Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Diplomarbeit

Long Interest Rates in der Finanz- und Versicherungsmathematik

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Brigitte Lutz

0326884, E873

1020 Wien, Rotensterngasse 31

22. April 2009

Einleitung

Motivation

Vor allem im Versicherungssektor kommt es häufig vor, dass man Diskontierungsfaktoren für langfristig veranlagte Finanzinstrumente benötigt. Ein gutes Beispiel dafür sind Leibrenten. Mit einem empirischen Ansatz kommt man in diesem Fall nicht weit, da kaum mit Bonds gehandelt wird, die eine längere Laufzeit als 20 Jahre besitzen und man für Leibrenten Diskontierungsfaktoren für an die 80 bis 100 Jahre bräuchte. Wir benötigen dazu Modelle die verwendet werden können, um die beobachtbare Zinsstruktur zu extrapolieren und die eine entsprechende Beschreibung der Entwicklung der Zinsen mit längeren Laufzeiten liefert. Die asymptotische Longrate ist also für die Wahl des richtigen Zinsstrukturmodelles wichtig, wenn es sich um Long-Term Verträge oder auch die Bewertung von Versicherungs- oder Rentenverträgen handelt.
Aus diesem Grund setzt sich diese Arbeit mit dem Problem der Bewertung von langfristigen Verträgen, der damit benötigten Longrate, Aussagen über Longrates und der Deutung und Anpassung verschiedener Zinsstrukturmodelle an längere Laufzeiten auseinander.

Aufbau

Diese Arbeit beginnt mit einem Kapitel über die Grundlagen der Zinstheorie in dem unter anderem der Bondmarkt und der risikoneutrale Ansatz zur Bewertung von Finanzmarktinstrumenten erklärt werden. Des weiteren werden die in der Arbeit benötigten Definitionen gegeben.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit dem wichtigen und oft zitierten Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem, welches besagt dass in einem vollkommenen und arbitragefreien Markt die Longrate ein wachsender Prozess ist.

In den darauf folgenden Kapitel gehe ich näher auf die unterschiedlichen Zinsstrukturmodelle ein und leite zunächst einzelne Aussagen über die Longrate her um diese anschließend auf die konkreten Modelle anzuwenden. Darüber hinaus wird auf die Adaption der Ergebnisse bezüglich der Verwendung des Sprungdiffusionsprozessen eingegangen.

Wichtige Resultate des Verhaltens der Longrates l(t) werde ich in dieser Arbeit zusammenfassen, analysieren, anwenden und größtenteils auch beweisen.

Zu diesen Ergebnissen gehören:

- In vollkommenen Märkten fällt weder die Long Zero Coupon noch die Long Forward Rate (Theorem 2.3.1)
- Die Long Zero Coupon Rate und die Long Forward Rate sind für endlich viele Zustände gleich ihrem zukünftigen Minimum (Theorem 2.3.3 bzw. 2.3.4)
- l(t) ist endlich oder unendlich. Endlichkeit kann mit der Abschätzung aus dem Abschnitt 3.2.1 gezeigt werden.
- l(t) ist wachsend. (Abschnitt 3.2.3)
- l(t) ist eine deterministische Funktion der Zeit (Abschnitt 3.2.4)
- l(t) ist eine deterministische Konstante (Abschnitt 3.2.7)

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek bedanken, der mir die Möglichkeit gab, bei ihm Diplomarbeit zu schreiben und mich in dieser Zeit tatkräftig unterstützt hat. Er hat sich immer für mich Zeit genommen und stand jederzeit für Fragen zur Verfügung.

Eine große Hilfe, während der Erstellung dieser Arbeit, waren meine lieben Freunde und Studienkollegen, allen voran Clemens Gurtner und DI. Roman Schneider, die mir während der ganzen Zeit mit Rat und Tat zur Seite standen.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die dieser Zeit viel Geduld aufbringen musste und mir mit aufmunternden Worten jederzeit eine wertvolle Unterstützung war.

Brigitte

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in das Thema Zinsstrukturmodelle **3**
1.1 Der Bond-Markt . . . 3
1.1.1 Annahmen . . . 4
1.2 Der risikoneutrale Ansatz . . . 5
1.3 Zinsdefinitionen . . . 6
1.3.1 Definitionen in stetiger Zeit . . . 6
1.3.2 Definitionen in diskreter Zeit . . . 8
1.3.3 Definitionen der Longrate . . . 10
1.3.4 Existenz der Longrate . . . 11

2 Long Forward und Zero Coupon Rates können niemals fallen **12**
2.1 Einleitung . . . 13
2.2 Resultate für eine Yieldkurve . . . 14
2.3 Resultate für 2 Yieldkurven . . . 16
2.4 Schlussfolgerungen . . . 21

3 Analyse der asymptotischen Longrate **22**
3.1 Zinsstrukurmodelle . . . 25
3.1.1 Erwartungen an Zinsstrukturmodelle . . . 27
3.1.2 Eigenschaften von Zinsstrukurmodellen . . . 28
3.2 Das asymptotische Verhalten von Yields . . . 30
3.2.1 Obere Schranke des Yields . . . 30
3.2.2 Das Einpendeln der Yieldkurve mit wachsender Laufzeit . . . 31
3.2.3 Die Longrate ist ein nicht fallender Prozess . . . 32
3.2.4 Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit . . . 34
3.2.5 Mean Reversion und eine Schranke für Yields in Faktormodellen . . . 35
3.2.6 Der Yield im Black-Derman-Toy Modell . . . 36
3.2.7 Die Longrate in den affinen Modellen von Duffie und Kan . . . 37
3.3 Der Yield unter Verwendung des Sprung-Diffusionsprozesses . . . 39
3.3.1 Die Longrate mit Sprung-Diffusionsprozess . . . 39

3.3.2 Die Longrate in Faktormodellen adaptiert an Sprung-Diffusionsprozesse 43

4 Das Verhalten der Longrate konkreter Modelle **45**
4.1 Das Merton Modell (1970) 46
4.2 Das Vasicek Modell (1977) 47
4.3 Das Hull-White Modell (1990) 49
4.4 Das Dothan Modell (1978) 51
4.5 Das Langetieg Modell (1980) 53
4.6 Das Courtadon Modell (1982) 53
4.7 Das Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders Modell (1992) 54
4.8 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell (1985) 55
4.9 Das Ho-Lee Modell (1986) 57
4.10 Das Longstaff-Schwartz bzw. Chen-Scott Modell (1992) 58
4.11 Das Chen Modell (1996) 59

Kapitel 1

Einführung in das Thema Zinsstrukturmodelle

Zu Beginn befassen wir uns mit dem Bond Markt. Wir definieren einen Zero Coupon Bond und treffen für uns wichtige und uns die Arbeit erleichternde Annahmen über den Markt. Die wichtigsten Modellannahmen sind ein vollkommener Markt und das no-Arbitrage Prinzip. Wir definieren P(t,T) als Bondpreis und anschließend die verschiedenen Arten der Zinsen.

Eine wichtige Rolle spielt die Forward Rate, die bei einem sofortigen Vertragsabschluss die Zinsen für eine spätere Periode festlegt. Das bedeutet die Laufzeit beginnt nicht sofort, sondern zu einem festgelegten, zukünftigen Zeitpunkt. Die Spot Rate hingegen ist gültig vom jetzigen Zeitpunkt an bis zum Ende ihrer Bindungsdauer. Beide Zinsen können für den kontinuierlichen als auch im bezüglich der Zeit diskreten Fall definiert werden. Weiters gibt es die Short Rate und die „instantaneous“ Forward Rate. Zweitere ist der Grenzwert der kontinuierlich verzinsten Forward Rate. Die Short Rate ist der Grenzwert der kontinuierlich verzinsten Spot Rate. Sie bezieht sich also auf einen infinitesimal kurzen Zeitraum.

1.1 Der Bond-Markt

Es werden in diesem Abschnitt einige grundlegende Definitionen gegeben und in das Modell eingeführt. Zunächst definieren wir den Zero Coupon Bond (Pure Discount Bond, Nullkuponanleihe), das für uns wohl wichtigste Finanzinstrument.

Definition 1.1.1. Ein **Zero Coupon Bond** mit Fälligkeit T ist ein Vertrag, der dem Besitzer eine Geldeinheit zum Zeitpunkt T garantiert. Der Preis zur Zeit t, $0 \leq t \leq T$ wird angegeben als $P(t,T)$

Für fixes t ist die Kurve P(t,T) eine Funktion von T, $T \geq t$. Diese Funktion gibt die Preise für alle möglichen Restlaufzeiten T an. Sie wird auch Terminstruktur eines Bonds genannt und wir nehmen stets an, dass sie für jedes t bezüglich T differenzierbar ist
Die zweite Betrachtungsmöglichkeit ist T fix anzunehmen, d.h. P(t,T) ist jetzt eine Funktion von t, ein stochastischer Prozess. Er gibt die Preise von einem Bond mit immer der gleichen Restlaufzeit zu verschiedenen Zeitpunkten t an.

1.1.1 Annahmen

In unserem Marktmodell treffen wir die Annahme, dass es kein Ausfallsrisiko gibt. Das bedeutet die zum Zeitpunkt T garantierte Geldeinheit kann immer ausbezahlt werden. Wir nehmen an, dass es für alle möglichen Laufzeiten T einen Bondmarkt gibt. Weiters werden wir meist annehmen, dass P(T,T)=1 für alle $T \geq t$. Ist der Nominalwert des Bonds auf 1 normiert, so bezeichnen wir den Bondpreis mit klein p(t,T).

No-Arbitrage Argument

Da es verschiedene Ansätze gibt Arbitrage zu definieren, werde ich mehrere anführen. Eine Arbitragemöglichkeit ist die Möglichkeit risikolosen Gewinn zu machen. Die klassische Definition (bei endlich vielen Assets) ist:

Definition 1.1.2. Ein **arbitrage** Portfolio ist ein Porfolio h mit folgenden Eigenschaften:

$$V_0^h = 0 \qquad V_0^h \ldots \text{Preis des Portfolios zum Zeitpunkt 0}$$

$$V_1^h > 0 \qquad V_1^h \ldots \text{Preis des Portfolios zum Zeitpunkt 1}$$

Für einen Bondmarkt, in dem es theoretisch unendlich viele Bonds gibt, definieren wir Arbitrage folgendermaßen:

Definition 1.1.3. Eine **Arbitragemöglichkeit** ist eine Folge von Handelsstrategien, sodass entweder

- der Preis gegen Null geht, aber der Payoff (= Auzahlungswert) gleichmäßig zu einer nicht negativen Zufallsvariable, die mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt größer Null ist, strebt oder

- der Preis zu einer negativen Zahl strebt (praktisch gesehen würde man bezahlt werden wenn man den Posten kauft), aber der Payoff gleichmäßig zu einer nicht negativen Variablen strebt.

(Siehe [DIR96])

Vollkommener Markt

Der vollkommene Markt ist ein theoretischer Markt für den verschiedene Annahmen getroffen werden und der unter anderem folgende Merkmale besitzt:

- Es sind keine Transaktionskosten oder Steuern zu zahlen
- Es gibt vollkommene Markttransparenz
- Es gibt nur einen Preis der Nachfrage und Angebot genügt

Man sollte auf theoretische und empirische Folgerungen der Annahmen besonders achtgeben, denn im realen Markt müssen diese Annahmen nicht erfüllt sein. Wir werden sehen, dass daher einige Folgerungen die auf diesen Annahmen beruhen in Wirklichkeit nicht erfüllt sind.

1.2 Der risikoneutrale Ansatz

Im folgenden Abschnitt betrachten wir einen bezüglich der Zeit stetigen, vollkommenen Markt. Die stochastischen Unsicherheiten werden durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ und der Filtration $\mathbf{F}_t$ näher beschrieben. Wobei der Parameter t entweder diskret $t \in \mathbb{N}$ oder stetig $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sein kann.

Definition 1.2.1. Q ist ein zu P lokal äquivalentes Maß $Q \sim P$ genau dann, wenn die Restriktion von Q bzw. P auf $F_t \subseteq F$ äquivalent ist: $Q|_{F_t} \sim P|_{F_t}$. $\quad \forall t \geq 0$

Wir nehmen stets an, dass in vollkommenen Märkten, ohne Arbitragemöglichkeiten, ein zu dem Maß P lokal äquivalentes risikoneutrales Maß Q existiert, sodass gilt:

$$p(t,T) = \mathbf{E}_t \left[exp\left(-\int_t^T r(s)ds \right) \right] \tag{1.1}$$

Wobei $\mathbf{E}_t$ der auf die zum Zeitpunkt t bekannte Information bedingte Erwartungswert bezüglich dem risikoneutralen Maß Q ist. Der Prozess $(\frac{P(t,T)}{B(t)})$ ist ein Martingal bezüglich Q.

Wir nehmen an, dass der Bondpreis als stochastische Differentialgleichung modelliert werden kann.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu(t,T)dt - \sigma(t,T)dW_t \tag{1.2}$$

Wobei W eine standard Brownsche Bewegung unter Q ist.

Definition 1.2.2 (Ito- Formel)**.** Man nehme an, dass der Prozess X ein stochastisches Differential der Form:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

gegeben hat, wobei μ und σ adaptierte Prozesse sind. Sei f eine $C^{1,2}$-Funktion, $Z(t) = f(t,X(t))$ Dann hat Z ein stochastisches Differential folgender Form:

$$df(t,X(t)) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW(t) \tag{1.3}$$

Wenden wir nun das Ito-Lemma auf die vorherige Gleichung an erhalten wir:

$$\frac{d[P(t,T)/B(t)]}{P(t,T)/B(t)} = [\mu(t,T) - r(t)]dt - \sigma(t,T)dW_t$$

Da der Prozess $(\frac{P(t)}{B(t)})$ ein Martingal bezüglich Q ist und die Drift eines Martingales gleich Null ist, wissen wir, dass $\mu(t,T) = r(t)$. So erhalten wir:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma(t,T)dW_t \tag{1.4}$$

Es kommt beim Prozess wegen no-Arbitrage und risikoneutraler Bewetung nicht auf die Drift, sondern nur auf die Volatilität an. Die Volatilität ist ein Schwankungsmaß.

