



D I P L O M A R B E I T

Swing Optionen auf den Elektrizitätsmärkten

Ausgeführt am
Institut für Statistik und Decision Support Systems
der Universität Wien unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dr.Georg Ch. Pflug

durch

Nikola Broussev

Wien 1010, Führichgasse 10/609

Datum

Unterschrift(Student)

An dieser Stelle würde ich mich gerne bei Allen bedanken, welche mich in der Zeit der Entstehung der Arbeit unterstützt haben. Als erstes bei meinen Eltern und meiner Schwester, die mir immer zur Seite stehen und mir auf jeglicher Art und Weise geholfen haben. Ich danke besonders Professor Georg Pflug für die Betreuung, seine Motivation und die vielen interessanten Ideen, welche zu dieser Diplomarbeit geführt haben. Weiters möchte ich mich gerne bei meinen Kollegen, vor allem bei Clemens Wiesinger, für die unzähligen interessanten Gespräche bedanken, die zu einem besseren Verständnis der behandelten Themen geführt haben. Herzlichen Dank auch an Serafine Simenowskyj für die Korrektur bezüglich Grammatik und Rechtschreibung.

На това място бих искал да благодаря на всички, които по време на създаването на тази работа, ме подкрепяха. На първо място изказвам благодарност към семейството ми, което винаги е до мен и ми помага по всеки възможен начин. Изключително много благодаря на проф. Георг Пфлуг за мотивацията и за многото интересни идеи довели до крайния вид на тази дипломна работа. Бих искал още да благодаря на моите колеги, преди всичко на Клеменс Виисингер, за безбройните интересни разговори, които допринесоха за по-доброто изясняване на засегнатите теми. Отправям сърдечни благодарности и към Серафине Сименовски за корекциите на моя не до там безупречен немски.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Bewertung von Swing Optionen auf den Elektrizitätsmärkten. Nach einer Einführung in die Energiemärkte und Stromderivate wird die Problematik der Bewertung von Swing Kontrakten bei einem Vergleich mit Derivaten auf dem Aktienmarkt diskutiert. Die wichtigsten Unterschiede zwischen den Derivaten auf dem Strommarkt und auf dem Aktienmarkt werden näher beleuchtet und die daraus folgenden Probleme bei der Anwendung bekannter Ansätze aus der Finanzmathematik systematisiert. Zusätzlich werden die Eigenschaften der Menge der zulässigen Ausübungsmuster näher besprochen und die Konvexität dieser Menge unter gewissen Voraussetzungen bewiesen. Weiters wird gezeigt, welche Rolle bei der Bewertung eines Stromderivats ein Verhaltensmodell für den Optionsinhaber spielt, wobei drei einfache spieltheoretische Verhaltensmodelle präsentiert werden. Danach wird eine Übersicht von bekannten Modellen aus der Literatur für die Bewertung von Derivaten auf dem Strommarkt gegeben. Im letzten Kapitel wird ein mehrstufig-stochastisch spieltheoretisches Verhaltensmodell präsentiert und in Matlab realisiert. Verschiedene numerische Ergebnisse werden vorgestellt und mit anderen Ansätzen verglichen. In mehreren Anhängen werden zum Schluss verschiedene Resultate, aus den mathematischen Gebieten, die relevant sind, vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Die Energiewirtschaft	1
1.2	Der Strommarkt und dessen Liberalisierung	1
1.3	Die Börsen	2
1.4	Der Preis und die Produkte	4
1.5	Stromderivate	7
1.6	Die Swing Option	7
1.7	Zusammenfassung	8
2	Problematik der Bewertung der Swing Option	9
2.1	Faktoren	9
2.1.1	Der Spotmarkt	9
2.1.2	Spotpreismodelle	11
2.1.3	Optionsinhaber Verhalten	11
2.2	Problematik/Strommarkt vs. Aktienmarkt	12
2.3	Die Swing Option - Formalisierung	13
2.4	Die Menge der zulässigen Ausübungsmuster	16
2.4.1	Die lokalen Schranken	18
2.4.2	Die globalen Schranken	18
2.4.3	Die Anzahl erlaubte Swings	19
2.4.4	Die Sperrzeit	19
2.4.5	Das Ergebnis	20
2.5	Eine deterministische Ausübungsstrategie	20
2.6	Spieltheoretische Überlegungen	22
2.6.1	Ein Nullsummenspiel	22
2.6.2	Stochastische Spotpreise	27
2.6.3	Ein mehrstufiges Entscheidungsmodell	30
2.6.4	Zusammenfassung	33
2.7	Spezialfälle und allgemeine Preiseigenschaften	35
2.8	Zusammenfassung	36
3	Übersicht über bekannte Modelle	37
3.1	Das Nutzenmodell	37
3.1.1	Beschreibung	37
3.1.2	Verallgemeinerung	38
3.1.3	Annahmen und Probleme	38
3.2	Erweiterung des gewöhnlichen Optionpricing Modell	39
3.2.1	Beschreibung	39
3.2.2	Diffusion Prozess mit stochastischer Volatilität	39
3.2.3	Sprung Diffusion Prozess	40
3.2.4	Annahmen und Probleme	40
3.3	Forward Kurve Vorgang	41
3.3.1	Beschreibung	41

3.3.2	Annahmen und Probleme	42
3.4	Zusammenfassung	42
4	Ein Optionsinhaber-Verhaltensmodell	43
4.1	Das Modell und das zugehörige Lineares Programm	43
4.2	Analysis der Abhängigkeiten des Lineares Programm von den Restriktionen	46
4.3	Die Implementation des Modelles in Matlab	48
4.3.1	Die Datenstrukturen	48
4.3.2	Die Funktionen	51
4.3.3	Die Lösung	51
4.3.4	Die Lösung bei voller Information	52
4.4	Die Bewertung des Kontraktes	54
4.5	Zusammenfassung	56
A	Spieltheoretische Grundlagen	58
A.1	Einführung	58
A.2	Matrix Spiele	61
A.3	Der Minimax Satz	64
B	Information und Preis	66
C	Das Black-Scholes-Modell	67
C.1	Brownsche Bewegung	67
C.2	Stochastische Differenzialgleichungen und das Lemma von Ito	68
C.3	Optionsbewertung	69
D	Matlab Quellcode	71

Abbildungsverzeichnis

1	Entwicklung des Primärenergieverbrauchs weltweit nach BP (einzelne Energieträger ohne Biomasse) und Prognose der IEA (2005 bis 2030); Quelle: [1]	1
2	Entwicklung der nominalen Preise für Energieträger (Jahresmittelwerte) seit dem Jahr 1940; Quelle: [1]	2
3	Die verschiedenen Teilnehmer in einem liberalisierten Strommarkt	3
4	Die verschiedenen Märkte in einem liberalisierten Strommarkt	4
5	Gleichgewichtspreisbestimmung	5
6	Untertägiges Lastprofil	6
7	Hilfswerte für das repräsentative VDEW-Lastprofil H0 für einen normierten Jahresverbrauch von 1 MWh/a; Quelle: [2]	6
8	Typischer Ablauf vom Spotpreis (EEX, 15.06.2003-15.08.2003)	10
9	Ablaufpfad einer Swing Option	15
10	Beispiel für einen Spotpreisszenariobaum	30
11	Auszahlungen auf einem Spotpreisszenariobaum	31
12	Kosten auf einem Spotpreisszenariobaum	32
13	Die Bewertung eines Produktes	34
14	Ein Beispiel für Spotpreisszenariobaum für die LP-Form	46
15	Ein Beispielszenariobaum	48
16	Der Beispielszenariobaum mit Knotenwerte	50
17	Die Ausübungspfade als Baum	52
18	Die Werte der Ausübungspfade (Die punktierte Linie stellt die lokalen Schranken dar)	53
19	Maximalen erwarteten Profite als Funktion des Strikepreises	54
20	Die Wirkung der Flexibilität	55
21	Die Werte der Ausübungspfade bei voller Information abhängig vom Spotpreisszenario (Die punktierte Linie stellt die lokalen Schranken dar)	56

Tabellenverzeichnis

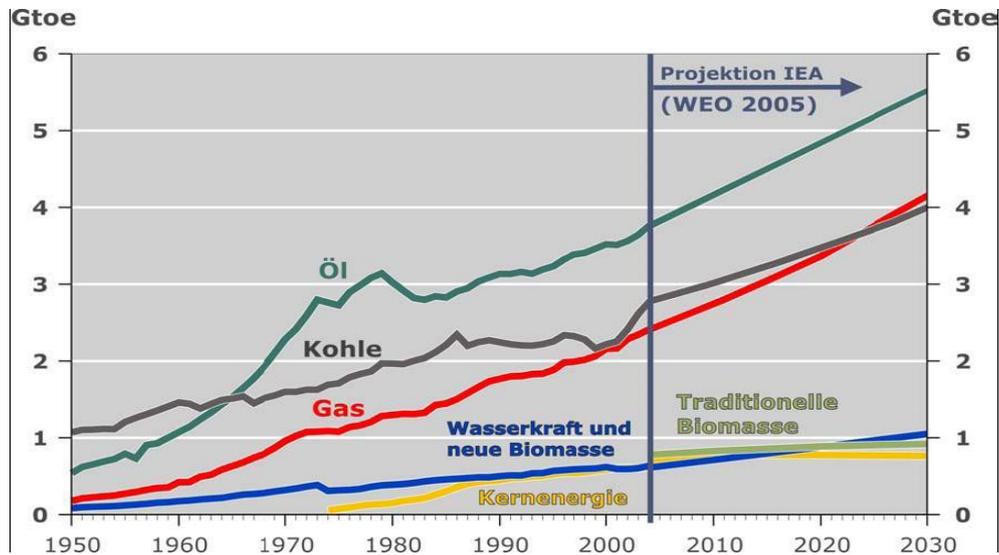
1	3×3 Nullsummenspiel	23
2	Mögliche Auszahlungen des Inhabers abhängig von seiner Ausübung und vom eingetretenen Spotpreisszenario	27
3	Mögliche Kosten des Emittenten abhängig von seinem Hedging, der Ausübung und dem Spotpreis	27
4	Reduzierte Kosten-Matrix	28
5	Vergleich der spieltheoretischen Modelle	34

Listings

1	Die Generierung aller wichtigen abgeleiteten Strukturen	71
---	---	----

2	Die Lösung des Optimierungsproblems	72
3	Konvertierung zu Vorgängerstruktur	75
4	Konvertierung zu Nachfolgerstruktur	76
5	Die Newton Iteration	76
6	Teilbaum Extrahieren	77
7	Die Abhängigkeit von den lokalen und globalen Schranken	78
8	Der erwartete Profit	79
9	Die volle Information	80

Abbildung 1: Entwicklung des Primärenergieverbrauchs weltweit nach BP (einzelne Energieträger ohne Biomasse) und Prognose der IEA (2005 bis 2030); Quelle: [1]



1 Einführung

1.1 Die Energiewirtschaft

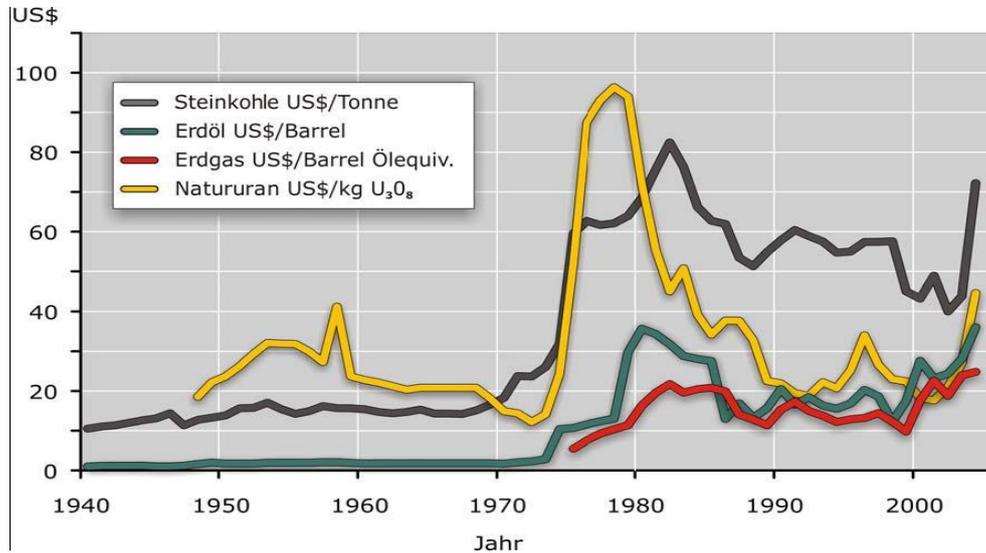
Der Energiesektor ist ein sehr wichtiger und strategischer Teil der Wirtschaft. Die Energie ist der Motor der modernen Industrie.

Mit dem steigenden Energieverbrauch und dem erwarteten Ölfördermaximum wird die Bedeutung der Energiewirtschaft noch größer. In den Abbildungen 1 und 2 kann man die Entwicklung vom Energieträgerverbrauch und Energieträgerpreisen sehen. Die Steigerung der Nachfrage ist bei Öl und Erdgas klar zu erkennen, während die Steigung bei Kohle weniger stark ausgeprägt ist. Für weitere Informationen über die Energierohstoffe sei auf [1] hingewiesen. Die elektrische Energie stellt im Moment nur etwa 13% des Primärenergieverbrauchs dar, wird aber immer wichtiger, da die meisten erneuerbaren Energiequellen Strom erzeugen. Deshalb ist es unumstritten, dass die Elektrizitätsmärkte zukünftig an Bedeutung gewinnen werden.

1.2 Der Strommarkt und dessen Liberalisierung

Der liberalisierte Elektrizitätsmarkt beschreibt den Markt der leitungsgebundenen Energieversorgung mit Strom, bei dem möglichst viele Teile der Lieferkette dem freien Wettbewerb unterliegen. Über den Wettbewerb sollen die Verbraucher zu den günstigsten Konditionen marktgerecht versorgt werden. Die Versorgungsnetze können nicht vollständig dem Wettbewerb ausgesetzt werden. Hier befindet sich der jeweilige Netzbetreiber in einer Monopolstellung. Damit der Netzbetreiber diese Monopolstellung nicht zu seinen Gunsten ausnutzt, werden die Entgelte für die Nutzung der Netze durch den Staat

Abbildung 2: Entwicklung der nominalen Preise für Energieträger (Jahresmittelwerte) seit dem Jahr 1940; Quelle: [1]



reguliert. Die Preise für die eigentliche Stromlieferung unterliegen dem Wettbewerb. Die prinzipielle Darstellung eines liberalisierten Strommarktes ist in Abbildung 3 zu sehen. Mehr über die Liberalisierung der Strommärkte kann man in [18] oder [15] nachlesen. Für die Regelungen die vom Gesetzgeber kommen, sei auf [3] verwiesen.

1.3 Die Börsen

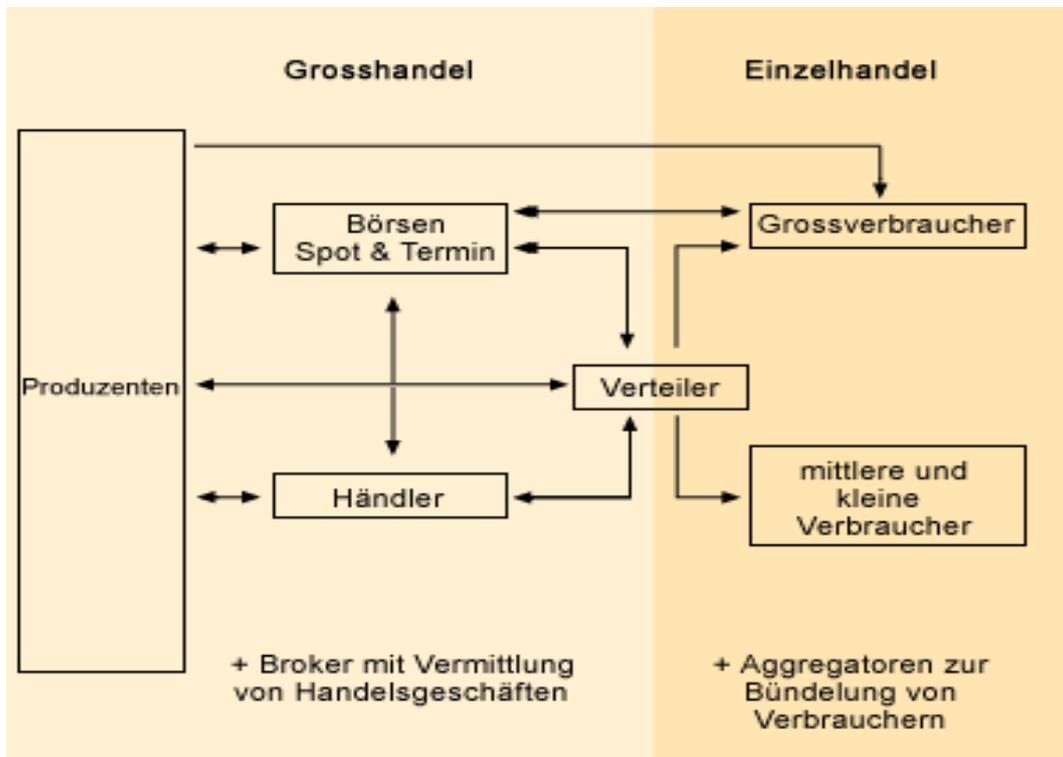
In einem liberalisierten Elektrizitätsmarkt spielen die Börsen eine wesentliche Rolle, da dort unter anderem der Preis des Stromes als Gleichgewichtspreis bestimmt wird. Man kann prinzipiell wie bei den anderen Börsen Spothandel und Terminhandel unterscheiden. Im Spotmarkt werden die kurzfristigen Geschäfte (Käufe und Verkäufe von Strom für den nächsten Tag) und im Terminmarkt die längerfristigen Geschäfte getätigt (Käufe und Verkäufe von Strom und Stromderivaten für die nächsten Wochen, Monate, Quartale oder Jahre).

Im Spot- wie auch im Terminhandel existiert ein börslicher und ein außerbörslicher (over-the-counter, **OTC**) Markt. An den Börsen werden normalerweise Produkte mit einem hohen Grad an Standardisierung gehandelt zum Unterschied von den außerbörslichen Märkten, wo auch individuell gestaltete Produkte gehandelt werden. Produkte mit so genanntem **Physical Settlement** beziehen sich zu einer Stromlieferung zum Unterschied von Produkten mit so genanntem **Cash Settlement** die zu keiner Stromlieferung führen, sondern nur zu einem Barausgleich unter den Vertragspartnern. Siehe dazu Abbildung 4.

Die bekanntesten Strombörsen in Europa sind:

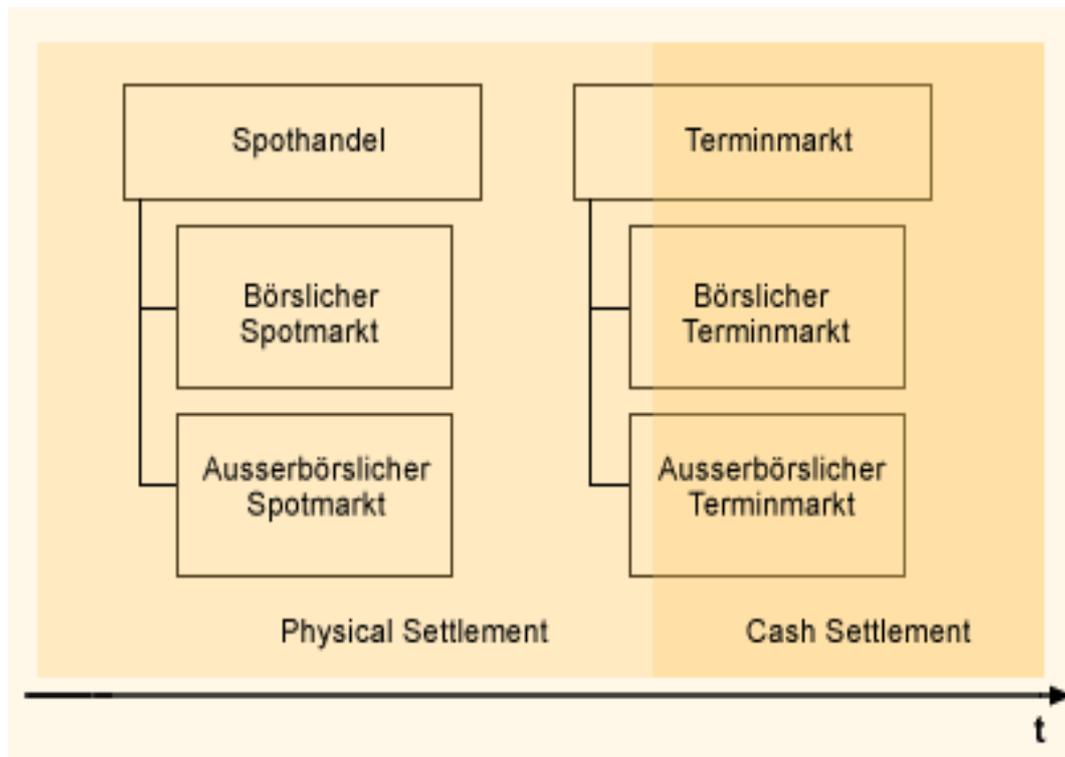
- Nord Pool, Nordic Power Exchange (<http://www.nordpool.no/>)

Abbildung 3: Die verschiedenen Teilnehmer in einem liberalisierten Strommarkt



- Amsterdam Power Exchange (<http://www.apxgroup.com/>)
- European Energy Exchange, Deutschland (<http://www.eex.de/>)
- Energy Exchange Austria, Österreich (<http://www.exaa.at>)
- PolPX, Polen (<http://www.polpx.pl/>)
- GME bzw IPEX, Italien
- Opcom, Rumänien (<http://www.opcom.ro/>)
- OTE, Tschechien (<http://www.ote-cr.cz/>)
- Borzen, Slowenien (<http://www.borzen.si/>)
- REN, Portugal (<http://www.ren.pt/>)
- Powernext, Frankreich (<http://www.powernext.fr/>)
- Omel, Spanien (<http://www.omel.es/>)

Abbildung 4: Die verschiedenen Märkte in einem liberalisierten Strommarkt



1.4 Der Preis und die Produkte

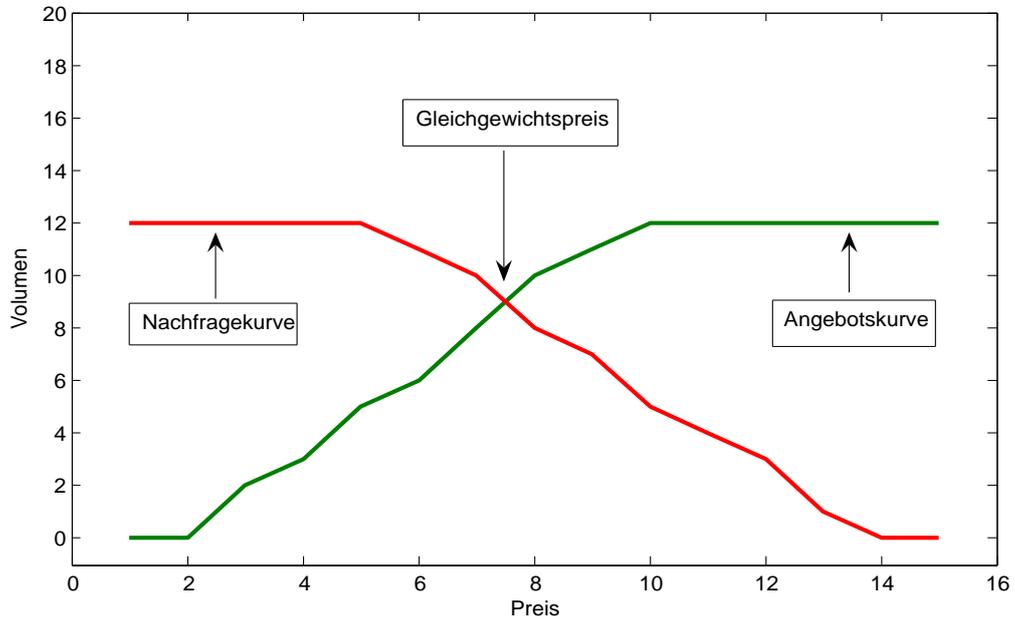
Der Preis am Spotmarkt wird prinzipiell als Gleichgewichtspreis des Angebots und der Nachfrage bestimmt. Am Tag vor dem Tag der Lieferung bis zu einer bestimmten Uhrzeit werden alle Kauf- und Verkaufswünsche (engl. bids) mit Preis und Volumen angegeben. Danach wird der Preis, bei dem das größte Volumen verkauft und gekauft werden kann, bestimmt und als Preis für die genannte Uhrzeit fixiert. (siehe Abb. 5)

An der Börse werden verschiedene Produkte gehandelt. Da das Verbraucherverhalten stark von der Tageszeit abhängt (**Lastprofil**), sind die Stunden des Tages in 2 Gruppen aufgeteilt, die man mit **Baseload** und **Peakload** bezeichnet. Eine Baseload-Lieferung ist eine konstante Lieferung über den ganzen Tag (0-24 Uhr). Eine Peakload-Lieferung ist eine Lieferung für die Zeit 08:00-20:00. Nachfrage, die man mit Hilfe dieser zwei Arten von Verträgen nicht decken kann, deckt man mit Einzelstundenverträgen. Ein Beispiel für ein Lastprofil mit einem möglichen short Hedging¹ ist in Abbildung 6 dargestellt.

Seit ungefähr zwei Jahren gibt es ein neues Produkt namens **GH0**, das besonders an den Haushalten (ca. 1/3 der Gesamtnachfrage) angepasst ist. Die Lieferung passt sich sowohl an den Schwankungen während des Tages als auch an den wochen- und jahreszeitspezifischen Änderungen der Nachfrage an. Das Profil ist in der Abbildung 7

¹Unter Hedging versteht man im Allgemeinen die Absicherung gegen die verbundene mit Änderungen (bei Preis, Nachfrage, Angebot oder andere Größen) Risiken mittels ein Finanzgeschäft.

Abbildung 5: Gleichgewichtspreisbestimmung



dargestellt und die genaue Beschreibung des Produktes kann man in [2] finden.

Abbildung 6: Untertägiges Lastprofil

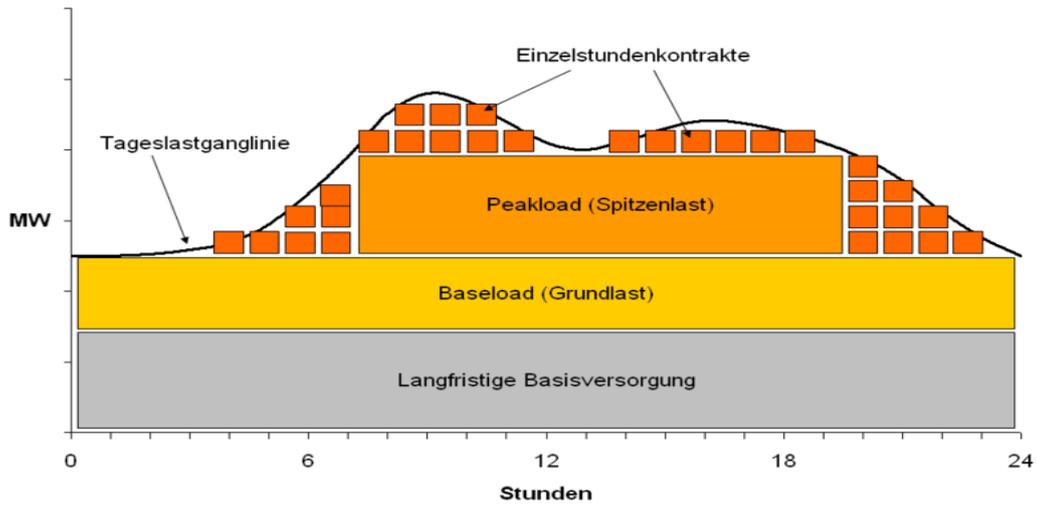
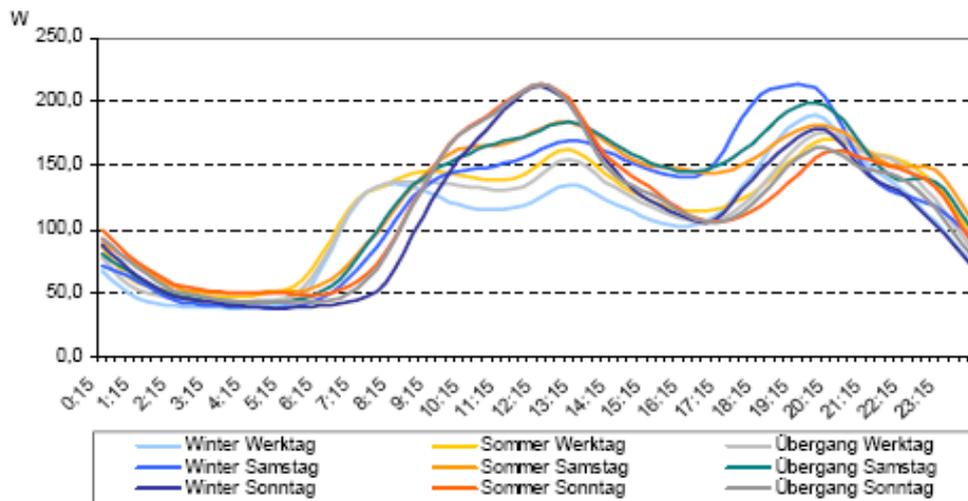


Abbildung 7: Hilfwerte für das repräsentative VDEW-Lastprofil H0 für einen normierten Jahresverbrauch von 1 MWh/a; Quelle: [2]



1.5 Stromderivate

Wie auf einer Aktienbörse gibt es auch auf dem Elektrizitätsmarkt Derivate. Die Stromderivate sind im Allgemeinen bedingte oder unbedingte Geschäfte, deren Preise unmittelbar oder mittelbar vom Strompreis abhängig sind. Wie auch bei klassischen Finanzderivaten werden die Stromderivate im Rahmen des Risikomanagements zur Absicherung von physischen Positionen benutzt (Hedging). Man kann sie aber auch zur Arbitrage und auch zur Erzielung eines Handelsgewinnes (Spekulation) einsetzen.

