

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

D I P L O M A R B E I T

# Randbedingungen für eindimensionale Blutflusssimulation

ausgeführt am Institut für  
Analysis and Scientific Computing  
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Felix Breitenecker

durch  
Xenia Descovich  
Hadikgasse 146/6  
1140 Wien

---

Datum

---

Unterschrift

# Kurzfassung

Herz-Kreislauf-Erkrankungen zählen in Europa zu den häufigsten Todesursachen, sodass auf diesem Gebiet intensiv geforscht wird. Die Analyse von Herz-Kreislauf-Systemen stützt sich stark auf numerische Simulationen, bei welchen die Simulation des Blutflusses ein wichtiger Bestandteil ist. Während die Blutflusssimulation selbst aufgrund der heutzutage zur Verfügung stehenden numerischen Methoden technisch kein großes Problem mehr darstellt, gestaltet sich die Formulierung der Randbedingungen weiterhin als schwierig.

Zur Behandlung von Randwertproblemen wird in dieser Arbeit ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten ein eindimensionales Modell zur Beschreibung des Blutflusses in Arterien hergeleitet, das aus einem System von partiellen Differentialgleichungen besteht. Für das betrachtete System, das von hyperbolischer Natur ist und in Erhaltungsform geschrieben werden kann, ermöglicht die Theorie über Systeme von Erhaltungsgesetzen die Formulierung der gesuchten Randbedingungen unter Verwendung der Riemann-Invarianten.

Das eindimensionale Arterienmodell wird weiters in ein Modell für den gesamten Arterienbaum eingebunden, welches mit einem Herzmodell gekoppelt wird. Dabei werden verschiedene Randbedingungen betrachtet, je nachdem, ob die Wechselwirkung zwischen dem Herzen und dem arteriellen Kreislauf berücksichtigt oder vernachlässigt wird. Für das gekoppelte Modell werden dann die numerischen Randbedingungen mit Hilfe der Riemann-Invarianten formuliert. Schließlich wird darauf eingegangen, für welche Anwendungen die verschiedenen Randwertmodelle geeignet sind, und auf das Problem der Identifizierung der Randbedingungen hingewiesen.

# Abstract

Cardiovascular diseases are widespread in industrialised countries making research in that domain particularly important. The investigation of the human cardiovascular system can be supported by numerical simulations, among which the simulation of blood flow is an important part. Due to the numerical methods used nowadays, the simulation of blood flow itself can be realised without problems. On the contrary, the formulation of the boundary conditions is still a difficult task.

Based on the Navier-Stokes equations for incompressible fluids, a one dimensional model for the description of blood flow in arteries is elaborated. This model consists of a system of partial differential equations which is hyperbolic and in conservative form. The necessary boundary conditions for this system can be expressed in terms of Riemann invariants.

The one dimensional arterial model is used for modeling the entire arterial tree which is then coupled with a model for the heart. Different boundary conditions are considered depending on whether the interaction between the heart and the arterial network is taken into account or not. For the coupled model the numerical boundary conditions are formulated in terms of the Riemann invariants. Finally, the applicability of the different sets of boundary conditions is investigated and the problem of identifying the boundary values is pointed out.

# Danksagung

Mein Dank gilt Professor Felix Breitenecker für die Betreuung dieser Arbeit sowie für sein stetes Bemühen um eine freundliche und angenehme Arbeitsumgebung am Institut.

Die Idee für das Thema sowie viele hilfreiche Anmerkungen verdanke ich Siegfried Wassertheurer von den Austrian Research Centers. Besonders bedanken möchte ich mich bei seinem Kollegen Johannes Kropf für das genaue Durchlesen der Diplomarbeit, für seine zahlreichen Hilfestellungen sowie für das Einbringen von Verbesserungsvorschlägen und neuen Ideen.

Besondere Unterstützung erfuhr ich auch durch meinen Kollegen Bernhard Hametner. Bei ihm möchte ich mich herzlich für die hervorragende Zusammenarbeit während der letzten Jahre unseres Studiums bedanken.

Weiters geht mein Dank an meine lieben Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben, und an meine Schwester Tatjana für das sorgfältige Korrekturlesen.

Abschließend möchte ich mich noch bei meinem Freund Lukas bedanken, nicht nur für das Bearbeiten und Verbessern der Grafiken, sondern auch für seine ermutigenden Worte und die moralische Unterstützung während der letzten Monate.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Modellbildung und Simulation . . . . .	2
1.2.1	Systeme und Systemarten . . . . .	3
1.2.2	Modellbildung . . . . .	4
1.2.3	Simulation . . . . .	5
1.3	Verschiedene Blutflussmodelle . . . . .	8
1.3.1	Modellierung der Blutgefäße als unendlich langes Rohr . . . . .	8
1.3.2	Modellierung der Blutgefäße mit Hilfe der Telegraphengleichungen . . . . .	9
1.3.3	Das Windkesselmodell als Ersatzmodell . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Physiologie des Herz-Kreislauf-Systems</b>	<b>11</b>
2.1	Das Herz . . . . .	11
2.1.1	Aufbau und Funktion des Herzens . . . . .	11
2.1.2	Der Herzzyklus . . . . .	13
2.2	Das Kreislaufsystem . . . . .	16
2.2.1	Das Hochdrucksystem . . . . .	16
2.2.2	Das Niederdrucksystem . . . . .	18
2.3	Physikalische Grundlagen für den Blutfluss . . . . .	19
2.3.1	Gefäßwandmechanik . . . . .	19
2.3.2	Die Blutströmung . . . . .	20
2.3.3	Pulsation von Druck und Strömung . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Herleitung eines Blutflussmodells mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen</b>	<b>24</b>
3.1	Einleitung . . . . .	24
3.1.1	Die wichtigsten Parameter zur Beschreibung des Blutflusses . . . . .	24
3.1.2	Nomenklatur . . . . .	25
3.2	Die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung des Blutflusses . . . . .	26
3.2.1	Euler- und Lagrange-Koordinaten . . . . .	26

---

3.2.2	Die Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	28
3.2.3	Der ALE-Ansatz . . . . .	29
3.3	Herleitung des eindimensionalen Modells . . . . .	31
3.3.1	Annahmen . . . . .	31
3.3.2	Die Variablen des Modells . . . . .	33
3.3.3	Herleitung des Modells . . . . .	33
3.3.4	Beschreibung des Modells in Erhaltungsform . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Systeme von Erhaltungsgesetzen</b>	<b>44</b>
4.1	Allgemeine Form von Systemen von Erhaltungsgesetzen . . . . .	44
4.2	Nichtlineare hyperbolische Systeme in einer Raumdimension . . . . .	47
4.2.1	Charakteristiken im skalaren, eindimensionalen Fall . . . . .	48
4.2.2	Charakteristiken im nicht-skalaren, eindimensionalen Fall . . . . .	49
4.2.3	Riemann-Invariante . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Randbedingungen</b>	<b>55</b>
5.1	Berechnung der Riemann-Invarianten . . . . .	55
5.2	Randbedingungen für das eindimensionale Blutflussmodell . . . . .	59
5.2.1	Nicht-reflektierende Randbedingungen beim distalen Querschnitt	60
5.2.2	Vorgabe von Druck oder mittlerem Fluss beim proximalen Querschnitt . . . . .	61
5.2.3	Verträglichkeitsbedingungen . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Kopplung des eindimensionalen Blutflussmodells mit einem Herzmodell</b>	<b>63</b>
6.1	Das gekoppelte Modell . . . . .	63
6.1.1	Beschreibung des arteriellen Systems . . . . .	65
6.1.2	Beschreibung der distalen Randbedingungen . . . . .	68
6.1.3	Beschreibung der Herzaktivität . . . . .	72
6.2	Formulierung der numerischen Randbedingungen . . . . .	75
6.2.1	Verzweigungen . . . . .	77
6.2.2	Peripherer Blutkreislauf . . . . .	78
6.2.3	Beschreibung der Herzaktivität . . . . .	78
6.2.4	Aktivität der Aortenklappe: Umschaltung zwischen CV und OV Bedingungen . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>82</b>
7.1	Anwendungen . . . . .	82
7.2	Identifizierung der Randbedingungen . . . . .	84

**Abbildungsverzeichnis**

**85**

**Index**

**86**

**Literaturverzeichnis**

**87**

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Herz-Kreislauf-Erkrankungen wie etwa Arteriosklerose oder Herzrhythmusstörungen zählen in vielen Industrieländern zu den häufigsten Todesursachen. Die Forschung auf diesem Gebiet ist daher von großer Bedeutung. Bei der Analyse des menschlichen Herz-Kreislauf-Systems werden verstärkt numerische Simulationen eingesetzt, unter welchen die Simulation des Blutflusses einen wichtigen Teil ausmacht. Die Blutflusssimulation selbst bereitet heutzutage aufgrund der zur Verfügung stehenden numerischen Methoden technisch keine großen Probleme mehr. Die Formulierung der Randbedingungen jedoch, die für ein mathematisch korrekt gestelltes Problem und für dessen Lösung notwendig sind, erweist sich weiterhin als schwierig. Ziel dieser Arbeit ist es, die Randbedingungen für ein eindimensionales Blutflussmodell zu formulieren.

Dieses Kapitel beschäftigt sich zunächst mit Modellbildung und Simulation allgemein und stellt danach verschiedene Blutflussmodelle vor. Die für diese Arbeit relevanten physiologischen Begriffe sowie die Abläufe im menschlichen Herz-Kreislauf-System werden in Kapitel 2 erläutert.

In Kapitel 3 wird dann ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten ein eindimensionales Modell zur Beschreibung des Blutflusses in einem Arterienstück hergeleitet. Eindimensionale Modelle können oft eine gute Alternative zu komplexen multidimensionalen sein, weil sie leichter handhabbar und numerisch nicht so aufwändig sind. Der Nachteil ist, dass sie nur gemittelte Werte liefern. In vielen

Situationen reichen aber diese Informationen (mittlerer Druck oder Volumenfluss etwa) aus. Eindimensionale Modelle ermöglichen zum Beispiel eine gute Beschreibung der Ausbreitung der Druckwellen in Arterien und das mit vernünftigen numerischen Aufwand.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Theorie über Systeme von Erhaltungsgesetzen und führt den Begriff der Riemann-Invarianten ein, mit welchen man die Randbedingungen beschreiben kann. Für das betrachtete eindimensionale Blutflussmodell werden dann in Kapitel 5 die Riemann-Invarianten berechnet und die Randbedingungen formuliert.

Das betrachtete eindimensionale Modell zur Beschreibung des Blutflusses in einem Arteriensegment kann als Teil eines Netzwerkmodells, das den gesamten Arterienbaum darstellt, angesehen werden. In Kapitel 6 wird dieses Netzwerkmodell mit einem Modell zur Beschreibung der Herzaktivität gekoppelt. Weiters wird ein „Standardmodell“ betrachtet, bei welchem die Aktivität des Herzens nur über eine Randbedingung am Eingang der Aorta beschrieben wird. Für die verschiedenen Randwertmodelle werden dann die numerischen Randbedingungen formuliert.

Schließlich wird in Kapitel 7 darauf eingegangen, für welche Anwendungen die verschiedenen Randwertmodelle geeignet sind, und auf das Problem der Identifizierung der Randwerte hingewiesen.

## 1.2 Modellbildung und Simulation

In diesem Abschnitt soll ein Überblick über Modellbildung und Simulation gegeben werden [29].

Modellbildung und Simulation ist in vielen Bereichen (Physik, Ökologie, Biologie, Sozialwissenschaften) ein wichtiges Hilfsmittel, um Lösungen zu vorgegebenen Problem- und Fragestellungen zu finden. Dabei wird das betrachtete reale System in ein abstraktes - meistens mathematisches - Modell übersetzt, an dem dann Experimente durchgeführt werden, um zu einer Problemlösung zu gelangen. Die wichtigsten Begriffe sollen nun genauer erläutert werden.

### 1.2.1 Systeme und Systemarten

Ein *System* ist eine Zusammenfassung von Objekten, die einen Teil der Realität bilden und miteinander in Beziehung stehen und wechselwirken, sodass sie eine von der Umwelt abgegrenzte Einheit bilden. Bei dieser Abgrenzung ist es wichtig, jene Objekte zusammenzufassen, die für die Aufgabe von Bedeutung sind, und jene Details wegzulassen, die für die Fragestellung unwesentlich sind. Die Ergebnisse, die man durch Analyse des Systems erhält, werden stark durch diese Abgrenzung beeinflusst. Wird die Grenze zwischen System und Umwelt zu weit gezogen, nimmt man also zu viele unwesentliche Details auf, so kann dies die Analyse erschweren, wenn nicht gar unmöglich machen. Trifft man hingegen zu viele Vereinfachungen, so werden wesentliche Systemeigenschaften nicht erfasst und das geforderte Ziel womöglich nicht erreicht.

Das System und seine Umgebung, die miteinander wechselwirken, werden durch Variable und Konstante charakterisiert. Hierbei unterscheidet man *exogene Variable*, die die Umgebung darstellen, und *endogene Variable*, die das Systemverhalten beschreiben. Weitere wichtige Größen sind die *Parameter*, also konstante Größen, die das betrachtete System unter jenen von gleicher Art quantitativ charakterisieren.

Man unterscheidet zwischen *statischen* (unveränderlichen) und *dynamischen* (durch - meist zeitliche - Veränderungen gekennzeichneten) Systemen. Dynamische Systeme können noch weiter in kontinuierliche, diskrete und hybride unterteilt werden. Bei *zeitkontinuierlichen* Systemen verändern sich die Systemgrößen kontinuierlich mit der Zeit, während bei diskreten die Änderung zu gewissen (diskreten) Zeitpunkten erfolgt, die entweder fest vorgegeben (*zeit-diskrete* Systeme) oder durch Zufall bestimmt sind (*ereignis-diskrete* Systeme). *Hybride* Systeme stellen eine Mischform dar und enthalten sowohl kontinuierliche als auch ereignis-diskrete Teilsysteme. Diese Teilsysteme interagieren miteinander, sodass sie in einem System zusammengefasst werden müssen.

Kontinuierliche Systeme werden oft durch Differentialgleichungen beschrieben, die im Normalfall nicht analytisch sondern nur numerisch gelöst werden können. Dazu müssen die kontinuierlichen Variablen diskretisiert werden, was zur Folge hat, dass das verwendete Computermodell (auch eines kontinuierlichen Systems) stets von diskreter Art ist. Dies trifft auch für das in Kapitel 3 hergeleitete eindimensionale Blutflussmodell zu. Es handelt sich hierbei um ein kontinuierliches Modell, das durch ein System von partiellen Differentialgleichungen beschrieben wird. Um dieses System numerisch lösen zu können, muss es jedoch diskretisiert werden.

## 1.2.2 Modellbildung

Ein *Modell* ist eine abstrakte Beschreibung oder Darstellung eines realen Systems. Es wird verwendet, um Voraussagen über das Verhalten des Systems zu machen, um Systemeigenschaften zu finden und zu analysieren oder für Entwurfsaufgaben (Entwurf eines Bauteils oder einer Regelung etwa). Benutzt man bei der Beschreibung des Systems einen mathematischen Formalismus (Gleichungen oder Graphen etwa), so spricht man von einem mathematischen Modell.

Die Modellbildung basiert auf drei Grundlagen, die gleichzeitig die Vorgehensweise bei der Modellbildung vorgeben:

- *Trennbarkeit*: Es wird nur ein Teil der Zusammenhänge berücksichtigt und das System als - von der Umgebung - abgetrennte Einheit betrachtet.
- *Auswählbarkeit*: Es wird eine Auswahl der Interaktionen zwischen System und Umgebung getroffen, die notwendig und hinreichend sind, um den Vorgang so genau zu beschreiben, dass die vorgegebenen Ziele erreicht werden.
- *Kausalität*: Es wird angenommen, dass die Beschreibungsgrößen (Eingang, Ausgang und Zustand) streng kausal (durch mathematische Beziehungen und Gleichungen etwa) zusammenhängen. Diese kausalen Zusammenhänge müssen festgelegt werden.

Die beiden Hauptmethoden der Modellbildung sind Deduktion und Induktion. Erstere basiert auf der Kenntnis von (physikalischen) Gesetzen und führt zu einem *Strukturmodell*. Der Vorteil eines Strukturmodells ist, dass alle Beschreibungsgrößen (Variablen, Parameter, Ein- und Ausgänge) sowie die Funktionen und Verknüpfungen des Modells unmittelbare Entsprechungen im realen System besitzen. Durch induktive Modellbildung, die auf Beobachtungen des Systems basiert, gelangt man zu einem *Verhaltensmodell* (auch Black-Box-Modell, Eingangs-/Ausgangsmodell). Hierbei werden sinnvolle Annahmen über die Modellstruktur gemacht und die noch offenen Parameter geschätzt (etwa durch Identifikation oder Schätzverfahren). Verhaltensmodelle finden vor allem in jenen Bereichen Anwendung, in denen keine oder nur wenige Grundgesetze bekannt sind. In der Praxis treten häufig Mischformen auf.

Bei deduktiver Vorgehensweise erhält man oft komplexe Modelle, deren Aufwand zu

groß und nicht vertretbar ist, sodass hier durch Vernachlässigung kleiner Terme, Linearisieren oder Ordnungsreduktion etwa ein einfacheres Modell erhalten wird (Top-Down Methode). Bei induktiver Vorgehensweise hingegen baut man schrittweise mehr Details ein (durch Berücksichtigung von Kopplungen, Rückwirkungen etwa), um zu einem komplexeren Modell zu gelangen, das das Systemverhalten besser beschreibt (Bottom-Up Methode). Bei der Herleitung des eindimensionalen Blutflussmodells in Kapitel 3 wird die Top-Down Methode verwendet, weil verschiedenste Vereinfachungen (wie etwa die Vernachlässigung von äußeren Kräften) vorgenommen werden.

Ein wichtiges Systemmerkmal ist Linearität, die durch die globale Gültigkeit des Superpositionsprinzips gekennzeichnet ist. Dieses besagt, dass für alle Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und alle Eingänge  $u_1, u_2$  aus einem linearen Raum  $U$  mit zugehörigen Ausgängen  $v_1, v_2$  das System auf den Eingang  $\alpha u_1 + \beta u_2$  mit der Antwort  $\alpha v_1 + \beta v_2$  reagiert. In diesem Zusammenhang bezieht sich Linearität stets auf eine Klasse von Ein- und zugehörigen Ausgängen, sodass das System bezüglich anderer Größen auch nichtlineares Verhalten aufweisen kann.

Ein weiteres wichtiges Prinzip für die Modellbildung ist das *Analogieprinzip*, das oftmals als Modellgrundlage dient. Dabei verwendet man besser verstandene Ersatzsysteme, denen man analoge Wirkungs- und Funktionsweise zuschreibt. Bei der Modellierung des Herz-Kreislauf-Systems etwa werden die Arterien als hohles Rohr, in welchem verschiedene Gesetze der Strömungslehre bekannt sind, aufgefasst. Ein weiteres Beispiel ist die Verwendung eines elektrischen Ersatzmodells, um die Windkesselfunktion der Aorta und der größeren Arterien zu beschreiben. Näheres dazu in den Kapiteln 3 und 6.

### 1.2.3 Simulation

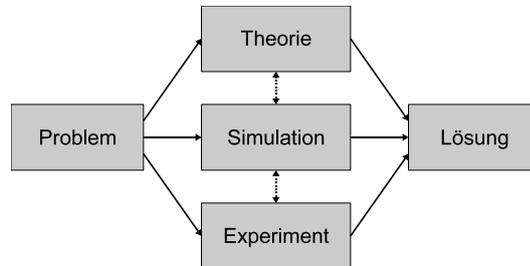
Simulation ist eine Methode, um Lösungen zu gegebenen Problemstellungen zu erhalten. Sie hat stets ein Modell als Grundlage. Die VDI-Richtlinie 3633 gibt eine gute Erklärung des Begriffes Simulation.

**Definition 1.2.1 (Simulation)** *Simulation ist ein Verfahren zur Nachbildung eines Systems mit seinen dynamischen Prozessen in einem experimentierbaren Modell, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind.*

*Im weiteren Sinne wird unter Simulation das Vorbereiten, Durchführen und Auswerten*

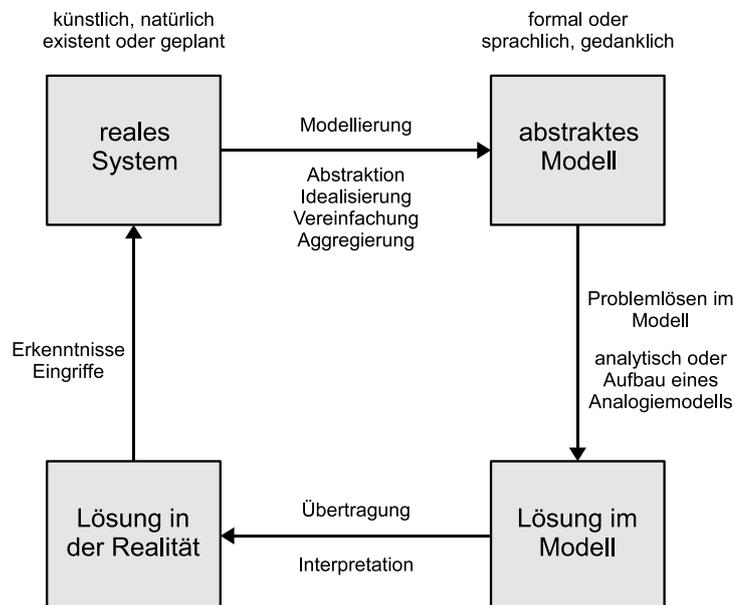
gezielter Experimente mit einem Simulationsmodell verstanden.

Mit Hilfe der Simulation kann das zeitliche Ablaufverhalten komplexer Systeme untersucht werden (Simulationsmethode).



**Abbildung 1.1:** Simulation als Problemlösungsverfahren (nach [29]).

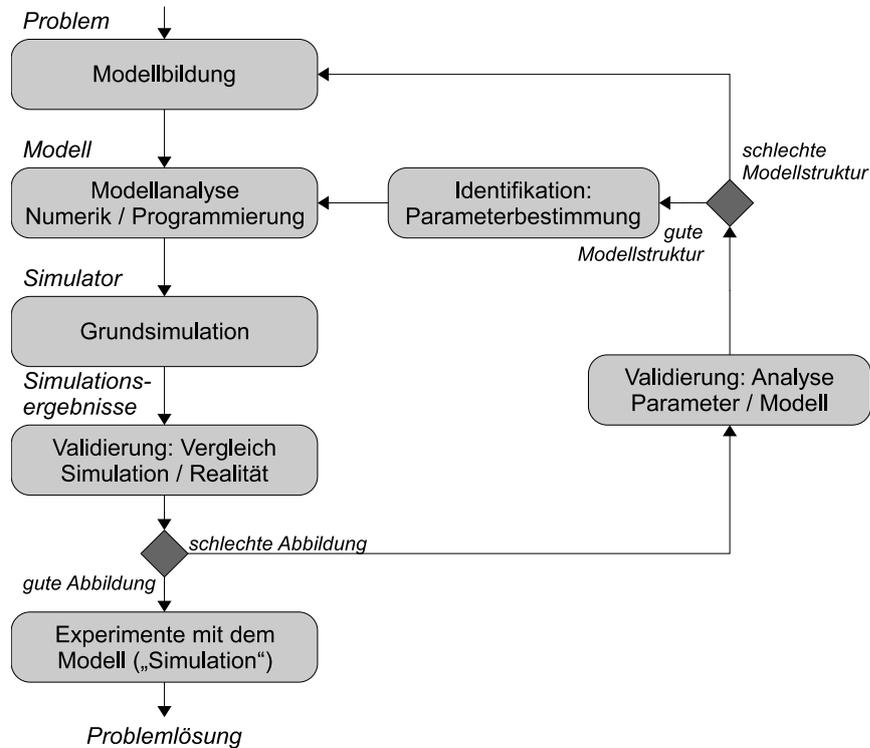
Im engeren Sinn versteht man unter Simulation das Experimentieren mit einem Modell. Sie kommt vor allem dann zur Verwendung, wenn die Theorie nicht ausreicht, Experimente am System nicht möglich sind (etwa aus ethischen Gründen, aus Gründen der Sicherheit oder um das Original nicht zu beschädigen) oder das System erst in Planung ist. Sie ist ein Verfahren zur Problemlösung, das Theorie und Experiment ergänzt (siehe Abbildung 1.1).



**Abbildung 1.2:** Simulationskreislauf (nach [29]).

Abbildung 1.2 stellt die Vorgehensweise einer Simulation grafisch dar. Das reale System wird zuerst in ein abstraktes Modell übersetzt, an dem Experimente durchgeführt wer-

den, um Lösungen für das gegebene Problem zu finden. Diese Lösungen werden dann in die Realität übertragen, was ein Verständnis des realen Systems ermöglicht.



**Abbildung 1.3:** Schritte einer Simulationsstudie (nach [29]).

Die einzelnen Schritte einer Simulationsstudie sind in Abbildung 1.3 dargestellt. Von großer Bedeutung ist zunächst eine klare Beschreibung des Problems (*Problemformulierung*). Denn nur durch eine präzise Formulierung kann ein entsprechendes Modell erstellt werden (*Modellerstellung*, von der Problemformulierung abhängig). Danach müssen das Modell analysiert und Modellgleichungen gefunden werden. Das erhaltene mathematische Modell ist meistens sehr komplex, sodass eine Implementierung (*Modellimplementierung*) auf einem Computer notwendig ist, um Experimente am Modell durchführen zu können.

Bei einer Simulationsstudie sind weiters *Modellvalidierung* und *-identifizierung* von großer Bedeutung. Bei der Validierung vergleicht man das Modell mit dem realen System, um mögliche Modellfehler zu finden und um festzustellen, ob sich das Modell für die Problemlösung eignet. Die Identifizierung dient zur Bestimmung der Modellparameter. Dabei werden die zu einer größeren Zahl von Erregungen gehörigen System- und Modellantworten miteinander verglichen und daraufhin die Parameter mit dem Ziel verändert, dass die Antworten von System und Modell bestmöglich übereinstimmen.

