Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

ACIN

DIPLOMARBEIT

TU WIEN

Modellierung und Regelung eines Drei-Tank-Systems

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines

Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dr. techn. A. Kugi
Dipl.-Ing. T. Utz

eingereicht an der

Technischen Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von
ZHANG Wei
Ullmannstraße 26/13
1150-Wien
Austria

Wien, im Mai 2009

Gruppe für komplexe dynamische Systeme
A-1040 Wien, Gusshausstr. 27, Internet: http://cds.acin.tuwien.ac.at

Vorwort

Die vorliegende Arbeit mit dem Thema **Modellierung und Regelung eines Drei-Tank-Systems** entstand am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.techn. Andreas Kugi und Herrn Dipl.- Ing. Tilman Utz für die Betreuung der Arbeit. Ebenso gilt mein Dank allen Angehörigen des Instituts für die freundliche und angenehme Arbeitsatmosphäre und ihre Unterstützung.

Bedanken möchte ich mich auch bei meiner Familie, die mich während meines Studiums tatkräftig unterstützt hat, und die mir immer ein wichtiger Rückhalt war.

Wien, im Mai 2009

Abstract

This diploma thesis deals with the modelling, identification, and control of the laboratory experiment "Three Tanks System" by amira. The system can be operated in different configurations. In this work, however just two configurations are taken into account: A configuration with two tanks, which is a system with single input and single output (SISO), and a configuration with three tanks, which is a system with multiple inputs and multiple outputs (MIMO).

At the beginning of the work, the non-linear mathematical model of the two tank system and of the three tank system are presented based on physical considerations. Then the sensors, the actuators and the parameters of the flow characteristics of the valves are identified and the model is verified using these measurements.

Finally a tracking controller based on exact linearization is designed for both configurations. The effect of the controller is demonstrated and evaluated by means of simulation and measurement results. Furthermore, the possibility of the noise reduction by using an Extended Kalman Filter is investigated and discussed.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung, Identifikation und Regelung des Laborversuches “Drei-Tank-System” der Firma amira. Der Laborversuch kann in unterschiedlichen Konfigurationen betrieben werden. In dieser Arbeit wird zunächst ein Zwei-Tank-System, das ein Eingrößensystem (SISO) darstellt, und die Konfiguration mit allen drei Tanks, die ein Mehrgrößensystem (MIMO) darstellt, betrachtet.

Zu Beginn der Arbeit werden die nichtlinearen Modelle für das Zwei-Tank-System und für das Drei-Tank-System auf Basis von physikalischen Überlegungen hergeleitet. Anschließend werden die Sensoren, die Aktoren sowie die Parameter, die das Durchflussverhalten durch die Ventile beschreiben, identifiziert, und das Modell wird anhand von Messungen verifiziert.

Schließlich wird für die beiden Systeme/Konfigurationen eine exakt zustandslinearisierende Folgeregelung entworfen, deren Funktion anhand von Simulations- und Messergebnissen demonstriert wird. Zusätzlich wird noch die Möglichkeit der Rauschunterdrückung mit Hilfe eines Extended Kalman-Filters untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1. Modellierung **1**

2. Identifikation **6**
2.1. Füllhöhensensoren 6
2.2. Pumpen 9
2.3. Elektrische Stellventile 11
2.4. Identifikation der Volumenströme 12
2.4.1. Identifikation der Durchflusskoeffizienten bei turbulenter Strömung 12
2.4.2. Anpassung beim Übergang zur laminaren Strömung 14
2.4.3. Anpassungen für elektrische Stellventile 15

3. Reglerentwurf für das Zwei-Tank-System **20**
3.1. Grundlagen 21
3.1.1. Exakte Eingangs-Zustandslinearisierung 21
3.1.2. Folgeregelung 23
3.2. Systemanalyse 23
3.3. Implementierung 25
3.3.1. Trajektorien-Generator 26
3.3.2. Regler 26
3.3.3. Messfilter 28
3.4. Regelergebnisse 30

4. Reglerentwurf für das Drei-Tank-System **35**
4.1. Systemanalyse 36
4.2. Reglerentwurf 40
4.2.1. Folgeregelung 40
4.2.2. Trajektorien-Generator 43
4.3. Messfilter 44
4.3.1. Tiefpassfilter 44
4.3.2. Extended Kalman-Filter 45
4.3.3. Vergleich des Tiefpassfilters mit dem Kalman-Filter 47
4.4. Regelergebnisse 49

5. Zusammenfassung **53**

A. Python Skript **54**

Abbildungsverzeichnis

1.1. Darstellung des Tankmodells 1
1.2. Darstellung der Öffnungsfläche in Abhängigkeit von der Winkeländerung des Stellventils 4

2.1. Beziehung zwischen der Sensorspannung U_{h_i} und der Füllhöhe h_i . . . 8
2.2. Beziehung zwischen der Pumpenspannung U_{pi} und dem geförderten Volumenstrom q_{zuj} 9
2.3. Vergleich der von dSPACE aufgenommenen Füllhöhen h_{imess} und der identifizierten Füllhöhen h_i 13
2.4. Vergleich der von dSPACE aufgenommenen Füllhöhenunterschiede Δh_{imess} und der identifizierten Füllhöhenunterschiede Δh_i 16
2.5. Identifizierte Werte und durch die Näherungsfunktionen beschriebene Kennlinien für α_{av2} und α_{zv12} 18

3.1. Darstellung des Systems mit Regler für das Zwei-Tank-System 26
3.2. Vergleich von gemessenen und gefilterten Signalen 29
3.3. Simulationsergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System ohne Messrauschen 31
3.4. Messergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System mit Stabilisierungsanteil 32
3.5. Messergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System ohne Stabilisierungsanteil 34

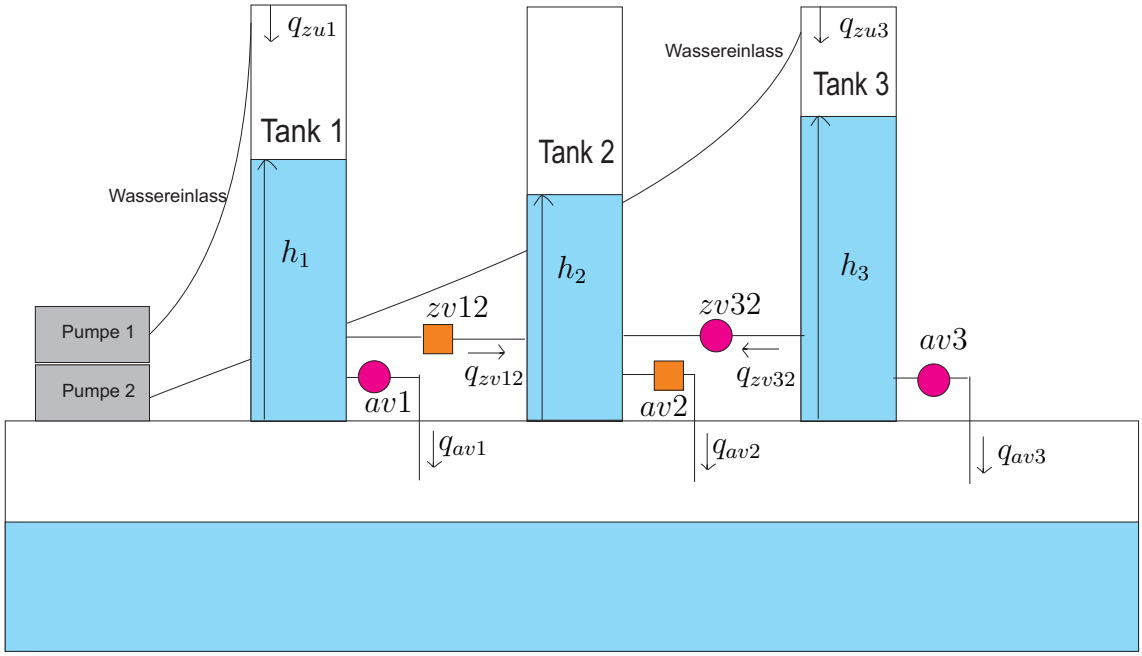
4.1. Vergleich der Wirkung des Tiefpassfilters und des Kalman-Filters anhand von Messergebnissen 48
4.2. Zeitverlauf der Füllhöhen h_i mit der Regelung mit dem Tiefpass-Filter 51
4.3. Regelergebnis mit dem Tiefpassfilter 52

Tabellenverzeichnis

1.1. Parameter für die Modellierung und die geschlossenen Winkel für die Kugelhähne $av2$ und $zv12$. 5

2.1. Messdaten der Sensorspannungen U_{h_i} für die ausgewählte Füllhöhe h_i 7
2.2. Koeffizienten für die U_{h_i}-h_i Kennlinie 8
2.3. Messdaten der geförderten Volumenströme q_{zuj} für die ausgewählten Pumpenspannungen U_{pi} 10
2.4. Koeffizienten für die U_{pi}-q_{zuj} Kennlinie 10
2.5. Messdaten für den Winkel der elektrischen Stellventile 11
2.6. Identifizierte Werte für die Durchflusskoeffizienten α_{av2} und α_{zv12} . . 17
2.7. Koeffizienten für die Funktionen gemäß (2.20) und (2.21). 18
2.8. Identifizierte Durchflusskoeffizienten für die manuellen Stellventile und identifizierte Parameter $\lambda_{zvi,crit}$ für die Zwischenventile 19

1. Modellierung



: Elektrische Stellventile $zv12$, $av2$

: Manuelle Stellventile $av1$, $zv32$, $av3$

Abbildung 1.1.: Darstellung des Tankmodells

Betrachtet wird ein Drei-Tank-System wie es in Abbildung 1.1 dargestellt ist. Das System besteht aus drei zylindrischen Tanks, wobei mit Hilfe zweier Pumpen die Volumenströme q_{zu1} und q_{zu3} aus einem Reservoir in Tank 1 und Tank 3 gefördert werden können. Durch die Zwischenventile $zv12$ und $zv32$ bzw. durch die Abflussventile $av1$, $av2$ und $av3$ kann die Flüssigkeit in einen der anderen Tanks oder zurück in das Reservoir fließen. Die Ventile sind als Drehschieberventile mit einem Kugelhahn ausgeführt. Dabei werden das Zwischenventil $zv12$ und das Abflussventil $av2$ mit einem elektrischen Antrieb verstellt, die anderen Ventile werden händisch bedient. Theoretisch können die elektrischen Stellventile also auch als Stellgrößen verwendet werden. Da die Verstellung jedoch nur langsam vonstatten geht, wird in

dieser Arbeit davon abgesehen.

Zur Modellierung des Drei-Tank-Systems schreibt man die Massenbilanzgleichung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} = \rho \sum_i q_i \quad \text{mit} \quad m_i = A_{tank} h_i \rho, \tag{1.1}$$

wobei A_{tank} die Fläche eines Tanks, ρ die Dichte der Flüssigkeit, m_i die Masse der Flüssigkeit, h_i die Füllhöhe eines Tanks und q_i die ein- oder ausfließenden Volumenströme bezeichnet. Nach kurzer Rechnung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} A_{tank} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= q_{zu1} - \chi_{av1} q_{av1} - q_{zv12} \\ A_{tank} \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= q_{zv12} + \chi_{zv32} q_{zv32} - q_{av2} \\ A_{tank} \frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t} &= q_{zu3} - \chi_{av3} q_{av3} - \chi_{zv32} q_{zv32}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dabei beschreiben q_{zu1} und q_{zu3} die durch die Pumpen geförderten Volumenströme, q_{av1}, q_{av2} und q_{av3} die durch die Abflussventile ausfließenden Volumenströme und q_{zv12} und q_{zv32} die Volumenströme durch die Zwischenventile. Die Parameter χ_{av1}, χ_{av3}, χ_{zv12} und χ_{zv32} beschreiben den Öffnungszustand der jeweiligen Ventile und können den Wert 0 oder 1 annehmen, wobei der Wert 0 für ein vollkommen geschlossenes Ventil und der Wert 1 für ein geöffnetes Ventil steht.

Die Strömungen durch die Abflussventile können in Form einer turbulenten Strömung wie folgt angegeben werden [4]

$$q_{avi} = \alpha_{avi} A_{avi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\rho g h_i}. \tag{1.3}$$

Hierbei beschreibt i den Index des jeweiligen Tanks, A_{avi} die effektive Querschnittsfläche des Abflussventils avi, α_{avi} den Durchflussbeiwert für die Strömung durch das Abflussventil, ρ die Dichte des Fluids, g die Erdbeschleunigung und h_i die Füllhöhe in einem Tank.

Im Fall der Zwischenventile kann diese Argumentation nicht übernommen werden, da der Füllhöhenunterschied durchaus zu Null werden kann und sogar ein Wechsel der Vorzeichen möglich ist. Dies hat zur Konsequenz, dass der Volumenstrom durch die Zwischenventile mit folgender Gleichung angegeben werden muss

$$q_{zvi} = \overline{\alpha}_{zvi} A_{zvi} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|\rho g \Delta h_{zvi}|} \mathrm{sign}(\Delta h_{zvi}). \tag{1.4}$$

Hierbei beschreibt i den Index für die Zwischenventile und kann den Wert 12 oder 32 annehmen, A_{zvi} beschreibt die effektive Querschnittsfläche des Zwischenventils, $\overline{\alpha}_{zvi}$ ist der Durchflussbeiwert und Δh_{zvi} beschreibt den Füllhöhenunterschied der Tanks.

Da es die Regelungsaufgabe ist, die Füllhöhe der Tanks exakt zu regeln, ist der Volumenstrom durch ein Zwischenventil entscheidend, auch wenn der Füllhöhenunterschied sehr klein ist. Wegen des kleinen Druckes, der durch einen kleinen Füllhöhenunterschied verursacht wird, wird sich in diesem Bereich eine laminare Strömung ausbilden, was bei der Modellierung berücksichtigt werden muss. Dazu wird der Durchflussbeiwert $\overline{\alpha}_{zvi}$ in (1.4) wie folgt angepasst

$$\overline{\alpha}_{zvi} = \alpha_{zvi} \tanh\left(\frac{2\lambda}{\lambda_{zvi,crit}}\right) \tag{1.5}$$

$$\lambda = \frac{D_{h_{zvi}}\rho}{\eta}\sqrt{2|g\Delta h_{zvi}|}. \tag{1.6}$$

Dabei ist α_{zvi} der Durchflussbeiwert für den turbulenten Bereich, λ die Fließzahl, $\lambda_{zvi,crit}$ der Grenzwert, der den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung beschreibt, $D_{h_{zvi}}$ der hydraulische Durchmesser des Zwischenventils zvi und η die dynamische Viskosität.

Für die Berechnung der verschiedenen Volumenströme nach den Gleichungen (1.3) – (1.6) ist die Kenntnis des Öffnungsquerschnitts und im Fall der Zwischenventile des hydraulischen Durchmessers notwendig. Im Fall der von Hand betriebenen Ventile $av1$, $av3$, $zv32$, die immer nur ganz geöffnet oder geschlossen sind, ergeben sich kreisrunde Öffnungsflächen, weswegen gilt:

$$A_{av1} = A_{av3} = A_{zv32} = \pi r_{kugel}^2, \quad D_{h_{zv32}} = 2\pi r_{kugel}. \tag{1.7}$$

Dabei ist r_{kugel} der Radius der Öffnungsfläche des Stellventils. Im Fall der elektrischen Stellventile kommt es vor, dass die Ventile nur teilweise geöffnet sind. In diesem Fall ist der Querschnitt nicht mehr kreisrund und auch der hydraulische Durchmesser muss entsprechend angepasst werden. Dies wird im Folgenden exemplarisch für das Abflussventil $av2$ erklärt:

Die Öffnungsflächen, die sich durch das Verdrehen eines Kugelhahns mit einer Bohrung mit dem Radius r_{kugel} in einem Rohr mit demselben Radius ergibt, lässt sich durch die stetige Überlagerung zweier Kreise mit dem Radius r_{kugel} beschreiben. Dies ist in Abbildung 1.2 dargestellt, wobei die Öffnungsfläche A_{av2} farbig markiert ist. Der Parameter ϕ beschreibt die Verdrehung des Stellventils. Die Ventile sind

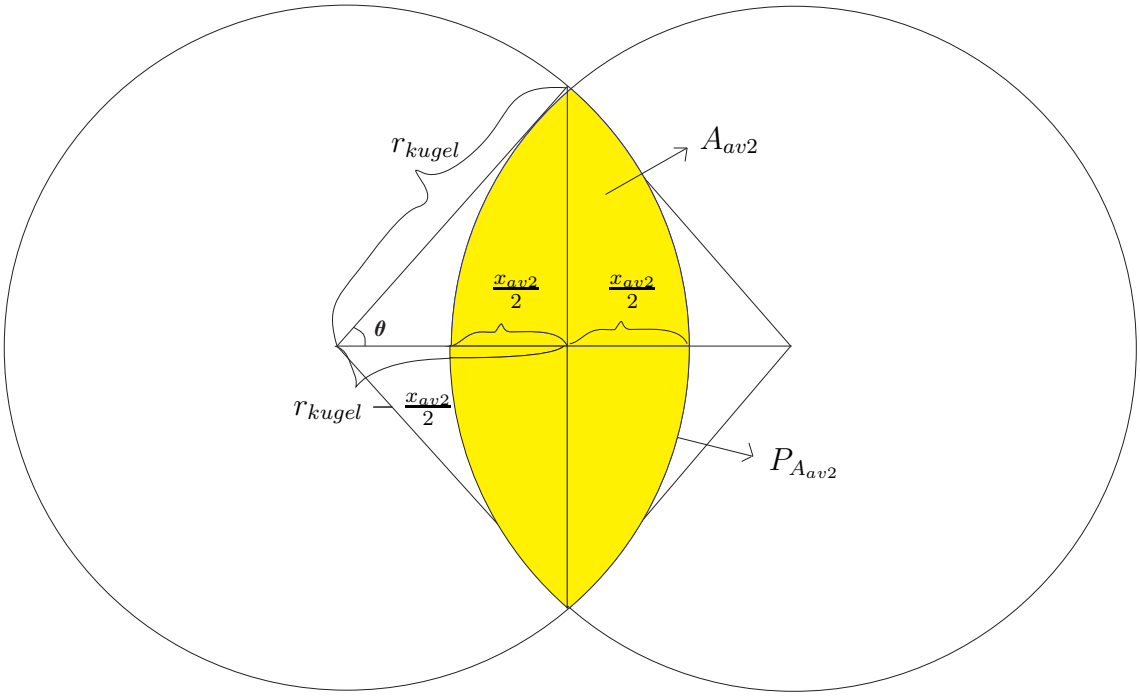


Abbildung 1.2.: Darstellung der Öffnungsfläche in Abhängigkeit von der Winkeländerung des Stellventils

ganz offen, wenn $\phi = \frac{\pi}{2}$ ist. Es stellt sich heraus, dass kein Volumenstrom mehr durch $av2$ abfließt, wenn $\phi_{av2} \leq \phi_{av2,zu}$ bzw. kein Volumenstrom mehr durch das Ventil $zv12$ fließt, wenn $\phi_{zv12} \leq \phi_{zv12,zu}$ ist.