An den Strombörsen werden meist folgende Derivate gehandelt:

Termingeschäfte Futures von Lieferblöcken von Wochen bis Monate, die entweder physisch (Lieferung oder Abnahme von Strom) oder finanziell (durch Zahlung der Differenz) seien können.

Optionen Als Underlying kommen Futures, Produktionskapazitäten und Spotelektrizität in Frage. Die klassischen Plain Vanilla Optionen - Verkaufsoption (Put) oder Kaufsoption (Call) auf Produktionskapazitäten bedeuten bei dem Verkauf einer Kaufsoption die Pflicht auf Anfrage der Gegenseite Produktionskapazitäten zu verkaufen und der Käufer einer Verkaufsoption stellt sicher die Tragfähigkeit einer Projektfinanzierung.

An dem OTC-Markt existieren üblich noch zusätzlich folgende Derivate:

Swaps Eine Vereinbarung über den Austausch von zukünftigen Zahlungsströmen gemäß einer heute vereinbarten Formel.

Caps Eine Vereinbarung über die Entrichtung von zukünftigen Zahlungsströmen gegen Zahlung einer Prämie bei einer heute vereinbarten Überschreitung einer Preisobergrenze.

Floors Eine Vereinbarung über die Entrichtung von zukünftigen Zahlungsströmen gegen Zahlung einer Prämie bei einer heute vereinbarten Unterschreitung einer Preisuntergrenze.

Collars Eine Vereinbarung über die Entrichtung von zukünftigen Zahlungsströmen gegen Zahlung einer Prämie bei einer heute vereinbarten Überschreitung einer Preisobergrenze und einer Preisuntergrenze.

Für eine allgemeine Einführung in die Finanz Derivate sei auf [16] verwiesen.

1.6 Die Swing Option

Eine Swing Option ist im Allgemeinen ein variabler Liefervertrag über Strom mit fixiertem Preis pro Einheit. Der Inhaber einer solchen Option darf zu gewisse Zeiten Strom beziehen, wobei die Menge, die er bezieht nach oben oder unten (**Up-Swing** oder **Down-Swing**) variieren darf. Es gibt jedoch Bedingungen, die sowohl die gesamte bezogene Menge als auch die Variation des Volumens in den einzelnen Momenten beschränken. Swing Optionen werden in der Literatur mit verschiedenen Zusatzbeschränkungen beschrieben, was auch teilweise verschiedene Bewertungsansätze erfordert. Ich

werde trotzdem die Swing Option auf eine einheitliche Weise definieren, um mögliche Missverständnisse bei der Analyse zu vermeiden. Obwohl die Swing Option ursprünglich von den Gasmärkten und andere Rohstoffmärkten kommt, muss man bei dem Elektrizitätsmarkt wegen der Stromeigenschaften, nur die wenig mit Rohstoffeigenschaften zu tun haben, einen anderen Ansatz wählen.

1.7 Zusammenfassung

In diesem ersten Kapitel habe ich in einer kurzen Einführung mehrere Themen angesprochen. Die wichtigsten davon sind, was Energiewirtschaft ist, welche Rolle der Strommarkt dabei spielt, welche Rolle die Strombörse hat sowie es was für verschiedene Produkte und Derivate über Strom gibt. Nachdem man jetzt einen Überblick über diese Fragestellungen hat, gehen wir konkreter vor, und versuchen die wichtigsten Merkmale des Stromes und die Spotpreisbörse zu erkennen sowie deren Bedeutung für die Bewertung eines Stromderivates.

2 Problematik der Bewertung der Swing Option

Wie erfolgt die Bewertung eines Derivats? Im Wesentlichen gibt es zwei Alternativen, entweder wird der Preis des Derivats als Gleichgewichtspreis des Marktes bestimmt oder mit finanzmathematischen Methoden aufgrund der Preise anderer Produkte auf dem Markt ermittelt. Für die Basiswerte wäre ein Bewertungsansatz, der auch als fundamentale Analyse bezeichnet wird und versucht die wichtigsten preisbestimmenden Faktoren zu erkennen und deren quantitativen Einfluss auf den Preis zu analysieren. Wir wählen die zweite Vorgehensweise für die Bewertung eines Derivats, wobei es zu bemerken ist, dass dieser Ansatz normalerweise viele Annahmen trifft, um die Struktur des Marktes so weit zu vereinfachen, dass sie mit mathematischen Methoden in Griff zu bekommen ist. Diese Annahmen sind genauer zu besprechen, da von deren Plausibilität die Richtigkeit unseres Modelles sowie die dadurch erfolgte Bewertung folgt.

2.1 Faktoren

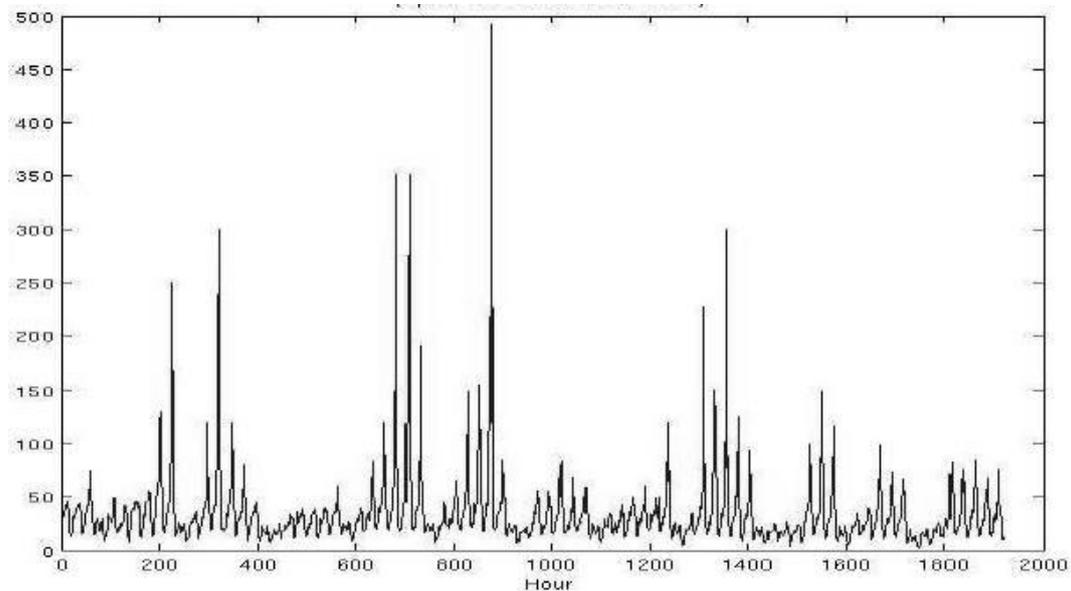
Wie bei einem Aktienmarkt spielt die Kenntnis des Preisverhaltens des Basiswertes eine wesentliche Rolle bei der Bewertung von Derivaten. Ein anderer wichtiger Teil der Bewertung eines Finanzinstrumentes ist das Verhalten des Optionsinhabers, was zum Unterschied von den klassischen Optionen über Aktien nicht eindeutig rational definierbar ist. Deshalb gehen wir konkreter vor und probieren diese preisbestimmende Faktoren zu erkennen und zu systematisieren. Dabei werden wir wiederholt einen Vergleich mit den Aktienmärkten durchführen, um die wichtigsten Unterschiede genauer zu erkennen.

2.1.1 Der Spotmarkt

Wie oben schon erwähnt, wird der Spotpreis der Elektrizität als Gleichgewichtspreis der Angebots- und Nachfragekurve bestimmt. Deshalb spielt die Kenntnis der Eigenschaften des Stromes, der Nachfrage und des Angebots eine sehr große Rolle bei der Modellierung der Strompreise. Einen ersten Blick auf die Preisentwicklung verrät gleich die hohe Volatilität dieser Preise. Für den Spotpreis sind typisch die Spikes als auch die Neigung der Preise schnell in der Ausgangsposition zurückzukehren. Ein Beispiel für **Spotpreisentwicklung** kann man in Abbildung 8 sehen. Es ist auch leicht, eine stündliche, wöchentliche sowie jährliche Wiederholung gewisser Muster zu erkennen. Jetzt fassen wir ein paar Eigenschaften des Stromes, der Stromversorgung und der Stromerzeugung, die die meisten Phänomene der Spotpreisdynamik erklären, zusammen.

Nichtspeicherbarkeit Da man Strom im Allgemeinen nicht wirtschaftlich rentabel speichern kann, führen Änderungen in der Nachfrage sowie im Angebot zu großen Verschiebungen des Gleichgewichtspreises, die sich bei den Spotpreisen als Volatilität bzw. Spikes ausdrücken. Strom wird oft durch Pumpkraftwerke als potenzielle Energie des Wassers gespeichert. Obwohl dieser Prozess mit großen Energieverlusten verbunden ist, ist es immer noch rentabel, da die Preise des Stromes so große Unterschiede aufweisen. Durch Aufpumpen in der Nacht, das um so viel billigeren Strom benötigt, kann man Strom zu Spitzenzeiten produzieren.

Abbildung 8: Typischer Ablauf vom Spotpreis (EEX, 15.06.2003-15.08.2003)



Nichtvollständigkeit Der Strommarkt ist nicht vollständig, da man nicht alle Derivate vollständig hedgen kann. Der Hauptgrund dafür ist die Nicht-speicherbarkeit des Stromes die kein Hedging mit dem Underlying Strom erlaubt.

Transportverluste Das Transportieren von Strom ist auf große Distanzen nicht kosteneffizient. Damit man weniger Verluste bei der Transportierung hat, erhöht man die Spannung, was ab einer gewissen Distanz/Spannung nicht mehr rentabel ist. Noch dazu kommt es, dass das Versorgungsnetz nicht überall so ausgebaut ist, dass Stromtransporte überall gleich kosteneffizient sind. Das alles führt dazu, dass gewisse Strommärkte und Spotpreiskurven getrennt und unabhängig voneinander betrachten werden sollen.

Nachfrageinelastizität Ein Großteil der Konsumenten auf dem Energiemarkt weist eine sehr unelastische Nachfrage gegenüber Preisschwankungen auf. Dadurch sind die Preise zu einem sehr hohen Grad von den Grenzkosten der Erzeuger und vom Eigenbedarf seiner Konsumenten, der fast preisunabhängig ist, bestimmt.

Nachfrageperiodizität Aus der bekannten Tatsache, dass der größte Teil der elektrischen Energie in einem Haushalt für Kühlung oder Heizung verbraucht wird, folgt, dass der Bedarf stark temperaturabhängig ist. Das lässt sich auch leicht empirisch nachweisen, da die meisten Spotpreiskurven Spikes bei Hitze- oder Kältewellen aufweisen. Auch leicht nachweisbar ist die Jahreszeitabhängigkeit der Preise, die auch durch die wetterabhängige Komponente der Nachfrage zu begründen ist. Die anderen Periodizitäten, die auch zu beobachten sind, kann man mit dem Wochen-, Monats- oder Jahresrhythmus der Wirtschaft erklären.

Angebotsensibilität Da es sich um Gleichgewichtspreise handelt, sind sie nicht nur gegenüber Nachfrage sensibel sondern auch gegenüber Angebot. Das zeigen auch die Spikes, die man bei Kraftwerksausfällen betrachten kann.

2.1.2 Spotpreismodelle

Nachdem wir die wichtigsten spotpreisbestimmenden Faktoren besprochen haben, mache ich einen kurzen Ausblick auf die in der Literatur bekannten Modelle für die Spotpreise.

Bei der Spotpreismodellierung sind die wichtigsten Eigenschaften des Strompreisprozesses zu berücksichtigen. Aus der Analyse der Strommarktdaten ist die Periodizität sowie die Abhängigkeit vom Wetter bekannt. Es ist sowohl ein Rückkehr des Kurses zum langfristigen Mittelwert zu betrachten als auch Sprünge, die fast immer auf eine Störung des Gleichgewichtes der Nachfrage und des Angebotes zurückzuführen sind.

Seit der Einführung der CO_2 Zertifikate, als eine Maßnahme für die Reduzierung der schädlichen Abstoßgase, die den Treibhauseffekt verstärken, ist eine Berücksichtigung der Preisdynamik dieser Emissionszertifikate bei der Spotpreismodellierung unverzichtbar.

In den meisten Modellen wird der Spotpreis in zwei Komponenten zerlegt: eine deterministische und eine stochastische. Die deterministische Komponente modelliert die langfristigen Trends und die Periodizität. Als stochastische Komponente werden AR, GARCH, ARFIMA, etc. Prozesse gewählt. Für die Modellierung der Sprünge sind Sprungdiffusionsprozesse eine oft gewählte Alternative. Da die Letzten nicht so schnell nach einem Sprung zum langfristigen Mittelwert zurückkehren, nimmt man auch Regime-Switching-Modelle, die wegen der rationalen Ursachen für einen Sprung ein näherliegender Ansatz sind. Technisch sind aber die Regime-Switching-Modelle schwer mit der Periodizität zu kombinieren. Eine allgemeine Einführung in den Methoden der Zeitreihenanalyse findet man bei [11],[30] oder [29].

Ein alternativer Ansatz ist die Modellierung der Spotpreise als Gleichgewichtspreise der Nachfrage und Angebot und die Letzten fundamental ökonomisch zu modellieren.

Einen konkreteren Überblick über die existierenden Spotpreismodelle bekommt man in [27]. Zu den fundamentalen Preismodellen sei auf [14] hingewiesen.

2.1.3 Optionsinhaber Verhalten

Jetzt, nachdem wir eine Vorstellung von dem Spotmarkt haben, betrachten wir das Ganze von der Seite eines Optionsinhabers. Wie schon kurz erwähnt wurde, ist zum Unterschied von einer klassischen Option auf dem Aktienmarkt die rationale Ausübung einer Swing Option über Elektrizität nicht eindeutig zur Ausübungszeit zu bestimmen. Zum Vergleich wäre der Wert eines europäischen Put oder Calls zum Ausübungszeitpunkt eindeutig feststellbar nur aufgrund der Kenntnis des zu diesem Moment herrschenden Marktpreises des Basiswertes, da es klar wäre ob der Inhaber ausüben wird oder nicht. Der Unterschied bei einer Swing Option ist noch größer da es sich erstens um eine nicht diskrete sondern stetige Ausübungsmenge handelt und zweitens es sich nicht nur um eine Entscheidung sondern um mehrere Entscheidungen zu den verschiedenen Zeithorizonten handelt. Deshalb ist das Erstellen eines vernünftigen Modells für das Verhalten

des Optionsinhabers ein wichtiger Teil der Bewertung einer Swing Option.

Im Prinzip kann man zwei extreme Arten von Verhalten des Inhabers betrachten. Einerseits könnte der Inhaber ein typischer Konsument sein, der nur für Eigenverbrauchsdeckung seine Optionsrechte ausübt. Andererseits könnte man davon ausgehen, dass der Inhaber dieser Option sich als Händler verhält und durch Arbitrage oder Spekulation seinen Gewinn als Händler maximieren will. Die Modelle für die Bewertung einer Option auf dem Aktienmarkt berühren auf einen Inhaber des zweiten Typus, was aber erstens nicht sicher ist und zweitens das Bestimmen einer optimalen Ausübungsstrategie selbst für den Inhaber der Option nicht deterministisch und eindeutig ist.

2.2 Problematik/Strommarkt vs. Aktienmarkt

Wenn man die Methoden für Bewertung von klassischen Optionen auf den Aktienmarkt genauer studiert und sie analysiert stellt man fest, dass sie auf keinen Fall ohne weiteres auf Stromderivate anwendbar sind. Dabei werden bei Aktienmärkten Annahmen getroffen, die nicht ganz der Realität entsprechen, dennoch aber im ausreichenden Maß sich an der Realität des Aktienhandels nähert. Deshalb finde ich es für zweckmäßig hier sich genau diese Annahmen über den Aktienmarkt anzusehen und deren Realitätsnahe für einen Strommarkt zu überlegen.

Transaktionskosten: Bei der Modellierung wird vorausgesetzt, dass es keine Transaktionskosten auf dem Aktienmarkt gibt. Diese Annahme, wenn man sie getrennt von den Transportkosten betrachtet, stimmt im ungefähr gleichen Maß auch für den Strommarkt.

Marktliquidität: Man geht aus der Handelsmöglichkeit mit dem Underlying zu jedem Zeitpunkt und aus der Liquidität des Marktes. Zum Unterschied von oben ist diese Annahme weniger für den Elektrizitätsmarkt gültig, da er weniger aktiv, regulierter und dezentralisiert ist.

Marktvollständigkeit: Bei einem Aktienmarkt geht man aus der Annahme, dass jedes Auszahlungsprofil durch die schon auf dem Markt vorhandene Produkte replizierbar ist. So ein Markt wird vollständig genannt und auf so einem Markt wird durch hedgen mit dem Underlying die risikoneutrale Bewertung durchgeführt. Auf dem Strommarkt herrscht eine äußerst stark ausgeprägte **Nichtvollständigkeit**, die dazu führt, dass man im Allgemeinen das Risiko nicht vollständig weghedgen kann.

Hedgen mit dem Underlying: Wie gerade eben gesagt ist für die Bewertung klassischer Optionen unumgänglich nötig, dass man mit dem Underlying hedgt. Aus der Nichtspeicherbarkeit der elektrischen Energie ergibt sich keine Möglichkeit dafür. Eine Alternative dafür wäre der Futuremarkt, der aber im Strommarkt weniger mit dem Spotmarkt korreliert.

No Arbitrage Prinzip: Eine der wichtigsten Annahmen, die die Struktur des Marktes vereinfacht und zur Existenz eines **risikoneutralen Maßes** äquivalent ist, ist die Annahme, dass es für niemanden möglich ist einen positiven erwarteten Gewinn

zu sichern, ohne die Existenz einer positiven Wahrscheinlichkeit auch negativen Gewinn zu erzielen. Wenn man sich die klassischen Modelle von Black and Scholes genauer ansieht, sieht man, dass das die wesentliche Annahme ist, die überhaupt eine bedeutende Vereinfachung des Marktes für die mathematische Handhabung bringt. Um überhaupt über so eine Arbitrage Möglichkeit in zwei verschiedenen Zeitpunkten zu reden stoßen wir wieder auf das Problem mit der Nichtspeicherbarkeit. Arbitrage im gleichen Moment aber auf verschiedene Börsen ist auch nicht sehr realistisch wegen der Transportkosten.

Bezüglich der Prinzipien der risikoneutralen Bewertung kann man in [19], [26], [32] oder [28] nachlesen oder im Anhang C eine schematische Ableitung der Black and Scholes Optionsbewertungsformel sehen. Eine praxisorientierte Einführung mit Implementierungsmodellen findet man bei [12].

Zu den oben genannten Punkten kann man noch die folgenden prinzipiellen Unterschiede zwischen dem Aktienmarkt und dem Strommarkt hinzufügen:

Marktreife: Der Aktienmarkt ist seit mehreren Jahrzehnten erforscht und bekannt. Zum Unterschied vom Strommarkt verfügen wir über Preisdaten für sehr lange Zeitperioden.

Wirkung von makroökonomische Zyklen: Auf dem Elektrizitätsmarkt ist diese Wirkung weniger stark zu beobachten.

Diese Überlegungen und Vergleiche mit dem Aktienmarkt zeigen, dass die klassischen Bewertungsansätze kaum in einer nicht geänderten Form für den Strommarkt anwendbar sind. Eine Einführung in der Problematik der Bewertung von Energie Derivaten kann man in [25] finden.

2.3 Die Swing Option - Formalisierung

Nachdem wir die Bewertungsproblematik besser kennen, stelle ich eine formalisierte mathematische Definition einer Swing Option vor. Da es bei den Swing Optionen um einen Vertrag niedrigen Standardisierungsgrades handelt, der in sehr verschiedenen Formen existiert, definiere ich ihn in einer möglichst allgemeinen Form. Trotzdem, um gewisse Schwierigkeiten umzugehen, werde ich manchmal von konkreteren Formen ausgehen. Bei der Formulierung werde ich hier eine Vorgangsweise ähnlich zu [17] wählen.

Wir haben also einen Vertrag, der sich auf den Zeitraum $[T_1, T_2]$ bezieht. Es gibt vordefinierte Zeiten $\tau_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}, T_1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n \leq T_2$ zu denen ein fixes Volumen von Elektrizität d_0 bezogen werden darf aber auch ein Swing gemacht werden darf. Von allen diesen n Swinggelegenheiten darf der Inhaber maximal von N Gebrauch machen ($N \leq n$). Hier ist die Frage interessant, ob es sich nicht im Fall $N \neq n$ nur um eine Beschränkung rein technischer Natur handelt, die die Bewertung noch mehr verkompliziert ohne die Absicht, die Handlungsmöglichkeiten des Optionsinhabers wegen des Wertes der Option zu beschränken.

Es kann zusätzlich eine Regelung geben, die es nicht erlaubt, nach einem Swing für eine gewisse Zeitspanne $\Delta\tau$ keinen weiteren durchzuführen. Diese Sperrzeit hat klarerweise nur dann einen Sinn wenn $\Delta\tau \geq \min_{1 \leq j \leq n-1} (\tau_{j+1} - \tau_j)$.

Aufgrund der Gültigkeitsdauer der Swing kann man zwei Arten von Swing Optionen betrachten:

- Mit lokalem Effekt: Der Swing passt nur die momentane Menge an und beim nächsten Mal geht die Menge wieder auf dem Nominalniveau.
- Mit globalem Effekt: Der Swing passt die momentane Menge an und beim nächsten Mal bleibt die Menge auf dem neuen Niveau.

Für unsere weiteren Betrachtungen habe mich auf die erste Art konzentriert.

Die bezogene Menge darf sich nach oben oder nach unten von der vordefinierten Menge unterscheiden, jedoch wird diese Differenz durch die so genannten lokalen Schranken beschränkt. Das heißt konkreter, wenn wir den im Moment τ_i bezogenen Strom mit d_i bezeichnen, dass $d_i - d_0 \in [l_i^1, l_i^2] \cup (l_i^3, l_i^4]$ gelten muss ($l_i^1 \leq l_i^2 \leq 0 \leq l_i^3 \leq l_i^4$). Hier wird wegen der Allgemeinheit $l_i^2 = l_i^3 = 0$ nicht angenommen, was aber bei sinnvollen Verträgen in der Praxis fast immer der Fall ist. Es stellt sich auch die Frage, ob in der Praxis auch nicht immer $l_i^1 = l_j^1$ und $l_i^4 = l_j^4$ auch für $i \neq j$ gilt, ob es also wirklich die lokalen Schranken vom Zeitpunkt abhängig sind.

Zusätzlich gibt es normalerweise Schranken für die gesamte Menge, die man im Zeitintervall $[T_1, T_2]$ beziehen darf. Oft darf man diese Bedingung verletzen allerdings muss man dafür die so genannten Penalties (Strafen) zahlen. Da gibt es wieder verschiedene Varianten: sie können unabhängig von der überschrittenen Menge sein oder eine Funktion von ihr oder auch von einer Zufallsvariable (Spot Preis zum Zeitpunkt T_2 , maximale oder mittlere Spot Preis auf $[T_1, T_2]$) abhängen. Wir werden diese Penalty-Funktion mit $\varphi(D)$ bezeichnen, wobei $D = \sum_{i=1}^n d_i$ die gesamt bezogene Menge für den Intervall $[T_1, T_2]$ ist. Beispiele für solche Funktionen wären:

$$\varphi(D) = \begin{cases} C_1 & \text{wenn } D < Min \\ 0 & \text{wenn } Min \leq D \leq Max \\ P_{T_2}(D - Max) & \text{wenn } D > Max \end{cases}$$

Oder wenn die Schranken für D nicht überschritten werden dürfen könnte man die Bedingung auch als Penaltyfunktion definieren:

$$\varphi(D) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } D < Min \\ 0 & \text{wenn } Min \leq D \leq Max \\ \infty & \text{wenn } D > Max \end{cases}$$

Für die bequemere Handhabung definieren wir für $1 \leq j \leq n$ noch zwei Entscheidungsindikatoren sowie zwei Volumenfunktionen.

$$\chi_j^+ = \begin{cases} 1 & \text{Falls zum Zeitpunkt } \tau_j \text{ ein Up-Swing stattfindet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\chi_j^- = \begin{cases} 1 & \text{Falls zum Zeitpunkt } \tau_j \text{ ein Down-Swing stattfindet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_j^+ = \begin{cases} d_j - d_0 & \text{wenn } \chi_j^+ = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_j^- = \begin{cases} d_j - d_0 & \text{wenn } \chi_j^- = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt können wir die Swing Option mathematisch vollständig formulieren.

(i) Man kann zum Zeitpunkt τ_j nur entweder mehr, weniger oder gleichviel beziehen:

$$0 \leq \chi_j^+ + \chi_j^- \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n$$

(ii) Man darf sie nicht wieder ausüben bevor $\Delta\tau$ Zeit vergangen ist:

$$(\chi_i^+ + \chi_i^-) + (\chi_j^+ + \chi_j^-) \leq 1 + \frac{\tau_j}{\tau_i + \Delta\tau} \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n$$

(iii) Man darf nicht öfters als N mal ausüben:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (\chi_j^+ + \chi_j^-) \leq N$$

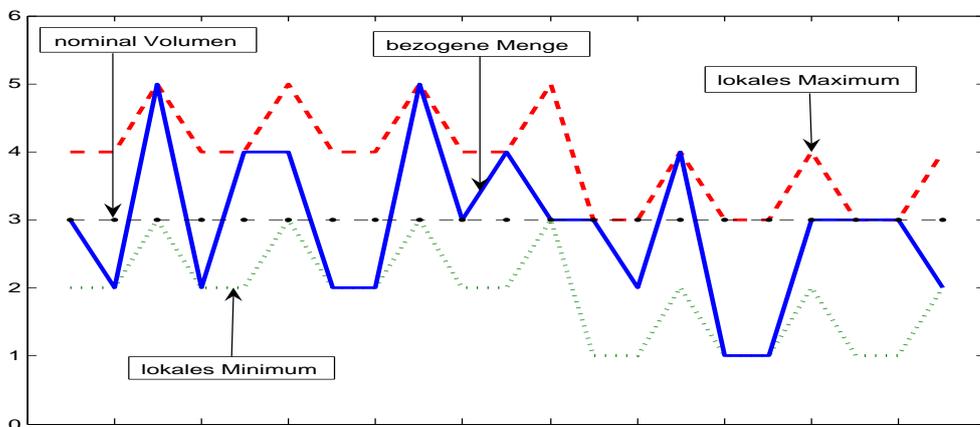
(iv) Man muss die Mengenschranken berücksichtigen:

$$l_j^3 \chi_j^+ \leq d_j^+ \leq l_j^4 \chi_j^+ \text{ für alle } 1 \leq j \leq n$$

$$l_j^1 \chi_j^- \leq d_j^- \leq l_j^2 \chi_j^- \text{ für alle } 1 \leq j \leq n$$

Um eine optische Vorstellung zu bekommen kann man Abbildung 9 betrachten.