Erst wenn das Modell validiert und die Parameter identifiziert sind, kann damit experimentiert werden (*Modellexperimente*). Zum Schluss erfolgt die *Ergebnisformulierung* und die Modellergebnisse können auf das reale System übertragen werden.

## 1.3 Verschiedene Blutflussmodelle

Dieser Abschnitt geht auf die geschichtliche Entwicklung in Bezug auf Modelle zur Beschreibung der zwischen Druck und Fluss herrschenden Beziehungen und des Strömungsverhaltens des Blutes im Arterienbaum ein. Eine formelmäßige Beschreibung der einzelnen Modelle kann in [20] beziehungsweise der im Folgenden angegebenen Literatur nachgelesen werden, hier sollen nur die wichtigsten Erkenntnisse zusammengefasst sein.

Mitte des 19. Jahrhunderts studierte der französische Physiologe und Physiker Poiseuille [17] das Strömungsverhalten von viskosen Flüssigkeiten in engen Röhren. Durch physikalische Experimente gelangte er zu einer Beziehung zwischen Druckabfall  $\Delta P$  und Fluss  $Q$ , die von der Länge  $L$  des Gefäßes und der vierten Potenz des Gefäßdurchmessers  $D$  abhängt:

$$Q = -KD^4 \frac{\Delta P}{L}. \quad (1.1)$$

Die gewonnenen Erkenntnisse übertrug er dann auf die Physiologie des Blutkreislaufs. Zu den gleichen Ergebnissen kam unabhängig von Poiseuille der deutsche Ingenieur Hagen, der ebenfalls Experimente an Röhren durchführte. Die Größe  $K$  in Gleichung (1.1) wurde erst etwas später vom schweizer Physiker Hagenbach bestimmt [8]. Dieser leitete die heute als Hagen-Poiseuille-Gesetz (siehe Gleichung (2.2)) bekannte Beziehung analytisch her und zeigte somit die Gültigkeit von der nur durch Experimente erhaltenen Relation von Poiseuille. Für  $K$  erhielt er den Wert  $\frac{\pi}{128\eta}$ , wobei  $\eta$  die dynamische Viskosität der Flüssigkeit bezeichnet.

### 1.3.1 Modellierung der Blutgefäße als unendlich langes Rohr

Weber (19. Jahrhundert) und Womersley (20. Jahrhundert) betrachteten das arterielle System als ein System, das Druck- und Stropmpulse transportiert. Dazu wurde es als ein unendlich langes Rohr angenommen. Der durch die rhythmische Fördertätigkeit

des Herzens entstandene Druckpuls bewegt sich das Rohr entlang vom Herzen weg und wird nicht reflektiert. Von Interesse war hierbei die Pulswellengeschwindigkeit.

Ein erster Ansatz im 19. Jahrhundert bestand darin, Kenntnisse aus der Physik auf das unendlich lange Rohr anzuwenden, und lieferte verschiedene analytische Gleichungen für die Pulswellengeschwindigkeit.

Ein zweiter Ansatz, der Mitte des 20. Jahrhunderts zum Einsatz kam, war, von den Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Gleichungen (3.1), (3.2)) auszugehen, anstatt neue Gleichungen abzuleiten. Es handelt sich hierbei um Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die vom französischen Mathematiker und Physiker Navier und dem irischen Mathematiker und Physiker Stokes Mitte des 19. Jahrhunderts formuliert wurden. Diese nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wurden dann vereinfacht, um analytische Lösungen zu bekommen. Viele Ergebnisse erzielte hierbei Womersley [30, 31, 32, 33].

Der dritte Ansatz, der auch heute in Verwendung ist, besteht darin, die Navier-Stokes-Gleichungen numerisch zu lösen. Dies ermöglicht, die Komplexität des Systems zu erhöhen und etwa unregelmäßige Geometrien zu betrachten oder Nichtlinearitäten aufgrund der Dehnbarkeit der Gefäßwand miteinzubeziehen. Mit der Zeit hat sich das Hauptaugenmerk verschoben. Während beim ersten und zweiten Ansatz das Ziel das Auffinden des allgemeinsten analytischen Modells war, so liefert der dritte Ansatz nicht unbedingt neue Erkenntnisse in Bezug auf die Beziehung zwischen den Eigenschaften der Arterien und Druck und Fluss, sondern ist durch die Suche nach der präzisesten Simulation charakterisiert.

### **1.3.2 Modellierung der Blutgefäße mit Hilfe der Telegraphengleichungen**

Um 1950 entstand eine neue Methode, um das arterielle System unter Einbeziehung der komplexen Struktur des Kreislaufsystems zu beschreiben. Dabei dachte man sich das arterielle System als Verzweigungsbaum, der aus kurzen Gefäßsegmenten besteht. Druck- und Strompuls, die sich vom Herzen in Richtung Peripherie ausbreiten, werden zum Teil an verschiedenen Stellen des Arterienbaumes reflektiert. Zur Beschreibung bediente man sich der Theorie zur Signalübertragung und der damit verbundenen Telegraphengleichungen. Der Vorteil dabei besteht darin, dass die Reflektionen, die im

arteriellen System entstehen, berücksichtigt werden.

### 1.3.3 Das Windkesselmodell als Ersatzmodell

Beim Windkesselmodell, das immer wieder als Ersatzmodell verwendet wird, betrachtet man das arterielle System als ein System, das Blut speichert. Es beruht darauf, dass die größeren Arterien einen Teil des vom Herzen kommenden Blutes zuerst zwischenspeichern und dann kontinuierlich vorwärts treiben, um den intermittierenden Strom, der aufgrund der rhythmischen Tätigkeit des Herzens entsteht, in einen kontinuierlichen Abstrom zu verwandeln.

Am Ende des 19. Jahrhunderts versuchte der deutsche Physiologe Frank, mit Hilfe des Windkesselmodells aus dem gemessenen Druck in der Aorta das Schlagvolumen, das heißt, das Blutvolumen, das bei einem Herzschlag ausgeworfen wird, zu berechnen [6]. Er gelangte zu einer nichtlinearen Differentialgleichung, die Fluss und Druck in das System hinein miteinander verbindet.

Die wirkliche Stärke des Windkesselkonzepts wurde erst erkannt, als auf die von Frank hergeleitete nichtlineare Gleichung die Fouriertransformation angewendet wurde. Dadurch erhielt man eine Beschreibung des Windkessels im Frequenzbereich, die weiters eine äquivalente Darstellung als elektrischen Schaltkreis ermöglichte. Näheres dazu in Kapitel 6.

# Kapitel 2

## Physiologie des Herz-Kreislauf-Systems

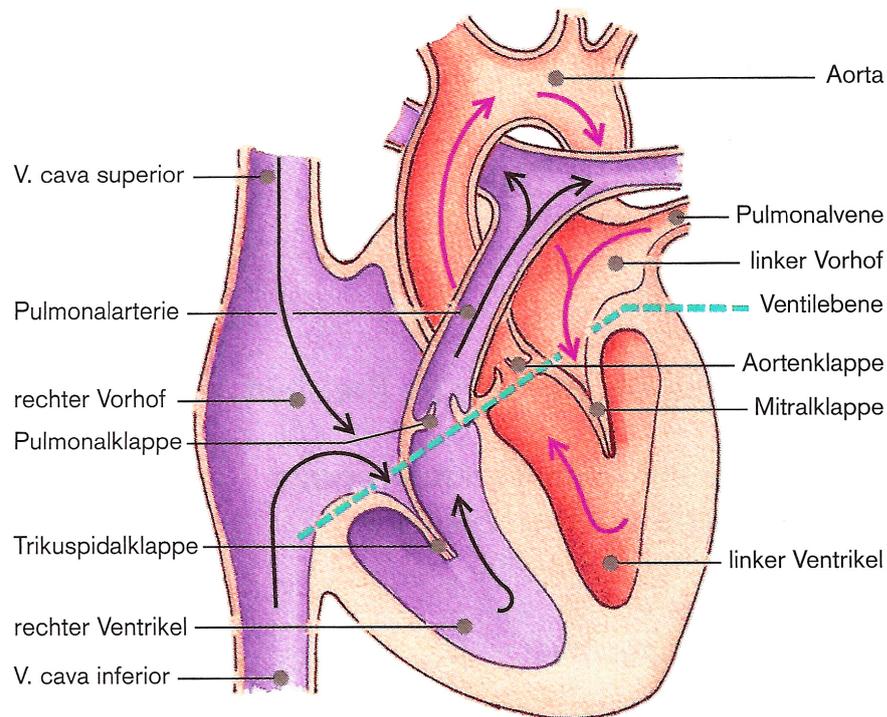
Dieses Kapitel soll die für diese Arbeit relevanten Begriffe und Vorgänge des menschlichen Herz-Kreislauf-Systems erläutern. Die hier angeführten Inhalte wurden aus mehreren Quellen [24, 23, 11] entnommen und zusammengefasst.

### 2.1 Das Herz

#### 2.1.1 Aufbau und Funktion des Herzens

Abbildung 2.1 zeigt den Aufbau des Herzens.

Das Herz-Kreislauf-System ist ein wichtiges Transportsystem, das die Aufgabe hat, die Organe mit Blut zu versorgen und den Wärmehaushalt im menschlichen Körper zu regulieren. Man unterscheidet zwischen dem großen *Körperkreislauf* und dem kleineren *Lungenkreislauf*. Den Körperkreislauf unterteilt man weiter in das *arterielle System*, das mit Sauerstoff angereichertes Blut vom linken Ventrikel zu den Organen transportiert, und das *venöse System*, das sauerstoffarmes Blut zurück zum rechten Vorhof (Atrium) befördert. Von dort gelangt das Blut über die Arteria pulmonalis (Pulmonalarterie) in den Lungenkreislauf, wo es wieder mit Sauerstoff angereichert und zum linken Vorhof transportiert wird.



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung des Herzens (aus [24]).

Das Herz besitzt im Kreislaufsystem eine wichtige Rolle. Es stellt die Energie bereit, mit der das sauerstoffarme Blut vom venösen System in die Lunge und das sauerstoffreiche Blut in den arteriellen Körperkreislauf gepumpt wird. Diese Pumpwirkung entsteht durch einen rhythmischen Wechsel von Kontraktion und Erschlaffung der Herzmuskelzellen.

Funktionell betrachtet, besteht das Herz aus zwei getrennten, hintereinandergeschalteten Pumpensystemen. Das rechte Herz, das aus dem rechten Vorhof und der rechten Herzkammer (Ventrikel) besteht, pumpt das aus der Vena cava inferior und superior kommende sauerstoffarme Blut über die Arteria pulmonalis in den Lungenkreislauf. Dies geschieht durch Kontraktion des rechten Ventrikels. Durch Kontraktion des linken Ventrikels befördert das linke Herz - bestehend aus linkem Vorhof und linker Herzkammer - über die Aorta das mit Sauerstoff angereicherte Blut in den Körperkreislauf. Die Kontraktion von rechtem und linkem Ventrikel erfolgt dabei gleichzeitig.

Die Anordnung der Herzklappen sorgt dafür, dass das Blut in nur eine Richtung fließen kann, weil durch ihre Ventilfunktion ein Rückstrom verhindert wird. Die Trikuspidal- und Mitralklappe (zwischen Vorhof und Ventrikel) übernehmen hierbei die Funktion von Einlassventilen und die Pulmonal- und Aortenklappe im Anschluss an die rechte

beziehungsweise linke Herzkammer die Rolle des Auslassventils. Alle Herzklappen sind dabei in der sogenannten Ventilebene angeordnet (siehe Abbildung 2.1). Das Öffnen und Schließen der Klappen erfolgt rein passiv durch das Blut, das entsprechend dem Druckgradienten, welcher aufgrund der Druckunterschiede im Herzen entsteht, immer von Orten hohen Drucks zu jenen niederen Drucks fließt.

### 2.1.2 Der Herzzyklus

Der Herzzyklus wird unterteilt in:

- *Systole*, in der sich das Herz kontrahiert und Blut aus dem rechten Ventrikel in die Lunge beziehungsweise aus dem linken Ventrikel in die Aorta gepumpt wird,
- *Diastole*, in der der Herzmuskel erschlafft und sich die Ventrikel wieder mit Blut füllen.

Die Dauer der Systole beträgt ungefähr 0,2-0,3 Sekunden, die der Diastole ungefähr 0,5-0,7 Sekunden. Systole und Diastole teilen sich jeweils in zwei weitere Phasen auf, sodass der Herzzyklus vier Aktionsphasen besitzt: Die Systole unterteilt man in eine *Anspannungs-* und eine *Austreibungsphase* und die Diastole in eine *Erschlaffungs-* und eine *Füllungsphase*. Im Folgenden werden diese einzelnen Phasen am linken Herzen erklärt. Für das rechte Herz gelten entsprechende Abläufe.

#### Anspannungsphase

Die Anspannungsphase, während derer sich die Kammern kontrahieren, beginnt mit dem Schluss der Atrioventrikularklappen (Mitralklappe für das linke Herz), der durch den Unterschied zwischen Ventrikeldruck und Vorhofdruck zustande kommt. Da während dieser Phase auch die Aortenklappen (Taschenklappen) geschlossen sind, steigt der Druck in den Ventrikeln an, ohne dass sich das darin enthaltene (enddiastolische) Volumen ändert. Man spricht von einer *isovolumetrischen* Kontraktion. Sobald der Druck im linken Ventrikel den Druck in der Aorta übersteigt, öffnet sich die Aortenklappe und die Austreibungsphase beginnt.

### **Austreibungsphase**

Die Austreibungsphase ist durch einen weiteren Druckanstieg in Ventrikel und Aorta charakterisiert. Dieser Druckanstieg hat physikalische Gründe und ergibt sich aus den geometrischen Veränderungen des Ventrikels während der Austreibungsphase. Durch das ausgeworfene Schlagvolumen verringert sich der Radius des Ventrikels. Gleichzeitig nimmt die Wanddicke der Herzkammer zu. Die zusätzliche Druckentwicklung lässt sich anhand des Gesetzes von Laplace erklären. Dazu nimmt man das Herz als kugelförmigen Hohlkörper mit Innenradius  $r$ , Wanddicke  $d$  und transmuralen Druck  $P_{tm}$ , der normalerweise dem Innendruck entspricht, an. Das Gesetz von Laplace stellt einen Zusammenhang zwischen der Wandspannung  $K$  (Kraft pro Querschnitt) und dem Innendruck bei Kugeln oder Zylindern her:

$$P_{tm} = K \frac{2d}{r}.$$

Nimmt also der Radius ab und die Wanddicke zu, so steigt auch der Druck.

Der Druck beim Öffnen der Aortenklappe beträgt ca. 80 mmHg (diastolischer Aortendruck) und steigt während der Austreibungsphase auf ein Maximum von ca. 120 mmHg an. Das *Schlagvolumen* (ca. 80 ml in Ruhe) wird in die Aorta gepumpt, wodurch das Volumen im Ventrikel abnimmt und ein Restvolumen von ca. 40 ml darin zurück bleibt. Sobald die Ventrikelkontraktion nachlässt und der Druck in der Herzkammer unter den Aortendruck sinkt, schließt sich die Aortenklappe wieder. Nun beginnt die erste Phase der Diastole.

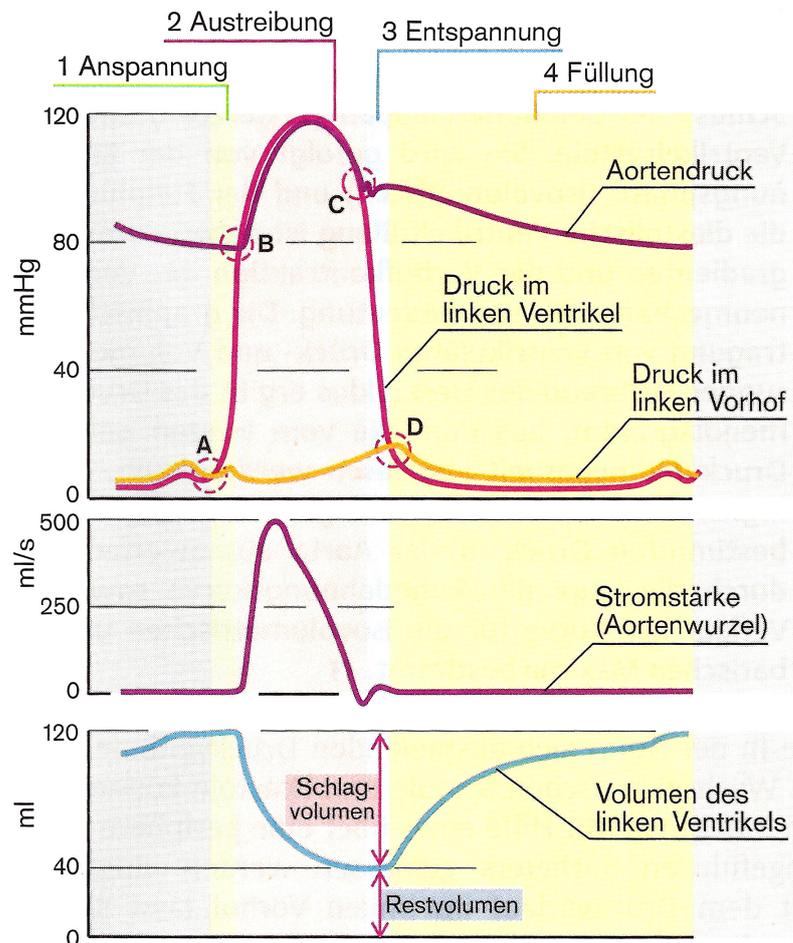
### **Entspannungsphase**

Die Entspannungsphase verläuft ebenfalls isovolumetrisch. Sie beginnt mit dem Schließen der Aortenklappe. Der Ventrikeldruck nimmt während dieser Phase stark ab und sinkt unter den Druck, der im Vorhof herrscht, sodass sich die Mitralklappe wieder öffnet. Mit dem Öffnen der Atrioventrikularklappen (Segelklappen) endet die Entspannungsphase und die zweite Phase der Diastole beginnt.

## Füllungsphase

Sobald sich die Mitralklappe öffnet, strömt passiv Blut in den linken Ventrikel. Bereits im ersten Drittel der Füllungsphase nimmt das Volumen in der Herzkammer um ca. 80% des Schlagvolumens zu, wodurch auch bei gesteigerter Herzfrequenz, die zu einer Verkürzung der Diastolendauer führt, eine ausreichende Ventrikelfüllung gesichert ist. Am Ende der Füllungsphase erfolgt die Vorhofkontraktion. Sobald die Erregung aus den Vorhöfen die Ventrikel erreicht hat, beginnt die Systole von neuem.

Abbildung 2.2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Drücke in Aorta, linkem Ventrikel und linkem Vorhof sowie die Stromstärke an der Aortenwurzel und das Volumen des linken Ventrikels während der einzelnen Aktionsphasen des Herzens.



**Abbildung 2.2:** Herzyklus: Zeitliche Korrelation von Druck, Fluss und Ventrikelvolumen in Systole und Diastole in Ruhe. Punkte A und D kennzeichnen den Schluss bzw. die Öffnung der Atrioventrikularklappen, Punkte B und C die Öffnung bzw. den Schluss der Aortenklappe (aus [24]).

## 2.2 Das Kreislaufsystem

Das Kreislaufsystem ermöglicht im Körper einen schnellen Substanztransport (Atemgase, Botenstoffe, Stoffwechselprodukte) über lange Wege. Wie bereits erwähnt, teilt es sich in den Lungenkreislauf und den (großen) Körperkreislauf, wobei diese beiden Kreisläufe hintereinander geschaltet sind. Das mit Sauerstoff gesättigte Blut wird aus dem linken Herzen in den Körperkreislauf gepumpt und fließt über die Aorta und die großen Arterien bis in die Kapillaren. In letzteren findet dann der Stoffaustausch mit den Organen statt. Von den Kapillaren gelangt das sauerstoffarme Blut über Venolen und Venen ins rechte Herz und anschließend in den Lungenkreislauf. Dort gibt es Kohlendioxid ab und wird erneut mit Sauerstoff angereichert. Insgesamt fasst das gesamte Blutgefäßsystem ein Blutvolumen von etwa 5 Litern.

Funktionell entspricht der arterielle Körperkreislauf einem Hochdruck- und der Lungenkreislauf einem Niederdrucksystem.

### 2.2.1 Das Hochdrucksystem

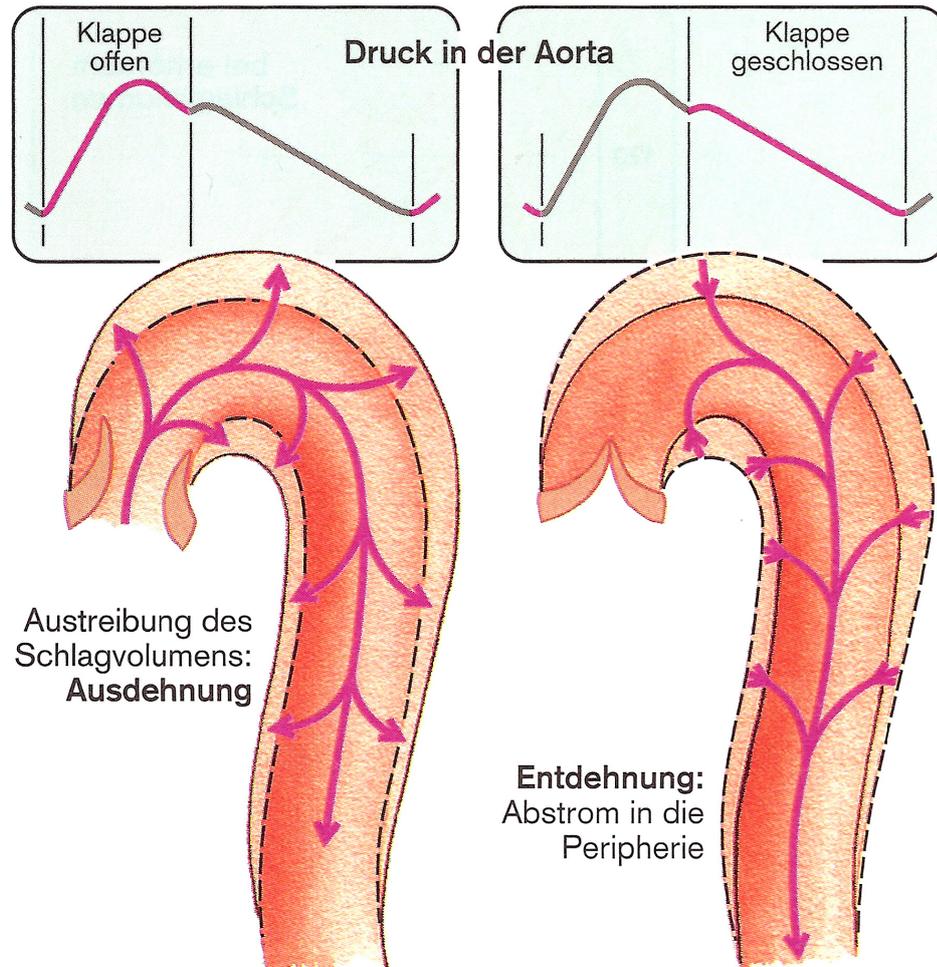
Zum Hochdrucksystem gehören

- der linke Ventrikel in der Systole,
- die großen Arterien (inklusive Aorta) und
- die kleineren Arterien und Arteriolen.

Mit ca. 100 mmHg ist der mittlere Blutdruck im Hochdrucksystem etwa 100 Mal höher als im Niederdrucksystem. Dafür sind in ersterem nur etwa 15% des gesamten Blutvolumens enthalten.

Die großen Arterien bezeichnet man als *Windkesselgefäße*. Sie weisen einen hohen Anteil an elastischen Fasern auf. Sie dienen als Windkessel und als Zuleitung für die Organe und Gewebe und werden daher auch Leitarterien genannt. Die Elastizität der Arterien ermöglicht eine Zwischenspeicherung des Blutes, sodass der pulsierende Einstrom, der durch die diskontinuierliche Förderleistung des Herzens entsteht, geglättet

und in einen kontinuierlichen Abstrom umgewandelt wird. Man spricht von der *Windkesselfunktion* der Aorta (siehe Abbildung 2.3) und der großen Arterien: Durch den systolisch hohen Druck dehnt sich die Wand dieser Gefäße während der Auswurfphase, sodass ein Teil des ausgeworfenen Volumens zwischengespeichert werden kann. Nach dem Schließen der Aortenklappe entdehnt sich die Wand wieder, sodass das Blut auch während der Diastole strömt.



**Abbildung 2.3:** Windkesselwirkung der Aorta (aus [24]).

Die Aufgabe der kleineren Arterien und Arteriolen besteht darin, den Blutdruck vor Eintritt in die Kapillaren zu reduzieren. Man bezeichnet sie als *Widerstandsgefäße*, weil sie den größten Teil des Strömungswiderstandes bestimmen. Ihr Anteil am *totalen peripheren Widerstand* (Gesamtwiderstand aller Gefäßabschnitte im Körperkreislauf) beträgt etwa 50%. Dieser hohe Anteil lässt sich durch das *Hagen-Poiseuille-Gesetz* (siehe Gleichung (2.2) in Abschnitt 2.3.2) erklären. Aus diesem folgt, dass der Strömungs-

widerstand  $R$  in einem Rohr der Länge  $L$  gemäß

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \quad (2.1)$$

umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Radius  $r$  ist. Dabei bezeichnet  $\eta$  die dynamische Viskosität der Flüssigkeit. Durch die starke Abnahme der Einzelradien der Gefäße wird der totale periphere Widerstand stärker beeinflusst als durch die Zunahme der Gesamtquerschnittsfläche.

