationen auf die Addition bzw. Subtraktion von Längen zurückgeführt werden.

„Mit ein paar Handgriffen konnte jedermann multiplizieren, dividieren, Quadrat- und Kubikwurzeln ziehen. ... auch Inverse, Sinus, Cosinus oder Tangens ermitteln.“¹¹

Die Erfinder der Logarithmen waren Jost Bürgi (* 28.02.1552, † 31.01.1632) und Lord Napier (* 1550, † 1617). 1614 entwickelten sie die ersten Logarithmentafeln mit 9-stelliger bzw. 14-stelliger Genauigkeit.

¹¹ Zitat aus [XXI]

Henry Briggs (* Februar 1561, † 26.01.1630) erstellte die erste Tabelle mit Zehnerlogarithmen.

1	0,00000	2	0,30103	3	0,47712	4	0,60206	5	0,69897	6	0,77815	7	0,84510	8	0,90309	9	0,95424
1,1	0,04139	2,1	0,32222	3,1	0,49136	4,1	0,61278	5,1	0,70757	6,1	0,78533	7,1	0,85126	8,1	0,90849	9,1	0,95904
1,2	0,07918	2,2	0,34242	3,2	0,50515	4,2	0,62325	5,2	0,71600	6,2	0,79239	7,2	0,85733	8,2	0,91381	9,2	0,96379
1,3	0,11394	2,3	0,36173	3,3	0,51851	4,3	0,63347	5,3	0,72428	6,3	0,79934	7,3	0,86332	8,3	0,91908	9,3	0,96848
1,4	0,14613	2,4	0,38021	3,4	0,53148	4,4	0,64345	5,4	0,73239	6,4	0,80618	7,4	0,86923	8,4	0,92428	9,4	0,97313
1,5	0,17609	2,5	0,39794	3,5	0,54407	4,5	0,65321	5,5	0,74036	6,5	0,81291	7,5	0,87506	8,5	0,92942	9,5	0,97772
1,6	0,20412	2,6	0,41497	3,6	0,55630	4,6	0,66276	5,6	0,74819	6,6	0,81954	7,6	0,88081	8,6	0,93450	9,6	0,98227
1,7	0,23045	2,7	0,43136	3,7	0,56820	4,7	0,67210	5,7	0,75587	6,7	0,82607	7,7	0,88649	8,7	0,93952	9,7	0,98677
1,8	0,25527	2,8	0,44716	3,8	0,57978	4,8	0,68124	5,8	0,76343	6,8	0,83251	7,8	0,89209	8,8	0,94448	9,8	0,99123
1,9	0,27875	2,9	0,46240	3,9	0,59106	4,9	0,69020	5,9	0,77085	6,9	0,83885	7,9	0,89763	8,9	0,94939	9,9	0,99564

Abb. 36: Auszug aus der „Briggs’schen Logarithmentafel“

Aufgrund der Tatsache, dass alle Zahlen zur Basis 10 dieselben logarithmischen Werte haben – dass heißt, dass die Ziffernfolge bei den Zahlen 1, 10, 100 usw. hinter dem Komma ident ist und sich lediglich die Zahl vor dem Komma verändert – ist es ausreichend, eine Logarithmentafel mit den Werten 1 bis 10 zu haben.

Beispiel: $\log 4 = 0,60206$
 $\log 40 = 1,60206$
 $\log 400 = 2,60206$

Edmund Gunter (* 1581, † 10.12.1626) war der erste, der 1620 ein Lineal erfand, auf welchem er die logarithmische Skala, welche später auch nach ihm benannt wurde, anbrachte. Mit Hilfe eines Stechzirkels griff man die Zahlen ab, reihte sie aneinander und konnte anschließend das Multiplikationsergebnis ablesen.

Nur zwei Jahre später fertigte William Oughtred (* 05.03.1574, † 30.06.1660) Rechenstäbe an. Dabei brachte er auf zwei losen Stäben, welche aneinander gleiten konnten, die Gunter Skala an. Jene Zahlen, welche multipliziert wurden, mussten auf je einem Stab eingestellt werden, sodass danach das Produkt abgelesen werden konnte.

Mitte des 17. Jahrhundert kahl es zu einer neuerlichen Weiterentwicklung. Es entstand jene Form des Rechenschiebers, wie wir sie auch heute noch kennen: zwei Rechenstäbe wurden fix montiert und in der Spur, also jenem Bereich zwischen ihnen, wurde ein dritter Stab, die Zunge, eingefügt, welcher allerdings im Gegensatz zu den anderen Beiden beweglich war.

1850 erfand Amédée Mannheim (* 1831, † 1906) einen durchsichtigen „Läufer“. Dabei handelt es sich um einen beweglichen Plastikteil mit einem dünnen, senkrechten Strich welcher sich über allen Stäben bewegt, bestimmte Stellen markiert und es einem ermöglicht, z.B. das Ergebnis leichter abzulesen. Zu diesem Zeitpunkt startete auch die Massenproduktion der Rechenschieber.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhundert kam es zur Hochsaison dieses Rechengeräts. Mitte der 70iger Jahre wurde der Rechenschieber allerdings nach fast 400 Jahren vom elektronischen Taschenrechner abgelöst. Heute verwenden wir dieses Rechenhilfsmittel in der Schule, um den Schülern die Nützlichkeit einer logarithmischen Skalierung nahe zu bringen. Zum Rechnen wird er allerdings nur mehr von den Asiaten verwendet.

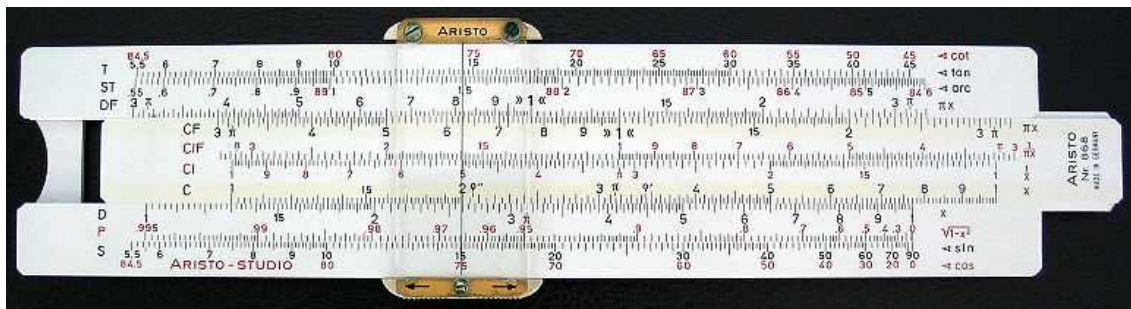


Abb. 37: Beispiel eines Rechenschiebers¹²

Im Laufe der Jahrzehnte wurden je nach Bedarf verschiedene Skalen hinzugefügt. Um dabei nicht die Übersicht zu verlieren, wurden entsprechende Abkürzungen eingeführt. Zu den am häufigsten verbreiteten Skalen zählen:

- Grundskalen C, D (C befindet sich auf der Zunge),
- Quadratskalen A, B (B befindet sich auf der Zunge),
- Kubikskala K,
- Reziprokskala CI (Kehrwert einer Zahl auf der Skala C),
- Logarithmenskala L,
- Sinusskala S (befindet sich auf der Rückseite der Zunge),
- Tangensskala T (befindet sich auf der Rückseite der Zunge) sowie
- Arcustangensskala ST (befindet sich auf der Rückseite der Zunge).

¹² Quelle zu Abb. 37 siehe Bildverzeichnis

Wir unterscheiden drei verschiedene Systeme von Rechenschiebern:

- Darmstadt,
- Rietz und
- Aristo-Studio.

Bei den Systemen „Darmstadt“ und „Rietz“ handelt es sich um einseitige technisch-wissenschaftliche Rechenschieber. Das System „Aristo-Studio“ ist ein doppelseitiger technisch-wissenschaftlicher Rechenschieber. Für Finanzberechnungen, Kaufleute oder andere Spezialbereiche wurden spezielle Systeme entwickelt.

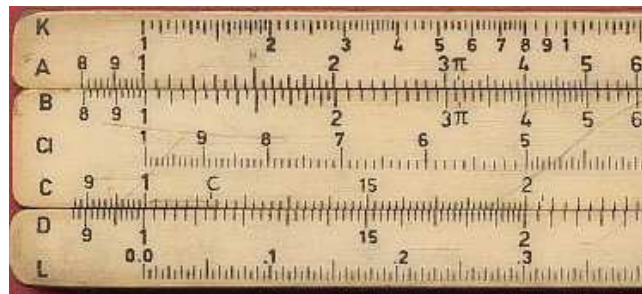


Abb. 38: Bekanntestes System – System Rietz¹³

Das Grundprinzip aller Varianten besteht in folgenden zwei Grundregeln¹⁴:

- „Die Schieber können stufenlos und fließend verstellt bzw. verschoben werden. Deshalb handelt es sich um analog arbeitende Geräte, - im Gegensatz zu digital arbeitenden Geräten, mit einzeln darstellbaren Stellungen und Anzeigen.“
- „Auf logarithmischen Rechenschiebern und ähnlichen Geräten werden Rechengänge wie Multiplizieren und Dividieren, auch Potenzieren und Radizieren durchgeführt. Addition und Subtraktion sind nicht unmittelbar möglich.“

Rechenschieber gibt es in den unterschiedlichsten Materialien – wie z.B. Holz, Aluminium, Kunststoff, Pappe, Elfenbein oder Fiberglas – und Größen.

¹³ Quelle zu Abb. 38 siehe Bildverzeichnis

¹⁴ Zitat aus [xv]

Ein normaler Rechenschieber hat eine 25 cm lange, ein Taschenrechenschieber eine 12,5 cm sowie ein großer Rechenschieber eine 50 cm lange Skalenlänge. Rechengeräte mit 15 cm Länge haben eine Genauigkeit von maximal drei Stellen, eines mit 10-facher Länge ist um eine Stelle genauer.

Ein großer Nachteil dieses Rechenhilfsmittels lag in der Genauigkeit der Ergebnisse. Die Genauigkeit der Skala nimmt nach rechts hin ab – wo zwischen den Zahlen 1 und 2 ein Abstand von 7,5 cm ist, beträgt er zwischen den Zahlen 9 und 10 nur mehr ungefähr 1 cm. Benötigt man genauere Zwischenergebnisse, kommt man um eine Interpolation nicht herum. Generell kann man sagen, dass gilt: Je größer ein Rechenschieber ist und je weniger Zahlen sich auf einer Skala befinden, desto genauer kann man die Ergebnisse und Werte ablesen.

Um dieses schwerwiegende Problem der Genauigkeit in den Griff zu bekommen kam es zur Entwicklung von Rechenwalzen. Eine *Rechenwalze* entsteht, wenn man große Rechenstäbe in gleich lange Teile schneidet und anschließend die einzelnen Teile untereinander auf einem Zylinder anbringt.



Abb. 39: Rechenwalze¹⁵



Abb. 40: Rechenrost¹⁶

Eine Zwischenstufe zwischen dem Rechenschieber und der Rechenwalze ist der *Rechenrost*. Hier wird der Multiplikator direkt auf dem Multiplikand aufgesetzt. Das Ergebnis kann direkt in einer Ecke des Rosts in den markierten Kreisen abgelesen werden.

Zu guter letzt kam es zur Entwicklung der *Rechenscheibe*. Dabei handelt es sich um einen Rechenschieber mit konzentrischer Anordnung der Skalen. Eine etwas abgeänderte Form wird heute noch zur Berechnung des Spritverbrauches verwendet.



Abb. 41: Rechenscheibe¹⁷

¹⁵ Quelle zu Abb. 39 siehe Bildverzeichnis

¹⁶ Quelle zu Abb. 40 siehe Bildverzeichnis

¹⁷ Quelle zu Abb. 41 siehe Bildverzeichnis

Bei allen erwähnten Formen des Rechenschiebers gibt es jedoch das Problem, dass Zahlen, welche > 10 oder < 1 sind, eigentlich nicht mehr auf der Skala vorhanden sind. Um dennoch mit ihnen rechnen zu können, müssen alle Zahlen in positive Zehnerpotenzen umgewandelt werden.

Nun zu den Rechenoperationen. Am Rechenschieber sind folgende Operationen durchführbar: Multiplikation, Division, Dekadischer Logarithmus, Quadrat, Quadratwurzel, Kubik, Kubikwurzel, Bildung des Reziprokwertes und Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, kleiner Winkel und sehr kleiner Winkel.

Analog wie beim Abakus [↑ 1.1] werden am Rechenschieber nur die Ziffernfolgen angegeben. Wo sich die Kommastelle befindet, müssen wir uns merken.

1.3 Der Taschenrechner

Nachfolger des Rechenschiebers ist der Taschenrechner. 1963 wurde der erste elektronische Rechner mit Transistoren entwickelt. Er beherrschte die vier Grundrechnungsarten und schaffte eine 12-stellige Genauigkeit. Über die Angabe, dass er „überall“ einsetzbar war, kann man streiten – schließlich war er so groß wie ein Tisch.

Im Frühling 1967 kam der erste „wirkliche“ Taschenrechner auf den Markt. Entwickelt wurde der Handflächengroße und 1,5 kg schwere Rechner von Jack Kilby (* 08.11.1923, † 20.06.2005) im Auftrag von Texas Instruments. Erst am 29.09.1967 ließen ihn Jack Kilby, Jerry Merryman und James Van Tassel patentieren.



Abb. 42: Erster Taschenrechner von TI¹⁸

¹⁸ Quelle zu Abb. 42 siehe Bildverzeichnis

Mit Hilfe von Batterien war er durchgehend vier Stunden einsetzbar. Das errechnete Ergebnis wurde auf einen Thermopapierstreifen gedruckt. Die Kosten dieses Sensationsrechners beliefen sich damals auf 2000 DM – um diesen Betrag hätten wir uns damals auch einen VW-Käfer kaufen können. Eine wesentliche Erneuerung im Gegensatz zu vorher entwickelten Rechnern war, dass einerseits das Gewicht von mehr als 25 kg auf 1,5 kg reduziert und andererseits ein Schaltkreis mit einem Mikrochip integriert wurde.

Jerry Merryman meinte bei der 40-Jahre Feier im Washingtoner National Museum of American History im Bezug auf den Einsatz von Taschenrechnern:

„Ich dachte, dass ein paar Buchhalter den Rechner benutzen würden. Und vielleicht könnten ein paar Ingenieurs-Studenten sie als Geschenk bekommen.“¹⁹

Nur drei Jahre nach der Erfindung des Taschenrechners kam der erste Taschenrechner in Japan auf den Markt. Diesen konnte man damals für umgerechnet 1250 DM erwerben.



Abb. 43: 1970: erster Taschenrechner Japans²⁰

1971 brachte die Firma Bowmar das Modell „Bowmar 901B“ in den Vereinigten Staaten auf den Markt. Die Firma Bowmar ist ebenso wie die Firmen Busicom, Canon, Compucorp, Sanyo und Sharp ein Konkurrenzbetrieb zu Texas Instruments.

Die Entwicklung des Taschenrechners ging so rasant voran, dass neben den Grundrechnungsarten auch exponentielle und trigonometrische Funktionen berechnet werden konnten. Aufgrund der Tatsache, dass man ein solches Gerät bereits um umgerechnet 50 € erhielt, startete 1972 die Massenproduktion.

¹⁹ Zitat aus [xv]

²⁰ Quelle zu Abb. 43 siehe Bildverzeichnis

Noch im selben Jahr wurde der erste wissenschaftliche Taschenrechner von der Firma Hewlett-Packard entwickelt.



Abb. 44: *Erster wissenschaftlicher Taschenrechner: HP-35*²¹

Der HP-35 wog nur mehr $\frac{1}{4}$ kg und konnte auf Knopfdruck Logarithmen und Funktionswerte mit 12-stelliger Genauigkeit berechnen. Das interessante dabei war allerdings, dass die Werte nicht gespeichert waren, sondern mit Hilfe eines Algorithmus der Reihenentwicklung jedes Mals aufs Neue berechnet wurden. Weiters wurde zur Eingabe der Zahlen die umgekehrte polnische Notation (UPN) in Verbindung mit einem automatischen Kellerspeicher verwendet – was das genau bedeutet, werden wir in Kürze besprechen. Dieser wesentliche Fortschritt schlug sich allerdings im Preis nieder. Der erste wissenschaftliche Taschenrechner kostete damals 1987 DM.

Gegen Mitte bzw. Ende der 80iger Jahre begann die Zeit, ab der der Taschenrechner für jedermann leistbar wurde. Seit 1977 findet er ab der 7. Schulstufe Einzug im Schulunterricht bzw. bei Schularbeiten.



Abb. 45: *Taschenrechner der 80iger Jahre*²²

²¹ Quelle zu Abb. 44 siehe Bildverzeichnis

²² Quelle zu Abb. 45 siehe Bildverzeichnis

Im Laufe der Jahre entwickelten die verschiedensten Firmen unterschiedliche Eingabelogiken. Zu den bekanntesten zählen

- die algebraische / arithmetische Notation,
- die sequentielle Eingabe und
- die umgekehrte polnische Notation.

Bei der *algebraischen / arithmetischen Notation* wird die Rangfolge der Notationen berücksichtigt – Punkt- vor Strichrechnung. Es können Klammern gesetzt werden, um auf die Reihenfolge Einfluss zu nehmen.

Beispiel: $4 \cdot 5 + 8 = 28$
 $8 + 4 \cdot 5 = 28$

Hingegen werden bei der *sequentiellen Eingabe* die Operationen nach der Reihenfolge der Eingabe durchgeführt.

Beispiel: $7 \cdot 3 + 4 = 25$
 $4 + 7 \cdot 3 = 33$

Die *umgekehrte polnische Notation* bedeutet, dass zuerst die Operanden und anschließend der Operator eingegeben werden.

Beispiel: $6 \ 2 \ + \ = \ 8$

Generell unterscheiden wir sechs verschiedene Funktionen bei Taschenrechnern, wobei heute meistens mehrere Bereiche kombiniert werden:

- Einfach oder 4-Funktionen,
- Finanz- oder Wissenschaft,
- Wissenschaftlicher Taschenrechner,
- Programmierbarer Taschenrechner,
- Grafikfähiger Taschenrechner oder
- Computeralgebra Rechner.

Heutzutage beinhaltet jeder Taschenrechner, egal mit wie vielen Funktionen er ausgestattet ist, einen elektronischen Schaltkreis sowie einen Flüssigkristallbildschirm (LCD), auf welchem die Eingabe bzw. das Ergebnis bequem abgelesen werden kann. Es gibt sowohl batteriebetriebene Taschenrechner als auch solche, welche mit Solarzellen funktionieren. Die Genauigkeit bei den Rechenoperationen hängt von den verwendeten numerischen Näherungsverfahren ab. Bei Computeralgebra-Rechnern können wir manchmal sogar die gewünschte Stellengenauigkeit einstellen. Außerdem können bei vielen Taschenrechnern Variablen frei belegt sowie selbst programmiert werden. Neben dem Rechnen mit komplexen Zahlen können Integral- und Differentialrechnungen sowie Matrizenrechnung leicht durchgeführt werden. Das Ergebnis kann zumeist sowohl numerisch als auch graphisch am LCD dargestellt werden.



Abb. 46: Beispiel eines „klassischen“ Schulrechners und eines CAS-Taschenrechners²³

Der „klassische“ Schulrechner ist heute um ~ 15 € erhältlich und wird bereits ab der 1. Klasse AHS sowohl im Unterricht als auch bei Schularbeiten, Test oder Hausübungen verwendet. Auf der Universität bzw. in manchen Schulklassen als Schulversuch wird ein CAS (= Computer Algebra System) – Taschenrechner verwendet. Diese sind allerdings mit ca. ~ 200 € noch sehr teuer in der Anschaffung.

Trotz der Tatsache, dass Taschenrechner immer mehr können und günstiger werden, gehen die Verkaufszahlen zurück. Grund dafür ist, dass mittlerweile die Grundfunktionen eines Taschenrechners auf nahezu jedem Handy, in Uhren, PDAs (= Personal Digital Assistant) und Computern integriert ist.

²³ Quelle zu Abb. 46 siehe Bildverzeichnis

KAPITEL 2: Möglichkeiten der Zahlendarstellung

2.1 Zahlensysteme

Zu den bekanntesten Zahlensystemen zählt neben dem im täglichen Leben verwendeten Dezimalsystem das Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem.

