DIPLOMARBEIT

Stochastische Portfoliotheorie

Ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

unter der Anleitung von

Herrn O.Univ.Prof. Mag.rer.soc.oec. Dr.phil. Walter Schachermayer

durch

Hirhager Karin

Leitgebg. 4-6/6/6, 1050 Wien

Technische Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik
Wien, Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Diplomarbeit basiert hauptsächlich auf dem Buch „Stochastic Portfolio Theory“ von E. Robert Fernholz aus dem Jahr 2002 und dem am 25. August 2007 veröffentlichten Artikel „ Stochastic Portfolio Theory: an Overview“ von E. Robert Fernholz und Ioannis Karatzas, der auch im September 2007 bei der „Conference on Advanced Mathematical Methods for Finance“ an der Technischen Universität Wien vorgestellt wurde. Eine vollständige Auflistung der verwendeten Literatur findet sich am Ende dieser Arbeit im Literaturnachweis.

Stochastische Portfoliotheorie bietet eine Möglichkeit auf mathematische Weise das Verhalten von Portfolios und die Struktur von Kapitalmärkten zu untersuchen. Es ist eine deskriptive, also eine beschreibende Theorie, im Gegensatz zu den meist in der Finanzmathematik verwendeten normativen, wie zum Beispiel dem Dynamic Asset Pricing. Es werden also nicht mehr bestimmte Bedingungen an den Finanzmarkt gestellt, wie zum Beispiel die allseits bekannte „No-Arbitrage-Bedingung” oder das Vorhandensein eines äquivalenten Martingalmaßes. Sie eignet sich besonders um Portfolios mit einem bestimmten Verhalten zu modellieren und hilft auch, dabei beobachtete Phänomene des Marktes wiederzugeben.

In Kapitel 2 werden die mathematischen Grundlagen behandelt und das Marktmodell wird vorgestellt. In der stochastischen Portfoliotheorie wird für die Stocks die logarithmische Darstellung verwendet. Weiters werden noch einige besondere Eigenschaften des Marktes angeführt. Im dritten Kapitel werden die Begriffe Diversität und relative Arbitrage vorgestellt. Es wird auch gezeigt, wie ein diverses Marktmodell erstellt werden kann. Im darauffolgenden Kapitel wird gezeigt, wie man Portfolios mit Hilfe von Funktionen erzeugen kann und welche Eigenschaften diese Funktionen erfüllen müssen. Weiters werden Maße für Diversität, die spezielle dieser Funktionen sind, behandelt. Im fünften Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Diversität und relativer Arbitrage betrachtet. In einem diversen Markt ist es sowohl auf kurzen als auch auf langen Zeitintervallen möglich, dass relative Arbitrage existiert. Im sechsten Kapitel werden die nach Rang geordneten Marktgewichte, also die Verteilung des Kapitals, behandelt. Man kann auch Portfolios erzeugen, die vom Rang der Stocks abhängen.

2 Grundlagen

2.1 Einleitung und mathematische Grundlagen

Im Folgenden finden sämtliche Betrachtungen auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ statt. Dabei ist Ω der Zustandsraum, $\mathcal{F}$ die zugehörige Sigmaalgebra, $\mathbb{F}$ ist die zu $\mathcal{F}$ gehörende Filtration und $\mathbb{P}$ ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

Die Filtration modelliert dabei die Zunahme an Information, die im Laufe der Zeit gewonnen wird. Diese Filtration muss nicht die von der Brownschen Bewegung, deren Bedeutung noch erläutert wird, erzeugte Sigmaalgebra $\mathbb{F}^W$ sein. Für die Sigmaalgebra $\mathbb{F}^W$ gilt: $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$. Es wird jedoch angenommen, dass diese in der Filtration enthalten ist. Heißt es, dass etwas fast sicher $(f.s.)$ gilt, so bedeutet dies, dass dieses Ereignis in Bezug auf das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ die Wahrscheinlichkeit 1 hat.

Definition 2.1 (Itô - Prozess) *Ein stochastischer Prozess wird Itô - Prozess genannt, falls er sich in folgender Weise darstellen lässt:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

wobei gilt:

- X_0 *ist* $\mathcal{F}_0$ *-messbar*
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ *und* $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ *sind* $\mathcal{F}_t$ *-adaptierte Prozesse*
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ *f.s.*
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ *f.s.*

Diese Darstellung ist sogar eindeutig.

Satz 2.1 (Itô - Formel) *Sei* X_t *ein Itô - Prozess und* $(t, x) \to f(t, x)$ *eine zweimal nach x und einmal nach t differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t D_s f(s, X_s) ds + \int_0^t D_x f(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t D_{xx} f(X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

wobei gilt: $\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Lemma 2.1 *Seien $(X_t)_{t\in[0,T]}$ und $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ zwei Itô - Prozesse. Dann gilt:*

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t.$$

Definition 2.2 *Ein stochastischer Prozess ist progressiv messbar, wenn er eingeschränkt auf $[0,t]\times\Omega$ $\mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t$-messbar ist.*

Definition 2.3 *Ein stochastischer Prozess ist ein lokales Martingal, wenn es Stoppzeiten τ_n gibt, mit $\tau_0 \le \tau_1 \le \dots$, $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty$ und $X_{t\wedge\tau_n}$ $\forall\, n$ ein Martingal ist.*

Satz 2.2 (Satz von Girsanov) *Gegeben sei eine Brownsche Bewegung W_t. Betrachtet man für $0 \le t \le T$ $\widehat{W_t} = W_t + at$, dann gibt es genau ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß $\mathbb{Q}$, sodass $\left(\widehat{W_t}\right)_{0\le t\le T}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist. In diesem Fall ist $\left(\widehat{W_t}\right)_{0\le t\le T}$ eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}$. Es gilt:*

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \exp\left\{-aW_T - \frac{a^2}{2}T\right\}.$$

2.2 Der Markt

Für den Markt sollen folgende Annahmen getroffen werden:

- Die Anzahl der Firmen ist endlich und fixiert.
- Die Anzahl der ausgegebenen Aktien einer Firma bleibt konstant.
- Dividenden werden, sofern sie von Interesse sind, stetig ausbezahlt.
- Es wird in stetiger Zeit gehandelt.
- Es werden keine Transaktionskosten, Steuern, Probleme mit der Unteilbarkeit von Aktien oder ähnliches betrachtet.

Es wird folgendes Modell für den Finanzmarkt betrachtet:

$$\begin{gathered} B(t) = B(t)r(t)dt, \quad B(0) = 1 \\ dX_i(t) = X_i(t)\left(b_i(t)dt + \sum_{m=1}^{d}\sigma_{im}(t)dW_m(t)\right), \\ X_i(0) = x_i > 0,\ i = 1,\dots,n \end{gathered} \tag{1}$$

Dabei ist $B(t)$ ein risikoloses Anlageobjekt (Bond, money-market) und die $X_i(t)$ repräsentieren die risikobehafteten Anlageobjekte (Stocks, Aktien). Die $X_i(t)$ werden dabei unter anderem auch durch die Brownsche Bewegung

$W(\cdot) = \big(W_1(\cdot), \ldots, W_d(\cdot)\big)$ (wobei $d \geq n$) bewegt, wodurch sich das Risiko bei Investition in sie ergibt.

$r(\cdot)$ ist der Prozess, der die Verzinsung für den Bond darstellt. Der Vektor $b(\cdot) = \big(b_1(\cdot), \ldots, b_n(\cdot)\big)'$ ist der Prozess der Rückgaberaten für die Stocks (rate of return). Es handelt sich hierbei um den Driftterm. Man kann sich darunter vorstellen, dass er die erwartete Rendite der entsprechenden Aktie modelliert. Der Prozess $\sigma(\cdot) = \big(\sigma_{im}(\cdot)\big)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq m \leq d}$ ist die Volatilität der Stockpreise. Diese drei Prozesse sollen alle progressiv messbar bezüglich $\mathbb{F}$ sein und auch noch folgende Integrabilitätsbedingung $\forall T \in (0, \infty)$ erfüllen:

$$\int_0^T |r(t)| dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \left(|b_i(t)| + \sum_{m=1}^d (\sigma_{im}(t))^2 \right) dt < \infty \quad f.s. \tag{2}$$

Weiters soll auch noch folgende Notation eingeführt werden:

$$a_{ij}(t) := \sum_{m=1}^d \sigma_{im}(t)\sigma_{jm}(t) = \big(\sigma(t)\sigma'(t)\big)_{ij} = \frac{d}{dt} \langle \log X_i, \log X_j \rangle (t). \tag{3}$$

Die Matrix $a(\cdot) = (a_{ij}(\cdot))_{1 \leq i,j \leq n}$ ist die nicht negativ definite Kovarianzmatrix der Stocks im Finanzmarkt.

In der stochastischen Portfoliotheorie wird meist die logarithmische Darstellung für die Stockpreise verwendet, da sie für diesen Zusammenhang besser geeignet ist. Sie ist äquivalent zu der schon in (1) beschriebenen arithmetischen Darstellung. Von dieser ausgehend kann man die logarithmische Darstellung mit Hilfe der Itô - Formel relativ schnell berechnen. Betrachtet man die Differentialgleichung der Stockpreise in (1) erkennt man sofort, dass gilt: $d \langle X_i, X_i \rangle_s = \sum_{m=1}^d \sigma_{im}^2(s) X_i^2(s)$. Damit ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\log(X_i(t)) &= \log(x_i) + \int_0^t \frac{dX_i(s)}{X_i(s)} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^d \int_0^t \left(-\frac{1}{X_i^2(s)} \right) \sigma_{im}^2(s) X_i^2(s) ds \\
&= \log(x_i) + \int_0^t \frac{1}{X_i(s)} dX_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^d \int_0^t \sigma_{im}^2(s) ds \\
&= \log(x_i) + \int_0^t \frac{1}{X_i(s)} dX_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t a_{ii}(s) ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(x_i) + \int_0^t \frac{1}{X_i(s)} \left(X_i(s) \left(b_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \sigma_{im}(s)dW_m(s) \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t a_{ii}(s)ds \\
&= \log(x_i) + \int_0^t b_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t \sigma_{im}(s)dW_m(s) - \frac{1}{2} \int_0^t a_{ii}(s)ds \\
&= \log(x_i) + \int_0^t b_i(s) - \frac{1}{2} a_{ii}(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t \sigma_{im}(s)dW_m(s) \\
&= \log(x_i) + \int_0^t \gamma_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t \sigma_{im}(s)dW_m(s)
\end{aligned}
$$

Für die letzte Umformung definiert man: $\gamma_i(s) := b_i(s) - \frac{1}{2} a_{ii}(s)$. Dieser Wert wird die Wachstumsrate (growth rate) des i-ten Stocks genannt. Dieser Name ergibt sich aus der folgenden Eigenschaft:

$$
\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T) - \int_0^T \gamma_i(t)dt \right) = 0, \quad f.s. \tag{4}
$$

Diese Eigenschaft ist dann erfüllt, wenn für die individuellen Varianzen der Stocks folgendes gilt:

$$
\lim_{T \to \infty} \left(\frac{\log \log T}{T^2} \int_0^T a_{ii}(t)dt \right) = 0, \quad f.s. \tag{5}
$$

Dies bedeutet, dass die individuellen Varianzen $a_{ii}(\cdot)$ nicht zu schnell wachsen. Genaueres sowie einen Beweis hierzu findet man in [3].

Mit Hilfe des Ergebnisses der obigen Berechnungen erhält man die verschiedenen Darstellungen für die Stockpreise:

$$
\log(X_i(t)) = \log(x_i) + \int_0^t \gamma_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t \sigma_{im}(s)dW_m(s)
$$

$$
X_i(t) = x_i \, exp \left\{ \int_0^t \gamma_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t \sigma_{im}(s)dW_m(s) \right\}
$$

$$
d \log(X_i(t)) = \gamma_i(s)ds + \sum_{m=1}^{d} \sigma_{im}(s)dW_m(s)
$$

Die letzte dieser drei Gleichungen ist die logarithmische Darstellung der X_i.

Definition 2.4 *Der Markt wird nichtdegeneriert genannt, wenn es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, sodass für* $t \in [0, \infty)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *fast sicher gilt:*

$$xa(t)x' \geq \varepsilon ||x||^2.$$

Der Markt ist gleichmäßig beschränkt, wenn es ein $M > 0$ *gibt, sodass für* $t \in [0, \infty)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *fast sicher gilt:*

$$x'a(t)x \leq M ||x||^2.$$

2.3 Portfolios und Handelsstrategien

Ein Portfolio ist ein Prozess, der progressiv messbar bezüglich $\mathbb{F}$ ist. Dieser Prozess $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_n(\cdot))'$ ist gleichmäßig beschränkt in (t, ω) und nimmt Werte in der Menge

$$\bigcup_{\kappa \in \mathbb{N}} \left\{ (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n | \pi_1^2 + \cdots + \pi_n^2 \leq \kappa^2, \, \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1 \right\}$$

an. Dabei gibt $\pi_i(t)$ an, wie hoch der Anteil des Vermögens ist, der in den i-ten Stock investiert wird. Handelt es sich dabei um ein long-only Portfolio, d.h. ein Portfolio, das nur kauft und nicht verkauft (short-selling), dann nimmt es nur Werte in der folgenden Menge an:

$$\Delta^n := \{(\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n | \pi_1 \geq 0, \ldots, \pi_n \geq 0 \, \wedge \, \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1\}.$$

Eine weitere mögliche Menge für die Werte eines Portfolios wäre:

$$\Delta_+^n := \{(\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \Delta^n | \pi_1 > 0, \ldots, \pi_n > 0\}.$$

Nimmt das Portfolio Werte aus dieser Menge an, bedeutet dies, dass auf jeden Fall in jeden einzelnen Stock investiert wird. Wie man sieht, kann ein Portfolio nicht in den Bond investieren bzw. einen verkaufen.

Für den weiteren Gebrauch sollen an dieser Stelle die umgekehrten Ordnungsstatistiken für die Gewichte eines Portfolios $\pi(\cdot)$ vorgestellt werden. Dies bedeutet, dass die Gewichte des Portfolios geordnet werden, angefangen mit dem Größten fallend bis zum Kleinsten. Es gelten folgende Bezeichnungen:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \pi_i(t) := \pi_{(1)}(t) \geq \pi_{(2)}(t) \geq \cdots \geq \pi_{(n-1)}(t) \geq \pi_{(n)}(t) := \min_{1 \leq i \leq n} \pi_i(t)$$

Bezeichnet man mit $V^{w,\pi}(t)$ den Wert des Vermögens bei Anfangskapital w und Investition in das Portfolio $\pi(\cdot)$ zum Zeitpunkt t, so kann man sich auch leicht die genaue Menge an Geld, die in den i-ten Stock investiert wird, berechnen. Diese Menge soll nun mit $h_i(t)$ bezeichnet werden und es gilt:

$$h_i(t) = \pi_i(t)V^{w,\pi}(t), \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Ist das Anfangskapital $w = 1$, so schreibt man für den Vermögensprozess lediglich $V^{\pi}(t)$.