### 2.2.2 Das Niederdrucksystem

Zum Niederdrucksystem gehören

- die Kapillaren,
- das gesamte venöse System,
- das rechte Herz,
- die Lungenstrombahn,
- der linke Vorhof sowie
- der linke Ventrikel während der Diastole.

Zum einen findet im Niederdrucksystem der Stoffaustausch statt, zum anderen dient es als Blutreservoir, weil sich ca. 85% des gesamten Blutvolumens darin befinden. Die Venen bilden also ein Speichersystem. Man spricht daher auch von *Kapazitätsgefäßen*. Diese sind noch viel elastischer als die Gefäße im Hochdrucksystem und können somit viel Blut aufnehmen, ohne dass es zu einer wesentlichen Steigerung des Druckes kommt.

Abbildung 2.4 zeigt einen schematischen Funktionsplan des Blutkreislaufs.

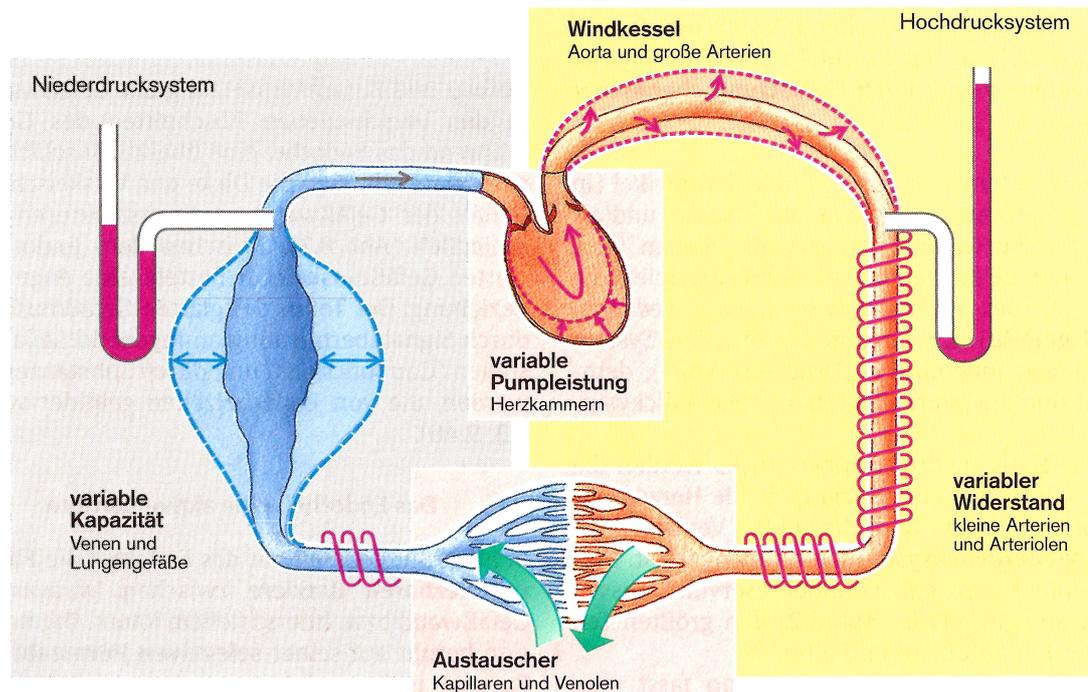


Abbildung 2.4: Schematischer Funktionsplan des Blutkreislaufs (aus [24]).

## 2.3 Physikalische Grundlagen für den Blutfluss

Die physikalischen Eigenschaften und die Form der Gefäßwand ändern sich in Abhängigkeit von der Art des Gefäßes. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Blutfluss in größeren Arterien, die vereinfacht als hohles Rohr modelliert werden. Das Blut wird als homogene Flüssigkeit angenommen (Newtonsche Flüssigkeit). Aufgrund der Elastizität der Gefäße kann sich deren Durchmesser mit der Zeit stark ändern. Die kleineren Arterien werden als eher steif angenommen und zeichnen sich durch eine starke Verzweigung aus, wodurch sie - wie bereits erwähnt - einen großen Anteil am totalen peripheren Widerstand haben und somit als Widerstand modelliert werden können (siehe Kapitel 6). Auf die noch kleineren Gefäße sowie das venöse System und den Lungenkreislauf wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen.

### 2.3.1 Gefäßwandmechanik

Der Dehnungszustand eines Gefäßes hat Einfluss auf das hindurchfließende Strömungsvolumen und wird durch den transmuralen Druck und die elastischen Eigenschaften des Gefäßes bestimmt. Der *transmurale Druck* ist die Differenz zwischen intravasalem und

extravasalem Druck ( $P_i$  bzw.  $P_e$ ):

$$P_{tm} = P_i - P_e.$$

Er hängt vor allem vom intravasalen Druck ab, weil der extravasale Druck meistens relativ konstant und so gering ist, dass er vernachlässigbar ist. Die Gefäßwand wird durch den transmuralen Druck gedehnt, wodurch eine tangentielle Wandspannung  $S_t$  erzeugt wird, die umso größer ist, je größer der Innenradius  $r$  und je kleiner die Gefäßwanddicke  $d$  ist:

$$S_t = P_{tm} \frac{r}{d}.$$

Arterielle Gefäße stehen aufgrund ihres hohen Innendrucks unter starker Dehnungsbelastung und haben daher, um der tangentialen Wandspannung standhalten zu können, eine dickere Wand als Venen.

Ein Maß für die Dehnbarkeit des Gefäßes ist die *Compliance*  $C$ , die die Volumenänderung  $\Delta V$  bei Änderung des Drucks  $\Delta P$  beschreibt:

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta P}.$$

Ihren Kehrwert bezeichnet man als *Volumenelastizitätskoeffizient*.

### 2.3.2 Die Blutströmung

Die Blutströmung ist unter physiologischen Bedingungen im Gefäßsystem weitgehend laminar. Darunter versteht man, dass sich die Blutbestandteile parallel zur Längsachse in konzentrischen Schichten fortbewegen. Es kommt also zu keinen Verwirbelungen. Die äußerste Schicht strömt dabei aufgrund der Reibung zwischen Wand und Blutbestandteilen am langsamsten.

Für die Strömung des Blutes gelten allgemeine Gesetze der Physik wie etwa das *Ohmsche Gesetz*, das einen Zusammenhang zwischen der Stromstärke (Fluss)  $Q$ , der Druckdifferenz  $\Delta P$  zwischen Anfangs- und Endpunkt des Gefäßabschnittes und dem Strömungswiderstand  $R$  herstellt:

$$Q = \frac{\Delta P}{R}.$$

Der Widerstand, der bei der Strömung zu überwinden ist, entsteht durch die innere Reibung der Flüssigkeit.  $Q$  kann auch als Produkt aus Gefäßquerschnittsfläche  $A$  und mittlerer Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  geschrieben werden:

$$Q = A\bar{u}.$$

Nach dem Kontinuitätsgesetz ist die Stromstärke  $Q$  in einem System von verbundenen Röhren in jedem Abschnitt konstant. Daraus folgt, dass eine Zunahme des Gesamtgefäßquerschnitts eine Verlangsamung der Strömungsgeschwindigkeit nach sich zieht.

Für den Widerstand gelten die *Kirchhoffschen Regeln*: Für hintereinander geschaltete Gefäße addieren sich die Einzelwiderstände zum Gesamtwiderstand (1. Kirchhoffsches Gesetz), während sich in parallel geschalteten Gefäßen der Kehrwert des Gesamtwiderstandes aus der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände ergibt (2. Kirchhoffsches Gesetz). Daraus folgt, dass der Gesamtwiderstand mit der Anzahl der hintereinander geschalteten Gefäßabschnitte zunimmt, während er bei parallel geschalteten Gefäßen stets kleiner als der Widerstand in jedem einzelnen Gefäß ist und umso kleiner wird, je mehr Gefäße parallel geschaltet sind.

Das *Hagen-Poiseuille-Gesetz* berücksichtigt die Viskosität  $\eta$  des Blutes. Es besagt, dass die Stromstärke  $Q$  durch die Beziehung

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P \quad (2.2)$$

gegeben ist, wobei  $r$  den Radius,  $L$  die Länge und  $\Delta P$  die Druckdifferenz zwischen den beiden Enden des Gefäßes bezeichnet. Setzt man beim Ohmschen Gesetz diese Beziehung für  $Q$  ein, so ergibt sich Gleichung (2.1).

Das Hagen-Poiseuille-Gesetz ist nur für laminare Strömungen in *Newtonsche Flüssigkeiten* gültig, das heißt, Flüssigkeiten, deren dynamische Viskosität  $\eta$  eine konstante Materialeigenschaft ist und nur von der Temperatur abhängt. Für diese Flüssigkeiten gilt das *Newtonsche Gesetz*:

$$\tau = \eta \gamma,$$

demzufolge eine lineare Beziehung zwischen der Schubspannung  $\tau$ , die auf die strömende Flüssigkeit einwirkt, und der daraus resultierenden Scherung  $\gamma$  besteht.

### 2.3.3 Pulsation von Druck und Strömung

Druck und Strömung zeigen im Arteriensystem charakteristische Pulsationen, deren Form und Amplitude von der Elastizität der Gefäße bestimmt wird.

#### Der Druckpuls

Durch die rhythmische Herzaktion entsteht in den dem Herzen nachgeschalteten Gefäßen eine (Druck-)Pulsquelle, die sich entlang der arteriellen Strombahn in Richtung der Kapillaren mit Pulswellengeschwindigkeit fortpflanzt. An Verzweigungen oder bei Änderung der Eigenschaften des Gefäßes (Querschnitt, Elastizität, Wanddicke) ändert sich auch der Wellenwiderstand (Wellenimpedanz), und die Pulsquelle wird reflektiert.

Die rhythmischen Schwankungen des Blutdrucks werden durch den Druckpuls charakterisiert, der entsteht, wenn in der Auswurfphase der Aortendruck von diastolischen auf systolische Werte (von 80 mmHg auf 120 mmHg) ansteigt. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Druckwelle ausbreitet, ist wesentlich höher als die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes. Neben dem Blutdruck hängt sie von der Elastizität und dem Radius der Gefäße ab. Je steifer das Gefäß ist, desto höher ist die Pulswellengeschwindigkeit. In der Aorta beträgt sie etwa 3-5 m/s, in den großen Leitarterien 5-10 m/s und in den Venen ca. 1-2 m/s.

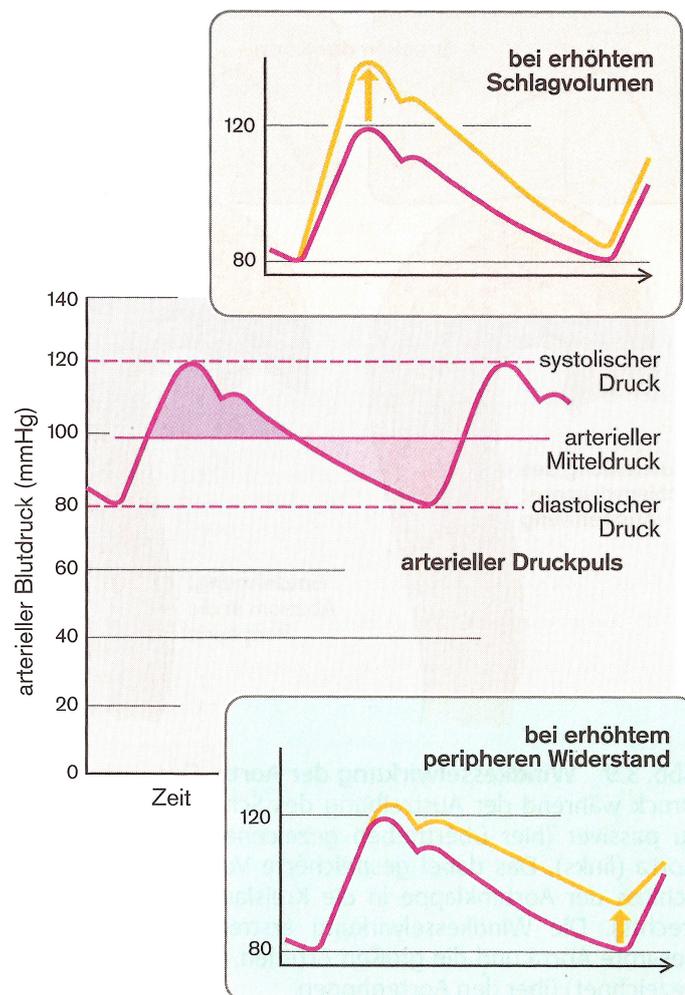
Bei Überlagerung von Wellen, die entgegengesetzt laufen (jene, die in Richtung der Peripherie laufen, und jene, die reflektiert werden), addieren sich die Drücke, während sich die Stromstärken subtrahieren, sodass der Druckpuls peripherwärts zu- und der Strompuls abnimmt.

#### Der Strompuls

Der zeitliche Verlauf der Blutströmung wird durch den Strompuls charakterisiert. Dieser entsteht als Folge des rhythmischen Auswurfs von Blut aus dem Herzen in die Aorta und wird aufgrund der Windkesselfunktion der elastischen Gefäße von proximal nach distal gedämpft. Die maximale Strömungsgeschwindigkeit beträgt etwa 120 cm/s. Peripherwärts nimmt die Strömungsgeschwindigkeit und damit auch der Strompuls ab.

## Der arterielle Blutdruck

Spricht man allgemein vom Blutdruck, so ist der arterielle Blutdruck im Körperkreislauf gemeint. Die Höhe des Blutdrucks ist vom *Herzzeitvolumen* (=Herzfrequenz mal Schlagvolumen) und vom totalen peripheren Widerstand abhängig und wird von Regulationsmechanismen gesteuert. Eine Steigerung des Schlagvolumens (und damit des Herzzeitvolumens) erhöht vor allem den *systolischen Blutdruck* (Maximalwert des Blutdruckes), während eine Erhöhung des totalen peripheren Widerstandes eine Zunahme besonders des *diastolischen Blutdrucks* (Minimalwert des Blutdruckes) nach sich zieht (siehe Abbildung 2.5). Die Differenz zwischen systolischem und diastolischem Blutdruck bezeichnet man als *Blutdruckamplitude* und den über die Zeit gemittelten Druck als *arteriellen Mitteldruck*.



**Abbildung 2.5:** Schematische Darstellung des arteriellen Druckpulses. Auswirkungen auf den arteriellen Druckpuls bei Erhöhung des Schlagvolumens (oben) bzw. des totalen peripheren Widerstandes (unten) (aus [24]).

# Kapitel 3

## Herleitung eines Blutflussmodells mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Kapitel sollen die Gleichungen für eine eindimensionale Modellierung des Blutflusses in einer Arterie hergeleitet werden. Ausgegangen wird von den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten. Die Ausführungen in diesem Kapitel beruhen auf Arbeiten von A. Quarteroni und L. Formaggia [18].

### 3.1 Einleitung

#### 3.1.1 Die wichtigsten Parameter zur Beschreibung des Blutflusses

Zur mathematischen Beschreibung des Blutflusses sind folgende Größen von Bedeutung:

- Die *Geschwindigkeit*  $\mathbf{u}$  und
- der *Druck*  $P$ .

Die Kenntnis dieser Größen ermöglicht eine Berechnung der Kräfte, denen die Arterienwand aufgrund der Fortbewegung des Blutes ausgesetzt ist. Die Gefäßwand ist stark

elastisch und dehnt sich bei Druckanstieg aus. Da in dem folgenden eindimensionalen Modell auch die Dehnbarkeit der Arterie berücksichtigt wird, ist auch die *Verschiebung der Gefäßwand* eine relevante Größe. Im Folgenden werden statt „Wandverschiebung“ auch die Begriffe „Wandausdehnung“ oder „Ausdehnung der Gefäßwand“ verwendet. Dabei ist nicht gemeint, dass sich die Dicke der Gefäßwand, sondern der Durchmesser des Gefäßes verändert. Die drei Parameter *Geschwindigkeit*, *Druck* und *Wandverschiebung* sind in den folgenden Gleichungen Funktionen der Zeit und des Ortes.

Nicht beachtet werden im folgenden Modell der Einfluss von Temperatur und chemische Interaktionen mit der Gefäßwand.

### 3.1.2 Nomenklatur

Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen, das durch die Orthonormalbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mit

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

definiert ist. Ein Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$  kann also geschrieben werden als

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{e}_i,$$

wobei  $f_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\mathbf{f}$  bezüglich der gewählten Basis bezeichnet.

Im Folgenden bezeichnet ein *Gebiet*  $\Omega$  eine beschränkte, offene und zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , mit orientierbarem Rand. Weiters wird angenommen, dass der Rand des Gebietes Lipschitz-stetig ist.

Um die Berechnungen übersichtlicher zu machen, wird für eine gegebene Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$  und ein Gebiet  $V \subset \Omega$  die abgekürzte Schreibweise

$$\int_V f$$

verwendet, um das Integral

$$\int_V f(\mathbf{x})d(\mathbf{x})$$

zu bezeichnen. Ebenso wird die Notation

$$\int_{\partial V} f$$

für das Integral über den Rand  $\partial V$

$$\int_{\partial V} f d\sigma$$

gebraucht.

## 3.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung des Blutflusses

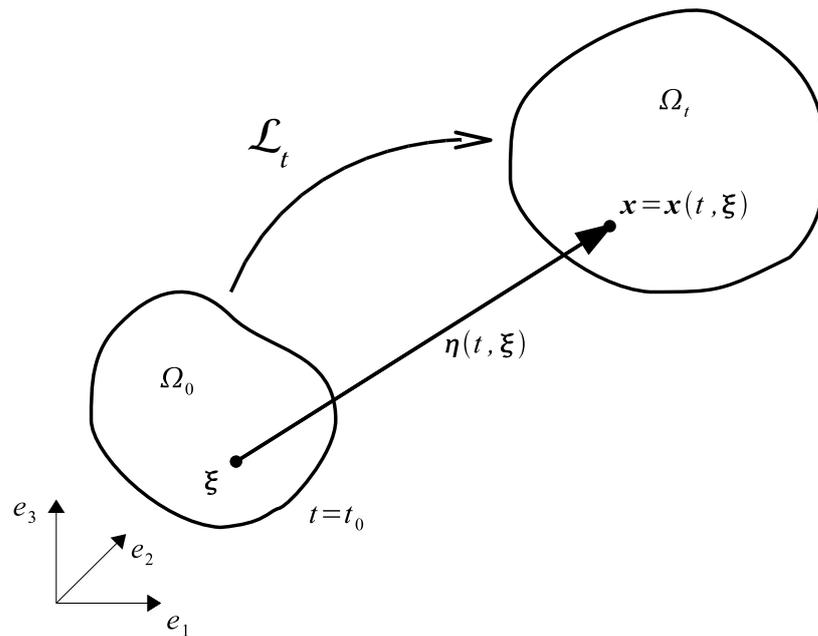
### 3.2.1 Euler- und Lagrange-Koordinaten

Für die Beschreibung der Bewegung eines Mediums, das zu jedem Zeitpunkt einen Teil des Raumes einnimmt, sind einige Begriffe der Kinematik von Bedeutung. Wichtig ist vor allem, mit Hilfe welcher Koordinaten die Bewegung dargestellt wird. Sei nun  $I = (t_0, t_1)$  das Zeitintervall, in welchem die Bewegung stattfindet, und bezeichne  $\Omega_0$  das Gebiet, das die Flüssigkeit zum Referenzzeitpunkt  $t_0 \in I$  ausfüllt. Die Bewegung eines Teilchens kann nun als Familie von Abbildungen  $\mathcal{L}_t$  aufgefasst werden, die jedem Punkt  $\xi \in \Omega_0$  die Position  $\mathbf{x}$  des Teilchens zum Zeitpunkt  $t \in I$  zuordnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ \xi &\mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi) = \mathcal{L}_t(\xi). \end{aligned}$$

Man nennt  $\mathcal{L}_t$  die *Lagrange-Abbildung* zum Zeitpunkt  $t$  (siehe Abbildung 3.1). Es wird angenommen, dass  $\mathcal{L}_t$  stetig und invertierbar in  $\overline{\Omega_0}$  ist und eine stetige Inverse besitzt.

Die Position  $\mathbf{x}$  des Teilchens im Bereich  $\Omega_t$  ist eine Funktion der Zeit  $t$  und der Position  $\xi$  desselben Teilchens im Referenzbereich  $\Omega_0$ . Es ist daher möglich, die Variablen  $(t, \xi)$  und  $(t, \mathbf{x})$  miteinander in Beziehung zu setzen. Man bezeichnet die Variablen  $(t, \mathbf{x})$  als



**Abbildung 3.1:** Lagrange-Abbildung (nach [18]).

Euler-Koordinaten und die Variablen  $(t, \boldsymbol{\xi})$  als Lagrange-Koordinaten.

Die Größen, die zur Beschreibung der Bewegung relevant sind, können nun entweder bezüglich der Euler-Koordinaten (Euler-Ansatz) oder bezüglich der Lagrange-Koordinaten (Lagrange-Ansatz) ausgedrückt werden. Werden Euler-Koordinaten als unabhängige Variablen verwendet, so konzentriert man sich auf die Position  $\mathbf{x} \in \Omega_t$  des Raumes und auf das Teilchen, das sich zu einem bestimmten Zeitpunkt bei  $\mathbf{x}$  befindet. Beim Euler-Ansatz bleibt das Koordinatensystem also fest. Beim Lagrange-Ansatz hingegen bewegt man sich mit dem Teilchen mit. Man folgt der Trajektorie

$$T_{\boldsymbol{\xi}} = \{(t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})) : t \in I\}$$

des Teilchens, das zum Referenzzeitpunkt  $t_0$  die Position  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$  gehabt hat.

Der Lagrange-Ansatz eignet sich zur Beschreibung der grundlegenden Prinzipien der Mechanik besser, weil diese in Lagrange-Koordinaten ausgedrückt eine einfachere Gestalt annehmen. In der Praxis ist es jedoch einfacher, mit Euler-Koordinaten zu arbeiten. Die folgenden Navier-Stokes-Gleichungen sind bezüglich der Euler-Koordinaten ausgedrückt.

### 3.2.2 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Blut ist nahezu inkompressibel, das heißt, eine Flüssigkeit von beinahe konstanter Dichte. Zur Beschreibung des Blutflusses eignen sich die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten. Diese setzen sich aus zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammen, die auf dem Prinzip von Erhaltung von Masse und Moment beruhen.

Sei  $\Omega$  ein fixes Gebiet, das sich zu jedem betrachteten Zeitpunkt  $t \in I$  innerhalb des mit Flüssigkeit gefüllten Teilbereiches  $\Omega_t$  des Raumes befindet, also  $\Omega \subset \Omega_t$ . Sei weiters  $\mathbf{f}$  der Vektor der äußeren Kräfte (zum Beispiel die Gravitationskraft), die auf das Fluid innerhalb von  $\Omega_t$  wirken. Des Weiteren bezeichne  $\rho$  die Blutdichte und  $\nu$  die kinematische Viskosität. Im Folgenden wird  $\nu$  als konstant angenommen. Unter dieser Voraussetzung lauten die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Trägheitskräfte}} + \underbrace{\nabla p}_{\text{Druck}} - \underbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}_{\text{viskose Kräfte}} = \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{äußere Kräfte}} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2)$$

mit Anfangsbedingung

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Die Unbekannten sind die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  und der skalierte Druck  $p = P/\rho$ . Weiters bezeichnet  $\Delta$  den Laplace-Operator.

Gleichung (3.1) wird auch *Momentengleichung* oder *Bewegungsgleichung* genannt. Sie basiert auf dem Prinzip der Erhaltung der Momente, das eine Erweiterung des Newtonschen Gesetzes „Kraft=Masse  $\times$  Beschleunigung“ darstellt. Der Term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  lässt die Trägheitskräfte und der Term  $\nu \Delta \mathbf{u}$  die innere Reibung einfließen.

Gleichung (3.2) nennt man auch *Kontinuitätsgleichung*. Sie basiert auf dem Prinzip der Massenerhaltung. Anschaulich gesehen bedeutet dies, dass während der Bewegung keine Masse verloren geht.

Um das Geschwindigkeitsfeld bis an den Rand des Gebietes berechnen zu können, werden geeignete Randbedingungen benötigt. Als klassische Randbedingungen, die mathematisch mit den Navier-Stokes-Gleichungen verträglich sind, seien hier die Neumann-Randbedingungen und die Dirichlet-Randbedingungen (Vorgabe eines Geschwindig-

keitsfeldes am Rand) erwähnt. Näheres dazu sowie eine ausführliche Herleitung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen kann in [18] gefunden werden.

### 3.2.3 Der ALE-Ansatz

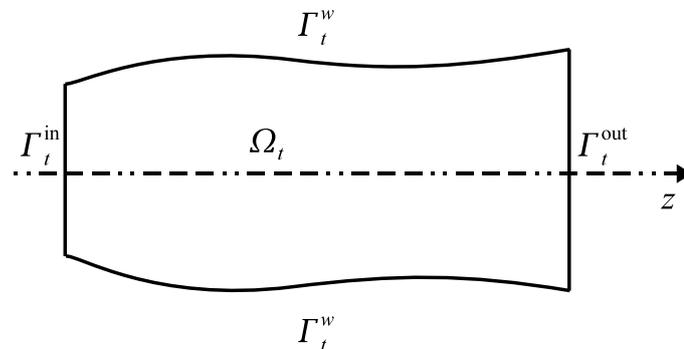
Zur numerischen Beschreibung des folgenden Blutflussmodells ist nun ein weiterer Ansatz, der *ALE-Ansatz* (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*), von Bedeutung, der eine Mischung des Euler- und des Lagrange-Ansatzes darstellt.