Zahlensysteme	Basis ²⁴ b	Mögliche Ziffern
Binärsystem	2	0, 1
Oktalsystem	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Dezimalsystem	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Hexadezimalsystem	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Mit welcher Basis b nun gearbeitet wird, hängt von den verschiedenen Herstellern ab. In den 60iger und 70iger Jahren verwendete z.B. die Firma IBM das Hexadezimalsystem bei ihren Mainframe-Computern. Heutzutage wird das Binärsystem bei allen handelsüblichen Computern eingesetzt. Die meisten Taschenrechner sowie im Alltag kommt jedoch das Dezimalsystem zum Einsatz.

Jede reelle Zahl x , welche von 0 verschieden ist, kann im Dezimalsystem dargestellt werden. Hierzu wird die Form

$$x = \pm a_1 a_2 a_3 \dots \cdot 10^q$$

verwendet, wobei $0 \leq a_i \leq 9$ sowie $q \in \mathbb{Z}$ ist. Diese Darstellungsform bezeichnen wir als *Exponentialdarstellung*.

Beim Rechnen mit dem Taschenrechner stoßen wir allerdings an Grenzen. Aufgrund der Endlichkeit des Speichers können bei den heutigen Rechengeräten reelle Zahlen nur auf endlich viele Stellen genau eingegeben bzw. damit gerechnet werden.

²⁴ Eine Basis b (oder auch Grundzahl genannt) steht für die Anzahl der in einem Zahlensystem vorhandenen Symbole.

Das Problem dabei ist, dass irrationale Zahlen wie z.B. π oder $\sqrt{2}$ nicht genau dargestellt werden können.

Welche Möglichkeiten wir haben, Zahlen darzustellen, werden wir uns nun genauer anschauen.

2.2 Zahlendarstellungen

Wir werden in dieser Arbeit vier Darstellungsvarianten behandeln und diskutieren, welche von diesen beim Taschenrechner Einsatz kommen.

2.2.1 Festkommazahlen

In der Festkommaarithmetik bezeichnen wir eine Zahl, welche eine feste Anzahl an Ziffern besitzt, als Festkommazahl. Dabei ist die Stelle des Kommas fix vorgegeben.

Die formale Definition lautet wie folgt:

Alle Zahlen

$$r = (-1)^s \cdot \sum_{i=-n}^{v-1} r_i \cdot b^i \in \mathbb{R} \text{ mit } r_i \in \{0, \dots, b-1\} \text{ für } -n \leq i \leq v-1 \text{ und } v, n \in \mathbb{N}_0,$$

welche eine fixe Anzahl an Vor- und Nachkommastellen haben, bilden die Menge der *Festkommazahlen* M_f .

Der Grundgedanke liegt in der exakten Darstellung, ohne etwaige Rundungsfehler, eines Ausschnitts der rationalen Zahlen. Voraussetzung für die Verwendung einer Festkommazahl ist die Kenntnis der Vor- und Nachkommastellen.

Sind alle Bedingungen erfüllt, können wir mit ihnen in einem eingeschränkten Bereich rechnen, wie wir es auch bei den ganzen Zahlen machen würden. Lediglich bei der Multiplikation und Division müssen wir eventuell Nachkommastellen abschneiden.

2.2.2 Intervallarithmetik

Im Gegensatz zur Festkommaarithmetik hat jede Zahl bei der Intervallarithmetik beliebig viele Stellen und lässt sich durch einschließende Intervalle darstellen.

Vorschriftsmäßig würde man solche Zahlen folgendermaßen definieren:

Bei der *Intervallarithmetik* wird jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ in einem Intervall $[r_1, r_2]$ mit $r_1 \leq r \leq r_2$ eingeschlossen. Bei den Intervallgrenzen r_1 und r_2 handelt es sich um Maschinenzahlen. Unter einer Maschinenzahl versteht man eine Zahl, welche im Computer dargestellt werden kann.

Möchten wir nun mit Hilfe der Intervallarithmetik rechnen, müssen wir für die Verknüpfung zweier Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ folgende Rechenregeln, welche uns für das Ergebnis jeweils die obere und untere Schranke bestimmen, beachten.

Bei der Addition bzw. Subtraktion gelten folgende Vorschriften:

$$[r_1, r_2] \pm_M [s_1, s_2] := [r_1 \pm s_1, r_2 \pm s_2],$$

wobei das M bei der Rechenoperation die Maschinenzahlen kennzeichnet.

Für die Multiplikation gilt:

$$[r_1, r_2] \cdot_M [s_1, s_2] := [\min(r_1 s_1, r_1 s_2, r_2 s_1, r_2 s_2), \max(r_1 s_1, r_1 s_2, r_2 s_1, r_2 s_2)].$$

Die Division lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$[r_1, r_2] :_M [s_1, s_2] = \frac{[r_1, r_2]}{[s_1, s_2]} := [r_1, r_2] \cdot \frac{1}{[s_1, s_2]},$$

wobei $0 \notin [s_1, s_2]$ gilt sowie M die Maschinenzahlen kennzeichnet.

2.2.3 Gleitpunktzahlen

Im Unterschied zur Festkommazahl ist bei der Gleitpunktzahl keine feste Stelle für das Komma vorgesehen. Umfassen die Maschinenzahlen ein möglichst großes Intervall der reellen Zahlen und bleibt dabei die Genauigkeit bei kleinen Zahlen sehr hoch und bei großen Zahlen zwar niedriger aber trotzdem noch relativ hoch, so sprechen wir von einer *Gleitpunktdarstellung* der Zahlen. Auf Grund der Tatsache, dass bei dieser Form der Darstellung die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division effizient durchgeführt werden können, ist diese die heute übliche Approximation von $\mathbb{R}$.

Die 1953 von Konrad Zuse (* 22.06.1910, † 18.12.1995) entwickelte, damals „halb-logarithmische Zahlendarstellung“ genannte, *Gleitpunktzahl* lässt sich wie folgt definieren:

Jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ lässt sich in drei verschiedene Bestandteile zerlegen:

- ein Vorzeichen $(-1)^v$ mit $v \in \{0, 1\}$,
- eine Mantisse $m = \pm a_1 a_2 a_3 \dots a_i, a_{i+1} \dots a_p \in \mathbb{R}$ und
- einen Exponenten $q \in \mathbb{R}$.

Sowohl der Wert der Mantisse als auch jener des Exponenten sind dabei nicht eindeutig festgelegt.

Nun lässt sich die reelle Zahl r schreiben als:

$$r = (-1)^v \cdot m \cdot b^q,$$

mit der Basis $b \geq 2$ und $a_1 \neq 0$. Bei einer p -stelligen Mantisse, $p \in \mathbb{N}$, haben wir $n = p - k - 1$ Nachkommastellen, wobei k die Ziffern vor dem Komma bezeichnet, sowie eine Mantisse m zwischen 0 und $b(1 - b^{-p})$.

In dieser Form ist jede Zahl in abzählbar unendlich vielen Möglichkeiten darstellbar.

Beispiel:

$$3 = 3,0 \cdot 10^0$$

$$3 = 0,3 \cdot 10^1$$

$$3 = 30,0 \cdot 10^{-1}$$

2.2.4 Normalisierte / Subnormale Gleitpunktzahlen

Das Ziel bei der normalisierten Gleitpunktzahl ist eine eindeutige Darstellung, wobei vor dem Komma stets eine Null stehen muss, welche zu Gunsten der Speicherkapazität auch weggelassen werden kann.

Definiert werden die *normalisierten Gleitpunktzahlen* wie nachstehende Definition zeigt: Die Menge der normalisierten Gleitpunktzahlen M_N bzw. $M_{N,t}$ wird festgelegt durch die Menge der reellen Zahlen $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, welche dargestellt werden durch

$$r = (-1)^v \cdot m \cdot b^q = (-1)^v \cdot \sum_{i=0}^{t-1} r_i \cdot b^{-i} \cdot b^q.$$

Da die obige Darstellung für reelle Zahlen $r = 0$ sowie in der Nähe von Null nicht zulässig ist, kommt es zur Entwicklung der Menge der *nicht-normalisierten* bzw. *subnormalen Gleitpunktzahlen* M_S oder $M_{S,t}$.

Diese werden folgendermaßen definiert:

$$r = (-1)^v \cdot m \cdot b^q = (-1)^v \cdot \sum r_i \cdot b^{-i} \cdot b^{q_{\min}}.$$

Die Entfernungen zwischen den einzelnen Gleitpunktzahlen sind unterschiedlich groß. Generell kann man sagen, dass die Distanz der aufeinanderfolgenden Zahlen, von der Null weg gesehen, zunimmt. Wegen der durchgeführten Normalisierung der Gleitpunktzahlen tritt eine große Lücke zwischen der Null und der kleinsten normalisierten Zahl auf.

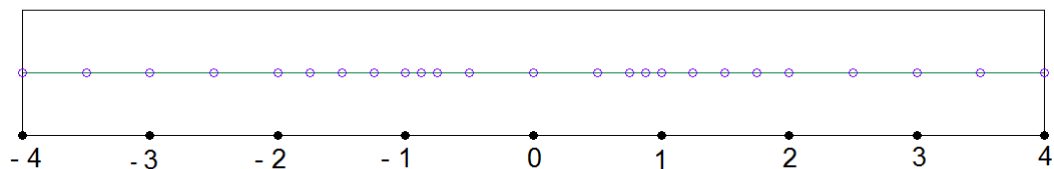


Abb. 46: Zahlenstrahl der normalisierten Gleitpunktzahlen

Um diesen Zwischenraum zu schließen, werden für die verwendeten Zahlen mit einem Exponenten $q_{\min}$ auch subnormale Mantissen zugelassen.

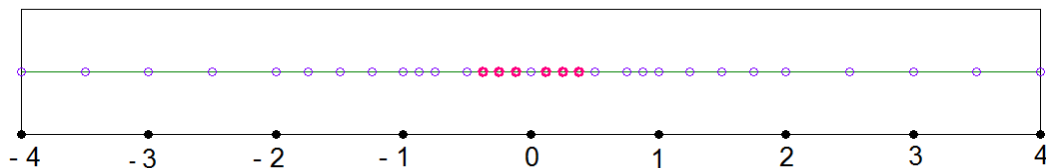


Abb. 47: Zahlenstrahl der normalisierten Gleitpunktzahlen inkl. subnormaler Gleitpunktzahlen

Aufgrund der Tatsache, dass das Rechnen mit normalisierten bzw. subnormierten Gleitpunktzahlen wesentlich einfacher ist, wird in so gut wie allen Taschenrechnern diese Art der Zahlendarstellung gewählt. Beim Taschenrechner müssen wir bedenken, dass eine andere normalisierte Darstellung vorliegt:

Im Allgemeinen sprechen wir bei der Darstellung

0.12345...

von einer normalisierten Darstellung. Beim Taschenrechner hingegen sieht diese Art der Darstellung folgendermaßen aus:

1.2345...

KAPITEL 3: Welche Arten von Fehler gibt es?

Unter einem Fehler verstehen wir in der numerischen Mathematik eine Abweichung von einem exakten Wert.

Derartige Fehler können u.a. durch ungenaues Ablesen von Messergebnissen, bei falsch angewendeten Messverfahren, durch rechnerinterne Fehldarstellungen von Daten aber auch durch eine nicht exakte Eingabe von Werten, durch eine ungenaue Darstellung der Ausgabedaten entstehen sowie vieles mehr.

Diese unterschiedlichsten Fehlerquellen lassen sich in der numerischen Mathematik in vier verschiedene Fehlerarten unterteilen:

- Modellfehler,
- Datenfehler,
- Verfahrensfehler sowie
- Rechen- bzw. Rundungsfehler.

Generell sind diese vier Fehlertypen nicht vermeidbar, wir können aber versuchen, diese in Grenzen zu halten.

Die folgende Grafik veranschaulicht uns, wie es zur Entstehung der einzelnen Fehler kommt und vor allem in welchen Zusammenhang die oben erwähnten Fehlerarten stehen:

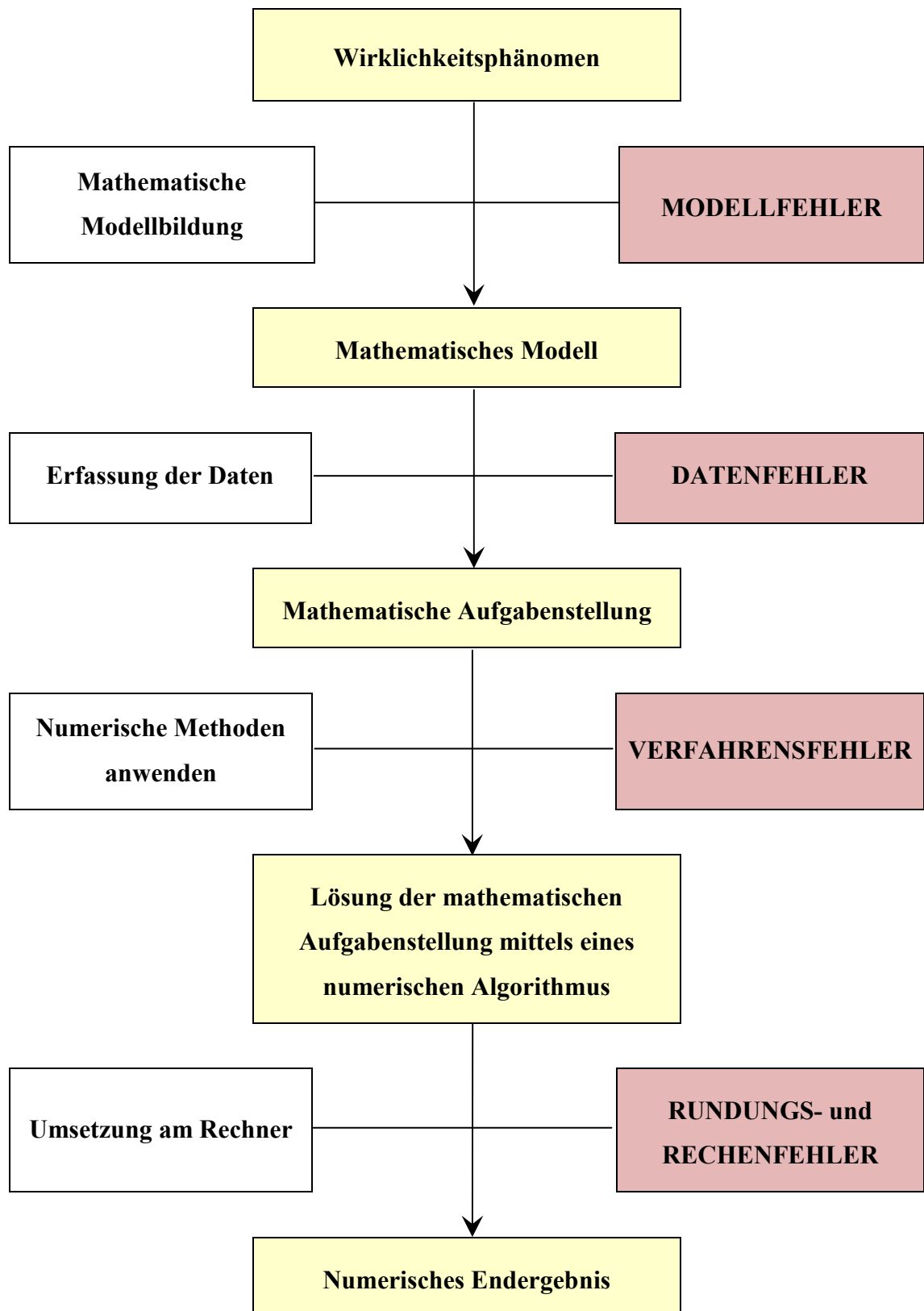


Abb. 48: Fehlertypen auf dem Weg vom Wirklichkeitsmodell bis hin zum numerischen Endergebnis

Nun aber zu den einzelnen Fehlertypen:

3.1 Modellfehler

Ein Modellfehler entsteht, wenn wir eine reale Situation so vereinfachen, dass wir sie in einem mathematischen Modell formulieren können.

Auswirkungen auf das Endergebnis, die durch solche Vereinfachungen entstehen, benennen wir als Modellfehlereffekt. In manchen Fällen können sie als Datenfehler abschätzen.

Je nach Art des Wirklichkeitsphänomens kann es zu einer Korrektur des Modells kommen, sodass eine Verringerung des Modellfehlers möglich ist.

3.2 Datenfehler

Unter einem Datenfehler verstehen wir einen Fehler, den wir aufgrund von Messfehlern bzw. Messungenauigkeiten erhalten. Algebraische oder analytische Daten sind uns bereits vor der Rechnung bekannt. Zu solchen Werten zählen z.B. die Masse eines Balles, die Länge eines Nagels sowie die Temperatur an einem beliebigen Ort. Aber auch Vektoren, Matrizen, Funktionen etc. sind Beispiele für Daten.

Als Datenfehlereffekte bezeichnen wir die Auswirkungen von Fehlern in den Daten auf das zu ermittelnde Endergebnis.

Eine Möglichkeit die wir haben, Datenfehler möglichst gering zu halten, ist eine Erhöhung der Messgenauigkeit.

Möchten wir wissen, wie groß der Fehler beim Ergebnis in Abhängigkeit vom Datenfehler ist, müssen wir die Konditionszahl κ betrachten:

Gegeben sei ein Problem $f: K^n \rightarrow K^m$ ²⁵, welches vom Eingabewert x abhängt. Mit $\tilde{f}$ bezeichnen wir einen numerischen Algorithmus für f . $\tilde{x}$ kennzeichnet die fehlerhaften Eingabedaten. Der dabei entstehende Fehler

$$\|f(x) - \tilde{f}(\tilde{x})\|$$

wird mit

$$\|f(x) - \tilde{f}(\tilde{x})\| = \|f(x) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x})\| \leq \underbrace{\|f(x) - f(\tilde{x})\|}_{\text{Kondition}} + \underbrace{\|f(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x})\|}_{\text{Stabilität}}$$

abgeschätzt – Die Norm muss dabei geeignet gewählt werden. Dabei ist die Kondition eine Eigenschaft des Problems und die Stabilität²⁶ eine Eigenschaft des Algorithmus.

Generell unterscheidet man zwischen der absoluten und der relativen Kondition. Die absolute Kondition κ_{abs} definieren wir als

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist κ_{abs} die kleinste Zahl, für die

$$\exists \delta > 0 : \|f(x) - f(x_0)\| \leq \kappa_{abs} \|x - x_0\|, \forall x \|x - x_0\| < \delta$$

gilt.

²⁵ Mit K bezeichnen wir einen Körper, wie z.B. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

²⁶ Wir bezeichnen einen Algorithmus bzw. ein Verfahren als *stabil*, wenn die Ergebnisse auf Störungen der Daten etwa in gleichem Maße reagieren.

Die relative Kondition κ_{rel} , welche eine Zahl stets größer / gleich 1 ist, besitzt folgende Eigenschaft:

$$\underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|f(x)\|}}_{\text{relative Änderung des Funktionswertes}} \leq \kappa_{rel} \underbrace{\frac{\|x_0 - x\|}{\|x\|}}_{\text{relative Änderung des Parameters}}.$$

Eine schlechte Kondition liegt vor, wenn die Konditionszahl κ deutlich größer als 1 ist. Hat κ einen Wert nahe 1, so spricht man von einer guten Kondition.

Beispiele für einen Datenfehler

Anhand dieser Beispiele soll der Unterschied zwischen einer guten und einer schlechten Kondition gezeigt werden. Die in Maple durchgeführten Berechnungen können im Anhang nachgelesen werden.

Beispiel 1: [↑ A.1] Gegeben ist ein 2×2 - lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1.7542918536 \cdot x_1 - 2.5397429552 \cdot x_2 &= 1.0282165641 \\ 3.5092741178 \cdot x_1 + 4.9836402735 \cdot x_2 &= 5.9836409642. \end{aligned}$$

Lösen wir dieses nach x_1 und x_2 auf, so erhalten wir folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.150988119 \\ x_2 &= 0.3901782716. \end{aligned}$$

Verfälschen wir den obigen Datensatz zu

$$\begin{aligned} 1.7542918000 \cdot x_1 - 2.5397429000 \cdot x_2 &= 1.0282165000 \\ 3.5092741000 \cdot x_1 + 4.9836402000 \cdot x_2 &= 5.9836409000, \end{aligned}$$

so erhalten wir folgende Lösungen für x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 &= \mathbf{1.150988110} \\x_2 &= \mathbf{0.3901782749} .\end{aligned}$$

Da der Unterschied bei den Ergebnissen zwischen den „exakten“ und den verfälschten Daten erst ab der 8. bzw. 9. Stelle liegt, sprechen wir in diesem Fall von einer *guten Kondition*.