1.3 Zinsdefinitionen

1.3.1 Definitionen in stetiger Zeit

Beispiel 1.3.1 (Berechnung einer Forward Rate)**.** Sei $t < S < T$. Man verkauft zur Zeit t einen S-Bond um P(t,S). Gleichzeitig kauft man um den Ertrag P(t,S)/P(t,T) T-Bonds. Also hat man

zur Zeit t nichts ausgegeben. Zur Zeit S muss man dann eine Geldeinheit bezahlen um anschließend zur Zeit T P(t,S)/P(t,T) Geldeinheiten zu bekommen. Also hat man eine risikolose Investition mittels einem Vertrag zur Zeit t gemacht. Diesen "Gewinn“ oder diese Art von Zinsen nennt man Forward Rate (=Terminzins).

Jetzt definieren wir uns anhand des obrigen Beispiels die einfach verzinste Forward Rate:

Definition 1.3.1 (Einfache Forward Rate)**.**

$$1+(T-S)F(t;S,T)=\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$$

durch Umformungen erhalten wir:

$$(T-S)F(t;S,T)=\tfrac{P(t,S)}{P(t,T)}-1 \quad \text{bzw.} \quad (T-S)F(t;S,T)=\tfrac{P(t,S)-P(t,T)}{P(t,T)}$$

$$\text{bzw.} \quad F(t;S,T)=\frac{P(t,S)-P(t,T)}{(T-S)P(t,T)}$$

Durch das Vertauschen der Terme im Zähler erhält man die übliche Notation:

$$F(t;S,T)=-\frac{P(t,T)-P(t,S)}{(T-S)P(t,T)} \tag{1.5}$$

Definition 1.3.2 (Kontinuierlich verzinste Forward Rate)**.** Da die kontinuierliche Forward Rate die Lösung von $e^{R(T-S)}=\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$ ist definieren wir:

$$f(t;S,T)=-\frac{\log P(t,T)-\log P(t,S)}{(T-S)} \tag{1.6}$$

Definition 1.3.3 (Instantaneous Forward Rate)**.**

$$f(t,T)=-\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T} \tag{1.7}$$

Integriert man diese Gleichung erhält man

$$P(t,T)=\exp\{-\int_t^T f(t,s)ds\} \tag{1.8}$$

Die Instantaneous (unmittelbare) Forward Rate ist der Limes der kontinuierlich verzinsten Forward Rate für $S\to T$. Man kann sie auch als den Zins der zum Zeitpunkt t gewährt wird, wenn man sein Geld für einen unendlich kleinen Zeitraum über T hinaus anlegt, beschreiben.

Da für die Spot Rate der Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gleich dem Zeitpunkt ist, an dem die Zinsen effektiv werden, ist t=S und wir können definieren:

Definition 1.3.4 (Einfache Spot Rate)**.**

$$R(t,T) = -\frac{P(t,T)-1}{(T-t)P(t,T)} \tag{1.9}$$

Definition 1.3.5 (Kontinuierlich verzinste Spot Rate oder Zero Coupon Rate)**.**

$$r(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{(T-t)} \tag{1.10}$$

Die koninuierlich verzinste Spot Rate entspricht im stetigen Fall der Zero Coupon Rate

Die Short Rate ist der Limes der kontinuierlich verzinsten Spot Rate für $\tau \to 0$
wobei $\tau = T - t$

Definition 1.3.6 (Shortrate)**.**

$$r(t) = f(t,t) \tag{1.11}$$

1.3.2 Definitionen in diskreter Zeit

Folgende Definition beschreibt die Forward Rate, welche man zum Zeitpunkt t vertraglich vereinbaren könnte, um Geld von T bis T+1 ver- bzw. auszuborgen.

Definition 1.3.7 (Forward Rate)**.**

$$P(t,T) = (1+F(t,T))P(t,T+1) \quad \text{oder} \quad F(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,T+1)} - 1$$

Definition 1.3.8 (Zero Coupon Rate)**.**

$$P(t,T) = \frac{1}{[1+z(t,T)]^{T-t}}$$

$$z(t,T) = P(t,T)^{\frac{-1}{(T-t)}} - 1 \tag{1.12}$$

$$z(t,T) = \prod_{\tau=t}^{T-1} [1+f(t,\tau)]^{\frac{1}{(T-t)}} - 1 \tag{1.13}$$

Definition 1.3.9 (Coupon Rate)**.**

$$1 = P(t,T) + c(t,T) \sum_{\tau=t+1}^{T} P(t,\tau)$$

$$c(t,T) = \frac{1 - P(t,T)}{\sum_{\tau=t+1}^{T} P(t,\tau)} \tag{1.14}$$

Mittels folgender Umformungen verifizieren wir die bezüglich der Forward Rate dargestellte Form der Coupon Rate:

$$\begin{aligned} c(t,\tau) \cdot \sum_{\tau=t+1}^{T} P(t,\tau) &= \sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1) f(t,\tau) \\ &= \sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1) \cdot \left\{ \frac{P(t,\tau)}{P(t,\tau+1)} - 1 \right\} \\ &= \sum_{\tau=t}^{T-1} \{P(t,\tau) - P(t,\tau+1)\} \\ &= \underbrace{P(t,t)}_{=1} - P(t,T) \\ &= 1 - P(t,T) \end{aligned}$$

$$c(t,T) = \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1) f(t,\tau)}{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)} \tag{1.15}$$

Definition 1.3.10 (Yield)**.** Betrachten wir einen Zero Coupon Bond interessiert uns jetzt die innere Zinsrate (=Rendite) oder auch konstante Short Rate. Diesen Wert bezeichnen wir von nun an als Yield y(t,T). Um den Yield eines Bonds zu erhalten müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$P(t,T) = e^{-y(t,T)\cdot(T-t)} \cdot 1$$

Wobei 1 für den Nennwert des Bonds steht. Der kontinuierlich verzinste (Zero Coupon) Yield, y(t,T) wird gegeben durch:

$$y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t} \tag{1.16}$$

Für festes t wird die Funktion $T \longmapsto y(t,T)$ Yield Kurve genannt. Wir sehen sogleich, dass der Yield zu der kontinuierlich verzinsten Spot Rate im stetigen Fall äquivalent ist.

Dadurch erhalten wir eine weitere Definition für die Short Rate.

Definition 1.3.11 (Shortrate mittels Yield)**.** Die Short Rate ist der Yield eines gerade ablaufenden Bonds

$$r(t) = y(t,t) \equiv \lim_{T \to t^+} y(t,T) \tag{1.17}$$

Mit der oben angebrachten Umformung erhält man eine Beziehung zwischen dem Yield und der Forward Rate:

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t} \left(\int_t^T f(t,s)ds \right) \tag{1.18}$$

1.3.3 Definitionen der Longrate

Die Longrate definieren wir, wenn er existiert, mittels des Limes für T $\to \infty$.

- **Long Forward Rate**
$$f_L \equiv \lim_{T \to \infty} f(t,T)$$
- **Long Zero Coupon Rate**
$$z_L \equiv \lim_{T \to \infty} z(t,T)$$
- **Long Par Coupon Rate**
$$c_L \equiv \lim_{T \to \infty} c(t,T)$$

Man kann die Longrate auch mittels des Yields eines Bonds mit unendlichlanger Laufzeit definieren:

$$l(t) = y(t,\infty) \equiv \lim_{T \to \infty} y(t,T) \tag{1.19}$$

1.3.4 Existenz der Longrate

Da der Limes nicht immer existieren muss, kann es zu Problemen kommen (Bsp. 3.2.1). Ein Grund für eine nicht existierende Long Forward Rate könnte eine ausreichend große Wahrscheinlichkeit für einen unbeschränkte Spot Rate sein. Zyklische zukünftige Spot Rates können einen weiteren Grund für nicht existierende Longrates liefern. Angenommen das Muster aller zukünftigen Zinsen ist bekannt, dann muss die Forward Rate $f(t,T)$ auf Grund von no-Arbitrage gleich der zukünftigen Spot Rate $z(T,T+1)$ sein. Deshalb werden Zyklen der zukünftigen Spot Rates in den heutigen Forward Rates wieder gespiegelt. Als Beispiel für Zinsen mit zyklischer Eigenschaft könnte man anführen, dass die Zinsen im Durchschnitt an einem bestimmten Wochentag immer höher, oder in Schaltjahren immer niedriger sind. Eine mögliche Lösung für dieses Problem wäre, die Longrate mittels des Limes Superior, der in den erweiterten reellen Zahlen immer existiert, zu definieren.

Erläuterungen zu dieser Definition findet man in der Arbeit "Generalization of the Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem" (2008) von Schmock und Goldammer [GS08].

Definition 1.3.12.

$$l(t) := \limsup_{T\to\infty} r(t,T) = \lim_{n\to\infty} ess\sup_{T>n\vee t} r(t,T) \tag{1.20}$$

Die Ergebnisse sollten im Wesentlichen dieselben sein, jedoch kommt es zu keinen Existenzproblemen mehr. Da in den meisten in dieser Arbeit diskutierten Artikel sämtliche Resultate mittels einer durch den Limes definierten Longrate hergeleitet wurden, werden wir es bei dieser Art der Definition belassen. Die dargebrachten Ergebnisse gelten jedoch immer unter der Annahme, dass der Limes existiert. Beispiele zu Modellen in denen der Limes nicht existiert werden in der oben erwähnten Arbeit beschrieben.

Kapitel 2

Long Forward und Zero Coupon Rates können niemals fallen

Das im Folgenden Kapitel bewiesene **Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem** ist eines der Wichtigsten, wenn nicht das Wichtigste in dem Gebiet der Zinstheorie. Es gibt zwei Möglichkeiten dieses Hauptresultat des im Anschluss bearbeiteten Artikels "**Long Forward and Zero Coupon Rates Can Never Fall**" [DIR96] geschrieben von P. Dybvig, J. Ingersoll und S. Ross zu beweisen. Der ursprüngliche von den Autoren angewandte Beweis verwendet den Ansatz eine Arbitragemöglichkeit zu konstruieren und somit anhand eines Widerspruchs das Ergebnis zu beweisen. Der zweite Ansatz beschrieben in dem Artikel "**A general proof of the Dybvig-Ingersoll-Ross theorem**"[HKT02] von F. Hubalek, I. Klein und J. Teichmann verwendet die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes und beweist das so genannte **DIR-Theorem** unter der Annahme, dass es eine Long Zero Coupon Rate gibt.
An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass eine Erweiterung dieses Beweises in "**Generalization of the Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem**"[GS08] von V. Goldammer und U. Schmock ausgeführt wird. Es wird auf die Annahme, dass der Limes existiert verzichtet und mit Hilfe des Limes Superior argumentiert. Auf diesen Aspekt werde ich noch öfters eingehen (Siehe 1.3.4).
Auch in der Veröffentlichung "**Do Long Interest Rates Ever Fall?**" [JJJD08] wird auf das Ergebnis des DIR-Theorems hingewiesen. Die Autoren dieser Arbeit hingegen betrachten das Problem aus wirtschaftlich und empirischer Sichtweise. Mit Hilfe einfacher Bondpreisformeln zeigen sie, dass die Longrate nicht fallen sollte. In dieser Aufzeichnung werden Daten von U.S. Teasury Coupon STRIPS in einem Zeitraum von zehn Jahren betrachtet. Diese Wertpapiere haben den Vorteil, dass sie kein Ausfallsrisiko haben, die Steuern werden homogen berechnet und sie werden regelmäßig mit vierteljährlichen Fälligkeiten angeboten (Das bestätigt unsere vorhin getroffene Annahmen 1.1.1). Die Daten angewandt auf das Cox-Ingersoll-Ross Modell

ergeben, dass obwohl die Long Forward Rate nicht fallen hätte sollen, sie trotzdem gefallen ist. Dieser scheinbare Widerspruch kann verschiedene Ursachen haben:

- Die beobachteten, empirischen Long Rates besitzen Laufzeiten von T=10 bis maximal T=40 Jahren. Der Satz von DIR bezieht sich auf den Limes $T \to \infty$. Vielleicht sind die real vorhandenen Laufzeiten einfach zu klein, um asymptotische Resultate sinnvoll auf die Wirklichkeit anwenden zu können.
- Das DIR Resultat setzt einen perfekten Markt voraus. Es gibt Resultate, die zeigen, dass das Ergebnis von DIR in Märkten mit „Frictions“ nicht notwendigerweise gelten muss.

Viele Probleme beim Modellieren von Zinsstrukturen entstehen durch Annahmen die zur leichteren mathematischen Umsetzung getroffen werden, wie zum Beispiel, dass Zinsraten normalverteilt sind. Dadurch können Zinsen auch negative Werte annehmen und es können Arbitragemöglichkeiten entstehen.

2.1 Einleitung

Für das nächste Kapitel benötigen wir die Definition des Couponbonds. Eine mögliche Beschreibung des Couponbonds wäre, ein Bond bei dem der Besitzer zusätzlich zum Nennwert (= Face value) an einigen Zeitpunkten während der Laufzeit vorher bestimmte d.h. fixen Geldbeträge ausbezahlt bekommt (=Coupons).

Definition 2.1.1 (Couponbond)**.** An fixen Zeitpunkten $T_1, .., T_n$ bekommt der Besitzer die Couponzahlungen c_i. An T_0 wird der Bond ausgestellt und an T_n wird zusätzlich auch der Nennwert K ausbezahlt.

Oft wird der Nennwert K zur Vereinfachung in den letzten Coupon c_n miteinbezogen. Der Preis eines solchen Couponbonds wird mit P(t,T) angegeben. Jetzt wollen wir, wie bei der Nullkuponanleihe auch, die Rendite eines Couponbonds definieren:

Definition 2.1.2 (Coupon Rate)**.**

$$1 = P(t,T) + c(t,T) \sum_{\tau=t+1}^{T} P(t,\tau) \tag{2.1}$$

Wenn man nun c(t,T) ausdrückt erhält man:

$$c(t,T) = \frac{1 - P(t,T)}{\sum_{\tau=t+1}^{T} P(t,\tau)} \tag{2.2}$$

2.2 Resultate für eine Yieldkurve

Szenario

Die Yieldkurve wird zu einem einzigen Zeitpunkt betrachtet, es gibt keine Arbitragemöglichkeiten und wie schon im vorherigen Kapitel definiert, soll es sich um einen vollkommenen Markt handeln.

Im nächsten Abschnitt verwenden wir als Finanzinstrument ausschließlich Zero Coupon Bonds mit ganzzahligen Fälligkeiten und behandeln zunächst nur die Diskrete Zeit.