Abbildung 9: Ablaufpfad einer Swing Option



2.4 Die Menge der zulässigen Ausübungsmuster

Wie wir gerade gesehen haben, hat die Menge der zulässigen Ausübungsmuster eine komplizierte Struktur. Zum Unterschied von den Ausübungsmöglichkeiten bei den klassischen Optionen auf dem Aktienmarkt, die meistens nur zwei sind (ausüben oder nicht), haben wir hier mit einer unendlichen Anzahl von Ausübungspfaden zu tun. Jetzt betrachten wir diese Menge und probieren wir wichtige Eigenschaften für die Bewertung einer Swing Option zu erkennen.

Bezeichnen wir die Menge der zulässigen Ausübungsmuster mit

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(d_0, n, L^{min}, L^{max}, Min, Max, N, \Delta i) \subseteq \mathbb{R}^n$$

wobei

d_0 : der nominale Wert

n : die Anzahl der Ausübungsgelegenheiten

$L^{min} := \{l_1^1, l_2^1 \dots l_n^1\}$: die Menge der lokalen Schranken nach unten

$L^{max} := \{l_1^4, l_2^4 \dots l_n^4\}$: die Menge der lokalen Schranken nach oben

Min : globale Schranke nach unten

Max : globale Schranke nach oben

N : die maximale Anzahl von Swings

Δi : Sperrzeit in ganzen Intervalllängen

Definieren wir eine Swingzahlfunktion für einen Ausübungspfad $d = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n) \in \mathbb{R}^n$ auf dieser Menge:

$$N(d) := \max\{|I| : \prod_{i \in I} (d_i - d_0) \neq 0, I \subseteq \{1, 2 \dots n\}\}$$

sowie eine Sperrzeitfunktion

$$\Delta(d) := \min\{|\tau_i - \tau_j| : (d_i - d_0)(d_j - d_0) \neq 0, i \neq j\}$$

Jetzt können wir formal schreiben

$$d \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} l_i^1 \leq d_i - d_0 \leq l_i^4 \ \forall i : 1 \leq i \leq n \\ Min \leq \sum_{i=1}^n d_i \leq Max \\ N(d) \leq N \\ \Delta i \leq \Delta(d) \end{cases}$$

Gegenüber der allgemeinen Definition von vorne haben wir hier die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen:

- $l_i^2 = l_i^3 = 0 \ \forall i : 1 \leq i \leq n$

- Es gibt keine echte Penalty-Funktion sondern nur eine Beschränkung der gesamtbezogenen Menge
- Die Sperzeit wird nicht als echte Zeit sondern als Anzahl von Ausübungsgelegenheiten aufgefasst

Jetzt können wir die Menge der zulässigen Ausübungspfade als Teilmenge des Vektorraumes \mathbb{R}^n auffassen und deren Verhalten bezüglich konvexe Kombinationen betrachten. Zuerst seien zwei Ausübungsmuster d und d' im selben Raum gegeben.

$$\begin{aligned} d, d' &\in \mathcal{D}(d_0, n, L^{min}, L^{max}, Min, Max, N, \Delta i) \\ d &= (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n) \\ d' &= (d'_1 \ d'_2 \ \dots \ d'_n) \end{aligned}$$

Bilden wir ein neues Ausübungsmuster als konvexe Kombination der beiden

$$\begin{aligned} d'' &= \alpha d + \beta d' \\ d'' &= (d''_1 \ d''_2 \ \dots \ d''_n) = (\alpha d_1 + \beta d'_1 \ \alpha d_2 + \beta d'_2 \ \dots \ \alpha d_n + \beta d'_n) \end{aligned}$$

wobei

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha + \beta = 1$
- $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ (Man kann diese Annahme weglassen, wenn man auch Short Positionen erlaubt)

Um unsere Untersuchungen zu vereinfachen können wir das konstante Ausübungsmuster

$$d^0 = (d_0 \ d_0 \ \dots \ d_0) \in \mathcal{D}(d_0, n, L^{min}, L^{max}, Min, Max, N, \Delta i)$$

und den folgenden Nebenraum betrachten. (siehe zB. [9])

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &:= -d^0 + \mathcal{D}(d_0, n, L^{min}, L^{max}, Min, Max, N, \Delta i) \\ &= \mathcal{D}(0, n, L^{min}, L^{max}, Min - nd_0, Max - nd_0, N, \Delta i) \end{aligned}$$

Die Abgeschlossenheit bezüglich konvexe Kombinationen in den Räumen \mathcal{D} und \mathcal{D}_0 ist äquivalent.

$$\begin{aligned} (d, d' \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha d + \beta d' \in \mathcal{D}) &\Leftrightarrow \\ (d - d^0, d' - d^0 \in -d^0 + \mathcal{D} \Rightarrow \alpha(d - d^0) + \beta(d' - d^0) = \alpha d + \beta d' - d^0 \in -d^0 + \mathcal{D}) \end{aligned}$$

Das heißt wir können hier mit dem folgenden Raum arbeiten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0, n, L^{min}, L^{max}, Min - nd_0, Max - nd_0, N, \Delta i) &:= \\ \mathcal{D}(0, n, L^{min}, L^{max}, Min_0, Max_0, N, \Delta i). \end{aligned}$$

Hier wurde $Min_0 := Min - nd_0$ und $Max_0 := Max - nd_0$ gesetzt. Die oben eingeführte Swingzahl- und Sperrzeit- Funktionen vereinfachen sich entsprechend auch zu

$$\begin{aligned} N(d) &:= \max\{|I| : \prod_{i \in I} d_i \neq 0, I \subseteq \{1, 2 \dots n\}\} \\ \Delta(d) &:= \min\{|\tau_i - \tau_j| : d_i d_j \neq 0, i \neq j\}. \end{aligned}$$

2.4.1 Die lokalen Schranken

Jetzt betrachten wir, wie sich die konvexe Kombination bezüglich der lokalen Schranken verhält. Für $L^{min}(i)$ haben wir:

$$\begin{aligned} d_i'' - L^{min}(i) &= \alpha d_i + \beta d_i' - L^{min}(i) = \\ &= \alpha d_i + \beta d_i' - (\alpha + \beta)L^{min}(i) = \\ &= \alpha(d_i - L^{min}(i)) + \beta(d_i' - L^{min}(i)) \geq 0 \end{aligned}$$

und analog für $L^{max}(i)$

$$\begin{aligned} d_i'' - L^{max}(i) &= \alpha d_i + \beta d_i' - L^{max}(i) = \\ &= \alpha d_i + \beta d_i' - (\alpha + \beta)L^{max}(i) = \\ &= \alpha(d_i - L^{max}(i)) + \beta(d_i' - L^{max}(i)) \leq 0 \end{aligned}$$

da $d_i - L^{min}(i) \geq 0$, $d_i' - L^{min}(i) \geq 0$, $d_i - L^{max}(i) \leq 0$, $d_i' - L^{max}(i) \leq 0$ und $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$. Also die konvexe Kombination erfüllt die Bedingung durch die lokalen Schranken.

2.4.2 Die globalen Schranken

Analog betrachten wir jetzt ob die konvexe Kombination die globalen Schranken erfüllt. Ähnlich wie oben nur aufsummiert haben wir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i'' - Min_0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d_i') - Min_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d_i') - (\alpha + \beta)Min_0 = \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n d_i - Min_0 \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n d_i' - Min_0 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i'' - Max_0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d_i') - Max_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d_i') - (\alpha + \beta)Max_0 = \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n d_i - Max_0 \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n d_i' - Max_0 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{i=1}^n d_i'' \in [Min_0, Max_0].$$

Dadurch haben wir gezeigt, dass auch die globalen Schranken durch die Bildung von konvexen Kombinationen nicht verletzt werden.

2.4.3 Die Anzahl erlaubte Swings

Wie gesagt es gibt oft auch eine Beschränkung N für die Gesamtzahl erlaubte Swings. Um das Verhalten zu analysieren, betrachten wir wieder eine konvexe Kombination

$$d'' = (d''_1 \ d''_2 \ \dots \ d''_n) = (\alpha d_1 + \beta d'_1 \ \alpha d_2 + \beta d'_2 \ \dots \ \alpha d_n + \beta d'_n).$$

Man sieht leicht, dass aus $d_i = 0 \neq d'_i$ und $d'_j = 0 \neq d_j$ folgt $\alpha d_i + \beta d'_i \neq 0$ und $\alpha d_j + \beta d'_j \neq 0$ sobald $\alpha\beta \neq 0$. Mit der Swingzahlfunktion ausgedrückt heißt dass in diesem Fall folgendes gelten kann

$$N(d'') = N(\alpha d + \beta d') > \max(N(d), N(d')).$$

Bei gewissen Umständen (zB. $\alpha = \beta = 0.5$ und $d_i = -d'_i$) könnte auch das Umgekehrte gelten

$$N(d'') = N(\alpha d + \beta d') < \min(N(d), N(d')).$$

Also was wir im Allgemeinen hier haben ist eine Ungleichung

$$\min(N(d), N(d')) \neq N(d'') = N(\alpha d + \beta d') \neq \max(N(d), N(d')).$$

Eine interessante Ungleichung die man leicht zeigen kann ist die folgende

$$N(\alpha d + \beta d') \leq \min(N(d) + N(d'), n)$$

oder bei $\alpha\beta > 0$ sogar auch

$$|N(d) - N(d')| \leq N(\alpha d + \beta d') \leq \min(N(d) + N(d'), n).$$

Was man jedenfalls sagen kann ist, dass die Beschränkung für die Anzahl der Swings von einer konvexen Kombination verletzt wird.

Für die Funktion $N^*(d, d') = N(d - d') = N(d' - d) = N^*(d', d)$ sieht man folgende Eigenschaften ziemlich einfach.

- $N^*(d, d') = 0 \Leftrightarrow N(d - d') = 0 \Leftrightarrow d - d' = 0 \Leftrightarrow d = d'$
- $N^*(d, d'') \leq N^*(d, d') + N^*(d', d'')$

Also ist N^* eine Metrik (so genannte Hamming-Distanz) auf diesem Vektorraum der möglichen Ausübungen.

2.4.4 Die Sperrzeit

Ähnlich wie bei der Anzahl den erlaubten Swings wird sich herausstellen, dass die Sperrzeit Beschränkung verletzt wird. Konkreter die Sperrzeitbedingung ist $\Delta(d) \geq \Delta i$ und was zu prüfen ist ob auch

$$\begin{aligned} \Delta(d'') &= \Delta(\alpha d + \beta d') := \min\{|i - j| : d''_i d''_j \neq 0, i \neq j\} = \\ &= \min\{|i - j| : (\alpha d_i + \beta d'_i)(\alpha d_j + \beta d'_j) \neq 0, i \neq j\} \end{aligned}$$

diese Bedingung erfüllt. Analog wie oben ist hier auch klar dass, es möglich ist

$$\Delta(d'') = \Delta(\alpha d + \beta d') < \min\{\Delta(d'), \Delta(d'')\}$$

was obwohl $\Delta(d) \geq \Delta i$ und $\Delta(d') \geq \Delta i$ gilt zu $\Delta(d'') < \Delta i$ führen kann.

2.4.5 Das Ergebnis

Insgesamt haben wir Folgendes gezeigt:

Abgeschlossenheit 2.4.1. *Die Menge der zulässige Ausübungsmuster einer Swing Option als Teilmenge eines Vektorraumes aufgefasst ist konvex falls $N = n$ und $\Delta i = 1$.*

Nähere interessante Definitionen und Behauptungen, wo der Konvexität eine wichtige Rolle spielt, kann man in [13] finden.

Die Konvexität ist eine brauchbare Eigenschaft die man bei der Lösung verschiedener Aufgabenstellungen wie Optimierung, Pfadgenerierung oder Existenzaussagen über Extrema benutzen kann.(siehe zB. [7])

2.5 Eine deterministische Ausübungsstrategie

Betrachten wir eine Swing Option mit Restriktionen, die eine konvexe Menge definieren also (Bezeichnungen von oben)

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(d_0, n, L^{min}, L^{max}, Min_0, Max_0, N = n, \Delta i = 1)$$

und einen Ausübungspfad auf dieser Menge

$$d := (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n) \in \mathcal{D}.$$

Sei K der Fixpreis pro Einheit im Kontrakt und sei auf \mathcal{D} eine Penalty Funktion definiert

$$\varphi(d) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right).$$

Angenommen der Inhaber der Option hat die volle Spotpreisinformation von Anfang an. Bezeichnen wir diesen Spotpreisvektor mit

$$\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_n).$$

Dann könnten wir einfach folgende Gewinnfunktion definieren

$$\mathbb{W}(d, \pi) := d\pi - K \sum_{i=1}^n d_i - \varphi(d) = \sum_{i=1}^n \pi_i d_i - K \sum_{i=1}^n d_i - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right).$$

Um die Formulierungen kurz zu halten definieren wir auch einen Differenzpreisvektor

$$\pi^0 := (\pi_1 - K \ \pi_2 - K \ \dots \ \pi_n - K) := (\pi_1^0 \ \pi_2^0 \ \dots \ \pi_n^0).$$

Jetzt wird die Gewinnfunktion zu

$$\mathbb{W}(d, \pi) = \sum_{i=1}^n d_i(\pi_i - K) - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right) = \sum_{i=1}^n d_i \pi_i^0 - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right).$$

Wir können ein bestes Ausübungsmuster als das Ausübungsmuster d^* für das folgendes gilt definieren

$$\mathbb{W}(d^*, \pi^0) \geq \mathbb{W}(d, \pi^0) \quad \forall d \in \mathcal{D}.$$

Bei einer Penalty Funktion, welche konvex in $\sum_{i=1}^n d_i$ ist, bekommen wir eine konkave Gewinnfunktion da

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(\alpha d + \beta d', \pi^0) &= (\alpha d + \beta d')\pi^0 - \varphi(\alpha d + \beta d') = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d'_i)\pi_i^0 - \varphi\left(\alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d'_i\right) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n (\alpha d_i + \beta d'_i)\pi_i^0 - \alpha\varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right) - \beta\varphi\left(\sum_{i=1}^n d'_i\right) = \\ &= \alpha\left(\sum_{i=1}^n d_i\pi_i^0 - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^n d'_i\pi_i^0 - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d'_i\right)\right) = \\ &= \alpha\mathbb{W}(d, \pi^0) + \beta\mathbb{W}(d', \pi^0) \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung zwischen Zeile 2 und 3 von der Konvexität von φ folgt. Also insgesamt haben wir die Konkavität von \mathbb{W} auf \mathcal{D} bewiesen

$$\mathbb{W}(\alpha d + \beta d', \pi^0) \geq \alpha\mathbb{W}(d, \pi^0) + \beta\mathbb{W}(d', \pi^0).$$

Jetzt betrachten wir, wann diese Gewinnfunktion $\mathbb{W}(\cdot, \pi^0)$ ein Extremum hat. Eine notwendige Bedingung bei einer $\varphi \in \mathcal{C}^1$ für ein lokales Extremum wäre (siehe zB. [33]):

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial d_i} = \left(\sum_{i=1}^n d_i\pi_i^0 - \varphi\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)\right)'_{d_i} = \pi_i^0 - \varphi'\left(\sum_{i=1}^n d_i\right) = 0 \quad \forall i.$$

Man erkennt leicht, dass es kein lokales Extremum geben kann, falls es i und j gibt sodass $\pi_i^0 \neq \pi_j^0$. Das heißt:

- Falls nicht alle Komponenten des Preisvektores nicht gleich sind, erreicht man das Maximum am Rand der Menge der zulässigen Ausübungsmuster.
- Falls alle Komponente des Preisvektores gleich sind, erreicht die Gewinnfunktion ihr Maximum in den Punkten für die $\sum_{i=1}^n d_i = \text{const}$ gilt.

Was passiert am Rand der Menge der zulässigen Ausübungsmuster? Dafür betrachten wir den Teil des Randes der durch die Hyperebenen $\sum_{i=1}^n d_i = \text{Max}$ oder $\sum_{i=1}^n d_i = \text{Min}$ bestimmt wird. Nehmen wir allgemein $\sum_{i=1}^n d_i = \text{const} = C$, dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(d, \pi_0) &= \sum_{i=1}^{n-1} d_i\pi_i^0 + \pi_n^0\left(C - \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right) - \varphi(C) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d_i(\pi_i^0 - \pi_n^0) + \pi_n^0 C - \varphi(C). \end{aligned}$$

Also ist \mathbb{W} eine lineare Funktion in jeder der d_i und das heißt, dass das Maximum in einem Randpunkt der Hyperebene $\sum_{i=1}^n d_i = C$ erreicht wird. Das bedeutet wiederum, da wir wissen, dass das Maximum am Rand erreicht wird, wird es in einem Punkt vom Teil des Randes, wo zumindest für ein i ist $d_i = l_i^{min}$ oder $d_i = l_i^{max}$.

Es ist dadurch klar geworden, dass es sich um eine stetige stückweise lineare Ausübung handeln wird, falls der Inhaber der Swing Option die volle Information über **Spotpreisentwicklung** vor der Zeit seiner Ausübung hat.

2.6 Spieltheoretische Überlegungen

Die Situation, in der der Inhaber der Option die volle Information über die **Spotpreisentwicklung** hat, wie sie im letzten Kapitel vorausgesetzt wurde, ist natürlich unrealistisch. Ziel dieses Kapitels ist es die Wichtigkeit eines Modells des Verhaltens des Optionsinhabers für die Bewertung einer Swing Option zu zeigen. Dabei werden wir stufenweise aus einem sehr einfachen Modell ein komplizierteres aber auch realistischeres Modell konstruieren.

Wie schon erwähnt, es ist schwer das Verhalten des Inhabers der Option vorauszusagen, einerseits weil er sich völlig wie ein Konsument verhalten kann aber auch als Spekulant und andererseits sogar im Falle einer Gewinnmaximierung es unmöglich ist ohne Kenntnis der Zukunftspreise die richtige Strategie deterministisch zu bestimmen. Damit wir das Thema überhaupt weiter diskutieren können, gehen wir ab jetzt von einem Besitzer aus, der seinen Gewinn maximieren will. Was eine Maximierung heißt und in welchem Sinn er maximieren kann, besprechen wir als Nächstes.

2.6.1 Ein Nullsummenspiel

Betrachten wir folgende einfache Situation, in der der Verkäufer eines Stromderivats drei mögliche Alternativen hat, um das verkaufte Produkt mittels anderer auf dem Markt vorhandene Produkte zu hedgen. Angenommen der Inhaber des Derivats hat auch drei verschiedene mögliche Ausübungspfade und die Summe der Hedgingkosten des Verkäufers und des Gewinnes der Käufer sei 0 (oder konstant)². Weiters treffen die beiden Seiten, unabhängig voneinander zum gleichen Zeitpunkt ihre Wahl³. Ein solches Beispiel⁴ können wir in der Tabelle 1 sehen. Die ersten drei Zeilen stellen die Kosten der Verkäufer dar, bei der Wahl der entsprechende Hedgingalternative und den Ausübungspfad des Käufers.

Überlegen wir jetzt, welche die günstigste Hedgingalternative des Verkäufers wäre. Einige mögliche Strategien wären die Folgenden:

1. Falls der Verkäufer seine **maximalen** Kosten **minimieren** will, soll er klarerweise Hedgingalternative 2 wählen. In diesem Fall wären seine maximalen Kosten 7

²Diese Situation wird in der Spieltheorie Nullsummenspiel genannt.

³In Wirklichkeit ist es ein sequentielles Spiel (zuerst der Hedge, dann die Ausübung), dazu kommen wir aber später noch einmal.

⁴Die konkrete Zahlen in diesem Beispiel wurden so gewählt um die wichtigste Merkmale dieser Problemstellung zu erkennen.

Tabelle 1: 3×3 Nullsummenspiel

	Hedging 1	Hedging 2	Hedging 3	Minimum
Ausübung 1	1	7	8	1
Ausübung 2	2	6	3	2
Ausübung 3	9	5	4	4
Maximum	9	7	8	$7 \neq 4$
Erwartung	4	6	5	
Varianz	$12 \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$4 \frac{2}{3}$	

Einheiten und in den anderen zwei Fällen entsprechend 8 und 9 Einheiten. Hier handelt es sich um eine Sicherung gegen die ungünstigste Wahl der Ausübung durch den Besitzer der Option. Auf die gleiche Strategie wären wir gekommen, falls wir aus einem Inhaber, der erst nach der Kenntnis der Hedgingalternative Wahl, der Emittent, seine Entscheidung trifft.

2. Angenommen ist der Gewinn des Inhabers tatsächlich gleich den Kosten der Verkäufer und würde er seinen **minimalen** Gewinn **maximieren** wollen hätte er Ausübung 3 gewählt, was heißen würde der Verkäufer soll Hedging 3 wählen, da er in diesem Fall die minimalsten Kosten von 4 Einheiten bei dieser Wahl der Ausübung hat.⁵
3. Falls wir noch einen Schritt weiter gehen und annehmen, dass der Inhaber gleich wahrscheinlich ($p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$) einer der drei von seinen möglichen Ausübungspfade wählt und der Verkäufer seine **erwarteten** Kosten **minimieren** will⁶, soll er Hedging-Alternative 1 wählen. In diesem Fall wären seine erwarteten Kosten 4 Einheiten.
4. Um das Risiko noch eine gewisse Bedeutung zu geben, könnte der Verkäufer nicht die erwarteten Kosten minimieren sondern eine Funktion der Erwartung \mathbb{E} und der Varianz \mathbb{V} betrachten und sie minimieren. Beispiel für so eine Funktion wäre:

$$(\mathbb{E} + \kappa\sqrt{\mathbb{V}})(C)$$

mit einem Risiko-Gewicht $\kappa > 0$. Wegen der großen Varianz bei Hedging 1 sieht man, dass man bei genügend großen κ man nicht mehr Hedging 1 sondern eine der beiden anderen Alternativen auswählen wird. Andere, verschiedene von der Varianz, Methoden um Risiko zu messen (die so genannte Risikofunktionale) sind z.B. das α -Quantil einer Zufallsvariable Y mit Verteilung F das auch Value at

⁵Man bekommt zwei verschiedene Strategien (als auch $\max_i \min_j c_{ij} \neq \min_j \max_i c_{ij}$) für den Emittent im Fall 1 und 2 da es im konkreten Beispiel es sich um eine Matrix-Spiel ohne Sattelpunkt handelt. Mehr dazu kann man in [34] oder [21] finden.

⁶Ein Spieler der nur auf den erwarteten Profit aber nicht auf das Risiko sich richtet nennt man risikoneutral.

Risk genannt wird

$$\mathbb{V}\text{@R}_\alpha(Y) := \inf\{c \mid \mathbb{P}(Y < c) \geq \alpha\}.$$

Ein sehr gutes Buch über das Thema Risikomessung und Risikofunktionale mit vielen interessanten Anwendungen ist [24].

Es ist klar, dass im Fall 1 oder 2 also ohne die Annahme einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausübung ein fairer Preis des Derivats zwischen 4 und 7 Geldeinheiten liegen muss. Wenn man aber gewisse Wahrscheinlichkeiten für die Wahl einer Ausübung voraussetzt, wäre der risikoneutrale Preis von 4 durchaus erreichbar.

Anhand dieses einfachen Beispiels kann man schon sehr wichtige Erkenntnisse machen. Es sind mehrere Fragen zu klären, um ein realistisches Modell zu erstellen.

Jetzt probieren wir das vorgestellte Modell, zu verallgemeinern und als Matrixspiel zu modellieren. Dabei gehen wir aus folgenden Annahmen aus:

Nicht stochastische Spotpreise Diese Annahme wird es ermöglichen die Kosten als nur von der Hedgingwahl und von dem Ausübungspfad abhängige Variablen zu modellieren.

Endliche Anzahl Ausübungspfade Es wird vorausgesetzt dass, die Menge der möglichen Ausübungspfade \mathcal{D} endlich ist. Also $|\mathcal{D}| = m$ und seien die Wahrscheinlichkeiten dieser Ausübungspfade durch die Koordinaten des Vektors $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m) \in \mathbb{R}^m$ gegeben. ($0 \leq p_i \leq 1 \quad i = 1 \dots m, \sum_{i=1}^m p_i = 1$)

Endliche Anzahl Hedging-Alternativen Es wird vorausgesetzt, dass die Menge der möglichen Hedging-Strategien \mathcal{H} endlich ist. Also $|\mathcal{H}| = n$.

Mit diesen Annahmen und Bezeichnungen können wir jetzt folgende reelle Kosten-Matrix (Hedging- und Fehlbedarfkosten minus Überschuss-Profit) $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren:

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

- wobei c_{ij} die Kosten sind, wenn der Käufer Ausübungspfad i und der Verkäufer Hedgingalternative j wählt

Wir werden zwei verschiedene Hedgingstrategien betrachten und sie folgendermaßen nennen:

Minimax-Strategie Das ist die Strategie bei der, der Verkäufer die Hedgingalternative mit einer Nummer aus der folgenden Menge wählt

$$j^* \in \operatorname{argmin}_i \{\max_j c_{ij} : 1 \leq j \leq n\}.$$

Falls wir von einem Käufer, der die Kosten des Verkäufers maximieren will, ohne seine Hedgingwahl zu kennen, ausgehen, haben wir ein Beispiel für ein nicht kooperatives Konstantsummenspiel. In diesem Fall muss der Inhaber der Option den Ausübungspfad mit einer Nummer aus der folgenden Menge wählen

$$i^* \in \operatorname{argmax}\{\min_j c_{ij} : 1 \leq i \leq m\}.$$

Es gilt im Allgemeinen ⁷

$$\max_i \min_j c_{ij} \leq \min_j \max_i c_{ij}$$

und falls es zur Gleichheit kommt nennt man das ein Spiel mit Sattelpunkt. In diesem Fall bezeichnen wir den Minimax-Preis mit

$$\pi_{\minimax} = \min_j \max_i c_{ij}.$$

Erwartung-Strategie So nennen wir die Strategie in der, der Verkäufer die Hedgingalternative mit einer Nummer aus der folgenden Menge wählt

$$j \in \operatorname{argmin}\left\{\sum_{k=1}^m p_k c_{kj} : 1 \leq j \leq n\right\}$$

und entsprechend heißt dann auch Erwartung-Preis die folgende Zahl

$$\pi_{exp} = \min_j \sum_{k=1}^m p_k c_{kj}.$$

Man kann leicht folgendes Resultat zeigen:

Preisungleichung 2.6.1. Für die Preise gilt folgende Ungleichung

$$\pi_{exp} \leq \pi_{\minimax}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m p_k c_{kj} &\leq \sum_{k=1}^m p_k \max_{i \in [1..m]} c_{ij} = \max_{i \in [1..m]} c_{ij} \sum_{k=1}^m p_k = \max_{i \in [1..m]} c_{ij} \\ &\Rightarrow \pi_{exp} = \min_j \sum_{k=1}^m p_k c_{kj} \leq \min_j \max_i c_{ij} = \pi_{\minimax} \end{aligned}$$

□

⁷Das ist die so genannte Minimax-Ungleichung

Das letzte Ergebnis zeigt es sehr deutlich, wie wichtig für die Bewertung die Existenz eines Verhaltensmodells ist. Der Minimax-Preis ist der Preis, bei dem sich der Verkäufer ohne Kenntnis des Verhaltens des Inhabers sich gegen den schlechtesten für ihn Fall schützen will. Im Gegenteil bei dem Erwartungs-Preis wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausübungspfade vorausgesetzt, die eine bessere Anpassung der Verkäufer zulässt, was wiederum einem niedrigeren Preis entspricht. Auf jedem Fall ist zu beachten dass, im Falle der Erwartungs-Strategie das Risiko nicht berücksichtigt wird, was gegebenenfalls logischerweise zu einem höheren Preis führen würde. Im Allgemeinen müsste für den Preis π unabhängig von der Strategie im Fall eines Matrixspiels folgende Ungleichung gelten

$$\pi_{exp} \leq \pi \leq \pi_{minimax}.$$

Dieses Modell können wir noch allgemeiner definieren. Dafür bezeichnen wir die Menge der Hedgingalternativen mit \mathcal{H} und wie oben die Menge der zulässigen Ausübungsmuster mit \mathcal{D} . Weiters gehen wir aus einer Kostenfunktion C für den Verkäufer und einer Auszahlungsfunktion A für den Käufer, wobei die beiden sich nur um eine Konstante unterscheiden.

$$\begin{aligned} C &: \mathcal{H} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ A &: \mathcal{H} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ A(h, d) - C(h, d) &= Const \end{aligned}$$

Die beiden Hedging-Strategien der Verkäufer, die wir oben definiert haben, können wir in diesem Fall wie folgt schreiben:

Minimax-Strategie

$$h_{minimax}^* := \operatorname{argmin} \left\{ \max_{d \in \mathcal{D}} C(h, d) : h \in \mathcal{H} \right\}$$

Erwartung-Strategie

$$h_{exp}^* := \operatorname{argmin} \left\{ \mathbb{E}_d C(h, d) : h \in \mathcal{H} \right\}$$

Analog bekommen wir auch für die Preise:

Minimax-Preis

$$\pi_{minimax} = \min_{h \in \mathcal{H}} \max_{d \in \mathcal{D}} C(h, d)$$

Erwartungs-Preis

$$\pi_{exp} = \min_{h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_d C(h, d)$$

Tabelle 2: Mögliche Auszahlungen des Inhabers abhängig von seiner Ausübung und vom eingetretenen Spotpreisszenario

	Ausübung 1	Ausübung 2	Ausübung 3
ξ_1	1	7	8
ξ_2	2	6	3

Tabelle 3: Mögliche Kosten des Emittenten abhängig von seinem Hedging, der Ausübung und dem Spotpreis

ξ_1	Hedging 1	Hedging 2	Hedging 3
Ausübung 1	1	7	8
Ausübung 2	2	6	3
Ausübung 3	9	5	4

ξ_2	Hedging 1	Hedging 2	Hedging 3
Ausübung 1	3	2	7
Ausübung 2	1	4	9
Ausübung 3	8	5	6

2.6.2 Stochastische Spotpreise

Eine der wesentlichen Annahmen im letzten Beispielmodell war die Annahme nicht-stochastischen Spotpreisen. Hier werden wir das Spiel ein bisschen anders auffassen und eine nicht konstante **Spotpreisentwicklung** zulassen. Ähnlich wie beim letzten Modell beginnen wir mit einem einfachen Zahlenbeispiel.