Zur Veranschaulichung berechnen wir die Konditionszahl für dieses Beispiel:

Die Konditionszahl lässt sich berechnen durch

$$\kappa = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 ,$$

wobei $\|A\|_2 = 6.213307167$ und $\|A^{-1}\|_2 = 0.3519204886$. Setzen wir nun die für A und A^{-1} errechneten Werte in unsere Gleichung ein, so erhalten wir

$$2.186590094$$

als Konditionszahl.

Beispiel 2: [↑ A.2] Gegeben ist ein 2×2 - lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1.743681226 \cdot y_1 - 2.5287326143 \cdot y_2 &= 3.666771987 \\4.359203065 \cdot y_1 - 5.321302803 \cdot y_2 &= 6.667195145 .\end{aligned}$$

Lösen wir dieses nach y_1 und y_2 auf, so erhalten wir folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}y_1 &= -1.520374543 \\y_2 &= -2.498413829 .\end{aligned}$$

Um überprüfen zu können, ob es sich bei diesem Datensatz um ein gut oder schlecht konditioniertes Problem handelt, ändert man den Datensatz ab. Das verfälschte System hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned} 1.743681000 \cdot y_1 - 2.5287326000 \cdot y_2 &= 3.666771000 \\ 4.359203000 \cdot y_1 - 5.321302000 \cdot y_2 &= 6.667195000 . \end{aligned}$$

Die Lösungen hierfür lauten:

$$\begin{aligned} y_1 &= -1.520368039 \\ y_2 &= -2.498408832 . \end{aligned}$$

Obwohl wir die Daten lediglich an den letzten drei Stellen verändert haben, erhalten wir beim Ergebnis eine Änderung der letzten fünf Stellen. Da die Verfälschung der Lösung größer ist als jene bei den Daten, sprechen wir von einer *schlechten Kondition*.

Zur Veranschaulichung berechnen wir auch in diesem Beispiel die Konditionszahl:

Die Konditionszahl lässt sich berechnen durch

$$\kappa = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 ,$$

wobei $\|A\|_2 = 7.529949404$ und $\|A^{-1}\|_2 = 4.316132912$. Setzen wir nun die für A und A^{-1} errechneten Werte in unsere Gleichung ein, so erhalten wir

$$32.50026245$$

als Konditionszahl.

Anhand der Konditionszahl können wir erkennen, ob es sich um eine gute oder schlechte Kondition handelt. Je kleiner die Konditionszahl κ ist, desto besser ist die Kondition des Problems – je größer die Konditionszahl κ ist, desto schlechter ist die Kondition.

3.3 Verfahrensfehler

Wenden wir auf die zuvor erstellte mathematische Aufgabe eine numerische Methode an, so kommt es dabei zu einem Verfahrensfehler. Dieser ergibt sich als

$$\text{Verfahrensfehler} := \text{numerische Näherung} - \text{exakte Lösung}.$$

Formal lässt sich ein Verfahrensfehler etwa am Beispiel des numerischen Differenzenquotienten wie folgt anschreiben:

$$\text{Verfahrensfehler} := \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{\text{numerische Näherung}} - \underbrace{f'(x)}_{\text{exakter Wert}} = \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(x)}_{\text{quadratischer Fehler}} + R.$$

Um ein gewisses Verfahrensfehlerniveau, also die Bedingung einen Fehler möglichst klein zu machen, garantieren zu können, wird eine a priori Verfahrensfehlerschranke gegeben.

Also

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| \leq h^2 \cdot \frac{M_3}{6}.$$

Dabei bezeichnet M_3 die Schranke für die 3. Ableitung, h die Schrittweite und die Hochzahl von h gibt die Ordnung des Verfahrens an. Je kleiner die Schrittweite h ist, desto kleiner ist einerseits der Verfahrensfehler, aber desto größer ist andererseits auch der Aufwand beim numerischen Näherungsverfahren.

3.4 Rechen- bzw. Rundungsfehler

„Was immer ein endliches Wesen begreift, ist endlich.“

Thomas von Aquin²⁷

Ein Rechenfehler bzw. Rundungsfehler entsteht aufgrund der Tatsache, dass im Computer nur mit einer endlichen Anzahl an Stellen gerechnet werden kann, dass Messwerte nur mit einer gewissen Stellengenauigkeit abgelesen werden können bzw. eine Zahl an einer gewissen Stelle abgeschnitten werden muss.

Unter dem Rundungsfehler verstehen wir also folgendes:

Rundungsfehler := exaktes Ergebnis – gerundetes Ergebnis .

Bezüglich der Anwendung beim Taschenrechner unterscheiden wir zwischen dem Runden oder dem Abschneiden einer Zahl. *Runden* bedeutet, dass wir die nächstgelegene Maschinenzahl heranziehen. Verwendet man aber die erste Maschinenzahl in Richtung Null, so sprechen wir vom *Abschneiden* einer Zahl an einer gewissen Stelle. Im Folgenden, wenn wir vom „Runden“ sprechen, beinhaltet das auch das „Abschneiden“.

Bei diesem Fehlertyp unterscheiden wir zwischen zwei verschiedene Arten von Fehlern:

- den absoluten Fehler und
- den relativen Fehler.

Bezeichnen wir mit x die exakte und mit $\tilde{x}$ die gerundete oder abgeschnittene Zahl aus der Menge der Maschinenzahlen $M(b, k, q_1, q_2)$, wobei b die Basis der Gleitpunktzahlen mit der Mantissenlänge k und den beiden Exponenten q mit $q_1 \leq q \leq q_2$ ist, so lässt sich der absolute Fehler, welcher eine Abweichung vom wahren Wert darstellt, schreiben als

$$\tau := \tilde{x} - x .$$

²⁷ Zitat aus [XII]

Jener Fehler, der sich als Quotient von

$$\varepsilon := \frac{\tilde{x} - x}{x}$$

ergibt, wird als relativer Fehler bezeichnet. In diesem Fall unterscheiden wir noch zwischen dem relativen Abschneidefehler

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| < \frac{b^{-k} \cdot b^q}{b^{-j} \cdot b^q} = b \cdot b^{-k}$$

und dem relativen Rundungsfehler

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot b \cdot b^{-k}.$$

Wie groß ein Rundungsfehler im Endeffekt ist, hängt von der Mantissenlänge und der Basis der verwendeten Gleitpunktzahlen ab.

3.4.1 Fehlerfortpflanzung

„Abyssus abyssum invocat: Ein Fehler zieht den anderen nach sich“

lateinische Redewendung²⁸

Bei jeder Rechnung mit mehreren Messgrößen und diversen gerundeten bzw. abgeschnittenen Zwischenergebnissen kommt es zu Fehlern. Rechnen wir mit diesen unvermeidbaren Fehlern weiter, so sprechen wir von der Fehlerfortpflanzung.

In welchem Größenmaß sich die Abweichung des Endergebnisses bewegt, kann man bei der Fehlerfortpflanzung mit Hilfe bestimmter Rechenregeln abschätzen bzw. bestimmen.

²⁸ Zitat aus [XII]

Wie groß der Einfluss der fehlerbehafteten Größe x auf das Endergebnis y ist, können wir etwa mit Hilfe der Taylorreihe

$$y = y(x) \Rightarrow y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \cdot \Delta x + \dots$$

abschätzen – in diesem Fall wird allerdings die Existenz der Ableitungen vorausgesetzt. Ist Δx genügend klein, erhalten wir die Näherungslösung, indem wir die Reihenentwicklung nach dem linearen Glied abbrechen. Die Näherungslösung lautet dann folgendermaßen:

$$y(x + \Delta x) - y(x) = \Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x.$$

Bezüglich der Addition und Subtraktion bei der Fehlerfortpflanzung können wir uns merken, dass die Genauigkeit des Stellenwerts des Ergebnisses genauso groß ist, wie der Summand mit dem ungenauesten Stellenwert. Bei der Multiplikation und Division ist ebenfalls der ungenaueste Faktor ausschlaggebend für die Genauigkeit des Ergebnisses.

Als Faustregeln²⁹ merken wir uns folgendes:

- „Das Ergebnis einer Summe oder einer Differenz soll nur auf den Stellenwert genau mitgeteilt werden, der mit dem letzten genauen Stellenwert des ungenauesten Rechenglieds übereinstimmt.“
- „Das Ergebnis eines Produkts oder einer Division soll nur auf so viele Stellen genau mitgeteilt werden, wie die Anzahl der genauen Stellen des ungenauesten Rechenglieds beträgt.“

²⁹ Zitat aus [XXII]

Beispiel für die Fehlerfortpflanzung:

Anhand dieses Beispiels soll gezeigt werden, wie es zur Entstehung einer Fehlerfortpflanzung kommt und was das für ein Ergebnis bedeutet.

Aufgabenstellung³⁰:

In einem Gleichstromkreis mit einer Sollspannung von 110 Volt fließt Strom, der mit 2 Ampere³¹ (A) gemessen wurde. Das Messgerät hat eine Toleranz von 0.05 A (= absoluter Fehler).

a) Wie groß können Abweichungen der Spannung sein, wenn der Widerstand höchstens um 5 % schwankt (relativer Fehler)?

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigen wir das OHMsche Gesetz³²:

$$U = R \cdot I$$

Dabei steht U für die elektrische Spannung, I für die elektrische Stromstärke und R für den elektrischen Widerstand.

Da bei unserem Beispiel eine gewisse Toleranz des Messgerätes vorliegt, wird die Formel des OHMschen Gesetzes so abgeändert, dass wir als Fehleraussage

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta R \cdot I + \Delta I \cdot R \quad |:U \\ \frac{\Delta U}{U} &= \frac{\Delta R \cdot \cancel{I}}{R \cdot \cancel{I}} + \frac{\Delta I \cdot \cancel{R}}{I \cdot \cancel{R}} \\ \frac{\Delta U}{U} &= \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I}\end{aligned}$$

erhalten.

³⁰ Zitat aus [III]

³¹ Ampere, kurz A, wird die Einheit der elektrischen Stromstärke bezeichnet.

³² Benannt nach seinem Entdecker Georg Simon Ohm (*16..03.1789, † 06.07.1854).

Aufgrund der Angabe gilt:

$$\frac{\Delta R}{R} = 0.05 \text{ (= absoluter Fehler) und } \frac{\Delta I}{I} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{ (= relativer Fehler).}$$

Setzen wir nun diese Werte in unsere Gleichung ein

$$\frac{\Delta U}{U} = 0.05 + 0.025 = 0.075 \text{ und}$$

berechnen uns

$$\Delta U = 0.075 \cdot 110 = 8.25 \text{ (= absoluter Fehler).}$$

Der relative Fehler würde sich auf 7,5% belaufen. Die Abweichung bei der Spannung kann also ungefähr 8.3 Volt betragen.

b) Wie groß dürfen Abweichungen des Widerstands sein, wenn die Spannung höchstens um 5 Volt schwanken darf?

Auch bei dieser Aufgabe benötigen wir das OHMsche Gesetz, wobei wir auch hier wieder mit folgender Formel arbeiten:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I}.$$

Diesmal kennen wir die Werte

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{ und } \frac{\Delta U}{U} = \frac{5}{110}.$$

Setzen wir diese in unsere umgeformte Ausgangsgleichung

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I}$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{5}{110} - 0.025 = 0.021$$

als Ergebnis.

Die maximale Schwankungsbreite ($\hat{=}$ relativer Fehler) des Widerstands beträgt also 2.1 %.

KAPITEL 4: Der Taschenrechner in der Schule

In diesem Kapitel werden wir uns mit folgenden Themen auseinandersetzen:

- Welche Genauigkeit ist bei verschiedenen Rechenaufgaben sinnvoll?
- Unterschied zwischen „Runden des Endergebnisses“ und „Rechnen mit gerundeten Ergebnissen“.
- Was verstehen wir unter dem Begriff „Überschlagsrechnung“, wozu brauchen wir diese Form der Rechnung und wird diese heutzutage noch angewendet?
- Hat der Taschenrechner Auswirkungen auf das Kopfrechnen? Wenn ja, welche?

Wir werden uns einerseits auf Studien und Literatur berufen, aber andererseits auch auf eigene Erfahrungen, welche entweder im Zuge diverser Praktika, bei Nachhilfeschülern / Nachhilfeschülerinnen oder aber auch im Bekanntenkreis gemacht wurden.

Es stellt sich die Frage, ab wann der Taschenrechner laut Lehrplan in der Schule zum Einsatz kommen sollte und ob es irgendwelche Einschränkungen bzgl. der Nutzung gibt.

Im „neuen“ Lehrplan, welcher seit dem Schuljahr 2004 / 2005 gilt, wird der Einsatz des Taschenrechners bereits ab der ersten Klasse AHS empfohlen. Aus dem Unterstufen- sowie Oberstufenlehrplan können wir folgende wesentliche Punkte entnehmen:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen ... verschiedene Technologien (z.B. Computer) einsetzen können ...“

„... Rechenergebnisse abschätzen, elektronische Hilfsmittel benutzen können, Gesetzmäßigkeiten des Rechnens kennen und anwenden können ...“

*„Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln:
... Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen“*

„Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer: ... Das kritische Vergleichen von Eingabe und Ausgabe bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertend beitragen. ...“

„... Sie sollen elektronische Hilfen und (auch selbst erstellte) Formelsammlungen in steigendem Ausmaß ab der 1. Klasse verwenden und wiederholt Gelegenheit haben, ihr Vorstellungsvermögen auch computergestützt zu schulen. ...“

„... Lernen mit technologischer Unterstützung ... Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.“

Demnach sollten Schüler / Schülerinnen bereits ab der ersten Klasse lernen wie man elektronische Hilfsmittel sinnvoll einsetzen kann und dass eine wichtige Voraussetzung hierfür eine generelle Sicherheit beim Kopfrechnen sein sollte. Ein Ziel der Oberstufe ist ein bewusster und sinnvoller Umgang mit exakten Werten und Näherungswerten.

In wie fern diese Richtlinien tatsächlich Einfluss auf den Umgang mit dem Taschenrechner haben, wird anhand eines Beispiels dargestellt:

4.1 Beispiel aus der Trigonometrie

Bei diesem Beispiel wollen wir den Unterschied zwischen durchgehendem Rechnen mit höherer Genauigkeit – 10 Nachkommastellen – und dem Rechnen mit auf 2 Nachkommastellen gerundeten Zwischenergebnissen zeigen.

Da wir beim Taschenrechner nicht die Möglichkeit haben, auf die Anzahl der verwendeten Nachkommastellen einzugreifen, haben wir für die Lösung dieser Aufgabe das Computer Algebra System „Maple“ verwendet. Die durchgeführte Rechnung kann im Anhang [↑ A.3] nachgelesen werden.

Vom Gipfel G des Unterbergs (Salzburger Hochthron, Gesamthöhe h inkl. Instrumentenhöhe beträgt 1856,57 m) blicken wir auf eine Kirche K unter dem Tiefenwinkel³³ $\alpha=8,83^\circ$. Schwenken wir das Fernrohr um den Schwenkwinkel³⁴ $\phi=8,96^\circ$, so erblicken wir einen Turm T unter dem Tiefenwinkel $\beta=9,62^\circ$. Verlängert man die Strecke KT über den Turm T um $y=397,69\text{ m}$ hinaus, so kommen wir zum Hotel H . Sowohl die Kirche, der Turm als auch das Hotel liegen in derselben Horizontalebene³⁵.

Gesucht ist

- *die direkte Entfernung zwischen der Kirche K und dem Turm T ,*
- *der Tiefenwinkel, unter welchem man vom Unterberg aus das Hotel H erblickt sowie*
- *der Schwenkwinkel zwischen dem Turm T und dem Hotel H .*

³³ Als *Tiefenwinkel* bezeichnen wir einen Winkel eines Punktes, welcher sich unter dem Horizont befindet.

³⁴ Bewegen wir zum Beispiel ein Fernrohr von einem Punkt in einer Horizontalebene zu einem anderen, ebenfalls in dieser Ebene liegenden, Punkt, so bezeichnen wir den dabei entstehenden Winkel als *Schwenkwinkel*.

³⁵ Als *Horizontalebene* bezeichnen wir die xy -Ebene in einem Koordinatensystem sowie alle dazu parallelen Ebenen.

$\Delta KTF: x = \overline{KT}$ $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \phi$ $\Rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \phi}$	$x = 2047.0976929844 \text{ m}$	$x = 2355.99 \text{ m}$
$\Delta KTF: \beta_1 = \sphericalangle FTK$ $\frac{a}{\sin \beta_1} = \frac{x}{\sin \phi} \Rightarrow$ $\beta_1 = \arcsin \frac{a \cdot \sin \phi}{x}$	$\beta_1 = 65.4041426208^\circ$	$\beta_1 = 56.17^\circ$
$\Delta THF: \beta_2 = \sphericalangle HTF$ $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$	$\beta_2 = 114.5958573792^\circ$	$\beta_2 = 123.83^\circ$
$\Delta THF: z = \overline{FH}$ $z^2 = b^2 + y^2 - 2by \cdot \cos \beta_2$ $\Rightarrow z = \sqrt{b^2 + y^2 - 2by \cdot \cos \beta_2}$	$z = 11124.8501621910 \text{ m}$	$z = 11041.94 \text{ m}$
$\Delta FHG: \delta = \sphericalangle GHF$ $\tan \delta = \frac{h}{z} \Rightarrow \delta = \arctan \frac{h}{z}$	$\delta = 9.4744901555^\circ$	$\delta = 9.54^\circ$
$\Delta THF: \phi_1 = \sphericalangle TFH$ $\frac{y}{\sin \phi_1} = \frac{z}{\sin \beta_2} \Rightarrow$ $\phi_1 = \arcsin \frac{y \cdot \sin \beta_2}{z}$	$\phi_1 = 2.0432895437^\circ$	$\phi_1 = 1.71^\circ$

Bereits der erste Wert zeigt, dass sich eine geringere Anzahl von Nachkommastellen deutlich auf das Ergebnis auswirkt. Wichtig ist es, dass wir Schüler / Schülerinnen auf genau diesen Effekt hinweisen und sie experimentieren lassen. Dadurch sollten Verwunderungen über ein „falsches“ eigenes oder im Lösungsheft stehendes Ergebnis der Vergangenheit angehören.

4.2 Wie viele Stellen sind sinnvoll?

Eine generelle Aussage darüber, wie viele Stellen sinnvoll sind, können wir nicht machen. Es kommt immer darauf an, was wir berechnen wollen und wie wichtig eine möglichst geringe Abweichung ist. Dabei ist generell zu beachten, dass die Genauigkeit einer Lösung immer von der Genauigkeit der Angabe abhängt.

Wollen wir z.B. ein Regal bauen und vermessen den vorgesehenen Platz, so müssen die Maße nicht auf hundertstel Millimeter genau stimmen – was praktisch auch unmöglich wäre. Hätten wir allerdings die Aufgabe, eine Sonde auf den Mars zu schießen, so ist eine möglichst hohe Genauigkeit sinnvoll.

Ein weiteres Beispiel finden wir bei den Messungen im Sport etwa beim Skifahren. Würden wir bei einem Rennen nur auf Minuten und nicht auf hundertstel Minuten genau messen, gäbe es zahlreiche Sieger / Siegerinnen.

Allgemein können wir aber anmerken, dass die Anzahl der Stellen so zu wählen ist, dass man einerseits den Überblick nicht verliert und andererseits noch ein sinnvolles Ergebnis erhält. Je nach Aufgabenstellung ergibt sich eine andere, sinnvolle Genauigkeit. Wir müssen selber festlegen, wann welche Genauigkeit zweckmäßig ist. Entscheidend ist sich vor Augen zu halten, dass es sich, egal mit wie vielen Stellen wir rechnen, immer nur um eine Näherung handelt.

„Die Frage nach sinnvoller Genauigkeit erfordert einen bewußten Umgang mit Näherungswerten. Hierzu gehört die Einsicht, dass auch geringere Genauigkeit etwas Sinnvolles sein kann ...“³⁶

Auf die Frage nach formalen Regeln, welche uns verraten, auf wie viele Stellen genau wir rechnen sollen, gibt es leider keine Antwort.