Theorem 2.2.1.

1. *Wenn der Preis eines Discount Bonds gleichmäßig beschränkt ist, existiert auch die Long Coupon Rate c_L*
2. *Wenn die Long Forward Rate f_L existiert, dann existieren auch die Zero Coupon Rate z_L und die Coupon Rate c_L.*
   Die Zero Coupon Rate ist gleich der Forward Rate: $z_L = f_L$
   Die Coupon Rate c_L muss jedoch nicht gleich der Forward Rate f_L sein.
3. *Wenn sowohl Forward Rate f_L als auch Coupon Rate c_L existieren und $f_L > c_L$ dann steigt die Coupon Rate c_L mit längeren Laufzeiten.*

Beweis.

1. Aufgrund monotoner Konvergenz geht in (2.2) für $T \to \infty$ der Nenner entweder gegen unendlich, folglich ist die Long Coupon Rate gleich Null[1], oder er ist konvergent, woraus wir schließen können, dass $\lim_{T\to\infty} P(t,T) = 0$. Im zweiten Fall ist die Long Coupon Rate $c_L(t)$ gleich eins durch den Limes.
2. Aus (1.13) sehen wir, dass eins plus die Zero Coupon Rate gleich dem geometrischen Durchschnitt der Forward Rates ist. Die Long Zero Coupon Rate muss gleich der Long Forward Rate sein, da wir annehmen, dass die Long Forward Rate existiert, daher auch der Limes existiert. So können wir mit Hilfe des Cauchy'schen Grenzwertsatzes[2] sagen,

[1] Da der Zähler durch unsere Annahme beschränkt ist

[2] Konvergiert eine Folge a_n gegen den Grenzert a, so konvergiert auch die Folge der geometrischen Mittel $(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \to a)$.

dass auch z_L existiert. Aus (1.15) wissen wir, dass jede Coupon Rate ein positiv gewichteter Durchschnitt der Forward Rates ist. Deshalb existiert die Coupon Rate, wenn die Forward Rate existiert.

3. Wieder greifen wir auf (1.15) zurück und formen um:

$$P(t,T+1) = \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)f(t,\tau) + P(t,T+1)f(t,T)}{\sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau+1)} \tag{2.3}$$

$$\alpha = \frac{P(t,T+1)}{\sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau+1)} \tag{2.4}$$

$$1-\alpha = \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)}{\sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau+1)} \tag{2.5}$$

Wir gelangen mit folgender Nebenrechnung zu unserem Ergebnis:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\cdot P(t,T) &= \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)}{\sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau+1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)f(t,\tau)}{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)} \\ &= \frac{\sum_{\tau=t}^{T-1} P(t,\tau+1)f(t,\tau)}{\sum_{\tau=t}^{T} P(t,\tau+1)}\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$P(t,T+1) = \alpha f(t,T) + (1-\alpha)P(t,T) \tag{2.7}$$

mit $0 < \alpha \equiv \frac{P(t,T+1)}{\sum_{\tau=1}^{T} P(t,\tau+1)} < 1$. Deshalb muss $P(t,T+1)$ zwischen $f(t,T)$ und $P(t,T)$ liegen und für genügend große T wird die Coupon Rate gegen die Long Forward Rate streben.

□

2.3 Resultate für 2 Yieldkurven

Szenario

Wir betrachten die Relation zwischen der Yieldkurve zum Zeitpunkt t und die Verteilung der Yieldkurve zu einem späteren Zeitpunkt s.

Notation

$z(s,T;\omega)$ ... Zero Coupon Rate zum Zeitpunkt s mit Fälligkeit T im Zustand ω
$z_L(s;\omega)$ ... Long Zero Coupon Rate zum Zeitpunkt s im Zustand ω

Das folgende Theorem besagt, dass in arbitragefreien Märkten die Long Zero Coupon und die Long Forward Rates nicht fallen können.

Theorem 2.3.1 (Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem)**.** *Es sei t<s und no-Arbitrage ist gegeben. Angenommen es gibt $z_L(t)$ und $z_L(s)$ existiert zum Zeitpunkt s mit Wahrscheinlichkeit 1. Dann gilt: $z_L(t) \leq z_L(s;\omega)$ für eine Menge an Zuständen mit Wahrscheinlichkeit 1.*

Beweis für endlich viele Zustände. $t < s$

Wir betrachten einen Zustand ω und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass dieser mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt. Weiters definieren wir ω^* als den Zustand, bei dem z_L zum Zeitpunkt s den kleinsten Wert annimmt.

$$z_L(s;\omega^*) = \min_{\omega} z_L(s;\omega)$$

Nun wollen wir zeigen, dass $z_L(t) \leq z_L(s;\omega^*)$. Mittels Widerspruch, indem wir das Gegenteil annehmen:

$$z_L(t) > z_L(s;\omega^*)$$

und dann nach Arbitragemöglichkeiten suchen.

Zunächst betrachten wir einen ausfallsfreien Zero Coupon Bond mit Fälligkeit T und Payoff $[1+z_L(s;\omega^*)]^{T-s}$ und betrachten den netto Ertrag, wenn wir zum Zeitpunkt t kaufen und zum Zeitpunkt s verkaufen.

Wir zeigen die Arbitragemöglichkeit, indem wir für eine steigende Folge von Laufzeiten T eine Folge von netto Erträgen suchen, deren anfänglicher Geldfluss gegen Null geht, dessen Payoff mit positiver Wahrscheinlichkeit aber nicht negativ oder sogar positiv ist (Siehe 1.1.2).

Für alle T ist der netto Cash-flow[3] zur Zeit t gegeben durch:

$$-\frac{[1+z_L(s;\omega^*)]^{T-s}}{[1+z(t,T)]^{T-t}} \tag{2.8}$$

Dieser Ausdruck geht für $T \to \infty$ gegen 0, da

$$\lim_{T\to\infty} z(t,T) = z_L(t)$$

und wegen unserer Annahme gilt:

$$z_L(t) > z_L(s;\omega)$$

Die Erträge aus dem Verkauf des Bonds zur Zeit s werden gegegeben durch:

$$\frac{[1+z_L(s;\omega^*)]^{T-s}}{[1+z(s,T;\omega)]^{T-s}} \tag{2.9}$$

Wieder lassen wir $T \to \infty$ gehen.
Fallunterscheidung

Für $z_L(s;\omega) = z_L(s;\omega^*)$ geht dieser Ausdruck gegen 1
Für $z_L(s;\omega) > z_L(s;\omega^*)$ geht dieser Ausdruck gegen 0[4]

Weil für endlich viele Zustände aus punktweiser Konvergenz gleichmäßige Konvergenz folgt, gelangen wir auf unseren Payoff der nicht negativ bzw. positiv ist uns haben somit unsere Arbitragemöglichkeit gefunden und auf Widerspruch geführt.

□

[3] Entspricht den negativen Anforderungen
[4] Aufgrund unserer Definition ist $z_L(s;\omega) < z_L(s;\omega^*)$ nicht möglich

Beweis für unendlich viele Zustände.

Definition 2.3.1. Das essentielle Infimum einer Zufallvariable $x(\omega)$ ist :

$$\operatorname{ess\,inf}[x(\omega)] \equiv \sup\{y \in \mathbb{R} | P(y > x) = 0\}$$

Wenn die Menge auf der rechten Seite nach unten unbeschränkt ist, wird es als $-\infty$ definiert.

Die Beweisidee ist gleich der für den Beweis mit endlich vielen Zuständen. Wir wollen zeigen, dass $z_L(t) \leq z_L(s;\omega)$. Wir nehmen das Gegenteil an, führen auf einen Widerspruch, indem wir nach Arbitragemöglichkeiten suchen.

Da mit positiver Wahrscheinlichkeit $z_L(t) > z_L(s;\omega)$ können wir ein $\bar{z}$ wählen, sodass gilt:

$$\operatorname{ess\,inf}[z_L(s,\omega)] < \bar{z} < z_L(t)$$

Wir betrachten einen ausfallsfreien Zero Coupon Bond mit Fälligkeit T und Payoff $[1+\bar{z}]^{T-s}$, kaufen zum Zeitpunkt t und verkaufen zum Zeitpunkt s. Der Preis zum Zeitpunkt s beträgt so:

$$(1+\bar{z})^{T-s} \cdot p(s,T) = \frac{(1+\bar{z})^{T-s}}{(1+z(s,T))^{T-s}}$$

Um gleichmäßige Konvergenz zu sichern verwenden wir „free disposal“[5]. Wir beschränken so den Payoff zum Zeitpunkt s mit 1:

$$p_1(s,T;\omega) \equiv \min\left(1, \frac{(1+\bar{z})^{T-s}}{[1+z(s,T;\omega)]^{T-s}}\right)$$

In jedem Zustand ω in dem gilt $z_L(s;\omega) < \bar{z}$ geht der Payoff gegen unendlich für $T \to \infty$ und daher gibt es einen kleinsten kritischen Wert, den wir mit $T^*(\omega)$ bezeichnen, nach dem der Payoff mittels „free disposal“ nur noch eins ist:

$$\exists \quad T^*(\omega) \geq s, \qquad \text{sodass} \quad p_1(s,T;\omega) = 1 \quad \text{für alle} \quad T > T^*(\omega)$$

Die Menge $\Omega_1 \equiv \{\omega | z_L(s;\omega) < \bar{z}\}$, auf der $T^*(\omega)$ definiert ist, ist meßbar und hat positive Wahrscheinlichkeit. Auch $T^*(\omega)$ ist eine meßbare Funktion. Wenn wir nun ein $\overline{T} > \operatorname{ess\,inf}\{T^*(\omega) | \omega \in \Omega_1\}$ wählen, hat die Menge $\Omega_2 \equiv \left\{\omega \in \Omega_1 | T^*(\omega) \leq \overline{T}\right\}$ positive Wahrscheinlichkeit.

[5] Man erlaubt das Verschenken von überflüssigem Geld. Es ermöglicht so das Abziehen einer beliebigen nicht negativen Zufallsgröße, um zu verhindern, dass eine Folge von immer größer werdenden Payoffs divergiert und somit die Definition von Arbitrage nicht angewandt werden kann.

Es gibt so einen Claim, der in Ω/Ω_2 einen Payoff von 0 und in Ω_2 dank „free disposal“, also der Abgabe von überschüssigem Geld, einen Payoff von 1 hat.

Nun betrachten wir den Preis des Claims zum Zeitpunkt t:

$$\frac{(1+\overline{z})^{T-s}}{[1+z(t,T;\omega)]^{T-t}}$$

Dieser Term geht für $T \to \infty$ gegen 0. Der Gesamtwert zur Zeit s, für alle $T \geq \overline{T}$ beträgt 1 für Zustände in Ω_2 und 0 für Zustände in Ω/Ω_2. Da Ω_2 eine Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit ist, haben wir eine Arbitragemöglichkeit erzeugt, somit auf Widerspruch geführt.

□

Bemerkung. Dieser Beweis zeigt, dass wenn wohldefinierte Zero Coupon Rates fallen, es im Limes zu Arbitragemöglichkeiten kommt.

Theorem 2.3.2 (Die Long Forward Rate kann nicht fallen)**.** *Sei t<s, In einem arbitragefreien Markt in dem die Long Forward Rate zum Zeitpunkt t existiert $f_L(t)$ und zum Zeitpunkt s mit Wahrscheinlichkeit 1 $f_L(s)$ existiert gilt für eine Menge an Zuständen mit Wahrscheinlichkeit 1:*

$$f_L(t) \leq f_L(s;\omega)$$

Beweis. Aus dem Theorem 2.2.1 wissen wir, dass die Long Forward Rate, wenn sie existiert gleichbedeutend zu der Long Zero Coupon Rate ist. Daher folgt dieses Resultat direkt aus Theorem 2.3.1. □

Theorem 2.3.3 (Die Long Zero Coupon Rate ist für endlich viele Zustände gleich ihrem zukünftigen Minimum)**.** *Sei $t < s$ und es gilt das no-Arbitrage Prinzip.*
Wir nehmen an die Long Zero Coupon Rate zum Zeitpunkt t existiert und die Long Zero Coupon Rate zum Zeitpunkt s existiert mit Wahrscheinlichkeit 1 und es gibt endlich viele Zustände zum Zeitpunkt s. Dann gilt:

$$z_L(t) = \min_{\omega} z_L(s;\omega)$$

wobei wir nur Zustände betrachten die im Minimum mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten.

Beweis. Aus Theorem 2.2.1, wissen wir, dass $z_L(t) \leq z_L(s;\omega^*)$. Deshalb reicht es aus $z_L(t) \geq z_L(s;\omega^*)$ zu zeigen. Wir nehmen das Gegenteil $z_L(t) < z_L(s;\omega^*)$ an und zeigen anschließend, dass so Arbitrage möglich ist.

Nehmen wir an, wir kaufen zum Zeitpunkt t und verkaufen zum Zeitpunkt s um $[1+z(t;T)]^{T-t}$ einen Claim, der für alle T genau 1 wert ist. Der Cash Flow zum Zeitpunkt s beträgt:

$$-\frac{[1+z(t,T)]^{T-t}}{[1+z(s,T;\omega)]^{T-s}}$$

Dieser Ausdruck geht für $T \to \infty$ in jedem Zustand gegen 0 da, $z(s,T;\omega) \to z_L(s;\omega) \geq z_L(s;\omega^*) > z_L(t)$. Da für endlich viele Zustände aus punktweiser Konvergenz gleichmäßige Konvergenz folgt haben wir, wie schon im Beweis 2.3 eine Arbitragemöglichkeit erzeugt und somit muss $z_L(t) \geq z_L(s;\omega^*)$. □

Theorem 2.3.4 (Die Long Forward Rate ist für endlich viele Zustände gleich ihrem zukünftigen Minimum)**.** *Sei $t < s$ und es gilt das no-Arbitrage Prinzip.*
Wir nehmen an die Long Forward Rate zum Zeitpunkt t existiert und die Long Forward Rate zum Zeitpunkt s existiert mit Wahrscheinlichkeit 1 und es gibt endlich viele Zustände zum Zeitpunkt s. Dann gilt:

$$f_L(t) = \min_{\omega} f_L(s;\omega)$$

wobei wir nur Zustände betrachten die im Minimum mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten.