Betrachtet man nur diese Werte der $h_i(\cdot)$, also die Geldmengen, die in die Stocks investiert werden, so spricht man von einer Handelsstrategie. Eine Handelsstrategie kann auch in den Bond investieren oder Geld aus diesem money market borgen. Genauer gesagt ist eine Handelsstrategie ein Prozess $h(\cdot) = (h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot))'$, der Werte in $\mathbb{R}^n$ annimmt, progressiv messbar bezüglich $\mathbb{F}$ ist und die folgende Integrabilitätsbedingung $\forall\, T \in (0, \infty)$ erfüllt:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \big(|h_i(t)||b_i(t) - r(t)| + h_i^2(t)a_{ii}(t)\big)dt < \infty, \quad f.s.$$

Nun kann man mit $V^{w,h}(t)$ den Wert des Vermögens zum Zeitpunkt t bei Verfolgen der Handelsstrategie $h(\cdot)$ mit Anfangskapital $w > 0$ bezeichnen. Nach den obigen Überlegungen ist dann die Menge, die in den Bond investiert wird, genau $V^{w,h}(t) - \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$. Damit ergibt sich folgende Darstellung für das Vermögen:

$$\begin{aligned} dV^{w,h}(t) = &\left(V^{w,h}(t) - \sum_{i=1}^{n} h_i(t)\right) r(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \left(b_i(t)dt + \sum_{m=1}^{d} \sigma_{im}(t)dW_m(t)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Eine dazu äquivalente Darstellung wäre:

$$\frac{V^{w,h}(t)}{B(t)} = w + \int_0^t \frac{h'(s)}{B(s)}\big((b(s) - r(s)\mathbb{I})ds + \sigma(s)dW(s)\big), \quad 0 \le t < \infty. \tag{8}$$

Dabei ist $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)'$ der n-dimensionale Spaltenvektor, dessen Einträge alle den Wert 1 haben.

Um zu zeigen, dass letztere wirklich eine äquivalente Darstellung ist, muss man lediglich die folgende Eigenschaft der Itô - Prozesse verwenden: $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t$. Denn mit Hilfe der Itô - Formel erhält man: $d\frac{1}{B(t)} = -\frac{1}{B(t)} r(t)dt$ bzw. $\frac{1}{B(t)} = \frac{1}{B(0)} + \int_0^t -\frac{1}{B(s)} r(s)ds$. Setzt man dies nun in die eben erwähnte Formel für Itô - Prozesse ein, erhält man die obige äquivalente Darstellung in (8).

Da die Werte $h_i(t)$ der Handelsstrategie auch negativ sein können, kann es auch vorkommen, dass der Wert des Vermögens $V^{w,h}(t)$ negativ ist. Daher werden meist nur die sogenannten zulässigen Handelsstrategien betrachtet. Das sind diejenigen, die folgende Bedingung erfüllen:

$$\mathbb{P}\big(V^{w,h}(t) \geq 0, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T\big) = 1.$$

Die Menge all dieser Handelsstrategien wird mit $\mathcal{H}(w,T)$ bezeichnet und man setzt fest $\mathcal{H}(w) := \bigcap_{T>0} \mathcal{H}(w,T)$. Weiters gibt es noch den Begriff der streng zulässigen Handelsstrategien. Diese erfüllen $\mathbb{P}\big(V^{w,h}(t) > 0, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T\big) = 1$. Ihre Menge wird mit $\mathcal{H}_+(w,T)$ bezeichnet. Auch hier wird festgesetzt: $\mathcal{H}_+(w) := \bigcap_{T>0} \mathcal{H}_+(w,T)$.

Wie man aus der obigen Darstellung der $h_i(\cdot)$ in (6) erkennt, definiert jedes Portfolio $\pi(\cdot)$ eine Handelsstrategie $h(\cdot) \in \mathcal{H}_+(w)$. Es gilt dann $V^{w,h}(\cdot) = V^{w,\pi}(\cdot)$. Jede von einem Portfolio erzeugte Handelsstrategie ist selbstfinanzierend. Das heißt, im Beobachtungszeitraum wird weder Geld hinzugefügt noch weggenommen.

Nun wieder zu den Portfolios. Betrachtet man den Wert des Vermögens $V^{w,\pi}(\cdot)$, so ergibt sich dafür folgende Darstellung in Form einer stochastischen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dV^{w,\pi}(t)}{V^{w,\pi}(t)} &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \pi'(t)\left[b(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right] \\ &= b_\pi(t)dt + \sum_{m=1}^{d} \sigma_{\pi m}(t) dW_m(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Natürlich gilt $V^{w,\pi}(0) = w$. Dabei sind:

$$\begin{aligned} b_\pi(t) &:= \textstyle\sum_{i=1}^n \pi_i(t) b_i(t) \\ \sigma_{\pi m}(t) &:= \textstyle\sum_{i=1}^n \pi_i(t) \sigma_{im}(t) \quad f\ddot{u}r \quad m = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei ist $b_\pi(\cdot)$ die rate-of-return und die einzelnen $\sigma_{\pi m}(\cdot)$ sind die Koeffizienten der Volatilitätsmatrix des Vermögensprozesses in Bezug auf das Portfolio

$\pi(\cdot)$.

Analog zu den obigen Berechnungen kann man nun wieder eine Lösung und auch eine logarithmische Darstellung zu der stochastischen Differentialgleichung, die den Vermögensprozess zu einem Portfolio $\pi(\cdot)$ modelliert, erhalten. Aufgrund der Darstellung in (9) ergibt sich $d\left\langle V^{w,\pi}, V^{w,\pi}\right\rangle_s = \sum_{m=1}^{d} \sigma_{\pi m}^2(s)$ $(V^{w,\pi}(s))^2$. Damit kann nun die Itô - Formel angewandt werden und man erhält:

$$
\begin{aligned}
\log(V^{w,\pi}(t)) =& \log w + \int_0^t \frac{1}{V^{w,\pi}(s)} dV^{w,\pi}(s) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\int_0^t \left(-\frac{1}{(V^{w,\pi}(s))^2}\right)\sigma_{\pi m}^2(s)(V^{w,\pi}(s))^2 ds \\
=& \log w + \int_0^t \frac{1}{V^{w,\pi}(s)} dV^{w,\pi}(s) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\int_0^t \sigma_{\pi m}^2(s) ds \\
=& \log w + \int_0^t \frac{1}{V^{w,\pi}(s)} (V^{w,\pi}(s)(b_\pi(s)ds + \sum_{m=1}^{d}\sigma_{\pi m}(s)dW_m(s))) \\
& - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\int_0^t \sigma_{\pi m}^2(s) ds \\
=& \log w + \int_0^t (b_\pi(s) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\sigma_{\pi,m}^2(s))ds \\
& + \sum_{m=1}^{d}\int_0^t \sigma_{\pi m}(s)dW_m(s).
\end{aligned}
$$

Betrachtet man nun den Term $b_\pi(s) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\sigma_{\pi,m}^2(s)$ genauer, so sieht man, dass er sich folgendermaßen umformen lässt:

$$
\begin{aligned}
b_\pi(s) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\sigma_{\pi,m}^2(s) =& \sum_{i=1}^{n}\pi_i(s)b_i(s) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(s)\sigma_{im}(s)\Big)^2 \\
=& \sum_{i=1}^{n}\pi_i(s)(\gamma_i(s) + \frac{1}{2}a_{ii}(s)) \\
& - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{d}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(s)\sigma_{im}(s)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\pi_j(s)\sigma_{jm}(s)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(s)(\gamma_i(s) + \frac{1}{2}a_{ii}(s)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(s)\pi_j(s)\sum_{m=1}^{d}\sigma_{im}(s)\sigma_{jm}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(s)(\gamma_i(s) + \frac{1}{2}a_{ii}(s)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(s)\pi_j(s)a_{ij}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(s)\gamma_i(s) + \frac{1}{2}\big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(s)a_{ii}(s) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i(s)\pi_j(s)a_{ij}(s)\big) \\
&=: \gamma_\pi(s)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\gamma_\pi(s) = \sum_{i=1}^n \pi_i(s)\gamma_i(s) + \gamma_\pi^*(s)$ die Wachstumsrate des Portfolios $\pi(\cdot)$ und $\gamma_\pi^*(s) = \frac{1}{2}\big(\sum_{i=1}^n \pi_i(s)a_{ii}(s) - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \pi_i(s)\pi_j(s)a_{ij}(s)\big)$ ist die Überwachstumsrate (excess growth rate) dieses Portfolios. Später werden auch noch einige Eigenschaften dieser excess growth rate behandelt. Wie schon vorher wird $\gamma_\pi(t)$ aufgrund der folgenden Eigenschaft growth rate genannt:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log V^{w,\pi}(T) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt\right) = 0, \quad f.s. \tag{11}$$

Dies ist speziell dann erfüllt, wenn gilt:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{\log\log T}{T^2}\int_0^T ||a(t)||dt\right) = 0, \quad f.s.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Eigenwerte des Prozesses der Kovarianzmatrix $a(\cdot)$ gleichmäßig beschränkt sind, wobei sie dabei vom Wert ∞ abgegrenzt sind. Dies gilt, wenn folgende Ungleichung fast sicher und für eine Konstante $K \in (0,\infty)$ gilt:

$$\xi' a(t)\xi = \xi'\sigma(t)\sigma'(t)\xi \le K||\xi||^2, \quad \forall \quad t\in[0,\infty) \quad und \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

Zuletzt soll noch der Prozess der individuellen Kovarianzen der Stocks in Bezug auf das Portfolio $\pi(\cdot)$ betrachtet werden. Dieser Prozess wird mit $\tau^\pi(\cdot) = (\tau_{ij}^\pi(\cdot))_{1\le i,j\le n}$ bezeichnet. Bezeichnet man nun mit e_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$, so gilt für die $\tau_{ij}^\pi(\cdot)$ folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
\tau_{ij}^\pi(t) &:= \sum_{m=1}^{d}\big(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\pi m}(t)\big)\big(\sigma_{jm}(t) - \sigma_{\pi m}(t)\big) \\
&= (\pi(t) - e_i)'a(t)(\pi(t) - e_j) \\
&= a_{ij}(t) - a_{\pi i}(t) - a_{\pi j}(t) - a_{\pi\pi}(t)
\end{aligned} \tag{13}
$$

In der letzten Zeile dieser Gleichung betrachtet man folgende Mengen:

$$a_{\pi i}(t) := \sum_{j=1}^{n} \pi_j(t) a_{ij}(t),$$

$$a_{\pi\pi}(t) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) = \sum_{m=1}^{d} (\sigma_{\pi m}(t))^2.$$

Die letzte dieser Mengen ist die Varianz des Portfolios $\pi(\cdot)$.

Für diese Werte gilt folgende Eigenschaft:

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}^{\pi}(t) \pi_j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

2.4 Das Marktportfolio

Nun zu dem wohl wichtigestem Portfolio, dem Marktportfolio. Es wird die Annahme getroffen, dass jede Firma nur eine Aktie ausgegeben hat. Damit ergibt sich für die einzelnen $X_i(t)$ die Interpretation, dass sie jeweils die Kapitalisierung der i-ten Firma zum Zeitpunkt t angeben. Möchte man wissen, wieviel Kapital auf dem ganzen Markt vorhanden ist, so muss man diese einzelnen Werte natürlich addieren. Für die gesamte Kapitalisierung des Marktes $X(t)$ ergibt sich somit die Darstellung: $X(t) := X_1(t) + \cdots + X_n(t)$. Das Marktportfolio ist nun das Portfolio, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\mu_i(t) := \frac{X_i(t)}{X(t)}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Das heißt, die Gewichte des Marktportfolios entsprechen den relativen Kapitalisierungen der entsprechenden Firmen. Investiert man in dieses besondere Portfolio, so entspricht dies einer Investition in den gesamten Markt in einem zum Anfangskapital w proportionalen Ausmaß. Betrachtet man die Darstellung dieser Gewichte in (14), so sieht man sofort, dass sie die Eigenschaften eines Portfolios erfüllen, denn es gilt: $0 < \mu_i(t) < 1 \; \forall\, i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) = 1$.

Bezeichnet man nun analog zu dem vorhergehenden Kapitel mit $V^{w,\mu}$ das Vermögen in Bezug auf das Portfolio $\mu(\cdot)$, so kann man auch in Bezug auf das Marktportfolio die verschiedenen Darstellungen dieses Vermögensprozesses betrachten. Wie schon zuvor bei (9), gilt auch hier:

$$\frac{dV^{w,\mu}(t)}{V^{w,\mu}(t)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dX_i(t)}{X(t)} = \frac{dX(t)}{X(t)}.$$

Man sieht also, dass der Wert des Vermögens bei Betrachtung des Marktportfolios der gesamten Kapitalisierung des Marktes entspricht. Aufgrund der bereits erwähnten Eigenschaften des Marktportfolios, kann man den Vermögensprozess folgendermaßen darstellen:

$$V^{w,\mu}(\cdot) \equiv \frac{w}{X(0)} X(\cdot).$$

Ebenfalls analog zu (9), erhält man auch folgende Darstellung für den Vermögensprozess:

$$d\log V^{w,\mu}(t) = \gamma_\mu(t)dt + \sum_{m=1}^{d} \sigma_{\mu m}(t)dW_m(t), \quad V^{w,\mu}(0) = w.$$

Auch die Gewichte des Marktportfolios können mit Hilfe von stochastischen Differentialgleichungen beschrieben werden. Mithilfe der Definition der Gewichte in (14) und der Feststellung, dass $\frac{dV^{w,\mu}(t)}{V^{w,\mu}(t)} = \frac{dX(t)}{X(t)}$, erhält man bei Betrachtung der logarithmischen Darstellung von $V^{w,\mu}(t)$ und der $X_i(t)$:

$$d\log \mu_i(t) = \big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)\big)dt + \sum_{m=1}^{d} \big(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\big)dW_m(t), \; i = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Eine dazu äquivalente Darstellung ist:

$$\frac{d\mu_i(t)}{\mu_i(t)} = \big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t) + \frac{1}{2}\tau^\mu_{ii}(t)\big)dt + \sum_{m=1}^{d} \big(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\big)dW_m(t).$$

Um zu zeigen, dass diese Darstellung wirklich äquivalent ist, muss man nur die Itô - Formel anwenden und folgende Definition für $\tau^\mu_{ii}(t)$, die analog zu der vorherigen im Kapitel über Portfolios in (13) ist:

$$\tau^\mu_{ij}(t) := \sum_{m=1}^{d} \big(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\big)\big(\sigma_{jm}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\big) = \frac{d\langle \mu_i, \mu_j\rangle(t)}{\mu_i(t)\mu_j(t)dt}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

anwenden.

Definition 2.5 (Kohärenz) *Ein Modell für einen Finanzmarkt, wie in (1) beschrieben, wird kohärent genannt, falls gilt:*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mu_i(T) = 0 \quad f.s., \ \forall\ i = 1, \dots, n.$$

Die folgende Proposition und das dazugehörige Korollar finden sich auch in [3].