Das im Folgenden hergeleitete Modell berücksichtigt auch die Ausdehnung der Wand des Gefäßes. Dieser Faktor ist vor allem für den Blutfluss in größeren Arterien relevant, in denen sich der Radius der Gefäßwand aufgrund der Kräfte, die durch den Druck in den Arterien entstehen, um bis zu 10% ändern kann. Durch die Verschiebung der Wand ist der Bereich  $\Omega$  nun nicht mehr fix. Man betrachtet daher ein Gebiet  $\Omega_t$ , das sich mit der Zeit  $t$  ändert.

Der Rand  $\partial\Omega_t$  des Bereiches  $\Omega_t$  kann nun folgendermaßen aufgeteilt werden:

- $\Gamma_t^w$  bezeichnet die Wand des Blutgefäßes, die sich aufgrund des Druckes in den Arterien bewegt,
- $\Gamma_t^{\text{in}}$  und  $\Gamma_t^{\text{out}}$  stellen den fiktiven Rand am Eingang beziehungsweise Ausgang des betrachteten Bereiches dar.

Abbildung 3.2 veranschaulicht diese Aufteilung von  $\partial\Omega_t$ .



**Abbildung 3.2:** Aufteilung des Randes  $\partial\Omega_t$  (nach [18]).

$\Gamma_t^{\text{in}}$  und  $\Gamma_t^{\text{out}}$  können sich nun aufgrund der Ausdehnung der Wand  $\Gamma_t^w$  mit der Zeit ändern, wobei sie allerdings in Abbildung 3.2 flach bleiben und ihre Position entlang der Gefäßachse fix ist. Der Euler-Ansatz ist daher für diese Betrachtungsweise nicht mehr geeignet.

Beim Lagrange-Ansatz führt die Lagrange-Abbildung  $\mathcal{L}_t$ , die den Referenzbereich  $\Omega_0$  in  $\Omega_{\mathcal{L}_t} = \mathcal{L}_t(\Omega_0)$ ,  $t \in I$ , abbildet, zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Wand  $\Gamma_0^w$  von  $\Omega_0$  in die Wand  $\Gamma_{\mathcal{L}_t}^w$  über. Die Bilder von  $\Gamma_0^{\text{in}}$  und  $\Gamma_0^{\text{out}}$  von  $\Omega_0$  unter  $\mathcal{L}_t$  ( $\Gamma_{\mathcal{L}_t}^{\text{in}}$  bzw.  $\Gamma_{\mathcal{L}_t}^{\text{out}}$ ) sind jedoch nicht mehr flach, weil die Ränder der Referenzkonfiguration nun entlang der Trajektorien  $T_\xi$  betrachtet werden. Dadurch verzerrt sich der zu betrachtende Bereich (siehe Abbildung 3.3 (a)), was es schwierig macht, das Problem in einem längeren Zeitintervall zu studieren.

Es wäre daher wünschenswert, eine Möglichkeit zu finden, bei der sich die Wand des Blutgefäßes bewegt, die den Rand am Eingang und am Ausgang des betrachteten Bereiches jedoch jeweils an derselben räumlichen Position entlang der Gefäßachse belässt. Die Lösung dieses Problems liefert der ALE-Ansatz. Dabei betrachtet man die *ALE-Abbildung* (*Arbitrary Lagrangian Eulerian mapping*)

$$\mathcal{A}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}_t}, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{y}(t, \mathbf{Y}) = \mathcal{A}_t(\mathbf{Y}),$$

die die räumlichen Koordinaten  $(t, \mathbf{y})$  bezüglich der sogenannten ALE-Koordinaten  $(t, \mathbf{Y})$  darstellt und

$$\Omega_{\mathcal{A}_t} \equiv \mathcal{A}_t(\Omega_0) = \Omega_t, \quad \forall t \in I,$$

erfüllt.

Unter dieser Abbildung bleiben  $\Gamma_t^{\text{in}}$  und  $\Gamma_t^{\text{out}}$  immer an derselben Position entlang der Gefäßachse, während sich die Wand  $\Gamma_t^w$  bewegt. Abbildung 3.3 (b) veranschaulicht den ALE-Ansatz.

Die Navier-Stokes-Gleichungen (3.1), (3.2) sind auch in  $\Omega_{\mathcal{A}_t} \equiv \Omega_t$  gültig.

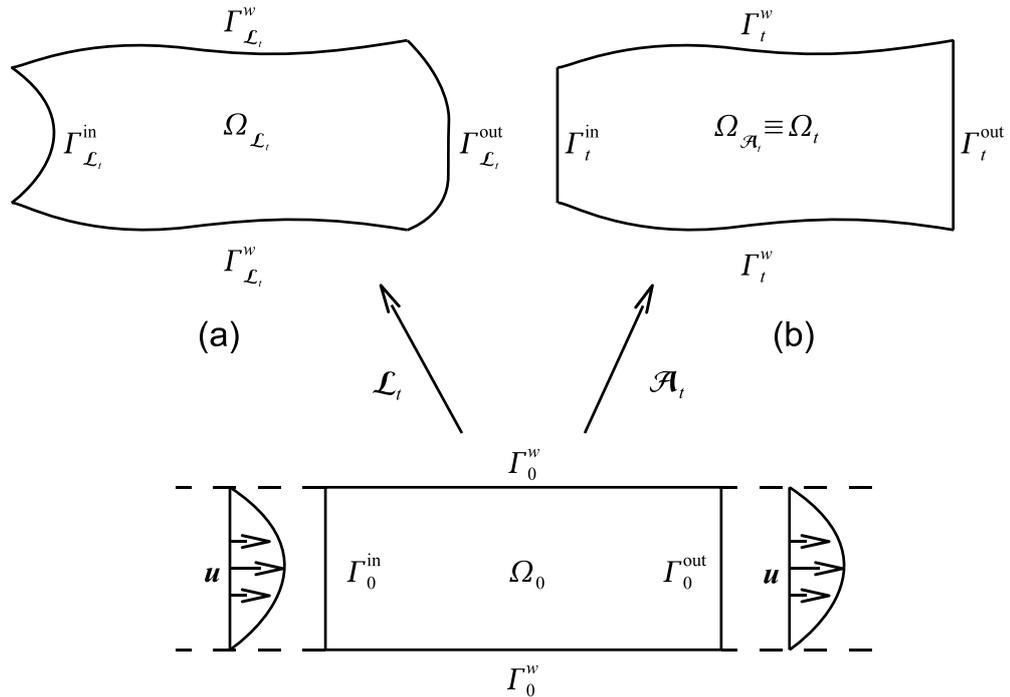


Abbildung 3.3: Vergleich zwischen Lagrange-Abbildung und ALE-Abbildung (nach [18]).

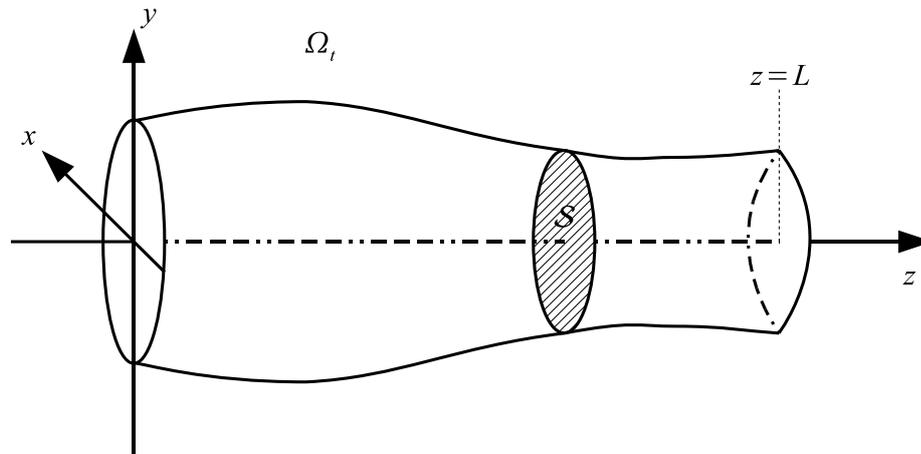
### 3.3 Herleitung des eindimensionalen Modells

In diesem Abschnitt wird nun ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen (3.1), (3.2) ein eindimensionales Modell zur Beschreibung des Blutflusses in Arterien hergeleitet.

#### 3.3.1 Annahmen

Das Modell soll den Blutfluss in den Arterien gut beschreiben, jedoch mathematisch noch gut handhabbar, das heißt, rechnerisch nicht zu aufwändig sein. Dazu werden einige Annahmen getroffen.

Betrachtet wird ein Arterienstück ohne Verzweigungen als zylindrisches, dehnbares Rohr.  $I = (t_0, t_1)$  bezeichne das betrachtete Zeitintervall und  $\Omega_t$  den Zylinder, der mit Blut gefüllt ist. Zur Beschreibung des Modells werden zylindrische Koordinaten verwendet. Mit  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_z$  werden die Einheitsvektoren und mit  $(r, \theta, z)$  das zugehörige Koordinatensystem bezeichnet. Die Länge  $L$  des Blutgefäßes wird als konstant ange-



**Abbildung 3.4:** Vereinfachte Darstellung einer Arterie als zylindrisches, dehnbare Rohr mit Querschnittsfläche  $\mathcal{S}$  (nach [3]).

nommen, sodass sich bei  $z = 0$  und  $z = L$  die beiden Enden des Zylinders befinden (siehe Abbildung 3.4).

Folgende weitere Voraussetzungen werden zur Herleitung des Modells getroffen:

- *Axiale Symmetrie:* Alle vorkommenden Größen sind unabhängig vom Winkel  $\theta$ . Daraus folgt, dass der Querschnitt ( $z = \text{konstant}$ ) immer ein Kreis ist. Der Radius  $R$  dieses Kreises ändert sich jedoch mit der Zeit  $t$  und der Position  $z$ .
- *Radiale Ausbreitung:* Die Wand verschiebt sich ausschließlich in radialer Richtung. Dies hat zur Folge, dass für jeden Punkt der Oberfläche die Verschiebung der Wand geschrieben werden kann als  $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_r$ , wobei  $\eta = R - R_0$  die Ausbreitung der Wand bezüglich des Referenzradius  $R_0$  bezeichnet.
- *Konstanter Druck:* Der Druck ist konstant auf jedem Querschnitt, sodass er nur von  $t$  und  $z$  abhängt.
- *Vernachlässigung von äußeren Kräften:* Äußere Kräfte werden vernachlässigt, sodass  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  in der Bewegungsgleichung (3.1) gilt.
- *Dominanz der axialen Geschwindigkeit:* Die Geschwindigkeitskomponenten orthogonal zur  $z$ -Achse sind vernachlässigbar im Vergleich zur Geschwindigkeitskomponente  $u_z$  in  $z$ -Richtung. Bezeichnet man mit  $\bar{u}$  die mittlere Geschwindigkeit auf jedem Querschnitt und mit  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Geschwindigkeitsprofil, so lässt

sich  $u_z$  in zylindrischen Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$u_z(t, r, z) = \bar{u}(t, z) s \left( \frac{r}{R(t, z)} \right). \quad (3.3)$$

### 3.3.2 Die Variablen des Modells

Die zu berechnenden Größen in dem eindimensionalen Modell sind die *Querschnittsfläche*  $A$ , der *mittlere Fluss*  $Q$  und der *Druck*  $P$ .

Die Querschnittsfläche  $A$  lässt sich berechnen als:

$$A(t, z) = \pi R^2(t, z) = \pi (R_0(z) + \eta(t, z))^2. \quad (3.4)$$

Für die mittlere Geschwindigkeit gilt dann

$$\bar{u} = A^{-1} \int_{\mathcal{S}} u_z d\sigma, \quad (3.5)$$

wobei  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t, z)$  eine Querschnittsfläche darstellt. Weiters wird ein Korrekturkoeffizient  $\alpha$  (Coriolis Koeffizient) benötigt, der als

$$\alpha = \frac{\int_{\mathcal{S}} u_z^2 d\sigma}{A \bar{u}^2} = \frac{\int_{\mathcal{S}} s^2 d\sigma}{A} \quad (3.6)$$

definiert ist. Es gilt  $\alpha \geq 1$ . Im Folgenden wird  $\alpha$  als konstant angenommen. Der Wert des Korrekturkoeffizienten hängt vom gewählten Geschwindigkeitsprofil ab: Für ein komplett flaches Geschwindigkeitsprofil etwa gilt  $\alpha = 1$ , während für ein parabolisches Profil  $\alpha$  den Wert  $4/3$  annimmt.

Der mittlere Fluss  $Q$  ist folgendermaßen definiert:

$$Q = \int_{\mathcal{S}} u_z d\sigma = A \bar{u}. \quad (3.7)$$

### 3.3.3 Herleitung des Modells

In diesem Abschnitt sollen Gleichungen mit den Unbekannten  $A$ ,  $Q$  und  $P$  hergeleitet werden. Ausgegangen wird von den Navier-Stokes-Gleichungen (3.1), (3.2) für inkom-

pressible Flüssigkeiten, die zur Modellierung des Blutflusses häufig verwendet werden. Berücksichtigt man nun die zuvor getroffenen Voraussetzungen, so lassen sich diese Gleichungen schreiben als:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \nu \Delta u_z = 0, \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (3.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad z \in (0, L), t \in I. \quad (3.9)$$

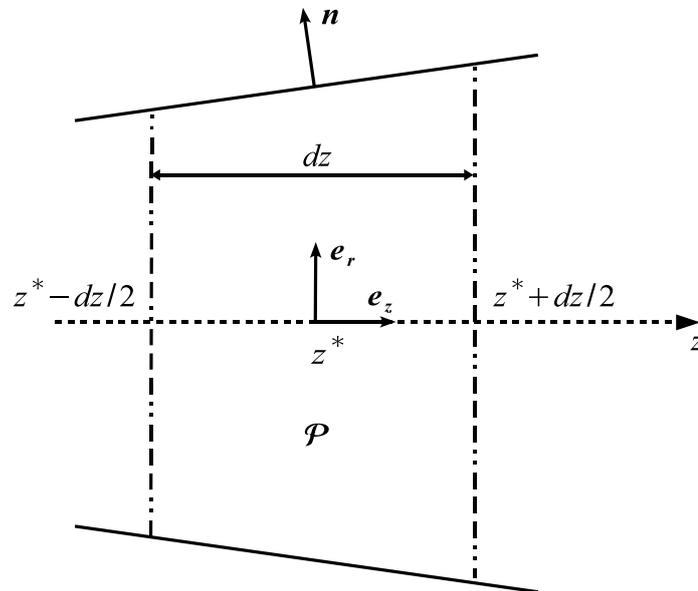
Bezeichne nun  $\Gamma_t^w$  die Wand des Rohres  $\Omega_t$ , genauer

$$\Gamma_t^w = \{(r, \theta, z) : r = R(t, z), \theta \in [0, 2\pi), z \in (0, L)\},$$

und  $\mathbf{n}$  den nach außen orientierten Normalenvektor zum Rand  $\partial\Omega_t$ . An der Rohrwand gilt:

$$\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad \text{auf } \Gamma_t^w, t \in I. \quad (3.10)$$

Für die Herleitung des reduzierten Modells betrachtet man nun ein Rohrstück  $\mathcal{P}$  von  $\Omega_t$  der Länge  $dz$  mit Mittelpunkt  $z^* \in (0, L)$  und Wand  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  (siehe Abbildung 3.5) und integriert die Gleichungen (3.8) und (3.9) über  $\mathcal{P}$ . Dabei soll  $dz > 0$  hinreichend klein sein, sodass  $z^* - dz/2 > 0$  und  $z^* + dz/2 < L$  gilt.



**Abbildung 3.5:** Längsschnitt des Rohrstückes  $\mathcal{P}$  (nach [18]).

Um die Notationen übersichtlicher zu machen, wird bei den folgenden Rechnungen die Abhängigkeit der Variablen von der Zeit weggelassen, nicht vergessend, dass alle Größen

zum Zeitpunkt  $t$  betrachtet werden. Im Folgenden wird jeder Term der Gleichungen (3.8) und (3.9) einzeln betrachtet und über  $\mathcal{P}$  integriert. Zum Schluss summiert man die Terme wieder auf und bildet den Grenzübergang  $dz \rightarrow 0$ , unter der Annahme, dass alle Funktionen hinreichend glatt sind.

Bei der Umformung der einzelnen Terme wird der folgende Satz [18, S. 74] öfters benötigt.

**Satz 3.3.1 (ALE Transport Theorem)** *Sei  $V_0 \subset \Omega_0$ , und sei  $V^{\mathcal{A}_t}$  das Bild von  $V_0$  unter der ALE-Abbildung  $\mathcal{A}_t$ . Weiters sei  $f : I \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$  nach beiden Variablen stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{\mathcal{A}_t}} f = \int_{V^{\mathcal{A}_t}} \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\partial V^{\mathcal{A}_t}} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n},$$

wobei  $\mathbf{w}$  den Geschwindigkeitsvektor des Koordinatensystems, das sich mitbewegt, bezeichnet.

Mit Hilfe dieses Theorems kann gezeigt werden [18], dass

$$\int_{\Gamma_p^w} \dot{\eta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = \int_0^{2\pi} \int_{z^*-dz/2}^{z^*+dz/2} \dot{\eta} R dz d\theta = [2\pi \dot{\eta}(z^*) R(z^*) dz + o(dz)] \quad (3.11)$$

und weiters

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 2\pi R \dot{\eta} \quad (3.12)$$

gilt. Die erste Gleichheit von Gleichung (3.11) ergibt sich aus Variablensubstitution und die zweite Gleichheit von (3.11) nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Der Fehler  $o(dz)$  entsteht dadurch, dass man statt einer Zwischenstelle den Mittelpunkt  $z^*$  wählt.

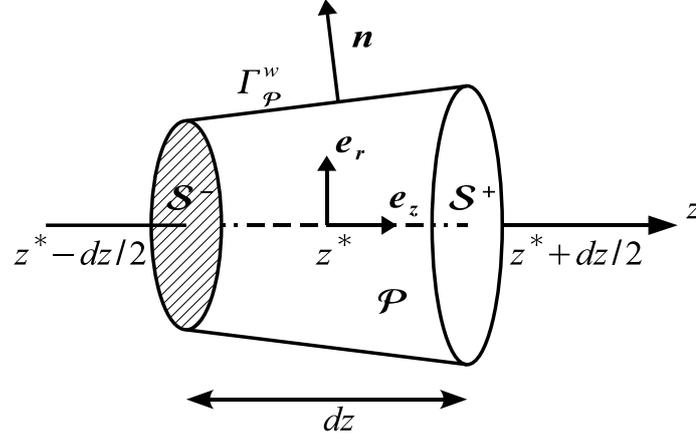
Ein weiterer wichtiger Satz, der bei den Umformungen oft verwendet wird, ist der Gaußsche Integralsatz (auch Divergenztheorem) [10].

**Satz 3.3.2 (Divergenztheorem, Gaußscher Integralsatz im Raum)** *Sei  $V$  ein  $C^1$ -Normalbereich bezüglich aller Koordinatenebenen und  $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen,  $V$  umfassenden Menge. Dann gilt:*

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} d(x, y, z) = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

wobei  $\mathbf{n}$  die äußere Normale von  $\partial V$  bezeichnet.

Bezeichne  $\mathcal{S}^-$  den Querschnitt bei  $z^* - dz/2$  und  $\mathcal{S}^+$  jenen bei  $z^* + dz/2$ .



**Abbildung 3.6:** Aufteilung des Randes  $\partial\mathcal{P}$  des Rohrstückes  $\mathcal{P}$  in den Mantel  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  und die beiden Kreisscheiben  $\mathcal{S}^-$  und  $\mathcal{S}^+$  (nach [18]).

### Kontinuitätsgleichung

Aus Gleichung (3.9) und dem Divergenztheorem folgt:

$$0 = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

Nun teilt man den Rand  $\partial\mathcal{P}$  des Rohrstückes gemäß Abbildung 3.6 in den Mantel  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  und die beiden Kreisscheiben  $\mathcal{S}^-$  und  $\mathcal{S}^+$  an den Enden und beachtet, dass der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  an diesen Enden in  $z$ -Richtung zeigt ( $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$  auf  $\mathcal{S}^-$  und  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  auf  $\mathcal{S}^+$ ) und am Mantel  $\mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\eta}}$  gilt. Daraus ergibt sich:

$$0 = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{u} = - \int_{\mathcal{S}^-} u_z + \int_{\mathcal{S}^+} u_z + \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.13)$$

Betrachtet man den dritten Term der vorigen Gleichung, so erhält man wegen  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\eta} \mathbf{e}_r$  und der Gleichungen (3.11) und (3.12):

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{n} = [2\dot{\eta}\pi R(z^*)dz + o(dz)] = \frac{\partial}{\partial t} A(z^*)dz + o(dz).$$

Weiters gilt aufgrund der Definition von  $Q$  (Gleichung (3.7)):

$$- \int_{\mathcal{S}^-} u_z + \int_{\mathcal{S}^+} u_z = -Q(z^* - dz/2) + Q(z^* + dz/2).$$

Nun setzt man die Ergebnisse in die Gleichung (3.13) ein und dividiert durch  $dz$ . Durch Grenzwertbildung ( $dz \rightarrow 0$ ) erhält man schließlich die reduzierte Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (3.14)$$

### Momentengleichung

Analog zur Vorgehensweise bei der Kontinuitätsgleichung werden die Terme der Momentengleichung (3.8) zuerst einzeln über  $\mathcal{P}$  integriert.

**Term**  $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ :

Für die Geschwindigkeit  $\mathbf{g}$  am Rand gilt:

$$\mathbf{g} = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} & \text{auf } \Gamma_{\mathcal{P}}^w \\ \mathbf{0} & \text{auf } \partial\mathcal{P} \setminus \Gamma_{\mathcal{P}}^w. \end{cases}$$

Beachtet man, dass  $\partial\mathcal{P}$  in  $\mathcal{S}^-$ ,  $\mathcal{S}^+$  und  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  aufgeteilt werden kann und dass  $u_z = 0$  auf  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  und  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  auf  $\mathcal{S}^-$  und  $\mathcal{S}^+$  gilt, so folgt aus dem ALE Transport Theorem (Satz 3.3.1):

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} u_z - \int_{\partial\mathcal{P}} u_z \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} u_z. \quad (3.15)$$

Daraus ergibt sich analog zu vorher unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und unter Berücksichtigung der Definition von  $Q$  (Gleichung (3.7)) weiters:

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A(z^*) \bar{u}(z^*) dz + o(dz)] = \frac{\partial Q}{\partial t}(z^*) dz + o(dz), \quad (3.16)$$

wobei der Fehler wieder aufgrund dessen entsteht, dass man statt einer Zwischenstelle den Mittelpunkt  $z^*$  einsetzt.

**Term**  $\text{div}(u_z \mathbf{u})$ :

Wendet man zuerst das Divergenztheorem an und teilt dann wieder  $\partial\mathcal{P}$  in  $\mathcal{S}^-$ ,  $\mathcal{S}^+$  und  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  auf, so folgt:

$$\int_{\mathcal{P}} \text{div}(u_z \mathbf{u}) = \int_{\partial\mathcal{P}} u_z \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\mathcal{S}^-} u_z^2 + \int_{\mathcal{S}^+} u_z^2 + \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} u_z \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}.$$

Da  $u_z = 0$  auf  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  gilt, fällt der letzte Term der vorigen Gleichung weg. Daher gilt

aufgrund von Gleichung (3.6) weiters:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) &= - \int_{\mathcal{S}^-} u_z^2 + \int_{\mathcal{S}^+} u_z^2 \\ &= \alpha \left[ A \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) \bar{u}^2 \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \bar{u}^2 \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Entwickelt man nun nach Taylor um den Mittelpunkt  $z^*$ , so erhält man:

$$\int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(u_z \mathbf{u}) = \frac{\partial \alpha A \bar{u}^2}{\partial z} (z^*) dz + o(dz). \quad (3.17)$$

**Term**  $\frac{\partial P}{\partial z}$ :

Für die folgende Umformung wendet man zuerst wieder das Divergenztheorem an. Danach teilt man  $\partial \mathcal{P}$  auf und berücksichtigt, dass  $n_z = -1$  auf  $\mathcal{S}^-$  und  $n_z = +1$  auf  $\mathcal{S}^+$  gilt. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial P}{\partial z} &= \int_{\partial \mathcal{P}} P n_z = - \int_{\mathcal{S}^-} P + \int_{\mathcal{S}^+} P + \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} P n_z \\ &= A \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) P \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) P \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} P n_z. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Letzteres folgt daraus, dass  $P$  auf jedem Querschnitt  $\mathcal{S}$  konstant ist. Es gilt nun

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z + \int_{\partial \mathcal{P} \setminus \Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z = \int_{\partial \mathcal{P}} n_z = 0$$

und folglich

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z = - \int_{\partial \mathcal{P} \setminus \Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z.$$

Man kann daher

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} P n_z = P(z^*) \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z + o(dz) = -P(z^*) \int_{\partial \mathcal{P} \setminus \Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_z + o(dz)$$

schreiben. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass  $\mathcal{S}^-$  und  $\mathcal{S}^+$  den Querschnitt bei  $z^* - dz/2$  beziehungsweise  $z^* + dz/2$  bezeichnet und  $n_z = -1$  auf  $\mathcal{S}^-$  und  $n_z = +1$  auf  $\mathcal{S}^+$  gilt.