³⁶ Zitat aus [III]

Wenn es darum geht, wie viele Stellen sinnvoll sind, können wir folgende Anhaltspunkte heranziehen:

- Achte auf die inhaltlichen Standpunkte des konkreten Sachverhalts. (z.B. €)
- Die Ergebnisse können nicht genauer sein als die Ausgangsgrößen.
- Bei konkreten Aufgabestellen ist auf eine eventuell geforderte Stellengenauigkeit zu achten.
- Verwenden wir bei der Ausarbeitung einer Aufgabe ein Rechenhilfsmittel, wie zum Beispiel einen Taschenrechner, so können die Ergebnisse keine höhere Genauigkeit aufweisen, als das verwendete Hilfsmittel.
- Wie präzise ein zur Verfügung gestelltes Modell ist, hat natürlich auch einen wesentlichen Einfluss auf den weiteren Verlauf der zu wählenden Genauigkeit.

In der Schule stellen wir Schülern / Schülerinnen vier verschiedene Verfahren vor welche es ihnen ermöglichen sollen, aus der bekannten Ausgangsgenauigkeit der Werte, die Genauigkeit der Ergebnisse zu ermitteln:

Variante 1: „Rechnen mit Fragezeichen“

Bei dieser Variante setzen wir an die Stelle der unbekannten Ziffer ein Fragezeichen. Ein Nachteil dabei ist, dass es nur für die Grundrechnungsarten verwendet werden kann.

Variante 2: „Methode der Wertschranken“

In diesem Fall führen wir zwei Rechnungen durch. Einmal, um uns die untere Schranke zu berechnen, d.h. wir runden $\lceil 3.4 \rceil$ ³⁷ die Werte ab. Beim zweiten Mal runden wir die Ergebnisse auf, sodass wir die obere Schranke erhalten. Diese Methode arbeitet effektiv und ist zielführend.

³⁷ Bei der Angabe „ $\lceil 3.4 \rceil$ “ handelt es sich um einen Verweise auf ein anderes Kapitel. In diesem Fall bedeutet das, dass wir näheres zum Thema „Runden“ im Kapitel 3.4 nachlesen können.

Variante 3: „Methode der Fehlerschranken“

Hier wird zu einem entstandenen Fehler der „vermeintlich“ gemachte Fehler hinzugefügt, also $a \pm \Delta a$. Diese etwas komplexere Form wird in der Schule lediglich für einfache Terme herangezogen. Wichtig dabei ist zu bedenken, dass wir hierbei nur eine Abschätzung der Fehlerschranke erhalten.

Variante 4: „Methode der Ziffernzählung“

Bei dieser Methode ist eine Unterscheidung bzgl. der Rechenoperationen notwendig: Im Fall der Addition und Subtraktion kann das Ergebnis nur so viele Stellen haben, wie der Ausgangswert mit der kleinsten Dezimalanzahl hat. Bei der Multiplikation und Division ergibt sich die Anzahl der beizubehaltenden Ziffern aus jenen, welcher der Anfangswert mit der kleinsten Anzahl an Ziffern hat. Die Anzahl der beizubehaltenden Ziffern bei der Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzel bzw. der zweiten und dritten Potenz hängt davon ab, wie viele Ziffern unter der Wurzel bzw. in der Basis gegeben sind.

4.3 Überschlagsrechnung

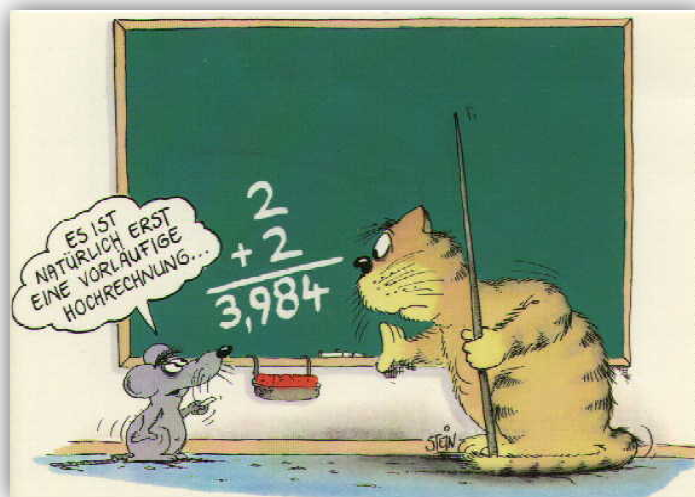


Abb. 51³⁸

Unter einer Überschlagsrechnung verstehen wir das Rechnen mit gerundeten Zahlen, wobei wir es uns als Ziel setzen, ein ungefähres Ergebnis angeben zu können.

³⁸ Quelle zu Abb. 51 siehe Bildverzeichnis

Das Motto lautet also:

„So grob wie möglich, so genau wie nötig.“³⁹

In einer Studie⁴⁰ von Frau Monika Haas zum Thema „Was ist das mit der Überschlagsrechnung?“ geht es darum herauszufinden, was man genau unter einer Überschlagsrechnung versteht, wo diese zur Anwendung kommt und welchen Stellenwert diese in der Schule einnimmt.

Generell kann man sagen, dass die Mehrheit der von Frau Haas befragten Schüler / Schülerinnen der Meinung ist, dass die Durchführung einer Überschlagsrechnung wichtig ist.

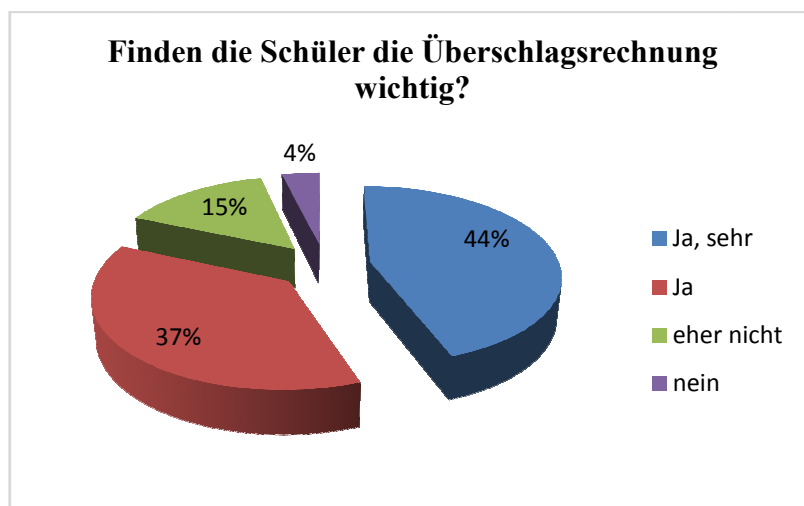


Abb. 52: Ist die Überschlagsrechnung für die Schüler / Schülerinnen wichtig?

Bei der Auswertung der einzelnen Arbeitsblätter stellte sich heraus, dass das Hauptproblem nicht bei der Überschlagsrechnung an sich liegt, sondern die Schüler / Schülerinnen die meisten Probleme beim Abschätzen haben. Sie begingen hierbei den Fehler, die Werte zu genau zu runden, sodass eine schnelle Durchführung nicht möglich war.

Fazit: Die Schüler / Schülerinnen müssen mehr Sicherheit beim Abschätzen gewinnen – erst danach ist ein sinnvoller Gebrauch der Überschlagsrechnung möglich.

³⁹ Zitat aus [II]

⁴⁰ Zitat aus [IV]

Für Schüler / Schülerinnen ist es immer wichtig zu wissen, wofür sie ein mathematisches Werkzeug überhaupt brauchen können. Obwohl die Überschlagsrechnung von den meisten Leuten fast täglich angewendet wird, sind sie sich dessen gar nicht bewusst.

Zu den häufigsten Anwendungsgebieten zählen

- das Einkaufen,
- bei Investitionen (Hausbau, Urlaub, etc.),
- zur Berechnung der Monatsausgaben (wie viel Geld bleibt mir noch für den Rest des Monats),
- der Zeiteinteilung,
- schnelle Überprüfung von Rechenergebnissen,
- zur Kontrolle von Ergebnissen beim Taschenrechner (unmögliche Ergebnisse können somit ausgeschlossen werden)
- beim Kochen (abschätzen von Mengen etc.) aber auch
- beim Umrechnen von Fremdwährungen in Euro bzw. Euro in Schilling
- und vieles mehr ...

Natürlich findet die Überschlagsrechnung auch in zahlreichen Berufen ihren täglichen Gebrauch. Generell können wir anmerken, dass ein Überschlag

- oft eine Abschätzung bzw. Überprüfung ermöglicht,
- eine Vereinfachung darstellt,
- zur besseren Strukturierung der Aufgabe führt sowie
- zu kritischen Denkvorgängen und
- den Umgang mit Zahlen schult.

Wichtig ist, dass eine Überschlagsrechnung generell vor der exakten Problemlösung angewendet wird und dass sie zur Selbstverständlichkeit wird – gegebenenfalls müssen wir die Schüler / Schülerinnen regelmäßig daraufhin weisen und diese auch explizit verlangen.

Durch die Tatsache, dass der Sinn der Überschlagsrechnung darin liegt die Zahlen so zu wählen, dass wir mit ihnen im Kopf rechnen können, unterstützt und trainiert diese Form der Rechnung das Kopfrechnen [↑ 4.4].

Auf die Frage hin, ob diese Form der Rechnung heute noch Anwendung findet, können wir, alleine aufgrund der zahlreichen, zuvor erwähnten Anwendungsgebiete mit einem klaren „Ja“ antworten. Wir sind der Meinung, dass es wichtiger ist denn je, sich gezielt damit auseinanderzusetzen und diese auch anzuwenden. Durch das ständige Arbeiten mit Computern oder Taschenrechner ist es sehr wichtig geworden, die erhaltenen Ergebnisse schnell überprüfen zu können. Aber auch der im Jahr 2002 stattgefundene Währungswechsel macht eine Anwendung der Überschlagsrechnung oftmals notwendig. Viele Menschen rechnen oft von Euro in Schilling um, damit sie eine bessere Wertvorstellung bekommen. Befragungen haben gezeigt, dass 1 Euro meist mit 14 oder 15 Schilling gleich gesetzt wird.

Bezüglich dem zuvor erwähnten Runden ist es allgemein üblich, dass bei 1, 2, 3, 4 abgerundet und bei 6, 7, 8, 9 aufgerundet wird. Ist die Endziffer eine 5, so liegt es an uns, wie wir vorgehen.

Beispiele:

statt	$4793 : 18 = 266.27$	rechnen wir mit	$5000 : 20 = 250$
statt	$19 : 21 = 0.91$	rechnen wir mit	$20 : 20 = 1$
statt	$123.4 : 5 = 24.68$	rechnen wir mit	$100 : 5 = 20$
statt	$71.8 : 31 = 2.32$	rechnen wir mit	$72 : 20 = 2.4$

Neben dem Runden von Zahlen besteht auch die Möglichkeit, dass wir mit unteren und oberen Schranken rechnen. In diesem Fall führen wir zwei Rechnungen durch – einmal mit den nach unten abgerundeten und einmal mit den nach oben aufgerundeten Zahlen. In dem dadurch entstehen Intervall liegt dann mit Sicherheit unser Ergebnis.

Beispiel:

Wie viel ergibt $42 \cdot 789$?

Berechnung der unteren Schranke: $40 \cdot 700 = 2800$

Berechnung der oberen Schranke: $50 \cdot 800 = 40000$

Das exakte Ergebnis von $42 \cdot 789$ liegt also zwischen 28000 und 40000.

Hätten wir nach den zuvor erwähnten Regeln gerundet, so hätten wir $40 \cdot 800 = 32000$ erhalten.

Das exakte Ergebnis lautet: $42 \cdot 789 = 33138$.

4.4 Taschenrechner versus Kopfrechnen

„Taschenrechner verschlechtert Kopfrechnen nicht“⁴¹

Das war die erste Schlagzeile, auf welche wir bei unseren Recherchen gestoßen sind. Dies war auch die Grundlage dafür, dass wir uns mit Herrn Mag. Dr. Dipl. Päd. Rudolf Beer, dem Verfasser dieser Studie, in Kontakt setzten und ihn um die vollständige Studie, welche den Titel „Elektronische Hilfsmittel im Mathematikunterricht auf der 5. Schulstufe“ trägt, baten.

„Können unsere Kinder immer schlechter Kopfrechnen, weil sie den Taschenrechner verwenden, oder hat der Einsatz elektronischer Hilfsmittel im Unterricht keinen Einfluss auf die Kompetenzentwicklung unserer Schülerinnen?“⁴²

Begonnen hat die Studie im September 2005. Probanden waren 89 Schüler / Schülerinnen der 1. Klassen in vier Wiener Kooperativen Mittelschulen, wobei es pro Standort jeweils eine Interventionsgruppe und eine Kontrollgruppe gab. Die Interventionsgruppen waren jene Klassen, welche mit den Taschenrechnern der Firma

⁴¹ Zitat aus [v]

⁴² Zitat aus [II]

Texas Instruments⁴³ ausgestattet wurde. Jeweils die andere Klasse an einem Standort hatte die Kontrollfunktion über, d.h. sie mussten ohne Taschenrechner auskommen und sich auf ihr Kopfrechenleistungen verlassen.

Drei mal im Schuljahr (September 2005, Februar 2006 und Juni 2006) wurde getestet, wie viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikation und Divisionen in nur drei Minuten von den Schülern / Schülerinnen gelöst werden können. Abgeprüft wurde das Wissen mittels der eigens entwickelten Software „4some“ – ein Computerprogramm zum Üben des Kopfrechnens –, welche allen Teilnehmern jeder Zeit zur Verfügung stand bzw. welche sogar im Unterricht zum Einsatz kam. In beiden Gruppen kam es während des gesamten Schuljahres 2005 / 2006 zu Verbesserungen der Rechenfertigkeiten bzgl. der Multiplikation und Division.

„Hypothese: Bei Einsatz des Taschenrechners im Unterricht weisen die SchülerInnen geringere Fortschritte beim Kopfrechnen auf als SchülerInnen, die diesen im Unterricht nicht verwenden.“⁴⁴

Die Studie ergab, dass der Einsatz des Taschenrechners keine negativen Auswirkungen auf die rechnerischen Fertigkeiten bzgl. der Addition und Subtraktion hat. Beim Multiplizieren und Dividieren haben sich die Schüler / Schülerinnen der Kontrollgruppe etwas mehr gesteigert, als jene der Interventionsgruppe. Generell konnte festgestellt werden, dass es zu einer geringeren Steigerung der Gesamtrechenleistungen bei den Interventionsgruppen gekommen ist. Dr. Beer meinte hierzu:

„Es handelt sich hierbei jedoch um einen äußerst geringen Unterschied, der nicht als signifikant gelten kann.“⁴⁵

Fazit der Studie: Ein **sinnvoller** Einsatz des Taschenrechners im Unterricht beeinflusst die Leistungen im Kopfrechnen nicht negativ.

⁴³ Texas Instruments arbeitete mit dem Pädagogischen Institut der Stadt Wien für diese Studie zusammen.

⁴⁴ Zitat aus [II]

⁴⁵ Zitat aus [II]

Nach intensiver Auseinandersetzung mit dieser Studie haben sich uns folgende Fragen gestellt:

- Wie wäre die Studie ausgefallen, wenn nicht allen Schülern / Schülerinnen das Programm „4some“, mit welchem das Kopfrechnen trainiert wurde, zur Verfügung gestellt worden wäre? Ist das nicht in einem gewissen Sinn ein Widerspruch zur Aufgabe der Studie? Unserer Meinung nach hätte konsequenter zwischen den Gruppen mit Taschenrechner, dafür aber ohne zusätzliches Kopfrechen-Trainingsprogramm, und den Gruppen ohne Taschenrechner, dafür mit Unterstützung von „4some“ unterschieden werden müssen.
- Sind solche Speed-Tests, also möglichst viele Aufgaben in nur wenigen Minuten, überhaupt sinnvoll? Könnte sich der dadurch entstehende Stress nicht auch negativ auf die Rechenleistungen auswirken?
- Während eines Schuljahres gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den Leistungen der Kontrollgruppen und der Interventionsgruppen. Wie aber würde sich dieser über einen längeren Zeitraum auswirken?

Ein Grund, warum Schüler / Schülerinnen mit dem Kopfrechnen Schwierigkeiten haben könnten liegt in der Vermutung, dass es nach der Volksschule noch zu großen Problemen mit dem kleinen „Einmaleins“ bzw. „Einsdurcheins“ kommt. Außerdem könnte das fehlende Verständnis bzgl. der einzelnen Operationen zu Hindernissen führen.

Aus der Arbeit mit Nachhilfeschülern / Nachhilfeschülerinnen bzw. den Erfahrungen aus absolvierten Praktika konnten wir folgende Erfahrungen sammeln und als Denkanstoß heranziehen:

- Jede noch so triviale Rechnung wird mit dem Taschenrechner durchgeführt.
- Schüler / Schülerinnen werden unruhig und uneinsichtig, wenn man einmal in der Stunde bzw. bei Tests keinen Taschenrechner zulässt und von ihnen verlangt, die ohnehin einfachen Rechnungen im Kopf durchzuführen.
- Das Erkennen eines falschen Ergebnisses fehlt oft leider gänzlich.

- Aussagen wie „*Ich tipp's lieber in den Taschenrechner ein, dass geht schneller als im Kopf*“ oder „*Wenn's am Display so steht, wird's wohl stimmen*“ stehen leider an der Tagesordnung.

Auf die Frage, ob es geschlechterspezifische bzw. auf Nationalitäten bezogene Unterschiede gibt, gibt es eine eindeutige Antwort:

Sowohl eine in Deutschland (Ludwigsburg) durchgeführte Studie als auch die Pisa-Studie hat ergeben, dass es diesbezüglich keinerlei Differenzen gibt.

Abschließend wollen wir anmerken, dass lediglich der sinnvolle Gebrauch des Taschenrechners eine Hilfestellung für die Schüler / Schülerinnen darstellt und verhindert, dass die Kopfrechenfertigkeiten völlig verloren gehen. Grundlegend müssen wir weiter an der Basis arbeiten, sodass die Gymnasiasten mehr Sicherheit beim Kopfrechnen und bei der Zahlenvorstellung erlangen. Die zuvor erwähnte Überschlagsrechnung [↑ 4.3] wird dadurch auch immer bedeutungsvoller.

Kapitel 5: Wie funktioniert ein Taschenrechner?

In diesem Kapitel werden einige Methoden zur Darstellung und näherungsweisen Berechnung von Standardfunktionen vorgestellt und diskutiert. Konkret wird dies anhand der Funktionen e^x und $\sin x$ durchgeführt.

Bei der Erstellung von Algorithmen für Standardfunktionen müssen wir darauf achten, dass sie möglichst effizient und genau sind. Wir erreichen dies durch eine Optimierung der Anzahl an Multiplikationen und Divisionen. Additionen, Subtraktionen sowie Verschiebungen spielen aufgrund der geringen Dauer keine entscheidende Rolle und können somit vernachlässigt werden.

5.1 Mathematische Approximationsverfahren für die Berechnung elementarer Funktionen

In diesem Abschnitt sollen einige Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Standardfunktionen vorgestellt werden. Dabei sollen jeweils die Effizienz und die Möglichkeit die Genauigkeit einer solchen Approximation einfach zu erhöhen im Vordergrund stehen.

Es werden vor allem zwei Arten von Funktionen zur Approximation von elementaren Funktionen verwendet:

- Näherung durch Polynome und
- Näherung durch rationale Funktionen.

Anmerkung: Der Approximationsfehler hängt sehr wesentlich vom Bereich ab, in dem die Standardfunktion approximiert wird. Man versucht daher diesen Bereich eher klein zu halten.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie implementiert werden kann:

- Anlegen von Tabellen mit Werten einer Funktion und anschließender Interpolation.
- Direkte Berechnung durch Näherung auf einen kleinen Bereich.

Konkrete Implementierungen spiegeln jeweils die speziellen Eigenschaften elementarer Funktionen wider. Trotzdem sind die grundsätzlichen Methoden bei der Bildung von Approximationen für alle Funktionen gleich.

Nun aber zu den verschiedenen mathematischen Approximationsverfahren:

Wir werden uns mit folgenden Verfahren auseinandersetzen:

- Potenzreihe von MacLaurin
- Tschebyscheff Approximation
- Relaxation von Potenzreihen
- Padé Approximation
- Methode von Maehly,

wobei wir uns an das Buch „Mathematische Methoden für Digitalrechner I“⁴⁶ anlehnen.

5.1.1 Potenzreihe von MacLaurin

Bei der Potenzreihe von MacLaurin⁴⁷ handelt es sich um Polynom-Approximationen, welche sich aus den endlichen Partialsummen $s_m(x) = \sum_{n=0}^m f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$, $m \in \mathbb{N}$, der MacLaurinschen Potenzreihe für Funktionen $f(x)$ mit

⁴⁶ vgl. [XVII]

⁴⁷ Benannt nach dem Mathematiker Colin MacLaurin (* 02.1698, † 14.06.1746).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

ergeben. Bei der MacLaurinschen Potenzreihe handelt es sich um eine Taylorreihe für $f(x)$, entwickelt um Null. Um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, ist darauf zu achten, dass der Grad m des Polynoms $s_m(x)$ genügend groß ist.