Hier betrachten wir den Käufer als einen Spieler, der seinen Profit maximieren will, wobei sein Profit nicht von der Hedgingwahl des Emittenten abhängt, sondern nur von der **Spotpreisentwicklung** und der Wahl seines Ausübungspfades. Setzen wir zwei verschiedene Spotpreisszenarios ξ_1 und ξ_2 voraus und drei mögliche Ausübungspfade des Inhabers. Die Auszahlungen können wir wieder in einer Tabelle erfassen (siehe Tabelle 2).

In diesem Fall sind die Kosten des Verkäufers nicht mehr nur von seiner Hedging und der Ausübung der Inhaber, sondern auch von dem Spotpreisszenario abhängig. Wir können sie in zwei Tabellen mit jeweils den Kosten pro Spotpreis zusammenfassen. (Siehe Tabelle 3.).

Wenn wir von einem Käufer, der bei seiner Ausübung die Preise kennt, ausgehen, können wir eindeutig seine Ausübung als Funktion des Spotpreisszenarios bestimmen. Im konkreten Beispiel heißt das, dass er entsprechend die Ausübungspfade 3 und 2 zu Spotpreise ξ_1 und ξ_2 wählen wird. Das bedeutet wiederum dass, das Spiel aus der Seite des Emittenten sich wieder zu einer Kosten-Matrix reduziert, die nur die 3. Zeile der ersten und die 2. Zeile der zweiten seiner ursprünglichen Ausübungsmatrizen enthält.

Tabelle 4: Reduzierte Kosten-Matrix

	Hedging 1	Hedging 2	Hedging 3
ξ_1	9	5	4
ξ_2	1	4	9
Erwartung	11/3	13/3	22/3

Das Ergebnis ist in Tabelle 4 dargestellt. Das ist eine Matrix, in der der Käufer nicht mehr als Gegenspieler vorkommt, dafür aber ein stochastisches Modell für den Spotpreise notwendig ist. In unserem Beispiel wurden Wahrscheinlichkeiten von $1/3$ und $2/3$ gewählt.

Ähnlich wie oben sieht man, dass es Hedging 1 zu wählen ist und der Preis $11/3$ beträgt, falls man das Risiko ignoriert. In diesem Modell wird vorausgesetzt, dass der Inhaber seine Entscheidung mit der vollen Information über den Spotpreis trifft.

Wiederholen wir jetzt die Überlegungen im allgemeinen Fall und schreiben wir den Vorgang formal auf:

Stochastische Spotpreise Es ist eine diskrete Verteilung der Spotpreisszenarios mit Anzahl der Zustände l und Vektor der Wahrscheinlichkeiten $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l) \in \mathbb{R}^l$ vorgegeben. ($0 \leq p_i \leq 1 \quad i = 1 \dots l, \sum_{i=1}^l p_i = 1$)

Endliche Anzahl Ausübung-Strategien Es wird vorausgesetzt dass, die Menge der möglichen Ausübung-Möglichkeiten \mathcal{D} endlich ist. Sei $|\mathcal{D}| = m$. Damit können wir die Auszahlung-Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ definieren:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}$$

- $a_{ij}, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$ ist die Auszahlung von Ausübungspfad j bei Spotpreisszenario i

Ausübungspfad Indexvektor Der Vektor der Nummern der optimalen Ausübungspfade pro Spotpreisszenario:

$$d = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_l), d_i = \operatorname{argmax}_{j \in [1 \dots m]} a_{ij}, 1 \leq i \leq l$$

Endliche Anzahl Hedging-Strategien Es wird vorausgesetzt dass, die Menge der möglichen Hedging-Möglichkeiten \mathcal{H} endlich ist. Sei $|\mathcal{H}| = n$ und noch dazu seien l reelle Matrizen $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}, k = 1 \dots l$ vorgegeben.

$$C_k := \begin{pmatrix} c_{11}^{(k)} & c_{12}^{(k)} & \dots & c_{1n}^{(k)} \\ c_{21}^{(k)} & c_{22}^{(k)} & \dots & c_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{(k)} & c_{m2}^{(k)} & \dots & c_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

- $c_{ij}^{(k)}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ sind die Kosten wenn der Käufer Ausübungspfad i und der Verkäufer Hedging-Möglichkeit j wählt falls Spotpreisszenario k eingetreten ist.

Genauso wie oben definieren wir eine neue Matrix.

Reduzierte Kosten-Matrix $C' \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ist die Matrix welche i -te Zeile die d_i -Zeile aus der Matrix C_i ist ⁸.

$$C' := \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1n} \\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{l1} & c'_{l2} & \cdots & c'_{ln} \end{pmatrix}, c'_{ij} := c_{d_i j}^i$$

Jetzt können wir die optimale risikoneutrale Hedging-Möglichkeit und den Preis bestimmen:

$$j^* \in \operatorname{argmin}_j \sum_{k=1}^l p_k c'_{kj} = \operatorname{argmin}_j \sum_{k=1}^l p_k c_{d_k j}^k$$

$$\pi = \min_j \sum_{k=1}^l p_k c'_{kj} = \min_j \sum_{k=1}^l p_k c_{d_k j}^k$$

Schreiben wir jetzt das vorgestellte Modell in allgemeiner Form. Dafür definieren wir den endlichen Wahrscheinlichkeitsraum der Spotpreisszenarios $(\Xi, \mathcal{P}(\Xi), \mathbb{P})$, $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_l\}$. Wir haben wieder eine Kostenfunktion C und eine Auszahlungsfunktion A , die dieses mal entsprechend auf $\mathcal{H} \times \mathcal{D} \times \Xi$ und auf $\mathcal{D} \times \Xi$ definiert sind.

$$C : \mathcal{H} \times \mathcal{D} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A : \mathcal{D} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Hedgingalternative, die der Verkäufer wählen muss ist

$$h^* := \operatorname{argmin}\{\mathbb{E}_{\xi \in \Xi} C(h, d^{max}(\xi), \xi) : h \in \mathcal{H}\},$$

wobei $d^{max}(\xi)$ der optimale für den Käufer Ausübungspfad pro Spotpreisszenario ist

$$d^{max}(\xi) := \operatorname{argmax}\{A(d, \xi) : d \in \mathcal{D}\}$$

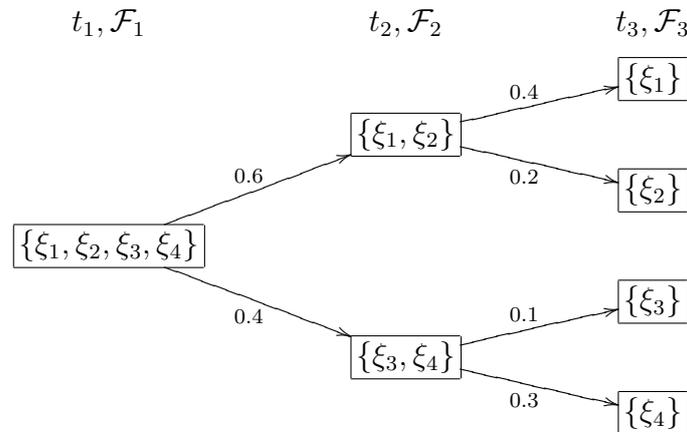
und der Preis ist

$$\pi^* := \min\{\mathbb{E}_{\xi \in \Xi} C(h, d^{max}(\xi), \xi) : h \in \mathcal{H}\}. \quad (2.1)$$

Es muss hier noch einmal ausdrücklich erwähnt werden, dass wir von einem Käufer ausgehen, der zur Zeit der Wahl seines Ausübungspfades die volle Spotpreisinformation hat. Es ist auch zu erwähnen, dass es in diesem Fall zum Unterschied vom letzten Modell die Kosten des Emittenten im Allgemeinen nicht dem Profit des Inhabers entsprechen und dadurch man zwischen Angebots- und Nachfragepreis unterscheiden soll. Wie haben bei (2.1) offensichtlich den Angebotspreis genommen.

⁸Nicht zu verwechseln mit dem Begriff Reduced Cost von der Linearen Optimierung.

Abbildung 10: Beispiel für einen Spotpreisszenariobaum



2.6.3 Ein mehrstufiges Entscheidungsmodell

Im letzten Modell hat der Verkäufer zur Zeit der Wahl seiner Hedgingalternative keine Information bezüglich der **Spotpreisentwicklung**. Zum Unterschied von ihm hatte der Inhaber der Option die volle Information, welches Spotpreisszenario eingetreten ist. Obwohl diese Informationsasymmetrie in Wirklichkeit existiert, ist sie auf keinem Fall so stark ausgeprägt. Deshalb probieren wir jetzt ein Modell zu erstellen, das eine teilweise Informationsasymmetrie voraussetzt.

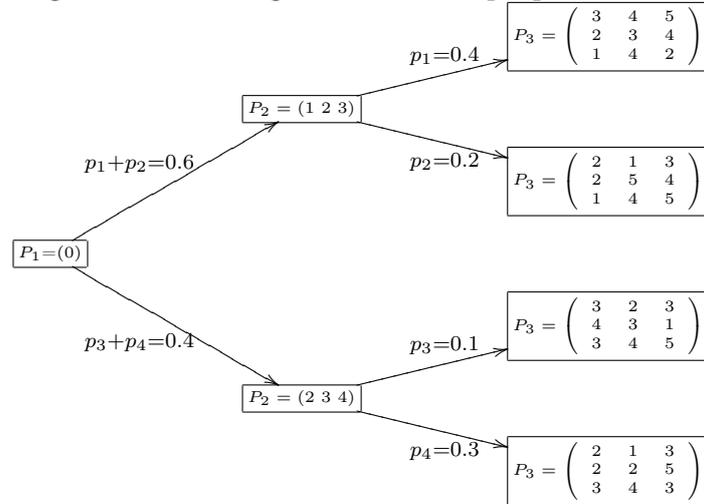
Als Erstes geben wir wieder ein einfaches Zahlenbeispiel an. Zum Unterschied vom letzten Modell betrachten wir einen Spotpreisszenariobaum mit drei Zeitpunkten t_1 , t_2 und t_3 , wobei der Käufer in den beiden Momenten t_2 und t_3 eine Entscheidung über seinen Ausübungspfad trifft. Der Verkäufer hingegen kann nur im Moment t_1 entscheiden, welche Hedgingalternative er wählt. Es ist klar, dass durch die Information, ob $\{\xi_1, \xi_2\}$ oder $\{\xi_3, \xi_4\}$ bei t_2 eingetreten ist, der Käufer mehr Information als der Verkäufer hat. Wegen der globalen und der lokalen Schranken im Swingkontrakt ist es auch klar, dass durch seine Entscheidung im Moment t_2 , der Käufer die Anzahl möglicher Entscheidungen im Moment t_3 beschränkt (siehe das Beispiel in Abbildung 10).

Ein noch konkreteres Beispiel, aus der Sicht der Inhaber der Option mit seinen Auszahlungen, kann man in Abbildung 11 sehen. Die Vektoren bei t_2 sind die möglichen Auszahlungen abhängig von seiner Entscheidung im gleichen Moment und die Matrizen bei t_3 die mögliche Auszahlungen abhängig von seinen Entscheidungen in den beiden Momente t_2 und t_3 .

Wie soll jetzt der Käufer seinen Ausübungspfad wählen? Wie trifft er seine Entscheidung? Eine vernünftige Strategie wäre, wenn er im Moment t_2 jene Alternative wählt, deren Auszahlung plus die dadurch bestimmte erwartete maximal erreichbare im Moment t_3 Auszahlung maximal wird. Im konkreten Beispiel von Abbildung 11 heißt das, dass er bei Eintreten von $\{\xi_1, \xi_2\}$ sich zwischen den folgenden Alternativen entscheiden muss.

Ausübungsalternative 1: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

Abbildung 11: Auszahlungen auf einem Spotpreisszenariobaum



$$1 + \left(\frac{2}{3} \max\{3, 4, 5\} + \frac{1}{3} \max\{2, 1, 3\}\right) = 1 + \left(\frac{2}{3}5 + \frac{1}{3}3\right) = 5\frac{1}{3}$$

Ausübungsalternative 2: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

$$2 + \left(\frac{2}{3} \max\{2, 3, 4\} + \frac{1}{3} \max\{2, 5, 4\}\right) = 2 + \left(\frac{2}{3}4 + \frac{1}{3}5\right) = 6\frac{1}{3}$$

Ausübungsalternative 3: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

$$3 + \left(\frac{2}{3} \max\{1, 4, 2\} + \frac{1}{3} \max\{1, 4, 5\}\right) = 3 + \left(\frac{2}{3}4 + \frac{1}{3}5\right) = 7\frac{1}{3}$$

Es ist klar, dass der Käufer Übungsalternative 3 wählen soll, falls im t_2 $\{\xi_1, \xi_2\}$ eingetreten ist und dann später abhängig davon ob es zu ξ_1 oder zu ξ_2 kommt entsprechend im t_3 die Ausübung 2 oder 3 wählen. Ganz analog falls $\{\xi_3, \xi_4\}$ eingetreten ist bekommen wir folgende Alternativen:

Ausübungsalternative 1: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

$$2 + \left(\frac{1}{4} \max\{3, 2, 3\} + \frac{3}{4} \max\{2, 1, 3\}\right) = 2 + \left(\frac{1}{4}3 + \frac{3}{4}3\right) = 5$$

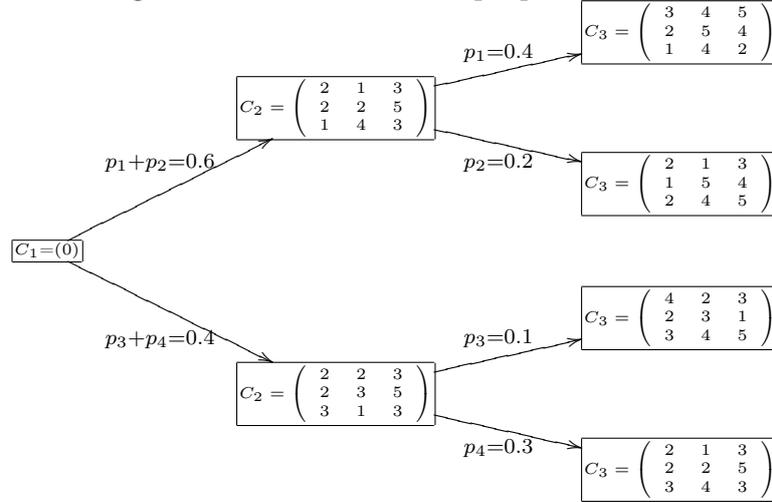
Ausübungsalternative 2: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

$$3 + \left(\frac{1}{4} \max\{4, 3, 1\} + \frac{3}{4} \max\{2, 2, 5\}\right) = 3 + \left(\frac{1}{4}4 + \frac{3}{4}5\right) = 7\frac{3}{4}$$

Ausübungsalternative 3: mit Auszahlung und erwartete maximal erreichbare Auszahlung

$$4 + \left(\frac{1}{4} \max\{3, 4, 5\} + \frac{3}{4} \max\{3, 4, 3\}\right) = 4 + \left(\frac{1}{4}5 + \frac{3}{4}4\right) = 8\frac{1}{4}$$

Abbildung 12: Kosten auf einem Spotpreisszenariobaum



Hier soll der Käufer wieder Ausübungsalternative 3 wählen und später abhängig davon, ob es zu ξ_3 oder zu ξ_4 kommt entsprechend die Ausübung 3 oder 2 im t_3 wählen.

Wie sieht jetzt die Situation von der Seite des Verkäufers aus? Ein Beispiel für einen Baum mit den entsprechenden Kosten kann man in Abbildung 12 sehen. Zum Unterschied von den möglichen Auszahlungen, die von den Entscheidungen in den früheren Momenten abhängen und dadurch immer um eine Dimension größer werden sind die Kosten pro Knoten immer nur von der gewählten Hedgingalternative und momentanen Ausübung abhängig und dadurch immer zweidimensional. Falls der Verkäufer von einem Käufer, der nach der oben beschriebenen Strategie handelt, ausgeht, muss er aus den Kostenmatrizen für t_2 jeweils nur Zeile 3 nehmen, bei ξ_1 und ξ_4 Zeile 2 und bei ξ_2 und ξ_3 Zeile 3. Das heißt wir wissen mit welchen Wahrscheinlichkeiten welche Kosten anfallen werden abhängig von der Hedgingalternative. Der Verkäufer kann jetzt dadurch seine erwarteten Kosten minimieren.

Hedgingalternative 1: mit erwartete Kosten im Moment t_2 und t_3

$$(0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 3) + (0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3 + 0.3 \cdot 2) = 1.8 + 2.1 = 3.9$$

Hedgingalternative 2: mit erwartete Kosten im Moment t_2 und t_3

$$(0.6 \cdot 4 + 0.4 \cdot 1) + (0.4 \cdot 5 + 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 4 + 0.3 \cdot 2) = 2.8 + 3.8 = 7.6$$

Hedgingalternative 3: mit erwartete Kosten im Moment t_2 und t_3

$$(0.6 \cdot 3 + 0.4 \cdot 3) + (0.4 \cdot 4 + 0.2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 5 + 0.3 \cdot 5) = 3.0 + 4.6 = 7.6$$

Also soll er Hedgingalternative 1 wählen, weil er dadurch seine erwartete Kosten minimiert.

Jetzt werden wir unser Modell formalisieren:

Spotpreisszenariobaum Gegeben ist einen Spotpreisszenariobaum. Damit ist eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Xi\}$ mit $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Xi)$ auf dem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Xi, \mathcal{P}(\Xi), \mathbb{P})$, $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_t\}$ festgelegt.

Spotpreisprozess Der Spotpreisprozess $(S_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ ist an \mathbb{F} adaptiert, was sichert, dass die möglichen Spotpreiswerte genau an dem Baum angepasst sind.

Ausübungspfadprozess Die Menge der Ausübungspfade $d := (d_1, \dots, d_T) \in \mathcal{D}$. Diese können wir auch als einen zu der Filtration \mathbb{F} adaptierten stochastischen Prozess $D = (D_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ auffassen.⁹, weil die Entscheidung für Moment t nur mit der Information bis zum Moment t getroffen wird.

Hedgingalternativen Die Menge der Hedgingalternativen $h \in \mathcal{H}$

Auszahlungsprozess Jeder Auszahlungsprozess $(P_t^d)_{t \in \{1, \dots, T\}}^{d \in \mathcal{D}}$ pro Ausübungspfad ist an \mathbb{F} adaptiert. Falls wir den Preis pro Einheit im Vertrag auf K fixieren und die Auszahlung proportional zu Preisdifferenz $S_t^0 := S_t - K$ und Volumen annehmen ergibt sich

$$P_t := S_t^0 D_t.$$

Das heißt für die kumulierte Auszahlung haben wir

$$P_t^G := \sum_{i=1}^t P_i = \sum_{i=1}^t S_i^0 D_i.$$

Kostenprozess Jeder Kostenprozess $(C_t^{(d,h)})_{t \in \{1, \dots, T\}}^{d \in \mathcal{D}, h \in \mathcal{H}}$ pro Ausübungspfad und Hedgingalternative ist ebenso an \mathbb{F} adaptiert.

Bei der so definierten Situation und die oben besprochene Strategie sollte der Optionsinhaber den folgenden Ausübungspfadprozess folgen

$$(D_t^{max}) := \operatorname{argmax}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} P_T^G(D_t, \xi) : (D_t) \in \mathcal{D}, (D_t) \text{ adaptiert}\}.$$

Entsprechend ergibt sich für den Emittent die folgende Hedgingstrategie

$$h^* := \operatorname{argmin}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} C(h, D_t^{max}, \xi) : h \in \mathcal{H}\}$$

als optimal. Das Auffinden des optimalen Ausübungspfadprozesses ist ein typisches Problem aus der Stochastischen Optimierung. Diese beide Aufgaben werden wir später für konkrete Beispiele implementieren und lösen.

2.6.4 Zusammenfassung

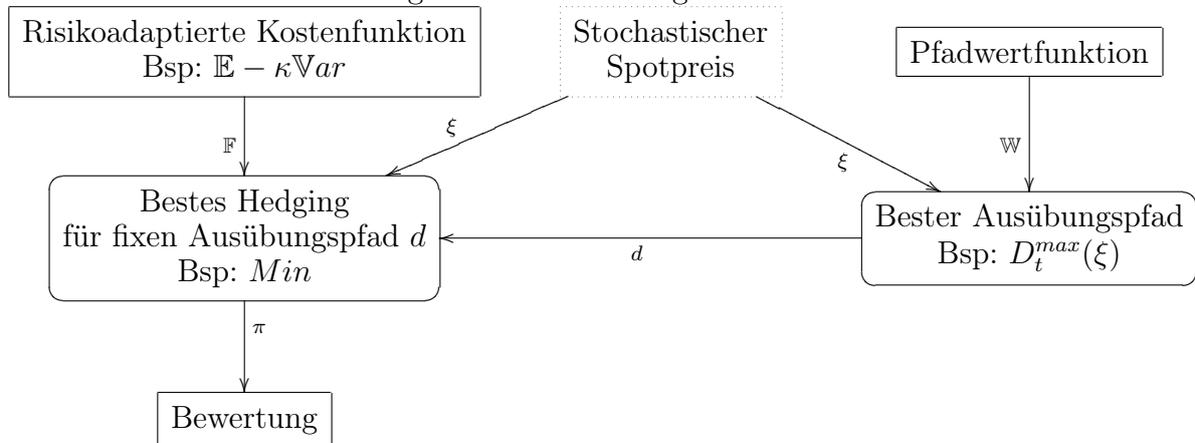
In diesem Kapitel haben wir sehr deutlich die Wichtigkeit eines Verhaltensmodells gesehen. Ein Vergleich der in den letzten Kapiteln betrachteten Modellen bezüglich verschiedene Aspekte der Problemstellung kann man in der Tabelle 5 sehen. Eine schematische Darstellung der Position eines Verhaltensmodells bei der Bewertung eines Derivats kann man in Abbildung 13 sehen. Also es gibt einen Optionsinhaber, der aufgrund der **Spotpreisentwicklung** die eine oder andere Ausübungsmöglichkeit wählt. Er bewertet die

⁹Einen stochastischen Prozess $H = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bezüglich \mathbb{F} adaptiert, falls H_n \mathcal{F}_n -messbar ist. Mehr dazu siehe z.B. [20] oder [31]

Tabelle 5: Vergleich der spieltheoretischen Modelle

Modell	2.6.1 - 1	2.6.1 - 2	2.6.2	2.6.3
Gegenspieler	ja	nein	nein	nein
Entscheidungsmomente	gleich	gleich	verschieden	verschieden
Informationsasymmetrie	nein	nein	ja (voll)	ja (teil)
Verteilung der Entscheidungen	nein	ja	indirekt	nein
Stochastische Spotpreise	nein	nein	ja	ja (Baum)
Mehrstufige Entscheidung	nein	nein	nein	ja

Abbildung 13: Die Bewertung eines Produktes



möglichen Ausübungspfade für sich mittels einer Wertfunktion, die auch von dem Spotpreisszenario abhängt. Der Emittent hat eine Kostenfunktion, die ihm die Möglichkeit gibt, jede Hedgingalternative in jedem Spotpreisszenario und bei dem vom Inhaber gewählten Ausübungspfad zu bewerten und die mit den kleinsten Kosten zu wählen.

Man hat folgende Fragen zu klären bevor man mit der Bewertung der Swing Option beginnt.

Informationsasymmetrie Wie stark ist die Informationsasymmetrie ausgeprägt? Welche Daten hat der Optionsinhaber zu seiner Ausübungszeit, die der Emittent nicht hat?

Pfadwertfunktion Welche Prioritäten setzt sich der Optionsinhaber bei der Wahl seines Ausübungspfades? Will er sich gegen den schlechtesten Fall schützen oder maximiert er die Erwartung? Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung setzt er voraus?

Kostenfunktion Will sich der Emittent gegen den schlechtesten Fall schützen oder minimiert er seine erwarteten Kosten?

Risikoaversion Wie Risikoavers sind der Inhaber und der Emittent der Option allge-

mein? ¹⁰

Jedes Modell für die Bewertung einer Swing Option sollte alle diese relevanten Fragen beantworten und diesbezüglich Annahmen treffen.

2.7 Spezialfälle und allgemeine Preiseigenschaften

Ähnlich wie in [17], mache ich ein paar Aussagen über die Swing Option in speziellen Fällen, die unabhängig von den Spotpreismodell sind. Mit den Bezeichnungen von oben unter der Annahme einer Swing Option über eine Einheit Volumen ($l_i^1 = -1, l_i^2 = l_i^3 = 0, l_i^4 = 1, Min = 0, Max = N$) haben wir:

N = 1: Wenn der Inhaber nur über ein Swingrecht verfügt, ist die Swing Option äquivalent zu einer amerikanischen Call Option. Genauer gesprochen handelt es sich hier, wegen den diskreten Ausübungsgelegenheiten um Bermuda Optionen.

1 < N < n: In diesem Fall kann man gewisse Schranken angeben

Obere Schranke: Hier können wir den Wert von N identische Bermuda Optionen als obere Schranke nehmen, da sie mehr Rechte dem Inhaber geben als die Swing Option. Die N Bermuda Optionen können Sie gleichzeitig ausüben was Sie bei dem Swing Option nicht machen können.

Untere Schranke: Eine untere Schranke wäre das Maximum von allen N -elementigen Kombinationen von Europäische Optionen zu den Ausübungszeiten. Dieses Portfolio hat wirklich einen kleineren Wert als die Swing Option, da es sich dabei um vordefinierte Ausübungszeiten handelt.

N = n: Hier ist es klar das der Wert mit der unteren Schranke übereinstimmt, also gleich dem Wert von N europäischen Optionen ist.

Es ist auch klar bei diesen Überlegungen ohne globale Schranken ($Min = 0$ und $Max = N$) dass, die optimale (gewinnmaximierende) Ausübung entweder auf das Maximum oder das Minimum durch die lokalen Schranken bestimmte Menge stattfinden wird.

Im Allgemeinen ohne die Annahme ($Min = 0$ und $Max = N$) besteht kein offensichtlicher Zusammenhang zwischen den klassischen Optionen und der Swing Option noch ist die optimale Ausübung in der Form wie oben. Trotzdem lassen sich, auch ohne diese Annahmen, gewisse allgemeine Aussagen über den Wert einer Swing Option machen.

¹⁰Ein Entscheidungsträger mit einer Nutzenfunktion u , die von einem unsicheren Ausgang X abhängt, heißt:

Risikoavers falls $\mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X)$

Risikoneutral falls $\mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X)$

Risikofreudig falls $\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$

1. Falls die Penalty Funktion φ konstant pro Einheit oder linear in der Zusatzeinheit ist, dann gilt für die Wertfunktion f dieser Option.

$$f(cP_t, cK, c\varphi) = cf(P_t, K, \varphi)$$

Hier bezeichnet K den Strikepreis. Die Gleichheit sieht man leicht, wenn man sich überlegt, dass in den zwei Skalen dieselbe Strategie optimal ist.

2. Auf eine analoge Weise zeigt man die Homogenität in den lokalen und globalen Schranken.

$$f(c \cdot l_i^1, c \cdot l_i^4, c \cdot Max, c \cdot Min) = cf(l_i^1, l_i^4, Max, Min)$$

Die eben gezeigten Eigenschaften können den Bewertungsaufwand erheblich reduzieren, wenn man aus der Bewertung in einer Skala die in einer Neuen bekommt.