Daraus ergibt sich weiters:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} P n_z &= -P(z^*) \left( \int_{\mathcal{S}^+} d\sigma - \int_{\mathcal{S}^-} d\sigma \right) + o(dz) \\ &= -P(z^*) \left( A \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \right) + o(dz). \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in Gleichung (3.18) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial P}{\partial z} &= A \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) P \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) P \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \\ &\quad - P(z^*) \left( A \left( z^* + \frac{dz}{2} \right) - A \left( z^* - \frac{dz}{2} \right) \right) + o(dz) \end{aligned}$$

Führt man zuerst eine Taylorentwicklung um den Mittelpunkt  $z^*$  durch und wendet anschließend die Kettenregel an, so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial(AP)}{\partial z}(z^*)dz - P(z^*) \frac{\partial A}{\partial z}(z^*)dz + o(dz) \\ &= A \frac{\partial P}{\partial z}(z^*)dz + o(dz) \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Term  $\Delta u_z$ :**

Unter Beachtung von  $\Delta u_z = \text{div}(\nabla u_z)$  folgt aus dem Divergenztheorem:

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z = \int_{\mathcal{P}} \text{div}(\nabla u_z) = \int_{\partial \mathcal{P}} \nabla u_z \cdot \mathbf{n}.$$

Nun teilt man  $\partial \mathcal{P}$  wieder in  $\mathcal{S}^-$ ,  $\mathcal{S}^+$  und  $\Gamma_{\mathcal{P}}^w$  auf und berücksichtigt, dass im Gradienten in  $z$ -Richtung gerade die Ableitung von  $u_z$  nach  $z$  steht:

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z = \int_{\partial \mathcal{P}} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} = - \int_{\mathcal{S}^-} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \int_{\mathcal{S}^+} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} \nabla u_z \cdot \mathbf{n}.$$

Jetzt vernachlässigt man  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ , weil angenommen wird, dass die Veränderung von  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  entlang  $z$  im Verhältnis zu den anderen Termen klein ist. Wird weiters der Normalenvektor in die radiale Komponente  $\mathbf{n}_r$  und die Komponente  $\mathbf{n}_z$  in  $z$ -Richtung aufgeteilt (aufgrund der zylindrischen Geometrie ist  $\mathbf{n}_\theta = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_r &= n_r \mathbf{e}_r \\ \mathbf{n}_z &= \mathbf{n} - \mathbf{n}_r, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z = \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} \nabla u_z \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} (\nabla u_z \cdot \mathbf{n}_z + \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r n_r) d\sigma.$$

Da  $\nabla u_z \cdot \mathbf{n}_z$  proportional zu  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  ist, wird auch dieser Term vernachlässigt. Aufgrund von Gleichung (3.3) gilt weiters:

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z = \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} n_r \nabla u_z \cdot \mathbf{e}_r d\sigma = \int_{\Gamma_{\mathcal{P}}^w} \bar{u} R^{-1} s'(1) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r.$$

Dabei bezeichnet  $s'$  die Ableitung von  $s$ . Das Argument von  $s'$  ergibt sich daraus, dass  $r = R$  am Rand gilt, und der Term  $R^{-1}$  ist die innere Ableitung, die vom Differenzieren kommt. Führt man nun die Variablensubstitution  $n_r d\sigma = 2\pi R dz$  durch, so ergibt sich

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z = 2\pi \int_{z^* - dz/2}^{z^* + dz/2} \bar{u} s'(1) dz,$$

und man erhält, wenn man das Integral durch den Integranden am Mittelpunkt  $z^*$  mal der Intervalllänge  $dz$  abschätzt, schließlich

$$\int_{\mathcal{P}} \Delta u_z \approx 2\pi \bar{u}(z^*) s'(1) dz. \quad (3.20)$$

Setzt man nun die Resultate (3.16), (3.17), (3.19) und (3.20) in Gleichung (3.8) ein und dividiert alle Terme durch  $dz$ , so erhält man durch Grenzübergang ( $dz \rightarrow 0$ ) die Momentengleichung für das eindimensionale Modell:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial(\alpha A \bar{u}^2)}{\partial z} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_r \bar{u} = 0, \quad (3.21)$$

wobei  $K_r = -2\pi\nu s'(1)$  einen Reibungsparameter definiert, der vom gewählten Geschwindigkeitsprofil abhängt.

Die Gleichungen (3.14) und (3.21) bilden nun das folgende System von zwei partiellen Differentialgleichungen mit den drei Unbekannten  $A$ ,  $Q$  und  $P$ :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_r \left( \frac{Q}{A} \right) = 0, \quad z \in (0, L), t \in I. \quad (3.23)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass  $\alpha$  als konstant angenommen wird und dass  $Q = A\bar{u}$  (Gleichung (3.7)) gilt.

Um das Differentialgleichungssystem (3.22), (3.23) lösen zu können, wird eine dritte Gleichung benötigt. Eine Möglichkeit dafür ist, den Druck  $P$  durch eine algebraische Gleichung mit der Wandverschiebung und folglich der Querschnittsfläche  $A$  zu verbinden. Dazu wird angenommen, dass der Druck  $P$  und die Querschnittsfläche  $A$  die folgende Relation, die von einem mechanischen Modell für die Auslenkung der Wand kommt, erfüllen:

$$P - P_{\text{ext}} = \psi(A; A_0, \beta) = \beta \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0}, \quad (3.24)$$

wobei  $P_{\text{ext}}$  den externen Druck bezeichnet und  $A_0 = \pi R_0^2$  die Querschnittsfläche zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Der Einfachheit halber wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass  $P_{\text{ext}} = 0$  gilt. Der Parameter  $\beta$  hängt von physikalischen und mechanischen Eigenschaften ab und wird hier als

$$\beta = Eh_0\sqrt{\pi}$$

gesetzt, wobei  $E$  der Young-Modulus ist und  $h_0$  die Dicke des Blutgefäßes (Referenzkonfiguration  $\Omega_0$ ) bezeichnet.

Die Funktion  $\psi$  ist für alle  $A > 0$  und  $A_0 > 0$  definiert und in allen Argumenten stetig differenzierbar. Weiters erfüllt sie

$$\frac{\partial \psi}{\partial A} > 0 \quad \text{und} \quad \psi(A_0; A_0, \beta) = 0. \quad (3.25)$$

Mit Hilfe der Funktion  $\psi$  ist es nun möglich, die Variable  $P$  aus der Momentengleichung (3.23) zu eliminieren. Bezeichne  $c_1 = c_1(A; A_0, \beta)$  die folgende Größe

$$c_1 = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial A}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}} A^{\frac{1}{4}}, \quad (3.26)$$

und setze

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}.$$

Die Größe  $c_1$  repräsentiert die Geschwindigkeit der Pulswellen im Verhältnis zum Blutfluss. Anhand der Definition von  $c_1$  lässt sich eine Erhöhung der Pulswellengeschwindigkeit erkennen, sobald der Term  $\beta/A_0$  wächst. Letzteres geschieht entweder aufgrund

einer Versteifung der Arterien, was eine Erhöhung des Young-Modulus zu Folge hat, oder aufgrund der Verengung der Arterien, was eine Verminderung des Querschnittes  $A_0$  nach sich zieht.

Durch einfache Rechnungen kann überprüft werden, dass das System (3.22), (3.23) in der folgenden quasilinearen Form geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \mathbf{H}(U)\frac{\partial U}{\partial z} = B(U), \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (3.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(U) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1^2 - \alpha \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\alpha\frac{Q}{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta}{2\rho A_0}A^{\frac{1}{2}} - \alpha \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\alpha\frac{Q}{A} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

und

$$\begin{aligned} B(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -K_r\frac{Q}{A} - \frac{A}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial A_0}\frac{dA_0}{dz} - \frac{A}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -K_r\frac{Q}{A} + \frac{A}{\rho}\frac{\beta}{A_0^2}\left(\frac{2}{3}A^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{dA_0}{dz} - \frac{A}{A_0\rho}\left(\frac{2}{3}A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d\beta}{dz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Werden  $A_0$  und  $\beta$  als konstant angenommen, so vereinfacht sich der letzte Ausdruck zu

$$B(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_r\frac{Q}{A} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Diskretisiert man System (3.27) mit einem Taylor-Galerkin-Verfahren zweiter Ordnung [3, 5, 21], so kann es - nach Wahl geeigneter Randbedingungen - zum Beispiel mittels Finiter Elemente Methode gelöst werden. Die Formulierung dieser Randbedingungen ist Ziel von Kapitel 5.

### 3.3.4 Beschreibung des Modells in Erhaltungsform

System (3.27) kann nun in Erhaltungsform geschrieben werden:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[F(U)] = S(U) \quad (3.30)$$

mit

$$F(U) = \begin{bmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\rho A_0} A^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

und

$$S(U) = B(U) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial A_0} \frac{dA_0}{dz} + \frac{\partial C_1}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dz} \end{bmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet  $C_1$  eine Stammfunktion von  $c_1^2$  bezüglich  $A$ .

Das System (3.30) beschreibt die Erhaltung der Größen  $A$  und  $Q$ . Werden  $A_0$  und  $\beta$  als konstant angenommen, so vereinfacht sich der Quellterm zu  $S = B$ .

# Kapitel 4

## Systeme von Erhaltungsgesetzen

In Kapitel 3 wurde ein eindimensionales Modell zur Beschreibung des Blutflusses in einer Arterie hergeleitet, das aus einem System von zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen mit zwei Unbekannten besteht. Um dieses System vollständig lösen zu können, werden an den beiden Enden des betrachteten Arterienstückes Randbedingungen benötigt. In diesem Kapitel wird auf die Theorie hyperbolischer Systeme von Erhaltungsgesetzen eingegangen und der Begriff der charakteristischen Variablen und der Riemann-Invarianten eingeführt, die zur Formulierung der Randbedingungen dienen. In diesem Kapitel sind einige der in [7] angeführten Resultate über hyperbolische Systeme von Erhaltungsgesetzen zusammengefasst.

### 4.1 Allgemeine Form von Systemen von Erhaltungsgesetzen

Dieser Abschnitt behandelt Systeme von Erhaltungsgesetzen in mehreren Raumkoordinaten. Betrachtet wird eine Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^p$ , und  $\mathbf{f}_j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , seien glatte Funktionen von  $\Omega$  in den  $\mathbb{R}^p$ . Die allgemeine Form eines Systems von Erhaltungsgesetzen in mehreren räumlichen Veränderlichen lässt sich schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

wobei  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T$  eine vektorwertige Funktion von  $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$  in  $\Omega$  ist und  $\mathbf{f}_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})^T$ . Man sagt, System (4.1) befindet sich in *Erhaltungsform*. Es beschreibt die Erhaltung der  $p$  Größen  $u_1, \dots, u_p$ .

Im Folgenden werden hyperbolische Systeme von Erhaltungsgesetzen näher betrachtet.

**Definition 4.1.1 (hyperbolisch, strikt hyperbolisch)** *Das System (4.1) heißt hyperbolisch, wenn für beliebige  $\mathbf{u} \in \Omega$  und beliebige  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ , die Matrix*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^d \omega_j \mathbf{A}_j(\mathbf{u})$$

*$p$  reelle Eigenwerte  $\lambda_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$  und  $p$  linear unabhängige zugehörige Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \dots, \mathbf{r}_p(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$  besitzt, das heißt, wenn gilt:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) = \lambda_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}), \quad 1 \leq k \leq p.$$

*Dabei bezeichnet für alle  $j = 1, \dots, d$*

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial f_{ij}}{\partial u_k}(\mathbf{u}) \right)_{1 \leq i, k \leq p}$$

*die Jacobimatrix von  $\mathbf{f}_j(\mathbf{u})$ .*

*Sind die Eigenwerte  $\lambda_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$ ,  $k = 1, \dots, p$ , zusätzlich paarweise verschieden, so nennt man das System (4.1) strikt hyperbolisch.*

Das Studium von Systemen in mehr als einer räumlichen Variablen ist sehr schwierig, es sei denn, es handelt sich um ein symmetrisierbares System.

**Definition 4.1.2 (symmetrisierbar)** *Das System (4.1) heißt symmetrisierbar, wenn für alle  $\mathbf{u} \in \Omega$  eine positiv definite symmetrische Matrix  $\mathbf{A}_0(\mathbf{u})$  existiert, sodass die Matrizen*

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{u}) \mathbf{A}_j(\mathbf{u}), \quad 1 \leq j \leq d,$$

*symmetrisch sind.*

**Lemma 4.1.1** *Symmetrisierbare Systeme von Erhaltungsgesetzen sind hyperbolisch.*

**Beweis:** Der Einfachheit halber wird der Beweis für den Fall  $d = 1$  (eine Raumdimension) geführt; im allgemeineren Fall verläuft er ähnlich. Sei also  $d = 1$  und  $\mathbf{A}_1 =: \mathbf{A}$ . Ist das System (4.1) symmetrisierbar, so existiert nach Definition 4.1.2 für alle  $\mathbf{u} \in \Omega$  eine positiv definite symmetrische Matrix  $\mathbf{A}_0(\mathbf{u})$ , sodass die Matrix  $\mathbf{A}_0(\mathbf{u}) \mathbf{A}(\mathbf{u})$  symmetrisch ist, das heißt, es gilt:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{A} = (\mathbf{A}_0 \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_0^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_0. \quad (4.2)$$

Nun ist  $\mathbf{A}_0$  symmetrisch und positiv definit. Damit ist auch die Inverse  $\mathbf{A}_0^{-1}$  von  $\mathbf{A}_0$  symmetrisch und positiv definit. Daraus folgt, dass  $\mathbf{A}_0^{-1}$  eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel  $\Sigma$  besitzt, sodass

$$\Sigma^2 = \mathbf{A}_0^{-1} \quad \text{mit } \Sigma \text{ symmetrisch und positiv definit}$$

gilt. Nun gilt weiters

$$(\Sigma \mathbf{A}_0 \mathbf{A} \Sigma)^T = \Sigma^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_0^T \Sigma^T = \Sigma \mathbf{A}_0 \mathbf{A} \Sigma$$

aufgrund von Gleichung (4.2) und der Symmetrie von  $\Sigma$ . Damit ist  $\Sigma \mathbf{A}_0 \mathbf{A} \Sigma$  diagonalisierbar, das heißt, es existiert eine invertierbare Matrix  $\mathbf{T}$ , sodass die Matrix

$$\mathbf{T}^{-1} \Sigma \mathbf{A}_0 \mathbf{A} \Sigma \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\Sigma^{-1} \mathbf{A}_0^{-1}}_{\Sigma} \mathbf{A}_0 \mathbf{A} \Sigma \mathbf{T} = (\Sigma \mathbf{T})^{-1} \mathbf{A} (\Sigma \mathbf{T})$$

eine Diagonalmatrix ist. Damit ist  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar, besitzt also  $p$  reelle Eigenwerte und  $p$  linear unabhängige zugehörige Eigenvektoren. Daraus folgt, dass das System (4.1) hyperbolisch ist.

□

Für symmetrisierbare Systeme kann man das *Cauchy-Problem* betrachten: Gesucht ist eine Funktion  $\mathbf{u} : (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ , die das System (4.1) löst und der Anfangsbedingung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (4.3)$$

genügt, wobei  $\mathbf{u}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$  eine gegebene Funktion ist.

Besitzt im eindimensionalen Fall die Funktion  $\mathbf{u}_0$  die spezielle Gestalt

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_l, & \mathbf{x} < 0 \\ \mathbf{u}_r, & \mathbf{x} > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

so wird das Cauchy-Problem auch (eindimensionales) *Riemann-Problem* genannt.

Das System (4.1) ist quellenfrei. Der Vollständigkeit halber seien hier noch allgemeinere Formen von Systemen von Erhaltungsgesetzen erwähnt. Bei Anwendungen in der Physik werden oft auch Systeme mit Quellterm betrachtet, sodass ein System in Erhaltungform auch folgende Gestalt haben kann:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (4.5)$$

wobei  $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine glatte Funktion ist. Eine noch allgemeinere Form ist

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (4.6)$$

wobei  $\mathbf{f}_j : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $1 \leq j \leq d$ , und  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  glatte Funktionen sind.

Im Folgenden wird der Begriff der *klassischen Lösung* verwendet.

**Definition 4.1.3 (Klassische Lösung)** *Man nennt  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[ \rightarrow \Omega$  eine klassische Lösung von (4.1), (4.3), wenn  $\mathbf{u}$  eine  $C^1$ -Funktion ist, die die Gleichungen (4.1), (4.3) punktweise erfüllt.*

Klassische Lösungen existieren im Allgemeinen nur in endlichen Zeitintervallen, auch wenn die Anfangsbedingung  $\mathbf{u}_0$  eine sehr glatte Funktion ist.

## 4.2 Nichtlineare hyperbolische Systeme in einer Raumdimension

In Kapitel 5 wird gezeigt, dass das in Kapitel 3 erhaltene System (in Erhaltungform) zur Beschreibung des Blutflusses in einer Arterie von hyperbolischer Natur ist. Die Theorie über hyperbolische Systeme von Erhaltungsgesetzen ermöglicht es, die notwendigen Randbedingungen zu formulieren. Im Folgenden werden nun einige Begriffe erklärt, die für diese Formulierung mittels Riemann-Invarianten wesentlich sind.

### 4.2.1 Charakteristiken im skalaren, eindimensionalen Fall

Zunächst wird der Begriff der *charakteristischen Kurven* im skalaren, eindimensionalen Fall erklärt. Dazu wird angenommen, dass  $p = d = 1$  gilt und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine einmal stetig differenzierbare Funktion ist. Betrachte nun folgendes Anfangswertproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Setze

$$a(u) = f'(u)$$

und sei  $u$  eine klassische Lösung von (4.7), (4.8), sodass (4.7) in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

geschrieben werden kann.

**Definition 4.2.1 (Charakteristische Kurven, Charakteristiken)** *Die zu der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{dt} = a(u(x(t)), t) \quad (4.10)$$

*zugehörigen Integralkurven heißen charakteristische Kurven oder Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (4.7).*

**Satz 4.2.1** *Sei  $u$  eine glatte Lösung der partiellen Differentialgleichung (4.7). Die charakteristischen Kurven (4.10) sind Geraden, entlang derer  $u$  konstant ist.*

**Beweis:** Betrachte die Charakteristik, die durch den Punkt  $(x_0, 0)$  geht, also die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.10) mit der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$ . Diese existiert zumindest in einem kleinen Intervall  $[0, t_0[$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \frac{dx}{dt}(t) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x(t), t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

laut (4.9). Daher ist  $u = u_0$  konstant entlang der charakteristischen Kurve. Aus (4.10) folgt daher, dass die Charakteristiken Geraden sind, deren konstanter Anstieg vom Anfangswert  $x_0$  abhängt. Die durch den Punkt  $(x_0, 0)$  gehende Charakteristik ist dann durch die Gleichung

$$x = x_0 + t a(u_0(x_0)) \quad (4.11)$$

definiert.

□

Dies ermöglicht nun, glatte Lösungen zu konstruieren. Dazu setzt man

$$u(x, t) = u_0(x_0),$$

wobei  $x_0$  eine Lösung von (4.11) ist. Man nennt diese Vorgehensweise auch *Methode der Charakteristiken*. Dabei führt man die Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung - oder im Fall, dass der Quellterm nicht Null ist, auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen - zurück.

## 4.2.2 Charakteristiken im nicht-skalaren, eindimensionalen Fall

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^p$  und  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine zumindest zweimal stetig differenzierbare Funktion. Betrachte das folgende nichtlineare System von Erhaltungsgesetzen in einer Raumdimension:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.12)$$

wobei  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)^T$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_p(\mathbf{u}))^T$ . Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das System (4.12) strikt hyperbolisch ist. Das bedeutet, dass für jedes  $\mathbf{u} \in \Omega$  die  $(p \times p)$ -Jacobimatrix

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

$p$  paarweise verschiedene Eigenwerte

$$\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) < \dots < \lambda_p(\mathbf{u})$$

besitzt. Zu jedem Eigenwert  $\lambda_k(\mathbf{u})$  werden der rechte Eigenvektor  $\mathbf{r}_k(\mathbf{u})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = \lambda_k(\mathbf{u})\mathbf{r}_k(\mathbf{u})$$

und der linke Eigenvektor  $\mathbf{l}_k(\mathbf{u})$

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{u})^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \lambda_k(\mathbf{u})\mathbf{l}_k(\mathbf{u})^T$$

(das heißt,  $\mathbf{l}_k(\mathbf{u})$  ist ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}(\mathbf{u})^T$ ) zugeordnet. Da die Eigenwerte verschieden sind, ist  $\left(\mathbf{l}_k(\mathbf{u})\right)_k$  eine Dualbasis von  $\left(\mathbf{r}_k(\mathbf{u})\right)_k$ . Es gilt also

$$\mathbf{l}_j(\mathbf{u})^T \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = \mathbf{l}_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0, \quad k \neq j.$$

Ist  $\mathbf{f}$  eine  $C^m$ -Funktion, so sind  $\lambda_k$ ,  $\mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{l}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,  $C^{m-1}$ -Funktionen (also zumindest  $C^1$ -Funktionen aufgrund der Voraussetzung, dass  $\mathbf{f}$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist).

Die folgenden Überlegungen und die Einführung der charakteristischen Variablen (siehe Definition 4.2.2) ermöglichen es, das hyperbolische System (4.12) derart umzuformen, dass man ein System von entkoppelten Differentialgleichungen erhält.

Bezeichne nun  $\mathbf{R}$  die Matrix, deren Spalten aus den rechten Eigenvektoren bestehen:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{r}_p].$$

Da die Matrix  $\mathbf{A}$   $p$  linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, ist sie diagonalisierbar.  $\mathbf{A}$  kann also in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}$$

dargestellt werden, wobei  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonale bezeichnet.

Bezeichne weiters  $\mathbf{L}$  die Matrix, deren Reihen aus den linken Eigenvektoren bestehen, also:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_p^T \end{bmatrix}.$$

Da die rechten und linken Eigenvektoren paarweise orthogonal aufeinander stehen,

können sie so gewählt werden, dass

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I}$$

gilt, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist. Das heißt, es gilt  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}$ , sodass  $\mathbf{A}$  in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{RDL}$$

geschrieben werden kann. Diese Darstellung wird in vielen numerischen Verfahren verwendet oder auch, wenn man das System um einen konstanten Zustand  $\bar{\mathbf{u}}$  linearisiert.

**Definition 4.2.2 (Charakteristische Variable)** Sei  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_p)^T$  folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{u} = \mathbf{L}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{u},$$

wobei  $\bar{\mathbf{u}}$  einen konstanten Wert von  $\mathbf{u}$  bezeichnet. Dann heißen die Komponenten  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , des Vektors  $\mathbf{w}$  die charakteristischen Variablen des hyperbolischen Systems (4.12).

Durch diese Darstellung von  $\mathbf{w}$  erhält man, wenn man das System (4.12) von links mit  $\mathbf{L}$  multipliziert, ein System von  $p$  entkoppelten Differentialgleichungen für die charakteristischen Variablen  $w_1, \dots, w_p$ . In Kapitel 5 wird dieses System für den Fall, dass  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  aus zwei Elementen besteht, hergeleitet. Mit Hilfe der charakteristischen Variablen können die Randbedingungen für das in Kapitel 3 hergeleitete Modell formuliert werden.

Um den Begriff der charakteristischen Kurven im nicht-skalaren Fall zu erklären, sei zunächst die folgende Definition [12] erwähnt:

**Definition 4.2.3 ( $k$ -tes charakteristisches Feld)** Das Richtungsfeld  $(\lambda_k, 1)$ , welches dem  $k$ -ten Eigenwert  $\lambda_k$  der Jacobimatrix  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  zugeordnet und in der  $(x, t)$ -Ebene in den Punkten  $x = x(\sigma)$ ,  $t = t(\sigma)$  durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{d\sigma} = \lambda_k, \tag{4.13}$$

$$\frac{dt}{d\sigma} = 1 \tag{4.14}$$

gegeben ist, heißt das  $k$ -te charakteristische Feld des hyperbolischen Systems (4.12).

Integriert man für ein spezielles  $\lambda_k$  die Gleichungen (4.13), (4.14) nach  $\sigma$ , in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen  $x(0) = \xi$ ,  $t(0) = \tau$  etwa, so definieren sie in der  $(x, t)$ -Ebene eine Kurve  $\mathcal{C}_{(\xi, \tau)}^k$  mit Richtungsvektor  $(\lambda_k, 1)$  im Punkt  $x = x_k(\sigma, \xi, \tau)$ ,  $t = \tau + \sigma$  [12]. Man nennt diese Kurve die *k-te charakteristische Kurve* oder auch *k-te Charakteristik* des hyperbolischen Systems.

Bei charakteristischen Feldern kann folgende Unterscheidung getroffen werden:

**Definition 4.2.4 (echt nichtlinear, linear entartet)** *Man nennt das k-te charakteristische Feld echt nichtlinear, wenn*

$$D\lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad (4.15)$$

und linear entartet, wenn

$$D\lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad (4.16)$$

*gilt. Dabei bezeichnet  $D\lambda_k(\mathbf{u}) = \lambda'_k(\mathbf{u}) \in L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$  die Ableitung von  $\lambda_k(\mathbf{u})$  und kann mit dem Vektor  $\nabla\lambda_k(\mathbf{u})$  von  $\mathbb{R}^p$  identifiziert werden.*

### 4.2.3 Riemann-Invariante

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Riemann-Invarianten eingeführt und erwähnt, unter welchen Voraussetzungen diese existieren. Betrachte wieder das System (4.12) mit der Annahme, dass es strikt hyperbolisch ist.

**Definition 4.2.5 (k-Riemann-Invariante)** *Eine glatte Funktion  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine k-Riemann-Invariante, falls sie der Gleichung*

$$Dw(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \Omega, \quad (4.17)$$

*genügt.*

Eine *k*-Riemann-Invariante  $w$  ist genau dann konstant auf einer Kurve  $\mathbf{v} : \xi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{v}(\xi) \in \mathbb{R}^p$ , wenn

$$\frac{d}{d\xi} w(\mathbf{v}(\xi)) = Dw(\mathbf{v}(\xi)) \cdot \mathbf{v}'(\xi) = 0$$

erfüllt ist. Letzteres gilt, falls  $\mathbf{v}$  eine Integralkurve von  $\mathbf{r}_k$  ist, das heißt,

$$\mathbf{v}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{v}(\xi)). \quad (4.18)$$

Das bedeutet, dass eine  $k$ -Riemann-Invariante konstant entlang der Trajektorien des Vektorfeldes  $\mathbf{r}_k$  ist. Die Gleichung (4.17) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in  $\mathbb{R}^p$  und kann daher in der Regel explizit gelöst werden.