Beispiel: $\sin x$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Approximiert man die Funktion $\sin x$ durch das entsprechende Taylorpolynom der Ordnung $2m$ um 0, so entsteht ein absoluter Fehler, welcher mit Sicherheit kleiner ist

als $\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}$ (= Restglied) für $|x| \leq \frac{\pi}{4}$. Nach algebraischen Umformungen zeigt sich,

dass für zehn richtige Nachkommastellen etwa eine Ordnung $m > 5$ notwendig ist.

Eine sich daraus ergebende Implementierung für $\sin x$ würde im Bereich $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ folgende Gestalt annehmen:

$$\sin x \approx s_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}.$$

Es sind hierfür sieben Multiplikationen notwendig. Es zeigt sich aber, dass diese Art der Implementierung leider sehr langsam ist.

Auch im Fall einer Erhöhung der Ordnung auf $m=6$ – hier wird $\sin x$ genauso berechnet wie $\cos x$, da $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ gilt –, werden nicht mehr Multiplikationen benötigt.

Fazit: Bei der Anwendung der MacLaurinschen Potenzreihe benötigt die Implementierung für $\sin x$ und $\cos x$ mit $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ im Bereich $0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}$ nicht mehr als sieben Multiplikationen. Dieses Verfahren ist nur eine gute Näherung für kleine Werte des Arguments x , da die zugehörigen Koeffizienten lediglich an der Entwicklungsstelle Null ausgewertet werden.

5.1.2 Tschebyscheff-Approximation

Eine andere Basis für polynomiale Approximation sind die *Fourier-Cosinus-Reihen*. Sie werden als Tschebyscheffpolynome⁴⁸ von $f(x)$ für $-a \leq z = ax \leq a$ verwendet:

$$f(ax) = \frac{1}{2}c_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n(a)}_{\substack{\text{Funktionen des} \\ \text{Parameters } a}} \cdot \underbrace{T_n(x)}_{\substack{\equiv \cos n\theta \dots \text{Polynom n-ten Grades} \\ \text{in } x = \cos \theta}}. \quad (1)$$

Die Koeffizienten $c_n(a)$ lassen sich dabei anschreiben als

$$\pi c_n(a) = 2 \cdot \int_{-1}^1 f(ax) \cdot T_n(x) \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

und hängen von allen Werten $f(z)$, für $z \in (-a, a)$, ab. Je größer n wird, desto schneller verkleinern sich die Koeffizienten.

Seien $\sigma_n(a, x)$ die endlichen Teilsummen von (1). Der Abbruchfehler $f(ax) - \sigma_n(ax)$ wird gut durch das erste vernachlässigte Glied $c_{n+1}(a) \cdot T_{n+1}(x)$ approximiert.

⁴⁸ Benannt nach dem russischen Mathematiker Pafnuti Tschebyschow (* 04.05.1821, † 26.11.1894).

Es gilt, dass

$$|T_{n+1}(x)| \leq 1 \text{ und } T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$$

Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Das Verhalten von $\sigma_n(a, x)$ ist ähnlich dem Verhalten des klassischen bestapproximierenden Polynoms $P_n^*(x)$ im Sinne von Tschebyscheff vom Grad $\leq n$. Verwendet wird daher die Näherung von $P_n^*(x)$ als Näherung für $f(ax)$.

Einige Ideen zum bestapproximierenden Polynom im Sinne von Tschebyscheff:

Wir legen im folgenden der Tschebyscheff-Approximation die Maximumnorm zugrunde

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

wobei für ein gegebenes f auf $[a, b]$ eine Funktion g^* aus der Menge Γ der Polynome vom Grad n gesucht wird, sodass

$$\|g^* - f\|_{\infty} \leq \|g - f\|_{\infty}, \forall g \in \Gamma$$

gilt. g^* wird dann als Bestapproximierende aus dem endlich-dimensionalen Teilraum Γ bezeichnet; $\|g^* - f\|$ ist minimal.

Es muss also ein $g^* \in \Gamma$ gefunden werden, für welches die Maximalabweichung von f

$$\max_{x \in [a, b]} |g^*(x) - f(x)|$$

so klein wie möglich wird.

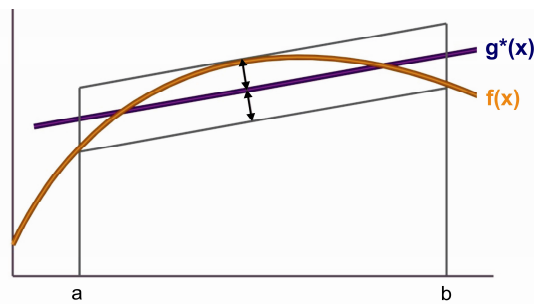


Abb. 53: Bsp. für Maximalabweichung

Es gilt: [„Alternantensatz“] Zu beliebigem $f \in C[a, b]$ existiert ein eindeutig bestimmtes bestapproximierendes Polynom P^* vom Minimalgrad n . P^* ist dann folgendermaßen charakterisiert: ein beliebiges Polynom vom Grad n ist dann und nur dann bestapproximierendes Polynom im Tschebyscheff’schen Sinn, wenn (mindestens) $n + 2$ Punkte

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

existieren, für die die Fehlerfunktion $g(x) - f(x)$ maximal wird und die für zwei aufeinander folgende Punkte x_{i-1}, x_i entgegengesetztes Vorzeichen haben.

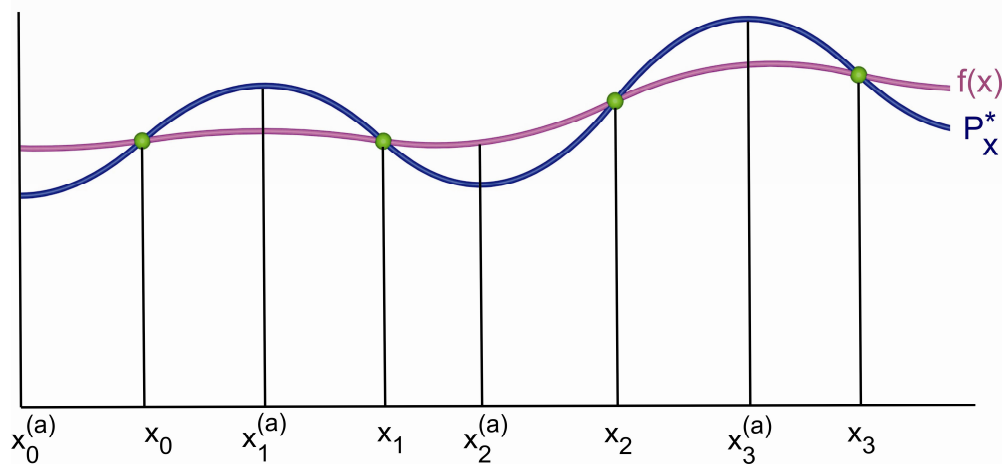


Abb. 54: Bestapproximation mit Alternantenpunkten

Da P^* im Allgemeinen schwer berechenbar ist, ermitteln wir eine Näherung für das bestapproximierende Polynom $P^*(x)$ im Tschebyscheff'schen Sinn:

Angenommen wir kennen die Knoten $x_0, \dots, x_n$. Dann gilt, dass das Lagrangesche Interpolationspolynom basierend auf diesen Knoten gleich dem bestapproximierenden Polynom $P^*(x)$ bzgl. f ist.

Der Fehler bei Polynominterpolation ist

$$P^*(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{(n+1)!} \omega(x)$$

an, wobei ϑ eine geeignete Zwischenstelle und $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ ein gleichmäßig schwingendes Polynom vom Grad $n+1$ im Intervall $a \leq x \leq b$ ist. Die Fehlerfunktion schwankt nun gleichmäßig zwischen den Abweichungsmaxima.

Wird angenommen, dass $f^{(n+1)}(\vartheta(x))$ annähernd konstant ist, erhalten wir

$$P^*(x) - f(x) \approx \text{const.} \cdot \omega(x)$$

als Interpolationsfehler. Wie unten motiviert, liegt dies genau dann vor, wenn $\omega(x)$ das Tschebyscheffpolynom vom Grad $n+1$ ist, wobei $x_0, \dots, x_n$ die $(n+1)$ Nullstellen dieses Tschebyscheffpolynoms sind.

Idee:

Auf dem Intervall $[0, (n+1)\pi]$ hat die Funktion $\cos \varphi$ $(n+1)$ -Nullstellen $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

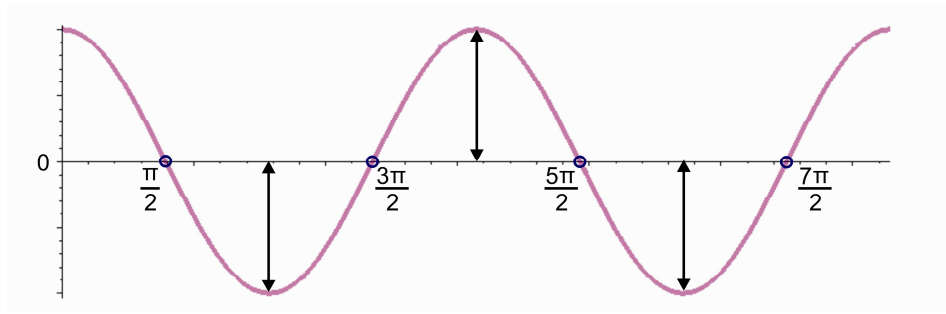


Abb. 55: Funktion $\cos \varphi$, wobei die Pfeile die Maximalabweichung darstellen

Nehmen wir an, dass $\theta = \frac{\varphi}{n+1}$ ist. Dann durchläuft θ das Intervall $[0, \pi]$. Dies hat zur Folge, dass $\cos((n+1)\theta)$ $(n+1)$ -Nullstellen für $0 \leq \theta \leq \pi$ hat und wegen

$$\cos k\theta = (\cos \theta)^k - \binom{k}{2} (\cos \theta)^{k-2} (1 - \cos^2 \theta) + \binom{k}{4} (\cos \theta)^{k-4} (1 - \cos^2 \theta)^2 \pm \dots$$

ein Polynom vom Grad $n+1$ in $\cos \theta$ ist.

Wir erhalten somit nach Transformation $t = \cos \theta$

$$T_{n+1}(t) = \cos((n+1) \arccos t).$$

Es gilt somit: t durchläuft das Intervall $[-1, +1]$ falls $\theta \in [0, \pi]$, d.h. die Nullstellen von $T_{n+1}(t)$ liegen im Intervall $[-1, +1]$. Allgemein nehmen Tschebyscheffpolynome der ersten Art die Form

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, +1], \quad n \in \mathbb{N}$$

an und bilden ein orthogonales System.

Aufgrund der Rekursionsformel gilt:

$$\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos((n-1)\theta)$$

$$T_{n+1}(t) = 2t \cdot T_n(t) - T_{n-1}(t)$$

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1$$

$$T_3(t) = (2t^2 - 1) \cdot 2t - t = 4t^3 - 3t$$

$$T_4(t) = 2t \cdot (4t^3 - 3t) - (2t^2 - 1) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

$$T_5(t) = 2t \cdot (8t^4 - 8t^2 + 1) - (4t^3 - 3t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

⋮

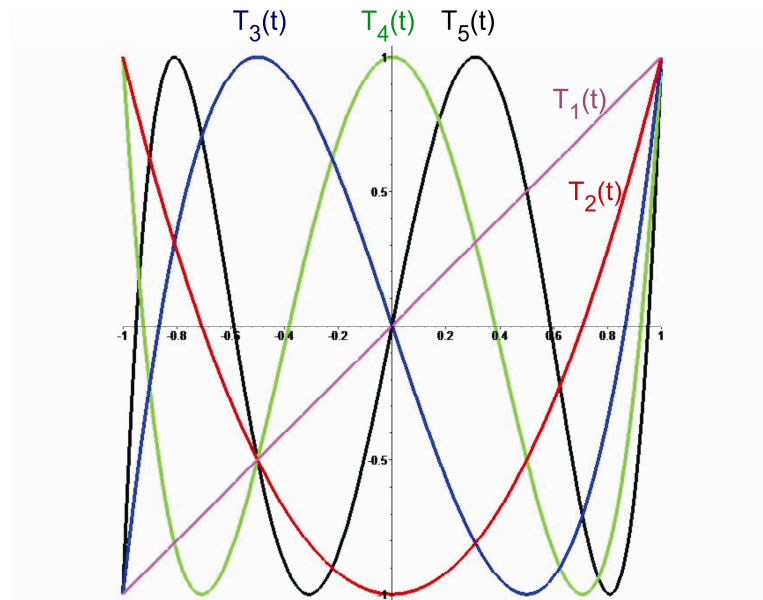


Abb. 56: Tschebyscheffpolynome

5.1.3 Relaxation von Potenzreihen

Bei der Relaxation von Potenzreihen geht es um die Reduzierung des Grades der Partialsumme $s_m(x) = \sum_{n=0}^m f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}$ der MacLaurinschen Reihe [↑ 5.1.1], ohne das es dabei zu einer Verminderung der Genauigkeit kommt.

Idee 1:

Approximation ganzzahliger Polynome von x durch Polynome geringeren Grades. Drücken wir $T_{2n}(x)$ und $T_{2n+1}(x)$ explizit aus, so erhalten wir die bestmögliche Polynom-Approximation für x^{2n} und x^{2n+1} . Aus

$$2^{1-2n} \cdot T_{2n}(x) = x^{2n} - P_{2n-2}(x)$$

mit

$$P_{2n-2}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2^{1-2n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{n+m} \binom{n+m}{n-m} (2x)^{2m}$$

folgt

$$x^{2n} = P_{2n-2}(x) + e_{2n}(x)$$

mit dem Fehler $|e_{2n}(x)| < 2^{1-2n}$ im Bereich $(-1,1)$.

Nach analogem Vorgehen und mit Hilfe der Identität

$$2^{-2n} T_{2n+1}(x) = x^{2n+1} - P_{2n-1}(x)$$

folgt

$$x^{2n+1} \approx P_{2n-1}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) 2^{-2n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{n+m+1} \binom{n+m+1}{n-m} (2x)^{2m+1}$$

als Approximation für x^{2n+1} , wobei deren Fehler kleiner als 2^{-2n} ist.

Idee 2:

Um unser Ziel, den Grad unter der oben erwähnten Bedingung zu reduzieren, zu erreichen, können wir auch eine Transformation von $s_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$ durchführen.

Eine ganzzahlige Potenz von x kann in eine sogenannte Tschebyscheffreihe der Form

$$\begin{aligned} - \quad (2x)^{2m} &\equiv \binom{2m}{n} + 2 \sum_{k=1}^m \binom{2m}{m-k} \cdot T_{2k}(x) \\ - \quad (2x)^{2m+1} &\equiv 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{m-k} \cdot T_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

entwickelt werden.

Einsetzen der erhaltenen Werte in $s_n(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$ liefert

$$s_n(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^n b_m \cdot T_m(x),$$

$$\text{mit } b_{2k} = 2 \cdot \sum_{i=k}^{2i \leq n} \binom{2i}{i-k} 2^{-2i} \cdot a_{2i} \text{ und } b_{2k+1} = \sum_{i=k}^{2i+1 \leq n} \binom{2i+1}{i+k} 2^{-2i} \cdot a_{2i+1}.$$

Die Relaxation für $s_n(x)$ wird möglich, da einige Koeffizienten b_m , mit $m = n, n-1, \dots$, oft so klein sind, dass sie ohne Reduktion der Genauigkeit weggelassen werden können.

5.1.4 Padé-Approximation

Padé (* 17.12.1863, † 09.07.1953) hat eine Methode entwickelt, welche Potenzreihen durch rationale Funktionen approximiert. Die Padé-Approximation lässt sich schreiben als die rationale Funktion

$$R_{nm}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad \begin{array}{l} \nearrow = \sum_0^m a_k x^k \\ \searrow = 1 + \sum_1^n b_k x^k \end{array}$$

wobei $P_m(x)$ ein Polynom mit Grad m und $Q_n(x)$ ein Polynom mit Grad n ist. Besonders gut geeignet ist diese Näherung für die Fälle $m=n$ und $m=n+1$. Eine besonders hohe Genauigkeit wird bei $x=0$ erzielt.

Aus der Gleichung

$$Q_n(x) \cdot \sum_0^\infty c_k x^k - P_m(x) \equiv x^{n+m+1} \cdot \sum_0^\infty \gamma_k x^k$$

sind die Koeffizienten c_k der Potenzreihe $\sum_0^\infty c_k x^k$ bekannt, sodass die a_i und b_i berechnet werden können.

$\gamma_0 = \frac{\Delta_n}{\delta_n}$ entsteht aus dem System der $n+1$ Gleichungen $\sum_{m=0}^n b_m \cdot c_{n-m+s} = 0$, mit $1 \leq s \leq n$. δ_n ist die Hauptminorante von Δ_n , wobei $\Delta_n = c_{ij}$, mit $i=1, \dots, 2n+1$ und $j=1, \dots, 2n+1$, ist.

Bei den Padé-Approximationen nähern bereits die Koeffizienten $\gamma_k = \sum_{m=0}^n b_m \cdot c_{2n+k+1-m}$,

mit $m=n$, $b_0=1$ und $a_0=c_0$, den absoluten Fehler sehr gut an.

Bezüglich der Genauigkeit einer rationalen Näherung stellen wir fest, dass diese vom Bereich abhängt und dieser Bereich mit wachsender Genauigkeit abnimmt. Eine besonders hohe Genauigkeit wird bei der Padé-Methode, welche im Grunde genommen eine Kettenbruch-Approximation darstellt, bei $x = 0$ erreicht. Bei der Padé-Approximation für die einfachen Funktionen „ $\sin x$ “ bzw. „ $\cos x$ “ im Bereich $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werden vier Multiplikationen und Divisionen benötigt, wobei das Ergebnis auf zehn Nachkommastellen genau ist.

1892 erstellte Padé eine Tabelle

$$\begin{array}{cccc} [0,0] & [0,1] & [0,2] & \cdots \\ [1,0] & [1,1] & [1,2] & \cdots \\ [2,0] & [2,1] & [2,2] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

in der übersichtlich die Ergebnisse der Padé- Approximationen eingetragen werden können. Sie wird in Form einer $(m \times m)$ -Matrix angegeben, wobei die erste Spalte die Partialsumme der Taylorreihe ist.

Beispiel: Padé -Tabelle für e^x

	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3
m = 0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2}{2-2x+x^2}$	$\frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$
m = 1	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+2x}{6-4x+x^2}$	$\frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$
m = 2	$\frac{2+2x+x^2}{2}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$	$\frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$
m = 3	$\frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$	$\frac{24x+18x^2+x^3}{24-6x}$	$\frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$	$\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$

5.1.5 Die Methode von Maehly

Die Methode von Maehly besteht grundlegend darin, aus einer Tschebyscheff-Entwicklung von $f(ax)$ mit

$$f(ax) = \frac{1}{2}c_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(a) \cdot T_n(x), \text{ mit } -a \leq ax \leq a,$$

eine rationale Näherung für $f(ax)$

$$f(ax) \approx R_{MN}(x; a) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m \cdot T_m(x)}{\sum_{m=0}^N b_m \cdot T_m(x)}$$

zu gewinnen, welche einen Fehler der Größenordnung $A_0 \cdot T_{M+N+1}(x)$ mit sich zieht – sowohl a_m , b_m als auch A_0 hängen von a ab. Ebenso wie bei der Padé-Approximation sind passende Werte für M , N oder $N+1$.