2.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Bewertung der Swing Option allgemein besprochen sowie die Eigenschaften des Stromes und des Strommarktes die die Bewertung verkomplizieren. Dabei ist an erster Stelle die Nichtspeicherbarkeit der Elektrizität zu nennen, die die Bewertung mit den Standardmodellen aus der Finanzmathematik der Aktienmärkte in Frage stellt. Nicht weniger wichtig ist die Modellierung des Optionsinhaberverhaltens, die zum Unterschied vom klassischen Optionsmarkt nicht eindeutig rational zu definieren ist.

Wir haben auch die Swing Option mathematisch genauer definiert und die Menge der dadurch bestimmten zulässigen Ausübungsmuster studiert. Dabei haben wir unter gewissen Annahmen bewiesen, dass es sich um eine konvexe Menge handelt. Wir haben auch ein paar spieltheoretische Überlegungen durchgeführt, um die Bedeutung des Optionsinhaberverhaltens zu zeigen. Zum Schluss haben wir noch diskutiert, was man im Allgemeinen über den Wert der Swing Option im Vergleich mit Portfolios aus klassischen Optionen sagen kann, ohne eine Annahme für die Spotpreisdynamik.

3 Übersicht über bekannte Modelle

Nachdem wir unsere allgemeinen Überlegungen, wie man Derivate auf dem Strommarkt bewerten soll, abgeschlossen haben, betrachten wir ein paar konkrete aus der Literatur bekannte Bewertungsmethoden. Nachdem wir das jeweilige Modell kennen lernen, werden wir die gemachten Annahmen, deren Realitätsnahe und die Modellschwachstellen besprechen. Bei der Einführung hier werde ich mich hauptsächlich an [10] halten.

3.1 Das Nutzenmodell

3.1.1 Beschreibung

Der Begriff der Gewinnerzielung durch sofortige Verfügbarkeit der Ware (engl. convenience yield) wurde von den Ökonomen Kaldor und Working eingeführt. Er stellt einen Korrekturterm in der Formel für den Forwardpreis einer Ware dar. Der convenience yield ist keine beobachtbare Größe. In einem no-arbitrage Markt sollte für den Forwardpreis $F(t, T)$ eines Gutes mit Preis $S(t)$ im Moment t und Fälligkeit T bei einem risikolosen Zinssatz von r folgendes gelten¹¹ :

$$F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)}$$

Es ist jedoch auf den meisten Märkten, sodass die Investoren und die Spekulanten nicht short gehen können und dadurch einen Unterschied zu dem theoretischen Forwardpreis besteht. Diese Differenz wird mit Hilfe der convenience yield y ausgeglichen.

$$F(t, T) = S(t)e^{(r-y)(T-t)} \quad (3.1)$$

Dadurch ist es klar, dass y gewissermaßen der Nutzen durch sofortige Verfügbarkeit minus die Lagerungskosten darstellt. **Brennan und Schwartz (1985)** haben dieses Modell für die Bewertung von Erzeugnisderivaten benutzt [10]. In diesem Zusammenhang zwischen $F(t, T)$ und $S(t)$ ist bemerkenswert, dass man y als stetige Dividendenzahlungen interpretieren kann. Das heißt, bei der zusätzlichen Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Spotpreis, können wir die Formel von Black-Scholes für die Bewertung eines Calls benutzen.

$$C(t) = S(t)e^{-y(T-t)}\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)e^{-y(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

¹¹ Das folgt aus der Arbitragefreiheit und zwar soll der Preis folgenden zwei Portfolios in jedem Moment gleich sein da sie zum Zeitpunkt T auch den gleichen Wert haben:

1. Eine Aktie mit Wert $S(t)$
2. Ein Forward mit Wert $V(t, T)$, Strike Preis K und Termin T sowie $Ke^{-r(T-t)}$ Geldeinheiten in Bonds

Daraus folgt $S(t) = V(t, T) + Ke^{-r(T-t)}$ und da $F(t, T)$ der Wert für K ist bei dem $V(t, T) = 0$ folgt $S(t) = F(t, T)e^{-r(T-t)}$ also $F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)}$.

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

und Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilte Zufallsvariable ist

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

In der so dargestellten Situation haben wir einen vollständigen Markt da es sich nur um eine stochastische Größe handelt, nämlich durch die geometrische Brownsche Bewegung definierte Spotpreisdynamik. Hier geht man ebenfalls auch von der Möglichkeit das Basisobjekt zu kaufen, verkaufen und zu behalten (speichern).

3.1.2 Verallgemeinerung

Eine mögliche Verallgemeinerung von Gleichung (3.1) wäre

$$F(t, T) = S(t)\mathbb{E}_Q[e^{\int_t^T (r_s - y_s) ds}],$$

wobei Q das äquivalente Martingalmaß bei der risikoneutralen Bewertung bezeichnet [8].¹² Es ist klar, dass Formel (3.1) der Spezialfall für nicht stochastische konstante r_s und y_s darstellt. In dieser allgemeiner Form besteht die Modellierungsaufgabe in der Spezifikation von stochastische Prozesse, die die Dynamik von $S(t)$, r_s und y_s beschreiben. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel das **Gibson-Schwartz Modell**. Konkreter ist das ein Modell, bei dem man die S_t und y_t als Stochastische Prozesse modelliert, die durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen gegeben sind:

$$dS_t = (r_t - y_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t^1$$

$$dy_t = \kappa(\theta - y_t)dt + \gamma dW_t^2$$

wobei W_t^1 und W_t^2 zwei Wiener Prozesse sind. Genaures über dieses Modell findet man in [8]. Allgemein über die Bedeutung vom Convenience Yield kann man in [25] lesen.

3.1.3 Annahmen und Probleme

In diesem Modell wurden ein paar Annahmen getroffen, von denen ein Teil nicht genügend realistisch waren, um das Modell ohne Bedenken auf Optionen auf dem Strommarkt anwenden zu können. Deshalb werden wir sie jetzt zusammenfassen:

1. Wir müssen den Gewinn durch sofortige Verfügbarkeit bestimmen, der als Differenz des Gewinnes durch Besitzen des Gutes und der Lagerungskosten definiert ist. Da die beiden Größen im Falle der Elektrizität wegen der Nichtspeicherbarkeit nicht zu berechnen sind, können wir auch y nicht explizit angeben.

¹²Eng verbunden mit dem Convenience Yield ist der Begriff der Marktpreis von Risiko zu dem man auf folgende Art und Weise kommen kann. Bei einem Objekt mit erwarteten Return μ haben wir einerseits für die Erwartung $\mathbb{E}S(T) = S(t)e^{\mu(T-t)}$ und andererseits $F(t, T) = S(t)e^{r(T-t)}$. Daraus folgt $F(t, T) = \mathbb{E}S(T)e^{(r-\mu)(T-t)}$ oder $F(t, T) = \mathbb{E}S(T)e^{-\lambda\sigma(T-t)}$ wenn wir den Marktpreis von Risiko $\lambda := \frac{\mu-r}{\sigma}$ definieren.

2. Die Nichtspeicherbarkeit führt auch zu Störungen des Gleichgewichts der Preise (z.B. Future- und Spotpreis). Auch das No Arbitrage Argument ist nicht gültig, da es das Kaufen im Moment t und das Verkaufen im Moment T verlangt.
3. Das Modellieren des Basiswertes für das Bewerten von Optionen ist nicht wirklich hilfreich, da es Hedging des Underlyings benötigt (inklusive das Delta-Hedgen) und das ist wieder wegen der Nichtspeicherbarkeit nicht möglich.

3.2 Erweiterung des gewöhnlichen Optionpricing Modell

3.2.1 Beschreibung

Eine andere Möglichkeit besteht darin, das gewöhnliche Modell von Black-Scholes-Merton für die Elektrizität zu erweitern (siehe [10]). Eine der wichtigsten Größen bei diesem Zugang ist der Spotpreis vom Basiswert, den man für das Hedging benutzt. Deshalb ist die Modellierung der Spotpreisdynamik eine der zugrunde liegenden Teile des Modells. Die Hauptprobleme bei der Spotpreismodellierung sind mit den folgenden Eigenschaften der beobachteten Spotpreise verbunden.

- Schwere Enden der Verteilung (Fat Tails)¹³
- Spikes

Um diese Merkmale der Spotpreisdynamik zu modellieren, sind aus der Literatur mehrere Modelle bekannt.

3.2.2 Diffusion Prozess mit stochastischer Volatilität

Als erstes Beispiel für Spotpreisdynamik betrachten wir das folgende durch zwei stochastische Differenzialgleichungen definierte Modell

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_1(t, S_t)dt + \sigma(t)S_t dW_t^1 \\ d\Sigma_t &= \mu_2(t, \Sigma_t)dt + y(t, \Sigma_t)S_t dW_t^2, \end{aligned}$$

wobei $\Sigma_t = [\sigma(t)]^2$, W_t^1 und W_t^2 zwei Brownsche Bewegungen¹⁴ mit Korrelation $\rho(t)$ sind und $\mu_1(t, S_t)$ und $\mu_2(t, \Sigma_t)$ Funktionen sind, die die Mean Reversion Eigenschaft des Prozesses bestimmen.

Die stochastische Volatilität ist für die Modellierung der Spikes und der Fat Tails notwendig. Das Problem, das man bei einem Modell mit stochastischer Volatilität hat, ist die daraus resultierende noch größere Unvollständigkeit des Marktes, da man zum

¹³Bei einer Verteilung mit Wölbung(Kurtosis, Exzess):= $\frac{m_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3$ kleiner als diejenige von der Normalverteilung sagt man, dass sie schwere Enden hat.

¹⁴ Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ mit $B_0 = 0$ fast sicher und unabhängige Zuwächse heißt Brownsche Bewegung, falls

1. Die Zuwächse $B_t - B_s$, $0 \leq s \leq t$ sind $\mathcal{N}(0, t - s)$ verteilt.
2. Fast alle Pfade sind stetig.

Hedging nur den Spotpreis hat. Deshalb ist die folgende übliche Bewertungsformel für den Call nicht wirklich überzeugend [10]

$$C(t) = \mathbb{E}_Q([S_T - K]^+ e^{-r(T-t)}). \quad (3.2)$$

Hier bezeichnet r den risikolosen Zinssatz, S_T den Spotpreis zum Fälligkeitsdatum, Q ist das riskangepasste Maß und $[x]^+ = \max\{x, 0\}$.

3.2.3 Sprung Diffusion Prozess

Ein anderes Modell, das die zeitlich zusammentreffende extreme Nachfrage und Ausfälle bei Produktions- und Transportkapazitäten erklären könnte, ist der so genannte Jump-Diffusion Prozess. Die einfachste Variante ist, eine mit einer durch einen Poisson-Prozess¹⁵ definierte Sprung Komponente.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + U S_t dN_t$$

Hier sind μ und σ die konstante Trend und Volatilität, W_t ist die Brownsche Bewegung des stochastischen Teiles und N_t ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ , die die Frequenz der Sprünge bestimmt. U ist eine reelle Zufallsvariable für die Größe und die Richtung der Sprünge.

Obwohl dieser Prozess mehrere interessante Eigenschaften hat, ist die Annahme der Risikoneutralität bezüglich der Sprungkomponente, wie in [10] bemerkt, sehr unrealistisch. Analog wie oben ein der Probleme ist die Existenz von mehreren Zufallsgrößen im Modell (W_t, N_t, U) was wieder zu einer stark ausgeprägten Unvollständigkeit des Marktes führt. Das Bestimmen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q (siehe Gleichung (3.2)) ist auch nicht weniger problematisch.

3.2.4 Annahmen und Probleme

Das Hauptproblem bei den genannten Modellen ist das implizit vorausgesetzte Hedging mit dem Underlying. Wegen der Nichtspeicherbarkeit der Elektrizität ist das eine offensichtliche Hürde. Um sie umzugehen, probiert man statt mit dem Spotpreis mit Futures und Forwards zu hedgen. Diese Alternative ist aber ebenso fragwürdig, da es nicht klar ist, ob auf einem Strommarkt der fundamentale Zusammenhang zwischen Spot- und Futurepreise gilt.

¹⁵Ein rechtsstetiger Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum \mathbb{N}_0 und $N_0 = 0$ fast sicher heißt Poisson-Prozess mit Intensität λ falls

1. Die Folge der Wartezeiten $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist W_n λ -Exponential verteilt.
2. Der Sprungprozess $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist durch $S_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Für eine tiefer liegenden Einführung in den Methoden der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik siehe [5] und [35].

3.3 Forward Kurve Vorgang

3.3.1 Beschreibung

Eine günstige Eigenschaft der Future Kontrakte ist das Verschwinden des convenience yields (y) in deren Dynamik.

Angenommen wir haben eine geometrische Brownsche Bewegung für den Spotpreis

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - y)dt + \sigma dW_t. \quad (3.3)$$

Wenn wir jetzt

$$F(t) = S(t)e^{(r-y)(T-t)} \Leftrightarrow S(t) = F(t)e^{-(r-y)(T-t)}$$

differenzieren bekommen wir:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= (r - y)F(t)e^{-(r-y)(T-t)} + \frac{dF(t)}{dt}e^{-(r-y)(T-t)} = \\ &= e^{-(r-y)(T-t)} \left((r - y)F(t) + \frac{dF(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

also

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{e^{-(r-y)(T-t)} \left((r - y)F(t) + \frac{dF(t)}{dt} \right) dt}{F(t)e^{-(r-y)(T-t)}} = (r - y)dt + \frac{dF(t)}{F(t)}$$

und zusammen mit (3.3) folgt

$$(r - y)dt + \sigma dW_t = (r - y)dt + \frac{dF(t)}{F(t)}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Dynamik von $F(t)$ von y unabhängig ist.

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \sigma dW_t$$

Jetzt schlagen wir das folgende Modell für den Forward Preis vor

$$F(t, T) = p_0 + \varphi(\omega(t, T), L(t, T)) \quad (3.4)$$

wobei

- p_0 der **Baseload** Preis
- $\omega(t, T)$ der Forward Preis von dem Rohstoff(Erdgas, Kohle)
- $L(t, T)$ die erwartete Nachfrage
- φ die Zusammenhangsfunktion

sind. Eine Möglichkeit für φ wäre eine zweiparametrische Funktion vom folgenden Bauart

$$\varphi(\omega, L) = \omega e^{aL+b}.$$

Hier sind a und b positive Konstanten. Diese Funktion stellt eine Annäherung dar, die in der Realität betrachtete exponentielle Abhängigkeit der Kosten von der Nachfrage. Wenn wir hier noch zusätzlich voraussetzen, dass die Nachfrage L normalverteilt ist und dass der Forward Preis von dem Rohstoff eine geometrische Brownsche Bewegung ($\frac{d\omega_t}{\omega_t} = \mu dt + \sigma dW_t$) ist, wird (3.4) zu

$$F_t = p_0 + \omega_t e^{aL_t+b}.$$

Das heißt die Future Preise $F(t, T)$ sind bis auf die Konstante p_0 genauso durch eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben. Damit könnte man die Optionen mit den seit längerer Zeit bekannten Formeln bewerten.

3.3.2 Annahmen und Probleme

Genauso wie bei jedem Modell wurden auch bei dem Letzten gewisse Annahmen getroffen, deren Plausibilität wir jetzt überlegen werden.

Um eine Evaluierung der Elektrizität Forward-Preise möglich zu machen, braucht man ein passendes Modell für die Rohstoffpreise. Die Frage, die hier interessant wäre, ist, ob man wirklich die relevanten Rohstoffe für den konkreten Strommarkt identifizieren kann.

Die oben konkret gewählte Funktionsklasse für φ könnte viel größer sein und Funktionen viel komplexerer Bauart enthalten. Jedoch durch eine andere Wahl der Funktion φ ginge die bequeme Struktur von $F(t, T)$ als geometrische Brownsche Bewegung verloren.

3.4 Zusammenfassung

Nachdem wir ein paar Modelle kennen, werden wir versuchen das Wichtigste zusammenzufassen. Die meisten von der Literatur bekannten Modelle beschäftigen sich mit der Bewertung einfacheren Stromderivaten, und nicht die durch die vielen Beschränkungen definierte Swing Option. Sogar in diesem einfacheren Fall haben diese Modelle den großen Nachteil, dass sie auf viele Annahmen beruhen, deren Gültigkeit in einem weit geringeren Ausmaß für den Strommarkt gegeben ist, als für den Aktienmarkt. Dadurch stellt sich die Frage, ob es ein anderer Zugang als der typische klassische finanzmathematische Ansatz, im Falle von der komplizierten Swing Option auf dem stark nichtvollständigen Strommarkt, nicht leichter zum Ziel führen würde.

4 Ein Optionsinhaber-Verhaltensmodell

In diesem Kapitel werden wir ein relativ einfaches Modell für das optimale Verhalten eines Swingoptionsinhabers konstruieren. Wie wir oft bisher erwähnt haben, spielt bei der Bewertung eines solchen flexiblen Kontraktes das Verhalten des Optionsinhabers eine wesentliche Rolle. Wir werden daher ein Verhaltensmodell erstellen und implementieren, das die Haltung des Inhabers in Abhängigkeit der Spotpreisszenarios modelliert und uns in einem weiteren Schritt eine plausible Bewertung eines Swingkontraktes erlauben wird.

4.1 Das Modell und das zugehörige Lineares Programm

Für unser Verhaltensmodell konzentrieren wir uns auf eine einfache Swing Option mit lokalen und globalen Schranken aber ohne Swinganzahlbeschränkung und keine Sperrzeit sowie keine Penalty-Funktion. Dadurch wird gesichert, dass die Menge der zulässigen Ausübungsmuster konvex bleibt, und wir uns Methoden der konvexen Optimierung bedienen und unser Modell als mehrstufige stochastische Optimierungsaufgabe auffassen können.

Wir gehen von Spotpreisszenarios aus, die in einem Spotpreisszenariobaum zusammengefasst sind. Nehmen wir an, der Inhaber der Swing Option maximiert seinen erwarteten Profit. Wir betrachten ihn als Spieler in einem mehrstufigen stochastischen Spiel und modellieren sein Verhalten als seine optimale Spielstrategie. Als Profit betrachten wir einfach die Einnahmen, die er machen könnte, falls er der bezogene Strom direkt am Spotpreismarkt verkaufen würde, also einfach die Differenz zwischen Spotpreis und Kontraktpreis mal Volumen. Da durch die Information, welche Spotpreise bis zum aktuellen Moment tatsächlich eingetreten sind, der Inhaber die möglichen Preise im für den nächsten Moment einschränken kann, kann er schrittweise zu jedem Zeitpunkt seinen Ausübungspfad weiter anpassen, um den erwarteten Profit zu maximieren. Dabei werden natürlich seine Entscheidungen, durch die Swing Option Restriktionen und die schon getroffenen Entscheidungen, beschränkt.

Formulieren wir jetzt unsere Problemstellung mathematisch genauer. Seien also gegeben:

- Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$.
- \mathbb{P} wird durch die Eintrittswahrscheinlichkeit p_s für jeden der Szenarios w_s definiert.
- Eine Filtration auf dem Raum $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ für die $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt. Durch diese Filtration wird ein Szenariobaum \mathcal{T} definiert.
- Für den Baum \mathcal{T} benutzen wir folgende Funktionen, Mengen und Größen:

\mathcal{N}	Die Menge aller Knoten
\mathcal{S}	Die Menge aller Szenarios
$n(s, t)$	Der Knoten zum Szenario s im Zeithorizont t
$t(n)$	Zeithorizont vom Knoten n
$S(n)$	Menge aller Szenarios zum Knoten n
$N(s)$	Menge aller Knoten zum Szenario s , $N(s) = \{n \in \mathcal{N} s \in S(n)\}$
N	Die Anzahl der Knoten des Baumes $N := \mathcal{N} $
T	Die Anzahl der Stufen (Zeitpunkte)
S	Die Anzahl der Szenarios $S := \mathcal{S} $

- Ein zu \mathbb{F} adaptierter Spotpreisprozess $(\xi_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ mit der Realisierungsmatrix $\Xi = (\xi_{s,t})$ ($\xi_{s,t} = \xi_t(\omega_s)$).
- Ein zu \mathbb{F} adaptierter Ausübungsprozess $(d_t)_{t \in \{1, \dots, T\}}$ mit der Realisierungsmatrix $D = (d_{s,t})$ ($d_{s,t} = d_t(\omega_s)$). Entscheidungen des Optioninhabers nur von der bis zum aktuellen Moment verfügbaren Information über die **Spotpreisentwicklung** abhängen ¹⁶.
- Die Realisierungen der beiden adaptierten Prozesse (ξ_t) und (d_t) auf dem Szenariobaum \mathcal{T} bezeichnen wir entsprechend mit $\xi^{\mathcal{T}} = (\xi_1^{\mathcal{T}}, \dots, \xi_N^{\mathcal{T}})$ wobei $\xi_{n(s,t)}^{\mathcal{T}} = \xi_{s,t}$ und $d^{\mathcal{T}} = (d_1^{\mathcal{T}}, \dots, d_N^{\mathcal{T}})$ wobei $d_{n(s,t)}^{\mathcal{T}} = d_{s,t}$.
- Die Swing Option wird durch den Kontraktpreis pro Einheit K (Strikepreis) und folgende Beschränkungen definiert:

$$\begin{aligned}
d_n^{\mathcal{T}} - d_0 &\leq l_{t(n)}^A \quad \forall n \in \mathcal{N} \\
d_n^{\mathcal{T}} - d_0 &\geq l_{t(n)}^1 \quad \forall n \in \mathcal{N} \\
\sum_{n \in N(s)} d_n^{\mathcal{T}} &\leq \text{Max} \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
\sum_{n \in N(s)} d_n^{\mathcal{T}} &\geq \text{Min} \quad \forall s \in \mathcal{S}
\end{aligned}$$

Wie schon im Abschnitt 2.4 das gemacht wurde bezeichnen wir die Menge der zulässigen Ausübungsmuster mit \mathcal{D} .

- Der Profit wird in jedem Zeitpunkt t durch $P_t = (\xi_t - K)d_t$ gegeben also dann ist der Gesamtprofit durch die Zufallsvariable $P^G((d_t), (\xi_t)) := \sum_{t=1}^T P_t = \sum_{t=1}^T (\xi_t - K)d_t$ gegeben.

In jedem Baumknoten $n \in \mathcal{N}$ wählt der Optionsinhaber unter Berücksichtigung der Optionsrestriktionen und seiner bisherigen Entscheidungen die ausgeübte Menge so, um seinen erwarteten Profit zu maximieren.

$$(d_t^{\text{max}}) := \operatorname{argmax}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} P_T^G((d_t), (\xi_t)) : (d_t) \in \mathcal{D}, (d_t) \text{ adaptiert zu } \mathbb{F}\}$$

Wie schon bewiesen wurde, ist die Menge der zulässigen Ausübungsmuster, bei Berücksichtigung der Restriktionen für die maximal erlaubte Anzahl von Swings und die

¹⁶Diese Art von Unabhängigkeit einer Entscheidung von Zukunftsinformation wird im Kontext der stochastische Optimierung als **non-anticipativity** bezeichnet

Sperrzeit, nicht konvex. Wenn wir diese beide Arten von Beschränkungen auslassen, bekommen wir ein konvexes Problem, das wegen der Linearität der Zielfunktion und die Polytop-Form der zulässige Menge sich als lineares Problem formulieren lässt. So bekommen wir für die Pfade des adaptierten Prozesses $d_{s,t}$ folgendes lineares Programm:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Maximiere (in } d_{s,t}\text{): } \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \sum_{t=1}^T (\xi_{s,t} - K) d_{s,t} \\ \text{Nebenbedingungen:} \\ d_{s,t} - d_0 \leq l_t^4 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \forall t = 1 \dots T \\ d_{s,t} - d_0 \geq l_t^1 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \forall t = 1 \dots T \\ \sum_{t=1}^T d_{s,t} \leq \text{Max} \quad \forall s \in \mathcal{S} \\ \sum_{t=1}^T d_{s,t} \geq \text{Min} \quad \forall s \in \mathcal{S} \\ d_{s_1,t} = d_{s_2,t} \quad \forall s_1, s_2, t : n(s_1, t) = n(s_2, t) \text{ (Non-anticipativity Nebenbedingungen)} \end{array} \right.$$

Dieses Problem umformuliert für die Realisierung d_n^T auf dem Baum sieht folgendermaßen aus:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Maximiere (in } d_n^T\text{): } \sum_{n \in \mathcal{N}} (\xi_n^T - K) (\sum_{s \in \mathcal{S}(n)} p_s) d_n^T \\ \text{Nebenbedingungen:} \\ d_n^T - d_0 \leq l_{t(n)}^4 \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ d_n^T - d_0 \geq l_{t(n)}^1 \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}(s)} d_n^T \leq \text{Max} \quad \forall s \in \mathcal{S} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}(s)} d_n^T \geq \text{Min} \quad \forall s \in \mathcal{S} \\ \text{Keine Non-anticipativity Nebenbedingungen} \end{array} \right.$$

Zur Veranschaulichung der Definition des LP-Problems siehe Abbildung 14. Für diesen kleinen Baum wäre die Zielfunktion bei der $d_{s,t}$ -Formulierung die Folgende:

$$\begin{aligned} & p_1((\xi_{1,1} - K)d_{1,1} + (\xi_{1,2} - K)d_{1,2} + (\xi_{1,3} - K)d_{1,3}) \\ & + p_2((\xi_{2,1} - K)d_{2,1} + (\xi_{2,2} - K)d_{2,2} + (\xi_{2,3} - K)d_{2,3}) \\ & + p_3((\xi_{3,1} - K)d_{3,1} + (\xi_{3,2} - K)d_{3,2} + (\xi_{3,3} - K)d_{3,3}) \\ & + p_4((\xi_{4,1} - K)d_{4,1} + (\xi_{4,2} - K)d_{4,2} + (\xi_{4,3} - K)d_{4,3}) \\ & + p_5((\xi_{5,1} - K)d_{5,1} + (\xi_{5,2} - K)d_{5,2} + (\xi_{5,3} - K)d_{5,3}) \end{aligned}$$

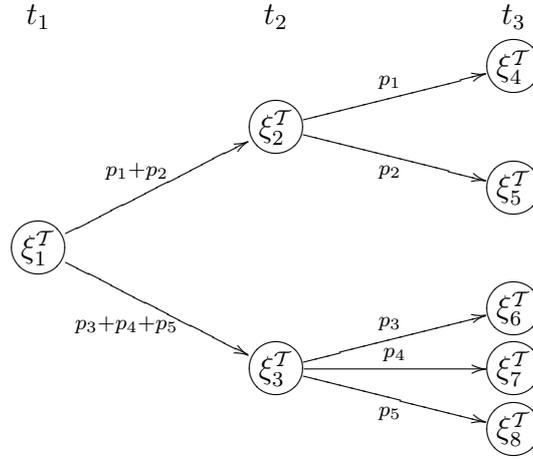
Die Zielfunktion bei der dazu gehörigen d_n^T -Formulierung ist die Folgende:

$$\begin{aligned} & p_1((\xi_1^T - K)d_1^T + (\xi_2^T - K)d_2^T + (\xi_4^T - K)d_4^T) \\ & + p_2((\xi_1^T - K)d_1^T + (\xi_2^T - K)d_2^T + (\xi_5^T - K)d_5^T) \\ & + p_3((\xi_1^T - K)d_1^T + (\xi_3^T - K)d_3^T + (\xi_6^T - K)d_6^T) \\ & + p_4((\xi_1^T - K)d_1^T + (\xi_3^T - K)d_3^T + (\xi_7^T - K)d_7^T) \\ & + p_5((\xi_1^T - K)d_1^T + (\xi_3^T - K)d_3^T + (\xi_8^T - K)d_8^T) \end{aligned}$$

Nach Summationsreihenfolgetausch, bekommt man folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned}
& (\xi_1^T - K)d_1^T(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \\
& + (\xi_2^T - K)d_2^T(p_1 + p_2) + (\xi_3^T - K)d_3^T(p_3 + p_4 + p_5) \\
& + (\xi_4^T - K)d_4^T p_1 + (\xi_5^T - K)d_5^T p_2 + (\xi_6^T - K)d_6^T p_3 \\
& + (\xi_7^T - K)d_7^T p_4 + (\xi_8^T - K)d_8^T p_5
\end{aligned}$$

Abbildung 14: Ein Beispiel für Spotpreisszenariobaum für die LP-Form



Hier ist die Vertauschung der Summenreihenfolge ersichtlich. Man sieht auch, dass die Dimension dieses LP gleich der Anzahl der Knoten ist.