Die Öffnungsfläche A_{av2} wird durch die Weite x_{av2} charakterisiert und es wird angenommen, dass diese linear vom Verdrehwinkel ϕ_{av2} abhängt

$$x_{av2} = 2r_{kugel}\frac{\phi_{av2} - \phi_{av2,zu}}{\frac{1}{2}\pi - \phi_{av2,zu}}. \tag{1.8}$$

Mit dem Winkel $\theta = \arccos\frac{r_{kugel} - \frac{x_{av2}}{2}}{r_{kugel}}$ kann der Umfang P_A der Öffnungsfläche wie folgt berechnet werden

$$P_{A_{av2}} = 4\frac{\theta}{2\pi}2\pi r_{kugel} = 4\theta r_{kugel}, \tag{1.9}$$

und die Öffnungsfläche A_{av2} ergibt sich zu

$$A_{av2} = r_{kugel}^2\left(2\theta - \sin 2\theta\right). \tag{1.10}$$

Der hydraulische Durchmesser $D_{h_{av2}}$ lässt sich wie folgt beschreiben [4]

$$D_{h_{av2}} = 4\frac{A_{av2}}{P_{A_{av2}}}. \tag{1.11}$$

Für das Zwischenventil $zv12$ ergeben sich die Werte auf analoge Weise. Alle konstanten Zahlenwerte für die Modellierung und für die elektrischen Stellventile sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	1000
$g \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$	9.81
A_{tank} [m^2]	0.0154
r_{kugel} [m]	0.0075
$\phi_{av2,zu}$[rad]	$\frac{\pi}{6}$
$\phi_{zv12,zu}$[rad]	$\frac{\pi}{12}$

Tabelle 1.1.: Parameter für die Modellierung und die geschlossenen Winkel für die Kugelhähne $av2$ und $zv12$.

2. Identifikation

Viele der im Kapitel 1 für die Modellierung verwendeten Größen und Parameter sind a priori unbekannt und können vielfach nicht direkt bestimmt werden. Außerdem werden weder die Füllhöhen direkt gemessen noch die Volumenströme von den Pumpen direkt vorgegeben. Es ist daher notwendig, Beziehungen in Form von Kennlinien, Funktionen und Abbildungen zwischen den gemessenen bzw. vorgegebenen Größen (zum Beispiel der Spannung eines Sensors) und der eigentlich interessierenden Größe (zum Beispiel der Füllhöhe eines Tanks) herzustellen. Zum anderen müssen unbekannte Parameter, z.B. der Durchflussbeiwert in Gleichung (1.4), identifiziert werden.

2.1. Füllhöhensensoren

Zur Bestimmung der Füllhöhen der drei Tanks werden piezoresistive Drucksensoren eingesetzt. Das Messprinzip besteht darin, den Differenzdruck zwischen dem Boden der Tanks und der Umgebung zu messen. Der Vorteil der Differenzdruckmessung ist die Unabhängigkeit von Schwankungen des Umgebungsluftdruckes.

Die verwendeten Sensoren liefern eine analoge Spannung U_{h_i} zwischen -10 V und 10 V. Damit die Sensoren die Füllhöhe liefern, muss die Beziehung zwischen der an den Sensoren anliegenden Spannung und der Füllhöhe im Tank ermittelt werden. Die Spannungen U_{h_1}, U_{h_2}, U_{h_3} werden über dSPACE eingelesen und die Füllhöhen h_1, h_2, h_3 von der an der Tankwand angebrachten Skala abgelesen. Die Beziehungen zwischen den an den Sensoren anliegenden Spannungen U_{h_1}, U_{h_2}, U_{h_3} und den Füllhöhen h_1, h_2, h_3 in den Tanks sind in Tabelle 2.1 aufgelistet und in Abbildung 2.1 graphisch dargestellt.

Insbesondere für die Realisierung in einem Simulationsmodell und für den Reglerentwurf ist es von Interesse, die in Tabelle 2.1 dargestellte Beziehung durch eine Funktion darzustellen.

h_i [m]	U_{h_1} [V]	U_{h_2} [V]	U_{h_3} [V]
0.61	−7.175	−7.805	−8.759
0.60	−6.879	−7.454	−8.560
0.55	−5.579	−5.984	−7.251
0.50	−4.176	−4.638	−6.024
0.45	−2.752	−3.261	−4.655
0.40	−1.426	−1.875	−2.955
0.35	−0.026	−0.442	−1.539
0.30	1.435	0.983	−0.141
0.25	2.837	2.353	1.280
0.20	4.206	3.760	2.612
0.15	5.639	5.153	4.050
0.10	7.040	6.562	5.479
0.05	8.430	7.935	6.895
0.00	9.784	9.257	8.262

Tabelle 2.1.: Messdaten der Sensorspannungen U_{h_i} für die ausgewählte Füllhöhe h_i

Wie aus Abbildung 2.1 deutlich wird, ist die Beziehung zwischen h_i und U_{h_i} in guter Näherung durch eine Gerade zu beschreiben, d.h.

$$h_i = p_{0,h_i} + p_{1,h_i} U_{h_i}. \tag{2.1}$$

Die Bestimmung der Parameter p_{0,h_i}, p_{1,h_i} erfolgt nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Least Squares) [7]. Diese beruht auf der Lösung des überbestimmten (linearen) Gleichungssystems

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\ \mathbf{p} \tag{2.2}$$

mit der $(m \times n)$ Matrix $\mathbf{S}$, dem m-dimensionalen Vektor $\mathbf{y}$ sowie dem n-dimensionalen Vektor der Unbekannten $\mathbf{p}$. Für $m > n$ und rang $(\mathbf{S}) = n \neq$ rang $([\mathbf{S},\ \mathbf{y}])$ besitzt das Gleichungssystem (2.2) keine Lösung für $\mathbf{p}$. Man behilft sich mit der Form, dass man jene Lösung $\mathbf{p}_{opt}$ sucht, die den quadratischen Fehler

$$\min_{\mathbf{p}} ||\mathbf{e}||_2^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{S}\ \mathbf{p} \tag{2.3}$$

minimiert. Setzt man die Ableitung $||\mathbf{e}||_2^2$ bezüglich $\mathbf{p}$ gleich Null, dann folgt die optimale Lösung $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{opt}$ im Sinn von (2.3) zu

$$\mathbf{p}_{opt} = \left(\mathbf{S}^T\mathbf{S}\right)^{-1} \mathbf{S}^T\mathbf{y}. \tag{2.4}$$

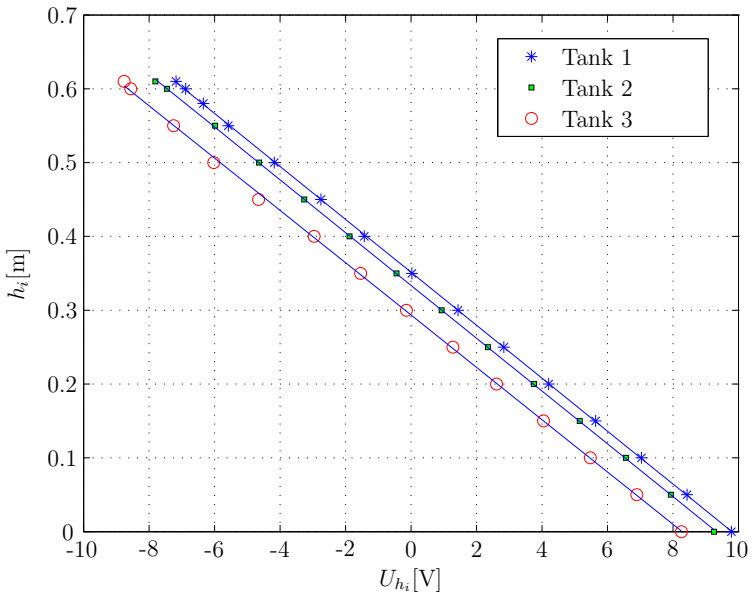


Abbildung 2.1.: Beziehung zwischen der Sensorspannung U_{h_i} und der Füllhöhe h_i

Mit m Messpunkten der Drucksensoren U_{h_i} und der Füllhöhe der Tanks h_i ergibt sich das Gleichungssystem wie folgt:

$$\begin{aligned} h_{i,1} &= p_{0,h_i} + p_{1,h_i} U_{h_i,1} \\ h_{i,2} &= p_{0,h_i} + p_{1,h_i} U_{h_i,2} \\ &\vdots \\ h_{i,m} &= p_{0,h_i} + p_{1,h_i} U_{h_i,m}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.4) können die Koeffizienten p_{0,h_i}, p_{1,h_i} der Näherungsgerade berechnet werden. Diese ergeben sich für die Füllhöhensensoren der drei Tanks wie in Tabelle 2.2 aufgelistet. Die entsprechenden Kennlinien für die Beziehung zwischen

	$p_{1,h_i}\left[\frac{\text{m}}{\text{V}}\right]$	p_{0,h_i} [m]
Tank 1	-0.0359	0.3513
Tank 2	-0.0358	0.3336
Tank 3	-0.0354	0.2835

Tabelle 2.2.: Koeffizienten für die U_{h_i}-h_i Kennlinie

h_i und U_{h_i} sind in Abbildung 2.1 zusammen mit den Messergebnissen darstellt.

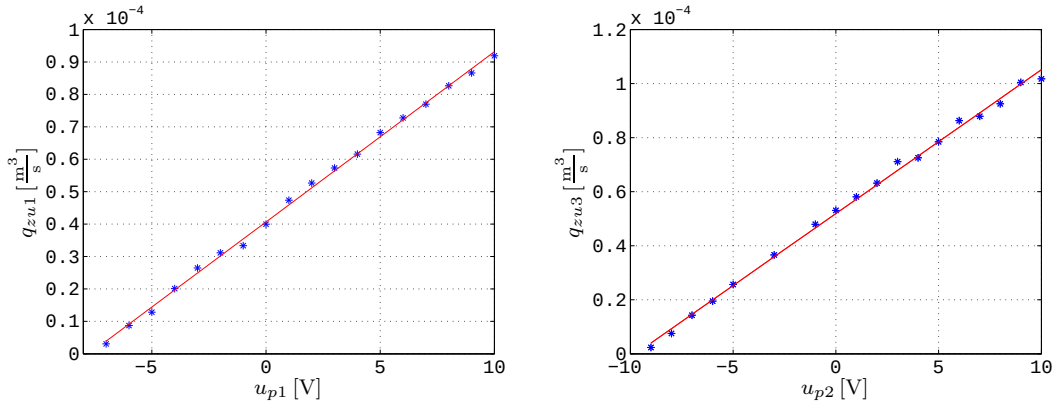
2.2. Pumpen

Die Tanks 1 und 3 können mit Hilfe zweier Pumpen befüllt werden. Die Ansteuerung der beiden Pumpen erfolgt durch Spannungen im Bereich von -10 V bis $+10$ V. Die gewünschten Stellgrößen des Systems sind aber die einfließenden Volumenströme. Es ist deshalb notwendig, die Beziehung zwischen den angelegten Spannungen und den geförderten Volumenströmen zu identifizieren.

Zur Bestimmung der Pumpenkennlinien werden Tank 1 und Tank 3 zuerst isoliert und die Abflussventile von Tank 1 und Tank 3 geschlossen. Dann werden während einer fixierten Zeitdauer $\Delta t = t_2 - t_1 = 30$ s verschiedene Spannungen an die Pumpen angelegt. Der geförderte mittlere Volumenstrom wird dann aus der Füllhöhendifferenz $h_j(t_2) - h_j(t_1)$ und der Grundfläche des Tanks A_{tank} wie folgt berechnet

$$q_{zuj} = \frac{(h_j(t_2) - h_j(t_1))\, A_{tank}}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Die Beziehung zwischen der angelegten Spannung U_{p_i} und dem mittleren geförderten Volumenstrom q_{zuj} ist in Tabelle 2.3 aufgelistet und in Abbildung 2.2 graphisch dargestellt.



(a) U_{p1}-q_{zu1} Kennlinie (b) U_{p2}-q_{zu3} Kennlinie

Abbildung 2.2.: Beziehung zwischen der Pumpenspannung U_{pi} und dem geförderten Volumenstrom q_{zuj}

Aus Tabelle 2.3 erkennt man, dass es keinen Volumenstrom mehr gibt, wenn die an Pumpe 1 angelegte Spannung kleiner als -7 V und wenn die an Pumpe 2 angelegte Spannung kleiner als -9 V ist. Wie aus Abbildung 2.2 sofort deutlich wird, ist die Beziehung zwischen q_{zuj} und U_{pi} mit guter Genauigkeit durch eine Gerade zu

Spannung U_{pi}[V])	$q_{zu1}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$	$q_{zu3}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$
-9	0	2.3604e-006
-8	0	7.543e-006
-7	3.0788e-006	1.4265e-005
-6	8.7232e-006	1.9499e-005
-5	1.2828e-005	2.5656e-005
-4	2.0115e-005	3.0636e-005
-3	2.6477e-005	3.6586e-005
-2	3.1147e-005	4.2432e-005
-1	3.3353e-005	4.7926e-005
0	3.9957e-005	5.3057e-005
1	4.7362e-005	5.8086e-005
2	5.2647e-005	6.3166e-005
3	5.7316e-005	7.1119e-005
4	6.1575e-005	7.2556e-005
5	6.8195e-005	7.8457e-005
6	7.2761e-005	8.6308e-005
7	7.6969e-005	8.7899e-005
8	8.2665e-005	9.2517e-005
9	8.6616e-005	0.00010042
10	9.1901e-005	0.00010175

Tabelle 2.3.: Messdaten der geförderten Volumenströme q_{zuj} für die ausgewählten Pumpenspannungen U_{pi}

beschreiben, d.h.

$$\begin{aligned} q_{zu1} &= p_{1,p1}U_{p1} + p_{0,p1} \quad (-7 \leq U_{p1} \leq 10)\,, \\ q_{zu3} &= p_{1,p2}U_{p2} + p_{0,p2} \quad (-9 \leq U_{p2} \leq 10)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mit Hilfe des Least-Squares-Verfahrens können die Koeffizienten $p_{1,pi}$, $p_{0,pi}$ der Näherungsgerade berechnet werden. Diese ergeben sich für die Pumpen wie in Tabelle 2.4 aufgelistet. Die entsprechenden Kennlinien für die Beziehung zwischen q_{zuj} und U_{pi}

	$p_{1,pi}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sV}}\right]$	$p_{0,pi}\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$
Pumpe 1	$0.525 \cdot 10^{-5}$	$4.067 \cdot 10^{-5}$
Pumpe 2	$0.532 \cdot 10^{-5}$	$5.189 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.4.: Koeffizienten für die U_{pi}-q_{zuj} Kennlinie

sind in Abbildung 2.2 zusammen mit den Messergebnissen dargestellt.

2.3. Elektrische Stellventile

Die elektrischen Stellventile sind in Form von Drehschieberventilen ausgeführt, bei denen die Ventilschieber mit Hilfe eines Schrittmotors verstellt werden. Da bei dieser Ausführung aus der Ansteuerung des Motors keine Information über den Ventilwinkel gewonnen werden kann, ist im Antrieb zusätzlich ein Potentiometer integriert, das zur Winkelbestimmung des Drehschiebers verwendet werden kann.

Betrachtet wird zunächst das Abflussventil $av2$. Unter der Annahme, dass der Zusammenhang zwischen dem Ventilwinkel ϕ_{av2} und der gemessenen Potentiometerspannung U_{av2} affin ist[1], kann aus den Spannungen in den Endanschlägen folgende Beziehung ermittelt werden

$$\phi_{av2} = \frac{\pi}{2} \frac{U_{av2} - U_{av2,0}}{U_{av2,\frac{\pi}{2}} - U_{av2,0}}. \tag{2.8}$$

Dabei bezeichnet $U_{av2,\frac{\pi}{2}}$ die Position bei geöffnetem Stellventil, $U_{av2,0}$ die Position bei geschlossenem Stellventil. Analog kann für das Zwischenventil $zv12$ folgender Zusammenhang ermittelt werden

$$\phi_{zv12} = \frac{\pi}{2} \frac{U_{zv12} - U_{zv12,0}}{U_{zv12,\frac{\pi}{2}} - U_{zv12,0}}. \tag{2.9}$$

Die Parameter sind in Tabelle 2.5 aufgelistet.

$U_{av2,\frac{\pi}{2}}[\mathrm{V}]$	5.15
$U_{av2,0}[\mathrm{V}]$	-9.3
$U_{zv12,\frac{\pi}{2}}[\mathrm{V}]$	5.583
$U_{zv12,0}[\mathrm{V}]$	-9.379

Tabelle 2.5.: Messdaten für den Winkel der elektrischen Stellventile

Die Ansteuerung der Ventile wird durch einen einfachen Drei-Punkt-Regler mit Hilfe eines Zustandsautomaten in der MATLAB/SIMULINK-Stateflow Toolbox realisiert. Wenn der Ist-Winkel vom Soll-Winkel mehr als 2° abweicht, wird der Drei-Punkt-Regler aktiviert.

[1] Diese Annahme kann nicht direkt überprüft werden, da außer in den Endanschlägen des Ventils bei $\phi_{av2} = 0$ und $\phi_{av2} = \frac{\pi}{2}$ keine genaue Positionsbestimmung möglich ist.

2.4. Identifikation der Volumenströme

Für die Modellierung der Strömung durch die verschiedenen Ventile wird zunächst der Durchflusskoeffizient bei turbulenter Strömung benötigt.