**Bemerkung:** Ist das  $k$ -te Feld linear entartet, so gilt nach Definition Gleichung (4.17) mit  $w = \lambda_k$ , und  $\lambda_k$  ist somit eine  $k$ -Riemann-Invariante.

Für den Satz über die lokale Existenz von Riemann-Invarianten wird der folgende Begriff benötigt:

**Definition 4.2.6 (charakteristische Fläche)** Eine Fläche  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p, \varphi(\mathbf{u}) = 0\}$  heißt charakteristisch, wenn

$$D\varphi(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{S}$$

gilt, das heißt, wenn  $\mathbf{r}_k(\mathbf{u})$  für  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$  tangential zu  $\mathcal{S}$  ist.

**Satz 4.2.2 (Lokale Existenz von Riemann-Invarianten)** Die Hyperebene  $\mathcal{S}_p = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p, u_p = 0\}$  sei nicht charakteristisch für  $\mathbf{r}_k$ , das heißt, es gilt

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \notin \mathcal{S}_p \quad \text{für } \mathbf{u} \in \mathcal{S}_p \cap \Omega.$$

Dann existiert eine hinreichend glatte Variablensubstitution  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ , die in einer Umgebung von  $\mathcal{S}_p$  definiert ist, sodass die Beziehung (4.17) zu

$$\frac{\partial z}{\partial v_p} = 0, \quad z = w \circ \boldsymbol{\theta}$$

äquivalent ist. Weiters sind die  $(p-1)$  Funktionen

$$w_j = z_j \circ \boldsymbol{\theta}^{-1}(\mathbf{v}), \quad 1 \leq j \leq p-1,$$

wobei

$$z_j(\mathbf{v}) = v_j, \quad 1 \leq j \leq p-1,$$

gilt,  $k$ -Riemann-Invariante, deren Gradienten linear unabhängig sind.

Man beachte, dass die Existenz der Riemann-Invarianten nur lokal gegeben ist. Die globale Existenz ist im Allgemeinen nicht gesichert. Weiters gilt:

**Satz 4.2.3** *Es seien  $(p - 1)$   $k$ -Riemann-Invariante  $w_1, \dots, w_{p-1}$  gegeben, deren Gradienten linear unabhängig sind. Dann existiert für jede  $k$ -Riemann-Invariante  $w$  lokal eine Funktion  $Z : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$w = Z(w_1, \dots, w_{p-1}).$$

Die Beweise zu den Sätzen 4.2.2 und 4.2.3 können in [7] nachgelesen werden.

Ein weiterer Begriff, der in den folgenden Ausführungen verwendet wird, ist jener der *einfachen Welle*.

**Definition 4.2.7 (Einfache Welle)** *Eine glatte Lösung  $\mathbf{u}(x, t)$  von System (4.12), die auf einem Bereich  $D$  von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  definiert ist, heißt eine  $k$ -einfache Welle, wenn  $w(\mathbf{u}(x, t))$  für eine beliebige Riemann-Invariante  $w$  konstant in  $D$  ist.*

Eine wichtige Eigenschaft einfacher Wellen liefert der folgende Satz.

**Satz 4.2.4** *Sei  $\mathbf{u}$  eine  $k$ -einfache Welle. Dann sind die Charakteristiken des  $k$ -ten Feldes, also die Integralkurven der Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k(\mathbf{u}(x, t)),$$

*Geraden, entlang derer  $\mathbf{u}$  konstant ist.*

Für den Beweis von Satz 4.2.4 sei wieder auf [7] verwiesen.

# Kapitel 5

## Randbedingungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Randbedingungen für das in Kapitel 3 hergeleitete eindimensionale Blutflussmodell. Dabei wird in einem ersten Teil auf die charakteristischen Variablen von System (3.27) eingegangen, wobei zuerst die Differentialgleichungen, denen diese genügen, hergeleitet und dann die Riemann-Invarianten für den Fall  $\alpha = 1$  berechnet werden. In einem zweiten Teil werden die Randbedingungen für das betrachtete Modell allgemein formuliert. Die Ausführungen in diesem Kapitel lehnen sich an Studien von A. Quarteroni und L. Formaggia [18] an.

### 5.1 Berechnung der Riemann-Invarianten

Zunächst wird gezeigt, dass System (3.27) strikt hyperbolisch ist.

**Lemma 5.1.1** *Gilt  $A \geq 0$ , so besitzt die Matrix  $\mathbf{H} = \frac{\partial F}{\partial U}$  in (3.28) zwei reelle Eigenwerte. Ist  $A > 0$ , so sind diese Eigenwerte verschieden und System (3.27) ist ein strikt hyperbolisches System von partiellen Differentialgleichungen.*

**Beweis:** Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - 2\alpha\bar{u} - c_1^2 + \alpha\bar{u}^2,$$

sodass man die folgenden Eigenwerte erhält:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \bar{u} \pm c_\alpha \quad (5.1)$$

mit

$$c_\alpha = \sqrt{c_1^2 + \bar{u}^2 \alpha (\alpha - 1)}.$$

Da  $\alpha \geq 1$  gilt, ist  $c_\alpha$  eine reelle Zahl, und  $\mathbf{H}$  besitzt damit zwei reelle Eigenwerte. Hinreichend für  $c_\alpha > 0$  ist die Bedingung  $c_1 > 0$ . Nun gilt aber laut (3.25)  $\frac{\partial \psi}{\partial A} > 0$ , sodass  $c_1 > 0$  gilt, wenn  $A > 0$  ist. Ist  $\alpha = 1$ , so ist diese Bedingung auch notwendig. Im Fall  $A > 0$  sind die beiden Eigenwerte also verschieden und nach Definition 4.1.1 ist das System strikt hyperbolisch.

□

Da nun stets  $A > 0$  gilt, ist das System (3.27) strikt hyperbolisch. Es existiert daher ein kompletter Satz von rechten und linken Eigenvektoren. Bezeichne  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2)$  und  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  das Paar von linken und rechten Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{H}$ , respektive. Definiere die Matrizen  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{\Lambda}$  folgendermaßen:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2], \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Da die rechten und linken Eigenvektoren paarweise orthogonal sind, können sie so gewählt werden, dass  $\mathbf{LR} = \mathbf{I}$  gilt, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Matrix  $\mathbf{H}$  kann daher in

$$\mathbf{H} = \mathbf{RAL} \quad (5.2)$$

zerlegt werden. Multipliziert man System (3.27) von links mit  $\mathbf{L}$ , so kann dieses System aufgrund von  $\mathbf{LR} = \mathbf{I}$  und Gleichung (5.2) in der äquivalenten Form

$$\mathbf{L} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{\Lambda L} \frac{\partial U}{\partial z} + \mathbf{LB}(U) = \mathbf{0}, \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (5.3)$$

geschrieben werden.

Bezeichne mit  $W_1$  und  $W_2$  die charakteristischen Variablen des hyperbolischen Systems. Diese erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial U} = \mathbf{l}_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial W_2}{\partial U} = \mathbf{l}_2. \quad (5.4)$$

Sind  $A_0$  und  $\beta$  nicht konstant, so sind  $W_1$  und  $W_2$  keine autonomen Funktionen von  $U$ . Da die linken und rechten Eigenvektoren paarweise orthogonal sind, gilt

$$\frac{\partial W_1}{\partial U} \cdot \mathbf{r}_2(U) = \mathbf{l}_1(U) \cdot \mathbf{r}_2(U) = 0, \quad (5.5)$$

sodass  $W_1$  eine 2-Riemann-Invariante des hyperbolischen Systems ist. Analog ist  $W_2$  eine 1-Riemann-Invariante.

Setze  $W = [W_1, W_2]^T$ . Es gilt

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t}$$

und, da die charakteristischen Variablen  $W_1$  und  $W_2$  von  $A_0$  und  $\beta$  abhängen,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial A_0} \frac{dA_0}{dz} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dz},$$

sodass sich aufgrund von (5.4) System (5.3) schreiben lässt als

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial W}{\partial z} + G = \mathbf{0}, \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (5.6)$$

mit

$$G = \mathbf{L}B - \frac{\partial W}{\partial A_0} \frac{dA_0}{dz} - \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dz}.$$

Im dem Fall, in dem  $A_0$  und  $\beta$  konstant sind und  $B = 0$  gilt, nimmt System (5.6) die einfachere Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial W}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad z \in (0, L), t \in I, \quad (5.7)$$

an. Komponentenweise lässt sich dies auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial z} = 0, \quad z \in (0, L), t \in I, i = 1, 2. \quad (5.8)$$

Daraus folgt, dass  $W_1$  und  $W_2$  konstant entlang der beiden charakteristischen Kurven in der  $(z, t)$ -Ebene sind, die respektive durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = \lambda_2$$

gegeben sind.

Im allgemeineren Fall (System (5.6)) kann gezeigt werden, dass die charakteristischen Variablen  $W_1$  und  $W_2$  einem gekoppelten System von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen. Dazu werden, um die folgenden Rechnungen angenehmer zu gestalten, die linken Eigenvektoren als Funktion von  $A$  und  $\bar{u}$  anstatt  $A$  und  $Q$  ausgedrückt:

$$\mathbf{l}_1 = \zeta \begin{bmatrix} c_\alpha - \alpha \bar{u} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \zeta \begin{bmatrix} -c_\alpha - \alpha \bar{u} \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei  $\zeta = \zeta(A, \bar{u})$  eine beliebige, in beiden Argumenten hinreichend glatte Funktion mit  $\zeta > 0$  ist. Aufgrund von  $\frac{\partial W_1}{\partial U} = \mathbf{l}_1$  und  $U = [A, Q]^T = [A, A\bar{u}]^T$  gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial A} &= \frac{\partial W_1}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial A} = \zeta \begin{bmatrix} c_\alpha - \alpha \bar{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \zeta [c_\alpha - \bar{u}(\alpha - 1)], \\ \frac{\partial W_1}{\partial \bar{u}} &= \frac{\partial W_1}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \bar{u}} = \zeta \begin{bmatrix} c_\alpha - \alpha \bar{u} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = \zeta A. \end{aligned}$$

Analoge Rechnungen für  $W_2$  führen nun zu dem folgenden Differentialgleichungssystem, dem  $W_1$  und  $W_2$  genügen:

$$\frac{\partial W_1}{\partial A} = \zeta [c_\alpha - \bar{u}(\alpha - 1)], \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{u}} = \zeta A, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial A} = \zeta [-c_\alpha - \bar{u}(\alpha - 1)], \quad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{u}} = \zeta A. \quad (5.10)$$

Wie in Abschnitt 4.2.3 bereits erwähnt wurde (Satz 4.2.2), ist es für hyperbolische Systeme stets möglich, lokal charakteristische Variablen oder äquivalent dazu Riemann-Invariante zu finden. Die Existenz von globalen charakteristischen Variablen ist im Allgemeinen nicht gesichert. Für den Fall, dass  $\alpha$  den Wert 1 annimmt, können jedoch globale Riemann-Invariante gefunden werden.

Ist  $\alpha = 1$ , so reduzieren sich die Gleichungen (5.9), (5.10) zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial A} &= \zeta c_1, & \frac{\partial W_1}{\partial \bar{u}} &= \zeta A, \\ \frac{\partial W_2}{\partial A} &= -\zeta c_1, & \frac{\partial W_2}{\partial \bar{u}} &= \zeta A. \end{aligned}$$

Da die charakteristische Variable  $W_1$  genau dann existiert, wenn

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial A \partial \bar{u}} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{u} \partial A}$$

für alle zulässigen Werte von  $A$  und  $\bar{u}$  gilt, muss die folgende Bedingung erfüllt sein ( $c_1$  hängt nicht von  $\bar{u}$  ab):

$$c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{u}} = \zeta + A \frac{\partial \zeta}{\partial A}.$$

Setzt man nun  $\zeta = \zeta(A)$  mit  $\zeta = -A \frac{\partial \zeta}{\partial A}$ , so ist die obige Gleichung erfüllt. Wählt man etwa  $\zeta = A^{-1}$ , so erhält man die Differentialform

$$\partial W_1 = \frac{c_1}{A} \partial A + \partial \bar{u}$$

und, indem man analog mit  $W_2$  vorgeht,

$$\partial W_2 = -\frac{c_1}{A} \partial A + \partial \bar{u}.$$

Fixiert man nun den Referenzzustand  $W_1 = W_2 = 0$  für  $(A, \bar{u}) = (A_0, 0)$  und integriert die Differentialformen in der  $(A, \bar{u})$ -Ebene, so erhält man für die Riemann-Invarianten  $W_1$  und  $W_2$ :

$$W_1 = \bar{u} + \int_{A_0}^A \frac{c_1(\tau)}{\tau} d\tau, \quad W_2 = \bar{u} - \int_{A_0}^A \frac{c_1(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (5.11)$$

Nun gilt laut (3.26)

$$c_1 = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}} A^{\frac{1}{4}},$$

woraus sich

$$\int_{A_0}^A \frac{c_1(\tau)}{\tau} d\tau = \int_{A_0}^A \sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}} \tau^{-\frac{3}{4}} d\tau = \sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}} \frac{A^{\frac{1}{4}} - A_0^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}$$

ergibt. Bezeichnet man mit  $c_{1,0}$  den Wert von  $c_1$  für den Referenzquerschnitt  $A_0$ , so erhält man schließlich

$$W_1 = \bar{u} + 4(c_1 - c_{1,0}), \quad W_2 = \bar{u} - 4(c_1 - c_{1,0}). \quad (5.12)$$

## 5.2 Randbedingungen für das eindimensionale Blutflussmodell

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems (3.22), (3.23) beziehungsweise (3.30) werden geeignete Randbedingungen benötigt. In diesem Abschnitt soll allgemein erläu-

tert werden, wie diese Randbedingungen gewählt werden können. Im Folgenden bezeichnet  $z = 0$  den proximalen Rand des betrachteten Gefäßes, das heißt, den Rand, der näher zum Herzen liegt, und  $z = L$  den distalen Rand.

Bei physiologischen Bedingungen nehmen die Fließgeschwindigkeit und die mechanischen Kenngrößen, die in die Funktion  $\psi$  und damit in  $c_1$  einfließen, Werte an, sodass  $c_\alpha \gg \alpha \bar{u}$  gilt. Daraus folgt, dass die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{H}$  verschiedenen Vorzeichen haben ( $\lambda_1 > 0$  und  $\lambda_2 < 0$ ) und damit der Fluss subkritisch ist, das heißt, die Wellengeschwindigkeit ist größer als die Fließgeschwindigkeit. Es gilt weiters, dass der Fluss gleichmäßig ist und die Lösung von System (3.30) für typische Werte der mechanischen Parameter und der Längen der Gefäße glatt bleibt [2].

Im Folgenden wird stets angenommen, dass das System (3.30) subkritisch und die Lösungen glatt sind.

Die Anzahl der an dem jeweiligen Rand notwendigen Bedingungen entspricht der Anzahl der Charakteristiken, die durch diesen Rand in den betrachteten Bereich hinein fließen. Da nur subkritische Flüsse betrachtet werden, muss an den beiden Rändern  $z = 0$  (proximaler Querschnitt) und  $z = L$  (distaler Querschnitt) jeweils genau eine Randbedingung gewählt werden.

### 5.2.1 Nicht-reflektierende Randbedingungen beim distalen Querschnitt

Eine wichtige Klasse von Randbedingungen ist jene, bei der die aus dem betrachteten Bereich auslaufende einfache Welle, die der austretenden Charakteristik entspricht, nicht reflektiert wird. Solche Randbedingungen werden *nicht-reflektierende Randbedingungen* genannt und eignen sich bei dem betrachteten eindimensionalen Blutflussmodell für den distalen Rand des Bereiches. Den Ausführungen von [28, 9] folgend kann die Randbedingung für das nichtlineare hyperbolische System (3.30) bei  $z = L$  nun als

$$\mathbf{l}_2 \left( \frac{\partial U}{\partial t} - S(U) \right) = 0 \quad \text{bei } z = L, \forall t \in I,$$

geschrieben werden.

Gilt  $S = 0$ , so ist diese Bedingung aufgrund von Gleichung (5.4) äquivalent zur Forderung, dass die einlaufende charakteristische Variable einen konstanten Wert - norma-

erweise Null gesetzt - annimmt.

Ist  $S \neq 0$ , so lässt die Randbedingung die Änderung der charakteristischen Variablen aufgrund des Quellterms  $S$  einfließen.

### 5.2.2 Vorgabe von Druck oder mittlerem Fluss beim proximalen Querschnitt

Beim „Eingang“ des betrachteten Gefäßstückes ist es praktischer, wenn der Druck, der Fluss oder andere von Messungen stammende Größen vorgegeben werden können.

Ist eine explizite Darstellung der charakteristischen Variablen möglich, so kann die Randbedingung bei  $z = 0$  direkt mit Hilfe der eingehenden Riemann-Invarianten  $W_1$  ausgedrückt werden:

$$W_1(t) = g_1(t) \quad \text{bei } z = 0, \forall t \in I, \quad (5.13)$$

wobei  $g_1$  eine gegebene Funktion ist. So eine Funktion steht jedoch nur selten zur Verfügung, weil die Werte am Rand normalerweise in Form von physikalischen Variablen gegeben sind. Nimmt man an, dass der zeitliche Verlauf von Druck und Fluss - zum Beispiel infolge von Messungen - bekannt sind, so lässt sich der Wert von  $g_1$  direkt aus der expliziten Darstellung der charakteristischen Variablen  $W_1$  ableiten. Bezeichne dafür  $P_m = P_m(t)$  und  $Q_m = Q_m(t)$  für  $t \in I$  den durchschnittlichen Druck beziehungsweise Fluss, die bei  $z = 0$  gemessen wurden. Betrachte weiters die Riemann-Invariante  $W_1 = W_1(A, Q)$  als Funktion des Querschnittes  $A$  und des mittleren Flusses  $Q$ . Dann lässt sich die Funktion  $g_1$  in (5.13) aufgrund von Gleichung (3.24) folgendermaßen schreiben:

$$g_1(t) = W_1(\psi^{-1}(P_m(t) - P_{\text{ext}}), Q_m(t)), \quad t \in I.$$

Hat man hingegen den zeitlichen Verlauf  $q(t)$  von nur einer physikalischen Variablen  $\phi = \phi(A, Q)$  zur Verfügung, so ist die Randbedingung

$$\phi(A(t), Q(t)) = q(t), \quad \forall t \in I, \quad \text{bei } z = 0$$

unter gewissen Einschränkungen zulässig [19].

Ist eine Integration von (5.4) wie etwa im Fall  $\alpha \neq 1$  nicht möglich, existiert also keine explizite Darstellung der charakteristischen Variablen, so kann auf *pseudo-*

*charakteristische Variable* zurückgegriffen werden. Näheres dazu in [19].

### 5.2.3 Verträglichkeitsbedingungen

Schließlich werden für die numerische Diskretisierung an den beiden Rändern noch Verträglichkeitsbedingungen benötigt, die nach [19] folgendermaßen lauten:

$$\mathbf{I}_2^T \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial U}{\partial z} - B \right) = 0, \quad z = 0, t \in I, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{I}_1^T \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial U}{\partial z} - B \right) = 0, \quad z = L, t \in I. \quad (5.15)$$

# Kapitel 6

## Kopplung des eindimensionalen Blutflussmodells mit einem Herzmodell

Mit Hilfe des in Kapitel 3 hergeleiteten eindimensionalen Modells kann nicht nur der Blutfluss in einzelnen Arteriensegmenten sondern im gesamten Arterienbaum beschrieben werden, indem in jedem Arterienstück die partiellen Differentialgleichungen (3.22), (3.23) gelöst und an den Bifurkationen durch geeignete Bedingungen ergänzt werden. In diesem Kapitel wird ein derartiges Netzwerkmodell mit einem Modell zur Beschreibung der Herzaktivität gekoppelt. Für das gekoppelte Modell werden dann die numerischen Randbedingungen mit Hilfe der Riemann-Invarianten, die für einen Spezialfall in Kapitel 5 berechnet worden sind, formuliert. Dieses Kapitel folgt den Ausführungen von L. Formaggia et al. [4].

### 6.1 Das gekoppelte Modell

Im Folgenden wird ein Modell für den menschlichen Arterienbaum mit Einbeziehung der Herzaktivität betrachtet, das sich aus drei Teilmodellen zusammensetzt:

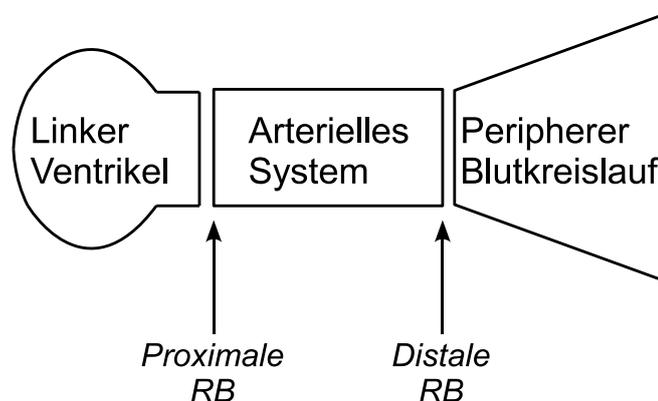
- Beschreibung der Herzaktivität (Herzmodell),
- Beschreibung des arteriellen Systems (beinhaltet die größten Arterien),

- Beschreibung des peripheren Blutkreislaufs (restliche Blutgefäße des Arterienbaumes).

Dabei werden die einzelnen Arterienstücke des arteriellen Systems mit Hilfe des in Kapitel 3 hergeleiteten eindimensionalen Modells beschrieben und durch geeignete Bedingungen an den Verzweigungen ergänzt. Man beachte, dass mit dem Begriff „arterielles System“ hier - anders als in Kapitel 2 - nur die größten Arterien zusammengefasst werden.

Zur Beschreibung des peripheren Blutkreislaufs eignet sich ein Windkesselmodell, das eine Abschlussimpedanz am Ende des arteriellen Systems darstellt. Dazu wird der periphere Blutkreislauf als distale Randbedingung für das arterielle System betrachtet. Die Aktivität des Herzens wird normalerweise über eine Randbedingung am Eingang der ersten Arterie, die vom Herzen weggeht - also der Aorta -, erklärt (Standardmodell). Die Einschränkung der Herzaktivität als Randbedingung bezieht jedoch nicht die Wechselwirkung zwischen dem Herzen - genauer dem linken Ventrikel - und den Arterien mit ein, weil auf diese Weise kein Feedback des arteriellen Kreislaufs zurück an das Herz modelliert wird. Im Folgenden wird daher ein Herzmodell betrachtet, um die Auswirkungen auf das Druck- und Flussverhalten studieren zu können, die durch Änderungen der geometrischen oder mechanischen Eigenschaften der Arterien hervorgerufen werden - etwa durch Versteifen der Arterien als Folge des Alterns. Dazu wird die Aktivität des Herzens mit Hilfe einer Differentialgleichung beschrieben.

Um die einzelnen Modelle miteinander verbinden zu können, werden geeignete Randbedingungen benötigt, die in den folgenden Abschnitten formuliert werden. Abbildung 6.1 zeigt eine schematische Darstellung der Kopplung der einzelnen Modelle.



**Abbildung 6.1:** Schematische Darstellung des gekoppelten Systems (nach [4]).

### 6.1.1 Beschreibung des arteriellen Systems

Das arterielle System wird zunächst in mehrere Teile aufgeteilt, wobei in jedem Arteriensegment die Entwicklung des Querschnitts  $A$  und des mittleren Flusses  $Q$  entlang des Gefäßes durch ein System von partiellen Differentialgleichungen in der Art von (3.22), (3.23) beschrieben wird. Dazu gelten die in Kapitel 3 erwähnten Voraussetzungen. Der Druck  $P$  ist wieder durch Gleichung (3.24) gegeben, wobei wieder angenommen wird, dass  $P_{\text{ext}} = 0$  gilt, und die Größe  $c_1$  ist wieder durch Gleichung (3.26) definiert. Das Geschwindigkeitsprofil  $s$  wird bei der Modellierung häufig so gewählt, dass der Korrekturkoeffizient  $\alpha$  einen Wert nahe bei 1 besitzt, weil sich gezeigt hat, dass das Profil bei der Modellierung des Blutflusses in den Arterien im Durchschnitt eher flach ist [25]. Im Folgenden sei

$$\alpha = 1,$$

was einem komplett flachen Geschwindigkeitsprofil entspricht. Dies führt zu einigen Vereinfachungen der in den vorigen Kapiteln erwähnten Ergebnisse.

Wie bereits in Kapitel 5 gezeigt wurde, ist das System (3.22), (3.23) hyperbolisch. Die Lösung ist daher eine nichtlineare Überlagerung von zwei einfachen Wellen, die in entgegengesetzte Richtungen laufen. Die Geschwindigkeit dieser beiden Wellen ist durch die Beziehung (5.1) gegeben, die sich unter der Annahme, dass  $\alpha = 1$  gilt, zu

$$\lambda_{1,2} = \bar{u} \pm c_1 = \frac{Q}{A} \pm c_1 \quad (6.1)$$

vereinfacht. Die Riemann-Invarianten wurden in diesem Fall in Kapitel 5 bereits berechnet und lauten:

$$W_{1,2} = \bar{u} \pm 4(c_1 - c_{1,0}) = \frac{Q}{A} \pm 4\sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}}(A^{\frac{1}{4}} - A_0^{\frac{1}{4}}), \quad (6.2)$$

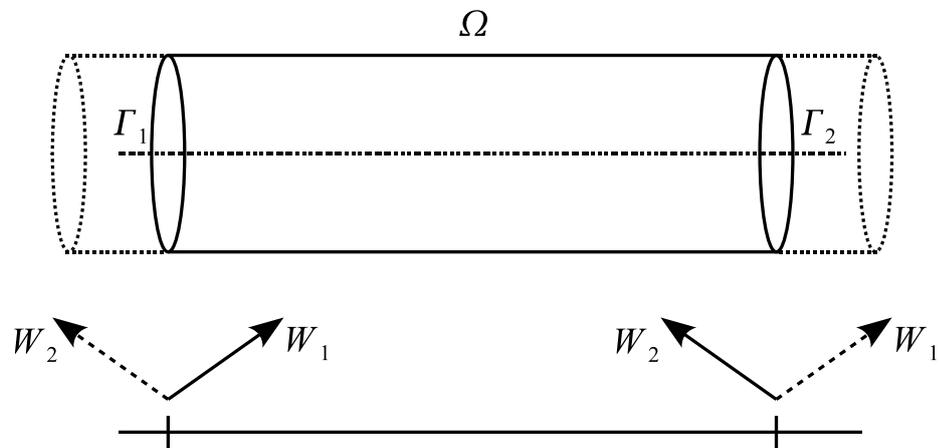
wobei  $c_{1,0}$  der Geschwindigkeit der Pulswelle im Fall  $A = A_0$  entspricht. Diese Beziehungen können invertiert werden, um die Variablen  $A$  und  $Q$  als Funktion der Riemann-Invarianten  $W_1$  und  $W_2$  auszudrücken. Es kann leicht nachgeprüft werden, dass die Relationen

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2\rho A_0}{\beta}\right)^2 \left(\frac{W_1 - W_2}{8} + c_{1,0}\right)^4 \\ Q &= A \frac{W_1 + W_2}{2} \end{aligned}$$

gelten. Diese Beziehungen ermöglichen die Implementierung der Randbedingungen.

### Beschreibung der Randbedingungen bei Betrachtung eines einzelnen Arterienstücles

Abbildung 6.2 zeigt ein Arterienstück  $\Omega$  mit proximalem Ende  $\Gamma_1$  und distalem Ende  $\Gamma_2$ . Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt wurde, wird aufgrund des hyperbolischen, subkritischen Charakters des Systems an den beiden Enden jeweils nur eine Randbedingung benötigt.



**Abbildung 6.2:** Riemann-Invariante  $W_1$  und  $W_2$  im Fall nicht-reflektierender Randbedingungen bei Betrachtung eines Arterienstücles  $\Omega$  mit proximalem Rand  $\Gamma_1$  und distalem Rand  $\Gamma_2$  (nach [4]).

Die bei  $\Gamma_1$  einlaufende einfache Welle wird mit der Riemann-Invarianten  $W_1$  und die bei  $\Gamma_2$  einlaufende Welle mit  $W_2$  assoziiert. Wird angenommen, dass die Welle beim Austreten aus dem Bereich  $\Omega$  nicht reflektiert wird, so lauten die Randbedingungen für ein einzelnes Arterienstück:

$$\begin{aligned} W_1(A, Q) &= g_1(t) \quad \text{auf } \Gamma_1, \\ W_2(A, Q) &= g_2(t) \quad \text{auf } \Gamma_2, \end{aligned}$$

wobei  $g_1$  und  $g_2$  gegebene Funktionen sind.

### Modellierung der Verzweigungen

Das Herz-Kreislauf-System zeichnet sich durch eine Vielzahl an Verzweigungen aus. Zur Modellierung dieser Bifurkationen wird hier ein Ansatz gemacht, der die Erhaltung von Volumenfluss und totalem Druck gewährleistet. Dazu wird der Bereich  $\Omega$  in drei Teilbereiche  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  geteilt (siehe Abbildung 6.3), wobei  $Q_j$  und  $P_{t,j}$  den mittleren Fluss und den Druck, respektive, des Bereichs  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , bezeichnen. Um das System (3.22), (3.23) jeweils in den drei Teilbereichen lösen zu können, wird nun verlangt, dass am Verzweigungspunkt  $\Gamma$  die folgenden Bedingungen gelten:

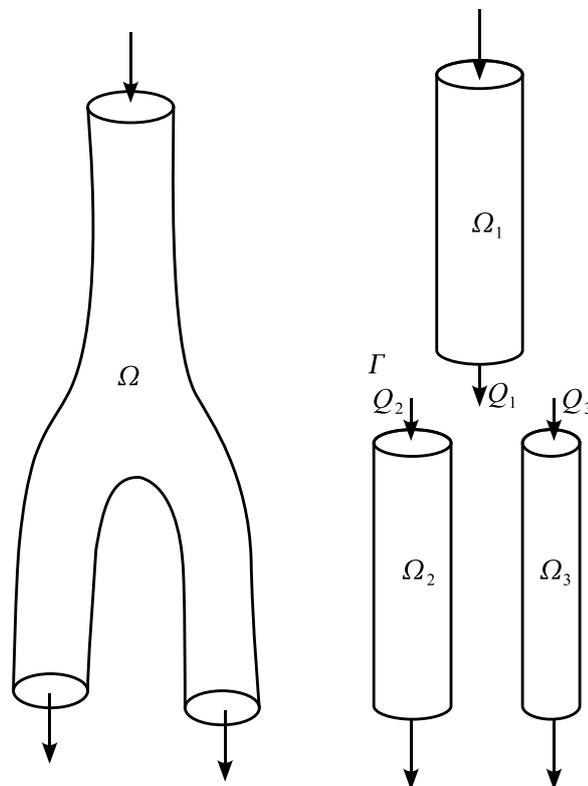
$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad \text{bei } \Gamma, \quad t > 0, \quad (6.3)$$

$$P_{t,1} = P_{t,2} = P_{t,3} \quad \text{bei } \Gamma, \quad t > 0, \quad (6.4)$$

mit

$$P_t = P + \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{A} \right)^2$$

im jeweiligen Teilbereich  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .



**Abbildung 6.3:** Eindimensionale Modellierung der Verzweigungen (nach [4]).

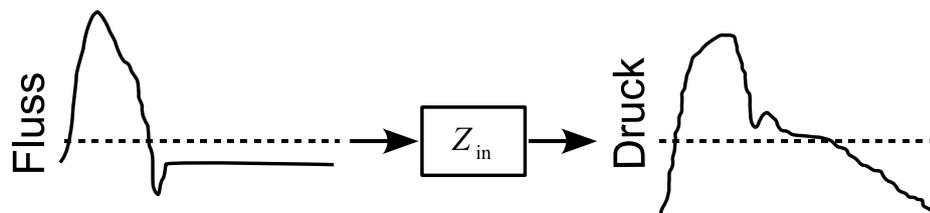
## 6.1.2 Beschreibung der distalen Randbedingungen

Der periphere Blutkreislauf wird als distale Randbedingung für das arterielle System dargestellt. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt wurde, haben die Gefäße des peripheren Blutkreislaufs (Widerstandsgefäße) einen hohen Anteil am Strömungswiderstand und können somit als Inputimpedanz modelliert werden.

### Inputimpedanz

Der Druck in den Arterien hängt von Eigenschaften sowohl des Herzens als auch des arteriellen Systems ab. Um das arterielle System unabhängig vom Herzen zu charakterisieren, wird der Begriff der *Inputimpedanz* aus dem Bereich der Elektrotechnik aufgegriffen [16, 20]. Die Inputimpedanz  $Z_{\text{in}}$  ist eine lineare, zeitinvariante Übertragungsfunktion, die Druck und Fluss in Beziehung zueinander setzt (siehe Abbildung 6.4). Sie lässt sich im Frequenzbereich als Quotient aus Ausgang (Druck  $P$ ) und Eingang (Fluss  $Q$ ) darstellen:

$$Z_{\text{in}}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$



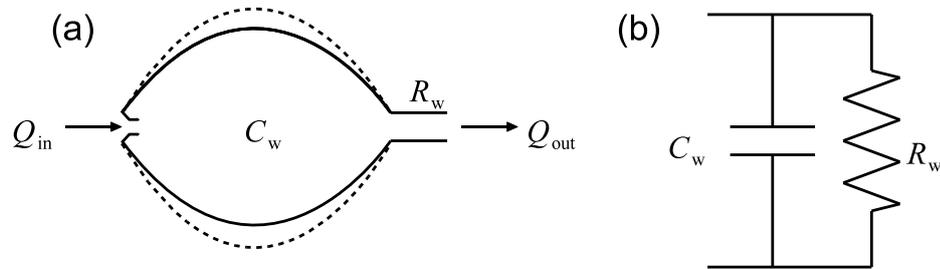
**Abbildung 6.4:** Inputimpedanz  $Z_{\text{in}}$  als Übertragungsfunktion, die Druck und Fluss in Beziehung zueinander setzt (nach [20]).

Von Bedeutung ist ein stationärer Wert  $R$  von  $Z_{\text{in}}$ , der als *peripherer Widerstand* bezeichnet wird und aus dem Verhältnis von mittlerem Druck  $\bar{P}$  zu mittlerem Fluss  $\bar{Q}$  berechnet werden kann:

$$R = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}.$$

## Windkessel

Die Modellierung von Arterien als Windkessel beruht darauf, dass die größeren Arterien durch eine Art Zwischenspeicherung des Blutes, die aufgrund der Dehnbarkeit der Gefäße möglich ist, den intermittierenden Pulsstrom, der vom Herzen kommt, in einen kontinuierlichen Abstrom transformieren. Beim folgenden Windkesselmodell [20] betrachtet man eine Kammer, die die größeren Arterien darstellt und mit einem angeschlossenen Rohr endet, welches die kleineren Blutgefäße beschreibt. Abbildung 6.5 (a) veranschaulicht das Prinzip des Windkessels. Dabei bezeichnet  $Q_{\text{in}}$  den Fluss in die Kammer hinein und  $Q_{\text{out}}$  den Fluss hinaus.  $C_w$  ist die Compliance des Windkessels und beschreibt die Fähigkeit des Systems, Blut zu speichern.  $R_w$  stellt den peripheren Widerstand der kleineren Gefäße dar.



**Abbildung 6.5:** Windkesselmodell (a) und äquivalente Darstellung als elektrischer Schaltkreis (b) (nach [20]).

Ein frühes Windkesselmodell stammt vom deutschen Physiologen O. Frank [6]. Zur Beschreibung des Modells benutzte Frank das Prinzip der Massenerhaltung. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  ist der gespeicherte Blutfluss  $Q_{\text{stored}}$  gleich der Differenz zwischen  $Q_{\text{in}}$  und  $Q_{\text{out}}$ , also

$$Q_{\text{stored}} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}. \quad (6.5)$$

Nun wird angenommen, dass der Druck im arteriellen System überall gleich ist.

Der periphere Widerstand  $R_w$  beschreibt das Verhältnis zwischen dem Druckabfall entlang der kleineren Arterien und dem Fluss  $Q_{\text{out}}$  aus dem arteriellen System:

$$R_w = \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{v}}}{Q_{\text{out}}}. \quad (6.6)$$

Dabei bezeichnet  $P_{\text{in}}$  den arteriellen Druck am Eingang des Systems und  $P_{\text{v}}$  den Venendruck.

Die Compliance  $C_w$  ist gleich der Änderung des Blutvolumens  $V$ , die durch ein Änderung des Druckes entsteht, und kann daher als

$$C_w = \frac{dV}{dP_{\text{in}}} \quad (6.7)$$

geschrieben werden.  $C_w$  wird als die Summe aller arteriellen Compliances aufgefasst.

Aus Gleichung (6.5) folgt nun

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= Q_{\text{stored}} + Q_{\text{out}} \\ &= \frac{dV}{dt} + Q_{\text{out}} \\ &= \frac{dV}{dP_{\text{in}}} \frac{dP_{\text{in}}}{dt} + \frac{Q_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} P_{\text{in}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (6.6) und (6.7) und Vernachlässigung von  $P_v$  ergibt sich daraus die folgende Differentialgleichung:

$$Q_{\text{in}}(t) = C_w \frac{dP_{\text{in}}(t)}{dt} + \frac{P_{\text{in}}(t)}{R_w}, \quad (6.8)$$

wobei im Folgenden  $C_w$  und  $R_w$  als konstant angenommen werden.

Betrachtet man nun im Frequenzbereich die Inputimpedanz

$$Z_{\text{in}} = \frac{P_{\text{in}}(\omega)}{Q_{\text{in}}(\omega)}, \quad (6.9)$$

so erhält man durch Fourier-Transformation ( $\omega$  bezeichnet die Kreisfrequenz) und Ausnutzung von Gleichung (6.8)

$$Z_{\text{in}} = \frac{R_w}{1 + i\omega C_w R_w}. \quad (6.10)$$

Gleichung (6.10) ist die übliche Beschreibung des klassischen Windkessels.

Die Darstellung (6.9) ermöglicht es, den Windkessel als elektrischen Schaltkreis darzustellen. Übersetzt man den Druck  $P_{\text{in}}$  in Spannung und den Fluss  $Q_{\text{in}}$  in Strom, so hat der Windkessel dieselbe funktionelle Gestalt wie ein Kondensator, der parallel zu einem Widerstand geschaltet ist. Abbildung 6.5 (b) zeigt die äquivalente Darstellung des Windkessels als elektrischen Schaltkreis. Der Kondensator repräsentiert die totale arterielle Compliance, und der elektrische Widerstand stellt den totalen peripheren Widerstand dar [15].

### Formulierung der distalen Randbedingung

Für sehr peripher gelegene Blutgefäße ist es üblich, den peripheren Blutkreislauf als reine Widerstandslast zu betrachten [22, 4]. Bezeichnet man mit  $R_p$  den peripheren Widerstand und mit  $p$  den mittleren Druck, so entspricht dies der Annahme, dass

$$p = R_p Q \quad (6.11)$$

gilt.

Linearisiert man nun das System (6.2) in der Form

$$W_1 = a_1 Q + a_2 p, \quad (6.12)$$

$$W_2 = a_1 Q - a_2 p, \quad (6.13)$$

wobei  $a_1$  und  $a_2$  als konstant angenommen werden, so können daraus  $p$  und  $Q$  als Funktion von  $W_1$  und  $W_2$  dargestellt und in Gleichung (6.11) eingesetzt werden. Nach einigen einfachen Umformungen, erhält man

$$W_2 = -R_T W_1 \quad (6.14)$$

mit

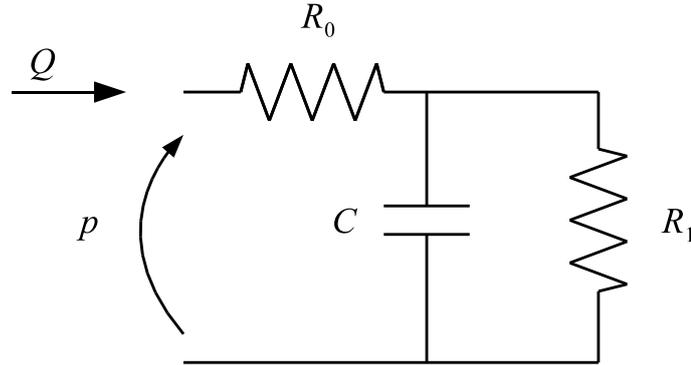
$$R_T = \frac{a_1 - \frac{a_2}{R_p}}{a_1 + \frac{a_2}{R_p}}.$$

Strebt  $R_p$  gegen  $\infty$ , was einem komplett blockierten Ende ( $Q = 0$ ) entspricht, so gilt  $R_T = 1$  und demnach, wie zu erwarten ist,  $W_2 = -W_1$ .

Ein allgemeinerer Ansatz besteht darin, den peripheren Blutkreislauf als komplexe Impedanz  $Z_p$  anzunehmen, wie es bei einem Windkesselmodell üblich ist. Dazu wird hier ein drei-Elemente-Windkesselmodell betrachtet, das in Abbildung 6.6 dargestellt ist. Dieses Modell stammt vom schweizer Physiologen P. Broemser [1], der ein zusätzliches Widerstandselement miteinbezieht.

Die Inputimpedanz  $Z_p$  ist dabei durch die Gleichung

$$Z_p = R_0 + \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C}$$



**Abbildung 6.6:** Drei-Elemente-Windkesselmodell zur Beschreibung des peripheren Blutkreislaufs (nach [4]).

gegeben. Setzt man

$$R_p = R_0 + R_1,$$

so erhält man laut [4] im Zeitbereich:

$$p + R_1 C \frac{dp}{dt} = R_p Q + R_0 R_1 C \frac{dQ}{dt}. \quad (6.15)$$

Nun drückt man wieder  $p$  und  $Q$  mit Hilfe von System (6.12), (6.13) als Funktion von  $W_1$  und  $W_2$  aus und setzt in Gleichung (6.15) ein. Nach einigen trivialen Umformungen ergibt sich

$$s_1 \frac{dW_2}{dt} + W_2 = s_2 \frac{dW_1}{dt} - s_3 W_1 \quad (6.16)$$

mit

$$s_1 = \frac{a_2 + \frac{a_1}{R_0}}{a_2 + \frac{a_1}{R_p}}, \quad s_2 = \frac{a_2 - \frac{a_1}{R_0}}{a_2 + \frac{a_1}{R_p}}, \quad s_3 = \frac{a_2 - \frac{a_1}{R_p}}{a_2 + \frac{a_1}{R_p}}.$$

Durch Integration von Gleichung (6.16) nach der Zeit erhält man die distalen Randbedingungen. Die Formulierung der Randbedingungen auf numerischer Ebene erfolgt in Abschnitt 6.2.

### 6.1.3 Beschreibung der Herzaktivität

Zunächst sei erwähnt, wie sich die Aktivität des Herzen als proximale Randbedingung formulieren lässt.

### Proximale Randbedingungen: Standardmodell

Am Eingang des arteriellen Systems soll die Aktivität des Herzens und der Aortenklappe simuliert werden. Die proximalen Randbedingungen können in zwei Arten aufgeteilt werden, je nachdem, ob die Aortenklappe geschlossen oder offen ist. Man unterscheidet dazu:

- Bedingungen bei offener Aortenklappe (OV für die englische Bezeichnung *open valve conditions*) und
- Bedingungen bei geschlossener Aortenklappe (CV für die englische Bezeichnung *closed valve conditions*).

Wie zwischen diesen Bedingungen umgeschaltet wird, wird in Abschnitt 6.2 näher erläutert.

*CV Bedingungen:* Ist die Aortenklappe geschlossen, so lautet die proximale Randbedingung  $Q = 0$ , weil kein Blut in das arterielle System hinein fließt. Da das proximale Ende in diesem Fall blockiert ist, bildet die Aortenklappe in diesem Fall einen Widerstand, der gegen  $\infty$  strebt. Mit Hilfe der Riemann-Invarianten lässt sich die Randbedingung daher wie in Gleichung (6.14) mit  $R_T = 1$  formulieren:

$$W_{1,CV} = -W_2. \quad (6.17)$$

*OV Bedingungen:* Im Fall einer offenen Aortenklappe wäre es wünschenswert, am proximalen Rand den mittleren Fluss oder den Druck vorgeben zu können. Dabei handelt es sich aber um eine reflektierende Randbedingung, das heißt, ein Teil der zum Herzen laufenden Welle wird zurück ins arterielle System reflektiert.

Eine Möglichkeit nicht-reflektierender Randbedingungen wäre die Vorgabe der eingehenden Riemann-Invarianten  $W_1$  als Funktion des Drucks  $P_v$  des linken Ventrikels und der Riemann-Invarianten  $W_2$ . Um eine solche Beziehung zu erhalten, geht man von Gleichung (6.2) für die Riemann-Invarianten  $W_1$  und  $W_2$  aus. Ist  $c_1$  wieder durch

(3.26) definiert, so folgt aus Gleichung (6.2):

$$\begin{aligned}
W_1 - W_2 &= 8(c_1 - c_{1,0}) \\
&= 8\sqrt{\frac{\beta}{2\rho A_0}} \left( A^{\frac{1}{4}} - A_0^{\frac{1}{4}} \right) \\
&= 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \frac{\beta}{A_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( (A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}} + A_0^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{4}} \right) \\
&= 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \left( \beta \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_0}}{A_0} + \frac{\beta}{\sqrt{A_0}} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{\beta}{A_0}} \right) \\
&= 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{P_v + \frac{\beta}{\sqrt{A_0}}} - \sqrt{\frac{\beta}{A_0}} \right).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich mit Beziehung (3.24). Damit erhält man  $W_1$  als Funktion von  $P_v$  und  $W_2$ :

$$W_1 = W_2 + 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{P_v + \frac{\beta}{\sqrt{A_0}}} - \sqrt{\frac{\beta}{A_0}} \right). \quad (6.18)$$

Der aktuelle Wert von  $W_2$  wird durch Extrapolation der auslaufenden charakteristischen Variablen, die in Abschnitt 6.2 näher beschrieben wird, berechnet.

Da in dem Fall nicht-reflektierender Randbedingungen die Wellen, die von der Peripherie kommen, absorbiert werden und  $P_v$  vorgegeben wird, eignet sich diese Vorgehensweise nicht, um das Verhalten des Herzens und die Wechselwirkung zwischen dem linken Ventrikel und dem arteriellen System zu beschreiben. Das folgende Herzmodell bezieht diese Faktoren mit ein.

## Das Herzmodell

Die grundlegende Idee dieses Modells stammt von H. Suga et al. [27, 26] und besteht darin, dass der Druck und das Volumen im linken Ventrikel durch einen zeitabhängigen Faktor - Elastanz genannt - verbunden sind. Diese Elastanz beschreibt die Aktivität der Muskelfasern des Herzens. Ihr Wert ist während der Diastole niedrig und wächst im Laufe der Systole. Laut [14, Kap. 13] erfüllen Ventrikeldruck  $P_v$  und -volumen  $V_v$

nun die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} P_v(t) &= E_v(t)(V_v(t) - V_0) + KE_v(t)(V_v(t) - V_0)Q_v(t) \\ &= E_v(t)(V_v(t) - V_0)(1 + KQ_v(t)), \end{aligned} \quad (6.19)$$

wobei  $Q_v$  den Fluss im linken Ventrikel,  $V_0$  ein Referenzvolumen und  $K$  einen Widerstandsparameter bezeichnen. Die Größen  $E_v$ ,  $V_0$  und  $K$  sind intrinsische Eigenschaften des Ventrikels. Da der Wert von  $K$  eher klein ist, wird er im Folgenden Null gesetzt. Weiters wird angenommen, dass  $V_0$  konstant ist.

Beachtet man die getroffenen Voraussetzungen, so lässt sich Gleichung (6.19) auch in der Form

$$\frac{P_v(t)}{E_v(t)} = V_v(t) - V_0$$

schreiben. Leitet man diese Gleichung nun nach der Zeit  $t$  ab und berücksichtigt man, dass der Durchfluss am Ventrikel durch  $Q_v = -dV_v/dt$  gegeben ist, so ergibt sich nach der Kettenregel die folgende Differentialgleichung für den Ventrikeldruck  $P_v$ :

$$\frac{1}{E_v} \frac{dP_v}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{E_v} \right) P_v = \frac{dV_v}{dt} = -Q_v. \quad (6.20)$$

Da in diesem Modell nur die Aktivität des linken Ventrikels simuliert wird, wird das venöse System, das für den Druckanstieg im Herzen während der Diastole verantwortlich ist, nicht berücksichtigt. Beziehung (6.19) wird daher am Anfang jeder Systolenperiode erneut aufgerufen, wenn das Blutvolumen am linken Ventrikel vorgegeben wird.

## 6.2 Formulierung der numerischen Randbedingungen

Wie bereits in Kapitel 3 erwähnt wurde, kann das System (3.22), (3.23) mit einem Taylor-Galerkin-Verfahren zweiter Ordnung diskretisiert und anschließend mittels Finiten Elemente Methode numerisch gelöst werden. Dazu wird jedes Arteriensegment  $\Omega_i$  des arteriellen Systems in eine gewisse Anzahl von finiten Elementen der Länge  $h_i$  unterteilt. Der Zeitschritt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten wird mit  $\Delta t$  bezeichnet. Näheres zur Diskretisierung ist in [3, 5, 21] zu finden. Das Verfahren liefert in jedem Arterienstück an den inneren Knoten jene Gleichungen, die die Approximationen von  $A$  und  $Q$  zum Zeitpunkt  $t^n$  mit jenen zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  in Verbindung

setzen. Die Werte an den Randknoten und bei den Verbindungsknoten erhält man über die Randbedingungen, deren numerische Formulierung Ziel dieses Abschnitts ist. Die Approximation zum Zeitpunkt  $t^0 = 0$  wird aus den gegebenen Anfangsbedingungen berechnet.

Zunächst sei daran erinnert, dass aufgrund des hyperbolischen Charakters des betrachteten Systems nur jeweils eine Randbedingung an den Enden benötigt wird. Um das System numerisch zu lösen, müssen an den Randknoten zu jedem Zeitpunkt  $t^{n+1}$  jedoch zwei Daten bestimmt werden, nämlich  $A^{n+1}$  und  $Q^{n+1}$ , die Approximationen von  $A$  bzw.  $Q$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$ . Um die fehlende Information zu erhalten, sei hier die Methode der Extrapolation der auslaufenden charakteristischen Variablen am distalen Knoten  $z = L$  erklärt. Dazu sei angenommen, dass die distale Randbedingung durch

$$W_2(A^{n+1}, Q^{n+1}) = g_2(t^{n+1}) \quad (6.21)$$

gegeben ist, wobei  $g_2$  eine beliebige Funktion ist.

In Kapitel 5 wurde bereits gezeigt, dass die Riemann-Invariante  $W_1$ , die mit der Welle assoziiert wird, die das Gebiet beim distalen Knoten verlässt und sich mit Geschwindigkeit  $\lambda_1$  fortbewegt, im Fall, dass kein Quellterm vorliegt, die Gleichung

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0$$

erfüllt.  $W_1$  ist daher konstant entlang der charakteristischen Kurve, die durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_1(A(t), Q(t))$$

gegeben ist. Als Approximation für  $W_1$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  ergibt sich nun:

$$W_1^{n+1} = W_1(t^n, L - \lambda_1^n \Delta t) =: W_{1,\text{ext}}^{n+1}. \quad (6.22)$$

Ist der Quellterm nicht Null, so kann auf pseudo-charakteristische Variable zurückgegriffen werden [19].

Durch die Vorgabe von  $W_2$  und die Extrapolation von  $W_1$  hat man genügend Daten,

um das numerische Problem zu lösen. Durch Lösen des nichtlinearen Systems

$$\begin{aligned} W_1(A^{n+1}, Q^{n+1}) &= W_{1,\text{ext}}^{n+1} \\ W_2(A^{n+1}, Q^{n+1}) &= g_2 \end{aligned}$$

können die Randwerte für  $A$  und  $Q$  am distalen Knotenpunkt nun berechnet werden.

Formuliert man die Aktivität des Herzens ebenfalls als Randbedingung, so erhält man am proximalen Randknoten  $z = 0$  ähnliche Ergebnisse. In diesem Fall wird  $W_1$  vorgegeben und  $W_2$  extrapoliert. Als Approximation für  $W_2$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  ergibt sich:

$$W_2^{n+1} = W_2(t^n, -\lambda_2^n \Delta t) =: W_{2,\text{ext}}^{n+1}.$$

Mit Hilfe dieser Überlegungen lassen sich die numerischen Randbedingungen nun formulieren.

### 6.2.1 Verzweigungen

Bei der Modellierung der Verzweigungen (siehe Abbildung 6.3) ist in jedem der drei Teilbereiche  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  das System von partiellen Differentialgleichungen (3.22), (3.23) zu lösen. Die Systeme, die sich für jedes Arteriensegment aus dem Taylor-Galerkin-Verfahren ergeben, müssen daher am Verzweigungspunkt durch sechs Bedingungen für die Unbekannten  $A_i^{n+1}$  und  $Q_i^{n+1}$  (der Index  $i$  steht für den Teilbereich  $\Omega_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ , ergänzt werden.

Die Methode der Extrapolation der auslaufenden charakteristischen Variablen ermöglicht auch die Formulierung dieser sechs Bedingungen. Dazu werden  $W_1$  (für  $\Omega_1$ ) und  $W_2$  (für  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$ ) nach obiger Vorgehensweise extrapoliert und die Bedingungen (6.3) und (6.4) ausgenutzt. Daraus ergibt sich für jeden Zeitschritt ein nichtlineares System für die sechs Größen  $A_i^{n+1}$ ,  $Q_i^{n+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , das numerisch gelöst werden kann.

## 6.2.2 Peripherer Blutkreislauf

Gleichung (6.16) kann mittels Euler-Verfahren diskretisiert werden, um eine Approximation von  $W_1$  und  $W_2$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  zu erhalten. Dazu ersetzt man in dieser Gleichung  $\frac{dW_j}{dt}$  durch  $\frac{W_j^{n+1}-W_j^n}{\Delta t}$ ,  $j = 1, 2$ , und erhält somit

$$s_1 \frac{W_2^{n+1} - W_2^n}{\Delta t} + W_2^{n+1} = s_2 \frac{W_1^{n+1} - W_1^n}{\Delta t} - s_3 W_1^{n+1}.$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit  $\Delta t$  und anschließendem Zusammenfassen der Terme ergibt sich

$$(\Delta t + s_1)W_2^{n+1} = (s_2 - s_3\Delta t)W_1^{n+1} - s_2W_1^n + s_1W_2^n$$

und damit schließlich

$$W_2^{n+1} = \frac{(s_2 - s_3\Delta t)W_1^{n+1} - s_2W_1^n + s_1W_2^n}{\Delta t + s_1}. \quad (6.23)$$

Ergänzt man Gleichung (6.23) noch mit der Extrapolation der auslaufenden Riemann-Invarianten  $W_1$ , so ergeben sich die folgenden distalen Randbedingungen:

$$W_1(A^{n+1}, Q^{n+1}) = W_{1,\text{ext}}^{n+1}, \quad (6.24)$$

$$W_2(A^{n+1}, Q^{n+1}) = \frac{(s_2 - s_3\Delta t)W_1^{n+1} - s_2W_1^n + s_1W_2^n}{\Delta t + s_1}. \quad (6.25)$$

Dieses System kann dann mittels Newton-Verfahren numerisch gelöst werden.

## 6.2.3 Beschreibung der Herzaktivität

### Standardmodell

Zunächst sei erwähnt, wie die Randbedingungen im Standardmodell, in dem die Herzaktivität als proximale Randbedingung beschrieben wird, formuliert werden. Dazu sei daran erinnert, dass beim proximalen Rand zwischen CV Bedingungen (geschlossene Aortenklappe) und OV Bedingungen (geöffnete Aortenklappe) unterschieden wird. In beiden Fällen wird  $W_1$  vorgegeben und  $W_2$  extrapoliert, um die notwendigen Bedingungen zu erhalten.

*CV Bedingungen:* Ist die Aortenklappe geschlossen, so ist die Riemann-Invariante  $W_1$  durch Gleichung (6.17) gegeben. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen:

$$W_1^{n+1} = -W_2^{n+1} = -W_{2,\text{ext}}^{n+1} \quad (6.26)$$

$$W_2^{n+1} = W_{2,\text{ext}}^{n+1}. \quad (6.27)$$

*OV Bedingungen:* Im Falle einer offenen Aortenklappe wird eine Druckkurve  $P_v(t)$  des linken Ventrikels vorgegeben, und die Riemann-Invariante  $W_1$  wird mit Hilfe von Gleichung (6.18) berechnet. Damit erhält man die folgenden Bedingungen:

$$W_1^{n+1} = W_{2,\text{ext}}^{n+1} + 4\sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{P_v(t^{n+1}) + \frac{\beta}{\sqrt{A_0}}} - \sqrt{\frac{\beta}{A_0}} \right) \quad (6.28)$$

$$W_2^{n+1} = W_{2,\text{ext}}^{n+1}. \quad (6.29)$$

## Das Herzmodell

Auch beim Herzmodell wird zwischen CV und OV Bedingungen unterschieden, wobei im Fall einer offenen Aortenklappe im Gegensatz zum Standardmodell zusätzlich die Wechselwirkung zwischen dem Herzen und den Arterien berücksichtigt wird.

*CV Bedingungen:* Solange die Aortenklappe geschlossen ist, ist das Herzmodell vom Modell für das arterielle System komplett entkoppelt, weil kein Feedback des arteriellen Kreislaufes zurück an das Herz gegeben ist. In diesem Fall gilt  $Q = 0$  am proximalen Rand, weil kein Blut in das arterielle System hineinfließt, und die Bedingungen (6.26), (6.27) sind als proximale Randbedingungen ebenfalls zulässig.

*OV Bedingungen:* Um den Ventrikeldruck zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  zu bekommen, approximiert man Gleichung (6.19) und erhält laut [4]:

$$P_v^{n+1} = E_v(t^{n+1}) \left( V_v^n - \frac{Q_v^{n+1} + Q_v^n}{2} \Delta t - V_0 \right) + R(t^n, V_v^n) Q_v^{n+1}, \quad (6.30)$$

wobei  $R$  eine Funktion ist, die von  $t^n$  und  $V_v^n$  abhängt. Der untere Index bei den Größen in Gleichung (6.30) steht für das linke Ventrikel, der obere Index für den Zeitpunkt, bei dem die Größen ausgewertet werden. Es wird angenommen, dass die Werte für den Druck und den mittleren Fluss beim Aortenknötchen mit  $P_v$  bzw.  $Q_v$  übereinstimmen,

wenn die Aortenklappe offen ist.

Gleichung (6.30) und die Extrapolation der Riemann-Invarianten  $W_2$  bilden nun die notwendigen Bedingungen für den Fall, dass die Aortenklappe offen ist. Das Volumen im Ventrikel wird gemäß

$$V_v^{n+1} = V_v^n - \frac{Q_v^{n+1} + Q_v^n}{2} \Delta t$$

aktualisiert.

Bezeichne  $T$  die Dauer einer Herzperiode. Um den Herzzyklus zu simulieren, wird das Modell zu jedem Zeitschritt  $t^* = kT$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , neu aufgerufen. Dazu wird angenommen, dass zu diesen Zeitschritten der linke Ventrikel komplett mit Blut gefüllt ist. Bezeichnet man das Schlagvolumen mit  $V^*$ , so gilt demnach:

$$V_v(t^*) = V^*.$$

Zu jedem Zeitpunkt  $t^*$  erreicht die Elastanz  $E(t^*)$  also ihr Minimum.

Zu dem Zeitpunkt, bei dem sich die Aortenklappe öffnet, gilt nun:

$$\begin{aligned} Q_v^n &= Q_v^{n+1} = 0, \\ V_v^n &= V^*. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist Gleichung (6.30) ausreichend, um den Ventrikeldruck  $P_v^{n+1}$  zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  zu berechnen.

## 6.2.4 Aktivität der Aortenklappe: Umschaltung zwischen CV und OV Bedingungen

In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wie das Öffnen und Schließen der Aortenklappe - und somit die Umschaltung zwischen den CV und OV Bedingungen - beschrieben werden kann.

Das Öffnen der Aortenklappe erfolgt aufgrund eines Differenzdruckes. Bezeichne  $P_a$  den Druck, der am proximalen Knoten der Aorta durch das eindimensionale Blutflussmodell

berechnet wird. Während die Aortenklappe geschlossen ist, wird zu jedem Zeitschritt  $t^{n+1}$  der Ventrikeldruck  $P_v^{n+1}$  mit  $P_a^{n+1}$  verglichen. Sobald

$$P_v^{n+1} - P_a^{n+1} > 0$$

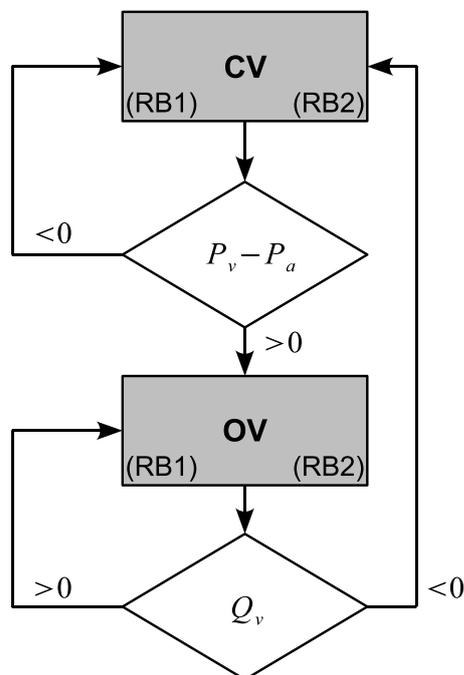
gilt, öffnet sich die Aortenklappe. Die positive Druckdifferenz bewirkt, dass dann das Blut aus dem linken Ventrikel in das arterielle System gepresst wird. Vom nächsten Zeitschritt an werden die OV Bedingungen angenommen, bis sich die Klappe wieder schließt.

Das Schließen der Aortenklappe am Ende der Systole wird über das Vorzeichen des mittleren Flusses  $Q_v$  im linken Ventrikel beschrieben. Der erste betrachtete Zeitschritt, bei dem

$$Q_v^{n+1} < 0$$

gilt, soll das Schließen der Aortenklappe bezeichnen. Von da an werden solange CV Randbedingungen angenommen, bis der Herzzyklus von neuem beginnt.

Das Diagramm in Abbildung 6.7 zeigt schematisch den Ablauf bei der Modellierung der Aortenklappe.



**Abbildung 6.7:** Ablaufdiagramm für die Modellierung der Aortenklappe (nach [4]). (RB1) steht für die Randbedingungen beim Standardmodell (CV: (6.26), (6.27); OV: (6.28), (6.29)) und (RB2) für jene beim Herzmodell (CV: (6.26), (6.27); OV: (6.30), (6.29)).

# Kapitel 7

## Schlussfolgerungen

In den vorigen Kapiteln wurden verschiedene Randbedingungen für die betrachteten Modelle formuliert. Hier soll nun darauf eingegangen werden, für welche Anwendungen sich diese Randwertmodelle eignen. Abschließend wird noch auf das Problem der Identifizierung der Randbedingungen hingewiesen.

### 7.1 Anwendungen

In Kapitel 5 wurden Randbedingungen für das eindimensionale Modell zur Beschreibung des Blutflusses in einer Arterie formuliert. Diese bestanden aus der Vorgabe von Druck oder Volumenfluss am proximalen Ende und nicht-reflektierenden Randbedingungen am distalen Ende des betrachteten Arterienstückes. Derartige Bedingungen eignen sich, um die Ausbreitung von mittlerem Druck und Volumenfluss sowie der Pulswelle und die Pulswellengeschwindigkeit in einzelnen Arteriensegmenten zu studieren.

Für den proximalen Rand müssen dafür der zeitliche Verlauf von Druck und Volumenfluss - etwa infolge von Messungen - bekannt sein. Oft stehen jedoch keine geeigneten Messdaten für diese beiden Größen zur Verfügung. In gewissen Fällen genügt auch der zeitliche Verlauf von nur einer der beiden physikalischen Größen. Hierbei schreibt man häufiger den Druck vor, weil für diesen eher Daten zur Verfügung stehen.

Durch nicht-reflektierende Bedingungen am distalen Rand werden Reflexionen der Wellen, die an Verzweigungen oder Verengungen der folgenden Gefäße entstehen, nicht berücksichtigt. Randbedingungen dieser Art eignen sich also nur für Studien, in wel-

chen diese Reflexionen außer Acht gelassen werden können.

In Kapitel 6 wurden zwei verschiedene Randwertmodelle für den mit dem Herzen gekoppelten Arterienbaum betrachtet, die sich durch unterschiedliche Randbedingungen am proximalen Rand des arteriellen Systems unterscheiden.

Die Wahl der distalen Randbedingungen als komplexe Impedanz unterstreicht, dass die kleineren Arterien und Arteriolen des peripheren Blutkreislaufs den größten Teil des Strömungswiderstandes bestimmen. Der Vorteil dieser Randbedingungen besteht darin, dass sie Reflexionen von Wellen miteinbeziehen. Derartige Wellenreflexionen können etwa vermehrt bei Versteifung der Arterienwand oder Gefäß-Endoprothesen auftreten, sodass sich diese Randbedingungen für Studien pathologischer Fälle im medizinischen Bereich eignen. Weiters kann durch diese Art von Randbedingungen eine vollständige Blockierung einer Arterie modelliert werden. Dabei erhält  $R_T$  den Wert 1, sodass die Welle komplett reflektiert wird.

Beim proximalen Rand lässt die Wahl nicht-reflektierender Randbedingungen beim Standardmodell die Wechselwirkung zwischen dem arteriellen System und dem linken Ventrikel außer Acht, weil die Wellen, die von der Peripherie zurück zum Herzen kommen, absorbiert werden. Für Studien pathologischer Fälle sind diese Randbedingungen daher nicht geeignet, weil die Wirkung der reflektierten Pulswelle auf das Herz nicht berücksichtigt wird. Durch Versteifung der Arterien etwa erhöht sich die Pulswellengeschwindigkeit, sodass die von der Peripherie reflektierten Wellen früher zum Herzen zurück gelangen. Dadurch kann es passieren, dass die Reflexionen noch während der Systole zurückkehren, was zu einer Belastung des Herzens führt. Diese für viele Anwendungen wichtigen Auswirkungen werden durch die Wahl nicht-reflektierender Randbedingungen nicht beachtet.

Die proximalen Randbedingungen beim Herzmodell hingegen berücksichtigen den Einfluss des arteriellen Kreislaufs auf das Herz. Dadurch eignen sie sich, um die Ausbreitung von Druckwellen und ihren Einfluss auf das Herz speziell in pathologischen Situationen zu studieren.

## 7.2 Identifizierung der Randbedingungen

Abschließend wird auf die Identifizierung der Randbedingungen eingegangen. Diese stellt ein wesentliches Problem dar, weil viele der notwendigen Größen nicht direkt messbar sind.

Der periphere Widerstand etwa, der bei der Beschreibung der distalen Randbedingungen des in Kapitel 6 betrachteten gekoppelten Modells eingeht, kann überhaupt nicht direkt gemessen werden. Bestimmen lässt sich nur der totale periphere Widerstand an der Aortenwurzel. Dies kann zum Beispiel nicht-invasiv mit Hilfe der Impedanzkardiographie erfolgen. Hierbei wird ein hochfrequenter Wechselstrom über Elektroden durch den Thorax geleitet und über die Spannungsänderung die Impedanzänderung bestimmt. Mit diesem Messverfahren lassen sich auch andere hämodynamische Parameter wie etwa Herzzeitvolumen oder Schlagvolumen ermitteln. Eine andere Möglichkeit besteht darin, invasiv mit Hilfe eines Katheters, der in die Aorta eingebracht wird, Druck und Fluss zu messen und daraus den totalen peripheren Widerstand zu berechnen. Durch Vorwärtsrechnung erhält man dann den Widerstand in der Peripherie. Näheres dazu in [13].

Bei der Beschreibung der proximalen Randbedingungen gehen der zeitliche Verlauf von Druck oder Fluss ein. Der transiente Druck kann nur invasiv mit Hilfe eines an ein Manometer angeschlossenen Katheters gemessen werden. Der Fluss hingegen lässt sich auch nicht-invasiv mittels Dopplersonographie (Ultraschall) bestimmen. Dabei werden über einen Schallkopf Schallwellen in den Körper gesendet, die von den Oberflächen der körperinneren Strukturen (Erythrozyten) reflektiert werden. Durch die Bewegung dieser Strukturen ändert sich die Frequenz des reflektierten Schalls, der von einem Empfängerschallkopf aufgenommen wird. Da die Frequenzänderung zwischen einfallendem und reflektiertem Schall proportional zur Strömungsgeschwindigkeit ist, lässt sich daraus der Fluss ermitteln [11].

Mit Hilfe der genannten Messverfahren ist es also möglich, einige der Randbedingungen zu identifizieren. Dieser Schritt ist neben der Identifizierung der physikalischen Modellparameter notwendig, damit die Modelle und Simulationen für den medizinischen Bereich brauchbar sind und bei der Erforschung und Behandlung von Herz-Kreislauf-Erkrankungen eingesetzt werden können.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Simulation als Problemlösungsverfahren . . . . .	6
1.2	Simulationskreislauf . . . . .	6
1.3	Schritte einer Simulationsstudie . . . . .	7
2.1	Schematische Darstellung des Herzens . . . . .	12
2.2	Herzzyklus . . . . .	15
2.3	Windkesselwirkung der Aorta . . . . .	17
2.4	Schematischer Funktionsplan des Blutkreislaufs . . . . .	19
2.5	Schematische Darstellung des arteriellen Druckpulses . . . . .	23
3.1	Lagrange-Abbildung . . . . .	27
3.2	Aufteilung des Randes $\partial\Omega_t$ . . . . .	29
3.3	Vergleich zwischen Lagrange-Abbildung und ALE-Abbildung . . . . .	31
3.4	Vereinfachte Darstellung einer Arterie als zylindrisches, dehnbares Rohr	32
3.5	Längsschnitt des Rohrstückes $\mathcal{P}$ . . . . .	34
3.6	Aufteilung des Randes $\partial\mathcal{P}$ des Rohrstückes $\mathcal{P}$ . . . . .	36
6.1	Schematische Darstellung des gekoppelten Systems . . . . .	64
6.2	Riemann-Invariante $W_1$ und $W_2$ im Fall nicht-reflektierender Randbe- dingungen . . . . .	66
6.3	Eindimensionale Modellierung der Verzweigungen . . . . .	67
6.4	Inputimpedanz $Z_{\text{in}}$ als Übertragungsfunktion . . . . .	68
6.5	Windkesselmodell und äquivalente Darstellung als elektrischer Schaltkreis	69
6.6	Drei-Elemente-Windkesselmodell zur Beschreibung des peripheren Blut- kreislaufs . . . . .	72
6.7	Ablaufdiagramm für die Modellierung der Aortenklappe . . . . .	81

# Index

- k*-Riemann-Invariante, 52
- k*-te Charakteristik, 52
- k*-te charakteristische Kurve, 52
- k*-tes charakteristisches Feld, 51
  
- ALE Transport Theorem, 35
- ALE-Abbildung, 30
- Aortenklappe, 12
- Atrium, 11
  
- Cauchy-Problem, 46
- Charakteristik, 48
- charakteristische Fläche, 53
- charakteristische Kurve, 48
- charakteristische Variable, 51
- Compliance, 20
  
- Diastole, 13
- Divergenztheorem, 35
  
- echt linear, 52
- einfache Welle, 54
  
- Fluss, 20
  
- Gesetz von Laplace, 14
  
- Hagen-Poiseuille-Gesetz, 17, 21
- Herzkammer, 12
- Herzzeitvolumen, 23
- hyperbolisch, 45
- Inputimpedanz, 68
  
- klassische Lösung, 47
  
- Lagrange-Abbildung, 26
- linear entartet, 52
- lokale Existenz von Riemann-Invarianten, 53
  
- Methode der Charakteristiken, 49
  
- Newtonsche Flüssigkeit, 21
- nicht-reflektierende Randbedingungen, 60
  
- peripherer Widerstand, 68
  
- Riemann-Invariante, 52
- Riemann-Problem, 47
  
- Schlagvolumen, 10
- Simulation, 5
- strikt hyperbolisch, 45
- symmetrisierbar, 45
- System in Erhaltungsform, 45
- Systole, 13
  
- totaler peripherer Widerstand, 17
- transmuraler Druck, 19
  
- Ventrikel, 12
- Volumenelastizitätskoeffizient, 20
- Vorhof, 11
  
- Windkessel, 16
- Windkesselfunktion, 17

# Literaturverzeichnis

- [1] P. Broemser and O.F. Ranke. Über die Messung des Schlagvolumens des Herzens auf unblutigem Weg. *Zeitung für Biologie*, 90:467, 1930.
- [2] S. Canic and E.H. Kim. Mathematical analysis of quasilinear effects in a hyperbolic model of blood flow through compliant axi-symmetric vessels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26:1161–1186, 2003.
- [3] L. Formaggia, D. Lamponi, and A. Quarteroni. One-dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3):251–276, 2003.
- [4] L. Formaggia, D. Lamponi, M. Tuveri, and A. Veneziani. Numerical modeling of 1d arterial networks coupled with a lumped parameters description of the heart. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 9(5):273–288, 2006.
- [5] L. Formaggia, F. Nobile, and A. Quarteroni. A one dimensional model for blood flow: application to vascular prosthesis. *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics*, 19:137–153, 2002.
- [6] O. Frank. Die Grundform des arteriellen Pulses. *Zeitung für Biologie*, 37:483–526, 1899.
- [7] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, volume 118. Springer, 1996.
- [8] E. Hagenbach. Über die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausfluss aus Röhren. *Annalen der Physik*, 185(3):385–426, 1860.

- 
- [9] G.W. Hedstrom. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 30(2):222–237, 1979.
- [10] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Band 2*. BG Teubner Verlag, 2004.
- [11] J. Huppelsberg and K. Walter. *Kurzlehrbuch Physiologie*. Georg Thieme Verlag, 2003.
- [12] A. Jeffrey. *Quasilinear hyperbolic systems and waves*. Pitman Publishing, London, 1976.
- [13] J. Kropf. *Multiscale blood flow modelling and simulation*. PhD thesis, Technische Universität Wien, 2007.
- [14] W.W. Nichols and M.F. O'Rourke. *McDonald's blood flow in arteries*. Oxford University Press New York, 1998.
- [15] A. Noordergraaf. Hemodynamics. *Biological Engineering*, 1969.
- [16] A. Noordergraaf. *Circulatory system dynamics*. Academic Press, 1978.
- [17] J.L.M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 12:112, 1841.
- [18] A. Quarteroni and L. Formaggia. Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system. *Handbook of Numerical Analysis*, 12:3–127, 2004.
- [19] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 1994.
- [20] C.M. Quick. Integrated arterial hemodynamics. Unpublished postdoctoral studies.
- [21] S.J. Sherwin, L. Formaggia, J. Peiró, and V. Franke. Computational modelling of 1d blood flow with variable mechanical properties and its application to the simu-

- lation of wave propagation in the human arterial system. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43:673–700, 2003.
- [22] S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiró, and K. Parker. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3):217–250, 2003.
- [23] S. Silbernagl and A. Despopoulos. *Taschenatlas der Physiologie*. Georg Thieme Verlag, 2003.
- [24] S. Silbernagl and R. Klinker. *Lehrbuch der Physiologie*. Georg Thieme Verlag, 1994.
- [25] N.P. Smith, A.J. Pullan, and P.J. Hunter. An anatomically based model of coronary blood flow and myocardial mechanics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62:990–1018, 2002.
- [26] H. Suga and K. Sagawa. Instantaneous pressure-volume relationships and their ratio in the excised, supported canine left ventricle. *Circulation Research*, 35(1):117–126, 1974.
- [27] H. Suga, K. Sagawa, and A.A. Shoukas. Load independence of the instantaneous pressure-volume ratio of the canine left ventricle and effects of epinephrine and heart rate on the ratio. *Circulation Research*, 32(3):314–322, 1973.
- [28] K.W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1):1–24, 1987.
- [29] I. Troch and F. Breiteneker. Modellbildung und Simulation, 2004. Arbeitsunterlage zur gleichnamigen Vorlesung mit Übung, Technische Universität Wien.
- [30] J.R. Womersley. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of Physiology*, 127(3):553–563, 1955.
- [31] J.R. Womersley. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube.

- 
- I. The linear approximation for long waves. *Philosophical Magazine*, 46(373):199–221, 1955.
- [32] J.R. Womersley. *An Elastic Tube Theory of Pulse Transmission and Oscillatory Flow in Mammalian Arteries*. Wright Air Development Center, 1957.
- [33] J.R. Womersley. Oscillatory flow in arteries: the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission. *Physics in Medicine and Biology*, 2:178–187, 1957.