Beweis. Durch Punkt 2 in Theorem 2.2.1 und Theorem 2.3.3 gezeigt. □

Bemerkung. Bisher haben wir uns mit Theoremen beschäftigt, die ausschließlich Aussagen darüber treffen, dass die Longrate nicht fallen kann. Interessant ist natürlich auch, ob sie steigend oder konstant ist.

Ein heuristischer Ansatz aus der Veröffentlichung von Dybvig, Ingersoll und Ross [DIR96] lautet folgendermaßen:
Wenn wir ein Markov'sches Marktmodell betrachten, wäre es rekurrent. Ist dies der Fall müssen die Longrates immer wieder ihren momentanen Zustand erreichen. Da wir schon gezeigt haben, dass Longrates nicht fallen können bedeutet dies, dass sie konstant sein müssten. Leider ist es sehr unwahrscheinlich, dass die gesamte Zinsstrukturkurve rekurrent ist und dieses Argument zieht so nicht. Anders könnte man sich mittels folgendem Argument helfen: Da es uns nicht möglich ist zu zeigen, dass die Longrate nicht wiederholt zu ihrem jetzigen Wert zurückkehrt, und die Longrate jedoch nicht fallen kann sollten wir meinen, dass die Longrate konstant ist.

2.4 Schlussfolgerungen

Wir haben gezeigt, dass Long Forward Rates und Long Zero Coupon Rates unter der Annahme von no-Arbitrage nicht fallen können. Für Zinsstrukturmodelle bedeutet dies, dass wir für die Zero-Coupon Yieldkurve keinen stochastischen Faktor einsetzen dürfen, es sei denn der Faktor kann mit der Zeit nur steigen.

Kapitel 3

Analyse der asymptotischen Longrate

Eine Aufgabe in der Finanzmathematik lautet Preise für verschiedene Assets mittels Zinsstrukturmodellen zu finden. Da Bondpreise in einem arbitragefreien Markt zu einem großen Grad von der Shortrate abhängen sollen, können wir sie modellieren, wenn wir die Entwicklung der Shortrate kennen. Wir verwenden dazu meist stetige Modelle die wir mittels stochastischer Prozesse modellieren. Eine große Rolle spielen dabei der Diffusionspozess und stochastische Differenzialgleichungen.

Diffusionsprozess

Ein stochastischer Prozess $X(t)$ ist ein Diffusionsprozess, wenn seine lokalen Entwicklungen durch eine stochastische Differentialgleichung folgender Art beschrieben werden kann:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t)$$

wobei $Z(t)$ eine normalverteilte Störgröße ist und μ und σ deterministische Funktionen sind. In unserem Fall wird μ die Drift des Prozesses und σ die Diffunsion genannt. Der Prozess X wird so von zwei Größen bestimmt.
Nachdem wir eine normalverteilte Störgröße verwenden, benötigen wir die Definition eines Wiener Prozesses:

Definition 3.0.1 (Wiener Prozess)**.** Ein Stochastischer Prozess W wird Wiener Prozess genannt, wenn er folgende Bedingungen erfüllt

- W(0)=0
- W hat unabhängige Zuwächse d.h. für $r < s \leq t < u$ gilt

  $$W(u) - W(t) \quad \text{und} \quad W(s) - W(r)$$

  sind unabhängige Zufallsvariablen.
- Für $s < t$ ist die Zufallsvariable $W(t) - W(s)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz$\sqrt{t-s}$.
- W hat stetige Pfade

Nun können wir für $Z(t)$ gleich $\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t)$ schreiben und erhalten so:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t)$$

Wenn wir jetzt Δt gegen 0 gehen lassen erhalten wir:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

das können wir jetzt als Integralgleichung anschreiben:

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$$

Klassischer Ansatz

Der klassische Ansatz verwendet die Modellierung der Shortrate als Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \tag{3.1}$$

Das Bankkonto ist unser risikoloses Asset:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

Mit Anfangsbedingung $B(0) = 1$

Zusätzlich zu unserer schon früher getroffenen Annahme, dass es einen Markt für jede Laufzeit von T-Bonds gibt, der arbitragefrei ist, nehmen wir auch an, dass für alle Laufzeiten T der Preis des dazugehörigen T-Bonds durch $p(t,T) = F(t,r(t);T)$ gegeben ist. Wobei F eine glatte Funktion dreier reeller Variablen ist. Man kann T aber auch als Parameter betrachten: $F^T(t,r(t))$. Daraus ergibt sich unter Anwendung der Ito-Formel die Preisentwicklung eines Bonds:

$$dF^T = F^T \alpha_T dt + F^T \sigma_T dW \tag{3.2}$$

$$\alpha_T = \frac{F_t^T + \mu F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T}{F^T} \tag{3.3}$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma F_r^T}{F^T} \tag{3.4}$$

Aufgrund der no-Arbitrage Annahme und weil in arbitragefreien Märkten der Marktpreis des Risikos für alle Bonds gleich ist gelangen wir zur Zinsstrukturgleichung:

Definition 3.0.2 (Zinsstrukturgleichung)**.**

$$\begin{aligned} F_t^T + \{\mu - \lambda\sigma\} F_r^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr}^T - rF^T &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bemerkung (Risikoneutrale Bewertung)**.**

$$F(t,r(t);T) = E_{t,r}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \right] \tag{3.6}$$

t und r sollen zeigen, dass der Erwartungswert bezüglich folgender Entwicklung der Shortrate gegeben ist:

$$\begin{aligned} dr(s) &= \{\mu - \lambda\sigma\} ds + \sigma dW(s) \\ r(t) &= r \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mit der Drift μ dem Diffusionsterm σ und dem Preis des Marktrisikos λ.

Definition 3.0.3 (Allgemeine Zinsstrukturgleichung)**.**

$$\begin{aligned} F_t + \{\mu - \lambda\sigma\} F_r + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{rr} - rF &= 0 \\ F(T,r) &= \phi(r) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Bemerkung (Risikoneutrale Bewertung)**.**

$$F(t,r(t);T) = E^{Q}_{t,r}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \times \phi(r(T))\right] \tag{3.9}$$

Wobei $X = \phi(r(T))$ der Claim des Bonds ist.

Das stetige Modell in arbitragefreien Märkten schaut, wie schon im Abschnitt 1.2 hergeleitet folgendermaßen aus:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma^{p}(t,T)dW(t) \tag{3.10}$$

wobei $W(t) = (W_1(t),\ldots,W_n(t))^*$ ein Wiener Prozess unter dem risikoneutralen Maß Q ist.

3.1 Zinsstrukurmodelle

Es gibt im wesentlichen drei Ansätze zur Modellierung der Zinsstruktur.

1. **Faktor-Modelle:** Eine endliche Anzahl von Zustandsvariablen beschreibt die Zinsstruktur (z.B.: Vasicek (1977), Cox-Ingersoll-Ross (1985), Duffie-Kan (1996)).
2. **Yield Modelle:** Gibt die Entwicklung der gesamten Yield Kurve an. (z.B.: Ho-Lee (1986), Heath-Jarrow-Morton (1992))
3. Modelle mit einem **stochastischen Diskontierungs Faktor** (z.B.: Yao (1990))

Faktormodelle

In den meisten Faktormodellen werden die Zustandsvariablen $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ aus einer stochastischen Differentialgleichung folgender Form bestimmt:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t)$$

$\mu(X(t),t)$	...	n x 1 Vektor
$\sigma(X(t),t)$	...	n x n Matrix

Es wird angenommen, dass der Bondpreis eine Funktion dieser Zustandsvariablen ist.

Yield Modelle

Ho und Lee veröffentlichten 1986 das erste Yield Modell für die gesamte Zinsstruktur. Die momentane Standardabweichung σ der Shortrate ist in diesem Modell konstant, $\theta(t)$ jedoch eine Funktion der Zeit. Diese Funkion kann nun so gewählt werden, dass das Modell an die momentane Zinsstruktur angepasst wird. $\theta(t)$ kann analytisch berechnet werden und es gilt:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$$

$F(0,t)$ ist die momentane Forward Rate für den Fälligkeitszeitpunkt t zum Zeitpunkt 0, dem heutigen Datum.
Die von Heath-Jarrow-Morton vorgestellte Methode verwendet nicht nur eine oder zwei Zustandsvariablen, sondern die gesamte Forward Rate Kurve - also eine unendlichdimensionale Kurve - als Zustandsvariable.
Es ist damit kein bestimmtes Modell, sondern vielmehr eine Grundstruktur, die man auf verschiedenste Zinsstrukturmodelle anwenden kann.

Stochastischer Diskontierungsfaktor

Bisher haben wir den Bondpreis immer mittels dem risikoneutralen Maß Q bestimmt. (1.1)

$$p(t,T) = \mathbf{E}_Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds \right) | \mathscr{F}_t \right] \tag{3.11}$$

In einigen Anwendungen aber ist es üblich den Erwartungswert bezüglich dem objektiven Maß P zu betrachten. Dazu verwendet man den Likelihood Prozess $L(t)$:

$$L(t) = \frac{dQ}{dP}, \qquad \text{eingeschränkt auf } \mathscr{F}_t \tag{3.12}$$

Wenden wir nun die Bayesformel an erhalten wir:

$$p(t,T) = \frac{\mathbf{E}_P \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} L(T) | \mathscr{F}_t \right]}{L(t)} \tag{3.13}$$

$$= \mathbf{E}_P \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \frac{L(T)}{L(t)} | \mathscr{F}_t \right] \tag{3.14}$$

$$L(t)p(t,T) = \mathbf{E}_t[L(T)p(t,T)] \tag{3.15}$$

Der Prozess $L(t)p(t,T)$ ist ein Martingal und der Ausdruck (3.15) wird Martingal Preisgleichung genannt.

Definition 3.1.1 (Stochastischer Diskontierungsfaktor)**.** Wir nehmen an es gibt die Shortrate r(t), für jedes feste Martingal Q sei $L(t)$ (3.12) der Likelihood Prozess. Der bezüglich Q **stochastische Diskontierungsfaktor** (SDF) Prozess Λ wird definiert als:

$$\Lambda(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} L(t) \tag{3.16}$$

Es gibt also eine eins-zu-eins Übereinstimmung zwischen Martingalmaßen und stochastischen Diskontierungsfaktoren. Der Prozess $\Lambda(t)p(t,T)$ ist ein P-Martingal und die Entwicklungen vom SDF bezüglich P sind gegeben durch:

$$d\Lambda(t) = -r(t)\Lambda(t)dt + \frac{1}{B(t)}dL(t) \tag{3.17}$$

Bemerkung. Hinter dem Ansatz Zinsstrukturmodelle mit Stochastischen Diskontierungsfaktor zu modellieren, verbirgt sich nichts anderes als "gleichzeitig" einen Maßwechsel von dem risikoneutralen zu dem objektiven Maß P durchzuführen und mittels dem risikolosen Asset zu diskontieren.

3.1.1 Erwartungen an Zinsstrukturmodelle

Bemerkung (Vereinfachte Situation)**.** Wir betrachten zunächst einen Markt in dem alle zukünftigen Entwicklungen von Zinsen bekannt sind. Aufgrund des no-Arbitrage Arguments ist die gesamte Zinsstruktur durch die zukünftigen Shortrates berechenbar.

$$p(t,T) = \exp\{-\int_t^T r(s)ds\} \tag{3.18}$$

Wenn wir die Gleichung der instantaneous Forward Rate integrieren erhalten wir:

$$p(t,T) = \exp\{-\int_t^T f(t,s)ds\} \tag{3.19}$$

Wenn wir gleichsetzen sehen wir:

$$\int_t^T f(t,s)ds = \int_t^T r(s)ds$$

Wenn wir nun nach T differenzieren, erkennen wir, dass

$$f(t,T) \equiv r(T)$$

$$f(t,T) \equiv f(0,T)$$

Das bedeutet wären uns alle zukünftigen Entwicklungen der Zinsen bekannt, so müsste die Forwardrate konstant sein! [Yao99b]

Erwartunswert Hypothese

Die Erwartungswert Hypothese besagt, dass die heutigen Forward Rates erwartungstreue Schätzungen der zukünftigen, nicht bekannten Spot Rates sind.

3.1.2 Eigenschaften von Zinsstrukurmodellen

Definition 3.1.2 (Mean Reversion)**.** Liegt das aktuelle Zinsniveau unterhalb des langfristigen Durchschnitts, so ist die Wahrscheinlichkeit für steigende grösser als für fallende Zinssätze und umgekehrt. Diese Eigenschaft nennt man Mean Reversion. Das heißt der Zinssatz tendiert dazu sich auf ein langfristiges Durchschnittsniveau einzupendeln.

Beispiel 3.1.1 (Cox-Ingersoll-Ross Modell (1985))**.**

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Der Parameter θ gibt das langfristige Durchschnittsniveau an und der Parameter k dient zum Steuern der Anpassungsgeschwindigkeit an θ.

Definition 3.1.3 (Affine Zinsstruktur)**.** Wenn eine Zinsstruktur $\{(t,T); t \leq T, T > 0\}$ die Form

$$p(t,T) = F(t,r(t);T) \qquad F(t,r;T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r} \tag{3.20}$$

hat, wobei A und B deterministische Funktionen sind, so sagt man das Modell hat eine affine Zinsstruktur.

Da man so auf geschlossene Bondpreisformeln gelangt, kann dies sehr viel vereinfachen und es ist für uns wichtig herauszufinden wann eine solche affine Zinsstruktur (AZS) vorliegt.

Wir nehmen nun an, dass eine Affine Zinsstruktur vorliegt. Da $F(t,r;T)$ die Zinsstrukturgleichung 3.8 löst muss erhalten wir:

$$A_t(t,T) - \{1 + B_t(t,T)\}\, r - \mu(t,t)B(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)B^2(t,T) = 0 \tag{3.21}$$

Wir haben aus logischen Gründen wegen $F(T,r;T) \equiv 1$ zwei Randbedingungen für A und B:

$$\begin{aligned} A(T,T) &= 0 \\ B(T,T) &= 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Aus (3.21) suchen wir nun Bedingungen an μ und σ, die sicherstellen, dass es die Funktionen A und B gibt und sie die Gleichung 3.21 erfüllen.