2.4.1. Identifikation der Durchflusskoeffizienten bei turbulenter Strömung

Zunächst sollen die Durchflusskoeffizienten der Abflussventile α_{avi} ermittelt werden. Dazu wird die Differentialgleichung für die Füllhöhe in einem Tank beim Ausfluss mit einer turbulenten Strömung betrachtet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_i = -\alpha_{avi}\,\frac{A_{avi}}{A_{tank}}\,\sqrt{2\,g h_i}, \tag{2.10}$$

wobei A_{avi} die Öffnungsfläche des Abflussventils avi bezeichnet und bekannt ist. Diese Differentialgleichung kann mit der Anfangsbedingung $h_i\,(0) = h_{i0}$ gelöst werden. Der Zeitverlauf der Füllhöhe ergibt sich dann zu

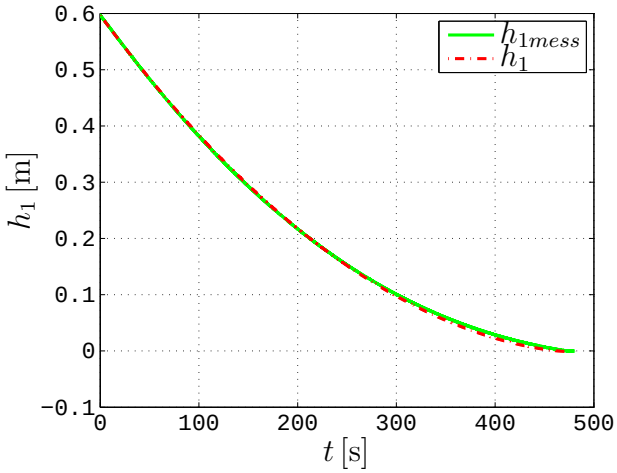
$$h_i = \frac{1}{A_{tank}^2}\left(\frac{\left(\alpha_{avi}A_{avi}\right)^2}{2}gt^2 - \sqrt{2gh_{i0}}\alpha_{avi}A_{avi}t + A_{tank}^2 h_{i0}\right). \tag{2.11}$$

Zur Identifikation von α_{avi} wird in dSPACE der Zeitverlauf der Füllhöhe $h_i\,(t)$ beim Leerlaufen des Tanks 1, 2, 3 über das jeweilige Abflussventil $av1$, $av2$ bzw. $av3$ aufgezeichnet. Der Durchflussbeiwert α_{avi} wird dann so berechnet, dass der quadratische Fehler zwischen der gemessenen Füllhöhe h_{imess} und der identifizierten Füllhöhe h_i minimiert wird

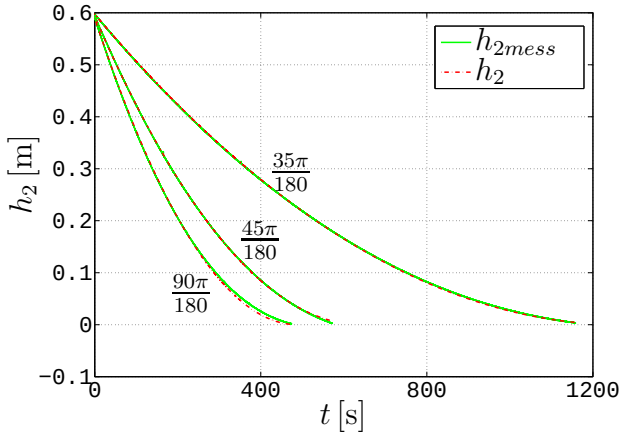
$$\min_{\alpha_{avi}} ||e_{avi}||_2^2 \quad \text{mit} \quad e_{avi} = h_{imess} - h_i. \tag{2.12}$$

Zum Einsatz kommt dabei die MATLAB-Funktion `fminunc`, die sich gut für nichtlineare, quadratische, unbeschränkte Optimierungsaufgaben eignet. Eine Beschreibung des Algorithmus findet man in [8]. Ein Vergleich der identifizierten Füllhöhen und der gemessenen Füllhöhen der drei Tanks ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Da die Identifikation für das Abflussventil $av2$ für verschiedene Winkel durchgeführt wird, wird h_2 hier nur exemplarisch für die Winkel $\frac{35\pi}{180}$, $\frac{45\pi}{180}$ und $\frac{90\pi}{180}$ aufgezeichnet.

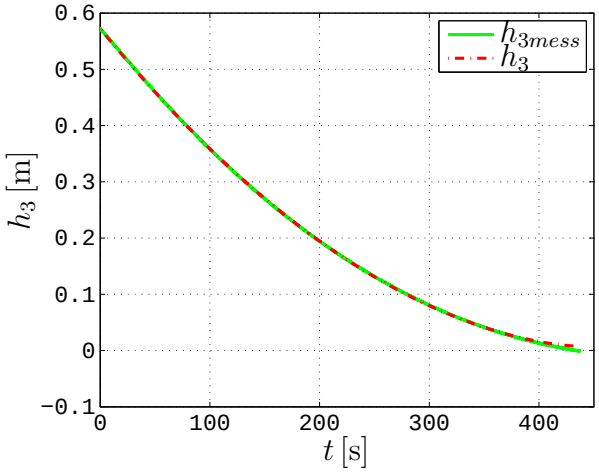
Zur Bestimmung des Durchflusskoeffizienten α_{zvi} bei einem Zwischenventil wird ein Ausgleichsvorgang von zwei Tanks durch ein Ventil betrachtet. Hier wird zuerst das



(a) Vergleich h_{1mess} mit h_1



(b) Vergleich h_{2mess} mit h_2



(c) Vergleich h_{3mess} mit h_3

Abbildung 2.3.: Vergleich der von dSPACE aufgenommenen Füllhöhen h_{imess} und der identifizierten Füllhöhen h_i

manuelle Zwischenventil $zv32$ betrachtet. Dieses kann folgendermaßen modelliert werden

$$A_{tank}\,\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = q_{zv32} \tag{2.13}$$

$$A_{tank}\,\frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t} = -q_{zv32}. \tag{2.14}$$

Mit der Einführung des neuen Zustandes $\Delta h_{32} = h_3 - h_2$ werden die Gleichungen (2.13) und (2.14) zu einer Gleichung zusammengefasst

$$A_{tank}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta h_{32} = -2\,q_{zv32}. \tag{2.15}$$

Für den Bereich $\Delta h_{32} \geq 0.1\mathrm{m}$ kann der Volumenstrom q_{zv32} zunächst als eine turbulente Strömung modelliert , d.h. $\overline{\alpha}_{zv32} = \alpha_{zv32}$, und nach Gleichung (1.4) wie folgt dargestellt werden

$$q_{zv32} = \alpha_{zv32} A_{zv32} \sqrt{2\,g|\Delta h_{32}|}\mathrm{sign}\left(\Delta h_{32}\right). \tag{2.16}$$

Die Differentialgleichung (2.15), (2.16) kann dann mit der Anfangsbedingung $\Delta h_{32}(0) = \Delta h_{32,0}$ gelöst werden. Der Zeitverlauf des Füllhöhenunterschieds ergibt sich dann zu

$$\Delta h_{32} = 2\left(\alpha_{zv32} A_{zv32} A_{tank}^{-1}\right)^2 g t^2 - 2\sqrt{2g\Delta h_{32,0}} A_{tank}^{-1}\,\alpha_{zv32}\;A_{zv32}\;t + \Delta h_{32,0} \tag{2.17}$$

Zur Identifikation von α_{zv32} wird in dSPACE der Zeitverlauf des Füllhöhenunterschiedes Δh_{zv32} bei einem Ausgleich der Füllhöhe zwischen Tank 3 und Tank 2 über das Zwischenventil $zv32$ aufgezeichnet. Der Durchflussbeiwert α_{zv32} wird dann so berechnet, dass der quadratische Fehler zwischen gemessenem Füllhöhenunterschied Δh_{32mess} und identifiziertem Füllhöhenunterschied Δh_{32} für den Bereich $\Delta h_{32} \geq 0.1\mathrm{m}$ minimiert wird

$$\min_{\alpha_{zv32}} ||e_{zv32}||_2^2 \quad \text{mit} \quad e_{zv32} = \Delta h_{32mess} - \Delta h_{32} \quad \left(|\Delta h_{32}| \geq 0.1\mathrm{m}\right). \tag{2.18}$$

Der Durchflusskoeffizient α_{zv12} für das Zwischenventil $zv12$ für den turbulenten Fall wird auf analoge Weise berechnet.

2.4.2. Anpassung beim Übergang zur laminaren Strömung

Da bei den Zwischenventilen für kleine Füllhöhenunterschiede die Strömung nicht mehr als eine turbulente Strömung beschrieben werden kann, werden die im vorigen Abschnitt identifizierten Durchflusskoeffizienten α_{zvi} für die Modellierung einer

laminaren Strömung für den ganzen Bereich des Füllhöhenunterschieds angepasst. Dazu wird der angepasste Durchflussbeiwert $\overline{\alpha}_{zvi}$ nach den Gleichungen (1.6) und (1.5) berechnet.

Hier wird weiterhin zuerst das Zwischenventil $zv32$ betrachtet. Der Parameter $\lambda_{zv32,crit}$ kann so berechnet werden, dass die Änderung des Füllhöhenunterschieds Δh_{32}, die mit Hilfe des modifizierten Durchflusskoeffizienten $\overline{\alpha}_{zv32}$ berechnet wird, wieder in die folgende Optimierungsaufgabe

$$\min_{\lambda_{zv32,crit}} ||e_{zv32}||_2^2 \quad \text{mit} \quad e_{zv32} = \Delta h_{32mess} - \Delta h_{32} \quad (|\Delta h_{32}| \geq 0\text{m}) \,. \tag{2.19}$$

eingesetzt wird. Der Parameter $\lambda_{zv32,crit}$ wird in Tabelle 2.8 aufgelistet.

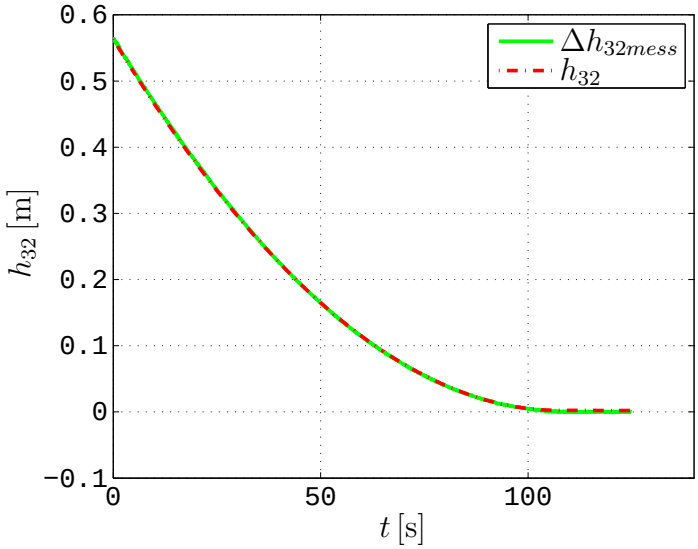
Beim elektrischen Zwischenventil $zv12$ stellt sich heraus, dass $\lambda_{zv12,crit}$ keine entscheidende Rolle spielt, da die Strömung praktisch sofort turbulent wird. Die Optimierung ist daher nicht besonders gut konditioniert und liefert entsprechend wenig brauchbare Ergebnisse. Daher wird $\lambda_{zv12,crit} = 700$ gewählt, was zu zufriedenstellenden Ergebnissen führt, siehe Abbildung 2.4b.

Der Vergleich des mithilfe von $\overline{\alpha}_{zvi}$ und $\lambda_{zvi,crit}$ beschriebenen Füllhöhenunterschiedes und des gemessenen Füllhöhenunterschiedes ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Da die Identifikation für verschiedene Winkel des Zwischenventils $zv12$ durchgeführt wird, werden hier die Ergebnisse nur exemplarisch für die Winkel $\frac{25\pi}{180}$, $\frac{40\pi}{180}$ und $\frac{90\pi}{180}$ dargestellt.

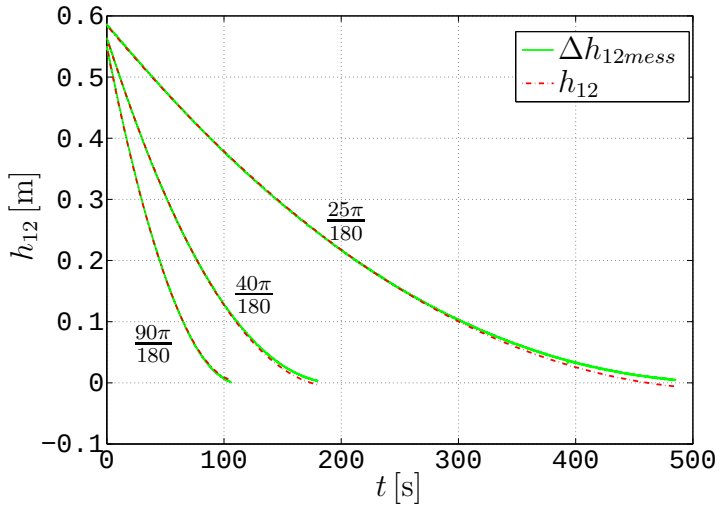
2.4.3. Anpassungen für elektrische Stellventile

Das Abflussventil $av2$ und das Zwischenventil $zv12$ sind elektrische Stellventile. Damit das vollständige Abflussverhalten von Tank 2 und vollständige Durchflussverhalten zwischen Tank 1 und Tank 3 bestimmt werden können, müssen das Abflussverhalten und das Durchflussverhalten für jede mögliche Winkelstellung identifiziert werden. Da die Identifikation eine sich wiederholende zeitaufwändige Arbeit ist, wird sie mittels eines Python Skripts automatisiert. Das verwendete Skript findet sich in Anhang A. Die identifizierten Durchflusskoeffizienten für die verschiedenen Winkel des Abflussventils $av2$ und des Durchflussventils $zv12$ sind in Tabelle 2.6 aufgelistet. Und der Wert für $\lambda_{zv12,crit}$ wird in Tabelle 2.8 aufgelistet.

Wenn sich die Winkel der elektrischen Stellventile $av2$ und $zv12$ ändern, ändert sich auch das Modell des gesamten Systems. Um später die Änderung des Systems systematisch und schnell in SIMULINK behandeln zu können, werden α_{av2} und α_{zv12}



(a) Vergleich Δh_{32mess} mit Δh_{32}



(b) Vergleich Δh_{12mess} mit Δh_{12} für den Winkel $\frac{\pi}{2}$

Abbildung 2.4.: Vergleich der von dSPACE aufgenommenen Füllhöhenunterschiede Δh_{imess} und der identifizierten Füllhöhenunterschiede Δh_i

ϕ_{av2}[rad]	α_{av2}	α_{zv12}
$\frac{20\pi}{180}$	0	0.41986
$\frac{25\pi}{180}$	0	0.51228
$\frac{30\pi}{180}$	0	0.44448
$\frac{35\pi}{180}$	0.8426	0.39610
$\frac{40\pi}{180}$	0.4437	0.35412
$\frac{45\pi}{180}$	0.3264	0.30937
$\frac{50\pi}{180}$	0.2474	0.27720
$\frac{55\pi}{180}$	0.1964	0.24015
$\frac{60\pi}{180}$	0.1545	0.21610
$\frac{65\pi}{180}$	0.1273	0.19562
$\frac{70\pi}{180}$	0.1062	0.18232
$\frac{75\pi}{180}$	0.0898	0.16688
$\frac{80\pi}{180}$	0.0791	0.15173
$\frac{85\pi}{180}$	0.0696	0.13958
$\frac{90\pi}{180}$	0.0619	0.12807

Tabelle 2.6.: Identifizierte Werte für die Durchflusskoeffizienten α_{av2} und α_{zv12}

jeweils durch eine Funktion der Verdrehwinkel ϕ_{av2} und ϕ_{zv12} approximiert. Die Funktionen werden mit Hilfe des Least-Squares-Verfahrens als Polynome 4. Ordnung von $\frac{1}{\phi}$ bestimmt. Die Funktion für α_{av2} ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}\alpha_{av2} = \kappa_{av2,4}\left(\frac{1}{\phi_{av2}}\right)^4 + \kappa_{av2,3}(\frac{1}{\phi_{av2}})^3 + \kappa_{av2,2}\left(\frac{1}{\phi_{av2}}\right)^2 \\ + \kappa_{av2,1}\left(\frac{1}{\phi_{av2}}\right) + \kappa_{av2,0} \quad \left(\frac{1}{6}\pi \leq \phi_{av2} \leq \frac{1}{2}\pi\right).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Funktion für α_{av2} ergibt sich zu

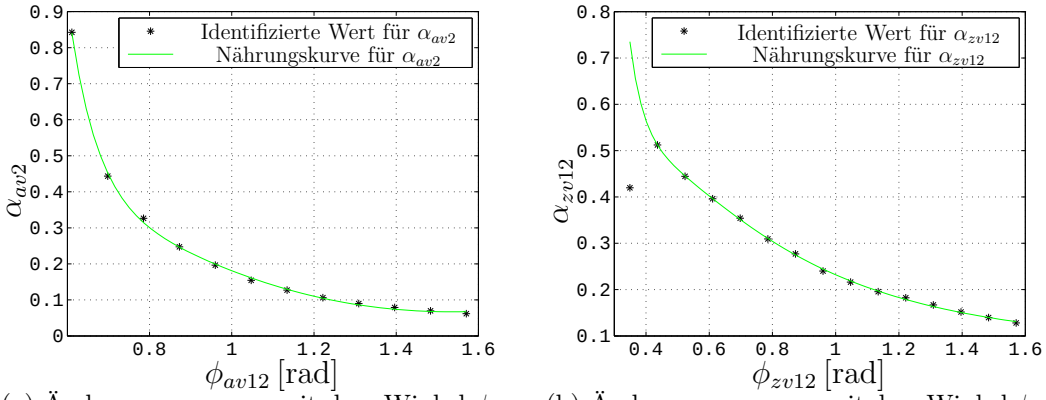
$$\begin{aligned}\alpha_{zv12} = \kappa_{zv12,4}\left(\frac{1}{\phi_{zv12}}\right)^4 + \kappa_{zv12,3}\left(\frac{1}{\phi_{zv12}}\right)^3 + \kappa_{zv12,2}\left(\frac{1}{\phi_{zv12}}\right)^2 \\ \kappa_{zv12,1}\left(\frac{1}{\phi_{zv12}}\right) + \kappa_{zv12,0} \quad \left(\frac{1}{12}\pi \leq \phi_{zv12} \leq \frac{1}{2}\pi\right).\end{aligned} \tag{2.21}$$

Die Koeffizienten für die zwei Gleichungen (2.21) und (2.20) sind in Tabelle 2.7 aufgelistet.

κ	$av2$	$zv12$
κ_4	2.344970476527107	$6.828043276650138e-002$
κ_3	-9.435641229883993	$-4.055980158039231e-001$
κ_2	14.25675488926884	$8.019239532167698e-001$
κ_1	-9.146458032520615	$-3.627893447158581e-001$
κ_0	2.161341341503097	$1.301924301380878e-001$

Tabelle 2.7.: Koeffizienten für die Funktionen gemäß (2.20) und (2.21).

Die durch Messungen berechneten α_{zv12} und α_{av2} für jeden Winkel und die durch die Gleichungen (2.21) und (2.20) beschriebenen Kennlinien für α_{av2}, α_{zv12} sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Für α_{zv12} wird hier nicht $\frac{20\pi}{180}$ berücksichtigt, weil das Ventil bei $\frac{20\pi}{180}$ praktisch geschlossen ist.



(a) Änderung von α_{av2} mit dem Winkel ϕ_{av2} (b) Änderung von α_{zv12} mit dem Winkel ϕ_{zv12}

Abbildung 2.5.: Identifizierte Werte und durch die Näherungsfunktionen beschriebene Kennlinien für α_{av2} und α_{zv12}

Die weiteren identifizierten Koeffizienten sind in Tabelle 2.8 aufgelistet.