Proposition 2.1 *Bezeichnet M einen Markt mit n Stocks $X_1, \dots, X_n$. Dann sind äquivalent:*

1. *M ist kohärent*
2. *für $i = 1, \dots, n$ gilt:* $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)\big) dt = 0,\ f.s.$
3. *für $i, j = 1, \dots, n$ gilt:* $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(\gamma_i(t) - \gamma_j(t)\big) dt = 0,\ f.s.$

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2.:
Angenommen der Markt ist kohärent. Da sich die verschiedenen $\mu_i(t)$ folgendermaßen darstellen lassen: $\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{V^{w,\mu}(t)}$, ist die oben genannte Bedingung für einen kohärenten Markt äquivalent zu der Bedingung:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T) - \log V^{w,\mu}(T)\right) = 0, \quad f.s.$$

Zusammen mit den Grenzwerten in (11) und (4) ergibt sich genau 2.
2. $\Rightarrow$ 3.:
3. folgt sofort aus Bedingung 2.
3. $\Rightarrow$ 1.:
Man betrachtet nun alle Prozesse und somit die Zufallsvariablen in Abhängigkeit von $\omega \in \Omega$. Mit Hilfe der 3. Bedingung und (4), erkennt man, dass es eine Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ geben muss mit $\mathbb{P}(\Omega') = 1$, sodass für alle $\omega \in \Omega'$ gilt:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T, \omega) - \int_0^T \gamma_i(t, \omega) dt \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \big(\gamma_i(t, \omega) - \gamma_j(t, \omega)\big) dt = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Nun fixiert man ein $\omega \in \Omega'$. Dann implizieren die zwei obigen Formeln für $j = 1$ und für $i = 1, \dots, n$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T, \omega) - \int_0^T \gamma_1(t, \omega) dt \right) = 0.$$

Also gilt auch für $i = 1, \ldots, n$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\max_{1\le i\le n} (\log X_i(T,\omega)) - \int_0^T \gamma_1(t,\omega)dt \right) = 0.$$

Dies ist jedoch äquivalent zu folgender Aussage:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log(\max_{1\le i\le n} X_i(T,\omega)) - \int_0^T \gamma_1(t,\omega)dt \right) = 0.$$

Für jedes $t \in [0,\infty)$ gilt:

$$X_1(t,\omega) \le X_1(t,\omega) + \cdots + X_n(t,\omega) \le n \max_{1\le i\le n} X_i(t,\omega)$$

Also gilt für $t \in [0,\infty)$:

$$\log X_1(t,\omega) \le \log V^{w,\mu}(t,\omega) \le \log n + \log(\max_{1\le i\le n} X_i(t,\omega))$$

Da $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log n = 0$, folgt mit Hilfe der vorhergehenden Überlegungen:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log V^{w,\mu}(T,\omega) - \int_0^T \gamma_1(t,\omega)dt \right) = 0.$$

Damit ergibt sich schlussendlich:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \big(\log X_i(T,\omega) - \log V^{w,\mu}(T,\omega) \big) = 0.$$

Da dies für alle $\omega \in \Omega'$ gilt, folgt daraus, dass M kohärent ist. ∎

Korollar 2.1 *Wenn alle Stocks in einem Markt M denselben Prozess der Wachstumsraten haben, dann ist dieser Markt kohärent.*

Beweis:
Wenn alle Stocks dieselbe Wachstumsrate haben, dann ist die 3. Bedingung der Proposition 2.1 automatisch erfüllt und somit ergibt sich, dass der Markt M kohärent ist. ∎

2.5 Das Verhalten eines Portfolios und nützliche Eigenschaften

Die in diesem Kapitel behandelten Eigenschaften finden sich in [3] und in [6] wieder.

Zuerst eine Definition, die im Folgenden hilfreich sein wird.

Definition 2.6 (relativer Rückgabewert eines Stocks) *Der relative Rückgabewert des i-ten Stocks in Bezug auf das Portfolio $\pi(\cdot)$ ist ein Prozess:*

$$R_i^\pi(t) := \log\left(\frac{X_i(t)}{V^{w,\pi}(t)}\right)\Bigg|_{w=X_i(0)}, \;\; 0 \le t < \infty.$$

Lemma 2.2 *Für ein Portfolio $\pi(\cdot)$ gilt fast sicher für alle $1 \le i,j \le n$ und für alle $t \in [0,\infty)$: $\tau_{ij}^\pi(t) = \frac{d}{dt}\left\langle R_i^\pi, R_j^\pi\right\rangle(t)$ und es gilt speziell: $\tau_{ii}^\pi(t) = \frac{d}{dt}\left\langle R_i^\pi\right\rangle(t) \ge 0$. Die Matrix $\tau^\pi(t) = (\tau_{ij}^\pi(t))_{1\le i,j\le n}$ ist fast sicher nichtnegativ definit. Ist die Kovarianzmatrix $a(t)$ positiv definit, dann hat die Matrix der relativen Kovarianzen $\tau^\pi(t)$ fast sicher den Rang n-1 und ihr Annulatorraum wird fast sicher vom Vektor $\pi(t)$ aufgespannt.*

Beweis:
Aufgrund der Gestalt der $R_i^\pi(t)$ und der logarithmischen Darstellung von $X_i(t)$ und $V^{w,\pi}(t)$ ergibt sich folgende stochastische Differentialgleichung für die Darstellung der $R_i^\pi(t)$:

$$dR_i^\pi(t) = (\gamma_i(t) - \gamma_\pi(t))\,dt + \sum_{m=1}^{d}(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\pi m}(t))\,dW_m(t).$$

Aus dieser Gleichung folgen schon einmal die ersten zwei Behauptungen des Lemmas. Da die $\langle R_i^\pi\rangle(t)$ fast sicher nichtfallend sind, gilt fast sicher: $\tau_{ii}^\pi(t) \ge 0$.
Angenommen die Matrix $a(t)$ ist positiv definit. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und mit der Bezeichnung $\eta := \sum_{i=1}^n x_i$ gilt aufgrund der schon vorher in (13) erwähnten Definition der $\tau_{ij}^\pi(t)$:

$$x'\tau^\pi(t)x = x'a(t)x - 2\eta x'a(t)\pi(t) + \eta^2\pi'(t)a(t)\pi(t).$$

Ist $\eta = 0$, dann gilt $x'\tau^\pi(t)x = x'a(t)x > 0$. Sei nun $\eta \neq 0$ und betrachtet man den Vektor $y := \frac{x}{\eta}$, für den gilt $\sum_{i=1}^n y_i = 1$, sieht man, dass $\eta^{-2}x'\tau^\pi(t)x$

äquivalent ist zu:

$$\begin{aligned} y'\tau^{\pi}(t)y &= y'a(t)y - 2y'a(t)\pi(t) + \pi'(t)a(t)\pi(t) \\ &= (y-\pi(t))'\, a(t)\,(y-\pi(t))\,. \end{aligned}$$

Dies ist genau dann 0, wenn $y = \pi(t)$, bzw. wenn $x = \eta\pi(t)$. ∎

Lemma 2.3 *Sind $\pi(\cdot)$ und $\rho(\cdot)$ zwei Portfolios, dann gilt für den Quotienten der jeweiligen Vermögensprozesse:*

$$d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right) = \gamma_{\pi}^{*}(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log\left(\frac{X_i(t)}{V^{\rho}(t)}\right).$$

Betrachtet man statt des zweiten Portfolios $\rho(\cdot)$ speziell das Marktportfolio $\mu(\cdot)$, also den relativen Rückgabewert des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf den Markt , so gilt:

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) &= \gamma_{\pi}^{*}(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log\mu_i(t) \\ &= \left(\gamma_{\pi}^{*}(t) - \gamma_{\mu}^{*}(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i(t)-\mu_i(t)\right)d\log\mu_i(t). \end{aligned}$$

Beweis:
Für den ersten Teil des Beweises soll angenommen werden, dass die erste Formel dieses Lemmas korrekt ist und es wird sich nach einigen Umformungen zeigen, dass sie sich auf eine andere simple und richtige Darstellung für $\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right)$ zurückführen lässt. Man geht also davon aus, dass:

$$d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right) = \gamma_{\pi}^{*}(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log\left(\frac{X_i(t)}{V^{\rho}(t)}\right).$$

Mit Hilfe des Wissens aus den vorhergehenden Kapiteln erkennt man, dass gilt:

$$d\log\left(\frac{X_i(t)}{V^{\rho}(t)}\right) = \left(\gamma_i(t) - \gamma_{\rho}(t)\right)dt + \sum_{m=1}^{d}\left(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\rho m}(t)\right)dW_m(t).$$

Setzt man dies nun in die obige Gleichung ein, so sieht man:

$$
\begin{aligned}
d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right) =& \gamma_{\pi}^{*}(t)dt + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(\gamma_i(t) - \gamma_{\rho}(t)\right)dt \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sum_{m=1}^{d} \left(\sigma_{im}(t) - \sigma_{\rho m}(t)\right) dW_m(t) \\
=& \left(\gamma_{\pi}^{*}(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(\gamma_i(t) - \gamma_{\rho}(t)\right)\right) dt \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sum_{m=1}^{d} (\sigma_{im}(t) - \sigma_{\rho m}(t)) dW_m(t) \\
=& \left(\gamma_{\pi}^{*}(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)}_{=1} \gamma_{\rho}(t)\right) dt \\
&+ \sum_{m=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{im}(t) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)}_{=1} \sigma_{\rho m}(t)\right) dW_m(t) \\
=& \left(\gamma_{\pi}(t) - \gamma_{\rho}(t)\right) dt + \sum_{m=1}^{d} \left(\sigma_{\pi m}(t) - \sigma_{\rho m}(t)\right) dW_m(t)
\end{aligned}
$$

Gesamt gilt also $d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\rho}(t)}\right) = d\log V^{\pi}(t) - d\log V^{\rho}(t)$, was offensichtlich ist.
Die erste Gleichung bei Betrachtung des Marktportfolios als zweites Portfolio ergibt sich einfach durch Ersetzen von $\rho(\cdot)$ in der ersten Gleichung dieses Lemmas durch $\mu(\cdot)$. Wiederholt man auch noch die Darstellung von $d\log\mu_i(t)$ in (15), sieht man dies sofort. Mit Hilfe dieser Darstellung kann man auch beobachten, dass gilt:

$$
\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) d\log\mu_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)\left(\gamma_i(t) - \gamma_{\mu}(t)\right) dt = -\gamma_{\mu}^{*}(t)dt
$$

■

Lemma 2.4 *Für zwei Portfolios $\pi(\cdot)$ und $\rho(\cdot)$ gilt die Numéraire - Invarianz Eigenschaft:*

$$
\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_{ii}^{\rho}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^{\rho}(t)\right).
$$

Bei Verwendung der schon vorher erwähnten Eigenschaft $\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}^{\pi}(t)\pi_j(t) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ erhält man folgende Darstellung für die excess growth rate:

$$\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\pi}(t).$$

Die Überwachstumsrate ist also der gewichtete Durchschnitt der Varianzen $\tau_{ii}^{\pi}(t)$ der einzelnen Stocks in Bezug auf das Portfolio $\pi(\cdot)$. Sind die Gewichte des Portfolios $\pi(\cdot)$ alle nichtnegativ, so gilt $\gamma_{\pi}^{*}(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Gilt sogar $0 \leq \pi_i(t) < 1 \; \forall\, i = 1, \ldots, n$, dann ist $\gamma_{\pi}^{*}(t) > 0$.

Beweis:
Mit Hilfe der in der Definition der $\tau_{ij}^{\pi}(t)$ in Kapitel 2.3 in (13) verwendeten Darstellung erhält man die folgenden zwei Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\rho}(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) a_{ii}(t) - 2 \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) a_{\rho i}(t) + a_{\rho\rho}(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ij}^{\rho}(t) \pi_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t) - 2 \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) a_{\rho i}(t) + a_{\rho\rho}(t).$$

Damit ergibt sich die erste Gleichung dieses Lemmas. Da $\tau_{ii}^{\pi}(t) \geq 0$ gilt, folgt sofort $\gamma_{\pi}^{*}(t) \geq 0$.
Wenn $0 \leq \pi_i(t) < 1 \; \forall\, i = 1, \ldots, n$ und $\forall\, t \in [0, \infty)$, so müssen mindestens zwei der Gewichte größer als 0 sein. Daher ist $\tau^{\pi}(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$ fast sicher nichtnegativ definit und hat Rang $n - 1$. Es gilt für $i = 1, \ldots, n$ und $t \in [0, \infty)$:

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) = e_i \tau^{\pi}(t) e_i' \geq 0,$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist. Da der Rang der Matrix $\tau^{\pi}(t)$ $n-1$ ist, gilt in obiger Gleichung wenigstens für einen Wert i sogar Gleichheit. Da wie schon erwähnt zwei der Gewichte des Portfolios positiv sein müssen, ist $\gamma_{\pi}^{*}(t)$ aufgrund der in diesem Lemma verwendeten Darstellung positiv. ∎

Bemerkung 2.1 *Betrachtet man die obige Darstellung für $\gamma_{\pi}^{*}(t)$ für das Marktportfolio, dann gilt $\gamma_{\mu}^{*}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \tau_{ii}^{\mu}(t)$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist der mit den Marktgewichten gewichtete Durchschnitt der Varianzen der einzelnen Stocks. Man kann die Überwachstumsrate somit als ein Maß für die Volatilität des Marktes verstehen.*

Bemerkung 2.2 *Mit Hilfe der neuen Darstellung der $\gamma_\pi^*(t)$ in der Numéraire - Invarianz Eigenschaft erhält man auch eine weitere Darstellung für den relativen Rückgabewert eines Portfolios $d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$.*

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\right) dt.$$

Dass dies eine äquivalente Darstellung zu der bereits bekannten ist, kann man leicht nachweisen, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\right) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\left(d\log\mu_i(t) + \frac{1}{2}\tau_{ii}^\mu(t)\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\right) dt \\
&= \gamma_\pi^*(t)dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\mu_i(t).
\end{aligned}$$

Lemma 2.5 *Der Markt sei nichtdegeneriert. Dann gilt für jedes Portfolio $\pi(\cdot)$ für $i = 1, \ldots, n$ und für $t \in [0, \infty)$:*

$$\tau_{ii}^\pi(t) \geq \varepsilon\left(1 - \pi_i(t)\right)^2.$$

Beweis:
Um obige Ungleichung zu zeigen, muss man sich auf die Darstellung der $\tau_{ii}^\pi(t)$ in (13) und die Eigenschaft des Marktes, nichtdegeneriert zu sein, berufen. Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\tau_{ii}^\pi(t) &= \left(\pi(t) - e_i\right)' a(t)\left(\pi(t) - e_i\right) \\
&\geq \varepsilon ||\pi(t) - e_i||^2 \\
&= \varepsilon\left((1 - \pi_i(t))^2 + \sum_{j\neq i} \pi_j^2(t)\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Aussage dieses Lemmas. ∎

Bemerkung 2.3 *Mit Hilfe des vorhergehenden Lemmas folgt sofort:*

$$\tau_{ii}^\pi(t) \geq \varepsilon\left(1 - \pi_{(1)}(t)\right)^2 \tag{16}$$

Lemma 2.6 *Angenommen der Markt ist gleichmäßig beschränkt. Dann gilt für jedes Portfolio $\pi(\cdot)$ mit $\pi_i(t) \geq 0$ (long-only Portfolio), für $i = 1, \dots, n$ und für $t \in [0, \infty)$:*

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) \leq M\left(1 - \pi_i(t)\right)\left(2 - \pi_i(t)\right).$$

Beweis:
Analog zu dem vorherigen Beweis erhält man auch in diesem Fall aufgrund der Darstellung der $\tau_{ii}^{\pi}(t)$ in (13) und da der Markt gleichmäßig beschränkt ist, folgendes:

$$\begin{aligned}
\tau_{ii}^{\pi}(t) &\leq M\left(\left(1 - \pi_i(t)\right)^2 + \sum_{j \neq i} \pi_j^2(t)\right) \\
&\leq M\left(\left(1 - \pi_i(t)\right)^2 + \sum_{j \neq i} \pi_j(t)\right) \\
&= M\left(1 - \pi_i(t)\right)\left(2 - \pi_i(t)\right).
\end{aligned}$$

■

Lemma 2.7 *Sei der Markt nichtdegeneriert und $\pi(\cdot)$ ein long-only Portfolio, dann gilt:*

$$\gamma_{\pi}^{*} \geq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \pi_{(1)}(t)\right).$$

Beweis:
Wie schon erwähnt gilt: $\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_{ii}^{\pi}(t)$ und da das Portfolio long-only ist, gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\pi}^{*}(t) &\geq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(\left(1 - \pi_i(t)\right)^2 + \sum_{j \neq i} \pi_j^2(t)\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(1 - \pi_i(t)\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \pi_j^2(t)\left(1 - \pi_j(t)\right)\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(1 - \pi_i(t)\right) \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \pi_{(1)}(t)\right)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.4 *Gilt für den Markt* $x\sigma(t)x' \leq M||x||^2$ *für* $t \in [0,\infty)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *und ist* $\pi(\cdot)$ *ein Portfolio, sodass für die Gewichte gilt:* $0 \leq \pi_i(t) < 1$ *für* $t \in [0,\infty)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$*, dann existiert ein* $\varepsilon > 0$*, sodass gilt:*

$$\pi_{(1)}(t) \leq 1 - \varepsilon\gamma_\pi^*(t). \tag{17}$$

Ein Beweis zu dieser Abschätzung findet sich in [3] auf Seite 29.