Resultat 3.1.1 (Affine Zinsstruktur)**.** *Gilt*

$$\begin{aligned} \mu(t,r) &= \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t,r) &= \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dann gibt es eine Affine Zinsstruktur der Form (3.20) in der A und B folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$B_t(t,T) + \alpha(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) = -1$$

$$B(T,T) = 0 \tag{3.24}$$

$$A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T)$$

$$A(T,T) = 0 \tag{3.25}$$

(3.24) ist eine Ricatti Gleichung um B zu berechnen, dazu benötigt man A nicht. Nachdem wir zuerst die Gleichung für B gelöst haben, können wir unser Ergebnis für die zweite Gleichung verwenden um A zu erhalten.

Bemerkung. Wenn μ und σ nicht von t abhängen müssen sie affin sein, damit es eine Affine Zinsstruktur geben kann.

3.2 Das asymptotische Verhalten von Yields

Für den Abschnitt über das asymptotische Verhalten von Yields wurde der Artikel "**Term Strucute Models: A Perspective from the Long Rate**" [Yao99a] und „**Term structure modeling and asymptotic long rate**" [Yao99b] von Yong Yao herangezogen. Sie beschäftigen sich mit den Dynamiken der asymptotischen Longrate in drei verschiedenen Zinsstrukturmodellen und beweisen unter der Annahme es handle sich um einen reibungslosen und arbitragefreien Markt, dass die asymptotische Longrate in Faktormodellen mit Zustandsvariablen, die nicht-singuläre Diffusions-Volatilitätsmatrizen besitzen, eine deterministische Funktion der Zeit ist. Ausserdem werden in dieser Arbeit Modelle besprochen, in denen die Bondpreise in geschlossener Form haben und die Longrate konstant ist.

Weiters wird in diesem Artikel noch einmal konkret darauf eingegangen, dass in reibungslosen und arbitragefreien Märkten die Longrate ein nichtfallender stochastischer Prozess ist, wie wir schon allgemein anhand des Dybvig-Ingersoll-Ross Theorems gezeigt haben.

3.2.1 Obere Schranke des Yields

Wie schon im Abschnitt Risikoneutraler Ansatz 1.1 dargelegt gilt:

$$p(t,T) = \mathbf{E}_t \left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds \right) \right]$$

Wendet man auf diese Gleichung die Jensensche Ungleichung[1] an, folgt, dass

$$p(t,T) \geq \exp\left(-\int_t^T E_t[r(s)]ds \right)$$

Da die Shortrate nicht negativ sein sollte und die Exponentialfunktion einer negativen Zahl immer kleiner Eins ist wissen wir:

$$p(t,T) \leq 1$$

Wenn wir jetzt diese beiden Ungleichungen kombinieren erhalten wir, dass die Yield kleiner als die erwartete Shortrate ist.

$$0 \leq y(t,T) \leq \frac{1}{T-t} \left(\int_t^T E_t[r(s)]ds \right) \tag{3.26}$$

[1] Für eine Zufallsvariable X und eine konvexe Funktion u gilt: $E[u(X)] \geq u(E[X])$

Lassen wir die Laufzeit jetzt gegen Unendlich gehen und nehmen wir an, dass der Grenzwert existiert erhalten wir folgendes Ergebnis über die Longrate:

$$0 \leq l(t) \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-t}\left(\int_t^T E_t[r(s)]ds\right) \tag{3.27}$$

Daher können wir annehmen, dass die im Durchschnitt erwartete Shortrate nach oben gleichmäßig beschränkt ist und somit auch der Yield nach oben gleichmäßig beschränkt ist.

Bemerkung. Das bedeutet, falls die Longrate existiert, respektive der Limes existiert, so ist sie durch die Yield beschränkt. Hier ergibt sich folgendes Problem: Da durch eine Schranke der Yield nicht bewiesen ist, dass die Longrate existert. Man kann nur sagen, falls die Longrate existiert, wenn es den Limes gibt, dann ist die Longrate beschränkt.

Der Limes muss a-priori nicht existieren, zum Beispiel wenn r(t) mehrere Häufungspunkte hat oder oszilliert. D.h. es könnte auch möglich sein, dass es eine obere Schranke gibt, aber der Limes nicht existiert (Siehe Abschnitt 1.3.4 "Die Existenz der Longrate") Würden wir die Longrate hier über den Limes Superior definieren, kann es zu keinen Problemen kommen, denn der Limes Superior existiert immer. Anders könnte man auch sagen, wenn es keine Schranke gibt, heißt es noch lange nicht, dass die Longrate nicht existiert und endlich ist.

3.2.2 Das Einpendeln der Yieldkurve mit wachsender Laufzeit

Leiten wir nun (1.16) bezüglich der Laufzeit ab:

$$\frac{\partial y(t,T)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau^2}\left(\int_t^T f(t,s)ds\right) + \frac{f(t,T)}{\tau}$$

setzt man die gleiche Yielddefinition wieder ein erhält man:

$$\frac{\partial y(t,T)}{\partial \tau} = \frac{f(t,T)-y(t,T)}{\tau}$$

Da wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, dass bei gleichmäßig nach oben beschränkter erwarteter Shortrate auch der Yield gleichmäßig nach oben beschränkt ist, wissen wir:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{y(t,T)}{\tau}=0$$

Und da es Grund zur Annahme gibt, dass auch die Forward Rate zu jedem Zeitpunkt t nach oben beschränkt ist, erhalten wir:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{f(t,T)}{\tau}=0$$

Damit bekommen wir folgendes Resultat, welches bedeutet, dass die Yieldkurve sich mit längeren Laufzeiten ein pendelt.

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\partial y(t,T)}{\tau}=0$$

3.2.3 Die Longrate ist ein nicht fallender Prozess

Wie wir schon am Anfang dieses Kapitels festgestellt haben kann der Preis eines Bonds anhand einer stochastischen Differentialgleichung dargestellt werden.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}=r(t)dt-\sigma(t,T)dW(t) \tag{3.28}$$

Wendet man das *Itô*-Lemma 1.2.2 an erhalten wir:

$$d(\log P(t,T))=r(t)dt-\frac{1}{2}\sigma(t,T)\cdot\sigma(t,T)^*dt-\sigma(t,T)dW(t) \tag{3.29}$$

Wir integrieren über $s=0$ bis $s=t$:

$$\log P(t,T)=\log P(0,T)+\int_0^t r(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\sigma(s,T)\cdot\sigma(s,T)^*ds-\int_0^t\sigma(s,T)dW(s)$$

Wir erinnern uns an die Definition der Zero Coupon Rate 1.3.5 bzw. an die Definition des Yields 1.16 und dividieren durch $\tau=T-t$:

$$y(t,T)=\frac{1}{\tau}y(0,T)-\frac{1}{\tau}\int_0^t r(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\sigma(s,T)\cdot\sigma(s,T)^*}{\tau}ds+\int_0^t\frac{\sigma(s,T)}{\tau}dW(s)$$

Wenn wir nun $T\to\infty$ und so auch $\tau\to\infty$ gehen lassen, erhalten wir eine Gleichung für die Longrate:

$$l(t)=l(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\delta(s)ds+\int_0^t\Delta(s)dW(s) \tag{3.30}$$

wobei

$$\delta(s) = \lim_{T\to\infty} [\sigma(s,T)\cdot\sigma(s,T)^*]/\tau$$

eine nicht negative Zahl ist und

$$\Delta(s) = \lim_{T\to\infty} \sigma(s,T)/\tau$$

ein n x 1-Vektor ist. Als nächstes werden wir sehen, dass wenn $\delta(s)$ existiert $\Delta(s)$ gleich Null sein muss:

Hilfsgleichung

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\tau}|\sigma(T)| = \limsup_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{\tau}\sigma^2}{|\sigma(T)|} \tag{3.31}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall $\limsup_{T\to\infty} |\sigma(T)| = \infty$

$$\Rightarrow \quad \text{wegen (3.31) und da } \delta < \infty \quad \limsup_{T\to\infty} \left|\frac{\sigma(T)}{T}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma(T)}{T} = 0$$

2. Fall $\limsup_{T\to\infty} |\sigma(T)| < \infty$

$$\Rightarrow \text{ da } \delta < \infty \quad \limsup_{T\to\infty} \left|\frac{\sigma(T)}{T}\right| = 0$$

Daher erhalten wir eine Gleichung, die zeigt, dass die Longrate ein nicht fallender Prozess ist der durch die Volatilität von Zero Coupon Bonds bestimmt wird.

$$l(t) = l(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \delta(s)ds \tag{3.32}$$

Bemerkung. $\sigma(t,T)/(T-t)$ ist die Volatilität der Yield von einem Zero Coupon Bonds. Da $\delta(s)$ endlich ist können wir daraus folgern, dass $\lim_{T\to\infty} \frac{\sigma(t,T)}{T-t} = 0$. Das bedeutet im Allgemeinen je länger die Laufzeit des Yields, desto geringer die Volatilität.

3.2.4 Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit

In Faktormodellen wird der Bondpreis mittels Zustandsvariablen modelliert. Durch die Beziehung zwischen Bondpreis und Yield kann man annehmen, dass auch der Yield und damit natürlich die Longrate eine Funktion von Zustandsvariablen ist.

Mit Hilfe der Ito-Formel 1.2.2 erhalten wir folgende Gleichung für die Longrate:

$$dl = \left\{ \frac{\partial l}{\partial t} + \mu \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot sp \left[\sigma \cdot \sigma^* \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} \right] \right\} dt + \sigma \frac{\partial l}{\partial x} dW(t) \tag{3.33}$$

Zur einfacheren Darstellung wurde in der oben angegebenen Gleichung auf die Abhängigkeit der Variablen verzichtet, d.h. eigentlich wäre

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \left(\frac{\partial l}{\partial x_1}, \frac{\partial l}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial l}{\partial x_n} \right)$$

ein Vektor der ersten partiellen Ableitungen und

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 l}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{nxn}$$

eine n x n Matrix der zweiten partiellen Ableitungen und sp die Spur dieser Matrix. Wenn wir nun (3.33) und (3.32) vergleichen sehen wir, dass

$$\frac{\partial l}{\partial x} \cdot \sigma \equiv 0$$

Wenn die Volatilitätsmatrix der Zustandsvariablen nicht singulär ist (Determinante ungleich 0) muss gelten:

$$\frac{\partial l}{\partial x} \equiv 0$$

Resultat 3.2.1. *Wenn die Volatilitätsmatrix der Zustandsvariablen nicht singulär ist fallen alle Faktoren mit $\frac{\partial l}{\partial x}$ aus (3.32) weg und wir haben gezeigt, dass die Longrate in Faktormodellen ist eine nicht fallende Funktion von t, die unabhängig von den Zustandsvariablen ist!*

3.2.5 Mean Reversion und eine Schranke für Yields in Faktormodellen

Viele Ein-Faktor-Modelle besitzen die Eigenschaft der Mean Reversion und werden wie folgend modelliert:

$$dr(t) = [\alpha_1(t) - \alpha_2(t)r(t)]dt + \sigma(r(t),t)dW(t) \tag{3.34}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \quad \cdots$ deterministische Funktionen von t

Mit Hilfe integrierender Faktoren erhält man

$$r(T) = r(t)e^{-\int_t^T \alpha_2(s)ds} + \int_t^T \alpha_1(U)e^{-\int_U^T \alpha_2(s)ds}dU + \int_t^T \sigma(U)e^{-\int_U^T \alpha_2(s)ds}dW(U) \tag{3.35}$$

Betrachten wir nun den auf t bedingten Erwartungswert fällt der letzte Teil der Gleichung wegen der Martingaleigenschaft weg.

$$E_t[r(T)] = r(t)e^{-\int_t^T \alpha_2(s)ds} + \int_t^T \alpha_1(U)e^{-\int_U^T \alpha_2(s)ds}dU$$

Bedingung
Existieren zwei positive Konstanten C_1, C_2 mit $\alpha_1(t) \leq C_1, \alpha_1(t) \leq C_2$so gilt:

$$E_t[r(T)] \leq r(t)e^{-C_2(T-t)} + C_1 \int_t^T e^{-C_2(T-U)}dU$$

wegen $e^{-C_2(T-t)} \leq 1$ und

$$\int_t^T e^{-C_2(T-U)}dU = \frac{1 - e^{-C_2(T-t)}}{C_2} \leq \frac{1}{C_2}$$

erhalten wir, dass $E_t[r(T)]$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist.

$$E_t[r(T)] \leq r(t) + \frac{C_1}{C_2} \tag{3.36}$$

Wenden wir unser Ergebnis auf 3.2.1 an, so haben wir gezeigt, dass so auch der Yield für alle Laufzeiten gleichmäßig nach oben beschränkt ist.

Bemerkung. In zeithomogenen Modellen mit Konstanten α_1, α_2 kann man die Bedingungen leicht erfüllen, nicht so zum Beispiel im Ho-Lee Modell:

$$dr(t) = \left[\frac{d}{dt}f(0,t) + t\sigma^2\right]dt + \sigma dW(t)$$

$$E_t[r(T)] = f(0,T) + \frac{T^2\sigma^2}{2}$$

In diesem Modell geht der Erwartungswert gegen Unendlich für $T \to \infty$, d.h. die Longrate ist Unendlich: $l(t) = \infty$

3.2.6 Der Yield im Black-Derman-Toy Modell

$$d[\log r(t)] = [\theta(t) - \phi(t)\log r(t)]dt + \sigma(t)dW(t) \tag{3.37}$$

Wobei θ, ϕ und σ deterministische Funktionen der Zeit sind. Zur Vereinfachen verwenden wir im folgende Notation: $R(t) = \log r(t)$
Wie schon zuvor wenden wir die Methode der integrierenden Faktoren an:

$$R(T) = R(t)e^{-\int_t^T \phi(s)ds} + \int_t^T \theta(U)e^{-\int_U^T \phi(s)ds}dU + \int_t^T \sigma(U)e^{-\int_U^T \phi(s)ds}dW(U)$$

Und betrachten den Bedingten Erwartungswert und die Varianz von $R(T)$

$$E_t[R(T)] = R(t)e^{-\int_t^T \phi(s)ds} + \int_t^T \theta(U)e^{-\int_U^T \phi(s)ds}dU$$

$$Var_t[R(T)] = \int_t^T \sigma^2(U)e^{-2\int_U^T \phi(s)ds}dU$$

Wegen der Normalverteilung von R(T) ist r(T) lognormalverteilt. Daher setzt sich der Erwartungswert folgendermaßen zusammen:

$$E_t[r(T)] = \exp\left\{E_t[R(T)] + \frac{1}{2}Var_t[R(T)]\right\}$$

Wenn nun $E_t[r(T)]$ beschränkt ist wissen wir aus 3.2.1, dass auch der Yield beschränkt ist.