α_{av1}	0.2121
α_{av3}	0.21843
α_{zv32}	0.47564
$\lambda_{zv32,crit}$	5083.7
$\lambda_{zv12,crit}$	700

Tabelle 2.8.: Identifizierte Durchflusskoeffizienten für die manuellen Stellventile und identifizierte Parameter $\lambda_{zvi,crit}$ für die Zwischenventile

3. Reglerentwurf für das Zwei-Tank-System

Als Vorstufe für die Regelung des Drei-Tank-Systems wird im folgenden Abschnitt die Regelung eines Zwei-Tank-Systems betrachtet. Dieses lässt sich mit dem beschriebenen Laborversuch dadurch erreichen, dass das Zwischenventil $zv32$ geschlossen wird. Außerdem wird für die übrigen Ventile die folgende Konfiguration gewählt

$$\chi_{av1} = 1, \quad \phi_{zv12} = \frac{7}{18}\pi, \quad \phi_{av2} = \frac{5}{18}\pi. \tag{3.1}$$

Das Zwei-Tank-System kann dann wie folgt modelliert werden

$$\begin{aligned} A_{tank} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= q_{zu1} - q_{av1}(h_1) - q_{zv12}(h_1, h_2) \\ A_{tank} \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= q_{zv12}(h_1, h_2) - q_{av2}(h_2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Als zu regelnder Ausgang wird die Füllhöhe des zweiten Tanks h_2 gewählt. Diese Wahl erweist sich für die Regelung mithilfe eines exakt zustandslinearisierenden Reglers als vorteilhaft, wie im Weiteren erläutert wird.

Die Regelungsaufgabe selbst besteht darin, mithilfe des durch die Pumpe 1 bereitgestellten Zulaufvolumenstroms q_{zu1} die Füllhöhe h_2 auf einem bestimmten Wert zu halten (Arbeitspunkt-Stabilisierung) und von einem Ausgangswert auf einen bestimmten Zielwert zu überführen (Arbeitspunkt-Wechsel). Aufgrund des nichtlinearen Charakters der Modellgleichungen und der besonderen Eigenschaften des Systems wird für diese Aufgabe ein exakt zustandslinearisierender Folgeregler entworfen. Dazu werden zunächst einige Grundlagen der exakten Eingangs-Zustandslinearisierung und der Folgeregelungen zusammengefasst. Dann wird erklärt, wie diese Regelungsmethoden am Zwei-Tank-System implementiert werden und schließlich werden Simulations- und Messergebnisse der Regelung gezeigt.

3.1. Regelungstechnische Grundlagen

In diesem Teil des Kapitels werden die notwendigen Grundlagen zur Entwicklung eines Reglers für das Zwei-Tank-System zusammengefasst. Für eine ausführliche Beschreibung siehe [6], [5].

3.1.1. Exakte Eingangs-Zustandslinearisierung

Man betrachte ein nichtlineares, zeitinvariantes System mit affinem Eingang

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\, u \\ y &= \lambda(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$, dem Ausgang $y \in \mathbb{R}$, den glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sowie der glatten Funktion $\lambda(\mathbf{x})$. Es ist unter bestimmten Voraussetzungen an das nichtlineare System (3.3) möglich, durch eine geeignete Zustandstransformation den nichtlinearen Teil des Systems zu kompensieren und ein lineares Eingangs-Ausgangsverhalten zu erhalten. Dazu wird der Ausgang y abgeleitet bis die Stellgröße u zum ersten Mal auftritt

$$\begin{aligned} y &= \lambda(\mathbf{x}) \\ \dot{y} &= L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}\lambda(\mathbf{x})}_{=0} u \\ \ddot{y} &= L_{\mathbf{f}}^2\lambda(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}_{=0} u \\ &\vdots \\ y^{(r-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{r-1}\lambda(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-2}\lambda(\mathbf{x})}_{=0} u \\ y^{(r)} &= L_{\mathbf{f}}^{r}\lambda(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}\lambda(\mathbf{x})}_{\neq 0} u. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Man beachte an dieser Stelle, dass die so genannte **Lie-Ableitung** $L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x})$, $k \in \mathbb{N}$ durch die Rekursion

$$L_{\mathbf{f}}^k\lambda(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}\left(L_{\mathbf{f}}^{k-1}\lambda(\mathbf{x})\right), \qquad L_{\mathbf{f}}^0\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

definiert ist. Es ist aus Gleichung (3.4) zu erkennen, dass die Stellgröße u zum ersten Mal bei der r-ten Ableitung des Ausganges explizit erscheint. Die Größe r wird relativer Grad genannt und wie folgt definiert:

Definition 3.1 *(**Relativer Grad eines Eingrößensystems**) Das System (3.3) hat den relativen Grad r an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$, wenn gilt*

(A) $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{k} \lambda(\mathbf{x}) = 0, k = 0, \ldots, r-2$ *für alle* $\mathbf{x}$ *in einer Umgebung* U *von* $\bar{\mathbf{x}}$ *und*

(B) $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{r-1} \lambda(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$

Ein Eingrößensystem, dessen relativer Grad r gleich seiner Systemordnung n ist, wird **exakt eingangs-zustandslinearisierbar** genannt. Alle Ableitungen der Ausgangsgröße y eines exakt eingangs-zustandslinearisierbaren Systems können mit der Stellgröße u gezielt beeinflusst werden. Das System (3.4) kann dann mit Hilfe des (*lokalen*) *Diffeomorphismus*

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \lambda(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

in die *Byrnes-Isidori Normalform* (3.7) transformiert werden:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}_1 & = z_2 \\ \dot{z}_2 & = z_3 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{z}_n & = L_{\mathbf{f}}^{n} \lambda(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})) + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))\, u \end{array} \right. \\ &z_1 = y \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aus der letzten Zeile des Gleichungssystems (3.7) ist zu erkennen, dass die nichtlinearen Terme des transformierten Systems in den Termen $L_{\mathbf{f}}^{n} \lambda(\mathbf{x})$ und $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\mathbf{x})$ zusammengefasst sind. Wenn die Stellgröße folgendermaßen gewählt wird

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\mathbf{x})} \left(-L_{\mathbf{f}}^{n} \lambda(\mathbf{x}) + v \right), \tag{3.8}$$

können diese Nichtlinearitäten exakt kompensiert werden. Das transformierte System mit dem neuen Eingang v verhält sich dann wie eine Integratorkette:

$$y^{(n)} = v \tag{3.9}$$

Für das linearisierte System mit dem neuen Eingang v kann ein linearer Regler entworfen werden.

3.1.2. Folgeregelung

Bei der Folgeregelung geht es darum, dass der Ausgang eines Systems y einer im Prinzip beliebig vorgegebenen Trajektorie y_d folgen soll. Es ist also ein Regler so zu entwerfen, dass der Folgefehler $e = y - y_d$ schnell zu Null gemacht wird. Unter der Bedingung, dass die Trajektorie y_d hinreichend oft stetig differenzierbar ist, kann der Regler wie folgt angegeben werden

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} \lambda(\mathbf{x})} \cdot \\ & \left(-L_{\mathbf{f}}^{n} \lambda(\mathbf{x}) + y_d^{(n)} - k_0 (y - y_d) - k_1 (\dot{y} - \dot{y}_d) - \cdots - k_{n-1} \left(y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)} \right) \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Fehlerdynamik mit $e = y - y_d$ folgt dann zu

$$e^{(n)} + k_{n-1} e^{(n-1)} + \cdots + k_1 \dot{e} + k_0 e = 0 \tag{3.11}$$

Durch Polvorgabe kann dann mithilfe von $\mathbf{k} = [k_0, \cdots, k_{n-1}]$ die gewünschte Dynamik des Folgefehlers e vorgegeben werden.

3.2. Systemanalyse

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie der Ausgang gewählt werden muss, damit das Zwei-Tank-System exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist. Zunächst wird verifiziert, dass das System tatsächlich exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist bzw., dass der relative Grad r gleich der Systemordnung n ist. Dies kann mit folgendem Satz überprüft werden:

Satz 3.1 *(**Existenz eines Ausganges mit relativem Grad** $r = n$) Es existiert genau dann ein Ausgang $y = \lambda(\mathbf{x})$, sodass das System (3.3) in einer Umgebung U des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ den relativen Grad $r = n$ hat, wenn*

(A) die Matrix $\left[\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \cdots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g} \right] (\bar{\mathbf{x}})$ *den Rang n besitzt und*

(B) die Distribution $D = \mathrm{span} \left\{ \mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \cdots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2} \mathbf{g} \right\}$ *in einer Umgebung U des Punktes $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv ist.*

Dabei bezeichnet $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$ die Lie-Klammer, die wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{k}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) &= \left[\mathbf{f}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1}\mathbf{g}\right]\left(\mathbf{x}\right), \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{g}}^{0}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) \\ \left[\mathbf{f}, \mathbf{g}\right]\left(\mathbf{x}\right) &= L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Distribution D ist involutiv, wenn für jedes Paar von Vektorfeldern $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2 \in D$ gilt $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] \in D$.

Für das Zwei-Tank-System (3.2) werden die Zustände $\mathbf{x} = [h_1, h_2]^T$ und die Stellgröße $u = q_{zu1}$ eingeführt. Die Vektorfelder $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$ und $\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right)$ ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) &= \begin{bmatrix} \dfrac{-q_{zv12}\left(h_1, h_2\right) - q_{av1}\left(h_1\right)}{A_{tank}} \\ \dfrac{q_{zv12}\left(h_1, h_2\right) - q_{av2}\left(h_2\right)}{A_{tank}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{tank}} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Um Satz 3.1 anwenden zu können, müssen $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{0}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right)$ und $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right)$ berechnet werden. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathbf{g}}^{0}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) &= \mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{tank}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) &= \frac{1}{A_{tank}^{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q_{zv12}\left(h_1, h_2\right)}{\partial h_1} + \dfrac{\partial q_{av1}\left(h_1\right)}{\partial h_1} \\ -\dfrac{\partial q_{zv12}\left(h_1, h_2\right)}{\partial h_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Damit die Rangbedingung (A) erfüllt werden kann, muss der Term $-\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{\partial h_1} \neq 0$ sein. Hier wird zuerst angenommen, dass $h_1 \geq h_2$ gilt, wobei der Fall $h_2 \geq h_1$ zu analogen Ergebnissen führt. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\,\frac{D_{h_{zv12}}\rho\sqrt{2\,g}}{\eta\lambda_{zv12,crit}} \\ k_2 &= A_{tank}\sqrt{2\,g} \end{aligned} \tag{3.15}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial q_{zv12}\left(h_1, h_2\right)}{\partial h_1} = \underbrace{\frac{\alpha_{zv12}\,k_2 k_1}{2}\left(1 - \tanh^2\left(k_1\sqrt{h_1 - h_2}\right)\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\alpha_{zv12}\,k_2\,\tanh\left(k_1\sqrt{h_1 - h_2}\right)}{2\,\sqrt{h_1 - h_2}}}_{k_3}. \tag{3.16}$$

Der kritische Term für die Erfüllung der Bedingung (A) ist der Term k_3. Da $k_3 > 0$ für $h_1 > h_2$ ist und auch der Grenzwert

$$\lim_{h_1 \to h_2} \frac{\alpha_{zv12}\, k_2 \, \tanh\left(k_1 \sqrt{h_1 - h_2}\right)}{2\,\sqrt{h_1 - h_2}} = \alpha_{zv12}\, k_2 k_1 \neq 0 \tag{3.17}$$

ist, ist der Term $\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{\partial h_1}$ immer ungleich Null und die Bedingung wird daher erfüllt. Da die Distribution $D = \mathrm{span}\{\mathbf{g}\}$ nur von einem Vektor aufgespannt wird, ist sie sicherlich involutiv. Damit erfüllt das System die Bedingungen von Satz 3.1 und ist demzufolge exakt eingangs-zustandslinearisierbar.

Jetzt werden Ausgänge gesucht, für die das Zwei-Tank-System exakt eingangs-zustandslinearisierbar sind. Die Bedingungen dafür ergeben sich laut Definition 3.1 wie folgt

$$\begin{aligned} &L_{\mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{A_{tank}} \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial h_1} = 0 \\ &L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x}) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Es ist sofort ersichtlich, dass $\lambda(\mathbf{x})$ nicht von h_1 abhängen darf. Daher wird die Füllhöhe von Tank 2 als Ausgang gewählt.

$$y = \lambda(\mathbf{x}) = h_2. \tag{3.19}$$

3.3. Implementierung der Regler im Zwei-Tank-System

Das Zwei-Tank-System kann in vier Teilsysteme unterteilt und wie in Abbildung 3.1 dargestellt werden.

- Trajektorien-Generator
- Regler
- Tank-System
- Filterung der Messgrößen

Der Trajektorien-Generator erzeugt aus einer gewünschten Füllhöhe y_{soll} eine geeignete (genügend oft differenzierbare) Trajektorie y_d. Mit y_d und dem Messsignal y

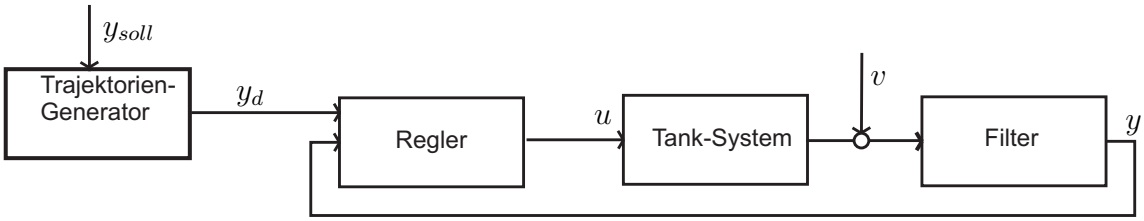


Abbildung 3.1.: Darstellung des Systems mit Regler für das Zwei-Tank-System

erzeugt der Regler eine Stellgröße u. Da zusätzlich das Messrauschen v auftritt, wird ein Filter eingesetzt, um das Messrauschen zu unterdrücken.

3.3.1. Trajektorien-Generator

Um einen Regler für das Zwei-Tank-System zu entwerfen, muss die Soll-Trajektorie zwei-fach stetig differenzierbar sein. Dies kann erreicht werden, indem die gewünschte Füllhöhe y_{soll} als Sollwert-Sprung auf ein Filter ausreichender Ordnung geschaltet wird. Ein geeignetes Filter genügt der Differentialgleichung

$$y_d^{(3)} = -a_2 y_d^{(2)} - a_1 \dot{y}_d - a_0 \left(y_d - y_{soll}\right). \tag{3.20}$$

Dabei beschreibt y_{soll} die gewünschte Füllhöhe und y_d die Soll-Trajektorie. Diese Differenzialgleichung erzeugt eine zweifach stetig differenzierbare Trajektorie y_d. Die Koeffizienten ergeben sich für einen dreifachen Pol bei-0.2 zu $a_0 = 0.008$, $a_1 = 0.12$, $a_2 = 0.6$.

Neben der Bedingung, dass die Soll-Trajektorie stetig differenzierbar sein muss, kann sie auch nicht schnell variieren, da das Zwei-Tank-System einer Stellgrößenbegrenzung unterliegt. Die Änderungsrate der Trajektorien wird deshalb in Simulink mit einem *Rate Limiter* beschränkt.

3.3.2. Regler

Hier wird die in Abschnitt 3.1 beschriebene Methode für die Berechnung der Stellgröße auf das Zwei-Tank-System angewandt. Zuerst werden folgende Lie-Ableitungen

der Ausgangsgleichung des Zwei-Tank-Systems berechnet

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}}\lambda(\mathbf{x}) &= 0 \\ L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) &= \frac{q_{zv12}(h_1,h_2) - q_{av2}(h_2)}{A_{tank}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Mit (3.21) berechnet sich $L_{\mathbf{f}}^2\lambda(\mathbf{x})$ zu:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^2\lambda(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{A_{tank}\partial h_1} \quad \frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{A_{tank}\partial h_2} - \frac{\partial q_{av2}(h_2)}{A_{tank}\partial h_2}\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{\partial h_1}\frac{q_{zv12}(h_1,h_2) + q_{av1}(h_1)}{A_{tank}^2} \\ &+ \left(\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{\partial h_2} - \frac{\partial q_{av2}(h_2)}{\partial h_2}\right)\frac{q_{zv12}(h_1,h_2) - q_{av2}(h_2)}{A_{tank}^2} \end{aligned} \tag{3.22}$$

und $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$ zu

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{A_{tank}\partial h_1} \quad \frac{\partial q_z v12(h_1,h_2)}{A_{tank}\partial h_2} - \frac{\partial q_{av2}(h_2)}{A_{tank}\partial h_2}\right]\begin{bmatrix}\frac{1}{A_{tank}}\\0\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{A_{tank}^2}\frac{\partial q_{zv12}(h_1,h_2)}{\partial h_1}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Da die Regelungsaufgabe vorsieht, einer Trajektorie zu folgen, wird das in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte Verfahren zum Entwurf einer Trajektorien-Folgeregelung verwendet. Das Stellgesetz ergibt sich dann nach (3.10) zu

$$q_{zu1} = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}\left(\underbrace{-L_{\mathbf{f}}^2\lambda(\mathbf{x})}_{\text{Kompensation}} + \underbrace{y_d^{(2)}}_{\text{Führung}} - \underbrace{\left(k_0\left(\lambda(\mathbf{x}) - y_d\right) - k_1\left(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) - \dot{y_d}\right)\right)}_{\text{Stabilisierung}}\right). \tag{3.24}$$

Mittels Vorgabe der Pole p_1 und p_2 kann die Fehlerdynamik beliebig beeinflusst werden. Die Parameter k_0 und k_1 ergeben sich zu $k_0 = p_1 p_2$ und $k_1 = -(p_1 + p_2)$. Bei der Wahl der Pole ist zu beachten, dass bei Polen im weit linken Bereich der s-Ebene der konstante Fehler zwar sehr klein wird, aber wegen der betragsmäßig großen Verstärkung des Regelfehlers $\frac{k_0}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})}$ das Messrauschen allein dazu führt, dass ein großer Teil des Stellbereichs ausgenutzt wird. Da das Zwei-Tank-System ein sich langsam änderndes System ist, können Realteile der Pole betragsmäßig klein gewählt werden. Im Experiment ergeben sich zufriedenstellende Ergebnisse für die Wahl $p_1 = -0.3$ und $p_2 = -0.35$.

Mit dem berechneten Volumenstrom q_{zu1} kann die Pumpenspannung U_{p1} mithilfe der Pumpenkennlinie aus Abschnitt 2.2 folgendermaßen berechnet werden.

$$U_{p1} = \begin{cases} 10 & q_{zu1} > 9.317 \cdot 10^{-5} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \frac{q_{zu1} - p_{0,p1}}{p_{1,p1}} & q_{zu1} \leq 9.317 \cdot 10^{-5} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{3.25}$$

Und der Kompensations- und Führungsanteil U_{p1f} der Pumpenspannung U_{p1} wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} q_{zu1f} &= \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \lambda(\mathbf{x})} \left(-L_{\mathbf{f}}^2 \lambda(\mathbf{x}) + y_d^{(2)} \right), \\ U_{p1f} &= \begin{cases} 10 & q_{zu1f} > 9.317 \cdot 10^{-5} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \frac{q_{zu1f} - p_{0,p1}}{p_{1,p1}} & q_{zu1f} \leq 9.317 \cdot 10^{-5} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Die Parameter $p_{1,p1}$ und $p_{0,p1}$ sind in Tabelle 2.4 aufgelistet.