Sei h_m der Koeffizient für die Entwicklung der Funktion $H(x)$

$$H(x) = \sum_0^N b_m T_m(x) \cdot \sum_0^{\infty} c_n T_n(x) - \sum_0^M a_m T_m(x) = \sum_0^{\infty} h_m T_m(x).$$

Falls $c_n(a)$ bekannt sind, dann sind die $(M+N+1)$ Unbekannten a_m , b_m durch genauso viele Bedingungen wie $h_m = 0$, mit $0 \leq m \leq M+N$ definiert. Für h_m können folgende Gleichungen unter Verwendung der Identität

$$T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x) = 2T_m(x) \cdot T_n(x),$$

mit m kleiner, größer oder gleich n , hergeleitet werden:

$$a_0 = c_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i c_i$$

$$a_j = c_j + \frac{c_0}{2} b_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i (c_{j+i} + c_{|j-i|}) ,$$

mit $j=1,2,\dots,M+N-1,M+N$. Das erste von Null verschiedene Glied bei $H(x)$ sei mit A_0 bezeichnet, dann gilt:

$$a_j = 0 \quad \text{für } j > M$$

$$b_j = 0 \quad \text{für } j > N$$

$$h_{M+N+1} = A_0 = c_{M+N+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i (c_{M+N+i+1} + c_{M+N-i+1}) .$$

Der zuvor bereits erwähnte Fehler von $R_{MN}(x;a)$ lässt sich nun darstellen als

$$\frac{H(x)}{\sum_{m=0}^N b_m T_m(x)} .$$

$H(x)$ nimmt die Größe des ersten Gliedes an; der Nenner hingegen die Größe 1, da h_m und b_m sehr rasch abnehmen und $b_0 = 1$ ist. Die obere Grenze des absoluten Fehlers, im Bereich $a \cdot |x| \leq a$, kann als wie oben erwähnt durch eine grobe Näherung, welche durch $|A_0|$ gegeben ist, geschätzt werden.

Die Näherung $R_{MN}(x;a)$ wird, nach der geeigneten Wahl von M , N und dem reduzierten Bereich a , in einen Kettenbruch umgewandelt, wobei dieser das gleiche Argument z hat wie $f(z)$. Erreichen können wir dies indem wir $T_m(x) = T_m\left(\frac{z}{a}\right)$ durch die zugehörigen expliziten Ausdrücke ersetzen.

5.2 Beispiele elementarer Funktionen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Approximation der elementaren Funktionen e^x und $\sin x$, für $x \in (-\infty, \infty)$.

5.2.1 Wie wird e^x approximativ berechnet?

Ziel ist es e^x , für $x \in [-\infty, \infty]$, auf 10 Stellen genau zu berechnen.

Für die Auswertung der e^x -Reihe verwenden wir die MacLaurin-Reihe [↑ 5.1.1], welche der Taylor-Entwicklung um Null entspricht.

Wir erhalten somit

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

wobei $a_0 = 1$ und $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{x}{n}$, mit $n = 1, 2, 3, \dots$, rekursiv berechnet wird.

Um den Grad des Polynoms zu bestimmen, welcher uns für ein beliebig gewähltes x nahe der Entwicklungsstelle Null eine Genauigkeit von zehn Stellen liefert, betrachten

wir das Restglied der MacLaurin-Reihe $R_{N+1} = \left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right|$. Dabei verlangen wir, dass das

Restglied erst ab der zehnten Stelle nach dem Komma einen Wert ungleich Null hat.

Dies kann man in Form der Ungleichung

$$\left| \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right| \leq 10^{-10}$$

zum Ausdruck bringen.

Für den Wert $x = 0.05$ würde dies folgendes bedeuten:

$$\frac{0.05^{N+1}}{(N+1)!} \leq 10^{-10}.$$

Aus der Berechnung in Maple resultiert für $N \in \mathbb{N}$ der Wert 5. Selbiges wurde für sämtliche Werte x aus der unten stehenden Tabelle durchgerechnet [↑ A.4].

x	Grad des Polynoms
0.05	5
0.1	6
0.2	7
0.5	10
1	13
2	17
3	21
5	28
7	34
10	43

Unsere Feststellungen aus Kapitel 5.1, dass wir gute Approximationen nur nahe der Entwicklungsstelle, also $x_0 = 0$, erzielen können, wurde hiermit bestätigt.

Weiters ist erkennbar, dass e^x im Bereich $0 \leq x < 0.1$ durch das Polynom 6. Grades

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \approx e^x$$

so angenähert werden kann, dass die gewünschte Genauigkeit erreicht wird.

Zur Auswertung dieses Polynoms wird das HORNER-Schema [↑ A.8] herangezogen, was zu folgender Darstellungsform führt:

$$P_6(x) = 1 + x \cdot \left(1 + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + x \cdot \left(\frac{1}{3!} + x \cdot \left(\frac{1}{4!} + x \cdot \left(\frac{1}{5!} + x \cdot \frac{1}{6!} \right) \right) \right) \right) \right).$$

Es ist ersichtlich, dass wir 6 Multiplikationen und 6 vorausberechnete Konstanten benötigen.

Im Folgenden werden wir die drei Ziele

- Auswertung des Taylor-Polynoms rechentechnisch verbessern
- Anpassung an die Arithmetik des Rechners
- Argumentbereich auf $0 \leq x < 0.1$ einschränken

bearbeiten, um eine möglichst gute Näherung für e^x zu erzielen.

Unser erstes Ziel ist es, die Auswertung des Taylor-Polynoms rechentechnisch zu verbessern:

Mithilfe der Padé-Approximation [↑ 5.1.4] können wir das Polynom in eine rationale Funktion, mit $a_i, b_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, umwandeln:

$$\underbrace{(1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)}_{Q_3(x)} \cdot \underbrace{P_6(x)}_{P_6(x)} - \underbrace{a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3}_{P_3(x)} = \gamma_0x^7 + \gamma_1x^8 + \gamma_2x^9$$

$$Q_3(x) \cdot P_6(x) = P_3(x) + (\gamma_0x^7 + \gamma_1x^8 + \gamma_2x^9)$$

$$P_6(x) = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \frac{(\gamma_0x^7 + \gamma_1x^8 + \gamma_2x^9)}{Q_3(x)}$$

Das rechte Glied unserer Gleichung $\frac{(\gamma_0 x^7 + \gamma_1 x^8 + \gamma_2 x^9)}{Q_3(x)}$ entspricht dem Restglied der Padé-Approximation und nimmt annähernd den Wert Null für x nahe Null an. Daraus folgt:

$$R_{33}(x) \approx \frac{P_3(x)}{Q_3(x)}.$$

Wird nun ein Koeffizientenvergleich [↑ A.6] über den Grad 0 bis 6 durchgeführt, so erhalten wir sieben lineare Gleichung für die a_i und b_i ($b_0=1$), deren Lösung führt auf:

$$R_{33}(x) = \frac{x^3 + 12x^2 + 60x + 120}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120}, \quad (2)$$

vgl. Tabelle Seite 76.

Die soeben durchgeführte Transformation des Taylor-Polynoms in eine rationale Funktion hat i.A. keine Auswirkungen auf die Anzahl der Multiplikationen bzw. Divisionen. Erst die Verwandlung in eine äquivalente Kettenbruchentwicklung bringt eine Reduzierung der Rechenoperationen.

(2) soll nun in einen äquivalenten Kettenbruch umgewandelt werden (mittels der Kettenbruchentwicklung):

$$\begin{array}{r} (x^3 + 12x^2 + 60x + 120) : (-x^3 + 12x^2 - 60x + 120) = -1 \\ \underline{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120} \\ 24x^2 + 240 \end{array}$$

Nach der ersten durchgeführten Division nimmt (2) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 R_{33}(x) &= -1 + \frac{24x^2 + 240}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120} \\
 &= -1 + \frac{24(x^2 + 10)}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120} \\
 &= -1 + \frac{24}{\frac{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120}{x^2 + 10}}
 \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir den soeben im Nenner entstandenen Bruch nach der Kettenbruchentwicklung umformen.

$$\begin{array}{r}
 (-x^3 + 12x^2 - 60x + 120) : (x^2 + 10) = -x \\
 \begin{array}{r}
 -x^3 \qquad \qquad -10x \\
 + \qquad \qquad + \\
 \hline
 12x^2 - 50x + 120
 \end{array}
 \end{array}$$

Nach dieser Division entsteht folgende Form:

$$R_{33}(x) = -1 + \frac{24}{-x + \frac{12x^2 - 50x + 120}{x^2 + 10}}$$

Analog zu vorhin, müssen wir den entstandenen Bruch auflösen

$$\begin{array}{r}
 (12x^2 - 50x + 120) : (x^2 + 10) = 12 \\
 \begin{array}{r}
 12x^2 \qquad \qquad +120 \\
 - \qquad \qquad - \\
 \hline
 -50x
 \end{array}
 \end{array}
 ,$$

wodurch (2) folgende Gestalt annimmt

$$\begin{aligned}
 R_{33}(x) &= -1 + \frac{24}{-x + 12 + \frac{-50x}{x^2 + 10}} \\
 &= -1 + \frac{24}{-x + 12 - \frac{50}{\frac{x^2 + 10}{x}}}
 \end{aligned}$$

Durch wiederholte Polynomdivision

$$\begin{array}{r}
 (x^2 + 10) : (x) = x \\
 \underline{x^2} \\
 10
 \end{array}$$

ist es nun gelungen, (2) darzustellen als

$$R_{33}(x) = \frac{x^3 + 12x^2 + 60x + 120}{-x^3 + 12x^2 - 60x + 120} = -1 + \frac{24}{-x + 12 - \frac{50}{x + \frac{10}{x}}} = K_e(x).$$

Wie genau unsere soeben berechnete Näherung von e^x nun tatsächlich ist, zeigt folgende Grafik:

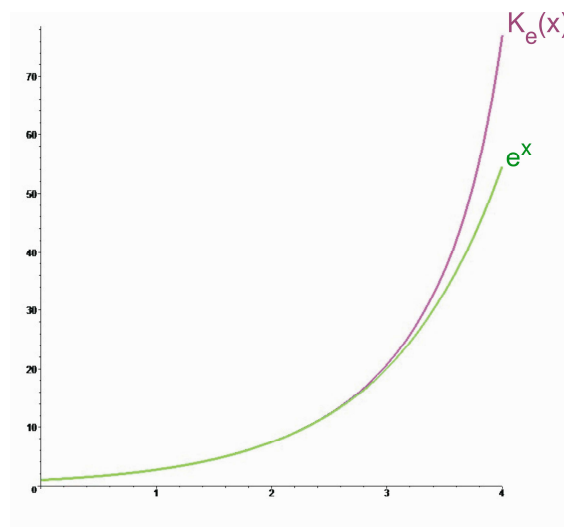


Abb. 57: Approximation von e^x

Im nächsten Schritt passen wir unsere Kettenbruchdarstellung $K_e(x)$ an die Arithmetik des Taschenrechners an. Da der Taschenrechner intern die Gleitkomma-Arithmetik [↑ 2.2.3] zur Basis 10 verwendet ist es sinnvoll, e^x als Zehnerpotenz zu berechnen. Das heißt:

$$e^x = 10^{x \cdot \log_{10} e}.$$

Da $10^x = e^{\frac{x}{\log_{10} e}} \approx K_e\left(\frac{x}{\log_{10} e}\right)$ ist, lässt sich der Kettenbruch $K_e(x)$ schreiben als

$$K_{10}(x) = -1 + \frac{24 \cdot \log_{10} e}{-x + 12 \cdot \log_{10} e - \frac{50 \cdot \log_{10} e^2}{x + \frac{10 \cdot \log_{10} e^2}{x}}},$$

für $x \in (0, 0.1)$.

Um e^x auf dem gesamten Intervall auswerten zu können, wird der Zehnerexponent $x \cdot \log_{10} e$ in einen ganzzahligen Teil N^* und einen positiven Bruchteil F zerlegt, mit $0 < F < 1$.

$$\begin{aligned} e^x &= 10^{x \cdot \log_{10} e} \\ &= 10^{N^*} \cdot 10^F \\ &= 10^{N^*} \cdot e^{F \cdot \log_{10} e} \end{aligned}$$

Der Bruchteil F wird noch einmal zerlegt, und zwar in ein Zehntel ($0.Z$) und einen Rest R , welcher kleiner als 0.1 ist.

$$\begin{aligned} e^x &= 10^{x \cdot \log_{10} e} \\ &= 10^{N^* + F} \\ &= 10^{N^* + \frac{Z}{10} + R} \\ &= 10^{N^*} \cdot 10^{\frac{Z}{10}} \cdot 10^R \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet 10^{N^*} eine Stellenwertkorrektur, $10^{\frac{Z}{10}}$ wird aus einer vorausberechneten Tabelle der Potenzen $10^{0.0}, 10^{0.1}, \dots, 10^{0.9}$ entnommen und 10^R lässt sich mittels eines Kettenbruchs annähern.

Es ist uns nun gelungen, die Funktion e^x für beliebige x mit einer Genauigkeit von zehn Stellen zu berechnen. Hierzu werden nur mehr zwei Multiplikationen, drei Divisionen und fünfzehn vorberechnete und gespeicherte Konstanten benötigt.

5.2.2 Wie wird $\sin x$ approximativ berechnet?

Ziel ist es $\sin x$, für $x \in [-\infty, \infty]$, auf 10 Stellen genau zu berechnen.

Im Allgemeinen betrachten wir bei der Berechnung von $\sin N$ den Bereich $(0, \infty)$.

Nähern wir $\sin x$ durch $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ an, so betrachten wir lediglich den Bereich $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Um eine genauere Approximation zu erhalten, verkleinern wir den Bereich nochmals auf $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Für die Berechnung von $\sin x$ mittels der Potenzreihe [↑ 5.1.1] benötigen wir i.A. sieben Multiplikationen bzw. Divisionen, um eine Genauigkeit von zehn Stellen zu erzielen. Wenden wir die Methode von Maehly [↑ 5.1.5] an, so benötigen wir für die Berechnung von $\sin x$, im Bereich $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ nur mehr vier Operationen. Wie die Berechnung von $\sin x$ bei der Methode von Maehly genau vor sich geht, soll an dieser Stelle kurz diskutiert werden:

Für die Auswertung der $\sin x$ -Reihe verwenden wir die Tschebyscheff-Entwicklung [↑ 5.1.2]

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = x \cdot \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_n \cdot T_{2n}(x) \right].$$

Im Bereich $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ kann $\sin x$ etwa durch das Polynom

$$P(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 2 \cdot \sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot J_{2n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot T_{2n+1}(x)$$

so angenähert werden, dass die gewünschte Genauigkeit von 10^{-10} erreicht wird. Bei den $J_{2n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ handelt es sich um die Besselfunktionen 1. Art [↑ A.10].

Überlegungen bzgl. des Restgliedes bei der Entwicklung mit Tschebyscheff-Polynomen können in [XVII] nachvollzogen werden.

Unser erstes Ziel ist es, die Auswertung dieses Polynoms rechentechnisch zu verbessern:

Mithilfe der Maehly-Approximation [↑ 5.1.5] können wir das Polynom in eine rationale Funktion umwandeln:

$$\underbrace{(1 \cdot T_0 + b_1 \cdot T_1 + b_2 \cdot T_2 + b_3 \cdot T_3)}_{Q_3(x)} \cdot \underbrace{P(x)}_{P(x)} - \underbrace{a_0 \cdot T_0 - a_1 \cdot T_1 - a_2 \cdot T_2 - a_3 \cdot T_3}_{P_3(x)} = \text{Rest}$$

$$Q_3(x) \cdot P(x) = P_3(x) + \text{Rest}$$

$$P(x) = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \frac{\text{Rest}}{Q_3(x)}$$

Das rechte Glied unserer Gleichung $\frac{\text{Rest}}{Q_3(x)}$ entspricht dem Restglied der Tschebyscheff-Approximation und nimmt annähernd den Wert Null für x nahe Null an.

Daraus folgt:

$$R_{33}(x) \approx \frac{P_3(x)}{Q_3(x)}.$$

Wird nun ein Koeffizientenvergleich mit Hilfe von „Maple“ [↑ A.11] durchgeführt, so erhalten wir sieben lineare Gleichung für die a_i und b_i ($b_0 = 1$), was auf

$$R_{33}(x) = \frac{0.1138211386x^3 - 0.9756097563x}{0.04878048742x^2 - 0.9756097563} \quad (3)$$

führt. Die soeben durchgeführte Transformation des Polynoms entwickelt nach dem Tschebyscheff-Polynom in eine rationale Funktion hat i.A. keine Auswirkungen auf die Anzahl der Multiplikationen bzw. Divisionen. Erst die Verwandlung in eine äquivalente Kettenbruchentwicklung bringt eine Reduzierung der Rechenoperationen.

(3) soll nun wieder in einen äquivalenten Kettenbruch umgewandelt werden. Der Übersichtlichkeit wegen werden wir die Kettenbruchentwicklung mit Variablen durchführen und anschließend die Werte in die entsprechenden Variablen einsetzen, welche folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} a &:= 0.1138211386 \\ b &:= 0.9756097563 \\ c &:= 0.04878048742 \\ d &:= 0.9758097563 \end{aligned}$$

Die Kettenbruchentwicklung nimmt dann diese Form an:

$$\begin{aligned} (ax^3 - bx) : (cx^2 - d) &= \frac{a}{c}x \\ \frac{ax^3 - \frac{ad}{c}x}{\frac{-bc + ad}{c}} & \\ \underbrace{\left(\frac{-bc + ad}{c} \right)}_{=: f} x & \end{aligned}$$

Nach der ersten durchgeführten Division nimmt (3) die folgende Gestalt an:

$$R_{33}(x) = \frac{a}{c}x + \frac{f}{cx^2 - d}$$

$$= \frac{a}{c}x + \frac{f}{\frac{cx^2 - d}{x}}$$

Als nächstes müssen wir den soeben im Nenner entstandenen Bruch nach der Kettenbruchentwicklung umformen.

$$(cx^2 - d) : (x) = cx$$

$$\frac{cx^3}{-d}$$

Nach dieser Division entsteht die folgende Form:

$$R_{33}(x) = \frac{a}{c}x + \frac{f}{cx - \frac{d}{x}}$$

Durch wiederholt durchgeführte Polynomdivision und Rückeinsetzen der Werte ist es nun möglich, (3) darzustellen als

$$R_{33}(x) = \frac{0.1138211386x^3 - 0.9756097563x}{0.04878048742x^2 - 0.9756097563}$$

$$= \frac{0.1138211386}{0.04878048742}x + \frac{1.300813034}{0.04878048742x - \frac{0.9756097563}{x}} = K_{\sin}(x) .$$

Es ist uns nun gelungen, die Funktion $\sin x$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ zu berechnen, wobei eine Genauigkeit von zehn Stellen erreicht wird. Analog wie bei der Funktion e^x kann man den Bereich auf $(0, \infty)$ ausweiten.

Wie genau die von uns erstellte rationale Approximation, ausgegangen wurde vom Polynom 11. Grades, der Funktion $\sin x$ tatsächlich ist, haben wir in der folgenden Grafik veranschaulicht.