Lemma 2.8 *Angenommen der Markt ist gleichmäßig beschränkt. Dann gilt für jedes long-only Portfolio* $\pi(\cdot)$ *und für* $t \in [0,\infty)$*:*

$$\gamma_\pi^*(t) \leq 2M\left(1 - \pi_{(1)}(t)\right).$$

Beweis:
Auch diese Ungleichung lässt sich mit der Darstellung $\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t)$ zeigen, denn dann gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma_\pi^*(t) &\leq M\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\left(1-\pi_i(t)\right) \\
&= M\left(\pi_{(1)}(t)\left(1-\pi_{(1)}(t)\right) + \sum_{k=2}^n \pi_{(k)}(t)\left(1-\pi_{(k)}(t)\right)\right) \\
&\leq M\left(\left(1-\pi_{(1)}(t)\right) + \sum_{k=2}^n \pi_{(k)}(t)\right) \\
&= 2M\left(1-\pi_{(1)}(t)\right)
\end{aligned}$$

■

3 Diverstität und relative Arbitrage

3.1 Diversität

Diversität ist eine der möglichen Eigenschaften des Kapitalmarktes. Man sagt, ein Markt ist divers, wenn nicht die gesamte Kapitalisierung nur auf eine Firma bzw. einen Stock konzentriert ist. Dies ist eine durchaus sinnvolle Forderung an das Modell für den Kapitalmarkt, da auch in den meisten Staaten Gesetze vorhanden sind, die verhindern wollen, dass es zu Kartellen kommt oder das ein Unternehmen eine Monopolstellung erhält. Die Diversität gibt an, wie gut das Kapital auf dem ganzen Markt verteilt ist. Wie sich jedoch noch im Laufe der nächsten Kapitel zeigen wird, können in diversen Märkten Arbitragemöglichkeiten existieren. Nun noch zu einer mathematischen Modellierung dieses Begriffes:

Definition 3.1 (Diversität) *Man nennt ein Model M für einen Kapitalmarkt, wie in (1) beschrieben, divers im Zeitraum $[0, T]$, wobei gilt $T > 0$, wenn für die nach der umgekehrten Ordnungsstatistik geordneten Gewichte des Marktportfolios gilt:*

$$\mu_{(1)}(t) < 1 - \delta, \quad \delta \in (0, 1), \forall\, t \in [0, T]$$

M wird schwach divers genannt, wenn auf $[0, T]$ für $\delta \in (0, 1)$ gilt:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mu_{(1)}(t) dt < 1 - \delta, \quad f.s.$$

M ist gleichmäßig schwach divers auf $[T_0, \infty)$, wenn es ein $T_0 > 0$ und ein $\delta \in (0, 1)$ gibt, sodass für jedes $T \in [T_0, \infty)$ die Bedingung für schwache Diversität erfüllt ist.
Man sagt M ist asymptotisch schwach divers, wenn für ein $\delta \in (0, 1)$ fast sicher gilt:

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu_{(1)}(t) dt < 1 - \delta.$$

Bemerkung 3.1 *Es gibt für die in der obigen Defintion verwendeten Bedingung für Diversität eine äquivalente Bedingung (es wird wieder der Zeitraum $[0, T]$ betrachtet) für den Fall, dass der Markt nichtdegeneriert und gleichmäßig beschränkt ist. Diese lautet für Diversität:*

$$\gamma^*_\mu(t) \geq \zeta, \quad \zeta > 0,\, 0 \leq t \leq T.$$

Betrachtet man die Bedingung für schwache Diversität, so ist dazu äquivalent:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \gamma^*_\mu(t) dt \geq \zeta, \quad \zeta > 0.$$

Beweis:
Der Beweis soll nun nur für die Bedingung der Diversität gezeigt werden. Zuerst soll diese Äquivalenz ausgehend von der in der Definition genannten Bedingung gezeigt werden. Da der Markt nichtdegeneriert ist gilt: $\gamma_\mu^*(t) \geq \varepsilon\left(1 - \mu_{(1)}(t)\right)^2$ fast sicher für ein $t \in [0, \infty)$. Nimmt man an, dass der Markt divers ist, so gilt:

$$\mu_{(1)}(t) \leq 1 - \delta \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \leq 1 - \mu_{(1)}(t), \quad t \in [0, \infty)$$

Setzt man dies nun in die Bedingung für einen nichtdegenerierten Markt ein, so erhält man sofort die in der Bemerkung erwähnte äquivalente Darstellung:

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \varepsilon\delta^2, \quad t \in [0, \infty)\,.$$

Nun muss diese Äquivalenz noch in die andere Richtung gezeigt werden. Dafür geht man davon aus, dass der Markt gleichmäßig beschränkt ist und dass es ein $\zeta > 0$ gibt, sodass gilt: $\gamma_\mu^*(t) \geq \zeta$. Wie schon im vorhergehenden Kapitel über das Verhalten und die Eigenschaften von Portfolios in (17) erwähnt, gilt in einem gleichmäßig beschränkten Markt $\pi_{(1)}(t) \leq 1 - \varepsilon\gamma_\pi^*(t)$ für ein $\varepsilon > 0$. Somit ergibt sich gesamt für ein $t \in [0, \infty)$:

$$\mu_{(1)}(t) \leq 1 - \varepsilon\gamma_\mu^*(t) \leq 1 - \varepsilon\zeta.$$

Der Markt ist also divers. ∎

Proposition 3.1 *Haben alle Stocks in einem Markt dieselbe Wachstumsrate* $\gamma(t) := \gamma_i(t)\ \forall\, i = 1, \ldots, n$*, dann gilt:*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt = 0, \quad f.s.$$

Ein Markt mit gleichen Wachstumsraten für die Stocks kann also nicht divers sein und auch nicht schwach divers.

Beweis:
Da alle Stocks im Markt dieselbe Wachstumsrate haben, ist der Markt, wie vorher schon gezeigt wurde kohärent. Deshalb gilt auch:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\gamma(t) - \gamma_\mu(t)\right) dt = 0, \quad f.s.$$

Aufgrund der schon vorher erwähnten Darstellung für $\gamma_\mu(t)$ und der gleichen Wachstumsraten gilt:

$$\gamma_\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t)\gamma_i(t) + \gamma_\mu^*(t) = \gamma(t) + \gamma_\mu^*(t).$$

Daraus folgt die Gleichung für den Grenzwert aus dieser Proposition. Betrachtet man die in der vorhergehenden Bemerkung beschriebene Bedingung für Diversität, erkennt man sofort, dass der Markt nicht divers sein kann. ∎

Bemerkung 3.2 *Angenommen der Markt ist gleichmäßig beschränkt und nicht degeneriert und alle Stocks in diesem Markt haben konstante Wachstumsraten, die jedoch nicht gleich sein müssen, dann kann dieser Markt auf langen Zeitintervallen nicht divers und auch nicht schwach divers sein.*

3.2 Relative Arbitrage

Arbitrage ist eines der Hauptthemen in der Finanzmathematik. Unter Arbitrage versteht man einen risikolosen Gewinn, den man durch geschicktes Handeln auf dem Markt erreicht. Das heißt, man macht Profit ohne eigenes Kapital investieren zu müssen und ohne Risiko. Es wird meist die Hypothese getroffen, dass keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Im Folgenden wird relative Arbitrage betrachtet, ein dazu ähnlicher Begriff.

Definition 3.2 (Relative Arbitrage) *Betrachtet man zwei Portfolios $\pi(\cdot)$ und $\rho(\cdot)$, die beide dasselbe Anfangskapital $V^\pi(0) = V^\rho(0) = 1$ haben, so nennt man $\pi(\cdot)$ eine Arbitragemöglichkeit relativ zu $\rho(\cdot)$ auf einem Zeitintervall $[0, T]$ mit $T > 0$, falls gilt:*

$$\mathbb{P}\left(V^\pi(T) \geq V^\rho(T)\right) = 1 \ \textit{ und } \ \mathbb{P}\left(V^\pi(T) > V^\rho(T)\right) > 0.$$

Man spricht davon, dass $\pi(\cdot)$ eine starke Arbitragemöglichkeit relativ zu $\rho(\cdot)$ darstellt, falls gilt:

$$\mathbb{P}\left(V^\pi(T) > V^\rho(T)\right) = 1.$$

Man sagt, dass $\pi(\cdot)$ eine langfristige höhere Wachstumsmöglichkeit relativ zu $\rho(\cdot)$ ist, wenn fast sicher gilt:

$$\mathcal{L}^{\pi,\rho} := \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\rho(T)}\right) > 0.$$

Bemerkung 3.3 *Früher wurde der Begriff der relativen Arbitrage etwas anders definiert. Man ging davon aus, dass es eine Konstante $q > 0$, die abhängig von π, ρ und T ist, gibt, sodass gilt:*

$$\mathbb{P}\left(V^\pi(t) \geq qV^\rho(t),\ \forall\, 0 \leq t \leq T\right) = 1.$$

C. Kardaras zeigte jedoch, dass, wenn es ein Portfolio gibt, dass die Bedingungen der Definition der relativen Arbitrage erfüllt, es auch ein Portfolio gibt, dass diese Bedingungen und auch die Bedingung aus dieser Bemerkung erfüllt.

3.2.1 Strikte lokale Martingale

Angenommen es existiert ein Marktpreis des Risikos oder ein relatives Risiko $\theta : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$. Dies sei ein stochastischer Prozess, der progressiv messbar bezüglich $\mathbb{F}$ ist und der die zwei folgenden Bedingungen für alle $T \in (0, \infty)$ erfüllt:

$$\sigma(t)\theta(t) = b(t) - r(t)\mathbb{I} \qquad \forall \; 0 \leq t \leq T,$$

$$\int_0^T ||\theta(t)||^2 dt < \infty.$$

Hat die Volatilitätsmatrix $\sigma(t)$ vollen Rang n, so kann man $\theta(t)$ auch definieren als $\theta(t) = \sigma'(t) \left(\sigma(t)\sigma'(t)\right)^{-1} [b(t) - r(t)\mathbb{I}]$. Dabei ist wieder $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1)'$ der n-dimensionale Spaltenvektor, dessen Einträge alle den Wert 1 haben.

Mit Hilfe dieses Prozesses kann man durch die folgende Darstellung ein exponentielles lokales Martingal und Supermartingal definieren:

$$Z(t) := \exp\left\{ -\int_0^t \theta'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(s)||^2 ds \right\}, \quad 0 \leq t < \infty. \tag{18}$$

Dieser Prozess ist ein Martingal, falls für alle $T \in (0, \infty)$ gilt: $\mathbb{E}(Z(T)) = 1$. Weiters kann man mit dem Prozess des relativen Risikos auch eine verschobene Brownsche Bewegung definieren, durch:

$$\widehat{W}(t) := W(t) + \int_0^t \theta(s)ds, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Proposition 3.2 *Betrachtet man einen Markt, der wie in (1) beschrieben ist, die Integrabilitätsbedingung in (2) erfüllt und gleichmäßig beschränkt ist, und nimmt man an, dass für ein $T > 0$ und ein Portfolio ρ auf dem Intervall $[0, T]$ Arbitrage relativ zu ρ möglich ist, dann ist der oben beschriebene Prozess $Z(\cdot)$ ein striktes lokales Martingal mit $\mathbb{E}(Z(T)) < 1$.*

Beweis:
Dieser Beweis wird durch Herleiten eines Widerspruchs durchgeführt. Also nimmt man zuerst an $\mathbb{E}(Z(T)) = 1$. Mit Hilfe des Satzes von Girsanov sieht man, dass $\mathbb{Q}_T(A) := \mathbb{E}\left(Z(T)1_A\right), A \in \mathcal{F}(T)$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, unter dem der oben definierte Prozess $\widehat{W}(t)$ für $0 \leq t \leq T$ eine Brownsche Bewegung ist. Betrachtet man nun die diskontierten Stockpreise $\frac{X_i(\cdot)}{B(\cdot)}$ für $i = 1, \ldots, n$ unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß

$\mathbb{Q}_T$, so sieht man, dass diese positive Martingale auf $[0, T]$ sind, denn der Markt ist gleichmäßig beschränkt und es gilt folgende Darstellung für sie:

$$d\left(\frac{X_i(t)}{B(t)}\right) = \left(\frac{X_i(t)}{B(t)}\right)\sum_{m=1}^{d}\sigma_{im}(t)d\widehat{W}_m(t).$$

Man sagt also, das $\mathbb{Q}_T$ ein äquivalentes Martingalmaß zu $\mathbb{P}$ ist. Betrachtet man nun den diskontierten Vermögensprozess $\frac{V^\pi(t)}{B(t)}$ für $0 \leq t \leq T$, wobei $V^\pi(0) = 1$, so sieht man, dass auch dieser ein Martingal ist, denn es gilt:

$$d\left(\frac{V^\pi(t)}{B(t)}\right) = \left(\frac{V^\pi(t)}{B(t)}\right)\pi'(t)\sigma(t)d\widehat{W}(t).$$

Bezeichnet man mit $\Delta(t)$ die Differenz $\Delta(t) := \frac{(V^\pi(t)-V^\rho(t))}{B(t)}$ für $0 \leq t \leq T$, dann sieht man, dass auch dies ein Martingal ist, für ein Portfolio $\rho(\cdot)$ mit $V^\rho(0) = 1$. Es gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\Delta(T)) = \Delta(0) = 0$. Betrachtet man jedoch die Definition von relativer Arbitrage, so müsste gelten: $\mathbb{Q}_T(\Delta(T) \geq 0) = 1$ und $\mathbb{Q}_T(\Delta(T) > 0) > 0$. Dies steht aber im Widerspruch zum eben Gezeigten. ∎

Im Folgenden werden die herabgesetzten (deflated) Stockpreis- und Vermögensprozesse betrachtet. Diese haben für $0 \leq t \leq T$ und für eine zulässige Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}(w)$ für ein Anfangskapital w folgende Darstellung:

$$\widehat{X}_i(t) := \frac{Z(t)}{B(t)}X_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\widehat{V}^{w,h}(t) := \frac{Z(t)}{B(t)}V^{w,h}(t).$$

Das ergibt folgende stochastische Differentialgleichungen:

$$d\widehat{X}_i(t) = \widehat{X}_i(t)\sum_{m=1}^{d}\left(\sigma_{im}(t) - \theta_m(t)\right)dW_m(t), \quad \widehat{X}_i(0) = x_i, \tag{19}$$

$$d\widehat{V}^{w,h}(t) = \left(\frac{Z(t)h'(t)}{B(t)}\sigma(t) - \widehat{V}^{w,h}(t)\theta'(t)\right)dW(t), \quad \widehat{V}^{w,h}(0) = w. \tag{20}$$

Diese Prozesse sind sogar nichtnegative lokale Martingale und Supermartingale unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.