3.3.3. Messfilter

Die Abtastfrequenz für das System beträgt 100 Hz. Da das Messsignal verrauscht ist, muss ein Filter zur Unterdrückung des Rauschens entworfen werden. Da die Zeitkonstante des Tank-Systems sehr groß ist und das Rauschen im Vergleich dazu in einem hohen Frequenzbereich liegt, kommt hier ein Tiefpassfilter zum Einsatz.

Da es möglich ist, dass die Eigenfrequenz des Systems höher als die Nyquist-Frequenz (halbe Abtastfrequenz) ist, kann der Alias-Effekt auftreten. Um den Alias-Effekt zu vermeiden, wird das Messsignal zunächst mit einem analogen Tiefpass mit einer Knickfrequenz von 20 Hz gefiltert.

In Simulink wird ein PT1 Glied als Tiefpassfilter eingesetzt, um das Messrauschen zu unterdrücken. Durch Experimente wird das Tiefpassfilter mit einer Zeitkonstanten $T_{filter} = 0.2$ s eingestellt. Der Vergleich von gemessenen und gefilterten Signalen ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das Messrauschen relativ gut gefiltert wird.

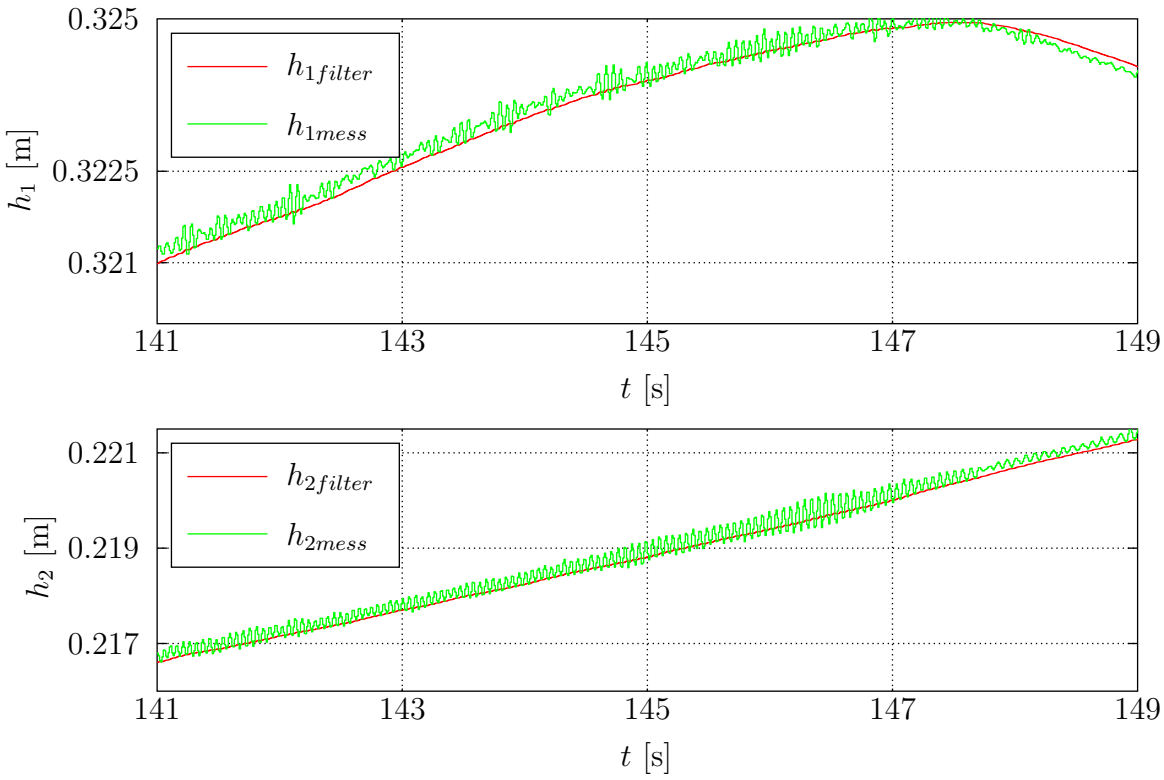


Abbildung 3.2.: Vergleich von gemessenen und gefilterten Signalen

3.4. Regelergebnisse

In diesem Abschnitt werden Messergebnisse der Regelung des Zwei-Tank-Systems gezeigt. Die Regelungsaufgabe besteht darin, mithilfe des durch die Pumpe 1 bereitgestellten Zulaufvolumenstroms q_{zu1} die Füllhöhe h_2 von einem Ausgangswert auf einen bestimmten Zielwert zu überführen.

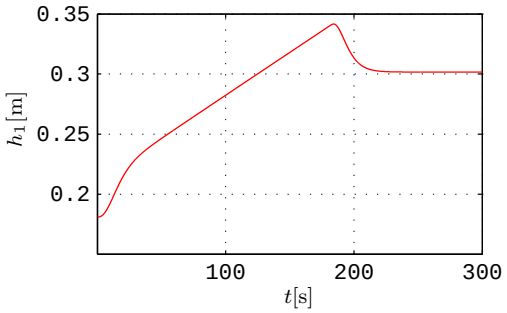
Die Füllhöhe des Tanks 2 h_2 kann nicht auf einen beliebigen Zielwert eingestellt werden, sondern die Menge der möglichen Füllhöhen ist in Abhängigkeit von der Füllhöhe von Tank 1 und der gewählten Ventilkonfiguration (3.1) beschränkt. Die maximal erreichbare Füllhöhe h_2 für die gewählte Ventilkonfiguration errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die Ruhelage von h_2 zu

$$\frac{\mathrm{d}h_{2s}}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) - q_{av2}\left(h_{2s}\right)}{A_{tank}} \tag{3.27}$$

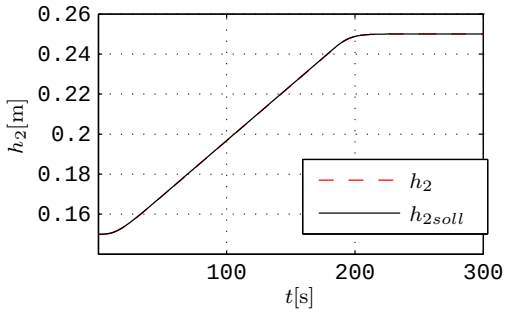
Für eine Füllhöhe $h_{1s} = 0.6\,\mathrm{m}$ erhält man beispielsweise $h_{2s} = 0.499\,\mathrm{m}$. Für das folgende Experiment wird die Führungsgröße h_{2soll} als eine Trajektorie von einer Ruhelage 0.15 m Meter bis 0.25 m mithilfe des durch die Pumpe 1 bereitgestellten Zulaufvolumenstroms geplant. Dabei sollte die Wirkung der Stellgrößenbegrenzung wie folgt untersucht werden. Um die Beschränkung für die Anstiegsgeschwindigkeit zu berechnen, wird die kürzeste Zeit benötigt, in der die Füllhöhe h_2 von der Ruhelage 0.15 m zu 0.25 m fahren kann. Die schnellste Fahrzeit ergibt sich als 109 s, wenn die Pumpenspannung U_{p1} für das Modell des Zwei-Tank-Systems in der Simulation konstant auf $U_{p1,max} = 10\,\mathrm{V}$ gesetzt wird. Die Beschränkung für die Anstiegsgeschwindigkeit ergibt sich dann wie folgt $\frac{0.25\,\mathrm{m} - 0.15\,\mathrm{m}}{109\,\mathrm{s}} = 0.00091\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Anstiegsgeschwindigkeit der gewünschten Füllhöhe y_{soll} wird durch den Trajektorien-Generator schon einigermaßen begrenzt. Die Beschränkung der Anstiegsgeschwindigkeit wird durch Versuche in *Rate-Limiter* in MATLAB allgemein auf $0.00055\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ festgestellt.

In Abbildung 3.3 wird zunächst die Simulation des geforderten Arbeitspunkt-Wechsels gezeigt. Es ist zu erkennen, dass auf das System fast nur der Kompensations- und Führungsanteil U_{p1f} wirkt, weil der Regler auf dem Simulationsmodell basiert.

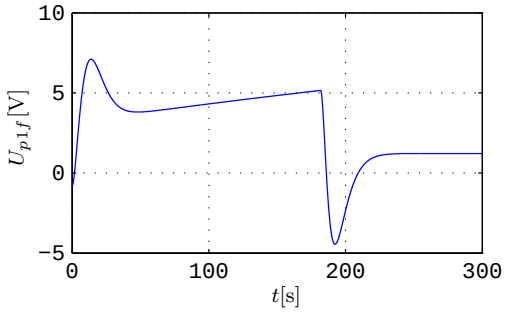
Anschließend wird das Experiment für die gleiche Aufgabenstellung in dSPACE implementiert und die Ergebnisse in Abbildung 3.4 dargestellt. Es ist aus Abbildung 3.4b zu erkennen, dass das durch das Tiefpassfilter gefilterte Signal $h_{2filter}$ der Solltrajektorie h_{2soll} zufriedenstellend folgt. Wird Abbildung 3.3 mit Abbildung 3.4 verglichen, ist zu erkennen, dass durch die Verstärkung des Messrauschens und die Ungenauigkeit des Modells der Stabilisierungsanteil $U_{p1sb} = U_{p1} - U_{p1f}$ in dSPACE auch aktiv ist, was die gesamte Pumpenspannung U_{p1} verrauscht.



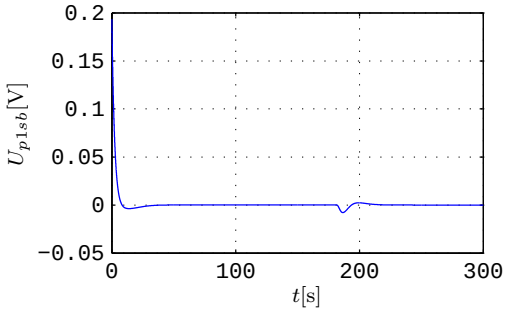
(a) h_1 Zeitverlauf



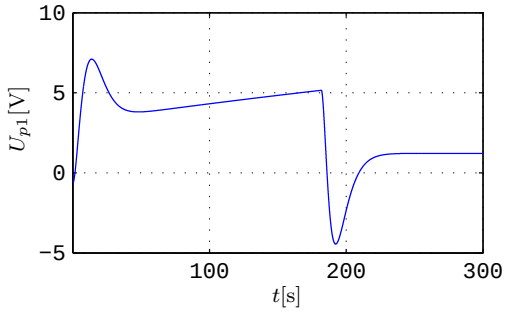
(b) h_2 und h_{2soll} Zeitverlauf



(c) Zeitverlauf von U_{p1f}

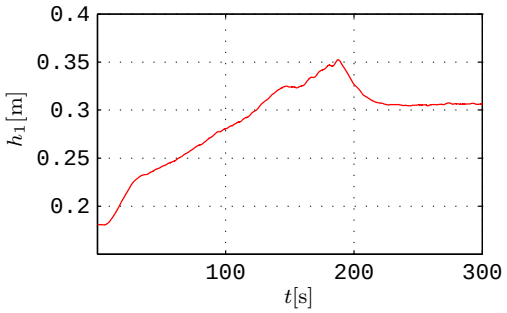


(d) Zeitverlauf von U_{p1sb}

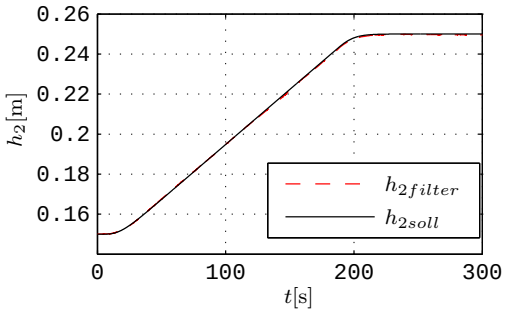


(e) Zeitverlauf von U_{p1}

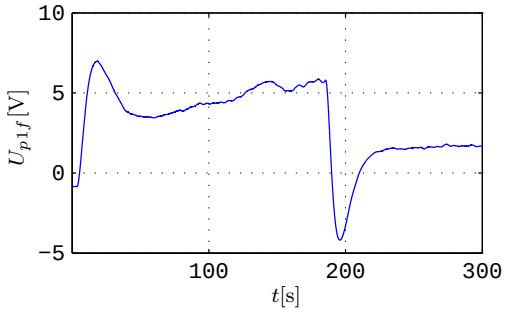
Abbildung 3.3.: Simulationsergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System ohne Messrauschen



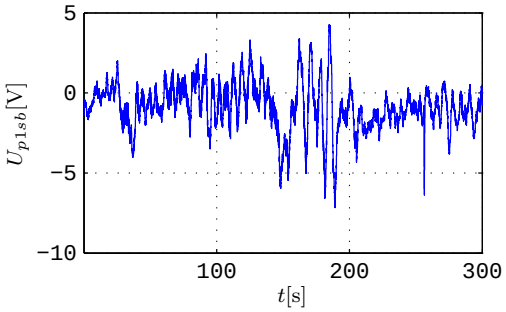
(a) $h_{1filter}$ Zeitverlauf



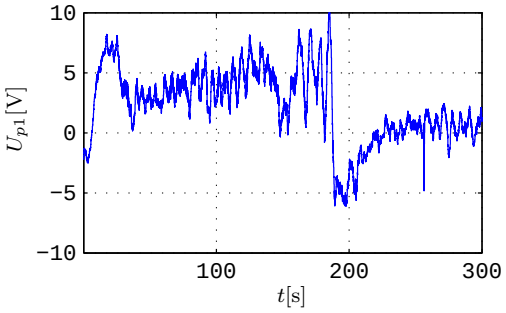
(b) $h_{2filter}$ und h_{2soll} Zeitverlauf



(c) Zeitverlauf von U_{p1f}



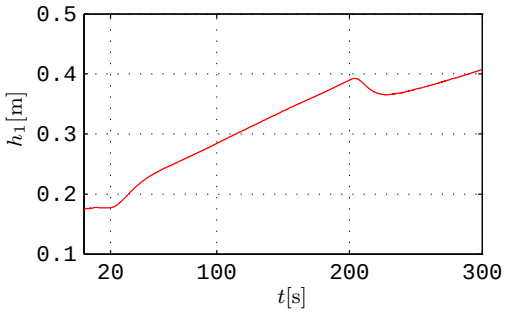
(d) Zeitverlauf von U_{p1sb}



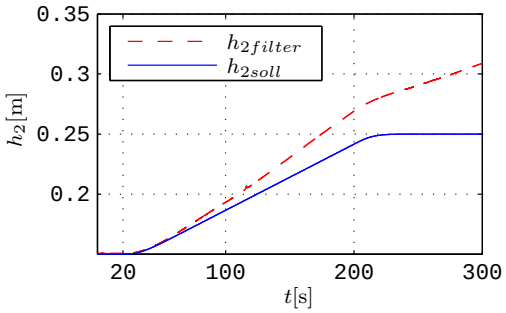
(e) Zeitverlauf von U_{p1}

Abbildung 3.4.: Messergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System mit Stabilisierungsanteil

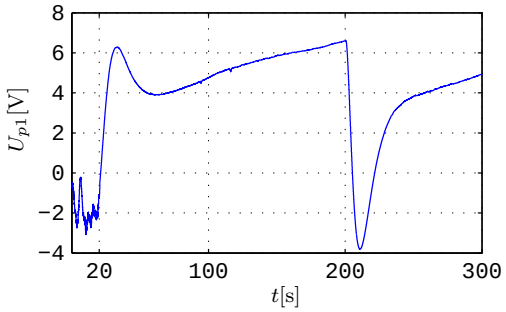
Um die Genauigkeit des Modells zu überprüfen, wird ein Experiment nur mit dem Kompensations- und Führungsanteil U_{p1f} ohne den Stabilisierungsanteil U_{p1sb} für die gleiche Aufgabenstellung durchgeführt und die Ergebnisse in Abbildung 3.5 dargestellt. Da es die Regelungsaufgabe ist, aus einer Ruhelage zu starten, und nur mit dem
Kompensations- Führungssanteil die Ruhelage nicht richtig konstant gehalten werden kann, sollte die Umschaltung von dem Regler mit dem Stabilisierungsanteil zu dem Regler ohne Stabilisierungsanteil im dSPACE gleichzeitig mit dem Start der Trajektorie stattfinden. In Abbildung 3.4 wird am Anfang bis 20 s die Regelung mit dem Stabilisierungsanteil eingesetzt. Ab dem Zeitpunkt $t = 20$ s fängt die geplante Solltrajektorie an und gleichzeitig wird der Stabilisierungsanteil ausgeschaltet. Dieses ist daran zu erkennen, dass die Stellgröße U_{p1} bis zum Ausschalten des Stabilisierungsanteil noch verrauscht ist. Ab dem Umschaltzeitpunkt wirkt nur noch die Kompensations- und Führungsanteil, in der die (verrauschten) Messgrößen nur mittels der Kompensation der Nichtlinearitäten und eingehen. Aus Abbildung 3.5b ist zu erkennen, dass die Trajektorie von $h_{2filter}$ vom Start der Solltrajektorie bis zum Ende der Solltrajektorie noch prinzipiell folgen kann. Dies zeigt, dass das Modell gut mit der Realität übereinstimmt. Der Grund, warum die Füllhöhe von Tank 2 h_2 nach der Folgerung der Solltrajektorie weiter ansteigt, liegt darin, dass die nichtlinearen Teile wegen der Abweichung des Modells von der Realität falsch kompensiert werden.



(a) $h_{1filter}$ Zeitverlauf



(b) $h_{2filter}$ und h_{2soll} Zeitverlauf



(c) U_{p1} Zeitverlauf

Abbildung 3.5.: Messergebnisse für den Arbeitspunktwechsel für das Zwei-Tank-System ohne Stabilisierungsanteil

4. Reglerentwurf für das Drei-Tank-System

Das Drei-Tank-System ist das gesamte System, das aus Tank 1, Tank 2 und Tank 3 besteht. Es wird für die Ventile folgende Konfiguration gewählt:

$$\chi_{av1} = 1,\ \phi_{zv12} = \frac{7}{18}\pi,\ \phi_{av2} = \frac{5}{18}\pi,\ \chi_{zv32} = 1,\ \chi_{av3} = 1. \tag{4.1}$$

Das Drei-Tank-System kann dann wie folgt modelliert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{-q_{zv12}\left(h_1, h_2\right) - q_{av1}\left(h_1\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu1}}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{q_{zv12}\left(h_1, h_2\right) + q_{zv32}\left(h_3, h_2\right) - q_{av2}\left(h_2\right)}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t} &= \frac{-q_{zv32}\left(h_3, h_2\right) - q_{av3}\left(h_3\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu3}}{A_{tank}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Als zu regelnde Ausgänge werden die Füllhöhe des zweiten Tanks h_2 und der Füllhöhenunterschied von Tank 1 und Tank 3 $h_1 - h_3$ gewählt. Diese Wahl erweist sich für die Regelung mit Hilfe eines exakt zustandslinearisierenden Reglers als vorteilhaft, wie im Weiteren erläutert wird.