4.2 Analysis der Abhängigkeiten des Lineares Programm von den Restriktionen

Da der Strikepreis K in den LP Formulierung des stochastischen mehrstufigen Problems vorkommt, stellt sich natürlich die Frage wie sowohl das Optimum als auch die Lösung des Problems von K abhängen. Bezeichnen wir diese Größen dafür mit $E(K)$ und $D(K)$, und betrachten wir sie als Funktionen von K . Formal heißt das Folgendes.

$$E(K) := \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ K \rightarrow \max \{ \sum_{n \in \mathcal{N}} (\xi_n^T - K) (\sum_{s \in S(n)} p_s) d_n^T : d_n^T \in \mathcal{D} \} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$D(K) := \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{M}|} \\ K \rightarrow \operatorname{argmax} \{ \sum_{n \in \mathcal{N}} (\xi_n^T - K) (\sum_{s \in S(n)} p_s) d_n^T : d_n^T \in \mathcal{D} \} \end{cases} \quad (4.2)$$

Wegen der Struktur von \mathcal{D} und der Linearität von der Zielfunktion sieht man:

Satz 4.2.1. *Die Funktion $D(K)$ ist eine stückweise konstante Funktion.*

Man kann Folgendes über die Funktion $E(K)$ zeigen.

Satz 4.2.2. *Die reelle Funktion $E(K)$ ist eine stetige stückweise lineare fallende konvexe Funktion.*

Beweis. Wir haben

$$E(K) := \max\{E_d(K) : d \in \mathcal{D}\}$$

wo alle $E_d(K)$ lineare Funktionen von K sind. Da es bekannt ist, dass das Maximum von lineare Funktionen eine stetige konvexe Funktion ist, folgt das auch für $E(K)$. Noch dazu gilt für die endliche Menge der Extrempunkte \mathcal{D}^* folgendes:

$$E(K) := \max\{E_d(K) : d \in \mathcal{D}\} = \max\{E_d(K) : d \in \mathcal{D}^*\}$$

was bedeutet dass $E(K)$ eine stückweise lineare Funktion mit endliche Anzahl verschiedener linearer Stücke ist. Von der Tatsache, dass alle $E_d(K)$ fallend sind, folgt dass deren Maximum $E(K)$ auch fallend ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Betrachten wir unsere Zielfunktion $E(K) = \sum_{n \in \mathcal{N}} f_n(K) d_n$ wieder. Da $f_n(K)$ alle affin linear in K sind können wir setzen

$$f_n(K) := a_n K + b_n \Rightarrow E(k) = K \sum_{n \in \mathcal{N}} a_n d_n + \sum_{n \in \mathcal{N}} b_n d_n$$

was bedeutet dass die Nullstellen der Fortsetzungen aller lineare Stücke von $E(K)$ in den folgenden Punkten sind

$$k_i = - \frac{\sum_{n \in \mathcal{N}} b_n d_n^i}{\sum_{n \in \mathcal{N}} a_n d_n^i}$$

oder in unserem Fall $f_n(k) := (\xi_n^T - K)(\sum_{s \in \mathcal{S}(n)} p_s)$ was bedeutet

$$k_i = \frac{\sum_{n \in \mathcal{N}} \xi_n^T (\sum_{s \in \mathcal{S}(n)} p_s) d_n^i}{\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{s \in \mathcal{S}(n)} p_s d_n^i} \quad (4.3)$$

was wegen der Eigenschaften von $E(K)$ die im Satz 4.2.2 gezeigt wurden die Newton Iteration für die Nullstellen von $E(K)$ liefert.

Für die weitere Analyse wäre interessant die Abhängigkeit des maximal erreichbaren Profites von der im Kontrakt angebotenen Flexibilität. Dafür betrachten wir folgende spezielle Form unseres Optimierungsproblems. Zuerst setzen wir $l_{t(n)}^4 = -l_{t(n)}^1 := l$, $Min = Td_0 - L$ und $Max = Td_0 + L$. Dadurch bekommen wir folgendes LP mit zwei Parametern l und L :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Maximiere (in } d_n^T): \sum_{n \in \mathcal{N}} (\xi_n^T - K)(\sum_{s \in \mathcal{S}(n)} p_s) d_n^T \\ \text{Nebenbedingungen:} \\ |d_n^T - d_0| \leq l \quad \forall n \in \mathcal{N} \\ |\sum_{n \in \mathcal{S}(n)} d_n^T - Td_0| \leq L \quad \forall s \in \mathcal{S} \end{array} \right.$$

In diesem Fall benutzen wir für die Menge der zulässigen Ausübungsmuster die folgende Notation:

$$\mathcal{D}(l, L) := \{d^T : |d_n^T - d_0| \leq l \quad \forall n \in \mathcal{N}, |\sum_{n \in \mathcal{N}(s)} d_n^T - Td_0| \leq L \quad \forall s \in \mathcal{S}\}. \quad (4.4)$$

Analog wie wir das für $E(K)$ getan haben, können wir folgende Funktion definieren:

$$E(l, L) := \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ K \rightarrow \max\{\sum_{n \in \mathcal{N}} (\xi_n^T - K) (\sum_{s \in S(n)} p_s) d_n^T : d_n^T \in \mathcal{D}(l, L)\}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Jetzt gehen wir von der Tatsache aus, dass $D(l_1, L) \subseteq D(l_2, L)$ wenn $l_1 \leq l_2$ und $D(l, L_1) \subseteq D(l, L_2)$ wenn $L_1 \leq L_2$ folgt, dass $E(l, L)$ nicht fallend in den beiden Argumente ist. Noch dazu, wenn man das duale Problem betrachtet und analog wie beim letzten Beweis argumentiert, kann man Folgendes zeigen:

Satz 4.2.3. *Die reelle Funktion $E(l, L)$ ist eine stetige stückweise lineare nicht fallende konkave Funktion in beiden Argumenten.*

4.3 Die Implementation des Modelles in Matlab

Das im letzten Abschnitt beschriebenen Modell wurde in Matlab programmiert. Hier folgt eine kurze Beschreibung der der Implementation und die Lösung auf einem kleinen Baum.

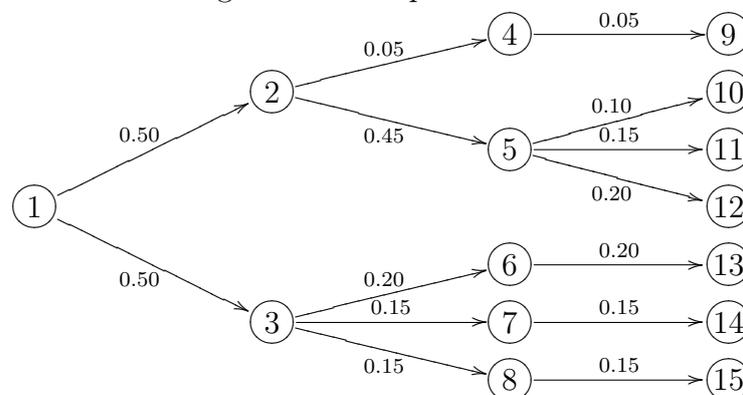
4.3.1 Die Datenstrukturen

Als Erstes beschreiben wir die benutzten Datenstrukturen. Vergleiche mit der mathematischen Formulierung des Problems vom vorletzten Abschnitt. Um das Verständnis zu erleichtern, werden wir, bei der Beschreibung einen Beispielbaum benutzen und die Strukturen anhand dieses Beispiels demonstrieren.

Die Struktur des stochastischen Szenariobaumes \mathcal{T} wird in der Form eines Vektors `vecNumberOfSuccessors` übergeben, welche die Anzahl der Nachfolgerknoten jedes Knotens angibt. Knoten der letzten Stufe werden nicht berücksichtigt da sie keine Nachfolger aufweisen. Die Nummerierung der Baumknoten beginnt bei 1 und endet bei N (siehe Abbildung 15). Für dieses Beispielbaum wäre der Strukturvektor

`vecNumberOfSuccessors=[2 2 3 1 3 1 1 1].`

Abbildung 15: Ein Beispielszenariobaum



Eine weitere Möglichkeit für die eindeutige Beschreibung der Struktur des Baumes \mathcal{T} wäre der Vektor der Indizes der Vorgängerknoten `vecPredecessors`, der im konkreten Fall folgendermaßen aussieht:

```
vecPredecessors=[0 1 1 2 2 3 3 3 4 5 5 5 6 7 8].
```

Weitere abgeleitete Größen und Strukturen für den Beispielbaum sind:

- Die Anzahl der Stufen T

```
Stages=4
```

- Die Anzahl der Knoten N

```
Nodes=15
```

- Die Anzahl der Szenarios S

```
Scenarios=7
```

- Der Vektor der Größe der Stufen $\{|\{n \in \mathcal{N}|t(n) = 1\}|, |\{n \in \mathcal{N}|t(n) = 2\}|, \dots, |\{n \in \mathcal{N}|t(n) = T\}|\}$

```
vecStageSizes=[1 2 5 7]
```

- Die Menge der Knoten zu jeder Stufe $\{\{n \in \mathcal{N}|t(n) = 1\}, \{n \in \mathcal{N}|t(n) = 2\}, \dots, \{n \in \mathcal{N}|t(n) = T\}\}$

```
cellStageNodes={ [1], [2 3], [4 5 6 7 8], [9 10 11 12 13 14 15] }
```

- Die Matrix der Knoten zu jedem Szenario $\{N(1), N(2), \dots, N(S)\}$ (beschreibt die Struktur des Baumes auch eindeutig).

```
matScenarioNodes=[[1 2 4 9]; [1 2 5 10]; [1 2 5 11]; [1 2 5 12]; [1 3 6 13]; [1 3 7 14]; [1 3 8 15]]
```

- Die Menge der Szenarios zu jedem Knoten $\{S(1), S(2), \dots, S(N)\}$ (beschreibt die Struktur des Baumes auch eindeutig).

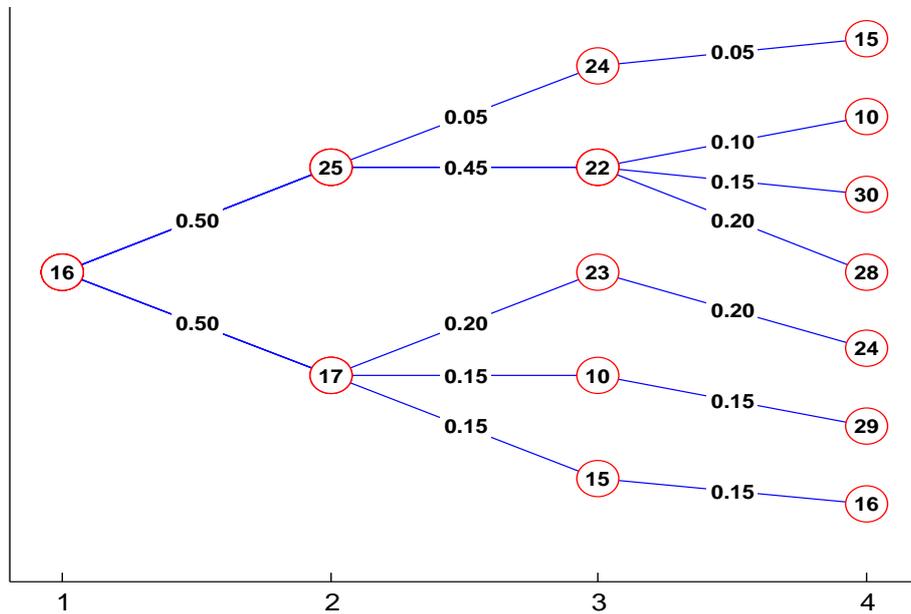
```
cellScenariosToNode={ [1 2 3 4 5 6 7], [1 2 3 4], [5 6 7], [1], [2 3 4], [5], [6], [7], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] }
```

Wenn wir den Szenariobaum mit Knotenwerte und Szenariowahrscheinlichkeiten versehen wollen bekommen wir zusätzlich folgende zwei Strukturen (siehe Abbildung 16).

- Vektor der Knotenwerte $\xi^T = (\xi_1^T, \dots, \xi_N^T)$ (Spotpreise)

```
vecNodeValues=[16 25 17 24 22 23 10 15 15 10 30 28 24 29 16]
```

Abbildung 16: Der Beispielszenariobaum mit Knotenwerte



- Vektor der Szenariowahrscheinlichkeiten $p = (p_1 \dots p_S)$ (Terminal-Wahrscheinlichkeiten)

```
vecScenarioProbabilities=[0.05 0.10 0.15 0.20 0.20 0.15 0.15]
```

- Eine abgeleitete Struktur unter der Berücksichtigung der Struktur des Baumes wäre der Vektor der Knotenwahrscheinlichkeiten $\{\sum_{s \in S(1)} p_s, \sum_{s \in S(2)} p_s, \dots, \sum_{s \in S(n)} p_s\}$.

```
vecNodeProbabilities=[1 0.5 0.5 0.05 0.45 0.2 0.15 0.15 0.05 0.1  
0.15 0.2 0.2 0.15 0.15]
```

Die Swing Option wird folgendermaßen bestimmt

- Die Vektoren der lokalen unteren und oberen Schranken `vecLocalMin` und `vecLocalMax`
- Die globalen unteren und oberen Schranken `LowerGlobalBound` und `UpperGlobalBound`
- Strikepreis `StrikePrice`

Für die Ausübung der Swing Option als Lösung der Optimierungsaufgabe benutzen wir den Vektor der Entscheidungen in jedem Knoten ($d^T = (d_1^T, \dots, d_N^T)$) `vecDemand`, sowie die daraus abgeleitete Matrix der Entscheidungen pro Szenario und Zeitpunkt ($D = d_{s,t}$) `matScenariosDemand`.

4.3.2 Die Funktionen

Hier erwähnen wir die wichtigsten Funktionen die wir für die Lösung des Optimierungsproblems implementiert haben.

Funktion für die Generierung alle wichtigen abgeleiteten Strukturen aufgrund der Vektor der Nachfolgeranzahl.

```
ScenarioTreeProperties (vecNumberOfSuccessors)
```

Funktion für die Lösung des Optimierungsproblems.

```
OptimalDemand (LowerGlobalBound, UpperGlobalBound, vecLocalMin, vecLocalMax,
vecNumberOfSuccessors, vecNodeValues, vecScenarioProbabilities,
StrikePrice)
```

Für die Untersuchung der Abhängigkeit des maximalen erwarteten Profits von den Strikepreis bzw. von den lokalen und globalen Schranken wurden die beiden Testprogramme ExpectedProfitScript und LocalGlobalScript benutzt. Die Newton-Iteration wurde in NewtonScript realisiert.

Für den Fall eines Optionsinhabers, der die volle Information über den zukünftigen Spotpreis hat, wurde FullInformationScript implementiert.

Weiters wurden für die Umwandlung zwischen beiden Arten, wie man der Struktur des Baumes beschreiben kann, die zwei Funktionen NumberOfSuccessors2Predecessor und Predecessor2NumberOfSuccessors geschrieben.

Wenn man einen Teilbaum (vom Wurzelknoten bis zur gewissen Stufe) aus einem anderen bekommen will, kann man die Funktion Subtree benutzen.

Die konkrete Implementierung der Funktionen mit Quellcode kann man in Anhang D sehen.

4.3.3 Die Lösung

Betrachten wir jetzt eine konkrete Swing Option mit lokalen Schranken entsprechend $\text{vecLocalMin}=[1 \ 2 \ 1 \ 0]$ und $\text{vecLocalMax}=[4 \ 5 \ 4 \ 6]$, globalen Schranken entsprechend $\text{LowerGlobalBound}=5$ und $\text{UpperGlobalBound}=10$ und $\text{StrikePrice}=20$. Für den Spotpreisbaum vom letzten Kapitel liefert die Funktion OptimalDemand die Lösung d_n^T .

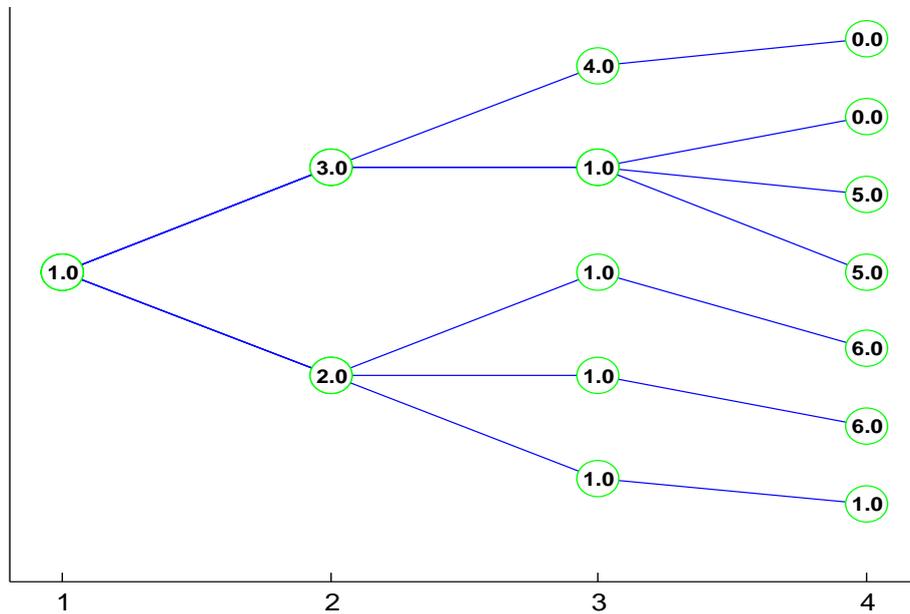
```
vecDemand'=[1 3 2 4 1 1 1 1 0 0 5 5 6 6 1].
```

Das entspricht folgenden Ausübungsmustern $D = d_{s,t}$

```
matScenariosDemand =
  1.0000    3.0000    4.0000    0.0000
  1.0000    3.0000    1.0000    0.0000
  1.0000    3.0000    1.0000    5.0000
  1.0000    3.0000    1.0000    5.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    1.0000
```

Bei diesem Ausübungsprozess würde der Vektor der Profite der Inhaber in den verschiedenen Szenarios folgendermaßen aussehen $\text{Profits}=[27 \ 13 \ 63 \ 53 \ 17 \ 34 \ -19]$ und der erwartete Profit würde 28.35 betragen.

Abbildung 17: Die Ausübungspfade als Baum



Den Ausübungsbaum kann man in Abbildung 17 sehen und die Werte der Ausübungspfade in Abbildung 18. Man erkennt gleich das die Pfade des Lösungsprozesses adaptiert an \mathcal{T} sind.

Die Abhängigkeit der maximalen erwarteten Profite von den Strikepreis kann man in Abbildung 19 sehen. Es ist leicht zu erkennen, dass dieser Zusammenhang eine stetige stückweise lineare fallende konvexe Funktion ist (siehe Satz 4.2.2).

Mit Hilfe vom Newton-Verfahren (siehe (4.3)) kann man die Nullstelle dieser Funktion (also den Strikepreis bei dem der Erwartete Profit 0 wird) numerisch bestimmen. Wenn man bei Strikepreis `Strikeprice=min(vecNodeValues)` startet, kommt man im konkreten Fall auf den Strikepreis $K = 23.2775$ in drei Iterationsschritte bei denen die erwartete Profite und die Strikepreise entsprechend folgende Werte haben.

```
vecStrikePrices=[10 22.2859 23.2775]
```

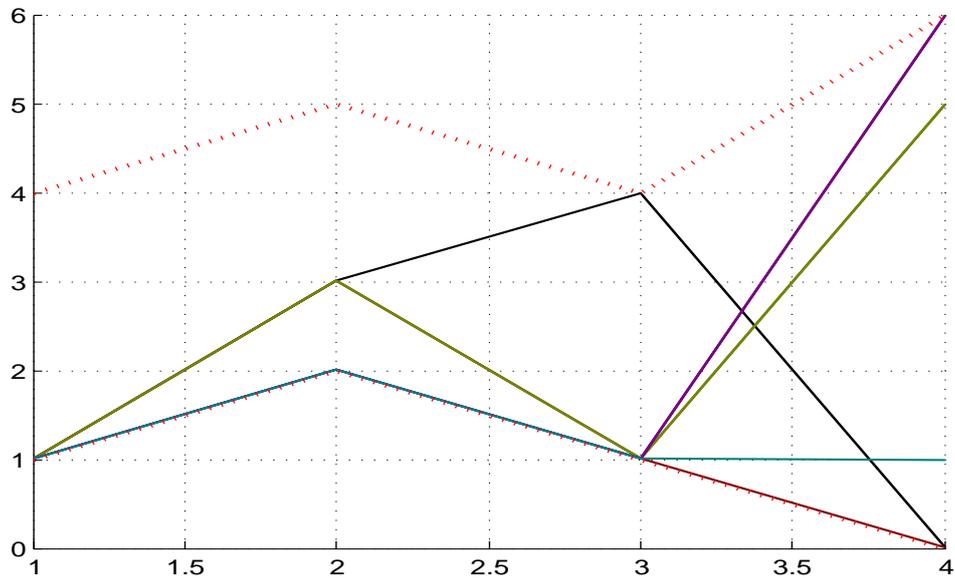
```
vecExpectedProfits=[121.15 8.5773 0.0000]
```

Für die Abhängigkeit der maximal erreichbare erwartete Profit von der Breite der lokalen und der globalen Schranken, also die Funktion $E(l, L)$, bekommen wir den in Abbildung 20 dargestellten Graphen. Wie im Satz 4.2.3 gezeigt wurde, ist das eine stetige stückweise lineare wachsende konkave Funktion.

4.3.4 Die Lösung bei voller Information

Vergleichen wir jetzt den erwarteten Profit für den Szenariobaum von oben mit dem Profit, den man erzielen würde, falls man die volle Information hat, welche der Spotpreisszenarios eintreten wird. Es wird auch dieselbe Swing Option mit gleichen Konditionen wie

Abbildung 18: Die Werte der Ausübungspfade (Die punktierte Linie stellt die lokalen Schranken dar)



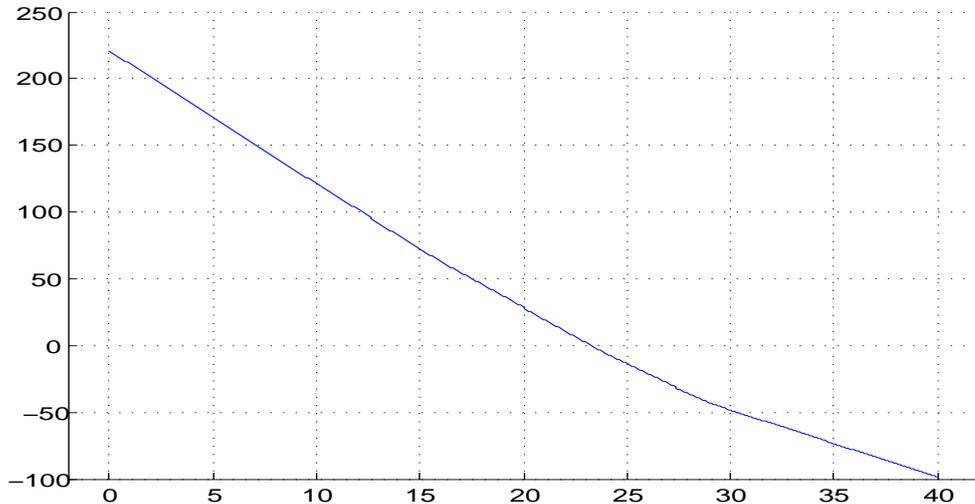
oben untersucht. So bekommen wir die folgenden szenarioabhängigen Ausübungspfade $d_{s,t}$:

```
matScenariosDemand =
  1.0000    5.0000    4.0000    0.0000
  1.0000    5.0000    4.0000    0.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    2.0000    1.0000    6.0000
  1.0000    3.0000    1.0000    0.0000
```

Die Pfade sind in Abbildung 21 dargestellt. Man erkennt gleich, dass zum Unterschied vom letzten Fall hier kein adaptierter Prozess vorliegt.

Bei diesem Ausübungsprozess würde der Vektor der Profite der Inhaber in den verschiedenen Szenarios folgendermaßen aussehen $\text{Profits}=[37 \ 29 \ 68 \ 56 \ 17 \ 34 \ -18]$ und der erwartete Profit würde 31.95 betragen. Das letzte Ergebnis verglichen mit der Lösung ohne Information ergibt eine Verbesserung des erwarteten Profits von 3.60 Einheiten, was auf die non-anticipativity Nebenbedingungen zurückzuführen ist. Die Werte der Ausübungspfade in diesem Fall sind in Abbildung 21 zu sehen, wo man leicht auch die Tatsache erkennen kann, dass dieser Ausübungsprozess nicht mehr an den Baum \mathcal{T} adaptiert ist. Für die eine allgemeinere Diskussion dieser Sachverhalte siehe Anhang B.

Abbildung 19: Maximalen erwarteten Profite als Funktion des Strikepreises



4.4 Die Bewertung des Kontraktes

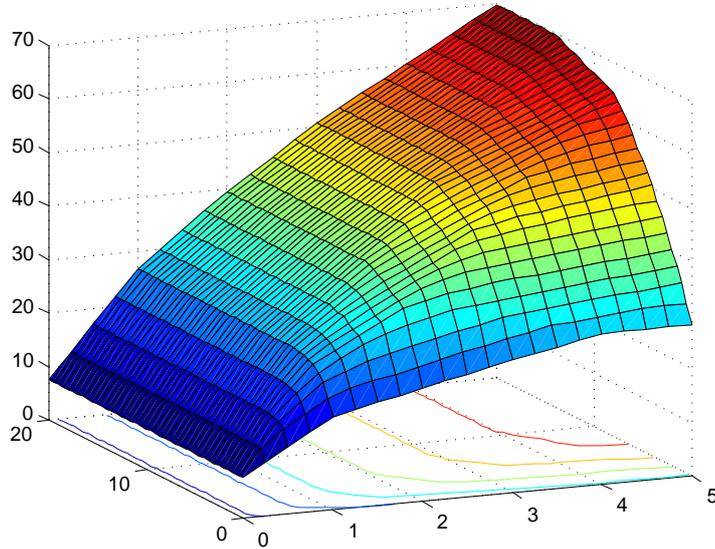
Jetzt, nachdem wir ein Verhaltensmodell haben, könnten wir einen Swing Kontrakt bewerten. Dafür würden wir zusätzlich auch ein Verhaltensmodell, das zu jedem szenario-abhängigen Ausübungspfad eine passende Aktion des Emittenten bestimmt, brauchen. Als Nächstes werde ich ein Modell für den Verkäufer der Option kurz präsentieren. Für weitere Details sei auf [23] hingewiesen.

Wir gehen von einem Verkäufer der Option aus, der kein Produzent von Elektrizität ist und nur als Händler am Markt agieren kann. Auch nehmen wir an der Emittent möchte sein Kostenrisiko minimieren, indem er schon existierende auf dem Strommarkt vorhandene Produkte verwendet um das Ausübungsmuster des Inhabers der Option am besten zu decken. Wegen der stark ausgeprägten Unvollständigkeit des Strommarktes ist eine komplette Deckung des Bedarfs des Inhabers nicht realistisch und dadurch eine risikoneutrale Position unmöglich (siehe Abbildung 6). Weiter wird es angenommen, dass er am Anfangszeitpunkt ($T = 0$) seine Entscheidung über den Kauf von Hedging Produkte treffen soll und die Unterschiede zu den tatsächlich bezogenen vom Inhaber Strommengen am Spotmarkt auszugleichen sind.

Zusätzlich zu den Bezeichnungen vom Kapitel 4.1 führen wir noch folgende Notation ein:

- Die Auslieferungsmuster der M Hedging-Instrumente sind in einer Matrix aus $\mathbb{R}^{M \times T}$ zusammengefasst. Das Element $\tau_{m,t}$ dieser Matrix definiert die Strommenge pro Auslieferungsmuster m zum Zeitpunkt t .
- Die Preise der Hedging-Instrumente sind in den Vektor $\pi = (\pi_m) \in \mathbb{R}^M$ enthalten.
- Die Anzahl der zugekauften Kontrakte von jeder der Hedging-Instrumente wird durch den Vektor $x = (x_m) \in \mathbb{R}^M$ repräsentiert.

Abbildung 20: Die Wirkung der Flexibilität



Der Profit/Verlust bei Szenario s sieht folgendermaßen aus

$$Y(x, K, D) = K \sum_{t=1}^T d_{s,t} + \sum_{t=1}^T \xi_{s,t} \left[\sum_{m=1}^M x_m \tau_{m,t} - d_{s,t} \right] - \sum_{m=1}^M \pi_m x_m. \quad (4.6)$$

Der erste Summand ist der vom Optionsinhaber bezahlten Betrag für die Ausübung seiner Rechte. Der Ausdruck in den Klammern stellt die Strommengendifferenz dar und dadurch steht die ganze zweite Summe für die am Spotmarkt ausgeglichene Differenz. Der letzte Summand ist der Preis der Hedging-Instrumente. Es ist klar das $Y(x, K, D)$ eine von der Hedging-Entscheidung x , dem Strikepreis K und den Ausübungspfaden $D = (d_{s,t})$ abhängige Zufallsvariable ist.