Bemerkung 3.4 *Unter den Voraussetzungen der vorhergehenden Proposition mit dem Marktportfolio $\mu(\cdot)$ anstelle des Portfolios $\rho(\cdot)$, kann aufgrund der beiden vorhergehenden stochastischen Differentialgleichungen in (19) und (20) gezeigt werden, dass die Prozesse $\widehat{X}_i(t)$ für $0 \leq t \leq T$ alle strikte lokale Martingale und auch strikte Supermartingale sind. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left(\widehat{X}_i(T)\right) < x_i.$$

Ein Beweis dazu findet sich in [6] S. 20.

Bemerkung 3.5 *Sei M ein Markt, wie in (1) beschrieben, der die Integrabilitätsbedingung (2) erfüllt und gleichmäßig beschränkt ist. Angenommen es existiert ein $T > 0$ und ein Portfolio $\rho(\cdot)$, sodass Arbitrage relativ zu $\rho(\cdot)$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ möglich ist. Dann ist der Prozess $\widehat{V}^{w,\rho}(t) = \frac{Z(t)}{B(t)} V^{w,\rho}(t)$ für $0 \leq t \leq T$ ein striktes lokales Martingal und ein striktes Supermartingal. Es gilt:*

$$\mathbb{E}\left(\widehat{V}^{w,\rho}(T)\right) < w.$$

Ein Beweis dazu findet sich in [6] S. 19.

Proposition 3.3 (Nichtexistenz eines äquivalenten Martingalmaßes) *In einem Marktmodel wie in (1) beschrieben, dass gleichmäßig beschränkt ist und die Integrabilitätsbedingung (2) erfüllt, kann es kein äquivalentes Martingalmaß auf dem Zeitintervall $[0, T]$ geben, wenn die Filtration $\mathbb{F}$ des filtrierten Wahrscheinlichkeitsraumes die von der Brownschen Bewegung $W(\cdot)$ erzeugte Filtration $\mathbb{F}^W$ ist.*

Beweis:
Angenommen es gilt $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Auch dieser Beweis wird so geführt, dass ein Widerspruch hergeleitet wird. Es wird also auch angenommen, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ gibt, das äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist. Aufgrund der Martingaldarstellungseigenschaft der Brownschen Bewegung gilt: $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}(t)} = Z(t)$ für $0 \leq t \leq T$. Dabei ist dieser Prozess $(Z(t))_{0 \leq t \leq T}$ wieder von der in (18) beschriebenen Gestalt, für ein $\theta(\cdot)$, das progressiv messbar ist und für das fast sicher gilt: $\int_0^T ||\theta(t)||^2 dt < \infty$. Mit Hilfe der Itô - Formel erhält man somit folgende Darstellung für die $\widehat{X}_i(t)$:

$$\frac{d\widehat{X}_i(t)}{\widehat{X}_i(t)} = \left(b_i(t) - r(t) - \sum_{m=1}^{d} \sigma_{im}(t)\theta_m(t)\right) dt + \sum_{m=1}^{d} \left(\sigma_{im}(t) - \theta_m(t)\right) dW_m(t).$$

Wenn nun $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist, dann müssten alle $\widehat{X}_i(t)$ auf dem Zeitintervall $[0,T]$ $\mathbb{P}$-Martingale sein. Dies führt zu der schon vorher erwähnten Eigenschaft von $\theta(\cdot)$, dass gilt: $\sigma(t)\theta(t) = b(t) - r(t)\mathbb{I}\ \forall\, 0 \leq t \leq T$. Wiederholt man nun das Argument aus Proposition 3.2, so erhält man einen Widerspruch zu der Existenz der relativen Arbitrage auf $[0,T]$. ∎

Wird also die Filtration des filtrierten Wahrscheinlichkeitsraumes von der Brownschen Bewegung erzeugt, so kann in dem Marktmodell kein äquivalentes Martingalmaß existieren. Dies ist jedoch kein Problem. In [6] kann man auf den Seiten 27 - 31 nachlesen, wie man dennoch Nutzenoptimierungen und ähnliches durchführen kann. Im Bereich der Arbeit ohne äquivalenten Martingalmaß gibt es jedoch auch noch einige offene Fragen, die in [6] ebenfalls angeführt werden.

3.2.2 Den Markt überbieten

Für dieses Kapitel und auch für den folgenden Gebrauch soll nun eine rechtsstetige nichtwachsende Funktion f definiert werden. Diese hat folgende Gestalt:

$$f(t) := \frac{1}{X(0)}\mathbb{E}\left(\frac{Z(t)}{B(t)}X(t)\right), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Angenommen relative Arbitrage existiert in diesem Markt auf einem Zeitintervall $[0,T]$, wobei $T > 0$. Betrachtet man nun die Eigenschaft der $\widehat{X}_i(t)$ in Bemerkung 3.4, so sieht man, dass gelten muss:

$$f(0) = 1 > f(T) > 0.$$

Bemerkung 3.6 *Es gelte auf dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsraum $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Weiters sei $d = n$ und die Volatilitätsmatrix $\sigma(\cdot)$ sei invertierbar. Bezeichnet man nun mit $\mathcal{R}(T)$ den maximalen Rückgabewert relativ zum Markt, den man mit Hilfe von Handelsstrategien $h(\cdot) \in \mathcal{H}(1,T)$ auf dem Zeitintervall $[0,T]$ erreichen kann, also:*

$$\mathcal{R}(T) := \sup\left\{ r > 0 | \exists h(\cdot) \in \mathcal{H}(1,T),\ \textit{sodass}\ \frac{V^h(T)}{V^\mu(T)} \geq r\ \ f.s. \right\},$$

dann gilt folgender Zusammenhang mit der oben definierten Funktion f:

$$\mathcal{R}(T) = \frac{1}{f(T)}.$$

Bemerkung 3.7 *Es gelten wieder dieselben Voraussetzungen wie in der vorhergehenden Bemerkung. Es existiere wieder relative Arbitrage auf einem Zeitintervall* $[0, T]$*, diesmal jedoch für jedes* $T \in (0, \infty)$*. Sei ein* $r > 1$ *gegeben, so kann man die kürzeste Zeit, die man benötigt um einen Rückgabewert, der mindestens das* r*-fache des Marktes beträgt, mit* $T(r)$ *bezeichnen und erhält folgende Darstellung:*

$$T(r) := \inf \left\{ T \in (0, \infty) | \exists h(\cdot) \in \mathcal{H}(1, T), \textit{ sodass } \frac{V^h(T)}{V^\mu(T)} \geq r \ \textit{ f.s.} \right\}.$$

Dieser Wert lässt sich mit Hilfe der Funktion f *auch auf folgende Weise darstellen:*

$$T(r) = \inf \left\{ T \in (0, \infty) | f(T) \leq \frac{1}{r} \right\}.$$

Bemerkung 3.8 *Angenommen es existiert eine Funktion* $u : [0, \infty) \to [0, \infty)$*, die strikt wachsend ist. Weiters seien eine Zahl* $T > 0$ *und ein Portfolio* $\rho(\cdot)$ *gegeben. Gilt für jedes Portfolio* $\pi(\cdot)$*:* $\mathbb{E}\left(u(V^\pi(T))\right) \leq \mathbb{E}\left(u(V^\rho(T))\right)$*, so ist es nicht möglich, dass Arbitrage relativ zu* $\rho(\cdot)$ *auf dem Zeitintervall* $[0, T]$ *existiert.*
Es ist relativ einfach dies zu begründen. Angenommen es gibt ein Portfolio $\nu(\cdot)$*, das eine Arbitragemöglichkeit relativ zu* $\rho(\cdot)$ *darstellt. Dann gilt für dieses Portfolio:* $\mathbb{E}\left(u(V^\nu(T))\right) > \mathbb{E}\left(u(V^\rho(T))\right)$*, was aber im Widerspruch zu der obigen Ungleichung steht.*

3.3 Ein diverses Marktmodell

Da nun die Eigenschaft der Diversität ausreichend erläutert wurde, stellt sich die Frage, wie denn ein diverser Markt aussieht bzw. wie man so ein Marktmodell konstruieren kann. Dies wird speziell in [5] ausführlich behandelt.
Zuerst geht man davon aus, dass eine Zahl $\delta \in \big(0, 1 - \mu_{(1)}(0)\big)$ gewählt wird und es stellt sich die Frage, wann für $t \in [0, \infty)$ fast sicher gilt: $\mu_{(1)}(t) < 1 - \delta$. Diese Eigenschaft garantiert, dass der Markt divers ist.

Für die folgenden Überlegungen, gilt die Annahme, dass $\frac{1}{2} \leq \mu_{(1)}(0) < 1 - \delta$ und es wird definiert:

$$R := \inf \left\{ t \geq 0 \,|\, \mu_{(1)}(t) \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$S := \inf \left\{ t \geq 0 \,|\, \mu_{(1)}(t) \geq 1 - \delta \right\}$$

und

$$S_k := \inf \left\{ t \geq 0 \,|\, \mu_{(1)}(t) \geq 1 - \delta_k \right\},$$

wobei $\delta_k = \delta + \frac{1}{k}$, für alle genügend große k.

Damit der Markt divers ist, muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(S_k < R\right) = 0,$$

denn es gilt:

$$\mathbb{P}\left(S < R\right) \leq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(S_k < R\right) = 0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt auch für $t \in [0, \infty)$ fast sicher: $\mu_{(1)}(t) < 1 - \delta$. Der Markt ist dann also divers.

Satz 3.1 *Angenommen auf der Menge* $\left\{\frac{1}{2} \leq \mu_{(1)}(t) < 1 - \delta\right\}$ *gilt:*

$$\gamma_{(k)}(t) \geq 0 \geq \gamma_{(1)}(t), \quad \forall\ k = 2, \ldots, n$$

und

$$\min_{2\leq k\leq n} \gamma_{(k)}(t) - \gamma_{(1)}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{M}{\delta Q(t)},$$

wobei $Q(t) := \log\left(\frac{1-\delta}{\mu_{(1)}(t)}\right)$. *Dann ist* $\mu_{(1)}(t) < 1-\delta$ *und* $\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(S_k < R\right) = 0$. *Der Markt ist also auf jedem gegebenen endlichen Zeitintervall* $[0, T]$ *divers und es gilt fast sicher* $\int_0^T Q^{-2}(t)dt < \infty$.
(Ein Beweis findet sich in [5] auf Seite 10.)

Bemerkung 3.9 *Nun zu dem in Kapitel 1 beschriebenen Marktmodell. Gegeben sei wieder eine Volatilitätsmatrix* $\sigma(\cdot) = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$ *mit* $\varepsilon||\xi||^2 \leq \xi'\sigma(t)\sigma'(t)\xi \leq M||\xi||^2$ *für* $t \in [0, \infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ *und Konstanten* $M > \varepsilon > 0$. *Weiters sei ein nichtnegativer Vektor* $g = (g_1, \ldots g_n)'$ *gegeben. Dann gilt für den Prozess der Stockpreise* $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \ldots, X_n(\cdot))'$ *des Marktes:*

$$d\log X_i(t) = \left(g_i 1_{O_i^c}(X(t)) - \frac{M}{\delta} \cdot \frac{1_{O_i}(X(t))}{\log\left(\frac{1-\delta}{X_i(t)}\sum_{j=1}^n X_j(t)\right)}\right) dt$$
$$+ \sum_{m=1}^{d} \sigma_{im}(t) dW_m(t).$$

Dafür werden die folgenden Mengen definiert:

$$O_1 := \left\{x \in (0, \infty)^n \left| x_1 \geq \max_{2\leq j\leq n} x_j \right.\right\},$$

$$O_n := \left\{ x \in (0,\infty)^n \,|x_n > \max_{1 \le j \le n-1} x_j \right\}$$

und für $i = 2, \ldots, n-1$

$$O_i := \left\{ x \in (0,\infty)^n \,|x_i > \max_{1 \le j \le i-1} x_j, \quad x_i \ge \max_{i+1 \le j \le n} x_j \right\}.$$

Für die Rückgaberate gilt dann für $i = 1, \ldots, n$*:*

$$b_i(t) = \frac{1}{2} a_{ii}(t) + g_i \cdot 1_{O_i^c}(X(t)) - \frac{M}{\delta} \cdot \frac{1_{O_i}(X(t))}{\log \left(\frac{1-\delta}{X_i(t)} \sum_{j=1}^n X_j(t) \right)}.$$

Bemerkung 3.10 *In dem vorhergehenden Satz, kann die Bedingung*

$$\min_{2 \le k \le n} \gamma_{(k)}(t) - \gamma_{(1)}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \ge \frac{M}{\delta Q(t)}$$

ersetzt werden durch die Bedingung

$$\min_{2 \le k \le n} \gamma_{(k)}(t) - \gamma_{(1)}(t) + \frac{\varepsilon}{2} \ge \frac{M}{\delta} F(Q(t)),$$

wobei $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *eine stetige Funktion ist, sodass für die dazugehörige Skalenfunktion*

$$U(x) := \int_1^x \exp \left[- \int_1^y F(z) dz \right] dy, \quad 0 < x < \infty,$$

gilt: $U(0+) = -\infty$*. Zum Beispiel kann man die Funktion* $F(x) = \frac{1}{x}$ *zusammen mit der Funktion* $U(x) = \log x$ *verwenden.*

4 Von Funktionen erzeugte Portfolios

Es besteht die Möglichkeit Portfolios mit Hilfe von Funktionen zu erzeugen. Welche Bedingungen solche Funktionen erfüllen müssen oder wie dann die Gewichte der erzeugten Portfolios aussehen, soll in diesem Kapitel erläutert werden. Von Funktionen erzeugte Portfolios werden auch im nächsten Kapitel eine Rolle spielen.

4.1 Funktionen, die Portfolios erzeugen

Zuerst stellt sich die Frage, wann man sagen kann, dass eine Funktion ein Portfolio erzeugt. Dies lässt sich anhand der folgenden Definition erläutern.