Die Regelungsaufgabe selbst besteht darin, mithilfe der durch die Pumpen 1 und 2 bereitgestellten Zulaufvolumenströme in Tank 1 und 3 die Füllhöhe h_2 und den Füllhöhenunterschied $h_1 - h_3$ jeweils auf einem bestimmten Wert zu halten (Arbeitspunkt-Stabilisierung) und von einem Ausgangswert auf einen bestimmten Zielwert zu überführen (Arbeitspunkt-Wechsel). Aufgrund des nichtlinearen Charakters der Modellgleichungen und der mehrfachen Eingänge und Ausgänge des Systems wird für diese Aufgabe ein exakt zustandslinearisierender Folgeregler für den Mehrgrößenfall entworfen. Da die meisten notwendigen Regelungsgrundlagen schon in Kapitel 3 gezeigt sind, werden hier die weiters benötigte Erweiterung anhand der Implementierung beschrieben und schließlich werden Simulations- und Messergebnisse der Regelung gezeigt.

4.1. Systemanalyse

In diesem Abschnitt wird gezeigt, welche Ausgänge gewählt werden müssen, damit das Drei-Tank-System exakt eingangs-zustandslinearisierbar ist. Im darauffolgenden Abschnitt wird noch die Implementierung für den Regler gezeigt.

Es stellt sich zuerst die Frage, ob das System überhaupt exakt zustandslinearisierbar ist. Ähnlich wie für das Zwei-Tank-System wird zuerst die Definition des relativen Grads eingeführt. Man betrachte zuerst ein nichtlineares, zeitinvariantes Mehrgrößensystem mit affinen Eingängen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{g}_j(\mathbf{x})\, u_j \\ y_1 &= \lambda_1(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y_m &= \lambda_m(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u}^T = [u_1, \ldots, u_m,] \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgang $\mathbf{y}^T = [y_1, \ldots, y_m,] \in \mathbb{R}^m$, den glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ sowie den glatten Funktionen $\lambda_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, m$. Es ist unter bestimmten Voraussetzungen an das nichtlineare System (4.3) möglich, durch eine geeignete Zustandstransformation den nichtlinearen Teil des Systems zu kompensieren und ein lineares Eingangs-Ausgangsverhalten zu erhalten. Dazu werden alle Ausgänge zeitlich abgeleitet bis zumindest eine Stellgröße explizit erscheint.

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \dot{y_1} &= L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}_1}\lambda_1(\mathbf{x})}_{=0} u_1 + \cdots + \underbrace{L_{\mathbf{g}_m}\lambda_1(\mathbf{x})}_{=0} u_m \\ &\vdots \\ y_1^{(r_1)} &= L_{\mathbf{f}}^{r}\lambda_1(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}^{r_1-1}\lambda_1(\mathbf{x})\, u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m}L_{\mathbf{f}}^{r_1-1}\lambda_1(\mathbf{x})\, u_m \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ y_m &= \lambda_m(\mathbf{x}) \\ \dot{y_m} &= L_{\mathbf{f}}\lambda_m(\mathbf{x}) + \underbrace{L_{\mathbf{g}_1}\lambda_m(\mathbf{x})}_{=0} u_1 + \cdots + \underbrace{L_{\mathbf{g}_m}\lambda_m(\mathbf{x})}_{=0} u_m \\ &\vdots \\ y_m^{(r_m)} &= L_{\mathbf{f}}^{r_m}\lambda_m(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}^{r_m-1}\lambda_m(\mathbf{x})\, u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m}L_{\mathbf{f}}^{r_m-1}\lambda_m(\mathbf{x})\, u_m \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aus dem Gleichungssystem (4.4) folgt unmittelbar die Definition des relativen Grades für ein Mehrgrößensystem.

Definition 4.1 *(**Relativer Grad eines Mehrgrößensystems**) Das System (4.3) hat den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ mit $r = \sum_{j=1}^{m} r_j \leq n$ an der Stelle $\overline{\mathbf{x}} \in U$, wenn*

(A) $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{k} \lambda_i (\mathbf{x}) = 0, j = 1, \ldots, m, i = 1, \cdots, m, k = 0, \ldots, r_i - 2$ *für alle* $\mathbf{x}$ *in der Umgebung* U *von* $\overline{\mathbf{x}}$ *und*

(B) die $(m \times m)$ *- Entkopplungsmatrix*

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1 - 1} \lambda_1 (\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_1 - 1} \lambda_1 (\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1 - 1} \lambda_1 (\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_2 - 1} \lambda_2 (\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_2 - 1} \lambda_2 (\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_2 - 1} \lambda_2 (\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m - 1} \lambda_m (\mathbf{x}) & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}}^{r_m - 1} \lambda_m (\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m - 1} \lambda_m (\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

für $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$ *regulär ist.*

Wenn die Summe der Komponenten des vektorellen relativen Grades eines Systems gleich der Systemordnung n ist, ist das System exakt zustandslinearisierbar. Der nachfolgende Satz gibt nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass für das System (4.3) mit einem vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ gilt $r = \sum_{j=1}^{m} r_j = n$.

Satz 4.1 *(**Existenz von Ausgangsgrößen mit vektoriellem relativen Grad** $r = n$) Das System (4.3) besitzt genau dann Ausgänge $y_1 = \lambda_1 (\mathbf{x}), \ldots, y_m = \lambda_m (\mathbf{x})$ in einer Umgebung U des Punktes $\overline{\mathbf{x}}$ mit der Eigenschaft, dass die Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\overline{\mathbf{x}})$ nach (4.5) regulär ist und für den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ gilt $r = \sum_{j=1}^{m} r_j = n$, wenn die Distributionen*

$$G_i (\mathbf{x}) = span\{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{k} \mathbf{g}_i (\mathbf{x}) : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\} \tag{4.6}$$

folgende Bedingungen erfüllen.

(A) $G_0 (\overline{\mathbf{x}})$ *hat den Rang* m

(B) $G_i (\mathbf{x})$ *hat konstanten Rang in einer Umgebung* U *von* $\overline{\mathbf{x}}$ *für alle* $i = 1, \ldots, n-1$

(C) $G_{n-1} (\overline{\mathbf{x}})$ *hat den Rang* n *und*

(D) $G_i (\mathbf{x})$ *ist involutiv in einer Umgebung* U *von* $\overline{\mathbf{x}}$ *für alle* $i = 1, \ldots, n-2$

Für das Drei-Tank-System werden die Zustände $\mathbf{x} = [h_1, h_2, h_3]^T$ und die Stellgrößen $\mathbf{u} = [q_{zu1}, q_{zu3}]^T$ eingeführt. Aus der Systemgleichung für das Drei-Tank-System (4.2) werden $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ wie folgt berechnet.

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{tank}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A_{tank}} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{-q_{zv12}(h_1,h_2) - q_{av1}(h_1)}{A_{tank}} \\ \frac{q_{zv12}(h_1,h_2) + q_{zv32}(h_2,h_3) - q_{av2}(h_2)}{A_{tank}} \\ \frac{-q_{zv32}(h_2,h_3) - q_{av3}(h_3)}{A_{tank}} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Die Distributionen für das Drei-Tank-System werden von Satz 4.1 wie folgt berechnet.

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{x}) &= \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\} \\ G_1(\mathbf{x}) &= \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \text{ad}^1_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}^1_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\} \\ G_2(\mathbf{x}) &= \text{span}\{\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \text{ad}^1_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}^1_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \text{ad}^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \text{ad}^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Der Rang für $G(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wird in Maple berechnet, wobei sich folgendes zeigt

$$\text{rang}(G_0(\mathbf{x})) = 2 \quad \text{rang}(G_1(\mathbf{x})) = 3 \quad \text{rang}(G_2(\mathbf{x})) = 3. \tag{4.9}$$

Jetzt muss mit Satz 4.1 der Rang für alle $G(\mathbf{x})$ überprüft werden.

- Da $G_0(\mathbf{x})$ den Rang $m = 2$ hat (m ist gleich der Anzahl der Ausgänge), wird die Bedingung (A) von Satz 4.1 erfüllt.
- Da $G_1(\mathbf{x})$ und $G_2(\mathbf{x})$ einen konstanten Rang haben, wird die Bedingung (B) von Satz 4.1 erfüllt.
- Da $G_2(\mathbf{x}) = 3$ den Rang $n = 3$ hat, ist die Bedingung (C) von Satz 4.1 erfüllt.
- Für die Bedingung (D) von Satz 4.1 wird noch untersucht, ob $G_0(\mathbf{x})$, $G_1(\mathbf{x})$ involutiv sind. Da die Distribution $G_0(\mathbf{x})$ durch $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$ und $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ aufgespannt ist, wird nur die Lie-Klammer $[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})]$ überprüft. Da die Lie-Klammer

$[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x})]$ gleich Null ist, ist $G_0(\mathbf{x})$ involutiv. Da der Rang von $G_1(\mathbf{x})$ gleich der Systemordnung ist, ist $G_1(\mathbf{x})$ sicherlich involutiv. Damit wird die Bedingung (D) von Satz 4.1 auch erfüllt.

Im Folgenden wird gezeigt, welche Zahlenwerte der vektorielle relative Grad $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ haben muss. Das kann mit den Hilfsgrößen

$$\delta_i = \operatorname{rang}(G_i(\mathbf{x})) - \operatorname{rang}(G_{i-1}(\mathbf{x})), \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{4.10}$$

mit der Eigenschaft $0 \leq \delta_{i+1} \leq \delta_i$ konstruiert werden. Die Komponente r_j des vektoriellen relativen Grades $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ ergibt sich als die um 1 erhöhte Anzahl der Größen δ_i, die größer oder gleich i sind. Für das Drei-Tank-System ist

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \operatorname{rang}(G_1(\mathbf{x})) - \operatorname{rang}(G_0(\mathbf{x})) = 3 - 2 = 1, \\ \delta_2 &= \operatorname{rang}(G_2(\mathbf{x})) - \operatorname{rang}(G_1(\mathbf{x})) = 3 - 3 = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Deshalb hat das Drei-Tank-System den vektoriellen relativen Grad $r = \{2, 1\}$.

Jetzt werden Ausgänge gesucht, für die der vektorielle relative Grad $r = \{2, 1\}$ ist. Aus der Ableitungsgleichung (4.4) ist ersichtlich, dass ein Ausgang des Drei-Tank-Systems folgende Bedingungen erfüllen muss, damit der relative Grad $r_1 = 2$ erfüllt wird

$$r_1 = 2 \Leftarrow \begin{cases} L_{\mathbf{g}_1}\lambda_1(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}_2}\lambda_1(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{oder} \quad L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) \neq 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Jetzt müssen die $L_{\mathbf{g}_1}\lambda_1(\mathbf{x})$, $L_{\mathbf{g}_2}\lambda_1(\mathbf{x})$, $L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x})$, $L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x})$ wie folgt berechnet werden. Aus

$$L_{\mathbf{g}_1}\lambda_1(\mathbf{x}) = \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_1}\lambda_1(h_1, h_2, h_3)}{A_{tank}} \right] = 0 \tag{4.13}$$

$$L_{\mathbf{g}_2}\lambda_1(\mathbf{x}) = \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_3}\lambda_1(h_1, h_2, h_3)}{A_{tank}} \right] = 0 \tag{4.14}$$

ist sofort ersichtlich, dass $\lambda_1(\mathbf{x})$ nicht von h_1 und h_3 abhängen darf. Mit $\lambda_1(h_2)$ folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_1}q_{zv_{12}}(h_1, h_2)\dfrac{\partial}{\partial h_2}\lambda_1(h_2)}{{A_{tank}}^2} \right] \neq 0 \quad \text{oder} \\ L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_3}q_{zv_{32}}(h_2, h_3)\dfrac{\partial}{\partial h_2}\lambda_1(h_2)}{{A_{tank}}^2} \right] \neq 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

ist ersichtlich, dass $\lambda_1(\mathbf{x})$ von h_2 abhängen muss. Deshalb wird hier der Ausgang $\lambda_1(\mathbf{x}) = h_2$ gewählt.

Der zweite Ausgang muss folgende Bedingungen erfüllen, damit $r_2 = 1$ ist.

$$r_2 = 1 \Leftarrow \begin{cases} L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2(\mathbf{x}) \neq 0 & \text{oder} \\ L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Jetzt müssen $L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2(\mathbf{x})$ und $L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2(\mathbf{x})$ berechnet werden. Aus

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_1}\lambda_2(h_1, h_2, h_3)}{A_{tank}} \right] \neq 0 \quad \text{oder} \\ L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial h_3}\lambda_2(h_1, h_2, h_3)}{A_{tank}} \right] \neq 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

ist ersichtlich, dass $\lambda_2(\mathbf{x})$ entweder nur von h_1 oder nur von h_3 oder von beiden abhängen muss. Hier wird der zweite Ausgang $\lambda_2(\mathbf{x}) = h_1 - h_3$ gewählt.

Das vollständige Modell für das Drei-Tank-System ist von (4.2) abgeleitet und wie folgt mit den ausgewählten Ausgängen neu dargestellt.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{-q_{zv12}(h_1, h_2) - q_{av1}(h_1)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu1}}{A_{tank}} \\ \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{q_{zv12}(h_1, h_2) + q_{zv32}(h_3, h_2) - q_{av2}(h_2)}{A_{tank}} \\ \frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t} &= \frac{-q_{zv32}(h_3, h_2) - q_{av3}(h_3)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu3}}{A_{tank}} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \lambda_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_1 - h_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2. Reglerentwurf für das Drei-Tank-System

4.2.1. Folgeregelung

Durch eine geeignete Zustandstransformation können die nichtlinearen Teile kompensiert werden, damit das Drei-Tank-System (4.18) ein lineares Eingangs-Ausgangsverhalten aufweist. Die Ausgänge des Drei-Tank-Systems werden dann nach (4.4)

wie folgt abgeleitet

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_1 &= L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) \\ \ddot{y}_1 &= L_{\mathbf{f}}^2\lambda_1(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x})\, q_{zu1} + L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x})\, q_{zu3} \\ y_2 &= \lambda_2(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_2 &= L_{\mathbf{f}}\lambda_2(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2(\mathbf{x})\, q_{zu1} + L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2(\mathbf{x})\, q_{zu3}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Das Gleichungssystem (4.19) kann mit Hilfe des (lokalen) Diffeomorphismus wie folgt

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ z_{2,1} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}\lambda_1(\mathbf{x}) \\ \lambda_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

in die Byrnes-Isidori Normalform transformiert werden

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= L_{\mathbf{f}}^2\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) + L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) q_{zu1} + L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) q_{zu3} \\ \dot{z}_{2,1} &= L_{\mathbf{f}}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) + L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) q_{zu1} + L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) q_{zu3}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Um das System kompakter darzustellen, wird das Gleichungssystem wie folgt angeschrieben.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1,2} \\ \dot{z}_{2,1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^2\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \\ L_{\mathbf{f}}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) & L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \\ L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) & L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z}))} \begin{bmatrix} q_{zu1} \\ q_{zu3} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Aus (4.22) ist zu erkennen, dass die nichtlinearen Terme des transformierten Systems in den $\boldsymbol{b}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right)$ und $\mathbf{D}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right)$ zusammengefasst sind. Wenn die Stellgrößen folgendermaßen gewählt werden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{zu1} \\ q_{zu3} \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right)\left(\mathbf{v} - \boldsymbol{b}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right)\right) \\ &= \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) & L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \\ L_{\mathbf{g}_1}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) & L_{\mathbf{g}_2}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_{\mathbf{f}}^2\lambda_1\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \\ v_2 - L_{\mathbf{f}}\lambda_2\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})\right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

können diese Nichtlinearitäten exakt kompensiert werden. Das transformierte System mit dem neuen Eingang $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$ verhält sich dann wie zwei Integratorketten.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= v_1 \\ \dot{z}_{2,1} &= v_2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Für das lineare System (4.24) kann ein linearer Regler entworfen werden. Da es die Aufgabe ist, zwei beliebig vorgegebenen Soll-Trajektorien y_{1d} und y_{2d} zu folgen, muss der Regler sowohl den Fehler $e_1 = y_1 - y_{1d}$ als auch den Fehler $e_2 = y_2 - y_{2d}$ zu Null bringen. Unter der Bedingung, dass die zwei Soll-Trajektorien y_{1d} und y_{2d} hinreichend oft stetig differenzierbar sind, kann der neue Eingang v_1 wie folgt gesetzt werden

$$\ddot{y}_1 = \dot{z}_{1,2} = v_1 = \ddot{y}_{1,d} - k_{11}\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_{1d}\right) - k_{10}\left(y_1 - y_{1d}\right). \tag{4.25}$$

Die Fehlerdynamik von y_1 mit $e_1 = y_1 - y_{1d}$ folgt aus Gleichung (4.25) dann zu

$$\ddot{e}_1 + k_{11}\dot{e}_1 + k_{10}e_1 = 0. \tag{4.26}$$

Mittels Vorgabe der Pole p_1 und p_2 kann die Fehlerdynamik von y_1 beliebig beeinflusst werden. Die Parameter k_{10} und k_{11} ergeben sich zu $k_{10} = p_1 p_2$, $k_{11} = -(p_1 + p_2)$.

Der neue Eingang v_2 wird auf analoge Weise wie für v_1 wie folgt berechnet

$$\dot{y}_2 = \dot{z}_{2,1} = v_2 = \dot{y}_{2d} - k_{20}\left(y_2 - y_{2d}\right). \tag{4.27}$$

Die Fehlerdynamik von y_2 mit $e_2 = y_2 - y_{2d}$ folgt aus Gleichung (4.27) dann zu

$$\dot{e}_2 + k_{20}e_2 = 0 \tag{4.28}$$

Mittels Vorgabe des Pols p_3 kann die Fehlerdynamik von y_2 beliebig beeinflusst werden. Der Parameter k_{20} ergibt sich zu $k_{20} = -p_3$. Bei der Wahl des Pols ist zu beachten, dass bei Polen im weit linken Bereich der s-Ebene die konstanten Fehler zwar sehr klein werden, aber das Messrauschen wegen der betragsmäßig großen Verstärkung des Regelfehlers allein dazu führt, dass ein großer Teil des Stellbereichs ausgenutzt wird. Da das Drei-Tank-System ein sich langsam änderndes System ist, können die Realteile der Pole betragsmäßig klein gewählt werden. Im Experiment ergeben sich zufriedenstellende Ergebnisse für die Wahl $p_1 = -0.6$, $p_2 = -0.7$ und $p_3 = -0.9$.