Bemerkung. Sind C_1, C_2 und C_3 positive Konstanten für die gilt:

$$\phi(t) \geq C_1 \qquad \theta(t) \leq C_2 \qquad \sigma(t) \leq C_3$$

dann existiert der Erwartungswert von $r(T)$.

3.2.7 Die Longrate in den affinen Modellen von Duffie und Kan

Duffie und Kan betrachten eine Klasse von Zinsstrukturmodellen, die durch eine affine Relation zwischen Drift und Diffusionskoeffizient des stochastischen Prozesses beschrieben werden.

Definition 3.2.1. Seien reelle Parameter $\kappa \geq 0, \theta > 0, \sigma$ und eine Brownsche Bewegung $(W_t),\ t \geq 0$ gegeben. Ein stochastischer Prozess $(X_t), t \geq 0$ heißt Wurzel-Diffusionsprozess mit jenen Parametern, wenn er die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

löst. Zumeist wird mit $X_0 = x$ eine Anfangsbedingung festgelegt, sodass aus obiger Differentialgleichung ein stochastisches Anfangswertproblem wird.

Wir nehmen an, dass die Zustandsvariablen X durch einen Wurzel-Diffusionsprozess folgender Form beschrieben werden:

$$dX(t) = (K \cdot X(t) + K_0)dt + \sqrt{V(X(t))} \cdot \Sigma \cdot dW(t) \tag{3.38}$$

Wobei K eine n x n Matrix, K_0 ein n x 1 Vektor und $\sqrt{V(X(t))}$ die Diagonalmatrix ist:

$$diag\left[\sqrt{\alpha_1 + \beta_1 \cdot X(t)}, \sqrt{\alpha_2 + \beta_2 \cdot X(t)}, \cdots, \sqrt{\alpha_n + \beta_n \cdot X(t)}\right]$$

Mit α_i einem Skalar, β_i einem 1 x n Vektor und Σ einer positiven semi-definiten n x n Matrix.

In diesem Modell kann der Bondpreis folgendermaßen beschrieben werden:

$$P(t,T) = \exp\{A(\tau) + B(\tau) \cdot X(t)\} \tag{3.39}$$

B ist in diesem Zusammenhang eine vektorwertige Funktion, die der Riccati-Gleichung genügt:

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}sp[B^* \cdot B \cdot \beta] + B \cdot K + \gamma_i \tag{3.40}$$

und für A gilt:

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2}sp[B^* \cdot B \cdot \alpha] + B \cdot K_0 + \gamma_0 \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ B(0) &= 0 \\ r(t) &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i \end{aligned}$$

Wenn alle Eigenwerte der Matrix K einen negativen Realteil haben ist die Lösung $B(\tau)$ nach oben beschränkt und wir erhalten:

$$\delta(s) = \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{B \cdot \Sigma \cdot V \cdot \Sigma \cdot B^*}{\tau} \right] = 0 \tag{3.42}$$

Bemerkung. In "Braun M., 1993, Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics, 4th ed. New York: Springer"wird näheres erklärt. Im Allgemeinen gilt: Haben die Zustandsvariablen die Eigenschaft der Mean Reversion 3.1.2, so hat K Eigenwerte mit negativem Realteil.

Verwenden wir nun unsere Ergebnisse aus dem Abschnitt 3.2.3 so zeigt dies, dass die Longrate im Duffie-Kan Modell konstant ist!

$$l(t) = l(0) + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^t \delta(s) ds}_{0} \tag{3.43}$$

Später werden wir anhand des Merton Modelles und des Vasicek Modelles sehen, dass die Bedingung auf eine nicht singuläre Volatilitätsmatrix allein noch nicht ausreichend ist um eine endliche Longrate zu garantieren.

Bemerkung. Das Duffie-Kan Modell ähnelt dem Hull-White Modell sehr. Es unterscheidet sich nur darin, dass $\sigma(t)$ hier konstant ist.

3.3 Das asymptotische Verhalten von Yields unter Verwendung des Sprung-Diffusionsprozesses

Szenario

Die stochastischen Unsicherheiten werden durch n voneinander unabhängige standard Brownsche Bewegungen bezüglich dem objektiven Maß P beschrieben:

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t))^*$$

und m unabhängigen Punktprozessen:

$$N(t) = (N_1(t), N_2(t), ...N_m(t))^*$$

die durch

$$N_i(t) = \sup\left\{ j : T_j^{(i)} \leq t \right\}$$

definiert werden. $\left\{ T_j^{(i)} : j \geq 1 \right\}$ ist die Zeit zu der der j-te Sprung im i-ten Punktprozess auftritt.

Wir nehmen an, dass die Brownschen Bewegungen von den Punktprozessen unabhängig sind. Weiters nehmen wir an, dass es einen m-dimensionalen streng positiven, vorhersehbaren Intensitäts-Prosess $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_m(t))^*$ gibt, sodass für $i = 1, 2, ..., m$:

$$M_i(t) = N_i(t) - \int_0^t \lambda_i(s) ds$$

ein Martingal bezüglich dem objektiven Maß P ist. $M_i(t)$ wird **ausgeglichenes Sprung-Martingal** genannt, $M(t) = (M_1(t), M_2(t), ..., M_m(t))^*$

3.3.1 Der Prozess der asymptotischen Longrate im Zusammenhang mit Sprung-Diffusionsprozessen

Ähnlich wie in dem Abschnitt 3.2.3 “Die Longrate ist ein nicht fallender Prozess“ kann der Bondpreis wie gewohnt durch eine stochastische Differentialgleichung angegeben werden:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t^-,T} = \mu^p(t,T)dt - \sigma^p(t,T)dW(t) + \underbrace{\theta^p(t,T)dM(t)}_{\text{Sprünge}} \tag{3.44}$$

mit

$$\begin{array}{ll} \mu^p(t,T) & \dots \text{ einem Skalar} \\ \sigma^p(t,T) & \dots \text{ einem 1xn Vektor} \\ \theta^p(t,T) & \dots \text{ einem 1xm Vektor} \end{array}$$

Wir sehen also, wie schon in dem Abschnitt über den Risikolosen Ansatz 1.2, dass wir das Ito- Lemma 1.3 anwenden können und erhalten:

$$\log P(t,T) - \log P(0,T) = \int_0^t \frac{1}{P(s^-,T)} dP(s,T)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \left(-\frac{1}{P(s^-,T)^2}\right)\sigma^p(s,T)\cdot\sigma^p(s,T)^* P(s^-,T)P(s^-,T)^* ds$$

$$+\sum_{s\le t}\left[\log(P(s,T)) - \log(P(s^-,T)) - \frac{1}{P(s^-,T)}\Delta P(s,T)\right] =$$

Nebenrechnungen

- $\Delta P(s,T) = P(s^-,T)\theta^p(s,T)$
- $P(s,T) = P(s^-,T) + \Delta P(s,T) = P(s^-,T)\left(1+\frac{\Delta P(s,T)}{P(s^-,T)}\right)$
- $\log P(s,T) = \log P(s^-,T) + \log\left(1+\frac{\Delta P(s,T)}{P(s^-,T)}\right)$

$$\cdots = \int_0^t [\mu^p(s,T) - \sigma^p(s,T)dW(s) + \theta^p(s,T)dM(s)] - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^p(s,T)\sigma^p(s,T)^* ds$$

$$+\sum_{s\le t}\left[\log\underbrace{(1+\frac{\Delta P(s,T)}{P(s^-,T)})}_{\log(1+\theta^p(s,T))} - \underbrace{\frac{\Delta P(s,T)}{P(s^-,T)}}_{\theta^p(s,T)}\right]$$

Nebenrechnungen

$$dM = dN - \lambda dt$$

$$\sum_{s\le t}[\log(1+\theta^p(s,T)) - \theta^p(s,T)] = \int_0^t [\log(1+\theta^p(s,T)) - \theta^p(s,T)]\, dN(s)$$

$$= \int_0^t [\log(1+\theta^p(s,T)) - \theta^p(s,T)]\, dM(s) + \int_0^t [\log(1+\theta^p(s,T)) - \theta^p(s,T)\lambda(s)]\, ds$$

$$\cdots = \int_0^t \left[\mu^p(s,T) - \frac{1}{2}\sigma^p(s,T)\sigma^p(s,T)^* + (\log(1+\theta^p(s,T)) - \theta^p(s,T))\,\lambda(s)\right] ds$$
$$- \int_0^t \sigma^p(s,T) dW(s) + \int_0^t \log(1+\theta^p(s,T)) dM(s)$$

$$d(logP(t,T)) = \left[\mu^p(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^p(t,T)\cdot(\sigma^p(t,T))^* - \lambda(t)\cdot(\theta^p(t,T))^*\right] dt \tag{3.45}$$
$$-\sigma^p(t,T)\cdot dW(t) + [\log(\theta^p(t,T)+1)]\cdot dN(t)$$

Jetzt integrieren wir über s, von $s = 0$ bis $s = t$,

$$\log P(t,T) = logP(0,T) \quad +$$

$$+ \int_0^t \left[\mu^p(s,T) - \frac{1}{2}\sigma^p(s,T)\cdot(\sigma^p(s,T))^* - \lambda(s)\cdot(\theta^p(s,T))^*\right] ds \tag{3.46}$$
$$- \int_0^t \sigma^p(s,T) dW(s) + \int_0^t [\log(\theta^p(s,T)+1)] dN(s)$$

Mit (1.16) erhalten wir schließlich:

$$y(t,T) = \frac{1}{\tau} y(0,T) - \frac{1}{\tau}\int_0^t \mu^p(s,T) ds$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^p(s,T)\cdot(\sigma^p(s,T)) + 2\lambda(s)\cdot(\theta^p(s,T))^*}{T-s} ds$$
$$+ \int_0^t \frac{\sigma^p(s,T)}{T-s} dW(s) - \int_0^t \frac{[\log(\theta^p(s,T)+1)]}{T-s} dN(s)$$

Schlussendlich erhalten wir unter der Bedingung, dass man Integration und Limesbildung vertauschen kann, was in den gängigen Modellen möglich ist, wie in (3.30) für $T \to \infty$ die Longrate:

$$l(t) = l(0) - \nu(t) + \frac{1}{2}\int_0^t [\delta(s) + 2\gamma(s)] ds + \int_0^t \Delta(s) dW(s) - \int_0^t \Gamma(s) dN(s) \tag{3.47}$$

mit den Skalaren:

$$\begin{aligned}
\nu(t) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^t \mu^p(s,T)ds \\
\delta(s) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^p(s,T)(\sigma^p(s,T))^*}{T-s} \\
\gamma(s) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\lambda(s)(\theta^p(s,T))^*}{T-s}
\end{aligned}$$

und den Vektoren:

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^p(s,T)(\sigma^p(s,T))^*}{T-s} \\
\Gamma(s) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\log(\theta^p(s,T)+1)}{T-s}
\end{aligned}$$

Wieder können wir auf 3.2.3 verweisen, dort haben wir bereits gezeigt, wenn $\delta(s)$ eine wohldefinierte Funktion ist muss $\Delta(s)$ gleich 0 sein. Nun beschäftigen wir uns mit einem ähnlichen Problem: Wenn $\gamma(s)$ existiert muss $\Gamma(s) \leq 0$ sein und dann wiederum ist $\gamma(s)$ gleich 0.

Argumentation

Für $T \to \infty$:

$$\log(\theta^p(s,T)+1) \approx (T-s)\Gamma(s) \tag{3.48}$$

$$\theta^p(s,T) \approx e^{(T-s)\Gamma(s))} - 1 \tag{3.49}$$

$$\frac{\lambda(s)\theta^p(s,T)}{T-s} \approx \frac{\lambda(s)\left[e^{(T-s)\Gamma(s)}-1\right]}{T-s}$$

Dieser letzte Ausdruck geht für $T \to \infty$ und $\Gamma(s) > 0$ gegen unendlich.

Bemerkung. Da $\delta(s)$ nicht negativ ist und $\Gamma(s)$ nicht positiv, ist

$$\frac{1}{2}\int_0^t \delta(s)ds - \int_0^t \Gamma(s)dN(s)$$

ein nicht wachsender Prozess. Wenn $\nu(t)$ eine nicht fallende Funktion ist, ist auch die Longrate eine nicht fallender Prozess!

Wir verwenden das Ergebnis aus dem Abschnitt (1.2) über den Risikoneutralen Ansatz, im speziellen (1.4) und erhalten folgendes Resultat:

Resultat 3.3.1. *In einem vollkommenen und arbitragefreien Markt existiert, wenn $\delta(s)$ und $\gamma(s)$ wohldefiniert sind, ist die asymptotische Longrate ein nicht fallender Prozess der folgendermaßen dargestellt werden kann:*

$$l(t) = l(0) - \nu(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \delta(s)ds - \int_0^t \Gamma(s)dN(s)$$

mit $\Gamma(s)$ einem nicht positiven Vektor.