Definition 4.1 *Man sagt eine positive stetige Funktion S, definiert auf Δ^n, erzeugt ein Portfolio $\pi(\cdot)$, wenn es einen messbaren Prozess Θ von beschränkter Variation gibt, sodass für $t \in [0,T]$ fast sicher gilt:*

$$\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = \log S(\mu(t)) + \Theta(t).$$

Eine dazu äquivalente Darstellung ist:

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = d\log S(\mu(t)) + d\Theta(t).$$

Im Zusammenhang mit der obigen Definition nennt man S die erzeugende Funktion von $\pi(\cdot)$. Ebenso nennt man $\pi(\cdot)$ von einer Funktion erzeugt. Der Prozess $(\Theta(t))_{t\in[0,T]}$ wird der Driftprozess in Bezug auf S genannt. Dieser Prozess ist sogar stetig und adaptiert, da auch $\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$ und $\log S(\mu(t))$ stetig und adaptiert sind.

Im Folgenden wird mit D_i die Ableitung nach der i-ten Variable bezeichnet. Dementsprechend ist D_{ij} die zweifache Ableitung nach der i-ten und dann nach der j-ten Variable.

Satz 4.1 *Sei $S : U \to (0,\infty)$ eine positive C^2 - Funktion. Dabei sei U eine offene Umgebung von Δ^n_+. Diese Funktion sei dergestalt, dass die Abbildung $x \to x_i D_i \log S(x)$ beschränkt auf U ist für alle $i = 1,\dots,n$. Dann erzeugt die Funktion S ein Portfolio $\pi(\cdot)$ mit den Gewichten:*

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t))\right)\mu_i(t), \tag{21}$$

für $t \in [0,T]$ und $i = 1,\dots,n$. Der Driftprozess $(\Theta(t))_{t\in[0,T]}$ ist dann in folgender Weise gegeben:

$$d\Theta(t) = -\frac{1}{2S(\mu(t))}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt.$$

Beweis:
Aufgrund der Darstellung von $(\Theta(t))_{t\in[0,T]}$ erkennt man, dass der Driftprozess von beschränkter Variation ist. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t) = 1$ und dass die Bedingungen an S sicherstellen, dass $\pi(\cdot)$ auch wirklich ein Portfolio ist.
Wie aus der Darstellung für die Marktgewichte, die im zweiten Kapitel erörtert wurden, ersichtlich ist, gilt fast sicher $d\langle\mu_i,\mu_j\rangle_t = \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt$ für $t \in [0,T]$. Mit Hilfe dieser Formel und der Itô - Formel erhält man für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} d\log S(\mu(t)) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu(t))d\mu_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt. \end{aligned}$$

Für ein $x \in \Delta_+^n$ gilt:

$$D_{ij}\log S(x) = \frac{D_{ij}S(x)}{S(x)} - D_i\log S(x)D_j\log S(x).$$

Verwendet man dies nun, so kann man eine andere Darstellung für $d\log S(\mu(t))$ erhalten und man sieht, dass fast sicher für $t \in [0,T]$ gilt:

$$\begin{aligned} d\log S(\mu(t)) &= \sum_{i=1}^{n} D_i\log S(\mu(t))d\mu_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2S(\mu(t))}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i\log S(\mu(t))D_j\log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt. \end{aligned}$$

Wie schon vorher in der Definition eines von einer Funktion erzeugten Portfolios erwähnt, soll gelten:

$$d\log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) = d\log S(\mu(t)) + d\Theta(t).$$

Damit dies erfüllt ist, müssen die Teile des lokalen Martingals von $\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$ und $\log S(\mu(t))$ gleich sein. Für $\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$ gilt fast sicher für $t \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)dt.
\end{aligned}
$$

Nun definiert man für $t \in [0,T]$ die folgende Funktion:

$$
\varphi(t) = 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t)),
$$

und setzt mit Hilfe dieser Funktion fest:

$$
\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t)) + \varphi(t)\right)\mu_i(t).
$$

Dann ist die Summe dieser Gewichte 1, denn:

$$
\sum_{i=1}^n \pi_i(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t) D_i \log S(\mu(t)) + \varphi(t) = 1.
$$

Damit ist schon einmal gezeigt, dass mit Hilfe der in diesem Satz verwendeten Formel (21) wirklich Gewichte für ein Portfolio erzeugt werden können.
Für den weiteren Beweis wird wieder die gerade definierte Funktion $\varphi(t)$ verwendet. Mit Hilfe dieser Funktion erhält man für $t \in [0,T]$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} d\mu_i(t) &= \sum_{i=1}^n D_i \log S(\mu(t)) d\mu_i(t) + \varphi(t)\sum_{i=1}^n d\mu_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^n D_i \log S(\mu(t)) d\mu_i(t),
\end{aligned}
$$

denn es gilt: $\sum_{i=1}^n d\mu_i(t) = 0$. Daher sind die Teile des lokalen Martingals von $\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$ und $\log S(\mu(t))$ gleich.
Verwendet man für die $\pi_i(t)$ die im Satz verwendete Darstellung, so ergibt

sich, da $\mu(t)$ im Annulatorraum von $\tau^\mu(t)$ ist:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\mu(t) &= \sum_{i,j=1}^n D_i \log S(\mu(t)) D_j \log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\\ &\quad + 2\varphi(t)\sum_{i,j=1}^n D_i \log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\\ &\quad + \varphi^2(t)\sum_{i,j=1}^n \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)\\ &= \sum_{i,j=1}^n D_i \log S(\mu(t)) D_j \log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t).\end{aligned}$$

Daraus folgt für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= \sum_{i=1}^n D_i \log S(\mu(t)) d\mu_i(t)\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_i \log S(\mu(t)) D_j \log S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)dt\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die schon vorher im Beweis erwähnte Darstellung für $d\log S(\mu(t))$, so folgt:

$$\begin{aligned}d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) &= d\log S(\mu(t))\\ &\quad - \frac{1}{2S(\mu(t))}\sum_{i,j=1}^n D_{ij} S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)dt\end{aligned}$$

Damit ist auch die Darstellung für $\Theta(t)$ bewiesen. ∎

Bemerkung 4.1 *Sei S ein Funktion, die ein Portfolio $\pi(\cdot)$ erzeugt, sodass für alle $x \in \Delta_+^n$ die Matrix $(D_{ij}S(x))$ wenigstens einen positiven Eigenwert hat und wenn dieser positive Eigenwert existiert, soll dieser zu einem Eigenvektor gehören, der orthogonal zu Δ_+^n ist. Dann gilt für die Gewichte von $\pi(\cdot)$: $\pi_i(t) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Weiters ist der Driftprozess $\Theta(\cdot)$ fast sicher nichtnegativ. Ist für alle $x \in \Delta_+^n$ der Rang der Matrix $(D_{ij}S(x))$ größer als 1, dann ist $\Theta(\cdot)$ fast sicher positiv.*

Beispiel 4.1 *Nun sollen noch einige Beispiele für erzeugende Funktionen und den dazugehörigen Portfolios angeführt werden.*

1. *Die Funktion* $S(x) = 1$ *erzeugt das Marktportfolio mit* $\Theta(t) = 0$.
2. *Eine konstante Funktion* $S(x) = c$, *für eine positive Konstante* $c > 0$ *erzeugt ebenfalls das Marktportfolio.*
3. *Die Funktion* $S(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ *erzeugt ein Portfolio, das zum Zeitpunkt* $t = 0$ *jeweils* c_i *Aktien der i-ten Firma kauft und sie bis zum Zeitpunkt* $t = T$ *hält. Dies ist die bekannte „ buy-and-hold-Strategie", die sehr passiv ist.*
4. *Die Funktion* $S(x) = (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ *erzeugt ein Portfolio, bei dem alle Gewichte denselben Wert haben. Es gilt:* $\pi_i(t) = \frac{1}{n}$ *für* $i = 1, \dots, n$. *Für den Driftprozess gilt:* $d\Theta(t) = \gamma_\pi^*(t)dt$.
5. *Verwendet man die Funktion* $S(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$, *wobei* $p_1, \dots, p_n$ *konstant sind und* $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, *dann erhält man ein Portfolio, für dessen Gewichte folgende Werte verwendet werden:* $\pi_i(t) = p_i$. *Der Driftprozess sieht dann folgendermaßen aus:* $d\Theta(t) = \gamma_\pi^*(t)dt$.

Eine Funktion, die ein Portfolio erzeugt, kann auch von der Zeit, also der Variablen t, abhängig sein. Das in diesem Kapitel bereits Behandelte ändert sich dadurch jedoch nur geringfügig. Im Folgenden wird eine kurze Einführung für von der Zeit abhängige erzeugende Funktionen gegeben.

Definition 4.2 *Sei* $\pi(\cdot)$ *ein Portfolio und sei* S *eine positive stetige Funktion, die auf* $\Delta_+^n \times [0, T]$ *definiert ist. Dann sagt man, dass die Funktion das Portfolio* $\pi(\cdot)$ *erzeugt, wenn es einen messbaren adaptierten Prozess* Θ *von beschränkter Variation gibt, sodass für* $t \in [0, T]$ *gilt:*

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = d\log S(\mu(t), t) - D_t \log S(\mu(t), t)dt + d\Theta(t).$$

Der Prozess Θ *wird analog zu vorher Driftprozess genannt.*

Satz 4.2 *Sei* S *definiert auf* $U \times [0, T]$ *eine positive* $C^{2,1}$ *- Funktion (zweimal stetig differenzierbar in den ersten* n *Variablen und einmal stetig differenzierbar in der Variable* t*). Dabei sei* U *eine offene Umgebung von* Δ_+^n. *Diese Funktion sei dergestalt, dass die Abbildung* $x \to x_iD_i \log S(x, t)$ *beschränkt* *auf $U \times [0,T]$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann erzeugt die Funktion S ein Portfolio $\pi(\cdot)$ mit den Gewichten:*

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t), t) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t), t) \right) \mu_i(t),$$

für $t \in [0,T]$ und $i = 1, \ldots, n$. Der Driftprozess $(\Theta(t))_{t \in [0,T]}$ ist dann in folgender Weise gegeben:

$$d\Theta(t) = -\frac{1}{2S(\mu(t),t)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} S(\mu(t), t) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^{\mu}(t) dt - D_t \log S(\mu(t), t) dt.$$

4.2 Maße für Diversität

Bevor nun eine Definition von Maßen für Diversität folgt, sollen noch einige allgemeine Begriffe festgesetzt werden. Betrachtet man eine Funktion F, die auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, so ist diese Funktion symmetrisch, wenn sie invariant gegen Permutationen in den Variablen ist. Diese Funktion wird konkav genannt, wenn für $p \in (0,1)$ und für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $F(px + (1-p)y) > pF(x) + (1-p)F(y)$.

Definition 4.3 (Maß für Diversität) *Man nennt eine positive C^2-Funktion, die auf einer offenen Umgebung von Δ_+^n definiert ist, ein Maß für Diversität, wenn sie symmetrisch und konkav ist. Das durch eine solche Funktion erzeugte Portfolio wird ein diversitätsgewichtetes Portfolio genannt. Die dazugehörigen Gewichte heißen dann Diversitätsgewichte.*

Proposition 4.1 *Gegeben sei ein Maß für Diversität S mit dazugehörigem Driftprozess Θ, das ein Portfolio $\pi(\cdot)$ erzeugt. Dann ist Θ fast sicher nichtfallend. Gilt $\mu_i(t) \geq \mu_j(t)$, dann folgt fast sicher für alle $t \in [0,T]$: $\frac{\pi_j(t)}{\mu_j(t)} \geq \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}$*

Beispiel 4.2 *Ein Standardbeispiel für ein Maß für Diversität ist die Entropiefunktion. Diese hat die Gestalt:*

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

.

Im folgenden Kapitel werden einige Maße für Diversität vorkommen.

5 Diversität führt zu Arbitrage

In diesem Kapitel wird sich zeigen, dass die Anforderung an den Markt, divers zu sein, durchaus dazu führen kann, dass es relative Arbitragemöglichkeiten gibt. Je nach dem, ob ein langer Zeitraum betrachtet wird, oder nicht, muss man verschiedene Portfolios betrachten. Diese Aussage ist vor allem daher interessant, da, wie schon vorher erwähnt, Diversität eine vernünftige Anforderung an das Marktmodell ist und in vielen Ländern auch durch Gesetze sichergestellt wird.

5.1 Arbitrage über lange Zeiträume

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es in schwach diversen Märkten möglich ist, wenn man genügend große Zeitintervalle betrachtet, Arbitragemöglichkeiten zu finden. Dies soll anhand von zwei verschiedenen Portfolios demonstriert werden.

Betrachtet man die erzeugende Funktion für $0 < p < 1$:

$$S_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

die sogar ein Maß für Diversität ist, so erhält man ein Portfolio $\pi(\cdot)$ mit den Gewichten für $t \in [0,T]$:

$$\pi_i(t) = \frac{(\mu_i(t))^p}{\sum_{j=1}^{n} (\mu_j(t))^p}.$$

Vergleicht man dieses Portfolio mit dem Marktportfolio, so sieht man, dass bei diesem erzeugten Portfolio die Gewichte in den größeren Stocks niedriger sind als beim Marktportfolio. Bei den kleineren Stocks ist dies genau umgekehrt. Interessant an diesem Portfolio ist auch, dass die Ränge der geordneten Stocks gleich bleiben.
Der Driftprozess, der zu dieser erzeugenden Funktion S_p gehört, sieht für $t \in [0,T]$ folgendermaßen aus:

$$d\Theta(t) = (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt.$$

Daher gilt die folgende Darstellung fast sicher:

$$\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) = \log\left(\frac{S_p(\mu(T))}{S_p(\mu(0))}\right) + (1-p)\int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt. \tag{22}$$

Diese ist besonders zu beachten, da keine stochastischen Integrale vorkommen und da man dennoch eine fast sichere Aussage erhält.
Betrachtet man nun die erzeugende Funktion S_p genauer, so sieht man, dass gilt:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \leq \sum_{i=1}^{n} (\mu_i(t))^p = (S_p(\mu(t)))^p \leq n^{1-p}.$$

Die erzeugende Funktion nimmt also ihr Minimum an, wenn der ganze Markt auf einen Stock konzentriert ist, also wenn eines der Marktgewichte den Wert 1 annimmt. Sie nimmt ihr Maximum an, wenn alle Marktgewichte den gleichen Wert $\frac{1}{n}$ annehmen, also das gesamte Kapital auf alle Stocks gleich aufgeteilt ist.
Es gilt fast sicher folgende Ungleichung:

$$\log\left(\frac{S_p(\mu(T))}{S_p(\mu(0))}\right) \geq -\frac{1-p}{p}\log n.$$

Betrachtet man die obige Darstellung von $\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)$ in (22) und ruft man sich in Erinnerung, dass für ein long-only Portfolio $\gamma_\pi^*(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,T]$ gilt, so sieht man, dass $\frac{V^\pi(\cdot)}{V^\mu(\cdot)}$ von unten durch $n^{\frac{p-1}{p}}$ beschränkt ist.
Wie schon oben erwähnt, gelten für die durch die obige Funktion erzeugten Portfoliogewichte in Bezug auf die Marktgewichte folgende Ungleichungen:

$$\pi_{(1)}(t) := \max_{1\leq i\leq n} \pi_i(t) = \frac{\left(\mu_{(1)}(t)\right)^p}{\sum_{k=1}^n \left(\mu_{(k)}(t)\right)^p} \leq \mu_{(1)}(t),$$

$$\pi_{(n)}(t) := \min_{1\leq i\leq n} \pi_i(t) = \frac{\left(\mu_{(n)}(t)\right)^p}{\sum_{k=1}^n \left(\mu_{(k)}(t)\right)^p} \geq \mu_{(n)}(t).$$