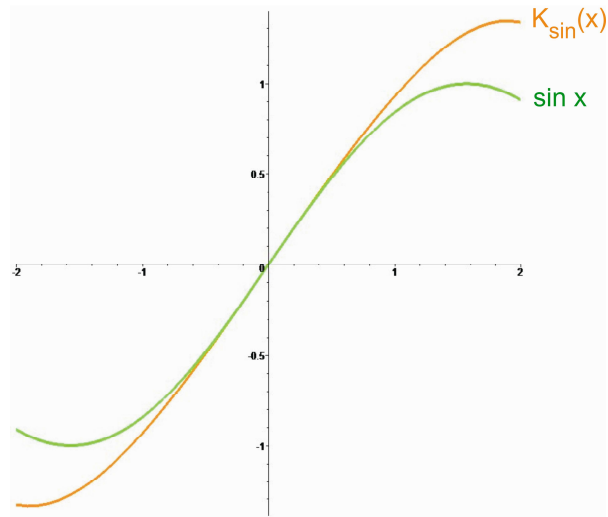


Abb. 58: *Approximation von $\sin x$*

Anhang

A.1 Beispiel für einen Datenfehler bei guter Konditionierung

☐ Voreinstellungen löschen und Pakete laden

```
[> restart;  
[> with(LinearAlgebra) :
```

☐ Gegebener Datensatz für eine GUTE Konditionierung

```
> a:=1.7542918536;  
b:=-2.5397429552;  
c:=1.0282165641;  
glg1:=a*x1+b*x2-c;  
  
a := 1.7542918536  
b := -2.5397429552  
c := 1.0282165641  
glg1 := 1.7542918536 x1 - 2.5397429552 x2 - 1.0282165641  
  
> m:=3.5092741178;  
n:=4.9836402735;  
o:=5.9836409642;  
glg2:=m*x1+n*x2-o;  
  
m := 3.5092741178  
n := 4.9836402735  
o := 5.9836409642  
glg2 := 3.5092741178 x1 + 4.9836402735 x2 - 5.9836409642  
  
> lsg1:=solve({glg1,glg2},{x1,x2});  
lsg1 := {x2 = 0.3901782716, x1 = 1.150988119}
```

☐ Verfälschter Datensatz

```
> a1:=1.7542918000;  
b1:=-2.5397429000;  
c1:=1.0282165000;  
glg1a:=a1*x1+b1*x2-c1;  
  
a1 := 1.7542918000  
b1 := -2.5397429000  
c1 := 1.0282165000  
glg1a := 1.7542918000 x1 - 2.5397429000 x2 - 1.0282165000  
  
> m1:=3.5092741000;  
n1:=4.9836402000;  
o1:=5.9836409000;  
glg2a:=m1*x1+n1*x2-o1;  
  
m1 := 3.5092741000  
n1 := 4.9836402000  
o1 := 5.9836409000  
glg2a := 3.5092741000 x1 + 4.9836402000 x2 - 5.9836409000
```

```

[ > lsg1a:=solve({glg1a,glg2a},{x1,x2});
      lsg1a:= {x2=0.3901782749,x1=1.150988110}
- Berechnung der Konditionszahl
[ > A:=Matrix([[1.7542918000,-2.5397429000],[3.5092741000,4.983649
      2000]]);
      B:=Vector([1.0282165000,5.9836409000]);
      A:= $\begin{bmatrix} 1.7542918000 & -2.5397429000 \\ 3.5092741000 & 4.9836492000 \end{bmatrix}$ 
      B:= $\begin{bmatrix} 1.0282165000 \\ 5.9836409000 \end{bmatrix}$ 
[ > x:=LinearSolve(A,B);
      x:= $\begin{bmatrix} 1.15098760492394182 \\ 0.390177925970266737 \end{bmatrix}$ 
[ > Norm(A,2);
      6.213307167
[ > Norm(MatrixInverse(A),2);
      0.3519204886
[ > ConditionNumber(A,2);
      2.186590094

```

A.2 Beispiel für einen Datenfehler bei schlechter Konditionierung

```

- Voreinstellungen löschen und Pakete laden
[ > restart;
[ > with(LinearAlgebra);
- Gegebener Datensatz für eine SCHLECHTE Konditionierung
[ > f:=1.743681226;
      g:=2.5287326143;
      h:=3.666771987;
      glg3:=f*y1-g*y2-h;
      f:=1.743681226
      g:=2.5287326143
      h:=3.666771987
      glg3:=1.743681226 y1 - 2.5287326143 y2 - 3.666771987
[ > u:=4.359203065;
      v:=5.321302803;
      w:=6.667195145;
      glg4:=u*y1-v*y2-w;
      u:=4.359203065
      v:=5.321302803
      w:=6.667195145
      glg4:=4.359203065 y1 - 5.321302803 y2 - 6.667195145

```

```
[ > lsg2:=solve({glg3,glg4},{y1,y2});
      lsg2={y2=-2.498413829,y1=-1.520374543}
```

- Verfälschter Datensatz

```
[ > f1:=1.743681000;
    g1:=2.5287326000;
    h1:=3.666771000;
    glg3a:=f1*y1-g1*y2-h1;
                                fl:=1.743681000
                                gl:=2.5287326000
                                hl:=3.666771000
                                glg3a:=1.743681000 y1 - 2.5287326000 y2 - 3.666771000
    > u1:=4.359203000;
    v1:=5.321302000;
    w1:=6.667195000;
    glg4a:=u1*y1-v1*y2-w1;
                                ul:=4.359203000
                                vl:=5.321302000
                                wl:=6.667195000
                                glg4a:=4.359203000 y1 - 5.321302000 y2 - 6.667195000
    > lsg2a:=solve({glg3a,glg4a},{y1,y2});
      lsg2a={y2=-2.498408832,y1=-1.520368039}
```

- Berechnung der Konditionszahl

```
[ > E:=Matrix([[1.743681000,-2.5287326000],[4.359203000,-5.321302000]]);
    F:=Vector([3.666771000,6.667195000]);
                                E:= $\begin{bmatrix} 1.743681000 & -2.5287326000 \\ 4.359203000 & -5.321302000 \end{bmatrix}$ 
                                F:= $\begin{bmatrix} 3.666771000 \\ 6.667195000 \end{bmatrix}$ 
    > y:=LinearSolve(E,F);
                                y:= $\begin{bmatrix} -1.52036803891549765 \\ -2.49840883233925704 \end{bmatrix}$ 
    > Norm(E,2);
                                7.529949404
    > Norm(MatrixInverse(E),2);
                                4.316132912
    > ConditionNumber(E,2);
                                32.50026245
```

A.3 Beispiel aus der Trigonometrie

☐ Voreinstellungen löschen

```
[ > restart;
```

☐ Angabe

Vom Gipfel G des Unterbergs (Salzburger Hochthron, Gesamthöhe h inkl. Instrumentenhöhe beträgt 1856,57 m) blicken wir auf eine Kirche K unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8,83^\circ$. Schwenken wir das Fernrohr um den Schwenkwinkel $\phi = 8,96^\circ$, so erblicken wir einen Turm T unter dem Tiefenwinkel $\beta = 9,62^\circ$. Verlängert man die Strecke KT über den Turm T um $y = 397,69$ m hinaus, so kommen wir zum Hotel H. Sowohl die Kirche, der Turm als auch das Hotel liegen in derselben Horizontalebene.

Gesucht ist

- die direkte Entfernung zwischen der Kirche K und dem Turm T,
- der Tiefenwinkel, unter welchem man vom Unterberg aus das Hotel H erblickt sowie
- der Schwenkwinkel zwischen dem Turm T und dem Hotel H.

```
> Digits:=20;
```

```
20
```

```
> h:=1856.57;
```

```
1856.57
```

```
> alpha:=evalf(8.83*Pi/180);
```

```
0.15411257295109930165
```

```
> beta:=evalf(9.62*Pi/180);
```

```
0.16790067404185450530
```

```
> phi:=evalf(8.96*Pi/180);
```

```
0.15638150097869193009
```

```
> y:=397.69;
```

```
397.69
```

☐ Ausführung mit 10 Nachkommastellen

[Runden der zuvor eingegebenen Angabewerte auf 10 Nachkommastellen

```
> h_a:=evalf(h,10);
```

```
1856.57
```

```
> alpha_a:=evalf(alpha,10);
```

```
0.1541125730
```

```
> beta_a:=evalf(beta,10);
```

```
0.1679006740
```

```
> phi_a:=evalf(phi,10);
```

```
0.1563815010
```

```
> y_a:=evalf(y,10);
```

```
397.69
```

[Berechnung mit den auf 10 Nachkommastellen gerundeten Zahlen

```
> a1:=evalf(h_a/tan(alpha_a));
```

```
11951.318238343322270
```

```
> a1_a:=evalf(a1,15);
```

```
11951.3182383433
```

```
> b1:=evalf(h_a/tan(beta_a));
```

```
10953.447161099278600
```

```
> b1_a:=evalf(b1,15);
```

```
10953.4471610993
```

```

> x1:=evalf(sqrt(a1_a^2+b1_a^2-2*a1_a*b1_a*cos(phi_a)));
2047.0976908336600779
> x1_a:=evalf(x1,14);
2047.0976908337
> beta_11:=evalf(180*(arcsin(a1_a*sin(phi_a)/x1_a)/Pi);
65.404142734885353452
> beta_1a:=evalf(beta_11,12);
65.4041427349
> beta_2a:=evalf(180-beta_1a);
114.5958572651
> z1:=evalf(sqrt(b1_a^2+y_a^2-2*b1_a*y_a*cos(beta_2a*Pi/180)));
11124.850163335539902
> z1_a:=evalf(z1,15);
11124.8501633355
> delta_1:=evalf(180*(arctan(h_a/z1_a)/Pi));
9.4744901545611737243
> delta1_a:=evalf(delta_1,11);
9.4744901546
> phi_11:=evalf((180*(arcsin(y_a*sin(Pi*(beta_2a)/180)/z1_a)/Pi));
1.8626904456363137403
> phi1_a:=evalf(phi_11,11);
1.8626904456

```

- Ausführung mit 2 Nachkommastellen

```

Runden der zuvor eingegebenen Angabewerte auf 2 Nachkommastellen
> h_b:=evalf(h,6);
1856.57
> alpha_b:=evalf(alpha,2);
0.15
> beta_b:=evalf(beta,2);
0.17
> phi_b:=evalf(phi,2);
0.16
> y_b:=evalf(y,5);
397.69
Berechnung mit den auf 2 Nachkommastellen gerundeten Zahlen
> a2:=evalf(h_b/tan(alpha_b));
12284.165291533133654
> a2_a:=evalf(a2,7);
12284.17
> b2:=evalf(h_a/tan(beta_b));
10815.591110965610685
> b2_a:=evalf(b2,7);
10815.59
> x2:=evalf(sqrt(a2_a^2+b2_a^2-2*a2_a*b2_a*cos(phi_b)));
2355.9939369631589780
> x2_a:=evalf(x2,6);
2355.99
> beta_12:=evalf(180*(arcsin(a2_a*sin(phi_b)/x2_a)/Pi);
56.169447222071953129

```

```

[ > beta_1b:=evalf(beta_12,4);
    56.17
[ > beta_2b:=evalf(180-beta_1b);
    123.83
[ > z2:=evalf(sqrt(b2_a^2+y_b^2-2*b2_a*y_b*cos(beta_2b*Pi/180)));
    11041.939229219226939
[ > z2_a:=evalf(z2,7);
    11041.94
[ > delta_2:=evalf(180*(arctan(h_b/z2_a)/Pi));
    9.5443268411413339566
[ > delta_2b:=evalf(delta_2,3);
    9.54
[ > phi_12:=evalf((180*(arcsin(y_b*sin(Pi*(beta_2b)/180)/z2_a)/Pi
    ));
    1.7144598720106683619
[ > phi_1b:=evalf(phi_12,3);
    1.71

```

A.4 Visualisierung der Cosinus-Funktion

☐ Voreinstellungen löschen und Pakete laden

```

[ > restart:
[ > with(plots):
[ > with(plottools):

```

☐ Cosinus Funktion

```

[ > f1:=2*cos(x):

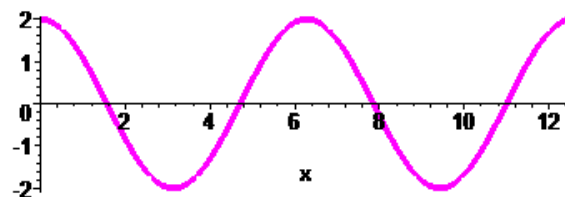
```

☐ Visualisierung der Cosinus Funktion

```

[ > f1p:=plot(f1,x=0..4*Pi,thickness=4,color=magenta):
[ > display(f1p,scaling=constrained);

```



A.5 Visualisierung der Tschebyscheffpolynome

☐ Voreinstellungen löschen

```
[ > restart:
```

☐ benötigte Pakete laden

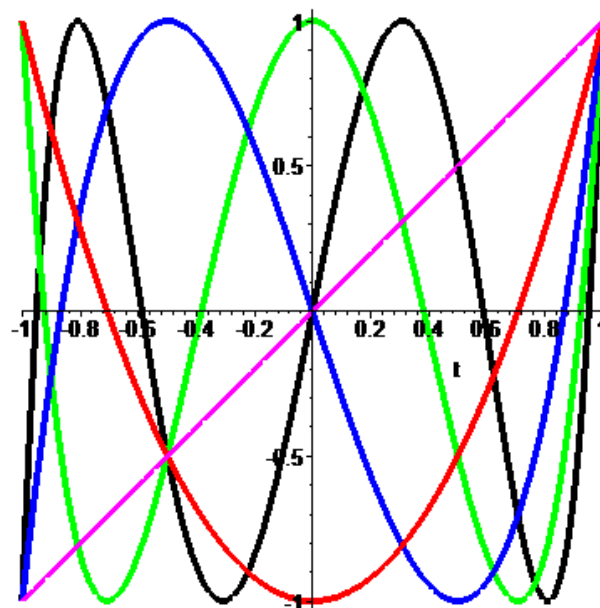
```
[ > with(plots) :  
[ > with(plottools) :
```

☐ Tschebyscheffpolynome

```
[ > f1:=t;  
                                      $f1 = t$   
[ > f2:=2*t^2-1;  
                                      $f2 = 2t^2 - 1$   
[ > f3:=4*t^3-3*t;  
                                      $f3 = 4t^3 - 3t$   
[ > f4:=8*t^4-8*t^2+1;  
                                      $f4 = 8t^4 - 8t^2 + 1$   
[ > f5:=16*t^5-20*t^3+5*t;  
                                      $f5 = 16t^5 - 20t^3 + 5t$ 
```

☐ Visualisierung der Tschebyscheffpolynome

```
[ > f1p:=plot(f1,t=-1..1,thickness=4,color=magenta) :  
[ > f2p:=plot(f2,t=-1..1,thickness=4,color=red) :  
[ > f3p:=plot(f3,t=-1..1,thickness=4,color=blue) :  
[ > f4p:=plot(f4,t=-1..1,thickness=4,color=green) :  
[ > f5p:=plot(f5,t=-1..1,thickness=4,color=black) :  
[ > display(f1p,f2p,f3p,f4p,scaling=constrained) ;
```



A.6 Berechnung des Grades eines approximierenden Taylorpolynoms

☐ Voreinstellungen löschen

```
[ > restart;
```

☐ Aufstellen der Ungleichung

```
> a:=x^(N+1)/(N+1)!;
```

$$a := \frac{x^{(N+1)}}{(N+1)!}$$

```
> b:=10^(-10);
```

$$b := \frac{1}{10000000000}$$

```
> f:=a<=b;
```

$$f := \frac{x^{(N+1)}}{(N+1)!} \leq \frac{1}{10000000000}$$

☐ Lösen der Ungleichung für verschiedene x Werte

```
> f1:=subs(x=0.05,f):
```

```
f11:=evalf(subs(N=5,f1));
```

$$f11 = 0.2170138889 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f2:=subs(x=0.1,f):
```

```
f21:=evalf(subs(N=6,f2));
```

$$f21 = 0.1984126984 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f3:=subs(x=0.2,f):
```

```
f31:=evalf(subs(N=7,f3));
```

$$f31 = 0.6349206349 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f4:=subs(x=0.5,f):
```

```
f41:=evalf(subs(N=10,f4));
```

$$f41 = 0.1223247480 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f5:=subs(x=1,f):
```

```
f51:=evalf(subs(N=13,f5));
```

$$f51 = 0.1147074560 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f6:=subs(x=2,f):
```

```
f61:=evalf(subs(N=17,f6));
```

$$f61 = 0.4094481392 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f7:=subs(x=3,f):
```

```
f71:=evalf(subs(N=21,f7));
```

$$f71 = 0.2791907410 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```
> f8:=subs(x=5,f):
```

```
f81:=evalf(subs(N=28,f8));
```

$$f81 = 0.2106644751 \cdot 10^{-10} \leq 0.1000000000 \cdot 10^{-9}$$

```

> f9:=subs(x=7,f):
f9l:=evalf(subs(N=34,f9));

f9l = 0.3666053108 10-10 ≤ 0.1000000000 10-9
> f10:=subs(x=10,f):
f10l:=evalf(subs(N=43,f10));

f10l = 0.3761842881 10-10 ≤ 0.1000000000 10-9

```

A.7 Überprüfung der Approximationsgenauigkeit eines Polynoms mit verschiedenen Graden

[-] Voreinstellungen löschen und Stellengenauigkeit festlegen

```

> restart:
> Digits:=25;

Digits = 25

```

[-] Definition der MacLaurin Reihe und Überprüfung der Genauigkeit

```

> f:=Sum(x^n/n!,n=0..infinity);

f = 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$


Nun setzen wir in f verschiedene x Werte ein um zu überprüfen, dass der gegebene Grad zumindest die gewünschte 10-Stellige Genauigkeit liefert.
> f1:=Sum(x^n/n!,n=0..5):
f1p:=evalf(subs(x=0.05,f1));
f1e:=evalf(exp(1)^0.05);

f1p = 1.051271096354166666666667
f1e = 1.051271096376024039697518
> f2:=Sum(x^n/n!,n=0..6):
f2p:=evalf(subs(x=0.1,f2));
f2e:=evalf(exp(1)^0.1);

f2p = 1.105170918055555555555556
f2e = 1.105170918075647624811708
> f3:=Sum(x^n/n!,n=0..7):
f3p:=evalf(subs(x=0.2,f3));
f3e:=evalf(exp(1)^0.2);

f3p = 1.221402758095238095238095
f3e = 1.221402758160169833921072
> f4:=Sum(x^n/n!,n=0..10):
f4p:=evalf(subs(x=0.5,f4));
f4e:=evalf(exp(1)^0.5);

f4p = 1.648721270687365658068783
f4e = 1.648721270700128146848651

```

```

> f5:=Sum(x^n/n!,n=0..13):
f5p:=evalf(subs(x=1,f5));
f5e:=evalf(exp(1)^1);

f5p = 2.718281828446759002314558
f5e = 2.718281828459045235360287

> f6:=Sum(x^n/n!,n=0..17):
f6p:=evalf(subs(x=2,f6));
f6e:=evalf(exp(1)^2);

f6p = 7.389056098884919301975013
f6e = 7.389056098930650227230425

> f7:=Sum(x^n/n!,n=0..21):
f7p:=evalf(subs(x=3,f7));
f7e:=evalf(exp(1)^3);

f7p = 20.08553692315559013512866
f7e = 20.08553692318766774092852

> f8:=Sum(x^n/n!,n=0..28):
f8p:=evalf(subs(x=5,f8));
f8e:=evalf(exp(1)^5);

f8p = 148.4131591025513554067056
f8e = 148.4131591025766034211155

> f9:=Sum(x^n/n!,n=0..34):
f9p:=evalf(subs(x=7,f9));
f9e:=evalf(exp(1)^7);

f9p = 1096.633158428413159251679
f9e = 1096.633158428458599263719

> f10:=Sum(x^n/n!,n=0..43):
f10p:=evalf(subs(x=10,f10));
f10e:=evalf(exp(1)^10);

f10p = 22026.46579480666823382017
f10e = 22026.46579480671651695786

```

A.8 HORNER-Schema

Das *HORNER-Schema*⁴⁹ dient in der Analysis zur Bestimmung der Nullstellen, zur Berechnung der Ableitung oder zur Berechnung der Werte eines Polynoms, welches allgemein geschrieben werden kann als

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Idee des HORNER-Schemas liegt darin, ein Polynom $f(x)$ so darzustellen, dass es aus

⁴⁹ Benannt nach dem britischen Mathematiker William George Horner (* 1786, † 1837).

möglichst wenig Summen und Produkten besteht. Um dies zu erreichen wird immer die „alleinstehende“ Polynomvariable ausgeklammert. Den genauen Algorithmus überlegen wir uns an Hand eines allgemeinen Polynoms 4. Grades:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 \\
 &= (a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x^1 + a_1) \cdot x + a_0 \\
 &= ((a_4x^2 + a_3x^1 + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 \\
 &= (((a_4x^1 + a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0
 \end{aligned}$$

Wenden wir dieses Schema auf das Beispiel

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

an, so gilt:

$$\begin{aligned}
 P_6(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \\
 &= 1 + x \cdot \left(1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{6!} \right) \\
 &= 1 + x \cdot \left(1 + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{x^1}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \frac{x^4}{6!} \right) \right) \\
 &= 1 + x \cdot \left(1 + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + x \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{x^1}{4!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^3}{6!} \right) \right) \right) \\
 &= 1 + x \cdot \left(1 + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + x \cdot \left(\frac{1}{3!} + x \cdot \left(\frac{1}{4!} + \frac{x^1}{5!} + \frac{x^2}{6!} \right) \right) \right) \right) \\
 &= 1 + x \cdot \left(1 + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + x \cdot \left(\frac{1}{3!} + x \cdot \left(\frac{1}{4!} + x \cdot \left(\frac{1}{5!} + \frac{x^1}{6!} \right) \right) \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

A.9 Koeffizientenvergleich für e^x

☐ Voreinstellungen löschen

```
[ > restart;
```

☐ Gleichungssystem für den Koeffizientenvergleich aufstellen

```
[ lsZ = Zähler der linken Seite
```

```
[ > lsZ:=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3;
```

$$lsZ := a0 + a1 x + a2 x^2 + a3 x^3$$

```
[ lsN = Nenner der linken Seite
```

```
[ > lsN:=1+b1*x+b2*x^2+b3*x^3;
```

$$lsN := 1 + b1 x + b2 x^2 + b3 x^3$$

```
[ rechte Seite
```

```
[ > rs:=1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4+1/120*x^5+1/720*x^6;
```

$$rs := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