Mit den berechneten Volumenströmen q_{zu1} und q_{zu3} können die Pumpenspannungen U_{p1} und U_{p2} mithilfe der dinien (2.7) wie folgt berechnet werden.

$$U_{p1} = \begin{cases} 10 & q_{zu1} > 9.317 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \dfrac{q_{zu1} - p_{0,p1}}{p_{1,p1}} & q_{zu1} \leq 9.317 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{4.29}$$

$$U_{p2} = \begin{cases} 10 & q_{zu3} > 10.509 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \dfrac{q_{zu3} - p_{0,p2}}{p_{1,p2}} & q_{zu3} \leq 10.509 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \end{cases} \tag{4.30}$$

Der Kompensations- und Führungsanteil U_{p1f} der Pumpenspannung U_{p1} und der Kompensations- und Führungsanteil U_{p2f} der Pumpenspannung U_{p2} werden wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= \begin{bmatrix} v_{1f} \\ v_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{1d} \\ \dot{y}_{2d} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} q_{zu1f} \\ q_{zu3f} \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{\Phi}^{-1} (\mathbf{z}) \right) \left(\mathbf{v}_{ff} - \boldsymbol{b} \left(\mathbf{\Phi}^{-1} (\mathbf{z}) \right) \right), \\ U_{p1f} &= \begin{cases} 10 & q_{zu1f} > 9.317 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \dfrac{q_{zu1f} - p_{0,p1}}{p_{1,p1}} & q_{zu1f} \leq 9.317 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}, \end{cases} \\ U_{p2f} &= \begin{cases} 10 & q_{zu3f} > 10.509 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \\ \dfrac{q_{zu3f} - p_{0,p2}}{p_{1,p2}} & q_{zu3f} \leq 10.509 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Die Parameter $p_{1,pi}$ und $p_{0,pi}$ sind in Tabelle 2.4 aufgelistet. Die Stabilisierungsanteile U_{p1sb} und U_{p2sb} werden wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} U_{p1sb} &= U_{p1} - U_{p1f} \\ U_{p2sb} &= U_{p2} - U_{p2f}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.2.2. Trajektorien-Generator

Um einen Regler für das Drei-Tank-System zu entwerfen, muss die Soll-Trajektorie y_{1d} zweifach und y_{2d} einfach stetig differenzierbar sein. Dies kann erreicht werden, indem die gewünschten Füllhöhen y_{1soll} und y_{2soll} jeweils als Sollwert-Sprung auf einen Filter ausreichender Ordnung geschaltet werden. Ein geeigneter Filter für die Soll-Trajektorie y_{1d} genügt der Differentialgleichung

$$y_{1d}^{(3)} = -a_{1,2} y_{1d}^{(2)} - a_{1,1} \dot{y}_{1d} - a_{1,0} \left(y_{1d} - y_{1soll} \right). \tag{4.33}$$

Dabei beschreibt y_{1soll} die gewünschte Füllhöhe für y_{1d}. Diese Differenzialgleichung erzeugt eine zweifach stetig differenzierbare Trajektorie. Die Koeffizienten ergeben sich für einen dreifachen Pol bei -0.2 zu $a_{1,0} = 0.008$, $a_{1,1} = 0.12$, $a_{1,2} = 0.6$.

Ein geeigneter Filter für die Soll-Trajektorie y_{2d} genügt analog der Differentialgleichung

$$y_{2d}^{(2)} = -a_{2,1}\dot{y}_{2d} - a_{2,0}\left(y_{2d} - y_{2soll}\right). \tag{4.34}$$

Dabei beschreibt y_{2soll} den gewünschten Füllhöhenunterschied für y_{2d}. Diese Differenzialgleichung erzeugt eine stetig differenzierbare Trajektorie. Die Koeffizienten ergeben sich für einen zweifachen Pol bei -0.2 zu $a_{2,0} = 0.04$, $a_{2,1} = 0.4$.

Neben der Bedingung, dass die Soll-Trajektorien stetig differenzierbar sein müssen, können sie auch nicht schnell variieren, weil das Drei-Tank-System einer Stellgrößenbegrenzung unterliegt. Die Änderungsrate der Trajektorien wird deshalb in Simulink mit einem *Rate Limiter* beschränkt.

4.3. Messfilter

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten zur Unterdrückung des Messrauschens vorgestellt: Einerseits die Verwendung eines Tiefpassfilters und andererseits eines Extended Kalman-Filters. Anschließend werden die zwei Filter mittels Messergebnissen miteinander verglichen.

4.3.1. Tiefpassfilter

Die Abtastfrequenz für das System beträgt 100 Hz. Die Zeitkonstante des Tank-Systems ist sehr groß. Im Vergleich dazu liegt das Rauschen in einem hohen Frequenzbereich. Deshalb kommt hier ein Tiefpassfilter zum Einsatz.

Da es möglich ist, dass die Eigenfrequenz des Systems höher als die Nyquist-Frequenz (halbe Abtastfrequenz) ist, kann der Alias-Effekt auftreten. Um diesen zu vermeiden, wird das Messsignal zunächst mit einem analogen Tiefpassfilter mit einer Knickfrequenz von 20 Hz gefiltert.

In Simulink wird ein PT1 Glied als Tiefpassfilter eingesetzt, um das Messrauschen zu unterdrücken. Durch Experimente wird das Tiefpassfilter im Rechner mit einer Zeitkonstanten $T_{filter} = 0.2$ s eingestellt.

4.3.2. Extended Kalman-Filter

Ein Weg, das Messrauschen zu unterdrücken, besteht darin, durch einen Beobachter die aktuellen Zustände zu schätzen. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Extended Kalman-Filter (EKF) verwendet [7]. Dazu wird das Modell des Drei-Tank-Systems wie folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\right), \quad \mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \lambda\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\right) \end{aligned} \tag{4.35}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} = [h_1, h_2, h_3] \in \mathbb{R}^3$, dem Eingang $\mathbf{u} = [q_{zu1}, q_{zu3}] \in \mathbb{R}^2$, dem Messrauschen $\mathbf{v}$ und der Störung $\mathbf{w}$ dargestellt.

Da das Kalman-Filter für die abgetasteten Messsignale implementiert wird, müsste das zugehörige Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \quad \mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0 \tag{4.36}$$

$$\mathbf{y}_k = \lambda_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k). \tag{4.37}$$

bestimmt werden. Zur Bestimmung des Abtastsystems ist aber die exakte Lösung von (4.35) vonnöten, die nur in Spezialfällen analytisch angegeben werden kann. Daher wird über ein Integrationsverfahren eine Näherungslösung gesucht, wobei angenommen wird, dass die Stellgrößen $\mathbf{u}$ und die Störung $\mathbf{w}$ in einem Abtastzeit-Intervall konstant sind. Das heißt $\mathbf{u}\left(t\right) = \mathbf{u}\left(kT_a\right) = \mathbf{u}_k$ und $\mathbf{w}\left(t\right) = \mathbf{w}\left(kT_a\right) = \mathbf{w}_k$ im Zeitintervall $kT_a \leq t \leq \left(k+1\right)T_a$, wobei $T_a = 0.01$ s. Die Aktualisierung der diskreten Zustände stellt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)Ta} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t\right), \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k\right) \mathrm{d}t \\ \mathbf{y}_k &= \lambda_k\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

mit $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}\left(\left(k+1\right)T_a\right)$ und $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}\left(kT_a\right)$ dar. Die Integration von (4.38) kann zum Beispiel mit dem *Euler-Verfahren* berechnet werden

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\left(t\right), \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k\right) \mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)T_a. \tag{4.39}$$

Für die folgenden Bestimmungsgleichungen des Extended Kalman-Filters werden zunächst folgende Schreibweisen vereinbart: $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ist die *a priori Schätzung* für den Zustand $\mathbf{x}$ zum Zeitpunkt k mit den Messinformationen bis zum Zeitpunkt $k-1$; $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ ist die *a posteriori Schätzung* für den Zustand $\mathbf{x}$ mit den Messinformationen bis zum Zeitpunkt k. Entwickelt man die Gleichung (4.36) um den Punkt $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^+$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$ und $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$, und die Gleichung (4.37) um den Punkt $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k$,

$\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ in eine Taylor-Reihenentwicklung und bricht nach dem linearen Term ab, dann erhält man mit der vereinfachten Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right)\Big|_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k=\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k=\mathbf{0}} \tag{4.40}$$

ein (lineares) Abtastsystem in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k + \overline{\mathbf{u}}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \check{\mathbf{u}}_k + \mathbf{H}_k\mathbf{w}_k + \check{\mathbf{v}}_k \end{aligned} \tag{4.41}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) \\ \overline{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) - \mathbf{\Phi}_k\hat{\mathbf{x}}_k^+ \\ \mathbf{G}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) \\ \mathbf{C} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\lambda_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right) \\ \check{\mathbf{u}}_k &= \lambda_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right) - \mathbf{C}_k\hat{\mathbf{x}}_k^- \\ \mathbf{H}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\lambda_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right) \\ \check{\mathbf{v}}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_k}\lambda_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)\mathbf{v}_k. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Von der Störung $\mathbf{w}_k$ und vom Messrauschen $\check{\mathbf{v}}_k$ in (4.41) wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathbf{E}\left(\check{\mathbf{v}}_k\right) = \mathbf{0}, \mathbf{E}\left(\mathbf{w}_k\right) = \mathbf{0}, \mathbf{E}\left(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T\right) = \mathbf{Q}_k\delta_{kj}, \mathbf{E}\left(\check{\mathbf{v}}_k\check{\mathbf{v}}_j^T\right) = \mathbf{R}_k\delta_{kj}, \mathbf{E}\left(\mathbf{w}_k\check{\mathbf{v}}_j^T\right) = \mathbf{0} \tag{4.43}$$

mit $\mathbf{Q}_k \geq 0, \mathbf{R}_k \geq 0$ sowie $\mathbf{H}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{H}_j^T + \mathbf{R}_k > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ sonst.

Die Iterationsgleichungen des Extended Kalman-Filter lauten dann für $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\lambda_k\left(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{u}_k, 0, 0\right) \quad \mathbf{H}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\left(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{u}_k, 0, 0\right) \\
\hat{\boldsymbol{L}}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_k + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\boldsymbol{L}}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{x}_k^- - \check{\mathbf{u}}_k\right) = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\boldsymbol{L}}_k\left(\mathbf{y}_k - \lambda_k\left(\mathbf{x}_k^-, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)\right) \\
\mathbf{P}_k^+ &= \left(\mathbf{E} - \hat{\boldsymbol{L}}_k \mathbf{C}_k\right)\mathbf{P}_k^- \\
\boldsymbol{\Phi}_k &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right), \quad \mathbf{G}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_k^+ + \underbrace{\mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) - \boldsymbol{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+}_{\overline{\mathbf{u}}_k} = \mathbf{F}_k\left(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}\right) \\
\mathbf{P}_{k+1}^- &= \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_k^+ \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Wenn keine vorherigen Messwerte über den Prozess vorliegen, werden typischerweise der geschätzte Zustand $\hat{\mathbf{x}}_0^- = \mathbf{0}$ und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{P}_0^- = \alpha\mathbf{E}$ für $\alpha \gg$ für den Anfangszeitpunkt gesetzt. Der geschätzte Zustand $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ und die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{P}_0^-$ für das Drei-Tank-System werden wie folgt

$$\hat{\mathbf{x}}_0^- = [0\ 0\ 0]^T, \quad \mathbf{P}_0^- = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

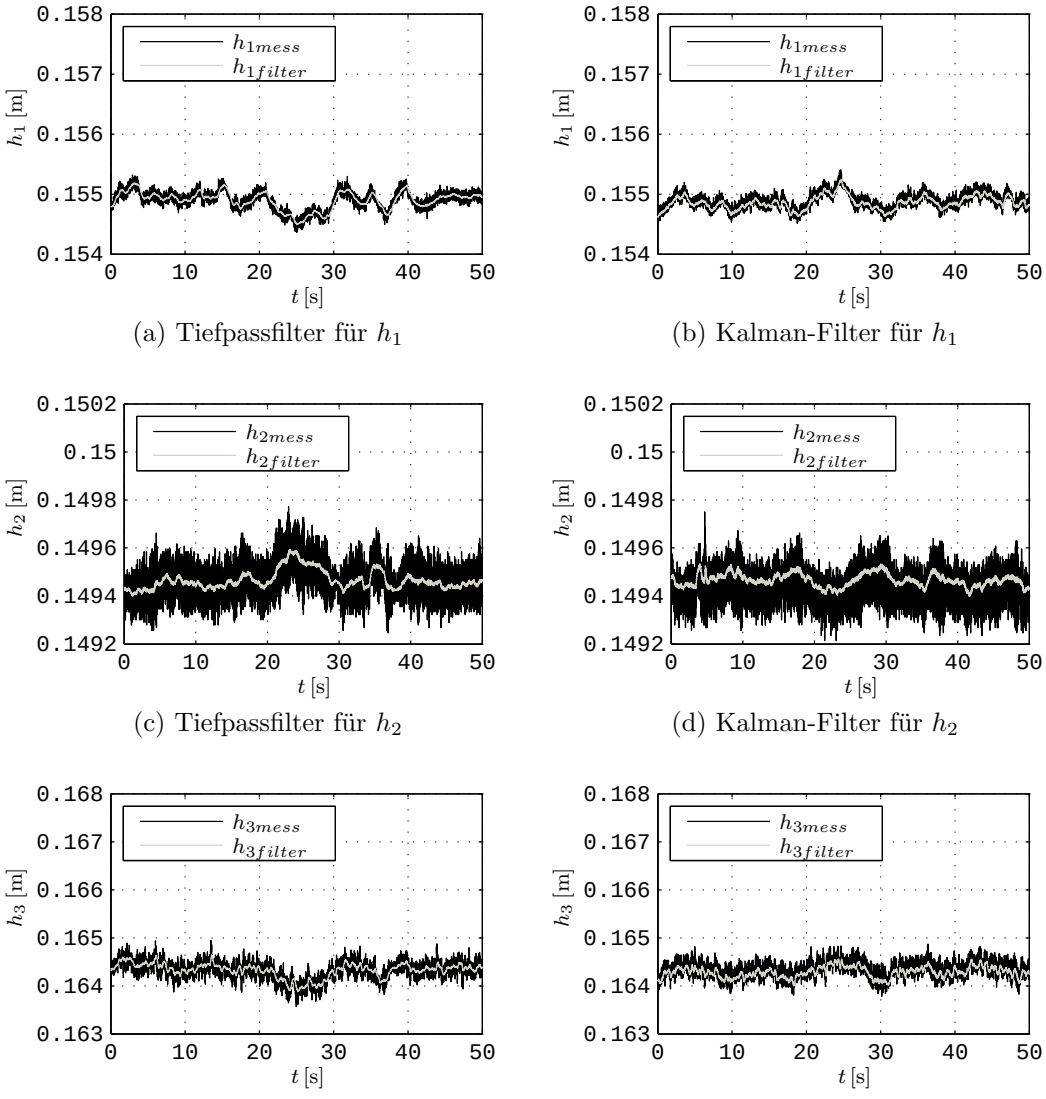
initialisiert.

4.3.3. Vergleich des Tiefpassfilters mit dem Kalman-Filter

Da für die Regelung des Drei-Tank-Systems zwei Filter eingesetzt werden, ist es von Interesse, den Effekt der beiden Filter zu vergleichen. Für die Konfiguration (4.1) sind die Kovarianz für die Störung $\mathbf{Q}$ und die Kovarianz für das Messrauschen $\mathbf{R}$ online wie folgt eingestellt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

Für das Experiment sollte man die Ausgänge konstant halten: $y_1 = h_2 = 0.15\,\mathrm{m}$ und $y_2 = h_1 - h_3 = -0.1\,\mathrm{m}$. Die Messergebnisse mit dem Tiefpassfilter und mit dem Kalman-Filter sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Dabei sind die Messsignale mit schwarzen Linien und die gefilterte Signale mit grauen Linien gekennzeichnet.



(a) Tiefpassfilter für h_1

(b) Kalman-Filter für h_1

(c) Tiefpassfilter für h_2

(d) Kalman-Filter für h_2

(e) Tiefpassfilter für h_3

(f) Kalman-Filter für h_3

Abbildung 4.1.: Vergleich der Wirkung des Tiefpassfilters und des Kalman-Filters anhand von Messergebnissen

Aus Abbildung 4.1 ist zu erkennen, dass die Füllhöhenänderung in Tank 2 viel geringer ist als in Tank 1 und Tank 3. Der Grund dafür ist, dass die Regelungsaufgabe darin besteht, die Füllhöhe h_2 und den Füllhöhenunterschied zwischen Tank 1 und Tank 3 konstant zu halten. Deshalb, obwohl die Füllhöhen h_1 und h_3 jeweils relativ stark um einen konstanten Wert schwanken, ist der Füllhöhenunterschied $h_1 - h_3$ konstant.

Da der Unterschied der Ergebnisse von den zwei Filtern nicht groß ist und das Tiefpassfilter leichter zu realisieren ist, wird in dieser Arbeit nur das Tiefpassfilter eingesetzt.

4.4. Regelergebnisse

Die Regelungsaufgabe für das Drei-Tank-System besteht darin, die Füllhöhe des Tanks 2 und den Füllhöhenunterschied zwischen Tank 1 und Tank 3 mit Hilfe der durch die Pumpe 1 und Pumpe 2 bereitgestellten Zulaufvolumenströme jeweils von einem Ausgangswert auf einen bestimmten Zielwert zu überführen. Die Konfiguration der Ventile ist in Gleichung (4.1) dargestellt.