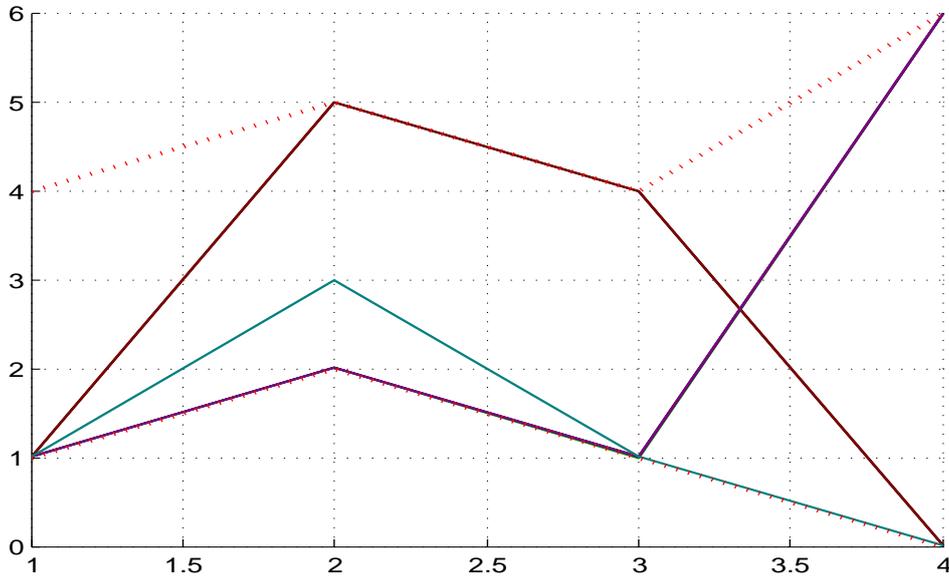
Ein plausibler Ziel des Emittenten wäre den Strikepreis K , unter der Risikobeschränkung $\mathbb{P}\{Y(x, K, D) < 0\} \leq \alpha$, zu minimieren. In diesem Fall haben wir das folgende Optimierungsproblem

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Minimiere (in } (x, K)\text{): } K \\ \text{Nebenbedingung:} \\ \mathbb{P}\{Y(x, K, D) < 0\} \leq \alpha \end{array} \right.$$

Da es sich in diesem Fall um eine nicht konvexe Optimierungsaufgabe handelt, ersetzt man die value-at-risk Bedingung ($\mathbb{P}\{Y(x, K, D) < 0\} \leq \alpha \Leftrightarrow \mathbb{V}@\mathbb{R}_\alpha[Y(x, K, D)] \geq 0$) durch eine stärkere average value-at-risk Bedingung, die das Problem sogar linearisiert.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Minimiere (in } (x, K)\text{): } K \\ \text{Nebenbedingung:} \\ \text{AV}@\mathbb{R}_\alpha[Y(x, K, D)] \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Abbildung 21: Die Werte der Ausübungspfade bei voller Information abhängig vom Spotpreisszenario (Die punktierte Linie stellt die lokalen Schranken dar)



Sowohl die Lösung x dieser Optimierungsaufgabe als auch das Minimum K sind von dem Ausübungsmuster D abhängig, also $x = x(D)$ und $K = K(D)$. Andererseits wissen wir von den Kapiteln 4.1 und 4.2, dass $D(K)$ selbst von K abhängt. So bekommen wir eine stochastische spieltheoretische Situation, in der wir die Gleichgewichtspunkte suchen. Dieses lässt sich, unter der Benutzung der Funktion $D(K)$, wieder als eine Optimierungsaufgabe auffassen.

$$\begin{cases} \text{Minimiere (in } (x, K)\text{): } K \\ \text{Nebenbedingung:} \\ \text{AV@R}_\alpha[Y(x, K, D(K))] \geq 0 \end{cases}$$

Da es sich, wie schon im Satz 4.2.1 gezeigt wurde, bei $D(K)$ um eine stückweise konstante Funktion handelt,

$$D(K) = d_i, \quad \text{wenn } \kappa_i \leq K \leq \kappa_{i+1} .$$

kann man in jedem der Bereiche für K , wo $D(K)$ konstant bleibt, das Problem 4.7 getrennt unter der zusätzlichen Nebenbedingung $\kappa_i \leq K \leq \kappa_{i+1}$ lösen und davon das Kleinste nehmen.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir ein Verhaltens Model für den Optionsinhaber vorgestellt und es als eine stochastische Optimierungsaufgabe formuliert. Wir sind dabei ausgegangen, dass er sein Profit, das wir als die Differenz zwischen Spotpreis und Kontraktpreis

mal bezogenes Volumen angesehen haben, maximiert, indem er an dem Spotmarkt handelt. Weiters wurden mehrere verschiedene Aspekte der Lösung besprochen und ein paar wichtige Eigenschaften bewiesen. Anhang eines kleinen Beispiels wurden sowie die Datenstrukturen als auch die Funktionen die in Matlab implementiert worden sind vorgestellt. Zum Schluss wurde auch ein Verhaltensmodell für den Emittent der Option kurz präsentiert und besprochen, wie beide Modelle benutzt werden können, um einen Preis für den Swing Kontrakt zu evaluieren.

A Spieltheoretische Grundlagen

Hier werden einige grundlegende Begriffe und Ergebnisse aus der Spieltheorie, die unsere Überlegungen vom Kapitel 2.6 vertiefen und verallgemeinern, zusammengestellt. Für weitere Resultate sei auf [34] und [21] hingewiesen. Für die Einführung hier werde ich mich an [34] halten.

A.1 Einführung

Definition A.1.1. Wenn wir jedem Spieler in einem Spiel mit n Spielern eine Nummer i aus der Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ zuordnen, dann bezeichnen wir die Menge der möglichen Aktionen des Spielers S_i als seine *Strategien*.

Definition A.1.2. Das Resultat von jeder Runde $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \prod_{i \in I} S_i$ wird eine *Situation* genannt.

Definition A.1.3. Die Auszahlung für jeden Spieler in Abhängigkeit von der Situation s wird mit $H_i(s)$ bezeichnet und *Auszahlungsfunktion* genannt.

Definition A.1.4. Ein System

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

wobei I und $S_i (i \in I)$ Mengen und H_i auf $S = \prod_{i \in I} S_i$ definierte reelle Funktionen sind, nennt man ein *nichtkooperatives Spiel*.

Definition A.1.5. Ein nichtkooperatives Spiel Γ , für das eine Konstante c existiert, sodass $\sum_{i \in I} H_i(s) = c$ für alle s ist, wird ein *Konstantsummenspiel* genannt.

Definition A.1.6. Sei $s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ eine beliebige Situation und betrachten wir die neue Situation in der man s_i mit s'_i ersetzt, die wir mit $s \parallel s'_i$ bezeichnen. Eine Situation s wird dann *akzeptabel* genannt, wenn

$$H_i(s \parallel s'_i) \leq H_i(s)$$

für alle s'_i gilt.

Definition A.1.7. Eine Situation s die für alle Spieler akzeptabel ist, nennt man eine *Gleichgewichtssituation (Nash-Gleichgewicht)*.

Definition A.1.8. Zwei nichtkooperative Spiele

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H'_i\}_{i \in I} \rangle \\ \Gamma'' &= \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H''_i\}_{i \in I} \rangle \end{aligned}$$

die sich nur in den Auszahlungsfunktionen unterscheiden und Zahlen $k > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$H'_i(S) = kH''_i(S) + c_i \tag{A.1}$$

gilt, nennt man *strategisch äquivalent* ($\Gamma' \sim \Gamma''$).

Satz A.1.9. *Strategisch äquivalente Spiele besitzen die gleiche Gleichgewichtssituationen.*

Beweis. Sei $\Gamma' \sim \Gamma''$ und sei s^* eine Gleichgewichtssituation in Γ' . Das bedeutet, dass für alle $i \in I$ und $s_i \in S_i$ folgende Gleichung gilt:

$$H'_i(s^* \| s_i) \leq H'_i(s^*)$$

Dann nach (A.1) folgt:

$$kH''_i(s^* \| s_i) + c_i \leq kH''_i(s^*) + c_i$$

und da $k > 0$

$$H''_i(s^* \| s_i) \leq H''_i(s^*)$$

was bedeutet dass s^* eine Gleichgewichtssituation auch in Γ'' ist. \square

Definition A.1.10. Ein nichtkooperatives Spiel Γ für die $\sum_{i \in I} H_i(s) = 0$ ist, wird ein *Nullsummenspiel* genannt.

Satz A.1.11. *Jedes nicht kooperatives Konstantsummenspiel ist strategisch äquivalent zu einem Nullsummenspiel.*

Beweis. Wählen wir beliebige c_i sodass $\sum_{i \in I} c_i = c = \sum_{i \in I} H_i(s)$ und setzen:

$$H'_i(s) = H_i(s) - c_i$$

dann folgt $\sum_{i \in I} H'_i(s) = 0$. Das Spiel mit den Auszahlungsfunktionen H'_i und die gleiche I und S_i ist das gesuchte Nullsummenspiel. \square

Definition A.1.12. Ein nicht-kooperatives 2-Personen Spiel bei dem $H_2(s) = -H_1(s)$ wird *antagonistisch* genannt.

Bemerkung A.1.13. Es ist klar, dass ein antagonistisches Spiel ein Spezialfall von Nullsummenspiel ist.

Bemerkung A.1.14. Im Falle eines antagonistischen Spieles bezeichnet man S_1 und S_2 entsprechend mit A und B und die Auszahlungsfunktion für den ersten Spieler mit $H = H_1$. Es ist klar, dass für $H : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ $H_2(a, b) = -H_1(a, b)$ für alle Paare $(a, b) \in A \times B$ gilt.

Definition A.1.15. Eine Gleichgewichtssituation (a, b) im Falle eines antagonistischen Spieles muss folgende Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} H_1(a', b) &\leq H_1(a, b) \quad \forall a' \in A \\ H_2(a, b') &\leq H_2(a, b) \quad \forall b' \in B \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung aber ist äquivalent zu

$$-H_1(a, b') \leq -H_1(a, b) \Leftrightarrow H_1(a, b) \leq H_1(a, b')$$

also insgesamt mit der ersten Gleichung und $H_1(a, b) = H(a, b)$

$$H(a', b) \leq H(a, b) \leq H(a, b') \quad \forall a' \in A, \forall b' \in B$$

Einen solchen Punkt (a, b) nennt man *Sattelpunkt* von H .

Satz A.1.16. Für eine auf $A \times B$ definierte Funktion f gilt folgende Ungleichung

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y)$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x, y) &\leq \sup_x f(x, y) \quad \forall x, y \Rightarrow \\ \inf_y f(x, y) &\leq \inf_y \sup_x f(x, y) \end{aligned}$$

und da $\inf_y \sup_x f(x, y)$ eine Konstante ist folgt

$$\sup_x \inf_y f(x, y) \leq \inf_y \sup_x f(x, y)$$

□

Korollar A.1.17. Falls alle Extrema angenommen werden, dann gilt:

$$\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y)$$

Satz A.1.18. Damit eine auf $A \times B$ definierte Funktion f Sattelpunkte besitzt, ist es notwendig und hinreichend, dass folgende Minimax-Werte existieren

$$\max_x \inf_y f(x, y) \quad \text{und} \quad \min_y \sup_x f(x, y)$$

und dass die folgende Gleichung gilt:

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \min_y \sup_x f(x, y)$$

Beweis. Notwendig: Sei (x^*, y^*) ein Sattelpunkt, dann gilt

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y)$$

und da $f(x^*, y^*)$ konstant ist

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \Rightarrow \inf_y \sup_x f(x, y) \leq \sup_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \quad (\text{A.2})$$

und analog

$$f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \Rightarrow f(x^*, y^*) \leq \inf_y f(x^*, y) \leq \sup_x \inf_y f(x, y) \quad (\text{A.3})$$

also insgesamt

$$\inf_y \sup_x f(x, y) \leq \sup_x \inf_y f(x, y)$$

Aus Satz A.1.16 wissen wir, dass die umgekehrte Ungleichung auch gilt. Das heißt insgesamt haben wir:

$$\inf_y \sup_x f(x, y) = \sup_x \inf_y f(x, y)$$

Von (A.2) und (A.3) folgt auch dass die beiden Infima und Suprema angenommen werden da sie gleich dem Wert in (x^*, y^*) sind. Also es existieren die $\max_x \inf_y f(x, y)$ und $\min_y \sup_x f(x, y)$ und es gilt

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \min_y \sup_x f(x, y)$$

Hinreichend: Seien die Punkte wo $\max_x \inf_y f(x, y)$ und $\min_y \sup_x f(x, y)$ deren Extrema erreichen x^* und y^* dann folgt

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \inf_y f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*) \quad (\text{A.4})$$

$$f(x^*, y^*) \leq \sup_x f(x, y^*) = \min_y \sup_x f(x, y) \quad (\text{A.5})$$

Da aber die beiden Minimax-Werte gleich sind folgt

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \inf_y f(x^*, y) = f(x^*, y^*) = \sup_x f(x, y^*) = \min_y \sup_x f(x, y)$$

was aber bedeutet dass

$$f(x^*, y) \geq \inf_y f(x^*, y) = f(x^*, y^*) = \sup_x f(x, y^*) \geq f(x, y^*) \quad \forall x, y$$

oder

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall x, y$$

□

Bemerkung A.1.19. Von (A.4) und (A.5) ist es ersichtlich, dass man die x^* und y^* unabhängig von einander wählt. Das heißt falls man (x_1^*, y_1^*) und (x_2^*, y_2^*) als Sattelpunkte hat, sind automatisch auch (x_1^*, y_2^*) und (x_2^*, y_1^*) Sattelpunkte und diese Eigenschaft wird *Rechteckeigenschaft* genannt.

Bemerkung A.1.20. Was ebenfalls klar ist, ist, dass der Wert der Funktion im Sattelpunkt gleich dem Wert der Minimaxes ist, was aber bedeutet, dass in jedem Sattelpunkt der Funktionswert gleich ist.

A.2 Matrix Spiele

Definition A.2.1. Ein antagonistisches Spiel, in dem jeder Spieler eine endliche Anzahl von Strategien hat, nennt man *Matrix Spiel*.

Bemerkung A.2.2. Jedes Matrix Spiel kann völlig durch die eine reelle Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei a_{ij} die Auszahlung für Spieler 1 angibt wenn er Strategie i wählt und sein Gegner Strategie j .

Bemerkung A.2.3. Eine Gleichgewichtssituation (i^*, j^*) bei einem Matrix Spiel ist dann gegeben, wenn

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \forall i, j$$

und die Existenz von einem solchen Sattelpunkt ist genau dann gesichert falls

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Wenn es es keinen Sattelpunkt gibt müssen die beiden Spieler sich die Differenz

$$\min_j \max_i a_{ij} - \max_i \min_j a_{ij}$$

aufteilen. Wie das passieren kann diskutieren wir als Nächstes.

Definition A.2.4. Eine Zufallsvariable, deren Werte die Strategien des Spielers sind, nennt man *gemischte Strategie*. Die Wahrscheinlichkeiten für die Wahl jeder einzelnen Strategie kann man in einem Vektor zusammenfassen.

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Definition A.2.5. Das Paar (X, Y) von zwei gemischte Strategien

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{und} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

nennt man *Situation in gemischten Strategien*. In diesem Fall ist die erwartete Auszahlung von Spieler 1

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X \mathbf{A} Y^T. \quad (\text{A.6})$$

Definition A.2.6. Eine *gemischte Erweiterung* von einem Matrix Spiel nennt man das antagonistische Spiel $\langle S_m, S_n, H \rangle$, indem die Menge der Strategien für die Spieler die Menge deren gemischte Strategien sind und die Auszahlungsfunktion wie in (A.6) gegeben ist.

Bemerkung A.2.7. Für ein Sattelpunkt (X^*, Y^*) muss Folgendes für alle $X \in S_m$ und $Y \in S_n$ gelten:

$$X \mathbf{A} Y^{*T} \leq X^* \mathbf{A} Y^{*T} \leq X^* \mathbf{A} Y^T \quad (\text{A.7})$$

Lemma A.2.1. Falls Y eine beliebige Strategie für Spieler 2 ist, dann gilt es für alle gemischte Strategien $X = (x_1, \dots, x_m)$ von Spieler 1

$$X \mathbf{A} Y^T \leq \max_i A_i \cdot Y^T$$

Beweis. Aus $A_i Y^T \leq \max_i A_i \cdot Y^T$ folgt $x_i A_i \cdot Y^T \leq x_i \max_i A_i \cdot Y^T$ für $x_i \geq 0$ und aufsummiert ergibt das wegen $\sum_{i=1}^m x_i = 1$:

$$X \mathbf{A} Y^T = \sum_{i=1}^m x_i A_i \cdot Y^T \leq \max_i A_i \cdot Y^T \sum_{i=1}^m x_i = \max_i A_i \cdot Y^T$$

□

Satz A.2.2. *Damit (X^*, Y^*) eine Gleichgewichtssituation ist, ist es notwendig und hinreichend dass für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ folgendes gilt:*

$$A_i Y^{*T} \leq X^* A Y^{*T} \leq X^* A_j \quad (\text{A.8})$$

Beweis. Da offensichtlich (A.8) ein Spezialfall von (A.7) für die reine Strategien ist, ist es klar, dass die Bedingung notwendig ist.

Wenden wir das letzte Lemma auf $A_i Y^{*T} \leq X^* A Y^{*T}$ also es folgt $X A Y^{*T} \leq X^* A Y^{*T}$. Und ganz analog für die andere Seite, was dann auch zeigt, dass die Bedingung hinreichend ist. \square

Satz A.2.3. *Falls (i^*, j^*) eine Gleichgewichtssituation für das Matrix Spiel A ist, ist sie auch eine Gleichgewichtssituation für seine gemischte Erweiterung.*

Beweis. Also wir haben für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

was aber gleich (A.8) für die entsprechende reine Strategien X^* und Y^* ist. \square

Lemma A.2.4. *Für jedes $Y_0 \in S_n$ das Maximum $\max_X X A Y_0^T$ und für jedes $X_0 \in S_m$ das Minimum $\min_Y X_0 A Y^T$ existieren.*

Beweis. Wir haben eine lineare Funktion in alle x_1, \dots, x_m da

$$X A Y_0^T = \sum_{i=1}^m x_i A_i Y_0^T$$

was bedeutet, dass sie auch stetig ist und dadurch ihr Maximum auf der beschränkte geschlossene (also kompakte) Menge S_m annimmt. \square

Lemma A.2.5. *Für jedes $X_0 \in S_m$ existiert j_0 (abhängig von X_0) sodass $\min_Y X_0 A Y^T = X_0 A_{j_0}$ und für jedes $Y_0 \in S_n$ existiert i_0 (abhängig von Y_0) sodass $\max_X X A Y_0^T = A_{i_0} Y_0$.*

Beweis. Betrachten wir $X_0 A_{j_0} = \min\{X_0 A_j | j = 1, \dots, n\}$ also es gilt

$$X_0 A_{j_0} \leq X_0 A_j \text{ für alle } j = 1, \dots, n.$$

Jetzt wenden wir Lemma A.2.1 an und bekommen

$$X_0 A_{j_0} \leq X_0 A Y^T \text{ für alle } Y \in S_n$$

also dann auch

$$X_0 A_{j_0} \leq \min_Y X_0 A Y^T$$

da aber $X_0 A_{j_0}$ eine reine Strategie ist. Folgt auch

$$X_0 A_{j_0} \geq \min_Y X_0 A Y^T$$

und damit die Gleichheit. \square

Lemma A.2.6. $\max_X XAY^T$ und $\min_Y XAY^T$ sind stetige entsprechend in Y und X Funktionen.

Beweis. Wegen des letzten Lemmas müssen wir zeigen, dass $\max_i A_i Y^T$ in Y stetig ist. Da aber $A_i Y^T$ für alle i stetig sind und endlich sind folgt, dass auch das Maximum stetig ist. \square

Satz A.2.7. Die Minimax-Werte

$$\max_X \min_Y XAY^T \text{ und } \min_Y \max_X XAY^T$$

existieren.

Beweis. Da vom letzten Lemma folgt, dass $\max_X XAY^T$ eine stetige Funktion von Y ist, die auf die endlich dimensionale geschlossene beschränkte Menge S_n definiert ist, erreicht sie dort auch ihr Minimum $\min_Y \max_X XAY^T$. Analog für die andere Existenz. \square

A.3 Der Minimax Satz

Lemma A.3.1. Bei einer gegebene Matrix A gilt immer eine der beiden Behauptungen:

1. Es existiert ein Vektor $X \in S_m$ so dass $XA_j \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$.
2. Es existiert ein Vektor $Y \in S_n$ so dass $A_i Y^T \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Beweis. Bezeichnen wir die konvexe Hülle von alle A_j und alle Einheitsvektoren $E^{(1)}, \dots, E^{(m)}$ mit C . Dann gibt es folgende zwei Fälle

- (a) $0 \notin C$. In diesem Fall können wir eine Hyperebene durch 0 wählen ($Vz = 0$), so dass C ganz in der einen Halbebene liegt, also $Vz > 0$ für alle $z \in C$. Also speziell auch $v_i = VE^{(i)} > 0$. Bezeichnen wir $v = \sum_{i=1}^m v_i > 0$ und betrachten wir den Vektor $X = \frac{1}{v}(v_1, \dots, v_m)$ der offensichtlich in S_m liegt. Für alle Punkte z aus C gilt jetzt $Xz = \frac{1}{v}Vz > 0$. Da aber die Vektoren $A_j \in C$ gilt das auch für sie, womit wir den gesuchten X konstruiert haben.
- (b) $0 \in C$. Jetzt heißt das, dass es eine konvexe Kombination gibt die 0 ergibt. Also gibt es nicht negative Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β_1, \dots, β_m mit Summe 1 sodass $\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j + \sum_{i=1}^m \beta_i E^{(i)} = 0$ oder anders $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} + \beta_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$. Da alle $\beta_i \geq 0$ folgt $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} \leq 0$. Bezeichnen wir $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j > 0$. Die strikte Ungleichung gilt da falls $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 0$ würde daraus folgen dass alle $\alpha_j = 0$ sind dadurch auch alle β_i was nicht möglich ist. Jetzt betrachten wir den Vektor $Y = \frac{1}{\alpha}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der klarerweise in S_n liegt. Damit sind wir fertig da für Y gilt $\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha} a_{ij} = A_i Y^T \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$. \square

Satz A.3.2. Für jede Matrix A gilt die folgende Gleichheit:

$$\max_X \min_Y XAY^T = \min_Y \max_X XAY^T$$

Beweis. Nach A.3.1 folgt, dass entweder ein X_0 existiert oder ein Y_0 so dass

$$X_0 A_j \geq 0 \text{ oder } A_i Y_0^T \leq 0$$

also nach A.2.1 folgt

$$X_0 A Y^T \geq 0 \text{ oder } X A Y_0^T \leq 0$$

das bedeutet wir haben auch für die Extrema

$$\min_Y X_0 A Y^T \geq 0 \text{ oder } \max_X X A Y_0^T \leq 0$$

und dann auch

$$\max_X \min_Y X A Y^T \geq 0 \text{ oder } \min_Y \max_X X A Y^T \leq 0$$

also die beiden Seiten folgender Ungleichung können nicht gleichzeitig erfüllt sein

$$\max_X \min_Y X A Y^T < 0 < \min_Y \max_X X A Y^T$$

Jetzt betrachten wir die Matrix $A(t) = (a_{ij} - t)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \max_X \min_Y X A(t) Y^T < 0 < \min_Y \max_X X A(t) Y^T &\Rightarrow \\ \max_X \min_Y (X A Y^T - t) < 0 < \min_Y \max_X (X A Y^T - t) &\Rightarrow \\ \max_X \min_Y X A Y^T - t < 0 < \min_Y \max_X X A Y^T - t &\Rightarrow \\ \max_X \min_Y X A Y^T < t < \min_Y \max_X X A Y^T & \end{aligned}$$

Also gibt es keine Zahl t zwischen $\max_X \min_Y X A Y^T$ und $\min_Y \max_X X A Y^T$, was bedeutet, dass

$$\min_Y \max_X X A Y^T \leq \max_X \min_Y X A Y^T$$

Da wir aber wissen das immer

$$\max_X \min_Y X A Y^T \leq \min_Y \max_X X A Y^T$$

folgt die Gleichheit. □

Definition A.3.3. Den Wert eines Matrixspieles A nennt man

$$v(A) := \max_X \min_Y X A Y^T = \min_Y \max_X X A Y^T.$$

B Information und Preis

Hier werde ich eine kurze formale Einführung in den Begriff des Preises der Information machen um den Leser mit den theoretischen Hintergründe des Profitunterschiedes, den wir zwischen den Abschnitten 4.3.3 und 4.3.4 bekommen haben, kennenzulernen. Dabei werde ich mich an [22] halten.

Betrachten wir die folgende allgemeine Definition für ein Entscheidungsproblem unter Unsicherheit. Wir gehen aus von einer Zufallsvariable Y , die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert ist, und die Unsicherheit darstellt. Sei M eine so genannte Nachrichtvariable, die die Information, die der Entscheidungsträger bei seine Entscheidung $x = x(M) \in \mathcal{X}$ zur Verfügung hat, formalisiert. Also falls H den Profit bezeichnet lässt sich unsere Aufgabe wie folgt formulieren:

$$\max\{\mathbb{E}[H(x(M), Y)] : x(M) \in \mathcal{X}\}.$$

Das bedeutet, dass es die Entscheidung x gesucht wird, bei der die Erwartung des Profits maximal wird.

Man sagt, dass die Nachrichtvariable M_1 zumindest so informativ wie M_2 ist, wenn folgende Ungleichung gilt

$$\max\{\mathbb{E}[H(x(M_1), Y)] : x(M_1) \in \mathcal{X}\} \geq \max\{\mathbb{E}[H(x(M_2), Y)] : x(M_2) \in \mathcal{X}\}.$$

Zwei Nachrichtvariablen M_1 und M_2 werden gleich informativ genannt, wenn M_1 zumindest so informativ wie M_2 ist und umgekehrt.

Für eine Entscheidung x nennt man den folgenden Wert erwarteten Opportunitätsverlust (expected opportunity loss):

$$x \rightarrow \text{EOL}(x) = \max\{\mathbb{E}[H(x(Y), Y)] : x(Y) \in \mathcal{X}\} - \mathbb{E}[H(x, Y)]$$

Das minimum von dem Opportunitätsverlust wird Erwartungswert der perfekte Information (expected value of perfect information) genannt.

$$\text{EOL}[Y] = \max\{\mathbb{E}[H(x(Y), Y)] : x(Y) \in \mathcal{X}\} - \max\{\mathbb{E}[H(x, Y)] : x \in \mathcal{X}\} \quad (\text{B.1})$$

Man kann die vorhandene Information mit dem Konzept der σ -Algebren darstellen. Damit wäre der Wert der vollen Information $\bar{\mathcal{A}}$ im Bezug zum Teilinformation \mathcal{A} (value of full information, eine Verallgemeinerung von (B.1)).

$$\mathcal{R} = \max\{\mathbb{E}[H(x, Y)] : x \text{ ist } \bar{\mathcal{A}}\text{-messbar}\} - \max\{\mathbb{E}[H(x, Y)] : x \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$$

C Das Black-Scholes-Modell

An dieser Stelle werde ich eine kurze schematische Ableitung des Modelles von Black und Scholes vorführen, die den Leser mit den wesentlichen Ideen der Optionsbewertung auf den Aktienmärkten in stetiger Zeit vertraut machen sollen. Man könnte dabei besser erkennen, welche der Annahmen dieses Modells ihn weniger passend für die Bewertung von Derivaten auf dem Strommarkt macht. Es gibt sehr viele verschiedene Bücher, in denen man über dieses Modell lesen kann, wobei manche davon wirtschaftlicher orientiert sind wie z.B [16] und andere mathematischer. Die Letzten kann man wiederum in solche aufteilen die diskrete Zeit Modelle behandeln oder stetige Zeit Modelle. Beispiele dafür sind [19], [28], [26], [11], [12], [32] und [31]. Ein sehr gut geschriebenes Buch, das sich für Einsteiger eignet, ist [6]. Bei meiner Darstellung hier, werde ich auf Beweise und die volle mathematische Genauigkeit verzichten.

C.1 Brownsche Bewegung

Als erstes führen wir den Begriff der Brownsche Bewegung ein, der einer der wichtigsten stochastischen Prozesse bei der Modellierung von Finanz Zeitreihen ist.

Definition C.1.1. Ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t \geq 0}$ in stetiger Zeit heißt Brownsche Bewegung oder auch Wiener-Prozess (bezüglich \mathbb{F}), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $W_0 = 0$ fast sicher.
2. Für $t \geq s$ ist $W_t - W_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s .
3. Die Zuwächse $W_t - W_s$, $0 \leq s < t$ sind $N(0, t - s)$ -verteilt.
4. Für alle ω sind die Pfade $W_t(\omega)$ stetige Funktionen von t .