3.3.2 Die Longrate in Faktormodellen adaptiert an Sprung-Diffusionsprozesse

In Faktormodellen werden die Zustandsvariablen aus einer stochastischen Differentialgleichung bestimmt (Siehe 3.1). Neu für uns ist jetzt die Anpassung an mögliche Sprünge:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t) + \theta(X(t),t)\cdot dN(t) \tag{3.50}$$

$$\theta(X(t),t) \quad \ldots \quad \text{n x m Sprung-Volatilitätsmatrix}$$

und $N(t)$ wie in (3.3)

Die folgenden Ergebnisse schließen an den Abschnitt (3.2.4) “Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit“ an.

$$dl = \left\{\frac{\partial l}{\partial t} + \mu\frac{\partial l}{\partial X} + \frac{1}{2}\cdot sp\left[\sigma\cdot\sigma^*\frac{\partial^2 l}{\partial X^2}\right]\right\}dt + \sigma\frac{\partial l}{\partial X}dW(t)$$
$$+[l(X+\theta,t) - l(X,t)]\cdot dN(t) \tag{3.51}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (3.50) erhalten wir, wie schon in Abschnitt 3.2.4, dass

$$\frac{\partial l}{\partial X}\cdot\sigma = 0$$

und bei nichtsingulärer Volatilitätsmatrix bedeutet dies, dass

$$\frac{\partial l}{\partial X} = 0$$

gelten muss und wir erkennen:

$$l(X+\theta,t) - l(X,t) = 0$$

Diese Ergebnisse können wir in folgendem Resultat zusammenfassen:

Resultat 3.3.2. *Unter der Annahme, dass die Zustandsvariablen in einem Faktormodell wie in 3.50 dargestellt werden können und dass die Diffusions-Volatilitäsmatrix $\sigma(X(t),t)$ nicht singulär ist, hängt die Longrate $l(t)$ nicht von den Zustandsvariablen ab und ist eine deterministische Funktion der Zeit. Ausserdem ist die Longrate in vollkommenen und arbitragefreien Märkten eine nicht fallende deterministische Funktion.*

Kapitel 4

Das Verhalten der Longrate konkreter Modelle

Die in diesem Kapitel gebrachten Ergebnisse wurden anhand von [Yao99a] hergeleitet. Anhand folgender im vorherigen Kapitel gezeigten vier Aussagen über die Longrate werden wir nun die konkreten Modelle analysieren:

1. l(t) ist endlich oder unendlich. Endlichkeit kann mit der Abschätzung aus dem Abschnitt 3.2.1 gezeigt werden.
2. l(t) ist wachsend. 3.2.3
3. l(t) ist eine deterministische Funktion der Zeit 3.2.4
4. l(t) ist eine deterministische Konstante 3.2.7

Notiz. Zum Berechnen der Longrate wird uns oft der im folgenden erklärte affine Ansatz helfen.

Definition 4.0.1 (Affiner Ansatz)**.** Wir nehmen an, dass die Entwicklung der Zinsstruktur bezüglich dem risikoneutralen Maß P gegeben ist durch:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dWt \tag{4.1}$$

Dann hat ein Modell eine affine Zinsstruktur, falls μ und σ folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \mu(t,r) &= \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t,r) &= \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Mittels vier Schritten ist es für affine Modelle möglich aus der Zinsstrukturgleichung die Yield zu erhalten:

Zuerst bestimmen wir μ und σ und erhalten so Gleichungen für B_t und A_t

$$B_t(t,T) + \alpha(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(T,T) = -1$$
$$A_T(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T) \tag{4.3}$$

Diese müssen wir lösen und integrieren um auf die affine Bondpreisgleichung zu kommen.

$$F(t,r;T) = e^{A(t,T)-B(t,T)r} = P(t,T) \tag{4.4}$$

Jetzt brauchen wir nur noch umzuformen um den Yield zu erhalten:

$$y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t} \tag{4.5}$$

4.1 Das Merton Modell (1970)

$$dr(t) = \Theta dt + \sigma dW(t) \tag{4.6}$$

Resultat 4.1.1. *Das Merton Modell ist ein affines Modell, die Longrate ist $-\infty$ für positives σ.*

Verwenden wir den affinen Ansatz, so erhalten wir:

1.Schritt

$$\mu(t): \quad \alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = \Theta$$
$$\sigma(t): \quad \delta(t) = \sigma^2, \quad \gamma(T) = 0$$

2.Schritt

$$B_t(t,T) = -1$$

$$A_t(t,T) = \Theta B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T)$$

Daraus ergibt sich für B(t,T) und $\tau = T - t$

$$B(t,T) = -\int_t^T 1ds = -(T-t) = -\tau$$

$$A(t,T) = \int_t^T (\Theta\tau - \frac{\sigma^2}{2}\tau^2)d\tau = -\frac{\theta}{2}\tau^2 + \frac{\sigma^2}{6}\tau^3$$

3.Schritt

$$P(t,T) = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{6}\tau^3 - \frac{\Theta}{2}\tau^2 + \tau r(t)\right\}$$

4.Schritt

$$y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{\tau} = \frac{-\frac{\sigma^2}{6}\tau^3 + \frac{\Theta}{2}\tau^2 - \tau r(t)}{\tau}\frac{\Theta}{2}\tau - \frac{\sigma^2}{6}\tau - r(t)$$

Davon müssen wir nun den Limes bilden um auf die Longrate zu kommen:

$$l(t) = \lim_{\tau\to\infty} y(t,T) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\log P(t,T)}{\tau} = -\infty \tag{4.7}$$

4.2 Das Vasicek Modell (1977)

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t) \tag{4.8}$$

Resultat 4.2.1. *Auch das Vasicek Modell ist ein affines Modell. Es berücksichtigt die Eigenschaft der Mean Reversion (Siehe 3.1.2). Das bedeutet der Zinssatz wird mit der Rate a auf ein Niveau b gezogen, wobei diese Tendenz von dem normalverteilten stochastischen Term $\sigma dW(t)$ überlagert wird. D.h.: wenn r steigt, wird auch seine Standardabweichung größer.*

Die Longrate beträgt für

- $a > 0 \qquad l(t) = \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$
- $a < 0 \qquad l(t) = -\infty$

1.Schritt

$$\mu(t): \qquad \alpha(t) = -a, \quad \beta(t) = b$$
$$\sigma(t): \qquad \delta(t) = \sigma^2, \quad \gamma(t) = 0$$

2.Schritt

$$B_t(t,T) - aB(t,T) = -1$$
$$A_t(t,T) = bB(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T)$$

Daraus ergibt sich für B(t,T) und A(t,T):

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(T-t)}\right\}$$

$$A(t,T) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s,T)ds - b\int_t^T B(s,T)ds$$

$$= \frac{(\frac{1}{a}(1-e^{-a\tau}) - T + t)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 \frac{1}{a^2}(1-e^{-a\tau})^2}{4a}$$

3.Schritt $\tau = T - t$

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)} =$$

$$= \exp\left\{\frac{(\frac{1}{a}(1-e^{-a\tau}) - \tau)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2(\frac{1}{a^2}(1-e^{-a\tau})^2)}{4a} - \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(\tau)}\right\} r(t)\right\}$$

$$y(t,T) = \frac{\frac{(\frac{1}{a}(1-e^{-a\tau}) - \tau)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2(\frac{1}{a^2}(1-e^{-a\tau})^2)}{4a} - \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(\tau)} r(t)\right\}}{\tau}$$

Nun bilden wir den Limes für $\tau \to \infty$ bzw. $T \to \infty$, dabei müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen:

1. Fall: $a > 0$

$$l(t) = \lim_{\tau\to\infty} y(t,T) = \frac{\tau(\frac{1}{a\tau}(1-\overbrace{e^{-a\tau}}^{\to 0})-1)(ab-\frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2\tau} - \frac{\overbrace{\sigma^2(\frac{1}{a^2}(1-e^{-a\tau})^2)}^{\to 0}}{4a\tau} \tag{4.9}$$

$$-\overbrace{\frac{1}{a\tau}\left\{1-e^{-a(\tau)}r(t)\right\}}^{\to 0}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau(ab-\frac{\sigma^2}{2})}{a^2\tau} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{ab-\frac{\sigma^2}{2}}{a^2} = \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \tag{4.10}$$

2. Fall: $a < 0$

$$l(t) = \lim_{\tau\to\infty} y(t,T) = -\infty \tag{4.11}$$

4.3 Das Hull-White Modell (1990)

Bemerkung. Es gibt mehrere Arten des Hull-White Modells, die nur leicht voneinander abweichen. $\theta(t)$ wird als deterministische Funktion so gewählt, dass die theoretische Bondpreiskurve an die beobachtete Bondpreiskurve angepasst wird. In [Yao99b] werden zusätzlich auch die anderen Parameter zeitabhängig gemacht.

Erweitertes Vasicek Modell 1:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t) \qquad a(t) > 0 \tag{4.12}$$

oder erweitertes Vasicek Modell 2:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t)dW(t) \tag{4.13}$$

bzw. erweitertes CIR Modell:

$$dr(t) = [\theta(t) + a(t)(b - r(t))]dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.14}$$

Resultat 4.3.1. *Bei diesen Modellen handelt es sich um Erweiterungen des Vasicek- bzw. CIR-Modelles die eine exakte Anpassung an die anfängliche Zinsstruktur ermöglichen.*
Die Longrate kann unendlich oder eine endliche nichtfallende Funktion der Zeit sein.

Für (4.13) und (4.14) gilt:

$$\alpha_1(t) = \theta(t) + a(t)b$$
$$\alpha_2(t) = a(t)$$

Die Longrate ist endlich
Aus 3.2.5 wissen wir, dass wir mit Hilfe von zwei positiven Konstanten C_1 und C_2 für die $\alpha_1 \leq C_1$ und $\alpha_2 \geq C_2$ gilt, zeigen können, dass $E_t[r(T)]$ und somit die Yields aller Laufzeiten nach oben beschränkt sind. Das heißt um eine endliche Longrate im Fall 4.13 oder 4.14 zu erhalten, muss gelten:

$$\theta(t) + a(t)b \leq C_1$$
$$a(t) \geq C_2$$

Wir betrachten nun den Fall, dass nur $\theta(t)$ zeitabhängig ist (4.12): Eine beschränkten Yield erhalten wir, wenn gilt:

$$\alpha_1(t) = \theta(t) \leq C_1$$
$$\alpha_2(t) = a(t) \geq C_2$$

Verwenden wir den affinen Ansatz, so erhalten wir:

1.Schritt

$$\mu(t): \qquad \alpha(t) = a, \quad \beta(t) = \theta(t)$$
$$\sigma(t): \qquad \delta(t) = 0, \quad \gamma(T) = \sigma^2$$

2.Schritt

$$B_t(t,T) = aB(t,T) - 1$$
$$A_t(t,T) = \theta B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T)$$

Daraus ergibt sich für B(t,T) und A(t,T):

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left\{1 - e^{-a(T-t)}\right\}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s,T) - \theta(s)B(s,T) \right\} ds$$

Hat man $\theta(t)$ nun an die Daten angepasst, muss man nur noch ausintegrieren und erhält mittels dem üblichen Verfahren die Longrate.

Bemerkung. Für $\theta(t) = \theta$ und $a(t) = 1$ erhalten wir das Merton Modell, dessen Longrate $-\infty$ beträgt. Somit sehen wir anhand dieses Beispiels, dass für gewisse Parameter die Longrate auch unendlich sein kann.

4.4 Das Dothan Modell (1978)

$$dr(t) = \sigma r(t) dW(t) \tag{4.15}$$

Resultat 4.4.1. *Die Longrate im Dothan Modell ist eine endliche, nicht fallende deterministische Funktion der Zeit.*

Es sind also drei Eigenschaften zu zeigen und wir fangen mit der Endlichkeit an.

Zu Beginn definieren wir die Geometrische Brownsche Bewegung, anhand der wir zeigen, dass, falls die Longrate existiert, sie endlich ist.

Definition 4.4.1 (Geometrische Brownsche Bewegung (GBB))**.**

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Theorem 4.4.2 (Eigenschaften der GBB)**.** *Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lautet:*

$$X(t) = x_0 \cdot \exp\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

$$E[X_t] = x_0 e^{\alpha t} \tag{4.17}$$

$$V[X_t] = e^{2\alpha t} x_0^2 \left(e^{\sigma^2 t}\right) \tag{4.18}$$

Die Longrate ist endlich
Aus dem Abschnitt 3.2.1 "Obere Schranke der Yield" kennen wir folgende Abschätzung:

$$0 \leq l(t) \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-t}\left(\int_t^T E_t[r(s)]ds\right)$$

Da es sich bei diesem Modell um eine Geometrische Brownsche Bewegung handelt mit $\alpha(t) = 0$ und $\sigma(t) = r(t)\sigma(t)$ erhalten wir für den Erwartungswert $E[r(T)] = r_t$.

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-t}\int_t^T r_t ds = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-t}(T-t)r_t = r_t \tag{4.19}$$

Daraus erhalten wir, wenn l(t) existiert

$$l(t) \leq r(t)$$

Die Longrate ist wachsend
Dafür benötigen wir den Abschnitt 3.2.3. Wir wissen, dass $r(t)$ durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben wird und der Bondpreis immer eine Funktion von $r(t)$ und $T-t$ ist.

$$P(t,T) = u(r(t), T-t)$$

Wie schon früher können wir nun die Ito-Formel 1.3 anwenden und erhalten:

$$dP(t,T) = \frac{\partial u}{\partial r}(r(t),T-t)\cdot\sigma r(t)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r(t),T-t)d\sigma^2 r(t)^2 dt \tag{4.20}$$

Vergleichen wir unser Ergebnis mit der schon im Abschnitt "Risikoneutraler Ansatz" hergeleiteten Bondpreisformel bzw mit (3.10), so erkennen wir:

$$\sigma^p(t,T) = -\frac{\partial u}{\partial r}(r(t),T-t)\sigma r(t)$$

Wir können nun auf das Ergebnis aus 3.2.3 "Die Voatilität des Yields bei langen Laufzeiten" zurückgreifen. Das zeigt, dass die Longrate im Dothan Modell ein nicht fallender Prozess ist, falls $\delta(s)$ wohldefiniert ist.

Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit
Um dieses Ergebnis zu erhalten greifen wir auf den Abschnitt 3.2.4 "Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit" zurück. Da das Dothan Modell ein Faktormodell ist können wir annehmen, dass der Bondpreis eine Funktion dieser Variablen ist, so auch der Yield und auch die Longrate. Daher ist die Longrate eine nicht fallende, nicht von den Zustandsvariablen abhängige- also deterministische Funktion der Zeit.

4.5 Das Langetieg Modell (1980)

$$dX(t) = (K \cdot X(t) + K_0)dt + \Sigma \cdot dW(t)$$
$$r(t) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i(t) \tag{4.21}$$

Resultat 4.5.1. *Die Longrate im Langetieg Modell ist eine endliche Konstante. Wie diese Konstante ausschaut hängt von den Eigenwerten von Σ ab.*

Wir erkennen sogleich, dass für $n = 1$ das Vasicek Modell vorliegt und es sich somit wieder um ein affines Modell handelt.

Wieder hilft uns der in "Die Longrate in den Affinen Modellen von Duffie und Kan" 3.2.7 beschriebene Ansatz. Da die Diffusionskoeffizientenmatrix Σ eine Konstante ist, ist X(t) multivariat normalverteilt. α_1 beträgt 1, die restlichen α und β sind jeweils 0. So kommen wir zu dem Ergebnis, dass für den Fall, dass die Eigenwerte der Matrix K negative Realteile besitzen, die Longrate Konstant ist! (Siehe 3.43)

4.6 Das Courtadon Modell (1982)

$$dr(t) = k[\Theta - r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t) \tag{4.22}$$

Resultat 4.6.1. *Es handelt sich hierbei um ein nicht affines Modell welches als Grundlage den Ornstein-Uhlenbeck Prozess verwendet*
Die Longrate im Courtadon Modell ist eine endliche, nicht fallende deterministische Funktion der Zeit.