Aufgrund der Annahme der Diversität und der eben dargestellten Ungleichungen ergibt sich:

$$\int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \left(1 - \pi_{(1)}(t)\right) dt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \left(1 - \mu_{(1)}(t)\right) dt > \frac{\varepsilon}{2}\delta T.$$

Zusammen mit der Ungleichung für $\log\left(\frac{S_p(\mu(T))}{S_p(\mu(0))}\right)$, ergibt sich gesamt die Ungleichung:

$$\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) > (1-p)\left(\frac{\varepsilon\delta T}{2} - \frac{1}{p}\log n\right).$$

Man sieht also, dass mit Hilfe dieser erzeugenden Funktion Arbitrage relativ zum Marktportfolio möglich ist, falls T genügend groß ist. Genauer gesagt gilt:

$$\mathbb{P}\left(V^{\pi}(T) > V^{\mu}(T)\right) = 1, \quad falls \quad T \geq \frac{2}{p\varepsilon\delta}\log n.$$

Ein weiteres Beispiel für relative Arbitrage über längere Zeiträume ist das Portfolio, das durch die Funktion

$$S(x) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

erzeugt wird. Es wird wieder angenommen, dass der Markt auf einem Zeitintervall $[0, T]$ schwach divers ist und er soll weiters auch noch nichtdegeneriert sein.
Durch die eben erwähnte Funktion wird ein Portfolio $\pi(\cdot)$ erzeugt, für dessen Gewichte für $i = 1, \ldots, n$ und für $t \in [0, T]$ gilt:

$$\pi_i(t) = \left(\frac{2 - \mu_i(t)}{S(\mu(t))} - 1\right)\mu_i(t).$$

Der Driftprozess lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$d\Theta(t) = \frac{1}{2S(\mu(t))}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t)\tau_{ii}^{\mu}(t)dt.$$

Betrachtet man diese portfolioerzeugende Funktion genauer, so sieht man, dass für sie fast sicher gilt: $\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1 \ \forall \ t \in [0, T]$. Diese Eigenschaft und die Darstellung der Gewichte des erzeugten Portfolios $\pi(\cdot)$ implizieren, dass für $t \in [0, T]$ und für $i = 1, \ldots, n$ fast sicher gilt: $0 < \pi_i(t) < 3\mu_i(t)$.
Da der Markt nichtdegeneriert ist, gibt es, wie schon in (16) erklärt, ein $\varepsilon > 0$, sodass für $i = 1, \ldots, n$ und für $t \in [0, T]$ fast sicher gilt:

$$\tau_{ii}^{\mu}(t) \geq \varepsilon\left(1 - \mu_{(1)}(t)\right)^2.$$

Verwendet man diese Ungleichung und die Eigenschaft $\frac{1}{2} < S(\mu(t)) < 1$, so erhält man für den Driftprozess $\Theta(t)$ fast sicher:

$$\begin{aligned}
\Theta(T) &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{S(\mu(t))}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t)\tau_{ii}^{\mu}(t)dt \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t)\left(1 - \mu_{(1)}(t)\right)^2 dt \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2n}\int_0^T \left(1 - \mu_{(1)}(t)\right)^2 dt,
\end{aligned}$$

denn es gilt: $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t) \geq \frac{1}{n}$.
Da der Markt divers auf einem Zeitraum $[0, T]$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ für das fast sicher gilt:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \mu_{(1)}(t)\right) dt > \delta.$$

Wendet man darauf die Schwarz'sche Ungleichung an, so erhält man die fast sichere Ungleichung:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \mu_{(1)}(t)\right)^2 dt > \delta^2.$$

Damit erhält man, dass gesamt für den Driftprozess fast sicher gilt:

$$\Theta(T) \geq \frac{\varepsilon \delta^2 T}{2n}.$$

Damit ergibt sich insgesamt, dass fast sicher gilt:

$$\log\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\pi(0)}\right) - \log\left(\frac{V^\mu(T)}{V^\mu(0)}\right) \geq \frac{\varepsilon \delta^2 T}{2n} - \log 2.$$

Man sieht also, dass das durch die Funktion $S(x)$ erzeugte Portfolio das Marktportfolio auf einem Zeitintervall $[0, T]$ dominiert, wenn für T gilt:

$$T > \frac{2n \log 2}{\varepsilon \delta^2}.$$

5.2 Spiegelportfolios

Definition 5.1 (Spiegelportfolios) *Für eine gegebene Zahl $q \neq 0$ nennt man das Portfolio $\tilde{\pi}^{[q]}$ das q-Spiegelbild eines Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Marktportfolio, wenn gilt:*

$$\tilde{\pi}^{[q]}(\cdot) := q\pi(\cdot) + (1 - q)\mu(\cdot).$$

Dieses Portfolio ist long-only, wenn das Portfolio $\pi(\cdot)$ diese Eigenschaft besitzt und wenn $0 < q < 1$.
Betrachtet man den Fall $q = -1$, so nennt man das Portfolio $\tilde{\pi}^{[-1]}$ das Spiegelbild des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Marktportfolio. Dieses hat dann die Gestalt:

$$\tilde{\pi}^{[-1]}(\cdot) := 2\mu(\cdot) - \pi(\cdot).$$

Definition 5.2 *Man bezeichnet mit $\tau_{\mu\mu}^\pi(t)$ die relative Kovarianz des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf den Markt. Diese lässt sich für $t \in [0, T]$ folgendermaßen berechnen:*

$$\tau_{\mu\mu}^\pi(t) := \left(\pi(t) - \mu(t)\right)' a(t) \left(\pi(t) - \mu(t)\right).$$

Bemerkung 5.1 *Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, gilt:* $\tau^\mu(t)\mu(t) = 0$. *Weiters gelten die folgenden Eigenschaften:*

$$\tau^\pi_{\mu\mu}(t) = \pi'(t)\tau^\mu(t)\pi(t) = \tau^\mu_{\pi\pi}(t),$$

$$\tau^\mu_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t) = q^2\tau^\mu_{\pi\pi}(t).$$

Bemerkung 5.2 *Wie schon in Kapitel 2, kann man auch für Spiegelportfolios versuchen, eine Darstellung für* $\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right)$ *zu erhalten. Analog zu der Darstellung in Kapitel 2 erhält man auch hier:*

$$d\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) = \left(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - \gamma^*_\mu(t)\right)dt + \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\pi}^{[q]}_i(t) - \mu_i(t)\right) d\log\mu_i(t).$$

Betrachtet man den Summenterm genauer, so sieht man, dass aufgrund der Definition von Spiegelportfolios gelten muss: $\tilde{\pi}^{[q]}_i(t) - \mu_i(t) = q(\pi_i(t) - \mu_i(t))$. *Das ergibt also insgesamt:*

$$d\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) = \left(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - \gamma^*_\mu(t)\right)dt + \sum_{i=1}^n q\left(\pi_i(t) - \mu_i(t)\right) d\log\mu_i(t).$$

Man erhält leicht die Darstellung:

$$\begin{aligned} d\left(\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) - q\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)\right) &= \left(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - \gamma^*_\mu(t) - q\gamma^*_\pi(t) + q\gamma^*_\mu(t)\right)dt \\ &= \left((q-1)\gamma^*_\mu(t) + \gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\gamma^*_\pi(t)\right)dt. \end{aligned}$$

Wenn man nun den Term $\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\gamma^*_\pi(t)$ *genauer betrachtet, so sieht man, dass aufgrund der Eigenschaften von Spiegelportfolios und den möglichen Darstellungen von* $\gamma^*_\pi(t)$ *aus Kapitel 2 gelten muss:*

$$\begin{aligned} 2\left(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - q\gamma^*_\pi(t)\right) &= \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\pi}^{[q]}_i(t) - q\pi_i(t)\right)\tau^\mu_{ii}(t) - \tau^\mu_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t) + q\tau^\mu_{\pi\pi}(t) \\ &= (1-q)\sum_{i=1}^n \mu_i(t)\tau^\mu_{ii}(t) + q\tau^\mu_{\pi\pi}(t) - q^2\tau^\mu_{\pi\pi}(t) \\ &= (1-q)\left(2\gamma^*_\mu(t) + q\tau^\mu_{\pi\pi}(t)\right). \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich in der obigen Gleichung:

$$d\left(\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) - q\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right)\right)$$

$$= (q-1)\gamma_\mu^*(t) + \frac{1}{2}(1-q)\left(2\gamma_\mu^*(t) + q\tau_{\pi\pi}^\mu(t)\right).$$

Daher gilt insgesamt:

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) = q\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) + \frac{q(1-q)}{2}\int_0^T \tau_{\pi\pi}^\mu(t)dt.$$

Proposition 5.1 *Angenommen es existiert ein Portfolio $\pi(\cdot)$, sodass im Vergleich zum Marktportfolio eine der folgenden Aussagen für ein $T > 0$ und für $0 < \beta < 1$ zutrifft:*

$$\mathbb{P}\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)} \geq \beta\right) = 1$$

oder

$$\mathbb{P}\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)} \leq \frac{1}{\beta}\right) = 1.$$

Weiters soll für ein $\eta > 0$ gelten:

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \tau_{\pi\pi}^\mu(t)dt \geq \eta\right) = 1.$$

Dann existiert ein Portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$, sodass das Marktportfolio eine Arbitragemöglichkeit relativ zu $\hat{\pi}(\cdot)$ darstellt, denn es gilt:

$$\mathbb{P}\left(V^{\hat{\pi}}(T) < V^\mu(T)\right) = 1.$$

Beweis:
Angenommen es gelte $\mathbb{P}\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)} \leq \frac{1}{\beta}\right) = 1$. Dann ist es einfach dieses Portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$ zu konstruieren, wenn man das q-Spiegelbild des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Marktportfolio betrachtet, also $\hat{\pi}(\cdot) = \tilde{\pi}^{[q]}(\cdot)$, wobei für die Zahl q gelten muss:

$$q > 1 + \frac{2}{\eta}\log\left(\frac{1}{\beta}\right),$$

denn dann ergibt sich mit Hilfe der vorherigen Bemerkung die fast sichere Ungleichung:

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^\mu(t)}\right) \leq q\left(\log\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1-q}{2}\eta\right) < 0.$$

Analog dazu geht man im Falle von $\mathbb{P}\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)} \geq \beta\right) = 1$ vor. Dann kann man auch wieder das q-Spiegelbild des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Marktportfolio betrachten, wobei in diesem Fall die Zahl q folgenderweise zu wählen ist:

$$q \in \left(0, 1 - \frac{2}{\eta} \log\left(\frac{1}{\beta}\right)\right).$$

Dann ergibt sich die Ungleichung:

$$\log\left(\frac{V^{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) \leq q\left(-\log\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1-q}{2}\eta\right) < 0.$$

∎

Ein Spezialfall eines solchen Spiegelportfolios ist das sogenannte „Seed - Portfolio". Dabei betrachtet man für das Portfolio $\pi(\cdot)$ lediglich ein Portfolio, das nur in den ersten Stock investiert, das heißt $\pi = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)'$. Betrachtet man nun wieder das q-Spiegelbild von $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Marktportfolio $\mu(\cdot)$, diesmal für ein $q > 1$, so sieht dies für $0 \leq t < \infty$ folgendermaßen aus:

$$\hat{\pi}(t) := \tilde{\pi}^{[q]}(t) = qe_1 + (1-q)\mu(t).$$

Dieses Portfolio hat eine Long-Position im ersten Stock und eine Short-Position im gesamten Markt. Für dieses Portfolio gilt:

$$\log\left(\frac{V^{\hat{\pi}}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = q\log\left(\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)}\right) + \frac{q(1-q)}{2}\int_0^T \tau_{11}^{\mu}(t)dt.$$

Analog zu den vorherigen Überlegungen erkennt man, dass das Marktportfolio eine starke Arbitragemöglichkeit in Bezug auf das Portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$ darstellt, wenn man für ein gegebenes $T > 0$ die Zahl q folgendermaßen auswählt:

$$q > q(T) := 1 + \frac{2}{\varepsilon\delta^2 T}\log\left(\frac{1}{\mu_1(0)}\right). \tag{23}$$

Für das „Seed-Portfolio" gilt fast sicher für $0 \leq t < \infty$:

$$V^{\hat{\pi}}(t) \leq \left(\frac{\mu_1(t)}{\mu_1(0)}\right)^q V^{\mu}(t). \tag{24}$$

5.3 Arbitrage über kurze Zeiträume

Nachdem nun im vorherigen Unterkapitel gezeigt wurde, das es möglich ist, relative Arbitragemöglichkeiten über längere Zeiträume zu finden, stellt sich die Frage, ob dies auch über kurze Zeitintervalle möglich ist. Im Folgenden wird ein Beispiel für ein Portfolio vorgeführt, das eine bessere Performance als der Markt hat. Wie sich zeigen wird, ist bei kürzeren Zeitintervallen das notwendige Startkapital immer höher. Dabei darf man jedoch nicht den allseits bekannten Spruch „Zeit ist Geld"vergessen.

In diesem Fall geht man zuerst von einer Handelsstrategie $h(\cdot)$ aus. Diese soll zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Menge von $\frac{q}{(\mu_1(0))^q}$ Geldeinheiten in das Marktportfolio investieren. Weiters soll sie eine Short-Position im Wert einer Geldeinheit in dem eben vorgestellten „Seed-Portfolio" $\hat{\pi}(\cdot)$ eingehen, das heißt es verkaufen. Die Zahl $q > 1$ soll nach der für das „Seed-Portfolio" gültigen Regel in (23) gewählt werden. Das Anfangskapital hat den Wert $z = \frac{q}{(\mu_1(0))^q} - 1 > 0$. Betrachtet man nun den Wertprozess für diese Handelsstrategie, so gilt für ihn, aufgrund von (24) und da $q > 1 > (\mu_1(t))^q$, für $t \in [0, \infty)$:

$$V^{z,h}(t) = \frac{qV^\mu(t)}{(\mu_1(0))^q} - V^{\hat{\pi}}(t) \geq \frac{V^\mu(t)}{(\mu_1(0))^q} \left(q - (\mu_1(t))^q\right) > 0.$$

Anstelle dieses Vermögensprozesses kann man jedoch auch den Vermögensprozess $V^{z,\eta}(\cdot)$ betrachten, der zu einem Portfolio $\eta(\cdot)$ gehört. Die Gewichte dieses Portfolios summieren sich auf den Wert 1 auf und haben für $i = 1, \ldots, n$ und für $t \in [0, \infty)$ die Gestalt:

$$\eta_i(t) = \frac{1}{V^{z,h}(t)} \left(\frac{q\mu_i(t)}{(\mu_1(0))^q} V^\mu(t) - \hat{\pi}_i(t) V^{\hat{\pi}}(t) \right).$$

Für $i = 2, \ldots, n$ sind die Gewichte des Portfolios $\eta(\cdot)$ positiv, denn es gilt $\hat{\pi}_i(t) = -(q-1)\mu_i(t) < 0$. Wenn also auch $\eta_1(t) \geq 0$, dann handelt es sich bei $\eta(\cdot)$ um ein long-only Portfolio. Diese Eigenschaft ist auch erfüllt, wie man auch in [6] auf Seite 26 nachlesen kann.
Das Portfolio $\eta(\cdot)$ hat zum Zeitpunkt $t = T$ eine bessere Performance als das Marktportfolio, das mit demselben Anfangskapital startet. Dies liegt daran, dass $\eta(\cdot)$ in den Markt investiert und eine Short-Position in $\hat{\pi}(\cdot)$ eingeht, das ja eine schlechtere Performance als der Markt hat. Es gilt fast sicher aufgrund von Proposition 5.1:

$$V^{z,\eta}(T) = \frac{q}{(\mu_1(0))^q} V^\mu(T) - V^{\hat{\pi}}(T) > zV^\mu(T) = V^{z,\mu}(T).$$

Möchte man nun einen extrem kurzen Zeitraum betrachten, so kann man den Grenzwert für $T \to 0$ untersuchen. Dabei stellt man schnell fest, dass das notwendige Anfangskapital $z(T) = \frac{q(T)}{(\mu_1(0))^{q(T)}} - 1$ ziemlich schnell und ohne Grenze wächst. Man sieht also: Je kürzer das betrachtete Zeitintervall, um so größer das nötige Anfangskapital.