Hier bezeichnet $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die natürliche Filtration des stochastischen Prozesses $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

Die Existenz einer Brownsche Bewegung ist nicht offensichtlich, aber mathematisch gesichert z.B. als Grenzwert von skaliertem Irrfahrt. Eine wichtige Eigenschaft der Brownsche Bewegung ist die folgende.

Satz C.1.2. *Ist $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, dann ist fast sicher jeder Pfad $W(\omega)$ nirgends differenzierbar.*

Die Eigenschaften der Brownsche Bewegung kann man folgendermaßen ökonomisch deuten:

1. Die Unabhängigkeit der Zuwächse bedeutet, dass für den Kurs gilt: Ist die Gegenwart bekannt, so ist die Zukunft unabhängig von der Vergangenheit.
2. Die Stetigkeit der Pfade impliziert, dass sich bei kleinen Zeitveränderungen auch nur kleine Kursveränderungen ergeben.
3. Die nicht Differenzierbarkeit entspricht das Fehlen einer Tangente, die es erlauben würde den Zukunftswert zu extrapolieren.

C.2 Stochastische Differentialgleichungen und das Lemma von Ito

An dieser Stelle überspringen wir mehrere Seiten mit formalen Definitionen und mathematisch exakter Theorie und betrachten die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

als die natürliche stetige Verallgemeinerung von

$$S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = \mu(\tau_i, S_{\tau_i})(t_{i+1} - t_i) + \sigma(\tau_i, S_{\tau_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

die den Wertzuwachs eines stochastischen Prozesses $S = (S_t)_{t \geq 0}$ als Funktion von den Wertzuwächsen der gewöhnlichen Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{t \geq 0}$ darstellt.

Die stochastische Differentialgleichung die ein anderer stochastischer Prozess erfüllt wenn wir ihn als Funktion einer schon durch stochastische Differentialgleichung gegebener Prozess gibt uns die Ito-Formel.

$$\left. \begin{array}{l} U = u(t, S) \\ dS = f(t, S)dt + g(t, S)dW_t \end{array} \right\} \Rightarrow dU = u_t dt + u_s dS + \frac{1}{2} u_{ss} g^2 dt$$

Betrachten wir jetzt die so genannte geometrische Brownsche Bewegung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

die als stochastischer Prozess für das Modellieren von Aktienkurse benutzt wird. Jetzt wenden wir die Ito-Formel auf $U_t = \ln(S_t)$ und bekommen

$$\begin{aligned} dU_t &= 0dt + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (\sigma S_t)^2 dt \Rightarrow \\ dU_t &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

Da wir aber wegen der Definition von S_t wissen, dass $\frac{1}{S_t} dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$ ist

$$\begin{aligned} dU_t &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \Rightarrow \\ dU_t &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \Rightarrow \\ U_t - U_0 &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0}) \end{aligned}$$

Da wir jetzt umgekehrt haben, dass $S_t = \exp(U_t)$ ist \Rightarrow

$$S_t = S_{t_0} \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

C.3 Optionsbewertung

Betrachten wir jetzt den Wert $f(t, S_t)$ der Call Option als Funktion des Zeitpunktes t und des Kurses S_t . Nach der Ito-Formel haben wir für $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$:

$$\begin{aligned} df &= f_t dt + f_S dS + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2 dt \Rightarrow \\ df &= f_t dt + f_S (\mu S dt + \sigma S dW_t) + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2 dt \Rightarrow \\ df &= (f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2) dt + \sigma S f_S dW_t \end{aligned}$$

Für den Wert einer Nullkuponanleihe bei konstantem Zinssatz r haben wir:

$$\begin{aligned} B(t, T) &= e^{-r(T-t)} \Rightarrow \\ dB &= rB dt \end{aligned}$$

Der Wertprozess von dem zweidimensionalen stochastischen Prozess $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ genannt Portfoliostrategie ist folgendermaßen definiert:

$$V(\phi(t)) := \phi^1(t)B(t) + \phi^2(t)S(t)$$

Diese Portfoliostrategie wird selbstfinanzierend genannt falls:

$$dV(\phi(t)) = \phi^1(t)dB(t) + \phi^2(t)dS(t)$$

Fassen wir die beiden Eigenschaften zusammen:

$$\left\| \begin{aligned} V(\phi(t)) &= f(t, S(t)) \\ dV(\phi(t)) &= df(t, S(t)) \end{aligned} \right.$$

Für $df(t, S(t)) = dV(\phi(t))$ haben wir aber auch

$$\begin{aligned} df(t, S(t)) &= \phi^1(t)dB(t) + \phi^2(t)dS(t) \Rightarrow \\ df(t, S(t)) &= \phi^1(t)rB dt + \phi^2(t)\mu S_t dt + \phi^2(t)\sigma S_t dW_t \Rightarrow \\ df(t, S(t)) &= (\phi^1(t)rB + \phi^2(t)\mu S_t) dt + \phi^2(t)\sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

also

$$(\phi^1(t)rB + \phi^2(t)\mu S_t) dt + \phi^2(t)\sigma S_t dW_t = (f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2) dt + \sigma S f_S dW_t.$$

Nach Koeffizientenvergleich können wir ϕ^1 und ϕ^2 bestimmen:

$$\left\| \begin{aligned} \phi^1(t)rB + \phi^2(t)\mu S_t &= f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2 \\ \phi^2(t)\sigma S_t &= \sigma S f_S \Rightarrow \phi^2 = f_S \end{aligned} \right.$$

also

$$\left\| \begin{aligned} \phi^1 &= \frac{f_t + \frac{1}{2} f_{SS} S^2 \sigma^2}{rB} \\ \phi^2 &= f_S. \end{aligned} \right.$$

Und jetzt in $f(t, S(t)) = \phi^1(t)B(t) + \phi^2(t)S(t)$ einsetzen

$$f = \frac{1}{r}(f_t + \frac{1}{2}f_{SS}S^2\sigma^2) + f_S S$$

was nach Umformung und der Berücksichtigung der Randwert die sehr gut bekannte Black-Scholes Differentialgleichung ergibt.

$$\left\| \begin{array}{l} f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} + rSf_S - rf = 0 \\ f(T, S_T) = [S_T - K]^+ \end{array} \right.$$

D Matlab Quellcode

Listing 1: Die Generierung aller wichtigen abgeleiteten Strukturen

```
function [Stages Nodes Scenarios vecStageSizes cellStageNodes
matScenarioNodes cellScenariosToNode matPlotMatrix] =
ScenarioTreeProperties (vecNumberOfSuccessors)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Input
%   vecNumberOfSuccessors :The Vector of Number of Successors
%
%   Output
%   Stages                 :The Number of the Stages
%   Nodes                  :The Number of Nodes
%   Scenarios              :The Number of Scenarios
%   vecStageSizes          :The Nuber of Nodes per Stage (1 x Stages)
%   cellStageNodes         :The Nodes belonging to Stage s (Cellarray){s}
%   matScenarioNodes       :The Nodes belonging to Scenario and Stages (
Scenarios x Stages)
%   cellScenariosToNode    :The Scenarios belonging to the this Nodes (
Cellarray){n}
%   matPlotMatrix         :Appropriate Matrix for Plot
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Generate cellStageNodes
intIndex=1;
stage=0;
vecStageSizes=1;
stageSize=1;
while (intIndex<=size (vecNumberOfSuccessors,2))

    %Put the actual nodes in the stage cellarray
    stage=stage+1;
    cellStageNodes{stage}=intIndex-stageSize+1 : intIndex;
    %Calculate the size of the NEXT stage
    stageSize=sum(vecNumberOfSuccessors(intIndex-stageSize+1: intIndex
));
    %Go to the END of the NEXT stage
    intIndex=intIndex+stageSize;
    vecStageSizes=[vecStageSizes stageSize];
end

if (intIndex-stageSize~=size (vecNumberOfSuccessors,2))
    fprintf ('Warning:_vecNumberOfSuccessors_mismatch\n');
    fprintf (' size (vecNumberOfSuccessors,2) :%d\n', size (
vecNumberOfSuccessors,2));
    fprintf (' intIndex-stageSize:%d\n', intIndex-stageSize);
    vecNumberOfSuccessors=vecNumberOfSuccessors(1:intIndex-stageSize);
end

%Put the last stage too
stage=stage+1;
cellStageNodes{stage}=intIndex-stageSize+1 : intIndex;
```

```

Stages=stage;
Nodes=sum(vecStageSizes);
Scenarios=vecStageSizes(end);

%Generate matScenarioNodes
matScenarioNodes=zeros(Scenarios,Stages);
matScenarioNodes(:,Stages)=cellStageNodes{Stages};
actnode=Nodes-Scenarios;
intIndex=size(vecNumberOfSuccessors,2);

for stage=Stages-1:-1:1
    scenario=Scenarios;
    while(scenario>0)
        dif=vecNumberOfSuccessors(intIndex);
        while(dif>0)
            matScenarioNodes(scenario,stage)=actnode;
            scenario=scenario-1;
            if(scenario==0 || matScenarioNodes(scenario,stage+1)~=
                matScenarioNodes(scenario+1,stage+1))
                dif=dif-1;
            end
        end
        intIndex=intIndex-1;
        actnode=actnode-1;
    end
end

%Generate all Scenarios belonging to given Node
for i=1:Nodes
    cellScenariosToNode{i}=[];
end

for i=1:Stages
    for j=1:Scenarios
        cellScenariosToNode{matScenarioNodes(j,i)}=[
            cellScenariosToNode{matScenarioNodes(j,i)} j];
    end
end

%Build Plot Matrix
matPlotMatrix=matScenarioNodes;
for i=1:Stages
    for j=1:Scenarios
        matPlotMatrix(j,i)=matPlotMatrix(j,i)-matScenarioNodes(1,i)+1;
    end
    matPlotMatrix(:,i)=matPlotMatrix(:,i)/(vecStageSizes(i)+1);
end
matPlotMatrix=1-matPlotMatrix;
end

```

Listing 2: Die Lösung des Optimierungsproblems

```

function [f AS b lb ub matScenariosDemand vecDemand vecNodeProbabilities
    matScenarioNodesValues Stages Nodes Scenarios vecStageSizes

```

```

cellStageNodes matScenarioNodes cellScenariosToNode matPlotMatrix]=
OptimalDemand(LowerGlobalBound,UpperGlobalBound,vecLocalMin,vecLocalMax
,vecNumberOfSuccessors,vecNodeValues,vecScenarioProbabilities,
StrikePrice)
% Generates demandspatens matrix (multistage, adapted, not binary)
% Written by Nikola Broussev

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Input
% LowerGlobalBound :Global lower Bound for the Volume
% UpperGlobalBound :Global upper Bound for the Volume
% vecLocalMin :Local min [1 x T]
% vecLocalMax :Local max [1 x T]
% vecNumberOfSuccessors :The Tree in the form of NumberOfSuccessors
% vecNodeValues :Spot prices in Nodes of the Tree [1 x N]
% vecScenarioProbabilities:Probabilities for the scenarios [1 x S]
% StrikePrice :Strike Price
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
log=1;

%The number of scenarios
N=size(vecNodeValues,1);

%Parse The Tree
tic
[Stages Nodes Scenarios vecStageSizes cellStageNodes matScenarioNodes
cellScenariosToNode matPlotMatrix] = ScenarioTreeProperties(
vecNumberOfSuccessors);
if(log > 0)
fprintf('Parse_The_Tree:%.4f_seconds\n', toc);
end

%Caclulate the Profits per Node
g=vecNodeValues-StrikePrice;

%Generate the constrains Matrix
%A=zeros(2*Scenarios,Nodes);
b1=UpperGlobalBound*ones(Scenarios,1);
b2=-LowerGlobalBound*ones(Scenarios,1);
b=[b1;b2];
lb=zeros(Nodes,1);
ub=zeros(Nodes,1);

tic
%Put the local constraints
for i=1:Stages
for j=1:vecStageSizes(i)
lb(cellStageNodes{i}(j))=vecLocalMin(i);
ub(cellStageNodes{i}(j))=vecLocalMax(i);
end
end
if(log > 0)
fprintf('Put_the_local_constraints:%.4f_seconds\n', toc);
end
end

```

```

%Put the global constraints
% for i=1:Scenarios
%     for j=1:Stages
%         A(i,matScenarioNodes(i,j))=1;
%         A(i+Scenarios,matScenarioNodes(i,j))=-1;
%     end
% end

tic
%Sparse
I=zeros(1,2*Scenarios*Stages);
J=zeros(1,2*Scenarios*Stages);
S=zeros(1,2*Scenarios*Stages);
l=1;
for i=1:Scenarios
    for j=1:Stages
        I(l)=i;
        I(l+1)=i+Scenarios;
        J(l)=matScenarioNodes(i,j);
        J(l+1)=matScenarioNodes(i,j);
        S(l)=1;
        S(l+1)=-1;
        l=l+2;
    end
end
AS=sparse(I,J,S,2*Scenarios,Nodes);
if(log > 0)
    fprintf('Sparse:%.4f_seconds\n',toc);
end

tic
%Calculate the Node Probabilities
vecNodeProbabilities=zeros(Nodes,1);
for i=1:Nodes
    vecNodeProbabilities(i)=sum(vecScenarioProbabilities(
        cellScenariosToNode{i}));
end
if(log > 0)
    fprintf('Calculate_the_Node_Probabilities:%.4f_seconds\n',toc);
end

tic
%Generate the Target Function
f=zeros(1,Nodes);
for i=1:Nodes
    pn=0;
    for j=1:size(cellScenariosToNode{i},2)
        pn=pn+vecScenarioProbabilities(cellScenariosToNode{i}(j));
    end
    f(i)=g(i)*pn;
end
% for i=1:Nodes
%     f(i)=g(i)*vecNodeProbabilities(i);

```

```

% end

if (log > 0)
    fprintf('Generate_the_Target_Function:%.4f_seconds\n', toc);
end

tic
%Solve the LP
if (log>0)
    options = optimset('Display','on','Diagnostics','on');
else
    options = optimset('Display','off','Diagnostics','off');
end
[vecDemand, lambda, exitflag, output]=linprog(-f, AS, b, [], [], lb, ub, [], options)
;

if (log > 0)
    fprintf('Solve_the_LP:%.4f_seconds\n', toc);
end
tic
%Extract the pfads
matScenariosDemand=zeros(Scenarios,Stages);
for i=1:Scenarios
    for j=1:Stages
        matScenariosDemand(i,j)=vecDemand(matScenarioNodes(i,j));
    end
end
if (log > 0)
    fprintf('Extract_the_pfads:%.4f_seconds\n', toc);
end

tic
%Extract the spotprices
matScenarioNodesValues=zeros(Scenarios,Stages);
for i=1:Scenarios
    for j=1:Stages
        matScenarioNodesValues(i,j)=vecNodeValues(matScenarioNodes(i,j));
    end
end
if (log > 0)
    fprintf('Extract_the_spotprices:%.4f_seconds\n', toc);
end
end

```

Listing 3: Konvertierung zu Vorgängerstruktur

```

function [vecPredecessors] = NumberOfSuccessors2Predecessor(
    vecNumberOfSuccessors)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Converting the NumberOfSuccessors Structure to Predecessor Structure
%   Written by Nikola Broussev
%
%   Input
%   vecNumberOfSuccessors :The Vector of Number of Successors
%

```

```

% Output
% vecPredecessors :The Vector of Predecessor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L=numel (vecNumberOfSuccessors) ;
N=sum (vecNumberOfSuccessors) +1;
vecPredecessors=zeros (1, N) ;

index=2;
for i=1:L
    vecPredecessors (index:index+vecNumberOfSuccessors (i)-1)=i*ones (1,
        vecNumberOfSuccessors (i)) ;
    index=index+vecNumberOfSuccessors (i) ;
end

end

```

Listing 4: Konvertierung zu Nachfolgerstruktur

```

function [vecNumberOfSuccessors] = Predecessor2NumberOfSuccessors (
    vecPredecessors)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Converting the Predecessor Structure to NumberOfSuccessors Structure
% Written by Nikola Broussev
%
% Input
% vecPredecessors :The Vector of Predecessor
%
% Output
% vecNumberOfSuccessors :The Vector of Number of Successors
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N=numel (vecPredecessors) ;
vecNumberOfSuccessors=zeros (1, vecPredecessors (end) ) ;

index=1;
number=1;
for i=2:N-1
    if vecPredecessors (i)==vecPredecessors (i+1)
        number=number+1;
    else
        vecNumberOfSuccessors (index)=number;
        index=index+1;
        number=1;
    end
end
end
% index
% number
vecNumberOfSuccessors (index)=number;

end

```

Listing 5: Die Newton Iteration

```

vecNumberOfSuccessors=[2 2 3 1 3 1 1 1];
LowerGlobalBound=5;
UpperGlobalBound=10;
vecLocalMin=[1 2 1 0];
vecLocalMax=[4 5 4 6];
vecScenarioProbabilities=[0.05 0.10 0.15 0.20 0.20 0.15 0.15];
vecNodeValues=[16 25 17 24 22 23 10 15 15 10 30 28 24 29 16];

StrikePrice=min(vecNodeValues);
StrikePrices=[];
ExpectedProfits=[];

iter=0;
epsilon=0.1;

while (1)
    iter=iter+1;
    StrikePrices=[StrikePrices StrikePrice];
    [f AS b lb ub matScenariosDemand vecDemand vecNodeProbabilities
     matScenarioNodesValues Stages Nodes Scenarios vecStageSizes
     cellStageNodes matScenarioNodes cellScenariosToNode matPlotMatrix]=
     OptimalDemand(LowerGlobalBound,UpperGlobalBound,vecLocalMin,
     vecLocalMax,vecNumberOfSuccessors,vecNodeValues,
     vecScenarioProbabilities,StrikePrice);
    ExpectedProfit=vecScenarioProbabilities*diag((matScenarioNodesValues-
     StrikePrice)*matScenariosDemand');
    ExpectedProfits=[ExpectedProfits ExpectedProfit];

    if (abs(ExpectedProfit)< epsilon)
        break;
    end

    b=0;
    for i=1:Nodes
        b=b+vecNodeValues(i)*vecNodeProbabilities(i)*vecDemand(i);
    end

    a=vecNodeProbabilities'*vecDemand;

    StrikePrice=b/a;
end

```

Listing 6: Teilbaum Extrahieren

```

function [vecNumberOfSuccessorsSub] = Subtree(vecNumberOfSuccessors, Stage)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Subtree up to given Stage
%   Written by Nikola Broussev
%
%   Input
%   vecNumberOfSuccessors :The Vector of Number of Successors
%   Stage: The given Stage
%

```

```

% Output
% vecNumberOfSuccessorsSub :The Vector of Number of Successors of the
% Subtree
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

intIndex=1;
stage=0;
stageSize=1;
while (intIndex<=size(vecNumberOfSuccessors,2) && stage<Stage)
    stage=stage+1;
    %Calculate the size of the NEXT stage
    stageSize=sum(vecNumberOfSuccessors(intIndex-stageSize+1: intIndex
    ));
    %Go to the END of the NEXT stage
    intIndex=intIndex+stageSize;
end

vecNumberOfSuccessorsSub=vecNumberOfSuccessors(1:intIndex);

```

Listing 7: Die Abhängigkeit von den lokalen und globalen Schranken

```

vecNumberOfSuccessors=[2 2 3 1 3 1 1 1];
vecScenarioProbabilities=[0.05 0.10 0.15 0.20 0.20 0.15 0.15];
vecNodeValues=[16 25 17 24 22 23 10 15 15 10 30 28 24 29 16];
StrikePrice=20;

bigdeltabeg=0;
bigdeltastep=0.5;
bigdeltaend=20;

deltabeg=0;
deltastep=0.25;
deltaend=5;

vecNominal=[1 2 1 3];

matExpectedProfits=[];
bigdeltas=[];

for bigdelta= bigdeltabeg:bigdeltastep:bigdeltaend

    vecExpectedProfits=[];
    deltas=[];
    for delta= deltabeg:deltastep:deltaend

        LowerGlobalBound=max(0,sum(vecNominal)-bigdelta);
        UpperGlobalBound=sum(vecNominal)+bigdelta;
        vecLocalMin=max(0,vecNominal-delta);
        vecLocalMax=vecNominal+delta;

        [f AS b lb ub matScenariosDemand vecDemand vecNodeProbabilities
        matScenarioNodesValues Stages Nodes Scenarios vecStageSizes
        cellStageNodes matScenarioNodes cellScenariosToNode

```

```

        matPlotMatrix]=OptimalDemand(LowerGlobalBound,UpperGlobalBound,
        vecLocalMin,vecLocalMax,vecNumberOfSuccessors,vecNodeValues,
        vecScenarioProbabilities,StrikePrice);

    ExpectedProfit=0;
    for i=1:Nodes
        ExpectedProfit=ExpectedProfit+(vecNodeValues(i)-StrikePrice)*
            vecNodeProbabilities(i)*vecDemand(i);
    end

    vecExpectedProfits=[vecExpectedProfits ExpectedProfit];
    deltas=[deltas delta];
end
bigdeltas=[bigdeltas bigdelta];

matExpectedProfits=[matExpectedProfits;vecExpectedProfits];
end
surf(deltas,bigdeltas,matExpectedProfits);

```

Listing 8: Der erwartete Profit

```

vecNumberOfSuccessors=[2 2 3 1 3 1 1 1];
LowerGlobalBound=5;
UpperGlobalBound=10;
vecLocalMin=[1 2 1 0];
vecLocalMax=[4 5 4 6];
vecScenarioProbabilities=[0.05 0.10 0.15 0.20 0.20 0.15 0.15];
vecNodeValues=[16 25 17 24 22 23 10 15 15 10 30 28 24 29 16];

StrikePrice=20;

StrikePriceBeg=0;
StrikePriceEnd=40;
StrikePriceStep=0.1;

StrikePrices=[];
ExpectedProfits=[];

for StrikePrice= StrikePriceBeg:StrikePriceStep:StrikePriceEnd
    StrikePrices=[StrikePrices StrikePrice];
    [f AS b lb ub matScenariosDemand vecDemand vecNodeProbabilities
    matScenarioNodesValues Stages Nodes Scenarios vecStageSizes
    cellStageNodes matScenarioNodes cellScenariosToNode matPlotMatrix]=
    OptimalDemand(LowerGlobalBound,UpperGlobalBound,vecLocalMin,
    vecLocalMax,vecNumberOfSuccessors,vecNodeValues,
    vecScenarioProbabilities,StrikePrice);

    ExpectedProfit=0;
    for i=1:Nodes
        ExpectedProfit=ExpectedProfit+(vecNodeValues(i)-StrikePrice)*
            vecNodeProbabilities(i)*vecDemand(i);
    end
end

```

```

ExpectedProfits=[ExpectedProfits ExpectedProfit];
end

figure('name','ExpectedProfits_as_function_of_the_Strikeprice');
axes_handle=axes('XLim',[StrikePriceBeg-0.05*(StrikePriceEnd-
StrikePriceBeg) StrikePriceEnd+0.05*(StrikePriceEnd-StrikePriceBeg)],'
XGrid','on','YGrid','on');
line('color','b','XData',StrikePrices,'YData',ExpectedProfits);
%plot(StrikePrices,ExpectedProfits);

```

Listing 9: Die volle Information

```

vecNumberOfSuccessors=[2 2 3 1 3 1 1 1];
LowerGlobalBound=5;
UpperGlobalBound=10;
vecLocalMin=[1 2 1 0];
vecLocalMax=[4 5 4 6];
vecScenarioProbabilities=[0.05 0.10 0.15 0.20 0.20 0.15 0.15];
vecNodeValues=[16 25 17 24 22 23 10 15 15 10 30 28 24 29 16];
StrikePrice=20;

%Parse The Tree
[Stages Nodes Scenarios vecStageSizes cellStageNodes matScenarioNodes
cellScenariosToNode matPlotMatrix] = ScenarioTreeProperties(
vecNumberOfSuccessors);

%The number of scenarios
S=size(matScenarioNodes,1);

%The number of periods
T=size(matScenarioNodes,2);

%Extract the spotprices
matScenarioNodesValues=zeros(Scenarios,Stages);
for i=1:Scenarios
    for j=1:Stages
        matScenarioNodesValues(i,j)=vecNodeValues(matScenarioNodes(i,j));
    end
end

matScenariosDemand=[];

for i=1:S
    %RHS
    rhs=[UpperGlobalBound;-LowerGlobalBound];

    %A
    A=[ones(1,T);-ones(1,T)];

    %Target function
    f=-(matScenarioNodesValues(i,:)-StrikePrice);

```

```

%     fprintf('f = %f', f);
%     fprintf('\n');

options = optimset('Display','off');
[demand, lambda, exitflag, output]=linprog(f,A,rhs,[],[],vecLocalMin,
    vecLocalMax,[],options);

matScenariosDemand=[matScenariosDemand;demand'];

end

figure('name','The_Solutions_Paths');
grid on;
sys=ceil(Scenarios^(1/3));
for i=1:Scenarios
    %color cycling
    x=i-1;
    r=mod(x,sys)/sys;
    x=floor(x/sys);
    g=mod(x,sys)/sys;
    x=floor(x/sys);
    b=mod(x,sys)/sys;
    line('color',[r,g,b],'LineWidth',1,'XData',[1:1:Stages],'YData',
        matScenariosDemand(i,:));
end
line('LineStyle',':','color','r','LineWidth',2,'XData',[1:1:Stages],'YData
',vecLocalMin);
line('LineStyle',':','color','r','LineWidth',2,'XData',[1:1:Stages],'YData
',vecLocalMax);

```

Literatur

- [1] Kurzstudie : Reserven, Ressourcen und Verfügbarkeit von Energierohstoffen. 2004.
- [2] Das Großhandelsprodukt GH0. 2005.
- [3] Gesetz über die Elektrizitäts- und Gasversorgung. 2005.
- [4] Jean-Pierre Aubin. *Optima and Equilibria: An introduction to Nonlinear Analysis*. Springer, 1984.
- [5] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter, 2002.
- [6] M. Baxter and A. Rennie. *Financial Calculus: An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press, 1996.
- [7] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] Rene Carmona and Michael Ludkovski. Spot convenience yield models for the energy markets.
- [9] Michael Drmota. *Lineare Algebra I*, 2005.
- [10] Alexander Eydeland and Helyette Geman. Some fundamentals of electricity derivatives. 1998.
- [11] Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, and Christian Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer, 2004.
- [12] Christian Fries. *Finanzmathematik: Theorie, Modellierung und Implementierung*. Creative Commons-Lizenz, 2005.
- [13] Carl Geiger and Christian Kanzow. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, 2002.
- [14] Reinhard Haas and Christian Redl. Simulation based stochastic optimization methods for risk management in liberalized energy markets: An integrative approach. 2006.
- [15] Andreas Hünerwadel. *Handel mit Strom*. 2003.
- [16] John C. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivative*. Oldenbourg, 2000.
- [17] Patrick Jaillet, Ehud I. Ronn, and Stathis Tompaidis. Valuation of commodity-based swing options. 2003.
- [18] Claudia Kemfert. *Märkte unter Strom: Die Folgen der Strommarktliberalisierung*. 2003.
- [19] Jürgen Kremer. *Einführung in die Diskrete Finanzmathematik*. Springer, 2006.

- [20] David Maintrup and Stefan Schäffler. *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Springer, 2005.
- [21] Fuillermo Owen. *Game Theory*. Academic Press, 1982.
- [22] G. Pflug. A value-of-information approach to measuring risk in multi-period economic activity. *Journal of Banking and Finance*, 30, 2005.
- [23] G. Pflug and N. Broussev. Electricity swing options: Behavioral models and pricing. *Special issue of the European Journal of Operational Research on Operational Research Models and Methods in the Energy Sector*, 2007.
- [24] G. Pflug and W. Römisch. *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific, 2007.
- [25] Dragana Pilipovic. *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*. McGraw-Hill, 1998.
- [26] Stanley R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*. Blackwell, 1997.
- [27] Römisch and Wegner-Specht. *Modellierung der Spotpreise - Literaturüberblick*. 2006.
- [28] Klaus Sandmann. *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer, 2001.
- [29] Wolfgang Scherrer. *Ökonometrie der Finanzmärkte*, 2005.
- [30] Friedrich Schmid and Mark Trede. *Finanzmarktstatistik*. Springer, 2006.
- [31] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, 2000.
- [32] Josef Teichmann. *A course in mathematical finance*, 2005.
- [33] Григории М. Фихтенгольц. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, volume 1. Наука, 1966.
- [34] N. N. Vorobev. *Game Theory*. Springer, 1977.
- [35] Hermann Witting. *Mathematische Statistik*, volume 1. B.G.Teubner Stuttgart, 1985.