Definition 4.6.1 (Ornstein-Uhlenbeck Prozess)**.** Seien $a, \mu \in \mathrm{R}$ und $\theta, \sigma > 0$ Konstanten. Ein stochastischer Prozess $(X_t), t \geq 0$ heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Anfangswert a, Gleichgewichtsniveau μ und Diffusion σ, wenn er das folgende stochastische Anfangswertproblem löst:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \qquad X_0 = a,$$

wobei (W_t) ein Standard-Wiener-Prozess ist.

Die Longrate ist endlich
Wie beim Dothan Modell handelt es sich hier um eine Geometrische Brownsche Bewegung, mit :

$$\alpha_1(t) = k\Theta$$
$$\alpha_2(t) = k$$

Daher erhalten wir für den Erwartungswert:

$$E[r(T)] \leq r(t) + \frac{k\Theta}{k} < \infty \tag{4.23}$$

Daher ist auch die Longrate, falls sie existiert, endlich:

$$0 \leq l(t) \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-t}\left(\int_t^T E_t[r(s)]ds\right)$$

Die Longrate ist wachsend
Hier hilft uns das Ergebnis aus "Die Voatilität des Yields bei langen Laufzeiten" 3.2.3. Die Longrate im Courtadon Modell ist ein nicht fallender Prozess, falls $\delta(s)$ wohldefiniert ist.

Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit
Auch hier können wir, da das Courtadon Modell ein Faktormodell ist, wieder auf "Die Longrate ist eine deterministische Funktion der Zeit" (3.2.4) zurückgreifen. Die Longrate ist daher eine nicht fallende, nicht von den Zustandsvariablen abhängige- also deterministische Funktion der Zeit.

4.7 Das Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders Modell (1992)

$$dr(t) = k[\Theta - r(t)]dt + \sigma[r(t)]^{\gamma}dW(t) \tag{4.24}$$

Resultat 4.7.1. *Es handelt sich hierbei um ein nicht affines Modell, jedoch aber wieder um ein Faktormodell, analog dem Courtadon Modell.*
Die Longrate ist, für positives k, eine endliche, nicht fallende deterministische Funktion der Zeit.

Bemerkung. Für $\gamma = 1$ erhält man das Courtadon Modell , für $\gamma = 0$ das Vasicek Modell.

4.8 Das Cox-Ingersoll-Ross Modell (1985)

$$dr(t) = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.25}$$

Im Vasicek Modell kann r negativ werden, Cox, Ingersoll und Ross haben ein alternatives Modell vorgeschlagen, in dem Zinssätze stets nichtnegativ sind.

Resultat 4.8.1. *Es handelt sich hierbei um ein affines Modell mit Mean Reversion (Siehe 3.1.2). Es ist ähnlich dem Vasicek Modell, hier jedoch ist die Standardabweichung der Änderung des Zinssatzes proportional zu $\sqrt{r}$. Es verwendet einen Wurzel-Diffusionsprozess.*

Die Longrate beträgt $\frac{2ab}{a+\sqrt{2\sigma^2+a^2}}$ [1]

Definition 4.8.1 (Wurzel-Diffusionsprozess)**.** Seien reelle Parameter $\kappa \geq 0$, $\theta > 0$, σ und eine Brownsche Bewegung (W_t), $t \geq 0$ gegeben. Ein stochastischer Prozess (X_t), $\quad t \geq 0$ heißt Wurzel-Diffusionsprozess mit jenen Parametern, wenn er die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

löst. Zumeist wird mit $X_0 = x$ eine Anfangsbedingung festgelegt, sodass aus obiger Differentialgleichung ein stochastisches Anfangswertproblem wird.

Bemerkung. Um die Notation zu erleichtern führen wir an dieser Stelle $A_0(x) = e^{A(T-t)}$ ein.

Dadurch verändert sich unsere Zinsstrukturgleichung zu

$$P(t,T) = A_0(T-t)e^{-B(T-t)r} \quad \text{oder} \quad P(t,T) = e^{A(T-t)-B(T-t)r} \tag{4.26}$$

1.Schritt

$$\begin{aligned} \mu(t): &\qquad \alpha(t) = -a, \quad \beta(t) = ab \\ \sigma(t): &\qquad \delta(t) = 0, \quad \gamma(T) = \sigma^2 \end{aligned}$$

2.Schritt

$$B_t(t,T) - aB(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T) = -1$$
$$A_t(t,T) = abB(t,T)$$

[1] In [Yao99a] wurde versehentlich die 2 bei $\sqrt{2\sigma^2+a^2}$ vergessen.

Löst man diese Riccati Gleichung, leicht mit Mathematica zu verifizieren, ergibt sich für B(t,T) und A(t,T):

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}$$

$$A_0(\tau) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(\frac{\tau}{2})}}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

mit

$$\gamma = \sqrt{a^2+2\sigma^2}$$

3.Schritt

$$P(t,T) = A_0(T-t)e^{-B(T-t)r} \quad \text{oder} \quad P(t,T) = e^{A(T-t)-B(T-t)r}$$

$$y(\tau) = \frac{-\log\left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(\frac{\tau}{2})}}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} + \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}}{\tau}$$

Nun bilden wir den Limes für $\tau \to \infty$ bzw. $T \to \infty$. Wir unterteilen dieses Unterfangen in zwei Schritte:

1. Schritt

$$\lim_{\tau\to\infty} B(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{\tau(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} =$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{2e^{\gamma\tau}(1-\overbrace{\frac{1}{e^{\gamma\tau}}}^{\to 0})}{\tau e^{\gamma\tau}\left[(\gamma+a)(1-\underbrace{\frac{1}{e^{\gamma\tau}}}_{\to 0})+\underbrace{\frac{2\gamma}{\tau e^{\gamma\tau}}}_{\to 0}\right]} = 0$$

2. Schritt

$$\lim_{\tau\to\infty} A(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{-\log A_0}{\tau} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{-2ab}{\sigma^2\tau} \log\left\{ \frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(\frac{\tau}{2})}}{(\gamma+a)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} \right\}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{-2ab}{\sigma^2\tau} \log\left\{ \frac{2\gamma e^{(a-\gamma)(\frac{\tau}{2})}}{(\gamma+a)(1-\underbrace{\frac{1}{e^{\gamma\tau}}}_{\to 0})+\underbrace{\frac{2\gamma}{e^{\gamma\tau}}}_{\to 0}} \right\}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \left\{ \frac{-2ab}{\sigma^2\tau}(a-\gamma)\left(\frac{\tau}{2}\right) + \underbrace{\frac{-2ab}{\sigma^2\tau}\frac{\log\left\{\frac{2\gamma}{\gamma+a}\right\}}{(\gamma+a)}}_{\to 0} \right\}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \frac{-2ab(a-\gamma)\frac{\tau}{2}}{\sigma^2\tau} = \frac{-ab(a-\gamma)}{\sigma^2} \cdot \frac{(a+\gamma)}{(a+\gamma)}$$

$$= \frac{2ab}{a+\sqrt{2\sigma^2+a^2}}$$

So erhalten wir die Longrate des CIR Modells:

$$l(t) = \lim_{\tau\to\infty} y(t,T) = \frac{-\log A_0(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} = \frac{2ab}{a+\sqrt{2\sigma^2+a^2}} \tag{4.27}$$

4.9 Das Ho-Lee Modell (1986)

$$dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW(t) \tag{4.28}$$

Resultat 4.9.1. *Das Ho-Lee Modell ist ein affines Modell, die Longrate beträgt* $+\infty$.

Wir verwenden den affinen Ansatz

1.Schritt

$$\mu(t): \qquad \alpha(t)=0, \quad \beta(t)=\Theta(t)$$
$$\sigma(t): \qquad \delta(t)=\sigma^2, \quad \gamma(T)=0$$

2.Schritt

$$B_t(t,T) = -1$$
$$A_t(t,T) = \Theta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,T)$$

Daraus ergibt sich für B(t,T) und $\tau = T-t$

$$B(t,T) = -\int_t^T 1ds = -(T-t) = -\tau$$

$$A_t(t,T) = -\Theta\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau^2$$
$$A(t,T) = \int_t^T \theta(s)(s-T)ds + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\tau^3}{3}$$

4.10 Das Longstaff-Schwartz bzw. Chen-Scott Modell (1992)

$$\begin{aligned} dX(t) &= [a-bX(t)]dt + c\sqrt{X(t)}dW_1(t) \\ dY(t) &= [d-eY(t)]dt + f\sqrt{Y(t)}dW_2(t) \\ r(t) &= \gamma_1 X(t) + \gamma_2 Y(t) \end{aligned} \tag{4.29}$$

Resultat 4.10.1. *Hier sehen wir ein affines 2-Faktor Modell mit Mean Reversion (Siehe 3.1.2). Die Longrate ist, für positives b und e, eine endliche Konstante.*

Um das Resultat zu begründen greifen wir wieder auf den Abschnitt 3.2.7 zurück. Setzen wir in die Gleichung 3.38 ein erhalten wir:

$$K_0 = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_0 = 0$$

$$X(t) \longmapsto \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}\right]}_{(X(t)+K_0)\cdot K} dt$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{X(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y(t)} \end{pmatrix}}_{\sqrt{V(X(t))}} \underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}}_{\Sigma} d\begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}$$

$$P(t,T) = \exp\{A(\tau) + B_1(\tau)X(t) + B_2(\tau)Y(t)\} = F^T(t, X(t), Y(t))$$

Bemerkung. Da das Modell die Mean Reversion Eigenschaft besitzt und so die Matrix K, wie wir sehen Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt, ist die Longrate im Longstaff-Schwartz Modell eine Konstante.

4.11 Das Chen Modell (1996)

$$\begin{aligned} dr(t) &= k[\theta(t) - r(t)]dt + \sqrt{r(t)}dW_1(t) \\ d\theta(t) &= v[\bar{\theta} - r(t)]dt + \xi\sqrt{\theta}dW_2(t) \\ dV(t) &= \mu[\bar{\sigma} - V(t)]dt + \eta\sqrt{V(t)}dW_3(t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Resultat 4.11.1. *Dies ist ein affines 3-Faktor Modell mit der Mean Reversion Eigenschaft (Siehe 3.1.2)*
Die Longrate im Chen Modell[2] *ist eine endliche Konstante, falls k, v und μ positiv sind.*

Wieder können wir uns auf den Abschnitt 3.2.7 berufen. Setzen wir in die Gleichung 3.38 ein, erhalten wir:

$$K_0 = \begin{pmatrix} k\theta(t) \\ v\bar{\theta} \\ \mu\bar{\sigma} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1$$

$$X(t) \longmapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ V(t) \end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} k\theta(t) \\ v\bar{\theta} \\ \mu\bar{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ V(t) \end{pmatrix} \right]}_{(K_0 + K \cdot X(t))} dt$$
$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{r(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\theta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{V(t)} \end{pmatrix}}_{\sqrt{V(X(t))}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}}_{\Sigma} d\begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ W_3(t) \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

[2] Im Gegensatz zu der ursprünglichen Arbeit [Che96] verwendet [Yao99a] $V(t)$ in $dt(t)$, was höschstwahrscheinlich auf einen Übertragungsfehler zurückzuführen ist.

Bemerkung. Da dieses Modell wieder die Eigenschaft der Mean Reversion hat, wissen wir, die Eigenwerte der Matrix K haben alle negative Realteile und die Lösung $B(\tau)$ ist beschränkt. Somit ist $\delta(s) = 0$ und die Longrate für positive k, v, μ konstant. (Siehe Vasicek Modell 2)

Literaturverzeichnis

[Car99] CARRIERE, JACQUES F.: *Long Term Yield Rates for Actuarial Valuations*. North American Actuarial Journal, 3(3), 1999.

[Che96] CHEN, LIN: *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing and Risk Management*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 435, 1996.

[DD95] DEELSTRA, GRISELDA und FREDDY DELBAEN: *Long-term returns in stochastic interest rate models*. Insurance: Mathematics and Economics, 17(2):163–169, 1995.

[Dee95] DEELSTRA, GRISELDA: *Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Applications*. In: *5th AFIR International Colloquium*, Seiten 709–730, Brussels, September 1995.

[Dee00] DEELSTRA, GRISELDA: *Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models: Applications*. ASTIN Bulletin, 30(1):123–140, 2000.

[DIR96] DYBVIG, PHILIP H, JR INGERSOLL, JONATHAN E und STEPHEN A ROSS: *Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall*. Journal of Business, 69(1):1–25, 1996.

[DM96] DYBVIG, PHILIP H. und WILLIAM J. MARSHALL: *Pricing Long Bonds: Pitfalls and Opportunities*. Financial Analysts Journal, 52(1):32–39, 1996.

[EKFG98] EL KAROUI, N., A. FRACHOT und H. GEMAN: *A note on the behaviour of long zero coupon rates in no arbitrage framework*. Review of Derivatives Research, 1(4), 1998. Volume 1 number 1–3 is 1996!

[GS08] GOLDAMMER, VERENA und UWE SCHMOCK: *Generalization of the Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem*. Technischer Bericht, April 2008.

[HKT02] HUBALEK, FRIEDRICH, IRENE KLEIN und JOSEF TEICHMANN: *A general proof of the Dybvig-Ingersoll-Ross theorem: long forward rates can never fall*. Mathematical Finance, 12(4):447–451, 2002.

[JJJD08] JORDAN, B.D., S.D. JORDAN, J.C.SMOLIRA und D.H.TRAVIS: *Do Long Interest Rates Ever Fall?* in Advances in Financial Planning and Forecasting, forthcoming, 2008. Working paper from Jan 2005.

[T04] T, BJÖRK: *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Second Edition Auflage, 2004.

[Yao99a] YAO, YONG: *Term structure modeling and asymptotic long rate*. Insurance: Mathematics and Economics, 25:327–336, 1999.

[Yao99b] YAO, YONG: *Term structure models: a perspective from the long rate*. North American Actuarial Journal, 3:122–137, 1999. With a discussion by Michael Sherris.