Die Ausgänge $y_1 = h_2$ und $y_2 = h_1 - h_3$ können nicht jeweils auf einen beliebigen Zielwert eingestellt werden, sondern die Menge der möglichen Füllhöhen h_2 und der möglichen Füllhöhenunterschiede $h_1 - h_3$ sind beschränkt in Abhängigkeit von den Füllhöhen aller Tanks und der gewählten Ventilkonfiguration (4.1). Die maximal erreichbare Füllhöhe $y_1 = h_2$ für die gewählte Ventilkonfiguration errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die Ruhelage von h_2 zu

$$\frac{\mathrm{d}h_{2s}}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) + q_{zv32}\left(h_{3s}, h_{2s}\right) - q_{av2}\left(h_{2s}\right)}{A_{tank}}. \tag{4.47}$$

Für die maximalen Füllhöhen $h_{1s} = 0.6\,\mathrm{m}$ und $h_{3s} = 0.6\,\mathrm{m}$ erhält man $y_{1,max} = h_{2s} = 0.6\,\mathrm{m}$. Der maximal erreichbare Füllhöhenunterschied $y_2 = h_1 - h_3$ errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die Ruhelage von $h_1 - h_3$ zu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_{1s}}{\mathrm{d}t} &= 0 = \frac{-q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) - q_{av1}\left(h_{1s}\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu1,max}}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_{2s}}{\mathrm{d}t} &= 0 = \frac{q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) + q_{zv32}\left(h_{3s}, h_{2s}\right) - q_{av2}\left(h_{2s}\right)}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_{3s}}{\mathrm{d}t} &= 0 = \frac{-q_{zv32}\left(h_{3s}, h_{2s}\right) - q_{av3}\left(h_{3s}\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu3,min}}{A_{tank}}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Für den maximalen Zulaufvolumenstrom bei Pumpe 1 $q_{zu1,max}$ und den minimalen Zulaufvolumenstrom $q_{zu3,min}$ bei Pumpe 2 erhält man $h_{1s} = 0.6$ m, $h_{2s} = 0.32175$ m, $h_{3s} = 0.265$ m und $y_{2,max} = h_{1s} - h_{3s} = 0.335$ m. Der minimal erreichbare Füllhöhenunterschied $y_2 = h_1 - h_3$ errechnet sich aus der Bestimmungsgleichung für die Ruhelage von $h_1 - h_3$ zu

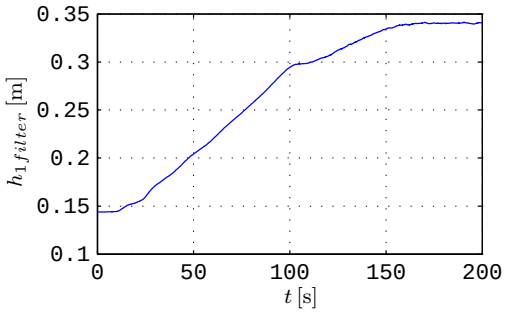
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h_{1s}}{\mathrm{d}t} = 0 &= \frac{-q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) - q_{av1}\left(h_{1s}\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu1,min}}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_{2s}}{\mathrm{d}t} = 0 &= \frac{q_{zv12}\left(h_{1s}, h_{2s}\right) + q_{zv32}\left(h_{3s}, h_{2s}\right) - q_{av2}\left(h_{2s}\right)}{A_{tank}} \\
\frac{\mathrm{d}h_{3s}}{\mathrm{d}t} = 0 &= \frac{-q_{zv32}\left(h_{3s}, h_{2s}\right) - q_{av3}\left(h_{3s}\right)}{A_{tank}} + \frac{q_{zu3,max}}{A_{tank}}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Für den minimalen Zulaufvolumenstrom bei Pumpe 1 $q_{zu1,min}$ und den maximalen Zulaufvolumenstrom $q_{zu3,max}$ bei Pumpe 2 erhält man $h_{1s} = 0.2916$ m, $h_{2s} = 0.367$ m, $h_{3s} = 0.6$ m und $y_{2,min} = h_{1s} - h_{3s} = -0.3084$ m.

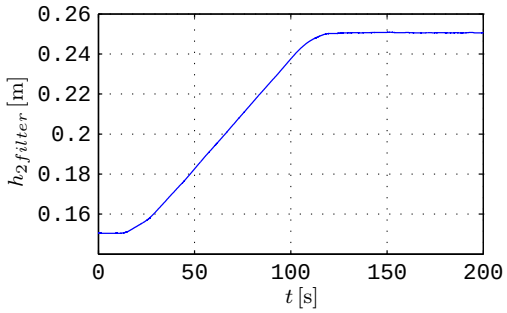
Für die folgenden Experimente werden die Führungsgrößen y_1 und y_2 als zwei Trajektorien gleichzeitig von der Ruhelage mit $y_1 = 0.15$ m und $y_2 = -0.05$ m in die Ruhelage mit $y_1 = 0.25$ m und $y_1 = 0.1$ m geplant.

Für die Begrenzungen der Anstiegsgeschwindigkeiten der beiden Trajektorien für diese bestimmte Aufgabe ergibt sich im Versuch, dass die Begrenzungen für die Anstiegsgeschwindigkeiten sowohl für y_{1d} als auch für y_{2d} als $0.0011\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ eingesetzt werden.

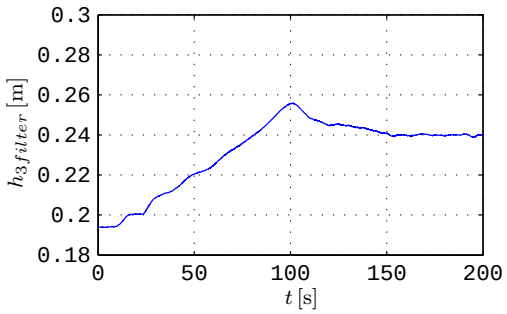
Der im Abschnitt 4.2 entworfene Regler und der im Abschnitt 4.3 vorgestellte Tiefpassfilter werden in dSPACE implementiert und Messungen für den beschriebenen Arbeitspunktwechsel durchgeführt. Die vom Tiefpassfilter gefilterten Füllhöhenänderungen der drei Tanks im Zeitverlauf werden in Abbildung 4.2 und das Regelergebnis in Abbildung 4.3 dargestellt. Aus Abbildung 4.3 ist zu erkennen, dass y_1 und y_2 den Solltrajektorien y_{1soll} und y_{2soll} sehr gut folgen. Es ist ebenfalls zu erkennen, dass die Stabilisierungsanteile von U_{p1} und U_{p2} viel kleiner als die Kompensations- und Führungsanteile sind. Dies zeigt, dass das Modell relativ gut mit der Realität übereinstimmt.



(a) Zeitverlauf von h_1

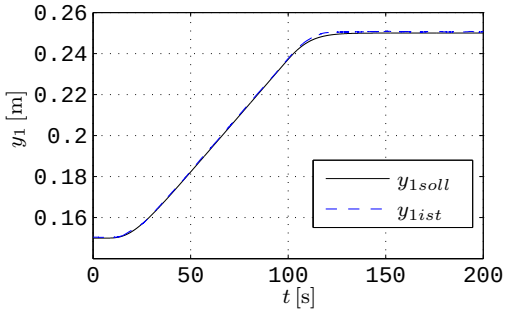


(b) Zeitverlauf von h_2

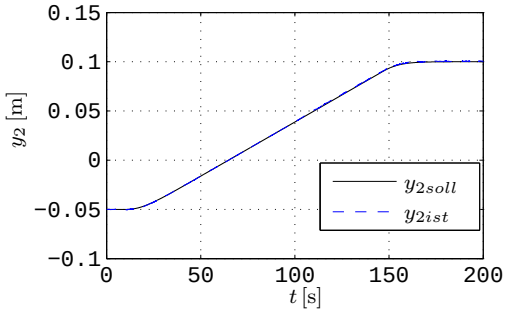


(c) Zeitverlauf von h_3

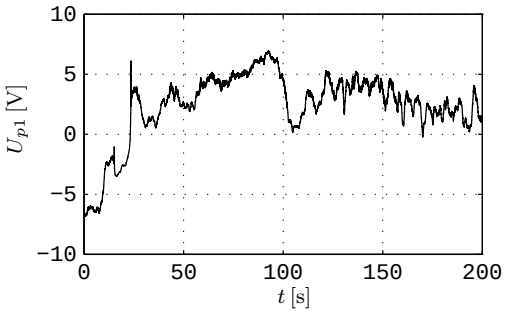
Abbildung 4.2.: Zeitverlauf der Füllhöhen h_i mit der Regelung mit dem Tiefpass-Filter



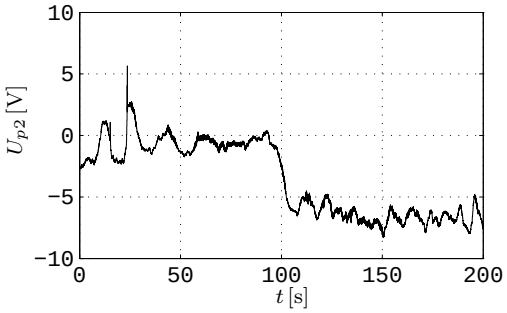
(a) Zeitverlauf von y_1



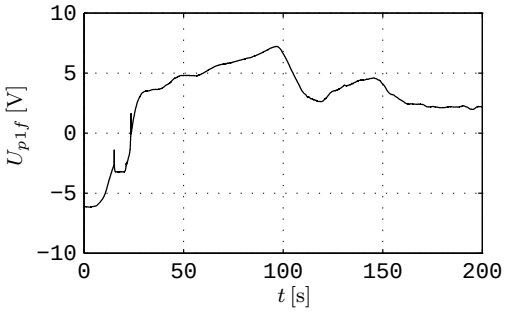
(b) Zeitverlauf von y_2



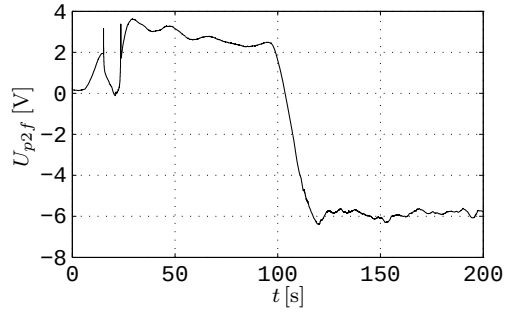
(c) Zeitverlauf von U_{p1}



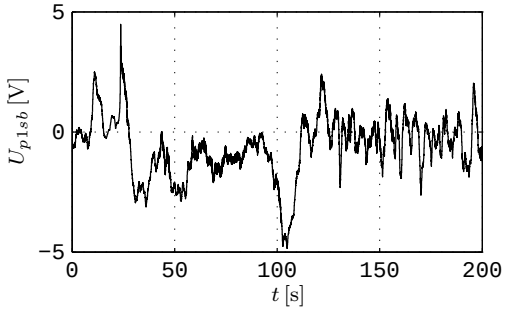
(d) Zeitverlauf von U_{p2}



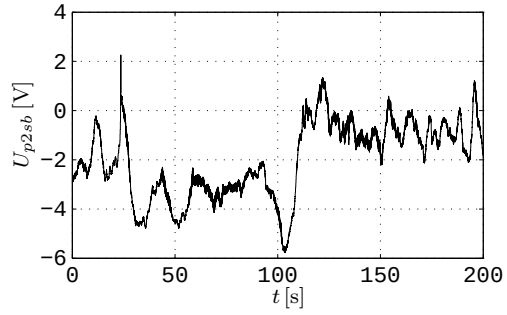
(e) Zeitverlauf von U_{p1f}



(f) Zeitverlauf von U_{p2f}



(g) Zeitverlauf von U_{p1sb}



(h) Zeitverlauf von U_{p2sb}

Abbildung 4.3.: Regelergebnis mit dem Tiefpassfilter

5. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Identifikation, Modellierung und Regelung des Laborversuchs "Drei-Tank-System" der Firma amira. Dieses besteht aus drei nebeneinander angeordneten Tanks, von denen zwei durch Pumpen aus einem Reservoir befüllt werden können und die untereinander und mit dem Reservoir durch Ventile verbunden sind. Aufgrund seines nichtlinearen Charakters eignet sich dieser Versuch besonders gut für die Erprobung nichtlinearer Reglerentwurfsverfahren.

Zu Beginn wird ein mathematisches Modell des Systems hergeleitet. Dabei werden die Abflüsse (ins Reservoir) durch eine turbulente Strömung und die Durchflüsse zwischen Tanks je nach Füllhöhendifferenz durch eine turbulente oder laminare Strömung beschrieben. In Kapitel 2 werden die Sensoren, die Aktoren sowie die Parameter, die das Durchflussverhalten durch die Ventile beschreiben, identifiziert und das in Kapitel 1 dargestellte Modell wird anhand von Messungen verifiziert.

Im Rahmen der Erprobung von Reglerentwurfsverfahren wird zuerst ein Zwei-Tank-System, das ein Eingrößensystem (SISO) ist, analysiert und mit Hilfe eines exakt zustandslinearisierenden Reglers eine Folgeregelung realisiert. Für die Implementierung in dSPACE wird noch eine sinnvolle Trajektorie geplant und ein Tiefpassfilter zur Unterdrückung des Messrauschens entworfen. Anschließend wird das komplette Drei-Tank-System analysiert, welches ein Mehrgrößensystem (MIMO) darstellt, und auch hier eine exakt zustandslinearisierende Folgeregelung realisiert. Im Rahmen der Diplomarbeit wird sowohl ein Kalman-Filter als auch ein Tiefpassfilter zur Unterdrükung des Messrauschens entworfen und anhand von Messergebnissen die Effekte der beiden Filter verglichen. Die entworfenen Regler mit den jeweiligen Filtern werden in dSPACE implementiert und am Laborversuch erprobt. Es zeigt sich, dass die entworfenen Regler das gewünschte Regelungsziel erreichen. Insbesondere am kleinen Stabilisierungsanteil lässt sich außerdem die Güte des Modells abschätzen.

Anhand des Drei-Tank-Systems können weitere Regler erprobt werden. Eine besonders interessante Möglichkeit stellen zum Beispiel optimierungsbasierte Regler dar.

A. Python Skript

Python ist eine interpretative, objektorientierte Programmiersprache und mit dem Ziel entworfen, möglichst einfach und übersichtlich zu sein. In dSPACE kann mit einem integrierten Python Interpreter das anzusteuernde System mit Hilfe von Python Skripten gesteuert werden. Für Details siehe [1], [2] und [3]. Im Folgenden wird beispielhaft das Python-Skript für die Automatisierung der Identifikation des Zwischenventils $zv12$ gezeigt.

Automatisierte Identifikation von zv12

```
import cdautomationlib
from time import sleep
import os
import sys

#Initialisierung und Variablenbenennung
ExperimentDir = os.path.dirname(cdautomationlib.
    ExperimentManager().Experiments[0].ExperimentFilePath)
SDF = ExperimentDir+"\\text.sdf"
Parameter_filePAR = ExperimentDir + "\\test.par"
pEditor = cdautomationlib.ParameterEditor()
pEditor.Generate(SDF, Parameter_filePAR)

layout_plot = cdautomationlib.Instrumentation().Layouts.Item
    ("datenaufnahme.lay")
capture = layout_plot.Instruments.Item("dSPACE␣
    CaptureSettings␣Control")

#Abkürzung für die zu steuernden Elemente
zv12 = "Model␣Root/zv12/Value"
av2 = "Model␣Root/av2/Value"
Tank1 = "Model␣Root/UHConvert/Tank1/Value"
Tank2 = "Model␣Root/UHConvert/Tank2/Value"
u1 = "Model␣Root/u1/Value"
```

```
#Einlesen der notwendigen Variablen
Instrumentation = cdautomationlib.Instrumentation()
layout_tanks = Instrumentation.Layouts.Item("tanks.lay")
Tank1 = layout_tanks.Instruments.Item("Bar_Tank1")
Tank2 = layout_tanks.Instruments.Item("Bar_Tank2")
h1 = Tank1.ValueConversion.DisplayedValue
h2 = Tank2.ValueConversion.DisplayedValue

#Stop der letztem Daten-Aufzeichnung
capture.StopCapture()
#Einstellung der Zeit für die Daten-Aufzeichnung
capture.ActiveCapture.Properties.IntervalLen = 1900

#Ventil zv12 und av2 wird zuerst zugedreht
pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,zv12,0)
pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,av2,0)
sleep(10)

#Für die folgenden Winkel zu identifizieren
Winkel1 = [90,85,80,75,70,65,60,55,50,45,40,35,30,25,20]
for i in Winkel1:
    print "begin"
    #Pumpe 1 füllt Tank 1, bis Tank 1 voll ist
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,u1,10)
    while h1<0.60:
        h1 = Tank1.ValueConversion.DisplayedValue
        sleep(0.5)
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,u1,-10)
    sleep(5)

    # Ventil zv12 wird aufgedreht
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,zv12,i)
    sleep(9.5)
    #Aufzeicnung, bis die Höhe der zwei Tanks gleich sind
    capture.StartCapture()
    # Um den Ungenaurigkeit beim Übersetzung von Füllhöhe zu
        vermeiden, wird h1-h2<0.05 m als gleich Füllhöhe von
        Tank 1 und Tank 2 übersetzt
    while h1-h2>0.005:
        h1 = Tank1.ValueConversion.DisplayedValue
        h2 = Tank2.ValueConversion.DisplayedValue
```

```
        sleep(0.03)
    sleep(5)
    #Speichern
    capture.StopCapture()
    saved = capture.SaveRefCapture(ExperimentDir+"\\zv12"+"
        \\zv12_"+`i`+".mat")
    if saved:
        print `i`+"Grad ist erfolgreich gespeichert"
    else:
        print "Fehler für Grad"+`i`
    sleep(1)
    #Ventil zv12 wird zugedreht. Ventil av2 wird geöffnet um
        Tank2 zu leeren.
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,zv12,0)
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,av2,90)
    #Warten bis Ventil av2 ganz offen ist
    sleep(10)
    #Nachfrage bis zwei Tanks leer sind
    h1 = Tank1.ValueConversion.DisplayedValue
    h2 = Tank2.ValueConversion.DisplayedValue
    while h1>0.005 and h2>0.005:
        h1 = Tank1.ValueConversion.DisplayedValue
        h2 = Tank2.ValueConversion.DisplayedValue
        sleep(0.5)
    #Ventil av2 wird zugedreht um die Identifikation für
        nächste Rund zu vorbereiten
    pEditor.WriteParameter(Parameter_filePAR,av2,0)
    print "end"
    sleep(10)
```

Zu diesem Python-Skript:

Die Identifikation des Zwischenventils $zv12$ läuft wie folgt ab: Das Abflussventil $av1$ ist immer geschlossen. Die Ventile $zv12$ und $av2$ werden zuerst geschlossen während die Pumpe 1 den Tank 1 füllt, bis Tank 1 voll ist. Anschließend wird das Zwischenventil $zv12$ geöffnet und gleichzeitig fängt dSPACE an Daten für einen bestimmten Winkel aufzunehmen. Wenn der Füllhöhenunterschied von Tank 1 und Tank 2 kleiner als 0.005m ist, ist die Datenaufnahme für diesen Winkel beendet. Dann wird das Abflussventil geöffnet, um die zwei Tanks zu leeren. Bis jetzt ist die Identifikation für einen Winkel von $zv12$ fertig. Dann fängt es wieder an, die weiteren Winkel zu identifizieren. Der Kommentar im Code beschreibt den genauen

Ablauf.

Die Identifikation des Abflussventils $av2$ wird analog wie für $zv12$ durchgeführt.

Literaturverzeichnis

[1] dSPACE, *Automation Guide*, November 2007.

[2] dSPACE, *Automation Quick Reference*, November 2007.

[3] dSPACE, *Automation Reference*, November 2007.

[4] W. Kemmetmüller, *Mathematical Modeling and Nonlinear Control of Electrohydraulic and Electrorheological Systems*. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

[5] R. King, "Regelungstechnik II", Skriptum zur Vorlesung, Inst. für Prozess- und Verfahrenstechnik, Technische Universität Berlin, WS 08/09.

[6] A. Kugi, "Regelungssysteme", Skriptum zur Vorlesung und Übung, Inst. für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, SS 2008.

[7] A. Kugi, "Prozessidentifikation", Skriptum zur Vorlesung und Übung, Inst. für Automatisierungs- und Regelungstechnik, Technische Universität Wien, WS 07/08.

[8] Matlab, *Help document for Matlab's Optimization Toolbox*, 2007.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Wien, im Mai 2009

_____