```
[ Neues Polynom, welches durch die Äquivalenzumformung "Nenner der linken Seite auf die rechte Seite bringen" entsteht, aufstellen
```

```
[ > p2:=rs*lsN;
```

$$p2 := \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6\right)(1 + b1 x + b2 x^2 + b3 x^3)$$

```
[ > expand(p2);
```

$$\begin{aligned} &1 + b1 x + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + b2 x^2 + b1 x^2 + b2 x^3 + b3 x^4 + \frac{x^3 b1}{2} + \frac{x^4 b2}{2} \\ &+ \frac{x^5 b3}{2} + \frac{x^4 b1}{6} + \frac{x^5 b2}{6} + \frac{x^6 b3}{6} + \frac{x^5 b1}{24} + \frac{x^6 b2}{24} + \frac{x^7 b3}{24} + \frac{x^6 b1}{120} + b3 x^3 + \frac{x^7 b2}{120} \\ &+ \frac{x^8 b3}{120} + \frac{x^7 b1}{720} + \frac{x^8 b2}{720} + \frac{x^9 b3}{720} \end{aligned}$$

☐ Koeffizientenvergleich

```
[ Gleichungssysteme aufstellen
```

```
[ > g0:=a0-1;
```

```
g1:=a1-b1-1;
```

```
g2:=a2-b2-1/2-b1;
```

```
g3:=a3-1/6-b3-b2-1/2*b1;
```

```
g4:=1/24+b3+1/2*b2+1/6*b1;
```

```
g5:=1/120+1/2*b3+1/6*b2+1/24*b1;
```

```
g6:=1/720+1/6*b3+1/24*b2+1/120*b1;
```

$$\begin{aligned}
g_0 &:= a_0 - 1 \\
g_1 &:= a_1 - b_1 - 1 \\
g_2 &:= a_2 - b_2 - \frac{1}{2} - b_1 \\
g_3 &:= a_3 - \frac{1}{6} - b_3 - b_2 - \frac{b_1}{2} \\
g_4 &:= \frac{1}{24} + b_3 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{6} \\
g_5 &:= \frac{1}{120} + \frac{b_3}{2} + \frac{b_2}{6} + \frac{b_1}{24} \\
g_6 &:= \frac{1}{720} + \frac{b_3}{6} + \frac{b_2}{24} + \frac{b_1}{120}
\end{aligned}$$

[Lösen der soeben aufgestellten Gleichungssysteme, wodurch wir die Lösungen erhalten
 > `solve({g0,g1,g2,g3,g4,g5,g6},{a0,a1,a2,a3,b1,b2,b3}) ;`
 $\{a_0 = 1, a_3 = \frac{1}{120}, b_3 = \frac{-1}{120}, b_2 = \frac{1}{10}, b_1 = \frac{-1}{2}, a_2 = \frac{1}{10}, a_1 = \frac{1}{2}\}$

A.10 Besselfunktionen 1. Art

Die *Besselschen Funktionen erster Art* $J_n(a)$ lassen sich schreiben als

$$J_n(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n},$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $\Gamma(k+n+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^{k+n+1}}{(k+n+1)(k+n+2)(k+n+3) \cdots (k+n+1+m)}$ die

Gamma-Funktion ist und somit $J_n(a)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und die Lösungen der Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - n^2) w = 0$$

darstellen.

Für $n \notin \mathbb{Z}$ besitzen die Besselfunktionen folgende Darstellung:

$$J_{-n}(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k-n},$$

welche linear unabhängig von $J_n(a)$ sind.

Graphisch können wir die Besselfunktion für die Werte $n = 0, 1$ und 2 folgendermaßen visualisieren:

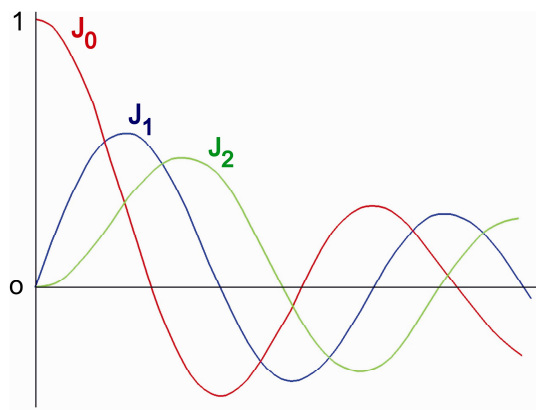


Abb. 59: Besselfunktion für J_0 , J_1 und J_2

A.11 Koeffizientenvergleich für $\sin x$

☐ Voreinstellungen löschen und zusätzlich benötigtes Paket laden

```
[ > restart:
  [ > with(numapprox) :
```

☐ Gleichungssystem für den Koeffizientenvergleich aufstellen

```
[ lsZ = Zähler der linken Seite
  [ > lsZ:=a0*T(0,x)+a1*T(1,x)+a2*T(2,x)+a3*T(3,x) ;
    lsZ:=a0 T(0,x)+a1 T(1,x)+a2 T(2,x)+a3 T(3,x)
  [ > lsZn:=expand(eval(lsZ, T=orthopoly[T])) ;
    lsZn:=a0+a1 x-a2+2 a2 x^2+4 a3 x^3-3 a3 x
```

```

[ lsN = Nenner der linken Seite
> lsN:=1*T(0,x)+b1*T(1,x)+b2*T(2,x)+b3*T(3,x);
      lsN:=T(0,x)+b1 T(1,x)+b2 T(2,x)+b3 T(3,x)
> lsNn:=expand(eval(lsN, T=orthopoly[T]));
      lsNn:=1+b1 x-b2+2 b2 x^2+4 b3 x^3-3 b3 x

[ rechte Seite
> rs:=eval(chebyshev(sin(x), x), T=orthopoly[T]);
rs:=1.000000000 x-0.1666666667 x^3+0.008333333268 x^5-0.0001984124212 x^7
    +0.2755196598 10^-5 x^9-0.2457475561 10^-7 x^11

[ Neues Polynom, welches durch die Äquivalenzumformung "Nenner der linken Seite
  bringen" entsteht, aufstellen
> p2:=rs*lsNn;
p2:=(1.000000000 x-0.1666666667 x^3+0.008333333268 x^5-0.0001984124212 x^7
    +0.2755196598 10^-5 x^9-0.2457475561 10^-7 x^11)
    (1+b1 x-b2+2 b2 x^2+4 b3 x^3-3 b3 x)
> expand(p2);
1.000000000 x-0.1666666667 x^3+0.008333333268 x^5-0.0001984124212 x^7
    +1.000000000 b1 x^2-1.000000000 x b2+2.166666667 b2 x^3+4.500000000 b3 x^4
    -3.000000000 b3 x^2-0.1666666667 x^4 b1-0.3416666667 x^5 b2-0.6916666666 x^6 b3
    +0.008333333268 x^6 b1+0.01686507896 x^7 b2+0.03392857033 x^8 b3
    -0.0001984124212 x^8 b1-0.0003995800390 x^9 b2-0.0008019152746 x^10 b3
    +0.2755196598 10^-5 x^10 b1+0.5534967952 10^-5 x^11 b2+0.00001109451066 x^12 b3
    -0.2457475561 10^-7 x^12 b1-0.4914951122 10^-7 x^13 b2-0.9829902244 10^-7 x^14 b3
    +0.2755196598 10^-5 x^9-0.2457475561 10^-7 x^11

```

Koeffizientenvergleich

```

[ Gleichungssysteme aufstellen
> g0:=a0-a2;
g1:=a1-3*a3-1+1*b2;
g2:=2*a2-1*b1+3*b3;
g3:=4*a3+0.1666666667-2.166666667*b2;
g4:=4.5*b3-0.166666667*b1;
g5:=0.008333333268-0.3416666667*b2;
g6:=-0.6916666666*b3+0.008333333268*b1;

      g0:=a0-a2
      g1:=a1-3 a3-1+b2
      g2:=2 a2-b1+3 b3
      g3:=4 a3+0.1666666667-2.166666667 b2
      g4:=4.5 b3-0.166666667 b1
      g5:=0.008333333268-0.3416666667 b2
      g6:=-0.6916666666 b3+0.008333333268 b1

[ Lösen der soeben aufgestellten Gleichungssysteme, wodurch wir die Lösungen erhalten

```

```

> solve({g0,g1,g2,g3,g4,g5,g6},{a0,a1,a2,a3,b1,b2,b3});
{
  a0 = 0., b1 = 0., b3 = 0., a2 = 0., b2 = 0.02439024371, a3 = -0.02845528466, a1 = 0.8902439023
}

```

Literaturverzeichnis

- [I] **Baker**, George A. Jr.: Essentials of Padé Approximants, Academic Press
New York, San Francisco, Londo 1975
- [II] **Beer**, Rudolf und **Martinuzzi**, Susanne: Erziehung und Unterricht – Heft
1/2 2008, Elektronische Hilfsmittel im Mathematikunterricht auf der
5. Schulstufe; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [III] **Blankenagel**, Jürgen Dr.: Numerische Mathematik im Rahmen der
Schulmathematik; B.I.-Wissenschaftsverlag
- [IV] **Blankenagel**, Jürgen Dr.: Überschlagsrechnung – in: MU Jahrgang 31,
Heft 2, März 1985; Erhard Friedrich Verlag, Seelze 1985
- [V] **Bollhöfer** Matthias und **Mehrmann** Volker: Numerische Mathematik;
Vieweg Verlag, Wiesbaden 2004
- [VI] **Deuflhard** / **Hohmann**: Numerische Mathematik I; Walter de Gruyter
Verlag, Berlin . New York 1993
- [VII] **Eylert**, Bernd und **Eylert**, Dorothee: Kompendium Numerische
Mathematik, Verlag News & Media Berlin, Berlin 2007
- [VIII] **E-Media**: Nr. 14, 2008, Seite 82, „Der erste Taschenrechner der Welt“
- [IX] **Frank**, Reinhard und **Schranz-Kirlinger** Gabriela: Numerische
Mathematik für LehramtskandidatInnen, Februar 2006
- [X] **Haas**, Monika: Was ist das mit der Überschlagsrechnung, persönliche
Mitteilung vom 30.09.2008
- [XI] **Higham**, Nicholas J.: Accuracy and stability of numerical algorithms;
siam Verlag, 1996
- [XII] **Huckle**, Thomas und **Schneider**, Stefan: Numerische Methoden;
Springer Verlag, Heidelberg 2006
- [XIII] **Laub**, **Hruby**, **Reichel**, **Litschauer**, Groß: Lehrbuch der Mathematik –
Arbeitsbuch für die 3. Klasse; htp Verlag, 1987
- [XIV] **Lehrplan Mathematik**: Oberstufe und Unterstufe;
ab Schuljahr 2004 / 2005
- [XV] **Muller**, Jeam-Michel: Elementary functions; Birkhäuser Verlag,
Boston 2006

- [XVI] **Plato**, Robert: Numerische Mathematik kompakt; Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006
- [XVII] **Ralston**, Anthony und **Wilf**, Herbert S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner I; R. Oldenbourg Verlag München Wien 1972
- [XVIII] **Reichel**, Hans Christian: Fachbereichsarbeiten und Projekte 2; Hölder-Pichler-Tempsky Verlag, Wien 1991
- [XIX] **Scheid**, Haralds Prof. Dr. und **Kindinger**, Dieter: Duden Mathematik I, Dudenverlag, Mannheim 2004
- [XX] **Sill**, Hans-Dieter: Zu Problemen einer sinnvollen Genauigkeit – in Mathematik-Unterricht 99; Rostock
- [XXI] **Spektrum der Wissenschaft**: Ausgabe: April 2007
- [XXII] **Taschner**, Rudolf: Mathematik Übungs- und Lehrbuch für die 6. Klasse AHS, Wien 1999

Internet-Linkverzeichnis:

- [i] <http://bennyhills.fortunecity.com/coltrane/320/ulistein/mathe.jpg>
(08.09.08, 13:06)
- [ii] <http://de.wikipedia.org/wiki/Taschenrechner> (31.07.08, 13:23)
- [iii] <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/19502000> (23.10.08, 8:37)
- [iv] <http://math-www.upb.de/user/hilgert/static/Lehrveranstaltungen/Geschichte/Balceris1.ppt> (01.06.08, 20:16)
- [v] <http://science.orf.at/science/news/151136> (26.05.08, 12:14)
- [vi] http://www.ammu.at/archiv/4/4_3.htm (28.05.08, 16:55)
- [vii] <http://www.be24.at/blog/entry/9636/40-jahre-taschenrechner>
(03.08.08, 22:16)
- [viii] <http://www.benjaminwrightson.de/abakus/homepage.htm> (01.06.08, 20:39)
- [ix] <http://www.der-taschenrechner.de/html/heute.html> (31.07.08, 13:47)
- [x] http://www.dorn.org/uni/sls/kap01/a03_00tp.htm (19.08.08; 16:30)
- [xi] <http://www.fachschaften.ksluzern.ch/fachschaften/physik/Unterricht/Arbeitsunterlagen/Fehlerfortpflanzung.doc> (05.09.08, 17:52)
- [xii] http://www.faechnet.ch/public/downloads/mathematik/01_unterrichtsplanung/umsetzungshilfen/12rechenverfahren.doc (18.09.08, 19:45)
- [xiii] http://www.ipvs.uni-stuttgart.de/abteilungen/bv/lehre/lehrveranstaltungen/vorlesungen/WS0506/NSG_termine/dateien/numerik_2-1.pdf
(04.08.08, 21:13)
- [xiv] http://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/8x-0001-t-01/pdf/Webseiteninfo_Lorenz_lang.pdf (15.09.08, 15:37)
- [xv] http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Faszination_Rechenschieber
(31.07.08, 15:00)
- [xvi] <http://www.scai.fraunhofer.de/fileadmin/ArbeitsgruppeTrottenberg/SS07/kap2.pdf> (02.09.08, 09:04)
- [xvii] <http://www.spiegel.de/netzwelt/web/0,1518,508205,00.html>
(03.08.08, 21:37)
- [xviii] <http://www.stauff.de/matgesch/dateien/facharbeiten/calculi/calculi.htm>
(03.08.08, 20:29)
- [xix] http://www.wdr.de/tv/aks/sowars/20071229_taschenrechner.jhtml
(03.08.08, 20:46)

Bildverzeichnis

- Abb. 1:** http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/demographische_masszahlen/sterbetaefeln/020803.html (11.11.08, 9:32)
- Abb. 2:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/abakus/sonstige-eigene/blind.htm> (08.07.08, 9:30)
- Abb. 3:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/abakus/russland/russisch.htm> (08.07.08, 9:30)
- Abb. 4:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/abakus/rom-abakus.htm> (08.07.08, 9:30)
- Abb. 5:** <http://www.joernluetjens.de/sammlungen/abakus/abakus.htm> (08.07.08, 9:35)
- Abb. 6:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/abakus/china/china.htm> (08.07.08, 9:30)
- Abb. 7:** Veranschaulichung der Zehnerpotenzen
- Abb. 8:** Darstellung von „1“
- Abb. 9:** Darstellung von „5“
- Abb. 10:** Darstellung von „5“
- Abb. 11:** Darstellung von „1015“
- Abb. 12:** Darstellung von „9“
- Abb. 13:** Darstellung von „6“
- Abb. 14:** Das Ergebnis von $9 + 6$ auf zwei verschiedene Arten dargestellt
- Abb. 15:** Darstellung von „17“
- Abb. 16:** Darstellung von „ $17 + 10$ “
- Abb. 17:** Darstellung von „ $(17 + 10) - 1$ “
- Abb. 18:** Darstellung von „ $26 + 20 = 46$ “
- Abb. 19:** Darstellung von „37“
- Abb. 20:** Darstellung von „ $37 - 10 + 1$ “
- Abb. 21:** Darstellung von „ $28 - 10$ “
- Abb. 22:** Darstellung von „ $62 \cdot 3$ “
- Abb. 23:** Darstellung des Produkts von „ $2 \cdot 3$ “
- Abb. 24:** Darstellung des Produkts von „ $6 \cdot 3$ “
- Abb. 25:** Darstellung von „ $165 : 11$ “

- Abb. 26:** Darstellung von „ $16 - (1 \cdot 11) = 16 - 10 - 5 + 4$ “
- Abb. 27:** Darstellung von „55:11“
- Abb. 28:** Darstellung von „527“
- Abb. 29:** Eintragen der nächst kleineren Quadratzahl „ $\sqrt{5} = 2, \dots$ “
- Abb. 30:** Darstellung der ersten Stelle des Arguments „ $5 - 4 = 1$ “
- Abb. 31:** Darstellung von „ $2 \cdot 2$ “
- Abb. 32:** Darstellung vom Wert des Quotienten
- Abb. 33:** Darstellung von „ $3 \cdot 4 - 12 = 0$ “
- Abb. 34:** Darstellung von „ $9 - 3^2 = 0$ “
- Abb. 35:** Darstellung des Endergebnisses
- Abb. 36:** Auszug aus der „Briggs’schen Logarithmentafel“
- Abb. 37:** <http://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber> (31.07.08, 13:10)
- Abb. 38:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/rechenschieber/tasche/rs8.htm> (31.07.08, 13:20)
- Abb. 39:** <http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Bild:Loga-Rechenwalze-2-Erbsloeh.jpg> (31.07.08, 13:25)
- Abb. 40:** <http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Rechenrost> (31.07.08, 13:27)
- Abb. 41:** <http://www.hh.schule.de/metalltechnik-didaktik/users/luetjens/rechenschieber/scheiben/rs9.htm> (31.07.08, 13:30)
- Abb. 42:** <http://www.spiegel.de/netzwelt/web/8,1518,508205,00.html> (03.08.08, 21:05)
- Abb. 43:** http://www.wdr.de/tv/aks/sowars/20071229_taschenrechner.jhtml (03.08.08, 21:09)
- Abb. 44:** <http://www.spiegel.de/netzwelt/web/0,1518,508205,00.html> (03.08.08, 21:05)
- Abb. 45:** <http://www.der-taschenrechner.de/html/heite.html> (03.08.08, 21:55)
- Abb. 46:** <http://www.ti-taschenrechner.com/> (03.08.08, 22:13)
- Abb. 47:** Zahlenstrahl der normalisierten Gleitpunktzahlen
- Abb. 48:** Zahlenstrahl der normalisierten Gleitpunktzahlen inkl. subnormaler Gleitpunktzahlen
- Abb. 49:** Fehlertypen auf dem Weg vom Wirklichkeitsmodell bis hin zum numerischen Endergebnis
- Abb. 50:** Graphische Veranschaulichung der Aufgabenstellung

- Abb. 51:** <http://bennyhills.fortunecity.com/coltrane/320/ulistein/mathe.jpg>
(08.09.08, 13:06)
- Abb. 52:** Ist die Überschlagsrechnung für die Schüler wichtig?
- Abb. 53:** Bsp. für Maximalabweichung
- Abb. 54:** Bestapproximation mit Alternantenpunkten
- Abb. 55:** Funktion $\cos \varphi$, wobei die Pfeile die Maximalabweichung darstellen
- Abb. 56:** Tschebyscheffpolynome
- Abb. 57:** Approximation von e^x
- Abb. 58:** Approximation von $\sin x$
- Abb. 59:** Besselfunktion für J_0 , J_1 und J_2

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
$\mathbb{C}$	komplexen Zahlen
ca.	circa
Dg	Anzahl der richtigen Ziffern über den gesamten Argumentationsbereich des Ergebnisses
d.h.	das heißt
etc.	et cetera
i.A.	im Allgemeinen
K	beliebiger Körper
max	Maximum
min	Minimum
$\mathbb{N}$	natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	reelle Zahlen ohne Null
rus.	russisch
u.a.	unter anderem
usw.	und so weiter
v.Chr.	vor Christus
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
z.B.	zum Beispiel

$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$>$	größer
$<$	kleiner
$\uparrow$	siehe
$\geq$	größer gleich
$\leq$	kleiner gleich
$\neq$	ungleich
$:=$	definiert als
$\triangleq$	entspricht
$*$	geboren am
$\dagger$	gestorben am

Lebenslauf

Ich, Claudia Mühlbauer, wurde am 09. Februar 1984 als Tochter von Renate und Josef Mühlbauer in Wien geboren. Von September 1990 bis Juni 1994 besuchte ich die Volksschule Alterlaa in Wien. Anschließend besuchte ich von September 1994 bis Juni 2002 das Bundes Realgymnasium Ettenreichgasse in Wien, wo ich am 11. Juni 2002 die Matura ablegte. Seit März 2003 studiere ich Mathematik und Darstellende Geometrie Lehramt an der Technischen Universität Wien.