6 Portfolios, die vom Rang der Stocks abhängen

6.1 Rangprozesse und Lokalzeiten

In der stochastischen Portfoliotheorie ist auch die Verteilung des Kapitals auf dem Markt von Interesse. Diese soll in diesem Kapitel näher betrachtet werden.

Definition 6.1 (Verteilung des Kapitals) *Betrachtet man, so wie in Kapitel 2, die nach Rang geordneten Marktgewichte, so nennt man die Familie* $\left\{\mu_{(1)}(t), \ldots, \mu_{(n)}(t)\right\}$ *die Verteilung des Kapitals auf dem Markt zum Zeitpunkt* t.

Definition 6.2 (Rangprozesse) *Betrachtet man einen Prozess* $X_1, \ldots, X_n$, *dann ist der* k*-te Rangprozess für* $k = 1, \ldots, n$ *für* $t \in [0,T]$ *definiert durch:*

$$X_{(k)}(t) := \max_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \min \left\{X_{i_1}(t), \ldots, X_{i_k}(t)\right\}.$$

Untersucht man Portfolios, die von Funktionen von nach Rang geordneten Marktgewichten erzeugt werden, so benötigt man dazu auch Lokalzeiten. Diese sollen nun auch näher erläutert werden.

Definition 6.3 (Lokalzeit) *Die Lokalzeit (an der Stelle 0) eines stetigen Semimartingals* X *ist ein Prozess* Λ_X *für* $t \in [0,T]$. *Dieser sieht folgendermaßen aus:*

$$\Lambda_X(t) = \frac{1}{2}\left(|X(t)| - |X(0)| - \int_0^t sgn(X(s))dX(s)\right).$$

(Diese Darstellung ergibt sich aus der Tanaka-Formel.)

Die Lokalzeit gibt an, wieviel Zeit ein Prozess in einer näheren Umgebung seines Ursprungs verbringt.

6.2 Die nach Rang geordneten Marktgewichte

In Kapitel 2 wurde das Marktportfolio vorgestellt und seine Gewichte mit deren verschiedenen Darstellung wurden untersucht. Auch die nach Rang geordneten Marktgewichte lassen sich in Form von stochastischen Differentialgleichungen darstellen. Dies soll hier kurz vorgestellt werden.

Für die weitere Untersuchung der nach Rang geordneten Marktgewichten benötigt man eine Permutation $\{p_t(1), \ldots, p_t(n)\}$ der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Für diese Permutation soll für $k = 1, \ldots, n$ gelten:

$$\mu_{p_t(k)}(t) = \mu_{(k)}(t)$$

und

$$p_t(k) < p_t(k+1) \quad \textit{wenn} \quad \mu_{(k)}(t) = \mu_{(k+1)}(t).$$

Im Folgenden soll folgende Bezeichnung für $t \in [0, T]$ verwendet werden: $\tau^{\mu}_{(ij)}(t) = \tau^{\mu}_{p_t(i)p_t(j)}(t)$.

Mit Hilfe dieser Permutation kann man eine logarithmische Darstellung für die nach Rang geordneten Marktgewichte finden. Diese lautet:

$$\begin{aligned} d\left(\log \mu_{(k)}(t)\right) &= \left(\gamma_{p_t(k)}(t) - \gamma_\mu(t)\right) dt + \sum_{m=1}^{d} \left(\sigma_{p_t(k)m}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\right) dW_m(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(d\Lambda_{\log \mu_{(k)} - \log \mu_{(k+1)}}(t) - d\Lambda_{\log \mu_{(k-1)} - \log \mu_{(k)}}(t)\right) \end{aligned}$$

Dabei wird festgesetzt:

$$\Lambda_{\log \mu_{(0)} - \log \mu_{(1)}}(\cdot) = 0$$

und

$$\Lambda_{\log \mu_{(n)} - \log \mu_{(n+1)}}(\cdot) = 0.$$

Eine dazu äquivalente Darstellung ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{(k)}(t)}{\mu_{(k)}(t)} &= \left(\gamma_{p_t(k)}(t) - \gamma_\mu(t) + \frac{1}{2}\tau^{\mu}_{(kk)}(t)\right) dt + \sum_{m=1}^{d} \left(\sigma_{p_t(k)m}(t) - \sigma_{\mu m}(t)\right) dW_m(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(d\Lambda_{\log \mu_{(k)} - \log \mu_{(k+1)}}(t) - d\Lambda_{\log \mu_{(k-1)} - \log \mu_{(k)}}(t)\right) \end{aligned}$$

6.3 Durch Funktionen von nach Rang geordneten Marktgewichten erzeugte Portfolios

Nun zu Funktionen, die mit Hilfe der nach Rang geordneten Marktgewichte Portfolios erzeugen. Bevor ein Satz für diese Funktionen angeführt werden kann, müssen vorher einige Voraussetzung gefasst werden.

Definition 6.4 *Man nennt einen Prozess $X_1, \ldots, X_n$ pfadweise gegenseitig nichtdegeneriert (pathwise mutually nondegenerate), wenn gilt:*

1. *für $i \neq j$ hat die Menge $\{t : X_i(t) = X_j(t)\}$ fast sicher Lebesgue-Maß 0.*

2. *für $i < j < k$ gilt fast sicher: $\{t : X_i(t) = X_j(t) = X_k(t)\} = \emptyset$.*

Satz 6.1 *Sei M ein Modell für einen Kapitalmarkt mit n Stocks $X_1, \ldots, X_n$, die pfadweise gegenseitig nichtdegeneriert sind. p_t sei wieder eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Weiters sei S eine auf einer Umgebung U von Δ_+^n definierte Funktion. Angenommen es existiert eine positive C^2 - Funktion s auf U, sodass für $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ gilt $S(x_1, \ldots, x_n) = s(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ und sodass für $i = 1, \ldots, n$ $x_i D_i \log s(x)$ für $x \in \Delta_+^n$ beschränkt ist.*
Dann erzeugt die Funktion S ein Portfolio $\pi(\cdot)$, sodass für $k = 1, \ldots, n$ und für $t \in [0, T]$ die Gewichte fast sicher folgende Darstellung gilt:

$$\pi_{p_t(k)}(t) = \left(D_k \log s(\mu_{(\cdot)}(t)) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_{(j)}(t) D_j \log s(\mu_{(\cdot)}(t)) \right) \mu_{(k)}(t).$$

Der Driftprozess hat für $t \in [0, T]$ fast sicher die Darstellung:

$$\begin{aligned} d\Theta(t) = & - \frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} s(\mu_{(\cdot)}(t)) \mu_{(i)}(t) \mu_{(j)}(t) \tau_{(ij)}(t) dt \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\pi_{p_t(k+1)}(t) - \pi_{p_t(k)}(t) \right) d\Lambda_{\log \mu_{(k)} - \log \mu_{(k+1)}}(t) \end{aligned}$$

(Ein Beweis zu diesem Satz findet sich in [3] auf Seite 80.)

Bemerkung 6.1 *Normalerweise misst eine portfolioerzeugende Funktion die Abhängigkeit eines Portfolios von den einzelnen Stocks nach deren Namen. Betrachtet man nun Funktionen von nach Rang geordneten Marktgewichten, so messen diese die Abhängigkeit des Portfolios von der Verteilung des Kapitals im Markt.*

Beispiel 6.1 (The size effect) *Wählt man eine Zahl m mit $1 < m < n$, so kann man für diese Zahl zwei erzeugende Funktionen betrachten. Eine, die aus den größeren Stocks besteht, S_L, und eine zweite, die aus den kleineren Stocks besteht, S_S. Die Funktionen sind also:*

$$S_L(x) = x_{(1)} + \cdots + x_{(m)}$$

und

$$S_S(x) = x_{(m+1)} + \cdots + x_{(n)}.$$

Die Funktion $S_L(x)$ steht für die relative Kapitalisierung eines Index der m größten Stocks. Analog dazu repräsentiert die Funktion $S_S(x)$ die relative Kapitalisierung eines Index der $n-m$ kleinsten Stocks. Angenommen die Funktion $S_L(x)$ erzeugt ein Portfolio $\xi(\cdot)$ und die Funktion $S_S(x)$ erzeugt ein Portfolio $\eta(\cdot)$.
Für diese beiden Portfolios gilt, analog zu der Darstellung in Kapitel 4, $t \in [0,T]$:

$$d\log\left(\frac{V^{\xi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) = d\log S_L(\mu(t)) - \frac{1}{2}\xi_{(m)}(t)d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t)$$

bzw.

$$d\log\left(\frac{V^{\eta}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) = d\log S_S(\mu(t)) + \frac{1}{2}\eta_{(m+1)}(t)d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t).$$

Insgesamt folgt fast sicher für $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{V^{\eta}(t)}{V^{\xi}(t)}\right) =& d\log\left(\frac{S_S(\mu(t))}{S_L(\mu(t))}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\xi_{(m)}(t) + \eta_{(m+1)}(t)\right) d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t). \end{aligned}$$

Die obige Differentialgleichung stellt den relativen Rückgabewert von einem Index aus kleinen Stocks im Vergleich zu einem Index aus großen Stocks dar. Wie man sieht, zerlegt sie sich in zwei Summanden. Der erste Summand repräsentiert die Veränderung in der relativen Kapitalisierung der beiden Indices. Ist dieser Term im Laufe der Zeit eher konstant, dann ändert sich $\frac{S_S(\mu(t))}{S_L(\mu(t))}$ nicht viel. Der zweite Summand ist der Driftprozess und ist monoton wachsend. Daher wird der Index, der aus den kleinen Stocks besteht, den größeren relativen Rückgabewert haben.

Beispiel 6.2 (Leakage) *Wieder sei das durch die Funktion S_L erzeugte Portfolio $\xi(\cdot)$ aus dem vorherigen Beispiel gegeben. Weiters wird ein Portfolio $\pi(\cdot)$ betrachtet, das aus den Stocks besteht, die auch bei dem Portfolio $\xi(\cdot)$ gehalten werden, das von der Funktion $S_p(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$, die bereits in Kapitel 5 behandelt wurde, erzeugt wird. Im Folgenden soll die Performance des Portfolios $\pi(\cdot)$ in Bezug auf das Portfolio $\xi(\cdot)$ betrachtet werden.*
Für $1 < m < n$ und für $0 < p < 1$ wird das Portfolio $\pi(\cdot)$ durch die Funktion $S(x)$ erzeugt, für die gilt:

$$S(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_{(i)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daher haben die Gewichte des Portfolios $\pi(\cdot)$ für $t \in [0,T]$ die Darstellung:

$$\pi_{p_t(k)}(t) = \begin{cases} \frac{\mu_{(k)}^p(t)}{(S(\mu(t)))^p} & k \leq m \\ 0 & k > m. \end{cases}$$

Damit gilt insgesamt für das Vermögen in Bezug auf das Marktportfolio:

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\mu(t)}\right) = d\log S(\mu(t)) + (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt \\ -\frac{1}{2}\pi_{(m)}(t)d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t).$$

Interessant ist jedoch die Performance von $\pi(\cdot)$ in Bezug auf $\xi(\cdot)$. Wie schon im vorherigen Beispiel festgestellt wurde, gilt:

$$d\log\left(\frac{V^\xi(t)}{V^\mu(t)}\right) = d\log S_L(\mu(t)) - \frac{1}{2}\xi_{(m)}(t)d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t).$$

Damit folgt insgesamt:

$$d\log\left(\frac{V^\pi(t)}{V^\xi(t)}\right) = d\log S_p\left(\xi_{(1)}(t),\ldots,\xi_{(m)}(t)\right) + (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt \\ +\frac{1}{2}\left(\xi_{(m)}(t) - \pi_{(m)}(t)\right)d\Lambda_{\log\mu_{(m)}-\log\mu_{(m+1)}}(t),$$

denn $S_p\left(\xi_{(1)}(t),\ldots,\xi_{(m)}(t)\right) = \frac{S(\mu(t))}{S_L(\mu(t))}$. Der letzte Term der obigen Gleichung, der die Lokalzeit enthält, wird Leakage genannt und ist, da $\pi_{(m)}(t) \geq \xi_{(m)}(t)$, monoton fallend.

7 Nachwort

Stochastische Portfoliotheorie ist eine besondere Methode für das Arbeiten in der Finanzmathematik. Es ist nicht notwendig, dass ein äquivalentes Martingalmaß existiert und es ist durchaus möglich Arbitragemöglichkeiten zu finden. Dabei handelt es sich speziell um relative Arbitrage in diversen Märkten.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt haben. Meinen Freunden, die mir immer helfend zur Seite gestanden sind und meinen Eltern, für deren Unterstützung während meiner gesamten Ausbildung.

Besonders möchte ich auch allen Mitarbeitern der Forschungsgruppe für Finanz- und Versicherungsmathematik am Institut für Wirtschaftsmathematik danken. Ein spezieller Dank geht dabei an Univ. Prof. Walter Schachermayer.

Literatur

[1] BROMMUNDT, B. (2004) *Stochastic Portfolio Theory*

[2] DELBAEN, F. & SCHACHERMAYER, W. (2006) *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Finance

[3] FERNHOLZ, E.R. (2002) *Stochastic Portfolio Theory*, Springer-Verlag, New York

[4] FERNHOLZ, E.R. & KARATZAS, I. (2004) *Relative arbitrage in volatility-stabilized markets*

[5] FERNHOLZ, E.R., KARATZAS, I. & KARDARAS, C. (2007) *Diversity and relative arbitrage in equity markets*

[6] FERNHOLZ, E.R., KARATZAS, I. & KARDARAS, C. (2007) *Stochastic Portfolio Theory: an Overview*

[7] HULL, J.C. (2006) *Optionen, Futures und andere Derivate*, Pearson Studium

[8] KARATZAS, I. (2006) *A Survey of Stochastic Portfolio Theory*

[9] LAMBERTON, D. & LAPEYRE, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, CHAPMAN & HALL/CRC

[10] MARKOWITZ, H. (1952) *Portfolio Selection*, Journal of Finance 7, 77-91

[11] ØKSENDAL, B. (2000) *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag

[12] PLATEN, E. (2006) *A Benchmark Approach to Finance*, Mathematical Finance, Vol. 16, No. 1 (January 2006), 131-152

[13] PLATEN, E. & HEATH, D. (2006) *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*, Springer-Verlag

[14] PROTTER, P. (2005) *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag