

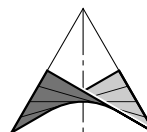


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

VIENNA
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY

INSTITUT FÜR
DISKRETE MATHEMATIK UND GEOMETRIE

FORSCHUNGSGRUPPE
DIFFERENTIALGEOMETRIE UND
GEOMETRISCHE STRUKTUREN



DIPLOMARBEIT

Rationale Parametrisierungen von Kugelhüllflächen

Ausgeführt am Institut für

Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Privatdoz. Univ.Ass. Dr. Boris ODEHNAL

durch

David GRUBER

Artgrabengasse 3, 2620 Neunkirchen-Mollram

22. Oktober 2008

Einleitung

Rational parametrisierbare Flächen sind vor allem für die Implementierung in CAD-Systemen von großem Wert, denn diese Flächen können als rationale Bezier-Flächen geschrieben werden. Kugelhüllflächen sind im allgemeinen nicht rational parametrisierbar und werden daher oft approximiert. Im Folgenden werden besonders die rational parametrisierbaren Kugelhüllflächen betrachtet, sowie Konstruktionen der Parametrisierungen angegeben.

Im **ersten Kapitel** sind die notwendigen Grundlagen zur Liniengeometrie und Zyklographie zusammengefasst. Das **zweite Kapitel** beinhaltet die Theorie zur Berechnung von rationalen Parametrisierungen von einparametrischen Kugelfamilien. M. PETERNELL und H. POTTMANN [16] haben bewiesen, dass jede Einhüllende einer solchen Menge von Kugeln eine rationale Parametrisierung besitzt, wenn die Mittenkurve und die Radiusfunktion rational sind. Weiters wird das Verfahren zur Gradreduktion von R. KRAS-AUSKAS [12] erläutert.

Im **dritten Kapitel** sind die Ergebnisse von M. PETERNELL und B. ODEHNAL [15] eingearbeitet. Es zeigt sich, dass die Parametrisierung der Einhüllenden einer zwei-parametrischen Kugelfamilie unter bestimmten Voraussetzungen rational sein kann. Sie betrachten das zyklgraphische Urbild der Kugelfamilie. Sind die Ferngeraden der Tangentialebenen dieser Fläche eine Faserung des Fernraums, so liefert die zyklgraphische Abbildung eine rationale Parametrisierung der Hüllfläche. In dieser Arbeit lag das Hauptaugenmerk auf speziellen Faserungen, den Geradenetzen. Zu den verschiedenen Netztypen werden Parametrisierungen der Hüllflächen berechnet.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Betreuer BORIS ODEHNAL bedanken, der mir bei all meinen Fragen mit Rat und Tat zur Seite stand.

Ein großer Dank gilt auch meiner Familie, vor allem meiner Mutter EVA GRUBER, die mir dieses Studium ermöglicht und mich vor allem am Beginn meines Studiums motiviert hat nicht aufzugeben.

Ebenso möchte ich mich auch bei LISA BAUER bedanken, die während meines Studiums immer für mich da war und mich jederzeit unterstützt hat.

Abschließend möchte ich mich bei allen Professoren, Assistenten und Studienkollegen bedanken, die mich während meines Studiums begleitet haben und dieses zu einem schönen Lebensabschnitt gemacht haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrische Grundlagen	6
1.1	Liniengeometrie	6
1.1.1	Plückerkoordinaten	6
1.1.2	Lagebeziehungen	9
1.1.3	Lineare Komplexe	9
1.1.4	Geradenkongruenzen	10
1.1.5	Faserung	11
1.1.6	Geradennetze	11
1.1.7	Sehnenkongruenz einer Kubik	14
1.1.8	(1,n)-Kongruenz	14
1.2	Zyklographie	15
1.2.1	Die zyklographische Abbildung	15
1.2.2	Zyklographische Bilder von Geraden und Ebenen	18
1.2.3	Zyklographische Bilder von Kurven und Flächen	19

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	4
2 Hüllflächen ein-param. Kugelfamilien	20
2.1 Berechnung der Hüllfläche	20
2.2 Zyklographisches Urbild	25
2.3 Beispiel	26
2.4 Gradreduktion	27
2.4.1 Grundlagen	27
2.4.2 Minimaler Grad	30
3 Hüllflächen zwei-param. Kugelfamilien	33
3.1 Berechnung der Hüllfläche	33
3.1.1 Berechnung auf direktem Wege	33
3.1.2 Berechnung mit Hilfe der zyklographischen Abbildung	34
3.2 Bedingung für die Rationalität	36
3.3 $\mathcal{H}$ ist ein hyperbolisches Netz	38
3.3.1 Beide Achsen sind Passanten von Ω	39
3.3.2 Beide Achsen sind Sekanten von Ω	41
3.3.3 Beide Achsen sind Tangenten von Ω	42
3.3.4 Eine Achse ist eine Sekante, die andere eine Passante von Ω	42
3.3.5 Eine Achse ist eine Sekante, die andere eine Tangente von Ω	45
3.3.6 Eine Achse ist eine Passante, die andere eine Tangente von Ω	46
3.4 $\mathcal{H}$ ist ein elliptisches Netz	47

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	5
---------------------------	---

3.4.1	Beide Achsen sind Sekanten von Ω	48
3.4.2	Beide Achsen sind Tangenten von Ω	49
3.5	$\mathcal{H}$ ist ein parabolisches Netz	51
3.5.1	Die Achse ist eine Passante von Ω	52
3.5.2	Die Achse ist eine Sekante von Ω	53
3.5.3	Die Achse ist eine Tangente von Ω	54

Kapitel 1

Geometrische Grundlagen

1.1 Liniengeometrie

1.1.1 Plückerkoordinaten

Die Geometrie der Geraden des dreidimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^3$ wird in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sein. Zur besseren analytischen Behandlung werden diese durch *Plückerkoordinaten* beschrieben.

Eine Gerade l ist als Verbindung von zwei Punkten $p = (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)^T$ und $q = (q_0 : q_1 : q_2 : q_3)^T$ festgelegt. Die Koordinaten von l erhält man nun durch bilden der Determinanten der 2×2 -Teilmatrizen der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$l = \left(l_{01}, l_{02}, l_{03}; l_{23}, l_{31}, l_{12} \right), \text{ mit } l_{ik} = p_i q_k - p_k q_i. \quad (1.1)$$

M besitzt zwar eigentlich sechzehn 2-reihige Teilmatrizen, aber da $l_{ii} = 0$ und $l_{ik} = -l_{ki}$ gilt, sind nur sechs davon relevant. Im Folgenden seien die Geradenkoordinaten mit

$$l = \left(l_1, l_2, l_3; l_4, l_5, l_6 \right) := \left(l_{01}, l_{02}, l_{03}; l_{23}, l_{31}, l_{12} \right)$$

bezeichnet. Die sechs Koordinaten l_i heißen *Plückerkoordinaten*. Dieser Koordinatenvektor von l ist das sogenannte *Grassman-Produkt* $p \wedge q$ von p und q . Nach (1.1) ist $\wedge$ alternierend und linear in jedem Argument. Ersetzen wir p durch $\lambda p + \mu q$ und q durch $\rho p + \sigma q$, so zeigt

$$\begin{aligned} l &= (\lambda p + \mu q) \wedge (\rho p + \sigma q) = \\ &= \lambda \rho (p \wedge p) + \lambda \sigma (p \wedge q) + \mu \rho (q \wedge p) + \mu \sigma (q \wedge q) = \\ &= (\lambda \sigma - \mu \rho) (p \wedge q), \end{aligned} \quad (1.2)$$

die Homogenität der Plückerkoordinaten und ihre Unabhängigkeit von der Auswahl der Punkte auf l .

Erweitert man die Matrix M zu einer 4×4 -Matrix N , indem man die dritte und vierte Zeile gleich der ersten beziehungsweise der zweiten wählt, so hat diese Matrix den Rang $rg(N) = 2$. Durch Entwickeln der Determinante nach den ersten beiden Zeilen, folgt eine weitere Bedingung für die Plückerkoordinaten, die *Plückeridentität*, denn die Determinante muss gleich Null sein:

$$\det \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 2(l_1 l_4 + l_2 l_5 + l_3 l_6) = 0. \quad (1.3)$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass jedes Sextupel

$$l = (l_1, l_2, l_3; l_4, l_5, l_6) \neq (0, \dots, 0), \quad (1.4)$$

das die Plückeridentität erfüllt, genau eine Gerade im $\mathbb{P}^3$ bestimmt.

Gegeben seien die Punkte S_i , die in den Koordinatenebenen $x_i = 0$ liegen mit folgender Darstellung

$$\begin{aligned} s_1 &= (0 : l_1 : l_2 : l_3), & s_2 &= (-l_1 : 0 : l_6 : -l_5), \\ s_3 &= (-l_2 : -l_6 : 0 : l_4), & s_4 &= (-l_3 : l_5 : -l_4 : 0). \end{aligned}$$

Wobei die Koordinaten l_i (1.3) erfüllen. Berechnet man gemäß (1.1) $s_i \wedge s_j$ für irgendein Paar (i, j) , $i \neq j$, so erhält man die Koordinaten $l = (l_1, \dots, l_6)$,

zum Beispiel für $i = 1, j = 2$:

$$s_1 \wedge s_2 = \begin{pmatrix} l_1 l_1, & l_1 l_2, & l_1 l_3; & -l_2 l_5 - l_3 l_6, & l_1 l_5, & l_1 l_6 \end{pmatrix} \\ \stackrel{-l_2 l_5 - l_3 l_6 = l_1 l_4}{=} \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & l_3; & l_4, & l_5, & l_6 \end{pmatrix}.$$

Geraden können auch als Schnitt von zwei Ebenen $U, u = (u_0 : u_1 : u_2 : u_3)^T$, und $V, v = (v_0 : v_1 : v_2 : v_3)^T$, aufgefasst werden. Analog wie vorher lassen sich die Geradenkoordinaten durch Unterdeterminantenbildung finden, siehe [18, 21]. Diese sogenannten Achsenkoordinaten l_i^* stimmen mit den Plückerkoordinaten bis auf ihre Reihenfolge überein.

$$\begin{pmatrix} l_1^*, & l_2^*, & l_3^*; & l_4^*, & l_5^*, & l_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_4, & l_5, & l_6; & l_1, & l_2, & l_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Im affinen Raum läßt sich das erste Tripel der Plückerkoordinaten einer Gerade geometrisch interpretieren als *Richtungsvektor* $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ der Gerade und das zweite als *Momentenvektor* $\bar{\mathbf{l}} = (l_4, l_5, l_6)$, siehe [18]. Die Lage dieser Vektoren bezüglich der Geraden sind in Abbildung 1.1 illustriert. In dieser Notation lässt sich die Plückerbedingung von l als

$$\langle \mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}} \rangle = 0 \quad (1.6)$$

schreiben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist.

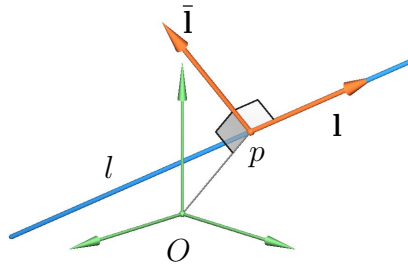


Abbildung 1.1: Richtungs- und Momentenvektor einer Geraden.

1.1.2 Lagebeziehungen

Ein Punkt $p = (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)^T$ ist in der Geraden $l = (l_1, l_2, l_3; l_4, l_5, l_6)$ enthalten, wenn folgendes Gleichungssystem erfüllt ist, siehe [21],

$$\begin{pmatrix} 0 & l_4 & l_5 & l_6 \\ -l_4 & 0 & l_3 & -l_2 \\ -l_5 & -l_3 & 0 & l_1 \\ -l_6 & l_2 & -l_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Die Schnittbedingung für zwei Geraden lässt sich aus der Tatsache, dass nur zwei koplanare Geraden einen Schnittpunkt haben, herleiten. Die Geraden $g = (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}})$ und $h = (\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}})$ seien durch Punkte p beziehungsweise q und Richtungsvektoren $\mathbf{g}$ beziehungsweise $\mathbf{h}$ gegeben, die vorläufig nicht parallel sein sollen ($\mathbf{g} \times \mathbf{h} \neq 0$). Spannen g und h eine Ebene auf, genau dann gilt $q - p \perp \mathbf{g}, \mathbf{h}$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\langle p - q, \mathbf{g} \times \mathbf{h} \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Die linke Seite lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \langle p - q, \mathbf{g} \times \mathbf{h} \rangle &= \langle p, \mathbf{g} \times \mathbf{h} \rangle - \langle q, \mathbf{g} \times \mathbf{h} \rangle = \\ &= \det(p, \mathbf{g}, \mathbf{h}) - \det(q, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = \\ &= \langle p \times \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle + \langle q \times \mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle = \\ &= \langle \bar{\mathbf{g}}, \mathbf{h} \rangle + \langle \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{g} \rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

somit folgt aus (1.8) und (1.9) die Schnittbedingung für g und h

$$\langle \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{g} \rangle + \langle \bar{\mathbf{g}}, \mathbf{h} \rangle = 0. \quad (1.10)$$

Man kann leicht zeigen, dass (1.10) auch für parallele Geraden gilt.

1.1.3 Lineare Komplexe

Ein *Geradenkomplex* ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von Geraden. Erfüllen die homogenen Plückerkoordinaten der Geraden des Komplexes eine lineare Gleichung, so heißt der Komplex *linear*.

Eine allgemeine lineare Gleichung zwischen den Plückerkoordinaten x_i einer Geraden x kann als

$$c_4x_1 + c_5x_2 + c_6x_3 + c_1x_4 + c_2x_5 + c_3x_6 = \langle \bar{\mathbf{c}}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}} \rangle = 0 \quad (1.11)$$

geschrieben werden. Die Menge von Geraden deren Koordinaten (1.11) erfüllen, heißt *linearer Geradenkomplex* $\mathcal{C}$. Das Sextupel $c = (c_1, \dots, c_6)$, welches den linearen Komplex bestimmt, muss im Allgemeinen die Plückerbedingung nicht erfüllen und bestimmt dann einen *regulären linearen Komplex*. Bei $\langle c, \bar{c} \rangle = 0$ spricht man von einem *singulären linearen Komplex*. Die Geraden eines singulären linearen Geradenkomplex sind die Treffgeraden an eine feste Gerade $(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$, welche *Achse* heißt.

1.1.4 Geradenkongruenzen

Wir betrachten in diesem und in den folgenden Abschnitten algebraische Geradenkongruenzen. Unter einer (m, n) -Geradenkongruenz¹ versteht man eine zwei-parametrische Mannigfaltigkeit von Geraden. Die Ordnung m einer Kongruenz gibt dabei an, wie viele Geraden durch einen Punkt, in allgemeiner Lage, hindurchgehen. Die Klasse n bezeichnet die Anzahl der Geraden die in einer Ebene, in allgemeiner Lage, liegen. Punkte und Ebenen in allgemeiner Lage heißen *regulär*. Die *singulären* Punkte der Kongruenz sind jene Punkte, die in unendlich vielen Geraden der Kongruenz enthalten sind, und bilden normalerweise zwei Mäntel der *Brennflächen*.

In Kapitel 3 werden *Faserungen* (s. 1.1.5) eine wichtige Rolle spielen, zu welchen die Kongruenzen der Ordnung eins gehören. Sie besitzen Brennkurven, die auch zu einer einzigen Kurve zusammenfallen können, im letzteren Fall wird die Kurve von den Kongruenzgeraden im Allgemeinen zweimal geschnitten. Eine Kongruenz der Ordnung eins mit nur einer Brennkurve ist die Sehnenkongruenz einer Kubik, siehe [22, 23].

¹Im Folgenden wird nur kurz Kongruenz geschrieben.

1.1.5 Faserung

Unter einer *Faserung* eines dreidimensionalen Raumes versteht man eine Menge von Elementen gleichen Ranges, die *Fasern*, wobei jeder Punkt des Raumes, bis auf eine gewisse Ausnahmemenge, in genau einer Faser enthalten ist, siehe [8].

Ein Beispiel für eine Faserung entsteht folgendermaßen. Man wähle eine Gerade $g(u)$ und ein Ebenenbüschel $\epsilon(u)$ um die Gerade h , wobei h und g windschief sind. Die Zuordnung von Punkten auf g und Ebenen aus ϵ sei eine bijektive Abbildung, und die Fasern sind die Geraden des durch einen festen u Wert bestimmten Geradenbüschels in $\epsilon(u_0)$ um $g(u_0)$.

Ein weiteres Beispiel für eine Faserung des $\mathbb{R}^3$ ist das *Geradenbündel*. Bei einem Geradenbündel wählt man einen Punkt S als Trägerpunkt und die Geraden durch S bilden dann die Faserung. Durch jeden Punkt des Raumes existiert eine eindeutige Verbindungsgerade mit S , diese sind die Fasern.

Weiteren Typen von Faserungen des dreidimensionalen Raumes durch Geraden sind die Geradenetze. Diese und ihre Eigenschaften werden in den nächsten Abschnitten näher erklärt.

1.1.6 Geradenetze

Kongruenzen erster Ordnung und Klasse heißen *Geradenetze*, sie können als Schnitt von zwei linearen Komplexen aufgefasst werden. Die Brennkurven sind zwei Geraden die entweder zueinander windschief und dabei reell oder konjugiert komplex, oder zusammenfallend sein können. Das Netz heißt dann *hyperbolisch*, *elliptisch* oder *parabolisch*, siehe [22]. Ein *singuläres* Netz besitzt keine Brennkurven sondern nur ein Brennpunkt.

Hyperbolisches Netz

Die Geraden des Netzes sind die gemeinsamen Treffgeraden an die beiden windschiefen Brennnlinien a_1 und a_2 . Diese Geraden bilden eine Faserung des $\mathbb{P}^3$, denn zu jedem Punkt des Raumes, der nicht auf a_1 oder a_2 liegt, gibt es eine eindeutige Treffgerade an zwei windschiefe Geraden. Um eine Faser des Netzes zu erhalten, verbindet man einen beliebigen regulären Punkt P , also $P \notin a_1, a_2$, mit a_1 und a_2 zu Ebenen ϵ beziehungsweise ϕ . Der Schnitt von ϵ mit ϕ ist die Faser $h = \epsilon \cap \phi$. Um alle Netzgeraden zu erhalten, muss man das Ebenenbüschel $\epsilon(u)$ um a_1 , mit dem Büschel $\phi(v)$ um a_2 schneiden.

Jeder Punkt Q auf der Brennnlinie a_1 ist Träger eines Geradenbüschels in der Ebene ϵ . Analoges gilt für die Punkte $R \in a_2$. Abbildung 1.2 zeigt ein Beispiel für ein hyperbolisches Netz.

Elliptisches Netz

Sind die Brennnlinien hoch imaginär, das heißt konjugiert komplex und windschief, so entsteht ein elliptisches Netz. Ähnlich zum hyperbolischen Netz konstruiert man die reellen Geraden des Netzes als Schnitt von zwei konjugiert komplexen Ebenenbüscheln $\epsilon(u)$ und $\phi(v) = \bar{\epsilon}(u)$, die die Brennnlinien als Träger besitzen. Da diese Ebenen zueinander konjugiert komplex sind, haben sie eine reelle Schnittgerade.

Bei einer anderen Erzeugungsmöglichkeit für ein elliptisches Netz geht man von zwei Ebenen $\alpha(u, v)$ und $\beta(u, v)$ aus. Man bildet mittels einer projektiven Kollineation die Punkte der einen Ebene auf Punkte der anderen Ebene ab. Die Verbindungsgeraden zugehöriger Punkte sind die Geraden des Netzes, sofern die Punkte der Schnittgerade nicht selbstentsprechend sind.

Elliptische Netze können auf 2 Arten als ein-parametrische Scharen von Reguli aufgefasst werden, siehe Abbildung 1.2.

Parabolisches Netz

Die Geraden des parabolischen Netzes gehören einer ein-parametrischen Familie von Geradenbüscheln an, deren Scheitel auf der einzigen Brennnlinie a liegen und deren Trägerebenen das ganze Ebenenbüschel $\epsilon(u)$ um a durchlaufen. Die Zuordnung von Scheitel $Q = a(u_0)$ zur Büschelebene $\epsilon(u_0)$ ist eine Projektivität.

Man kann das parabolische Netz auch als Schnitt von einem Ebenenbüschel mit einem Ebenenbündel erzeugen. Das Ebenenbüschel $\epsilon(u)$ hat a als Träger und der Träger des Ebenenbündels $\phi(u, v)$ ist ein Punkt $P \notin a$. Die Abbildung 1.2 zeigt auch ein parabolisches Netz.

Ein parabolisches Netz kann man auch als Schnitt von einem regulären und einem singulären linearen Komplex erhalten, wobei die Achse des singulären im regulären Komplex enthalten ist. Die Tangenten einer Regelfläche längs einer nicht torsalen Erzeugenden bilden ebenfalls ein parabolisches Netz.

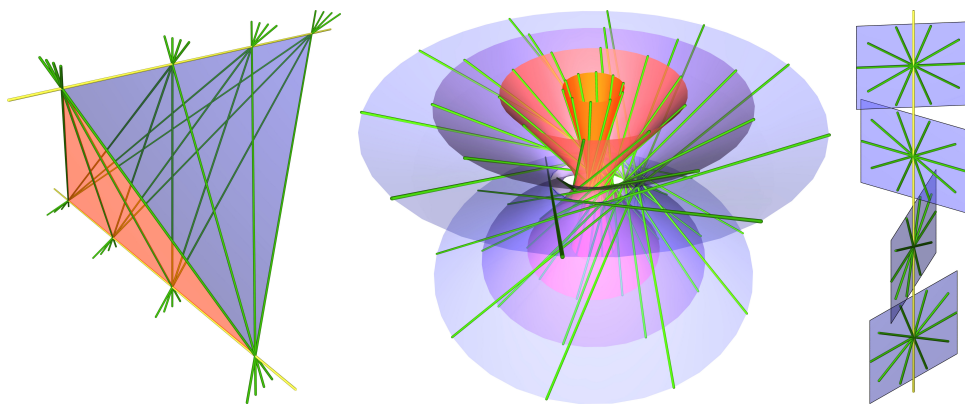


Abbildung 1.2: Die drei Typen von regulären Netzen: v.l.n.r.: hyperbolisch, elliptisch und parabolisch.

Singuläres Netz (Geradenbündel und Feld)

Die Treffgeradenmenge an zwei schneidende Geraden g und h besteht aus einem Feld und einem Bündel. Die Trägerebene ϵ des Feldes wird von den zwei

Geraden g , h aufgespannt, und der Träger P des Bündels ist der Schnittpunkt von g und h . Der Punkt P kann als Brennpunkt des Netzes aufgefasst werden.

1.1.7 Sehnenkongruenz einer Kubik

Unter den Kongruenzen gibt es nur eine der Ordnung eins und Klasse drei mit nur einer Brennlinie. Die Geraden der Kongruenz sind dabei die Sehnen und die Tangenten einer *Raumkubik*.

1.1.8 (1,n)-Kongruenz

Im Allgemeinen gibt es bei einer Kongruenz erster Ordnung zwei Brennlinien, wobei eine davon eine Gerade g und die andere eine Kurve k von n -ter Ordnung ist. Die Kurve wird dabei von der Geraden in $(n-1)$ Punkten geschnitten. Ein regulärer Punkt P spannt mit der Geraden eine Ebene auf, die mit der Kurve noch einen Restschnittpunkt Q hat. $P \vee Q$ ist die Gerade der Kongruenz. Daraus folgt, dass die Fasern die Elemente jener Geradenbüschel sind, die in den Ebenen des Ebenenbüschels um g liegen und den Träger Q haben.

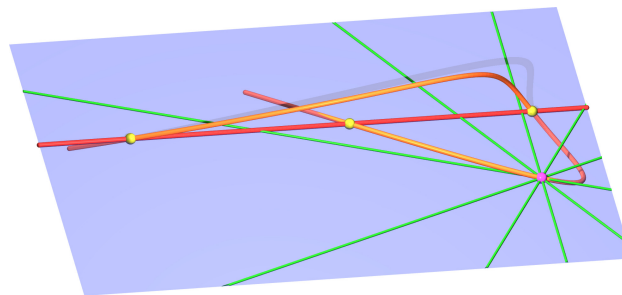


Abbildung 1.3: Ein Beispiel für eine (1,4)-Kongruenz.

Beispielsweise hat die Kurve $\beta = (3t + t^4, t^2(4 - t^2), t(4 - t^2))^T$ die Ordnung vier, und wird von der x -Achse in drei reellen Punkten geschnitten. Diese beiden könnten daher als Brennlinien einer (1,4)-Kongruenz dienen. Siehe Abbildung 1.3.

1.2 Zyklographie

1.2.1 Die zyklographische Abbildung

Um die Kugeln des $\mathbb{R}^3$ besser behandeln zu können, bedienen wir uns des *zyklographischen Modells*, siehe dazu [1, 11].

Eine Kugel K im $\mathbb{R}^3$ ist durch die Gleichung $K : \langle x-m, x-m \rangle = r^2$ festgelegt, wobei $m = (m_1, m_2, m_3)^T$ der Mittelpunkt und r der Radius der Kugel ist. Die Kugeln können durch einen Normalvektor orientiert werden, was durch einen vorzeichenbehafteten Radius gekennzeichnet wird. Im Folgenden werden diese *orientierten Kugeln* und die Punkte des $\mathbb{R}^3$, welche wir als Kugeln vom Radius 0 betrachten, zu einem neuen Kugelbegriff zusammengefasst.

Die Kugel K kann als $K = (m, r)^T$ dargestellt werden und entspricht somit einem Punkt im $\mathbb{R}^4$. Umgekehrt legt jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ eine orientierte Kugel mit dem Mittelpunkt $(x_1, x_2, x_3)^T$ und dem Radius x_4 fest. Die Abbildung γ von Punkten des $\mathbb{R}^4$ auf die Menge der orientierten Kugeln $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ heißt *zyklographische Abbildung* und $\mathbb{R}^4$ das *zyklographische Modell*:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathcal{S}, \\ P = (p_1, \dots, p_4)^T &\mapsto K : (x - m)^2 = p_4^2 \text{ mit } m = (p_1, p_2, p_3)^T \end{aligned} \quad (1.12)$$

Zwei orientierte Kugeln K_1, K_2 seien durch ihre Mittelpunkte $M = (m_1, m_2, m_3)^T, N = (n_1, n_2, n_3)^T$ und Radien m_4, n_4 gegeben. Sie befinden sich genau dann in orientiertem Kontakt, wenn die Kugeln ohne Orientierung einander berühren und die Normalvektoren im Berührungspunkt gleich orientiert sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle M - N, M - N \rangle &= (m_4 - n_4)^2 \\ (m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2 - (m_4 - n_4)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Diese Berührbedingung ist auch gültig, wenn eine der orientierten Kugeln ein Punkt ist. Bei $m_4 = 0$ folgt $K_1 \in K_2$ und aus (1.13) wird die Gleichung

$$\langle M - N, M - N \rangle - n_4^2 = 0. \quad (1.14)$$

(1.13) definiert ein pseudoeuklidisches Skalarprodukt in $\mathbb{R}^4$:

$$\langle a, b \rangle_{pe} = a^T D b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4, \quad (1.15)$$

wobei $D = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ ist. Durch dieses Skalarprodukt wird $\mathbb{R}^4$ zu einem *Minkowski-Raum* $\mathbb{R}^{3,1}$. Die Berührung von zwei Kugeln, gegeben durch $k_1 = (m_1, m_2, m_3, m_4)^T$ und $k_2 = (n_1, n_2, n_3, n_4)^T$, wird folglich im zyklographischen Modell durch

$$\langle k_1, k_2 \rangle_{pe} = 0 \quad (1.16)$$

ausgedrückt.

Durch den projektiven Abschluss von $\mathbb{R}^{3,1}$ erhalten die Punkte $b \in \mathbb{R}^{3,1}$ die homogenen Koordinaten $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4)^T$. In der Fernhyperebene $\omega : y_0 = 0$ definiert das Skalarprodukt aus (1.15) die Quadrik

$$\Omega : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0. \quad (1.17)$$

Damit lassen sich die Vektoren v des $\mathbb{R}^{3,1}$ in drei Klassen unterteilen:

- v ist **isotrop**, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} = 0$,
- v ist **flachgängig**, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} > 0$,
- v ist **steilgängig**, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} < 0$.

Der Fernpunkt einer Geraden g mit einem isotropen Richtungsvektor liegt auf Ω . Die Fernpunkte flachgängiger beziehungsweise steilgängiger Geraden sind Außen- beziehungsweise Innenpunkte von Ω . Der Minkowski-Raum ist ein Modellraum für die spezielle Relativitätstheorie, weshalb auch die Begriffe lichtartig, raumartig und zeitartig häufig Verwendung finden.

Die Polarität Π_Ω an Ω regelt die Orthogonalität in $\mathbb{R}^{3,1}$. Es werden die Fernpunkte von Geraden g auf die Fernebenen der zu g normalen Hyperebenen, und umgekehrt, abgebildet. Π_Ω ist festgelegt durch,

$$\Pi_\Omega : p = (p_0, \dots, p_3)^T \mapsto \epsilon = (e_0, \dots, e_3)^T = Dp. \quad (1.18)$$

Das Bild von Geraden g unter Π_Ω erhält man, indem zwei beliebige Punkte $P(p_0, p_1, p_2, p_3)$ und $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ zu einer Geraden g verbunden werden,

$$P \wedge Q = (g_1, \dots, g_6).$$

Dann wendet man Π_Ω an. Die Polarebenen von P und Q seien ϵ und ϕ , ihre Koordinaten unterscheiden sich von denen von P und Q nur um ein Vorzeichen in der vierten Koordinate. Wie man leicht nachrechnet sind die Koordinaten der Schnittgeraden

$$\epsilon \wedge \phi = (-g_4, -g_5, g_6; g_1, g_2, -g_3),$$

welche nach (1.5) bis auf Reihenfolge und Vorzeichen mit den Achsenkoordinaten übereinstimmen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_\Omega : g = (g_1, \dots, g_6) &\mapsto h = Eg, \text{ mit} \\ E &= \begin{bmatrix} 0 & \text{diag}(-1, -1, 1) \\ \text{diag}(1, 1, -1) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Zwei Geraden die bezüglich Ω polar sind, sind Ferngeraden von zueinander normalen Ebenen.

Das zyklographische Bild eines Punktes $P \in \mathbb{R}^{3,1}$ kann auch wie folgt gewonnen werden:

Schneidet man alle isotropen Geraden durch P , diese bilden den sogenannten *Lichtkegel*, mit der Hyperebene $y_4 = 0$, so erhält man die Kugel in $\mathbb{R}^3$ die mit der orientierten Kugel $\gamma(P)$ übereinstimmt.

Die Orthogonalprojektion $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch,

$$\pi : (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto (x_1, x_2, x_3)^T \quad (1.20)$$

gegeben. Die Abbildung π liefert für die zyklographische Abbildung eines Punktes genau die Koordinaten des Mittelpunktes der Bildkugel unter γ .

1.2.2 Zyklographische Bilder von Geraden und Ebenen

Die zyklographischen Bilder von Geraden g des $\mathbb{R}^4$ sind allgemein bekannte Objekte. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf der Geraden $\pi(g)$ und der Radius variiert linear. Das Hüllgebilde hängt vom Winkel ab, den die Gerade mit der Ebene $x_4 = 0$ einschließt.

- Liegt die Gerade parallel zu $x_4 = 0$ so haben die Kugeln konstante Radien und das Hüllgebilde ist ein *Drehzylinder*.
- Die Bilder von flachgängigen Geraden unter γ sind *Drehkegel*.
- Wenn g steilgängig ist, so ist das Hüllgebilde nicht reell.
- Alle Bilder von Punkten einer isotropen Gerade berühren einander in dem Punkt $P = g \cap (x_4 = 0)$. Das Hüllgebilde ist die gemeinsame *Tangentialebene* aller Kugeln dieser Schar.

Das Bild einer Ebene unter γ wird wie folgt bestimmt. Die Ebene ϵ sei gegeben durch $f(u, v) = a + ug + vh$, mit Richtungsvektoren g und h , a ist ein Punkt von ϵ .

- Wenn ϵ parallel zu $x_4 = 0$ ist, so besteht die Einhüllende $\gamma(\epsilon)$ aus zwei zu $\pi(\epsilon)$ im Abstand a_4 parallelen Ebenen.
- Ist ϵ flachgängig, so sind alle Richtungen $r = ug + vh$ flachgängig, das heißt $\langle r, r \rangle > 0$. Das zyklographische Bild ist ein Paar von Ebenen deren Schnittgerade die Gerade $\epsilon \cap (x_4 = 0)$ ist.
- Eine isotrope Ebene enthält genau eine Richtung von isotropen Geraden, das heißt, die Gleichung $\langle r, r \rangle = 0$ hat genau eine Lösung. Die Einhüllende von $\gamma(\epsilon)$ ist dann eine Ebene, die von den Kugeln in den Punkten $s = \epsilon \cap (x_4 = 0)$ berührt wird. Dabei ist $\pi(\epsilon)$ normal zu $\gamma(\epsilon)$.

- Ist ϵ steilgänglich, so hat die Gleichung $\langle r, r \rangle = 0$ zwei reelle Lösungen, die die isotropen Richtungen in ϵ bestimmen. Es existiert in diesem Fall keine reelle Einhüllende, $\gamma(\epsilon)$ sind zwei konjugiert komplexe Ebenen.

1.2.3 Zyklographische Bilder von Kurven und Flächen

Es sei $k(t)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^4$. Das zyklographische Bild $\gamma(k)$ ist dann eine einparametrische Kugelfamilie und $\pi(k)$ die Kurve der Mitten. Der Kugelradius $r(t)$ ist eine vom Kurvenparameter abhängige Funktion.

Sei durch $f : (u, v) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ eine zweidimensionale Fläche $f(u, v) = \Phi$ im $\mathbb{R}^{3,1}$ gegeben. Im Allgemeinen ist $\pi(\Phi)$ wieder eine 2-Fläche, welche die Mittelpunkte von $\Psi = \gamma(\Phi)$ enthält. Die Radien sind durch die Funktion $f_4(u, v)$ bestimmt. Die Hüllfläche besteht im Allgemeinen aus zwei Teilen und ist nur unter bestimmten Voraussetzungen rational parametrisierbar, siehe Kapitel 3.

Ist $f_4(u, v)$ konstant, haben also alle Kugeln den gleichen Radius, so liefert Ψ die Parallelflächen zu $\pi(\Phi)$ im Abstand f_4 .

Kapitel 2

Hüllflächen ein-parametriger Kugelfamilien

2.1 Berechnung der Hüllfläche

Eine ein-parametrische Kugelfamilie ist durch die Mittelpunktskurve $m(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t))$ und die Radiusfunktion $r(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ bestimmt. Die Einhüllende Γ einer solchen Menge nennt man *Kanalfläche*. Ist speziell r konstant, dann heißt sie *Rohrfläche*. Ist m eine Gerade, so ist Γ eine Drehfläche. Im Folgenden seien m , r einmal stetig differenzierbar. Die Kugeln der ein-parametrischen Schar sind dann durch

$$K(t) : \langle x - m(t), x - m(t) \rangle - r(t)^2 = 0 \quad (2.1)$$

gegeben. Wir bestimmen die Punkte x der Einhüllenden als $K \cap \dot{K} = \frac{dK(t)}{dt}$. Da

$$\dot{K}(t) : \langle x - m(t), \dot{m}(t) \rangle - r(t)\dot{r}(t) = 0, \quad (2.2)$$

gilt zu jedem Zeitpunkt $t \in I$: Die Hüllpunkte liegen auf den Kreisen, die die Ebenen $\dot{K}$ aus K ausschneiden. Falls $r(t) = 0$ ist, so gilt $c(t) = m(t)$ und $c(t)$ degeneriert zu einem Punkt.

Verbindet man alle Punkte einer festen Charakteristik c mit dem zugehörigen Kugelmittelpunkt m so entsteht ein Drehkegel, der die Fläche Γ orthogonal schneidet. Ebenso hüllen die Tangentialebenen an Γ zu einem festen Wert t_0 einen Drehkegel Δ ein, siehe Abbildung 2.1.

Eine mögliche Parametrisierung von Γ lautet:

$$\Gamma : f(t, u) = m(t) + r(t)q(t, u), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R} \cup \infty \quad (2.3)$$

wobei $q(t, u)$ das Einheitsnormalenvektorfeld von Γ ist.

Substituiert man $y = x - m$ in (2.1) und (2.2), so erhält man,

$$y^2 = r^2, \quad \text{und} \quad \langle y, \dot{m} \rangle - r\dot{r} = 0, \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

woraus

$$\langle y, \dot{m} \rangle^2 = y^2 \dot{r}^2 \quad (2.6)$$

folgt. Die Orthogonalprojektion von y auf $\dot{m}$ liefert für den Winkel α , siehe Abbildung 2.1,

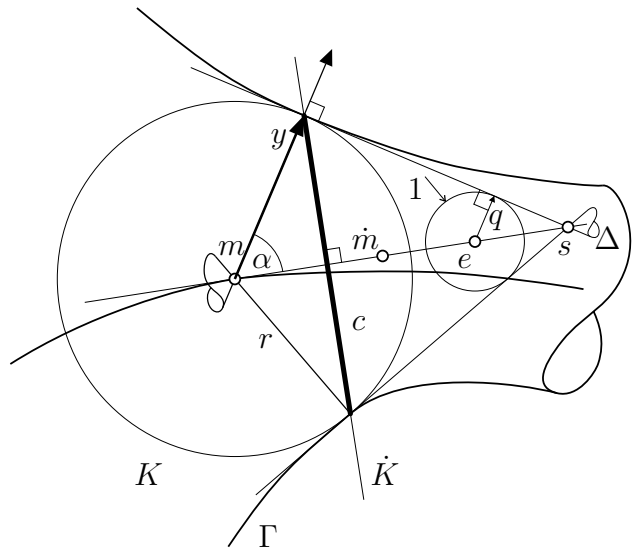
$$\cos^2 \alpha = \frac{\langle y, \dot{m} \rangle^2}{y^2 \dot{m}^2}, \quad (2.7)$$

woraus mit (2.6)

$$1 \geq \cos^2 \alpha = \frac{\dot{r}^2}{\dot{m}^2} \quad (2.8)$$

folgt. Dies zeigt, dass die Kugeln K eine reelle Einhüllende besitzen, wenn $\dot{m}^2 - \dot{r}^2 \geq 0$ gilt. Bei Gleichheit $\dot{m}^2 = \dot{r}^2$ berührt $\dot{K}$ die Kugel K und die Charakteristik degeneriert zu einem einzigen Punkt. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass dieser Fall nur für einzelne Werte von t oder für t aus einem Teilintervall von I eintritt.

Damit Γ eine rationale Parametrisierung besitzt, müssen $m(t)$ und $r(t)$ rationale Funktionen sein. Da in dieser Arbeit rationale Einhüllende von größtem Interesse sind, setzen wir im Folgenden $m(t)$ und $r(t)$ als rational voraus. Aus



(2.1), (2.2) und (2.3) folgen weitere Bedingungen für die Rationalität von Γ , siehe [16]. Es gilt, dass $q(t, u)$ eine rationale Vektorfunktion sein muss, die

$$\langle q, q \rangle = 1 \text{ und } \langle q, \dot{m} \rangle + \dot{r} = 0 \quad (2.9)$$

Die charakteristischen Kreise c können wie folgt rational parametrisiert werden, siehe Abbildung 2.2. Man wähle einen Punkt $p = m + r\hat{q}$, mit $\hat{q} \in q$, auf c und spiegle ihn an allen Ebenen $\gamma(t, u)$ des Büschels um die Tangente an $m(t)$. Dies führt zu folgender Parametrisierung der Hüllfläche $\Gamma = x(t, u)$:

$$x(t, u) = p - 2 \frac{r(t) \langle n(t, u), \hat{q}(t) \rangle}{\langle n(t, u), n(t, u) \rangle} n(t, u). \quad (2.10)$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, eine rational parametrisierbare Kurve $k = m + r\hat{q}$ auf Γ zu finden, wobei $\hat{q}(t)$ ein Einheitsvektorfeld ist das (2.9)

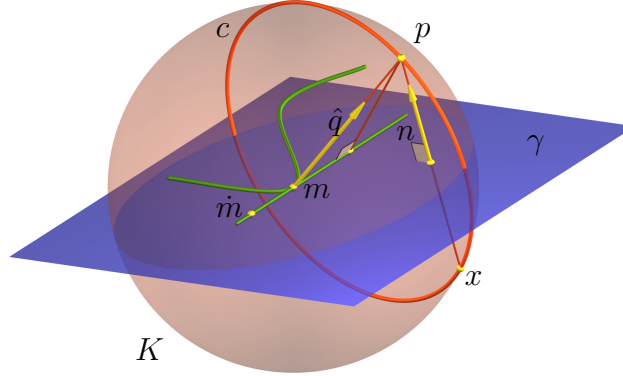


Abbildung 2.2: Konstruktion der charakteristischen Kreise.

erfüllt. Nach [16] ist dies immer möglich, wenn $m(t)$ und $r(t)$ rationale Funktionen sind.

Folgende Konstruktion von PETERNELL und POTTMANN zeigt dies. Man fasst $\Gamma(t, u)$ als Einhüllende der Drehkegel $\Delta(t)$ auf. Die Punkte $e(t)$ sind so zu wählen, dass die Kugel um e mit dem Radius 1 den Kegel Δ berührt. Die Spitzen von $\Delta(t)$ sind die Punkte $s(t)$, diese sind die Pole zu den Ebenen $K(t)$ bezüglich $K(t)$. Die Koordinaten von s und e lauten,

$$s = m - \frac{r}{\dot{r}}\dot{m} \text{ und } e = m + \frac{1-r}{\dot{r}}\dot{m}. \quad (2.11)$$

Die Drehkegel $\Delta(t)$ werden unter der Gauß-Abbildung $\xi : \Gamma \rightarrow S^2$ auf Kreise $d(t)$ auf der Einheitskugel abgebildet. Diese Kreise definieren wieder Drehkegel $\tilde{\Delta}(t)$, die S^2 berühren, und die Spitze $z(t)$ besitzen. Für die Spitzen gilt $z = s - e$, woraus

$$z = \frac{-1}{\dot{r}}\dot{m} \quad (2.12)$$

folgt. Die Drehkegel Δ beziehungsweise $\tilde{\Delta}$ entarten für $\dot{r} = 0$ zu Drehzylindern.

Da die Kreise d die Einheitsnormalen der Fläche Γ beschreiben, ist eine rationale Parametrisierung dieser Kreise das Ziel der Konstruktion. Dazu wendet man die stereographische Projektion $\zeta : S^2 \rightarrow \pi$ an, wobei $\pi : x_3 = 0$ eine

euklidische Ebene im $\mathbb{R}^3$ und das Projektionszentrum der Punkt $Z = (0, 0, 1)$ ist. Die stereographische Projektion bildet Kreise auf Kreise und Geraden ab und erhält die Rationalität, da sie selbst rational ist. Die Bilder der Kreise d sind im Allgemeinen wiederum Kreise $k = \zeta(d)$, deren Mittelpunkt μ und Radius ρ durch

$$\mu = \frac{-1}{\dot{r} + \dot{m}_3}(\dot{m}_1, \dot{m}_2, 0), \quad \rho^2 = \frac{1}{(\dot{r} + \dot{m}_3)}(\dot{m}^2 - \dot{r}^2) \quad (2.13)$$

gegeben sind. Man sieht, dass k genau dann eine Gerade ist, wenn $\dot{r} + \dot{m}_3 = 0$ ist.

Im nächsten Schritt benötigt man die Tatsache, dass zu jedem Polynom $f(t)$, mit $f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, zwei Polynome f_1 und f_2 derart existieren, dass $f = f_1^2 + f_2^2$ gilt.

Da die Radiusfunktion ρ im Allgemeinen nicht rational sein wird, kann man die Kreise k analog zu (2.10) konstruieren. Gesucht ist also eine ebene rationale Kurve $\tilde{\delta}(t)$ die $\tilde{\delta}(t_0) \in k(t_0, u)$ erfüllt. Es gilt

$$\tilde{\delta} = \mu + g, \quad (2.14)$$

wobei $g(t)$ ein rationaler Vektor ist, dessen Koordinaten $g_1^2 + g_2^2 = \rho^2$ erfüllen. Da der Nenner von $\rho^2 (\geq 0)$ in (2.13) quadratisch ist, muss nur der Zähler umgeformt werden. Sind $n(u) = (u, 1)$ die Normalvektoren zum Geradenbüschel in der Ebene $x_3 = 0$, dann hat die Kreisschar k die Darstellung

$$k(t, u) = \tilde{\delta}(t) - 2 \frac{\langle g(t), n(u) \rangle}{\langle n(u), n(u) \rangle} n(u), \quad (2.15)$$

analog zu (2.10).

Wendet man noch ζ^{-1} auf k an, so erhält man die rationale Darstellung des Einheitsvektorfeldes $q(t, u)$

$$q(t, u) = \frac{1}{1 + k_1^2 + k_2^2} (2k_1, 2k_2, k_1^2 + k_2^2 - 1)(t, u). \quad (2.16)$$

Und somit folgt eine rationale Parametrisierung von Γ mit

$$x(t, u) = m(t) + r(t)q(t, u), \quad (2.17)$$

wobei $m(t)$ und $r(t)$ rationale Funktionen sind und $q(t, u)$ von der Gestalt (2.16) ist.

Satz 1. *Die Hüllfläche einer ein-parametrischen Kugelfamilie mit einer rational parametrisierten Mittenkurve und einer rationalen Radiusfunktion besitzt eine rationale Parametrisierung.*

Nach [16] ist diese im Allgemeinen vom Grad $5k - 6$, wobei k der Grad der Mittenkurve und der Radiusfunktion ist.

Pythagorean-Hodograph Kurven, siehe [6, 7], sind rationale Kurven die eine einfachere Konstruktion der rationalen Parametrisierung der Hüllfläche zulassen, da ihr Fundamentalsystem rationale Einheitsvektoren sind.

2.2 Zyklographisches Urbild

Das zyklographische Urbild einer ein-parametrischen Kugelfamilie ist eine Kurve $s(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t), r(t))^T$ im $\mathbb{R}^{3,1}$. Das Hüllgebilde der Kugelfamilie kann auch mit Methoden der Zyklographie berechnet werden.

Betrachten wir die Ableitung der Kurve s , $\frac{ds}{dt} = \dot{s} = (\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3, \dot{r})^T$. Dies ist der Richtungsvektor der Tangente und bestimmt einen Punkt in $\omega : x_0 = 0 \subset \mathbb{P}^4$. Die Polarität $\Pi_\Omega : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^{4*}$ bezüglich der Quadrik Ω bildet diese Punkte auf Ebenen ν ab. Diese Ebenen sind die Fernebenen der Normalhyperebenen zu s . Der Schnitt der Ebenen ν mit Ω liefert Fernpunkte von isotropen Geraden. Um die Projektionsgeraden der zyklographischen Abbildung zu erhalten, verbinden wir die Punkte dieser Schnittkurve mit den Punkten der Kurve s . Die Projektionsgeraden schneiden den $\mathbb{R}^3$ in den Punkten der Einhüllenden.

Diese Konstruktion zeigt, dass die Einhüllende reell ist, wenn die Ebenen ν einen reellen Schnitt mit Ω besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Punkte $\dot{s}$ außerhalb oder auf Ω liegen. Also flachgängig beziehungsweise

isotrop sind. Dies liefert wieder die Bedingung

$$\begin{aligned} \langle \dot{s}, \dot{s} \rangle_{pe} &\geq 0 \\ \dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2 - \dot{r}^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

für eine reelle Einhüllende.

2.3 Beispiel

Mit Hilfe der zyklographischen Abbildung erreicht man relativ leicht eine rationale Parametrisierung der Kugelhüllfläche, wenn die Kurve im $\mathbb{R}^{3,1}$ eine quadratische polynomiale Darstellung besitzt.

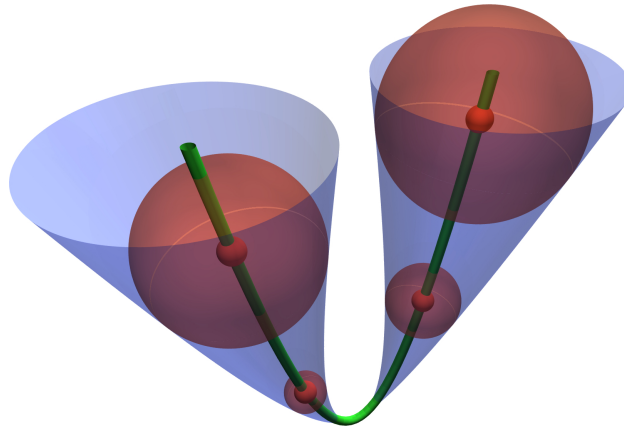


Abbildung 2.3: Eine Kugelhüllfläche einer ein-parametrischen Kugelfamilie.

Die Kugelfamilie sei durch $m(u) = (u, 0, u^2)$ und $r(u) = \frac{1}{4}u^2$ gegeben. Dann ist das zyklographische Urbild die Kurve

$$k(u) = (u, 0, u^2, \frac{1}{4}u^2), \quad (2.19)$$

deren Tangenten die Fernpunkte

$$\dot{k}(t) = (1, 0, 2u, \frac{1}{2}u). \quad (2.20)$$

besitzen. Schneidet man die bezüglich Ω polaren Hyperebenen dieser Punkte mit Ω gemäß (3.4), so liefert dies die Umparametrisierung der Kurve in die Parameter s und t ,

$$u = \frac{4s}{-3 + 5s^2 + 5t^2}. \quad (2.21)$$

Die Verbindungsgeraden von zugehörigen Punkten auf k und Ω sind die Projektionsgeraden der zyklographischen Abbildung. Werden diese mit dem $\mathbb{R}^3$, $x_4 = 0$ geschnitten, liefert dies die rationale Parametrisierung der Kugelhüllfläche

$$\Gamma = \frac{4s}{(-3 + 5s^2 + 5t^2)^2(1 + s^2 + t^2)} \begin{bmatrix} -3 + 2t^2 + 5s^4 + 10s^2t^2 + 5t^4 \\ -2st \\ s(3 + 5s^2 + 5t^2) \end{bmatrix}.$$

In Abbildung 2.3 sind die Hüllfläche, die Mittenkurve und ein paar Kugel dargestellt.

2.4 Gradreduktion

Die folgende Gradreduktion stammt von R. KRASAUSKAS, siehe [12]. Er kann die von POTTSMANN und PETERNELL aufgestellte Schranke unter gewissen Voraussetzungen noch verkleinern. Ein geringer Grad ist aufgrund einfacher Handhabung und besserer Kontrolle erstrebenswert.

2.4.1 Grundlagen

In $\mathbb{CP}^3$ ist jede reguläre quadratische Fläche projektiv äquivalent zur Quadrik $\mathcal{Q}: x_0x_3 - x_1x_2 = x^T Q x = 0$, wobei $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^T \in \mathbb{CP}^3$ und

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ist. $\mathcal{Q}$ wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathcal{Q} \subset \mathbb{CP}^3 \\ (U_0, U_2, U_3, U_4) &\mapsto (U_0U_2, U_0U_3, U_1U_2, U_1U_3) \end{aligned} \quad (2.23)$$

parametrisiert.

Seien $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ zwei komplexe Zahlen und U ein Vektor aus $\mathbb{CP}^3$, dann ist eine Multiplikation $(\lambda, \mu) \cdot U$ wie folgt erklärt,

$$(\lambda, \mu) \cdot (U_0, U_1, U_2, U_3) = (\lambda U_0, \lambda U_1, \mu U_2, \mu U_3). \quad (2.24)$$

Alle Punkte $\tilde{U} = (\lambda, \mu) \cdot U$ werden unter f auf denselben Punkt $f(U) = \lambda\mu f(U) = f((\lambda, \mu) \cdot U)$ abgebildet. Die Punkte $\tilde{U}$ werden *Skalierungen* von $f(U)$ genannt. Die Paare (U_0, U_1) und (U_2, U_3) können als Koordinaten auf zwei projektiven Geraden $\mathbb{CP}^1$ aufgefasst werden. $\mathcal{Q}$ ist dann das Ergebnis der Segre-Abbildung $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathcal{Q}$.

Eine Gerade $v_0a + v_1b \subset \mathbb{CP}^4$ wird unter (2.23) auf einen Kegelschnitt c abgebildet. Die Punkte $f(a)$, $f(b)$ und $f(a+b)$ spannen im Allgemeinen eine Ebene $e^T x = 0$ mit den Koordinaten

$$e(a, b) = (l_{13}, -l_{12}, -l_{03}, l_{02}) \text{ mit } l_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

auf. Dies folgt unmittelbar durch Nachrechnen. Der Schnitt von $A^T x = 0$ mit $\mathcal{Q}$ liefert c . Die Koordinaten $k(a, b) = (l_{13}, l_{12}, l_{03}, l_{02}, l_{01}, l_{23})$ der Geraden die durch die Punkte a und b festgelegt ist, stimmen mit den Plückerkoordinaten aus (1.1) bis auf Reihenfolge und Vorzeichen überein.

Wird auf einen der beiden Punkte eine Skalierung gemäß (2.24) angewendet, so ändern sich die Koordinaten der Ebene zu

$$A((\lambda, \mu) \cdot a, b) = \lambda L(a, b) + \mu M(a, b), \quad (2.26)$$

mit

$$\begin{aligned} L(a, b) &= (a_1b_3, -a_1b_2, -a_0b_3, a_0b_2), \\ M(a, b) &= (-a_3b_1, a_2b_1, a_3b_0, -a_2b_0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Ebenen $A((\lambda, \mu) \cdot a, b)$ sind im Büschel, das durch die Ebenen L und M aufgespannt wird, enthalten. Diese Ebenen sind zu den Punkten die in $\mathcal{Q}$ enthalten sind, $f(a_0, a_1, b_2, b_3) \in L$ und $f(b_0, b_1, a_2, a_3) \in M$, bezüglich $\mathcal{Q}$ polar, woraus folgt, dass sie Tangentialebenen an $\mathcal{Q}$ sind.

Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{CP}^3 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{1}{2}(x_0 + x_3, x_1 + ix_2, x_1 - ix_2, x_0 - x_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

bildet die euklidische Einheitssphäre S^2 auf eine Teilmenge von $\mathcal{Q}$ ab. Denn es gilt $(x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = x_0^2 - x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} f_s : \mathbb{C}^2 &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{P}^3 \\ (U_0, U_1) &\mapsto (U_0\overline{U_0} + U_1\overline{U_1}, \quad 2\operatorname{Re}(U_0\overline{U_1}), \\ &\quad 2\operatorname{Im}(U_0\overline{U_1}), \quad U_0\overline{U_0} - U_1\overline{U_1}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

legt eine rationale Parametrisierung von S^2 fest. Man sieht sofort, dass $\Phi(f_s(U_0, U_1)) = f(U_0, U_1, \overline{U_0}, \overline{U_1}) = f(U_+)$ gilt. Aus der Tatsache, dass $(\lambda U)_+ = (\lambda, \overline{\lambda}) \cdot U$ ist, folgt die Homogenität von f_s .

Um die Schnitte von Ebenen π mit S^2 zu parametrisieren, wählen wir zwei Punkte $f_s(a)$ und $f_s(b)$ in einer Ebene $\pi : B^T x = 0$. Die Bilder $\Phi(f_s(a)) = f(a_+)$ und $\Phi(f_s(b)) = f(b_+)$ liegen dann in der Ebene $\pi^* : B^{*T} x = 0$ mit $B^* = iB\Phi^{-1}$. (Hier wird die Matrix Φ mit der Abbildung identifiziert). Nach (2.26) hat der Schnitt von $\mathcal{Q}$ mit π^* die Parameterdarstellung $f(u_0((\lambda, \mu) \cdot a_+) + u_1 b_+)$. Wobei (λ, μ) eine Lösung des Gleichungssystems

$$\lambda L(a_+, b_+) + \mu M(a_+, b_+) = B^* \quad (2.30)$$

ist. Das konjugiert komplexe System besteht bis auf Vorzeichen und Reihenfolge aus den selben Gleichungen und besitzt die Lösung $(\overline{\mu}, \overline{\lambda})$. Daraus folgt, dass $\mu = \overline{\lambda}$ und somit $(\lambda, \mu) \cdot X_+ = (\lambda a)_+$ gilt. Die Parametrisierung von $\pi \cap S$ folgt nun aus $\Phi^{-1}(f(u_0((\lambda a)_+) + u_1 b_+)) = f_s(u_0(\lambda a) + u_1 b)$ mit $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$.

2.4.2 Minimaler Grad

Im Folgenden werden die Ebenen $\dot{K}$ aus (2.2) durch ihre Koordinatenvektoren

$$B(t)^T x = 0, \quad B(t) = d(\dot{r}, \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3)^T, \quad (2.31)$$

repräsentiert, wobei d der gemeinsame Teiler von $\dot{r}$, $\dot{m}_1$, $\dot{m}_2$ und $\dot{m}_3$ ist.

Die Abbildung f_s ist in dem Sinn *global*, dass es zu jedem beliebigen Vektor $x = (x_0, \dots, x_3)^T$, wobei die $x_i \in \mathbb{R}[t, u]$ reelle teilerfremde Polynome in t und u sind, ein Paar $U = (U_0, U_1)$ von komplexen Polynomen $U_i \in \mathbb{C}[t, u]$ derart existiert, dass $f_s(U) = x$ gilt. Um die Koordinaten von U berechnen zu können, benötigt man das Bild $\Phi(x) = y = (y_0, \dots, y_3)^T$. Nach [12] lauten die Koordinaten von U

$$U_0 = \text{ggT}(y_0, y_1), \quad U_1 = \frac{\text{ggT}(y_0, y_1)y_3}{y_1}. \quad (2.32)$$

Ist $\text{ggT}(U_0, U_1) = 1$, dann ist U bis auf Multiplikation mit einem komplexen Skalar $\nu \neq 0 \in \mathbb{C}$ eindeutig.

Das Gaussbild des Normalenvektorfeldes $q(t, u)$ aus (2.3) entspricht einer *Tensor-Produkt-Bezier-Fläche* vom Grad $(n, 2)$, wobei alle Parameterlinien $c_{t_0}(u) = N(t_0, u)$ ebene Schnitte von K mit $\dot{K}$ sind. Wir wollen die TP-Fläche so bestimmen, dass n minimal wird.

Angenommen, dass $q(t, u)$ eine Tensor-Produkt Fläche ist, dann gilt $q(t, u) = f_s((1-u)a + ub)$ für $a, b \in \mathbb{C}[t]^2$ wegen der Globalität von f_s . Nach (2.30) gibt es zu jedem fixen t einen Kegelschnitt $\Phi(q(t, u)) = f((1-u)a_+ + ub_+)$ in der Ebene $B^{*T}x = 0$, $B^* = iB\Phi^{-1}$. Die Koordinaten der Ebene stimmen nach (2.25) mit den ersten vier Plückerkoordinaten der Gerade $k(a_+, b_+)$ überein. Aus der Plückeridentität folgt $l_{13}l_{02} - l_{12}l_{03} = l_{01}l_{23}$, wonach für das Produkt $l_{01}l_{23}$

$$l_{01}l_{23} = B_0^*B_3^* - B_1^*B_2^* = B_1^2 + B_2^2 + B_4^2 + B_0^2 = D(t) \quad (2.33)$$

gilt. $D(t)$ heißt *Diskriminante* und ist ein nicht negatives reelles Polynom, da $l_{23} = \overline{l_{01}}$ ist. Die Geraden $k(t)$ bilden eine Regelfläche.

Die Diskriminante einer Kanalfläche mit Mittenkurve $m(t)$ und Radius $r(t)$ lautet

$$D(t) = d^2(\dot{m}_1^2 + \dot{m}_2^2 + \dot{m}_3^2 - \dot{r}^2). \quad (2.34)$$

Nach (2.18) ist $D(t) \geq 0$ eine notwendige Bedingung dafür, dass eine reelle Einhüllende existiert. Wenn diese erfüllt ist, lässt sich die Diskriminante als Produkt schreiben,

$$D(t) = \prod_i (\lambda_i \overline{\lambda_i})^{p_i} \rho^2, \quad \lambda_i = t - c_i, \quad c_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (2.35)$$

wobei ρ ein Produkt von reellen Linearfaktoren ist.

Für den Faktor $l_{01} = \prod_i \lambda_i^{d_i} \overline{\lambda_i}^{p_i - d_i}$ von $D(t) = l_{01} \overline{l_{01}}$ gilt $0 \leq d_i \leq p_i$ ab. Es gibt also $\prod_i (p_i + 1)$ verschiedene Faktorisierungen von $D(t)$, das heißt, es ändern sich die Koordinaten l_{01} und l_{23} von $k(a_+, b_+)$. Zu jeder Faktorisierung gehört also eine andere Regelfläche in $\mathbb{P}^3$ mit zwei ebenen Leitkurven. Die Ebenen $E^T x = 0$ können als $E = (E_0, E_1, \overline{E_0}, \overline{E_1})$ gewählt werden. Dies führt auf Leitkurven der Gestalt $\tilde{a}_+$ und $\tilde{b}_+$, und wiederum auf die Regelfläche $R(t, u) = (1 - u)\tilde{a} + u\tilde{b} \in \mathbb{C}^2$. Nun gilt $\tilde{N}(t, u) = f_s(R(t, u))$, um den minimalen Grad der Kanalfläche zu erreichen, ist also die Parametrisierung minimalen Grades einer Regelfläche gesucht.

Die Leitkurven a und b einer gradreduzierten Parametrisierung einer Regelfläche lassen sich mit Hilfe von μ -Basen finden, siehe dazu auch [2]. Dies bedeutet, dass $\deg a + \deg b = \deg B = \deg q(t)$. Der Ansatz von Krasauskas ist nun, den Grad $\deg(a, b) = \max(\deg a, \deg b)$ zu minimieren. Dazu verwendet er zwei Operationen (2.36) auf das Paar (a, b) an.

$$\begin{aligned} (a, b) &\approx (a + \rho b, b), & \text{mit } \rho \in \mathbb{R}[t], \deg(\rho b) \leq \deg a \\ (a, b) &\sim \left(\frac{a}{\sigma}, \overline{\sigma} b\right), & \text{mit } \sigma \in \mathbb{C}[t], a = \sigma a' \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bei beiden Operationen bleibt der Grad $\deg a + \deg b$ erhalten. Die Koordinaten von $k(a_+, b_+)$ ändern sich bei der ersten Operation gar nicht und bei der zweiten bleiben die ersten vier gleich. Er hängt also nur von der Parametrisierung von $D(t)$ ab.

Damit lässt sich folgendes Ergebnis beweisen, siehe dazu [12]:

Satz 2. *Eine Kanalfläche $K_\gamma(t)$ gegeben durch $\gamma(t) = (m(t), r(t)) \in \mathbb{R}^4[t]$, mit $\deg \gamma = k$ und $D(t) \geq 0$, besitzt eine rationale Parameterdarstellung $f(t, u)$ vom Grad $(k + n, 2)$. Wobei*

$$n = 2 \max(k - 1, 2k - 2 - \sum_i \lceil \frac{p_i}{2} \rceil) \quad (2.37)$$

und p_i gemäß (2.35). Ist speziell $D(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R} \cup \infty$ (Rohrfläche), dann ist der Grad in t $\deg f_t = 3k - 2$.

Der in [16] gefundene minimale Grad $5k - 6$ einer Kanalfläche setzt voraus, dass $D(t)$ mindestens eine Nullstelle besitzt und stimmt daher mit diesem Ergebnis überein.

Kapitel 3

Hüllflächen zwei-parametriger Kugelfamilien

3.1 Berechnung der Hüllfläche

3.1.1 Berechnung auf direktem Wege

Gegeben seien die Vektorfunktionen $m(u, v) \in \mathbb{R}^3[u, v]$ und $r(u, v) \in \mathbb{R}[u, v]$, welche einmal stetig differenzierbar sein sollen, dann hat die zwei-parametrige Familie von Kugeln die Darstellung

$$S(u, v) = \langle x - m(u, v), x - m(u, v) \rangle - r(u, v)^2 = 0. \quad (3.1)$$

Für die folgenden Berechnungen wird das zyklographische Urbild $\Phi \in \mathbb{R}^{3,1}$ der Kugelmenge sowie dessen Ableitungen als regulär vorausgesetzt.

Im Folgenden lasse ich, sofern keine Verwechslung möglich ist, das Argument (u, v) weg, und deute die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u} X(u, v)$ beziehungsweise $\frac{\partial}{\partial v} X(u, v)$ durch X_u und X_v an.

Das Hüllgebilde F von S wird von den Schnittpunkten der Kugeln mit ihren

zugehörigen partiellen Ableitungen gebildet,

$$F = S \cap S_u \cap S_v, \quad (3.2)$$

wobei S_u und S_v von der Gestalt

$$\begin{aligned} S_u &: \langle x - m, m_u \rangle - r_u r = 0, \\ S_v &: \langle x - m, m_v \rangle - r_v r = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

sind. Im Allgemeinen sind S_u und S_v schneidende Ebenen, $S_u \cap S_v = g$. Die Hüllpunkte von F sind die Schnitte der Geraden g mit den zugehörigen Kugeln. Diese Berechnung führt zu einer quadratischen Gleichung, woraus folgt, dass die Parametrisierung der Hüllfläche Wurzelausdrücke enthalten wird. Bei dieser Methode ist es schwierig Bedingungen anzugeben, so dass die Berechnung auf eine rationale Parametrisierung von F führt. Da rationale Parametrisierungen das Thema dieser Arbeit sind, werde ich diese Berechnungsweise nicht näher ausführen.

Um eine mögliche rationale Parametrisierung zu erhalten, empfiehlt sich folgende Konstruktion, siehe [15].

3.1.2 Berechnung mit Hilfe der zyklographischen Abbildung

Das zyklographische Urbild einer zwei-parametrischen Kugelfamilie ist eine 2-Fläche im $\mathbb{R}^{3,1}$. Gegeben sei die Abbildung $f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ welche die Fläche $\Phi = f(u, v)$ in $\mathbb{R}^{3,1}$ bestimmt. Verwendet man die projektive Erweiterung von $\mathbb{R}^{3,1}$, so erfolgt die Konstruktion des Hüllgebildes von $\Psi = \gamma(\Phi)$ wie folgt, siehe Abbildung 3.1.

Betrachten wir in einem Punkt $F \in \Phi$ die Tangentialebene τ . Der Schnitt von τ mit der Fernhyperebene ω ist eine Gerade g . Weiters sei ν die Normalebene in F an Φ , mit der Ferngerade h . Die Geraden g und h liegen bezüglich der Quadrik Ω polar, da Ω die Orthogonalität in $\mathbb{R}^{3,1}$ regelt. Die Polarität Π_Ω bildet also die Menge $\mathcal{G}$ der Geraden g auf die Menge $\mathcal{H}$ der Geraden h ab.

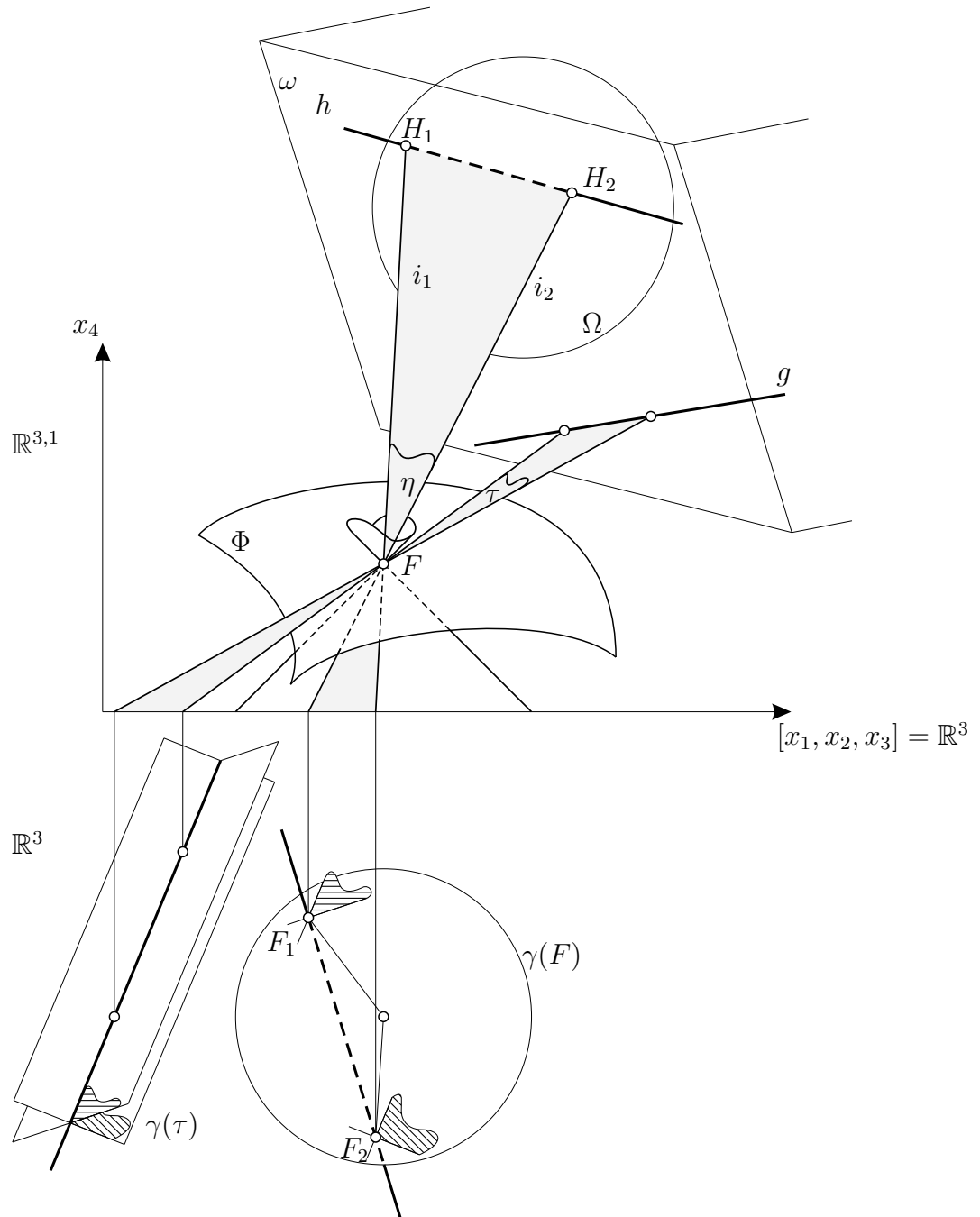


Abbildung 3.1: Konstruktion der Kugelhüllfläche mittels zyklographischer Abbildung.

Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte H_1 und H_2 von h mit Ω und dem Punkt F sind isotrope Geraden $i_1 = H_1 \vee F$ und $i_2 = H_2 \vee F$ und folglich die Projektionsgeraden der zyklographischen Abbildung. Die Schnitte von i_1 und i_2 mit dem $\mathbb{R}^3 : y_4 = 0$ sind die Hüllpunkte f_1 und f_2 von $\gamma(F)$ und liefern somit eine Parametrisierung für die Einhüllende von Ψ . Denn die Punkte f_1 und f_2 liegen nach Konstruktion auf der Polaren $n = \nu \cap \mathbb{R}^3$ zu $t = \tau \cap \mathbb{R}^3$ bezüglich $\gamma(F)$ und sind ebenfalls in den Ebenen $\gamma(\tau)$ enthalten, welche Tangentialebenen an $\gamma(F)$ sind. Sie sind somit die gesuchten Hüllpunkte.

Bei dieser Konstruktion sieht man sofort, dass nur jene Punkte von Φ reelle Hüllpunkte von Ψ liefern, die eine flachgängige oder isotrope Tangentialebene besitzen. Denn nur dann haben die zugehörigen Ferngeraden h reelle Schnittpunkte mit Ω .

Ausgehend von Φ ist diese Konstruktion kein Gewinn gegenüber der direkten Methode aus 3.1.1, denn der Schnitt von den Geraden h mit Ω ist ein quadratisches Problem. Ausgehend von den Geraden h , lassen sich Bedingungen für diese finden, so dass die Einhüllende Ψ eine rationale Parametrisierung besitzt siehe Kapitel 3.2.

3.2 Bedingung für die Rationalität

Unser Ziel ist es, die Umparametrisierung der Geradenmenge $\mathcal{H}(u, v)$ in die Parameter s und t von $\Omega(s, t)$ rational durchzuführen. Im Allgemeinen existiert durch jeden Punkt in Raum ein ganzes Bündel von Geraden. Setzen wir die Menge $\mathcal{H}(u, v)$ als Faserung voraus, so ist die Zuordnung von Punkten in ω zu Geraden $h \in \mathcal{H}$, bis auf eine Ausnahmemenge, eindeutig. Nun kann jedem Punkt $p \in \Omega$ eine Gerade $h \in \mathcal{H}$ auf eindeutige Weise zugeordnet werden. Die Abbildung ist somit injektiv. Ω besitzt die rationale Parametrisierung

$$\Omega = (2s, 2t, 1 - s^2 - t^2, 1 + s^2 + t^2), \quad (3.4)$$

so können u und v rational über s und t ausgedrückt werden.

Gesucht ist nun die Fläche Φ so, dass die Ferngeraden der Tangentialebenen eine Geradenaserung von ω sind.

Ist $\mathcal{H}$ eine Faserung von ω , dann ist auch $\mathcal{G}$ eine Faserung desselben Raums, da die Polarität an Ω eine bijektive Abbildung ist. Um von den Geraden g die Tangentialebenen von Φ zu berechnen, bestimmen wir zwei Ebenen $\epsilon \in \omega$ und $\phi \in \omega$, die g enthalten. Sie haben die Darstellung

$$\begin{aligned} \epsilon(u, v) : \quad & e_1(u, v)x_1 + \dots + e_4(u, v)x_4 = 0, \\ \phi(u, v) : \quad & f_1(u, v)x_1 + \dots + f_4(u, v)x_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Tangentialebenen $\tau = T(u, v)$ von Φ in $\mathbb{R}^{3,1}$ sind die Schnitte der Hyperebenen $E(u, v)$ und $F(u, v)$ in $\mathbb{R}^{3,1}$ die ϵ und ϕ als Fernebenen besitzen, also $E \cap \omega = \epsilon$ und $F \cap \omega = \phi$. Diese Hyperebenen sind durch ϵ und ϕ bis auf Parallelität bestimmt. Die Eindeutigkeit wird mit sogenannten *Stützfunktionen* $a(u, v)$ und $b(u, v)$ erreicht. E und F haben somit die Darstellung

$$\begin{aligned} E(u, v) : \quad & e_1(u, v)x_1 + \dots + e_4(u, v)x_4 = e^T x = a(u, v), \\ F(u, v) : \quad & f_1(u, v)x_1 + \dots + f_4(u, v)x_4 = f^T x = b(u, v). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nicht jede Ebenenmenge in $\mathbb{R}^{3,1}$ besitzt eine Einhüllende. Damit dies gegeben ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein, siehe [14],

$$\begin{aligned} E : \quad & e^T x = a, \quad F : \quad f^T x = b, \\ E_u : \quad & e_u^T x = a_u, \quad F_u : \quad f_u^T x = b_u, \\ E_v : \quad & e_v^T x = a_v, \quad F_v : \quad f_v^T x = b_v. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dies ist ein Gleichungssystem in den vier Unbekannten $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{r,1}$. Damit es eine eindeutige Lösung besitzt muss die Koeffizientenmatrix den Rang vier haben, und die Stützfunktionen a und b dementsprechend gewählt werden.

Sei $p \in \Phi$ ein Punkt mit der Tangentialebene $T = p + sp_u + tp_v$, dann ist die Bedingung $T = E \cap F$ äquivalent zu

$$e^T p_u = 0, \quad e^T p_v = 0, \quad f^T p_u = 0, \quad f^T p_v = 0. \quad (3.8)$$

Aus (3.7) und (3.8) folgt durch differenzieren nach u und v

$$e_u^T p + e^T p_u = a_u, \quad e_v^T p + e^T p_v = a_v. \quad (3.9)$$

Mit den weiteren Bedingungen aus (3.7) für e und p folgt $e^T p_u = 0$ und $e^T p_v = 0$. Analog gilt dies für f . Somit gilt $T = E \cap F$, und Φ ist die Hüllfläche der Ebenen T .

Die Lösung von (3.7) liefert eine rationale Parametrisierung von Φ in (u, v) . Ebenso wie $\mathcal{H}(u, v)$ wird auch Φ in die Parameter (s, t) umgerechnet. Nun können zugehörige Punkte von $\Phi(s, t)$ und $\Omega(s, t)$ zu den Projektionsgeraden i verbunden werden.

Die Projektion $\pi\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bildet die aus den Geraden $\mathcal{H}(s, t)$ und den Stützfunktionen a, b berechnete Fläche $\Phi \in \mathbb{R}^{3,1}$ auf eine rational parametrisierbare Fläche ab. Die Kugelfamilie besitzt somit eine rational parametrisierbare Mittenfläche und eine rationale Radiusfunktion, dass das Hüllgebilde eine rationale Parametrisierung besitzt zeigen die nächsten Abschnitte und wurde in [15] bewiesen.

Je nach Typ der Geradenmenge $\mathcal{G}$ entsteht ein anderer Typ von Fläche im $\mathbb{R}^{3,1}$. In den nächsten Kapiteln wird auf diese genauer eingegangen. Dabei werden die Flächen Ψ nach der Lage der Achsen von $\mathcal{G}$ bezüglich Ω klassifiziert.

3.3 $\mathcal{H}$ ist ein hyperbolisches Netz

Bilden die Geraden h ein hyperbolisches Netz, so ist die Geradenmenge g ebenfalls ein Netz von diesem Typ. Die Achsen c und d von $\mathcal{H}$, aufgefasst als Punktmengen, gehen bei der Polarität Π_Ω in die Achsen e und f , Träger der Ebenenbüschel ϵ und ϕ , von $\mathcal{G}$ über. Die Schnittgeraden dieser beiden Ebenenbüschel sind die Geraden des Netzes.

Nach 1.1.6 hängen die beiden Ebenenbüschel jeweils nur von einem Parameter ab. Daraus folgt, dass

$$e_v = 0 \text{ und } f_u = 0 \quad (3.10)$$

gilt. Die Stützfunktionen müssen analog

$$a_v = 0 \text{ und } b_u = 0 \quad (3.11)$$

erfüllen. Somit ist gewährleistet, dass (3.7) eine eindeutige Lösung besitzt.

Im Folgenden wird zu allen möglichen Lagen von c und d bezüglich Ω eine möglichst einfache Form angegeben, und das zyklographische Bild berechnet. Die Stützfunktionen sind quadratisch. Durch Nachrechnen sieht man sofort, dass lineare und konstante Stützfunktionen, Φ zu einem Punkt oder einer Kurve entarten lassen. Diese Fälle werden im Folgenden ausgeschlossen.

3.3.1 Beide Achsen sind Passanten von Ω

Seien

$$c(u) = (1, u, 0, 0) \text{ und } d(v) = (0, 2, v, 1), \quad (3.12)$$

so lauten die Ferngeraden der Normalebenen beziehungsweise der Tangentialebenen der Fläche Φ

$$h(u, v) = (2, v, 1, 0, -u, uv), \quad g(u, v) = (0, u, uv, 2, v, -1). \quad (3.13)$$

Die Stützfunktionen seien allgemeine quadratische Funktionen $a = A + Bu + Cu^2$ und $b = U + Vv + Wv^2$. Mit dem System (3.7) ist die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (-Cu^2 + A, B + 2Cu, V + 2Wv, 2B + 4Cu + Wv^2 - U). \quad (3.14)$$

Die Werte A , B und V bewirken nur eine Verschiebung der Fläche Ψ , daher setzte ich alle gleich Null. U erzeugt Parallellflächen des zyklographischen Bildes, und wird auch gleich Null gewählt. Weiters sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C = W = 1$.

Daraus folgt

$$\Phi = p(u, v) = (-u^2, 2u, 2v, 4u + v^2), \quad (3.15)$$

diese Fläche gehört nach [17] zur Äquivalenzklasse 4-2-1. Die Mittenfläche des zyklographischen Bildes ist aus der Klasse 3-1-3 und die Radiusfunktion aus 1-1-3a. Die Tabelle mit allen Äquivalenzklassen aus [17] ist im Anhang beigefügt.

Nach (1.7) lautet die Inzidenzbedingung für die Geraden von $\mathcal{H} = h(u, v)$ und Punkten in $\Omega = w(s, t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & h_4 & h_5 & h_6 \\ -h_4 & 0 & h_3 & -h_2 \\ -h_5 & -h_3 & 0 & h_1 \\ -h_6 & h_2 & -h_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Die Koeffizientenmatrix der Geraden h hat den Rang zwei und somit hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$u = \frac{t - s^2 - t^2 - 1}{s} \text{ und } v = \frac{1 - s^2 - t^2}{1 + s^2 + t^2}. \quad (3.17)$$

Nun ist Φ in Abhängigkeit von s und t gegeben, und man kann die isotropen Geraden i_1 und i_2 berechnen. Diese sind die Verbindungsgeraden von Punkten auf Ω mit zugehörigen Punkten auf Φ . Der Schnitt von i_1 und i_2 mit $x_4 = 0$ liefert eine rationale Darstellung von Ψ .

Das zyklographische Bild von Φ hat bei diesem Beispiel die rationale Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{-1}{(s^2(1+s^2+t^2)^3)} [1 - 2t - 8t^3 - 12t^5 - 14s^6 + 13t^6 + 2s^3 - 4s^5 + 4ts^4 \\ & - 8s^2t^3 - 15s^4t^2 + 12s^2t^4 - 4s^3t^2 - 8s^4t^3 - 16s^2t^5 - 3s^6t^2 + 9s^4t^4 \\ & + 15s^2t^6 - 2ts^8 - 8t^3s^6 - 12t^5s^4 - 8t^7s^2 + 5s^8t^2 + 10s^6t^4 + 10s^4t^6 \\ & + 6t^2 - 3s^2 + 4s^5t^2 + 2s^3t^4 - 14s^4 + 13t^4 + 5s^2t^8 - 8t^7 - 3s^8 + 6t^8 \\ & - 2t^9 + s^{10} + t^{10} + 2s^7 - s^2t^2, 2s(1 - 5t - 2st^3 + 2s^3t^3 + st^5 + ts^5 \\ & + ts - 2ts^3 - 15ts^2 - 15t^3 - 15t^5 + 4s^6 + 8t^6 - 15ts^4 - 30s^2t^3 \\ & + 16s^4t^2 + 20s^2t^4 - 5ts^6 - 15s^4t^3 - 15s^2t^5 + 4s^6t^2 + 6s^4t^4 + 4s^2t^6 \\ & + 8t^2 + 4s^2 + 6s^4 + 14t^4 - 5t^7 + s^8 + t^8 + 20s^2t^2), s(-1 + s^2 + t^2) \\ & (4 + s - 4t - 8ts^2 - 8t^3 - 4t^5 + 4s^6 + 4t^6 + 6s^3 + s^5 - 4ts^4 - 8s^2t^3 \\ & + 12s^4t^2 + 12s^2t^4 + 6st^2 + 2s^3t^2 + st^4 + 12t^2 + 12s^2 + 12s^4 + 12t^4 \\ & + 24s^2t^2)]. \end{aligned}$$

Diese algebraische Fläche hat den Grad 18, was durch Implizitisierung nachgewiesen werden kann.

3.3.2 Beide Achsen sind Sekanten von Ω

Normalformen für die Netzachsen sind

$$c(u) = (1, 0, 0, u) \text{ und } d(v) = (0, 1, v, 2), \quad (3.18)$$

woraus

$$h(u, v) = (1, v, 2, -uv, u, 0), \quad g(u, v) = (uv, -u, 0, 1, v, -2) \quad (3.19)$$

folgt. Die Stützfunktionen seien quadratische Formen $a = u^2$ und $b = v^2$ womit die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (-u^2, -v^2 - 4u, 2v, -2u), \quad (3.20)$$

berechnet werden kann. Nach [17] gehört diese Fläche ebenfalls zur Äquivalenzklasse 4-2-1. Die Mittenfläche ist aus der Klasse 3-2-1c und die Radiusfunktion aus 1-0.

Die Umparametrisierung der Geradenmenge $\mathcal{H}$ hat folgende Darstellung

$$u = \frac{1 - 4t + s^2 + t^2}{2s} \text{ und } v = \frac{1 - s^2 - t^2}{2t}. \quad (3.21)$$

Die rationale Darstellung von Ψ lautet

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4s^2t^2(1+s^2+t^2)} [t(1 - 4t + s^2 + t^2)(1 - 6s^2 + 2t^2 - 4t - 4s^2t - 4t^3 \\ & + s^4 + 2s^2t^2 + t^4), s(s - s^3 - st^2 - s^5 - 2s^3t^2 - st^4 + s^7 + 3s^5t^2 \\ & + 3s^3t^4 + st^6 + 8t^2 + 16s^2t^2 + 48t^4 - 40t^3 - 40t^3s^2 - 40t^5 + 8s^4t^2 \\ & + 16s^2t^4 + 8t^6), -4t(-1 + s^2 + t^2)(s + s^3 + st^2 + t - 4t^2 + s^2t + t^3)]. \end{aligned}$$

Durch implizitisieren kann nachgewiesen werden, dass diese algebraische Fläche den Grad 18 hat.

3.3.3 Beide Achsen sind Tangenten von Ω

Möglichst einfache Formen für die Netzachsen sind

$$c(u) = (1, u, 0, 1) \text{ und } d(v) = (1, 0, v, -1), \quad (3.22)$$

woraus die Parametrisierungen für $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ mit

$$h(u, v) = (-u, v, -2, -v, u, uv), \quad g(u, v) = (v, -u, uv, -u, v, 2). \quad (3.23)$$

folgen. Die Stützfunktionen seien mit $a = 2u^2$ und $b = 2v^2$ gewählt, wodurch sich die rationale Parametrisierung von Φ wie folgt ergibt

$$p(u, v) = (-u^2 - v^2, 4u, 4v, u^2 - v^2). \quad (3.24)$$

Die Fläche ist aus der Äquivalenzklasse 4-2-1, und die Mittenfläche der Kugelfamilie ist aus der Klasse 3-1-1 und die Radiusfunktion aus 1-1-2.

Der Schnitt von $\mathcal{H}$ mit Ω liefert die Umparametrisierung von $\mathcal{H}$ in die Parameter s und t . Diese ist durch

$$u = \frac{4t}{2s + 1 + s^2 + t^2} \text{ und } v = \frac{2(1 - s^2 - t^2)}{-2s + 1 + s^2 + t^2}. \quad (3.25)$$

gegeben. Die daraus resultierende Parametrisierung von Ψ lautet

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{(2s+1+s^2+t^2)^2(-2s+1+s^2+t^2)^2(1+s^2+t^2)} [-4(-2s+1+s^2+t^2)(2s+1 \\ & +s^2+t^2)(s^6+2s^5+3t^2s^4-s^4+4t^2s^3-4s^3+2s^2t^2-s^2+3t^4s^2 \\ & -12st^2+2s+2t^4s+3t^4+1+3t^2+t^6), 8t(3+4t^2+4s^2-28s^2t^2 \\ & +12t^2s^4+12t^4s^2-14s^4+2t^4+4t^6+4s^6+3s^8+3t^8+12s^6t^2 \\ & +18s^4t^4+12s^2t^6), 4(-1+s^2+t^2)(1+12t^2-4s^2+44s^2t^2+4t^2s^4 \\ & +20t^4s^2+6s^4+22t^4+12t^6-4s^6+s^8+t^8+4s^6t^2+6s^4t^4+4s^2t^6)]. \end{aligned}$$

Diese Fläche hat den Grad 26.

3.3.4 Eine Achse ist eine Sekante, die andere eine Passante von Ω

Für die Netzachsen werden die Geraden

$$c(u) = (1, u, 0, 0) \text{ und } d(v) = (0, 1, v, 2), \quad (3.26)$$

gewählt, woraus die Netzgeraden mit den Darstellungen

$$h(u, v) = (1, v, 2, 0, -2u, uv), \quad g(u, v) = (0, 2u, uv, 1, v, -2) \quad (3.27)$$

folgen. Φ hat die Parametrisierung

$$p(u, v) = (-2u^2, 4u, 4v, 2u + v^2), \quad (3.28)$$

welche mit Hilfe der Stützfunktionen $a = 2u^2$ und $b = 2v^2$ berechnet wurde. Diese Fläche gehört zur Äquivalenzklasse 4-2-1. Die Mittenfläche von Ψ ist aus der Äquivalenzklasse 3-1-3 und die Radiusfunktion aus 1-1-3a.

Durch die Gleichungen,

$$u = \frac{4t - s^2 - t^2 - 1}{4s} \quad \text{und} \quad v = \frac{2(1 - s^2 - t^2)}{1 + s^2 + t^2}, \quad (3.29)$$

lassen sich die Netze und die Fläche Φ in den Parametern s und t schreiben, woraus die rationale Darstellung von Ψ folgt,

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{1}{8s^2(1+s^2+t^2)^3} [1 - 8t - 3s^2 + 21t^2 - 14s^4 + 58t^4 + 44s^2t^2 + 16ts^4 \\ & - 32s^2t^3 + 30s^4t^2 + 102s^2t^4 - 128s^3t^2 - 32t^3 - 48t^5 - 14s^6 + 58t^6 \\ & + 64s^3 - 128s^5 - 32s^4t^3 - 64s^2t^5 + 12s^6t^2 + 54s^4t^4 + 60s^2t^6 - 8ts^8 \\ & - 32t^3s^6 - 48t^5s^4 - 32t^7s^2 + 5s^8t^2 + 10s^6t^4 + 10s^4t^6 + 5s^2t^8 - 32t^7 \\ & - 3s^8 + 21t^8 - 8t^9 + s^{10} + t^{10} + 64s^7 + 128s^5t^2 + 64s^3t^4, 8s(1 - 5t \\ & + 4s^2 + 8t^2 + 6s^4 + 14t^4 + 20s^2t^2 - 15ts^4 - 30s^2t^3 + 16s^4t^2 + 20s^2t^4 \\ & - 15t^3 - 15t^5 - 15ts^2 + 4s^6 + 8t^6 - 5ts^6 - 15s^4t^3 - 15s^2t^5 + 4s^6t^2 \\ & + 6s^4t^4 + 4s^2t^6 - 5t^7 + s^8 + t^8 + 8ts - 16ts^3 - 16st^3 + 8ts^5 + 16s^3t^3 \\ & + 8st^5), 4s(-1 + s^2 + t^2)(8s - 4t + 1 + 3s^2 + 3t^2 + 3s^4 + 3t^4 + 6s^2t^2 \\ & - 4ts^4 - 8s^2t^3 + 3s^4t^2 + 3s^2t^4 + 48st^2 + 16s^3t^2 + 8st^4 - 8t^3 - 4t^5 \\ & - 8ts^2 + s^6 + t^6 + 48s^3 + 8s^5)]. \end{aligned}$$

Diese algebraische Fläche hat den Grad 18.

In diesem Fall können die Achsen auch polar bezüglich Ω liegen. Eine Möglichkeit für die Wahl der Achsen ist,

$$c(u) = (1, 0, 0, -u) \quad \text{und} \quad d(v) = (0, 1, v, 0). \quad (3.30)$$

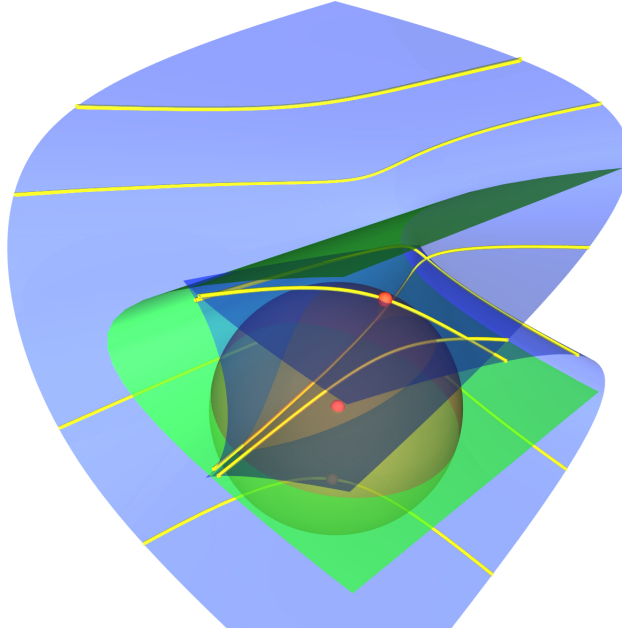


Abbildung 3.2: Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem hyperbolischen Netz.

Die Netzgeraden haben die Darstellungen:

$$h(u, v) = (1, v, 0, uv, -u, 0), \quad g(u, v) = (-uv, u, 0, 1, v, 0). \quad (3.31)$$

Mit den quadratischen Stützfunktionen $a = u^2$ und $b = v^2$ kann die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (-u^2, -v^2, 2v, 2u), \quad (3.32)$$

berechnet werden. Diese ist aus der Äquivalenzklasse 4-2-1. Die Kugelfamilie ist bestimmt durch eine Mittenfläche der Klasse 3-2-1b und einer Radiusfunktion der Klasse 1-0.

Der Schnitt von $\mathcal{H}(u, v)$ mit $\Omega(s, t)$ liefert eine mögliche Darstellung der Parameter u und v in den Parametern s und t ,

$$u = -\frac{1 + s^2 + t^2}{2s} \quad \text{und} \quad v = \frac{1 - s^2 - t^2}{2t}. \quad (3.33)$$

Die daraus resultierende rationale Darstellung von Ψ lautet

$$\Psi = -\frac{1}{4s^2t^2}[t^2(1 - 6s^2 + 2t^2 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4), s(s - 2s^3 - 2t^2s + s^5 + 2s^3t^2 + st^4 - 8t^3), 4st(-1 + s^2 + t^2)(s + t)].$$

In Abbildung 3.2 ist die Mittenfläche (grün) und die Hüllfläche (blau) dieser Kugelfamilie dargestellt. In gelb ist eine Schar von Parameterlinien zu sehen und in rot ist eine Kugel samt Mittelpunkt und Berührungspunkte eingezeichnet.

Die algebraische Fläche hat den Grad 6 und eine implizite Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} &64x^3 + 16x^2y^2 - 128x^2y + 48x^2z^2 - 320x^2 - 32xy^3 + 8xy^2z^2 \\ &+ 8xyz^2 + 384xy + 12xz^4 - 16xz^2 + 512x + 16y^4 + 8y^3z^2 + 64y^3 \\ &+ y^2z^4 + 24y^2z^2 + 10yz^4 - 256y + z^6 - 11z^4 - 32z^2 - 256 = 0. \end{aligned}$$

3.3.5 Eine Achse ist eine Sekante, die andere eine Tangente von Ω

Die Netzachsen sein gewählt durch

$$c(u) = (1, u, 0, 1) \text{ und } d(v) = (0, 0, 1, v), \quad (3.34)$$

woraus die Geradenmengen

$$h(u, v) = (0, 1, v, -1, -uv, u), \quad g(u, v) = (1, uv, u, 0, 1, -v) \quad (3.35)$$

folgen. Die Stützfunktionen seien als $a = u^2$ und $b = v^2$ gewählt, womit die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (-u^2 - 2v, 2u, -v^2, -2v), \quad (3.36)$$

berechnet werden kann. Diese Fläche der Äquivalenzklasse 4-2-1 ist die Hüllfläche einer Kugelmengende deren Mittenfläche aus der Klasse 3-2-1c und deren Radiusfunktion aus 1-0 sind.

Die Gleichungen

$$u = \frac{t}{s} \text{ und } v = \frac{2s - 1 - s^2 - t^2}{-1 + s^2 + t^2}, \quad (3.37)$$

folgen aus dem Schnitt von Ω mit $\mathcal{H}$ und liefern die rationale Darstellung von Ψ

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{s^2(-1+s^2+t^2)(1+s^2+t^2)} [t^2 + 3t^2s^4 - t^6 - 8s^3 - 8s^5 - 8s^3t^2 + 2s^2 \\ & + 12s^4 + 4s^2t^2 + 2s^6, 2st(-1 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4 + 4s^2 - 2s \\ & - 2s^3 - 2st^2), (-2s + 1 + s^2 + t^2)(2s + 2s^3 + 2st^2 + 1 - 6s^2 \\ & - 6t^2 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4)]. \end{aligned}$$

Der Grad dieser algebraischen Fläche ist 18.

3.3.6 Eine Achse ist eine Passante, die andere eine Tangente von Ω

Sind die Netzachsen mit

$$c(u) = (1, 0, u, 0) \text{ und } d(v) = (1, v, 0, 1), \quad (3.38)$$

gewählt, so folgen die Parametrisierungen der Netzgeraden mit

$$h(u, v) = (v, -u, 1, u, 0, -uv), \quad g(u, v) = (-u, 0, -uv, v, -u, -1). \quad (3.39)$$

Die Stützfunktionen werden mit $a = u^2$ und $b = v^2$ gewählt woraus die Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (-u^2, 2v, 2u, -u^2 + v^2), \quad (3.40)$$

folgt. Diese Fläche gehört wiederum zur Äquivalenzklasse 4-2-1. Dies lässt vermuten, dass alle hyperbolischen Netze in ω zu einer Fläche dieser Klasse führen. Das zyklographische Bild hat eine Mittenfläche der Klasse 3-1-3 und eine Radiusfunktion der Klasse 1-1-2.

Die Parameter u und v können wieder in s und t umgerechnet werden

$$u = \frac{-1 + s^2 + t^2}{-2s + 1 + s^2 + t^2} \text{ und } v = \frac{2t}{1 + s^2 + t^2}. \quad (3.41)$$

Ψ hat dann die Darstellung

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{(1+s^2+t^2)^3(-2s+1+s^2+t^2)^2} [(2s-1-s^2-t^2)(s^8+4s^6t^2-2s^4+6s^4t^4 \\ & +8t^2s^3+4s^2t^6-20s^2t^2+8t^4s+8st^2+1-2t^4+t^8), 2t(3-8s \\ & +3s^8+3t^8+4t^6+16s^2+4t^2-8st^2+12s^2t^2-24s^3+26s^4+2t^4 \\ & +36s^4t^2+24s^2t^4+12s^6t^2+18s^4t^4+12s^2t^6-32t^2s^3-8t^4s+16s^6 \\ & -24s^5-8s^7-24s^5t^2-24s^3t^4-8st^6), (-1+s^2+t^2)(1-4s+s^8 \\ & +t^8+12t^6+8s^2+12t^2-28st^2+52s^2t^2-12s^3+14s^4+22t^4 \\ & +28s^4t^2+32s^2t^4+4s^6t^2+6s^4t^4+4s^2t^6-40t^2s^3-28t^4s+8s^6 \\ & -12s^5-4s^7-12s^5t^2-12s^3t^4-4st^6)]. \end{aligned}$$

Durch implizitisieren zeigt sich, dass die Fläche vom Grad 15 ist.

3.4 $\mathcal{H}$ ist ein elliptisches Netz

Die beiden Achsen c , d des Netzes müssen im elliptischen Fall hoch imaginär sein. Die beiden Geraden sind als Punktmengen gegeben und gehen durch polarisieren an Ω in die Träger e und f der Büschel ϵ und ϕ über. Die Geradenmenge $\mathcal{G}$ ist auch wieder ein elliptisches Netz, da die Polarität konjugierte und windschiefe Lage erhält. Analog zum hyperbolischen Fall muss

$$e_v = 0 \text{ und } f_u = 0 \quad (3.42)$$

gelten. Die Stützfunktionen müssen auch wieder

$$a_v = 0 \text{ und } b_u = 0 \quad (3.43)$$

erfüllen. Darüber hinaus gilt

$$e_v = \overline{f_u} \quad (3.44)$$

Somit ist eine eindeutige Lösbarkeit von (3.7) gewährleistet.

Im elliptischen Fall haben die Achsen c und d immer Schnittpunkte mit Ω . Polare Lage der beiden Achsen bezüglich Ω lässt sich durch nachrechnen ausschließen. Es bleiben daher folgende Fälle:

3.4.1 Beide Achsen sind Sekanten von Ω

Es sind

$$c(u) = (u, i, ui, 1) \text{ und } d(v) = (v, -i, -vi, 1) \quad (3.45)$$

möglicht einfache Darstellungen für die Netzachsen. Die Ferngeraden der Normalebenen beziehungsweise der Tangentialebenen der Fläche Φ sind dann

$$\begin{aligned} h(u, v) &= (-(u+v)i, -2uvi, u-v, (u+v)i, -2i, v-u), \\ g(u, v) &= (-(u+v)i, 2i, v-u, -(u+v)i, -2uvi, v-u). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Stützfunktionen seien allgemeine reelle quadratische Funktionen $a = A + Bu + Cu^2$ und $b = A + Bv + Cv^2$. Mit dem System (3.7) ist die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = (C(u+v) + B, \frac{-C(u^2 - v^2)i}{2}, C(v-u)i, \frac{C(u^2 + v^2)}{2} - A). \quad (3.47)$$

Man sieht wieder sofort, dass die Werte A und B nur eine Verschiebung der Fläche beziehungsweise die Erzeugung einer Parallellfläche bewirken. Daher werden alle gleich Null gesetzt, weiters soll $C = 1$ sein.

Daraus folgt für

$$\Phi = p(u, v) = \frac{1}{2}(2(u+v), -(v^2 - u^2)i, 2(v-u)i, u^2 + v^2), \quad (3.48)$$

durch die Umparametrisierung $u = m - ni$, $v = m + ni$ erhält man die reelle Darstellung

$$\Phi = p(m, n) = (2m, 2mn, -2n, m^2 - n^2), \quad (3.49)$$

wonach diese Fläche zur Äquivalenzklasse 4-2-3 nach [17] gehört. Die Mitlenfläche des zyklographischen Bildes ist aus der Klasse 3-1-2 und die Radiusfunktion aus 1-1-2.

Die Umparametrisierung von m und n in die Parameter s und t erfolgt genau wie im hyperbolischen Fall und liefert

$$\begin{aligned} m &= \frac{2(t - s^2t - t^3 + s + t^2s + s^3)}{6t^2 + 1 + 2s^2 + s^4 + 2t^2s^2 + t^4}, \\ n &= -\frac{4ts - 1 + s^4 + 2t^2s^2 + t^4}{6t^2 + 1 + 2s^2 + s^4 + 2t^2s^2 + t^4}. \end{aligned}$$

Das zyklographische Bild von Φ hat die rationale Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{(1+s^2+t^2)(6t^2+1+2s^2+s^4+2t^2s^2+t^4)^2} [2(12st^2 + 3s + 2t + 3st^8 - 12t^5s^4 \\ & - 8t^3s^6 - 12s^2t + 4s^3 + 12t^3 + 2s^5 + 52s^3t^2 + 34t^4s + 20s^5t^2 + 28s^3t^4 \\ & + 12st^6 + 12t^3s^4 - 12t^5s^2 + 12s^6t + 12s^7t^2 + 18s^5t^4 + 12s^3t^6 + 4s^7 \\ & - 12t^7 + 3s^9 - 2t^9 - 8t^7s^2 - 2s^8t), -2(20st^2 - 2s - 3t + 2st^8 - 18t^5s^4 \\ & - 12t^3s^6 + 12s^2t - 4s^3 + 4t^3 - 2t^5 + 30s^4t + 12s^2t^3 - 12s^5t^2 - 36s^3t^4 \\ & - 20st^6 + 28t^3s^4 + 20t^5s^2 + 12s^6t + 8s^7t^2 + 12s^5t^4 + 8s^3t^6 + 4s^7 \\ & + 4t^7 + 2s^9 - 3t^9 - 12t^7s^2 - 3s^8t), -1 - 11s^2 + 4t^2s^2 - 19t^2 - 10s^4 \\ & - 2t^4 - 8ts + 40s^3t + 72t^3s + 10s^6 + 2t^6 + 6s^4t^2 - 2s^2t^4 + 11s^8 + 19t^8 \\ & + 112s^3t^3 + 40s^5t + 72st^5 + 90t^4s^4 + 52t^2s^6 + 68t^6s^2 + 5s^8t^2 + 5t^8s^2 \\ & - 24s^5t^3 - 24s^3t^5 - 8s^7t - 8st^7 + 10t^4s^6 + 10t^6s^4 + s^{10} + t^{10}]. \end{aligned}$$

Diese algebraische Fläche hat den Grad 18.

3.4.2 Beide Achsen sind Tangenten von Ω

Die Netzachsen seien

$$c(u) = (1, i, u, ui) \text{ und } d(v) = (1, -i, v, -vi), \quad (3.50)$$

dies führt zu den Netzgeraden

$$\begin{aligned} h(u, v) &= (-2i, v - u, -(u + v)i, -2uvi, u - v, (u + v)i), \\ g(u, v) &= (2uvi, v - u, (u + v)i, -2i, v - u, (u + v)i). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die quadratischen Stützfunktionen $a = u^2$ und $b = v^2$ liefern die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = \left(-\frac{1}{2}(u^2 + v^2), \frac{1}{2}(u^2 - v^2)i, u + v, (u - v)i\right) \quad (3.52)$$

Die reelle Darstellung

$$\Phi = p(m, n) = (-m^2 + n^2, 2mn, 2m, 2n), \quad (3.53)$$

kann durch die Umparametrisierung $u = m - ni$, $v = m + ni$ berechnet werden. Diese Fläche gehört ebenfalls zur Äquivalenzklasse 4-2-3, und die

Mittenfläche der Kugelmenge ist aus der Klasse 3-2-3 und die Radiusfunktion aus 1-0.

Die Gleichungen

$$m = \frac{t - t^2s + ts^2 + t^3 + s - s^3}{2(s^2 + t^2)},$$

$$n = \frac{t^3 + s - t + ts^2 + s^3 + t^2s}{2(s^2 + t^2)}$$

stellen eine Umparametrisierung von m und n in die Parameter s und t dar. Woraus die rationale Darstellung von Ψ ,

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2(1+s^2+t^2)(s^2+t^2)^2} [2(-s^4 - 2s^2t^2 - t^4 - st + t^3s + s^3t - s^6 - 3t^4s^2 \\ & - 2t^3s^3 - t^5s - 3t^2s^4 - ts^5 - t^6 + 3t^3s^5 + 3t^5s^3 + t^7s + ts^7), \\ & -(t^3 + s - t + ts^2 + s^3 + t^2s)(-t + 2ts^2 + 2t^3 + 2s^3t^2 + t^4s \\ & - ts^4 - 2s^2t^3 - t^5 - s + s^5), 4t(1 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4)(s^2 + t^2)], \end{aligned}$$

berechnet werden kann. Diese Fläche ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

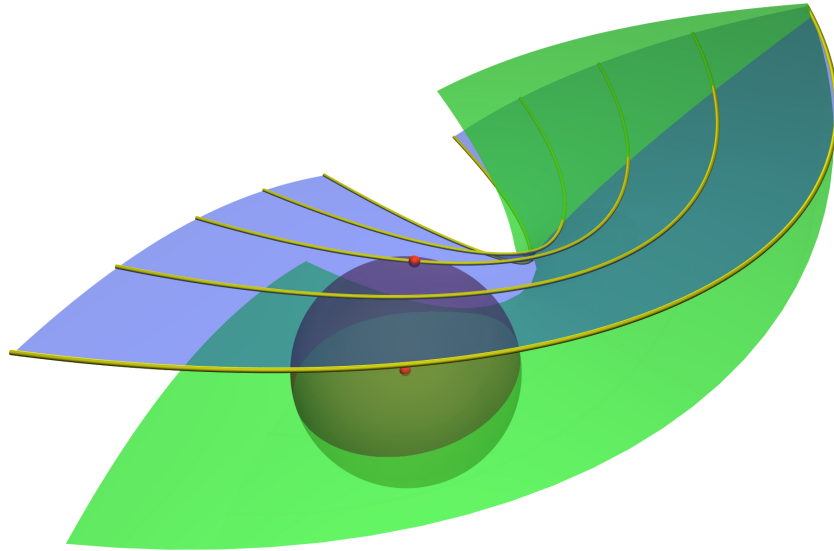


Abbildung 3.3: Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem elliptischen Netz.

Eine implizite Darstellung dieser algebraischen Fläche vom Grad 12 lautet:

$$\begin{aligned}
 & 256x^8 + 2048x^7 - 32z^4x^6 + 6656x^6 + 512z^2x^6 + 512y^2x^6 + 3072z^2x^5 \\
 & + 3072y^2x^5 - 192z^4x^5 + 11264x^5 - 48z^6x^4 + z^8x^4 + 6912z^2x^4 + 768z^2y^2x^4 \\
 & - 128z^4y^2x^4 + 256y^4x^4 + 8192y^2x^4 + 10496x^4 - 128z^4x^4 + 7168z^2x^3 \\
 & - 512z^4y^2x^3 + 12288y^2x^3 + 3072z^2y^2x^3 - 192z^6x^3 + 5120x^3 + 1024y^4x^3 \\
 & + 4z^8x^3 + 768z^4x^3 + 5120y^2z^2x^2 + 10752y^2x^2 + 2z^8y^2x^2 - 10z^8x^2 \\
 & + 256z^2y^4x^2 - 128z^6y^2x^2 + 3328z^2x^2 - 416y^2z^4x^2 + 1536y^4x^2 - 160y^4z^4x^2 \\
 & + 1376z^4x^2 + 1024x^2 + z^{10}x^2 - 192z^6x^2 + 1024y^4x + 704z^4x + 512z^2y^4x \\
 & + 512z^2x - 320y^4z^4x - 256z^6y^2x + 192y^2z^4x - 28z^8x + 2z^{10}x + 5120y^2x \\
 & + 4z^8y^2x + 4096y^2z^2x - 64z^4y^6 + 1280z^2y^2 - 10y^2z^8 + z^8y^4 + 160z^4y^2 \\
 & + z^{10} + 256z^2y^4 + 64z^4 + 256y^4 + 1024y^2 - 288z^4y^4 + y^2z^{10} - 15z^8 \\
 & - 80y^4z^6 + 48z^6 - 80y^2z^6 = 0.
 \end{aligned}$$

3.5 $\mathcal{H}$ ist ein parabolisches Netz

Bei einem parabolischen Netz existiert nur eine Achse $c(u)$. Weiters wird eine Ebene $d(u, v) \not\supset c(u)$ vorgegeben, mit deren Hilfe die Zuordnung von Punkten auf der Geraden zu den Büschelebenen festgelegt wird. Die Netzgeraden sind die Geradenbüschel um die Punkte $c(u_0)$ in den Ebenen $[c(u_0), d(u_0, v)]$. Bei der Polarität an Ω gehen die Punkte der Gerade c in das Ebenenbüschel um c über. Die Ebene $d(u, v)$ wird zu einem Ebenenbündel, dessen Trägerpunkt nicht auf c liegt. Die Geraden $\mathcal{G}$ bilden daher auch ein parabolisches Netz, siehe 1.1.6.

Damit das Gleichungssystem (3.7) eine eindeutige Lösung besitzt, muss

$$e_v = 0 \text{ und } e_u = f_v \quad (3.54)$$

gelten. Weiters müssen die Stützfunktionen

$$a_v = 0 \text{ und } a_u = b_v \quad (3.55)$$

erfüllen.

3.5.1 Die Achse ist eine Passante von Ω

Seien

$$c(u) = (1, 0, u, 0) \text{ und } d(v) = (0, 1, v, u), \quad (3.56)$$

so lauten die Ferngeraden der Normalebenen beziehungsweise der Tangentialebenen der Fläche Φ

$$h(u, v) = (1, v, u, u^2, 0, -u), \quad g(u, v) = (-u^2, 0, -u, 1, v, -u). \quad (3.57)$$

Die Stützfunktion a sei eine allgemeine quadratische Funktionen $a = A + Bu + Cu^2$, dann folgt $b = va_u + U + Vu + Wu^2$. Mit dem System (3.7) lautet die rationale Parametrisierung von Φ

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} -Cu^2 + A, & -Wu^2 - 2Cuv + U, \\ 2Cu + B, & -2Wu - 2Cv - V. \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Die Werte A , B , U und V führen zu Translata und Parallellflächen von Ψ , daher werden alle gleich Null gesetzt. Für die folgende Berechnung wählen wir speziell $C = 1$ und $W = 0$.

Daraus folgt

$$\Phi = p(u, v) = (-u^2, -2uv, 2u, -2v), \quad (3.59)$$

welche durch pseudoeuklidische Bewegungen in die Normalform 4-2-2 übergeführt werden kann. Die Orthogonalprojektion $\pi(\Phi)$ ist aus der Klasse 3-2-2c und die Radiusfunktion aus 1-0.

Lösen des Systems (3.16) liefert die Umparametrisierung

$$u = \frac{1 + s^2 + t^2}{2t} \text{ und } v = -\frac{s + s^3 + st^2 - t + s^2t + t^3}{t^2}. \quad (3.60)$$

Das zyklographische Bild von Φ hat bei diesem Beispiel die rationale Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4t^3(1+s^2+t^2)} [-t(1 + 11s^2 + 3t^2 + 11s^4 + 14s^2t^2 + 3t^4 + s^6 + 3s^4t^2 \\ & + 3s^2t^4 + t^6 - 8st + 8s^3t + 8st^3), 2(s + s^3 + st^2 - t + s^2t + t^3) \\ & (1 + 2s^2 - 2t^2 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4), 2t(2t + 2s^4t + 4s^2t^3 + 2t^5 - s \\ & + s^5 + 2s^3t^2 + st^4)]. \end{aligned}$$

Diese Fläche hat den Grad 14.

3.5.2 Die Achse ist eine Sekante von Ω

Möglichst einfache Formen für die Netzachse und die Ebene d seien

$$c(u) = (1, 0, 0, u) \text{ und } d(v) = (1, -1, u, v). \quad (3.61)$$

Die Geraden $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ besitzen die Darstellung

$$\begin{aligned} h(u, v) &= (-1, u, v - u, -u^2, -u, 0), \\ g(u, v) &= (u^2, u, 0, -1, u, -v + u). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die Stützfunktionen seien als $a = u^2$ und $b = 2uv$ gewählt, dann liefert das System (3.7) die rationale Parametrisierung von Φ

$$\Phi = p(u, v) = (-u^2, -u^2 + 2uv, 2v, -2u). \quad (3.63)$$

Diese Fläche gehört wieder zur Äquivalenzklasse 4-2-2. Die Mittenfläche der Kugelfamilie ist aus der Klasse 3-2-2a und die Radiusfunktion aus 1-0.

Die Umparametrisierung

$$u = \frac{(-1 + s^2 + t^2)}{2t} \text{ und } v = \frac{-s + s^3 + st^2 - 2t}{2t^2} \quad (3.64)$$

folgt aus (3.16).

Das zyklographische Bild von Φ , dargestellt in Abbildung 3.4, hat die rationale Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{-1}{4t^3(1+s^2+t^2)} & [t(-1 + s^2 + t^2)(-1 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4 - 8st), (-1 + s^2 \\ & + t^2)(3t + ts^4 + 2s^2t^3 + t^5 + 2s - 2s^5 - 4s^3t^2 - 2st^4 + 4ts^2 - 4t^3), \\ & 4t(s - s^5 - 2s^3t^2 - st^4 + 3t + ts^4 + 2s^2t^3 + t^5)]. \end{aligned}$$

Mittels Implizitisierung lässt sich zeigen, dass diese algebraische Fläche den Grad 14 besitzt.

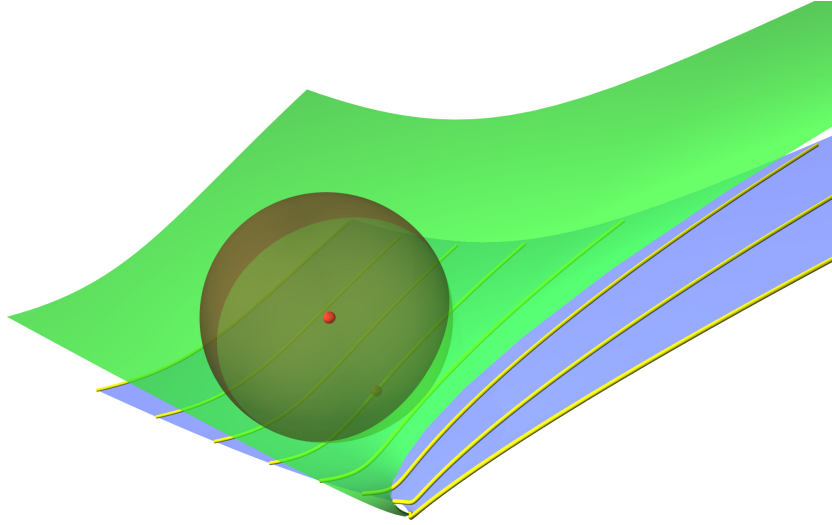


Abbildung 3.4: Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem parabolischen Netz.

3.5.3 Die Achse ist eine Tangente von Ω

Dabei kann man zwei Fälle unterscheiden. a) Alle Netzgeraden des Büschels mit Träger im Berührungspunkt der Achse und Ω , sind ebenfalls Tangenten an Ω . Oder b) die Trägerebene dieses Büschels schneidet Ω nach einem Kegelschnitt.

Ein Beispiel für a): Wir wählen

$$c(u) = (1, 0, u, 1) \text{ und } d(v) = (0, 1, v, u), \quad (3.65)$$

dann folgen

$$\begin{aligned} h(u, v) &= (1, v, u, u^2 - v, 1, -u), \\ g(u, v) &= (-u^2 + v, -1, -u, 1, v, -u). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Stützfunktionen haben die Form $a = u^2$ und $b = 2uv$. Die rationale Parametrisierung von Φ lautet bei diesem Beispiel

$$\Phi = p(u, v) = (-u^2 - 2v, -2uv, 2u, -2v), \quad (3.67)$$

welche zur Äquivalenzklasse 4-2-2 gehört. Die Kugelmenge hat eine Mittenfläche der Klasse 3-2-2b und eine Radiusfunktion der Klasse 1-0.

Das System (3.16) liefert die Umparametrisierung

$$u = \frac{-2s + 1 + s^2 + t^2}{2t} \text{ und } v = \frac{2s^2 - s - s^3 - st^2 + t - s^2t - t^3}{2t^2}. \quad (3.68)$$

Womit die Parametrisierung des zyklographischen Bildes von Φ berechnet werden kann. Diese lautet

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4t^3(1+s^2+t^2)} [-t(4t - 8s + 26s^2t^2 - 16st^2 + 8t^3s - 8s^2t^3 - 4s^4t \\ & + 8s^3t - 8ts - 8st^4 - 16s^3t^2 + 23s^4 + 3t^4 - 32s^3 + s^6 + t^6 + 3s^4t^2 \\ & + 3s^2t^4 + 23s^2 + 3t^2 + 1 - 4t^5 - 8s^5), 2(-2s^2 + s + s^3 + st^2 - t \\ & + s^2t + t^3)(-2s - 2s^3 - 2st^2 + 1 + 2s^2 - 2t^2 + s^4 + 2s^2t^2 + t^4), \\ & t(-2ts - 2s^3t - 2t^3s + 2t + 2s^4t + 4s^2t^3 + 2t^5 + 2s^2 - 2s^4 - 2s^2t^2 \\ & - s + s^5 + 2s^3t^2 + st^4)]. \end{aligned}$$

Diese algebraische Fläche hat den Grad 12.

Fall b):

Um die gewünschte Lage bezüglich Ω zu erreichen seien

$$c(u) = (1, 0, u, 1) \text{ und } d(v) = (u, -1, v, 1) \quad (3.69)$$

gewählt. Daraus folgen die Netzgeraden mit

$$\begin{aligned} h(u, v) &= (-1, v - u^2, 1 - u, u - v, -1, u), \\ g(u, v) &= (-u + v, 1, u, -1, v - u^2, -1 + u). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Um eine Fläche im $\mathbb{R}^{3,1}$ zu erhalten seien die Stützfunktionen $a = u^2$ und $b = 2uv$. Dies führt zu folgender rationalen Parametrisierung von Φ

$$\Phi = p(u, v) = (2v, 2uv - 2v - u^2, 2u, 2v + u^2). \quad (3.71)$$

Diese Fläche der Äquivalenzklasse 4-2-2 wird unter π auf eine Fläche der Klasse 3-2-2c abgebildet, und die vierte Koordinate ist aus der Klasse 1-1-3a.

Aus dem Gleichungssystem (3.16) folgt

$$\begin{aligned} u &= \frac{-2s+2t+1+s^2+t^2}{2t}, \\ v &= \frac{-4st+6t^2+6s^2t+6t^3-2s+2t+1+2s^2-2s^3+s^4+2s^2t^2-2t^2s+t^4}{4t^2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Daraus folgt die rationale Parameterdarstellung von $\Psi = \gamma(\Phi)$

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{4t^2(1+s^2+t^2)} [2t(1+2t-5s+24s^2t-12st+8t^3-14s^3+11s^4+7t^4 \\ & +t^6+3s^2t^4+3s^4t^2-10s^3t^2+6t^5-5s^5+s^6-5t^4s-20s^3t-20st^3 \\ & +6s^4t+12s^2t^3+18s^2t^2-22t^2s+7t^2+11s^2), 1+t-4s+11s^2t \\ & -4st-13t^3-12s^3+14s^4-30t^4-2t^6+4s^2t^4+14s^4t^2-8s^3t^2 \\ & -25t^5-12s^5+8s^6+4t^4s-16s^3t+16st^3+15s^4t-10s^2t^3+4t^2s \\ & +4t^6s^2+6s^4t^4+4s^6t^2-12s^5t^2-12s^3t^4+15t^5s^2-4t^6s-12s^5t \\ & -24s^3t^3-12st^5+5s^6t+15s^4t^3+t^8+5t^7+s^8-4s^7-2t^2+8s^2 \\ & , t(-4t+8s+8st+7s^4+23t^4+3t^6+9s^2t^4+9s^4t^2-16s^3t^2+20t^5 \\ & -8s^5+3s^6-8t^4s-3-24s^3t-24st^3+20s^4t+40s^2t^3+30s^2t^2 \\ & -7t^2-7s^2)]. \end{aligned}$$

Diese algebraische Fläche hat den Grad 12.

Zusammenfassung

Die in den Kapiteln 3.3, 3.4 und 3.5 getroffene Einteilung ist hinsichtlich der pseudoeuklidischen Bewegungen invariant, da bei diesen Ω fix bleibt. Mit dem Ziel Flächen von niedrigem Grad zu erhalten wurden nur quadratische Stützfunktionen betrachtet. Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse zusammen.

Netztyp	Lage der Achse(n) bzgl. Ω^1	Klasse von Φ	Klasse der Mittenfläche	Klasse der Radiusfunktion	Grad der algebraischen Fläche ²
hyp	P/P	4-2-1	3-1-3	1-1-3a	18
hyp	S/S	4-2-1	3-2-1c	1-0	18
hyp	T/T	4-2-1	3-1-1	1-1-2	26
hyp	S/P	4-2-1	3-1-3	1-1-3a	18
hyp	S/P p	4-2-1	3-2-1b	1-0	6
hyp	S/T	4-2-1	3-2-1c	1-0	18
hyp	P/T	4-2-1	3-1-3	1-1-2	15
ell	S/S	4-2-3	3-1-2	1-1-2	18
ell	T/T	4-2-3	3-2-3	1-0	12
par	P	4-2-2	3-2-2c	1-0	14
par	S	4-2-2	3-2-2a	1-0	14
par	T	4-2-2	3-2-2b	1-0	12
par	T b	4-2-2	3-2-2c	1-1-3a	12

¹P...Passante, S...Sekante, T...Tangente, p...polare Lage, b...Die Tangentialebene an Ω im Berührungspunkt ist die Trägerebene des Büschels in diesem Punkt.

²Die algebraischen Grade sind nur experimentell festgestellt. Exakte obere oder untere Schranken wären wünschenswert.

Anhang

Folgende Tabelle enthält die 42 Äquivalenzklassen von quadratischen Flächen im n-dimensionalen affinen Raum nach PETERS und REIF, siehe [17].

Klasse	Normalform	Klasse	Normalform	Name
0-0	0	3-1-1	$u^2 + v^2, u, v$	Drehparaboloid
1-0	u	3-1-2	uv, u, v	HP-Fläche
1-1-1	$u^2 + v^2$	3-1-3	u^2, u, v	parabolischer Zylinder
1-1-2	$u^2 - v^2$	3-2-1a	$u^2, v^2, u + v$	parabolischer Zylinder
1-1-3a	$u^2 + v$	3-2-1b	u^2, v^2, u	
1-1-3b	u^2	3-2-1c	$u^2, v^2 + u, v$	
2-0	u, v	3-2-2a	u^2, uv, v	Whitney Umbrella
2-1-1	$u^2 + v^2, u$	3-2-2b	$u^2 + v, uv, u$	Cayley Fläche
2-1-2a	$uv, u + v$	3-2-2c	u^2, uv, u	parabolischer Zylinder
2-1-2b	uv, u	3-2-3	$u^2 - v^2, uv, u$	Kegel
2-1-3a	u^2, v	3-3-1a	u^2, v^2, uv	
2-1-3b	u^2, u	3-3-1b	$u^2, v^2, uv + u$	
2-1-3c	$u^2 + v, u$	3-3-1c	$u^2, v^2, uv + u + v$	
2-2-1a	u^2, v^2	3-3-2a	$u^2, v^2 + u, uv$	
2-2-1b	$u^2 + v, v^2 + u$	3-3-2b	$u^2, v^2 + u, uv - v$	
2-2-1c	$u^2 + v, v^2$	4-2-1	u^2, v^2, u, v	
2-2-2a	u^2, uv	4-2-2	u^2, uv, u, v	
2-2-2b	$u^2 + v, uv$	4-2-3	$u^2 - v^2, uv, u, v$	
2-2-2c	$u^2, uv + v$	4-3-1a	u^2, v^2, uv, u	
2-2-3a	$u^2 - v^2, uv$	4-3-1b	$u^2 + v, v^2, uv, u$	
2-2-3b	$u^2 - v^2, uv + u$	5-1-1	u^2, v^2, uv, u, v	

Tabelle 3.1: Tabelle der Normalformen.

Literaturverzeichnis

- [1] T.E. CECIL: *Lie sphere geometry: with applications to submanifolds*. New York, Springer, 2008.
- [2] F. CHEN: *Reparametrization of a rational ruled surface using the μ -basis*. Comp. Aided Geom. Design **20** (2003), 11–17.
- [3] A. COFFMAN, A. SCHWARTZ, C. STANTON: *The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces*. Comp. Aided Geom. Design **13** (1996), 257–286.
- [4] R. DIETZ, J. HOSCHEK, B. JÜTTLER: *An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and other quadrics*. Comp. Aided Geom. Design **10** (1993), 211–229.
- [5] G. FARIN, J. HOSCHEK, M.-S. KIM: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier, 2002.
- [6] R.T. FAROUKI: *Pythagorean-hodograph curves in practical use*. In: R.E. Barnhill, Geometry Processing for Design and Manufacturing, SIAM, Philadelphia, 1992, 3–33.
- [7] R.T. FAROUKI, T. SAKKALIS: *Pythagorean-hodograph space curves*. Adv. Comput. Math. **2** (1994), 41–66.
- [8] A. HERZER: *Charakterisierung regulärer Faserungen durch Schließungssätze*. Arch. Math. **25** (1974), 662–672.
- [9] J. HOSCHEK: *Liniengeometrie*. Bibliographisches Institut, Zürich, 1971.

- [10] B. JÜTTLER: *Triangular Bézier surface patches with a linear normal vector field*. In: The Mathematics of Surfaces VIII, Information Geometers, Winchester, 1998, 431–446.
- [11] J.L. KRAMES: *Vorlesungen ber darstellende Geometrie. II. Band: Die Zyklographie*. Leipzig und Wien, Deuticke , 1929.
- [12] R. KRASAUSKAS: *Minimal rational parametrizations of canal surfaces*. Computing **79** (2007), 281–290.
- [13] G. LANDSMANN, J. SCHICHO, F. WINKLER: *The Parametrization of Canal Surfaces and the Decomposition of Polynomials into a Sum of Two Squares*. J. Symbolic Computation **32** (2001), 119–132.
- [14] M. PETERNELL, B. ODEHNAL: *On Generalized LN-Surfaces in 4-Space*. Proc. 'ISSAC08' (2008), 223–230.
- [15] M. PETERNELL, B. ODEHNAL, M. SAMPOLI: *On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes*. Comp. Aided Geom. Design **25** (2008), 342–355.
- [16] M. PETERNELL, H. POTTMANN: *Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces*. J. Symbolic Computation **23** (1997), 255–266.
- [17] J. PETERS, U. REIF: *The 42 equivalence classes of quadratic surfaces in affine n-spaces*. Comp. Aided Geom. Design **15** (1998), 459–473.
- [18] H. POTTMANN, J. WALLNER: *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.
- [19] M.L. SAMPOLI, M. PETERNELL, B. JÜTTLER: *Rational surfaces with linear normals and their convolutions with rational surfaces*. Comp. Aided Geom. Design **23** (2006), 179–192.
- [20] J. SCHICHO: *Rational Parametrization of Surfaces*, J. Symbolic Computation **26** (1998), 1–29.

- [21] E.A. WEISS: *Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik*. B.G. Teubner, 1935.
- [22] K. ZINDLER: *Liniengeometrie*. G.J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig, 1902.
- [23] K. ZINDLER: *Algebraische Liniengeometrie*. Encykl. d. Math. Wiss. II, 2.2, 974–1228.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Richtungs- und Momentenvektor einer Geraden.	8
1.2	Die drei Typen von regulären Netzen: v.l.n.r.: hyperbolisch, elliptisch und parabolisch.	13
1.3	Ein Beispiel für eine (1,4)-Kongruenz.	14
2.1	Konstruktion der Hüllfläche einer ein-parametrischen Kugelschar.	22
2.2	Konstruktion der charakteristischen Kreise.	23
2.3	Eine Kugelhüllfläche einer ein-parametrischen Kugelfamilie.	26
3.1	Konstruktion der Kugelhüllfläche mittels zyklographischer Abbildung.	35
3.2	Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem hyperboli- schen Netz.	44
3.3	Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem elliptischen Netz.	50
3.4	Eine Kugelhüllfläche mit einer Schar von Parameterlinien der rationalen Parametrisierung, ausgehend von einem paraboli- schen Netz.	54