

# **DIPLOMARBEIT**

## **Agentenbasierende Simulation einer geschlossenen Volkswirtschaft**

**Ausgeführt am Institut für Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien**

**unter der Anleitung von**

**Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alexander Mehlmann**

**durch**

**Martin Fröhler**

**Liechtensteinstraße 132/13 1090 Wien**

**Datum: 05. November 2007**

**Unterschrift:**

## **Dank**

Mein herzlicher Dank gebührt meinem Betreuer, Professor Alexander Mehlmann, für sein Interesse an dem von mir gewählten Thema und seine Unterstützung während der Umsetzung.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern, Renate und Dr. Horst Fröhler, die mir ein sorgenfreies Studium ermöglicht haben.

Für wichtige Inputs während der Modellbildung möchte ich Professor Franz Hof und meiner Freundin Claudia Bernhard danken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> .....	<b>6</b>
1.1 Die Volkswirtschaftslehre .....	6
1.1.1 Die Mikroökonomie.....	6
1.1.2 Die Makroökonomie.....	6
1.2 Die Spieltheorie .....	6
1.3 Motivation .....	7
1.4 Überblick.....	7
<b>2 Wichtige Modelle der Wachstumstheorie</b> .....	<b>9</b>
2.1 Das Solow-Modell.....	9
2.1.1 Definition und Grundannahmen .....	9
2.1.2 Die Produktionsfunktion .....	9
2.1.3 Die Herleitung der Wachstumsraten.....	10
2.1.4 Das Wachstumsgleichgewicht - Der "Steady-State" .....	12
2.2 Das Lucas-Uzawa-Modell.....	14
2.2.1 Kritik am Solow Modell .....	14
2.2.2 Die Nutzenfunktion .....	14
2.2.3 Einleitung und Modellannahmen.....	15
2.2.4 Die Produktionsfunktion .....	16
2.2.5 Das Optimierungsproblem .....	16
2.2.6 Die Wachstumsraten der Modellgrößen.....	18
2.2.7 Der Steady-State.....	20
2.2.8 Interpretation der Ergebnisse .....	21
<b>3 Die Simulation</b> .....	<b>23</b>
3.1 Das Lucas-Uzawa-Modell in der Simulation .....	23
3.1.1 Die Modellannahmen.....	23
3.1.2 Initialisierung der Parameter .....	24
3.1.3 Gesetzmäßigkeiten in der Simulation .....	25
3.1.4 Die Berechnung von <i>cons</i> .....	28
3.1.5 Die Berechnung von <i>invh</i> .....	29

3.1.6 Die Berechnung von <i>invk</i> .....	29
3.1.7 Die optimale Entscheidung .....	30
3.2 Die Bedienung der Simulation.....	31
3.2.1 Das Simulationsinterface.....	31
3.2.2 Die Steuerung.....	31
3.2.3 Die Grafik "BSP".....	32
3.2.4 Die Grafik "Inputfaktoren" .....	32
3.2.5 Die Grafik "Beschäftigung" .....	32
3.2.6 Der Aktionsraum .....	32
<b>4 Ergebnisse .....</b>	<b>34</b>
4.1 Deterministische Parameterdefinitionen.....	34
4.1.1 Das Parameterset $x_1$ .....	34
4.1.2 Die Bedeutung der Parameter .....	34
4.1.3 Die Simulation unter $x_1$ .....	36
4.2 Sensitivitätsanalysen .....	37
4.2.1 Parameter $A$ .....	37
4.2.2 Parameter $B$ .....	38
4.2.3 Parameter $\alpha$ .....	39
4.2.4 Parameter $\theta$ .....	40
4.2.5 Parameter $\sigma$ und $\delta$ .....	40
4.2.6 Parameter $\rho$ .....	41
4.3 Stochastische Simulation.....	42
4.3.1 Das Parameterset $x_{11}$ .....	42
4.3.2 Die Simulation unter $x_{11}$ .....	42
4.4 Schocks .....	43
4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse .....	44
<b>5 Ein modifiziertes Lucas-Uzawa-Modell .....</b>	<b>45</b>
5.1 Modifikation der Gleichungen.....	45
5.2 Anpassung der Simulation.....	45
5.2.1 Die Berechnung von <i>invh</i> .....	45

5.3 Ergebnisse der deterministischen Simulation .....	46
5.4 Sensitivitätsanalyse .....	47
5.5 Auswirkungen der Modifikation .....	48
<b>6 Erkenntnisse</b> .....	<b>49</b>
6.1 Konklusion .....	49
6.2 Ausblick.....	50
<b>7 Anhang</b> .....	<b>51</b>
7.1 Quellcode der Simulation .....	51
7.2 Literaturverzeichnis .....	59

# 1 Einleitung

## 1.1 Die Volkswirtschaftslehre

Die Volkswirtschaftslehre beschäftigt sich mit der Analyse von gesamtwirtschaftlichen Zusammenhängen wie den wechselnden Verhältnissen von Arbeit, Gütern und Geld. Es ist der Versuch, Gesetzmäßigkeiten zu finden und daraus Handlungsempfehlungen für die Wirtschaftspolitik abzuleiten. Sie teilt sich in zwei Teilgebiete: Die Mikroökonomie und die Makroökonomie.

### 1.1.1 Die Mikroökonomie

Die Mikroökonomie erforscht das wirtschaftliche Verhalten einzelner Konsumenten (Theorie des Haushalts), das Verhalten von Unternehmen (Produktionstheorie) sowie die Verteilung von endlichen Ressourcen wie Rohstoffen, Gütern und Geld zwischen den Haushalten und Unternehmen. Die Konsumenten werden als Quelle der Arbeitskraft, des Kapitals und als Verbraucher produzierter Güter angesehen. Güter werden mit dem Ziel verbraucht, den eigenen Nutzen zu maximieren. Betriebe setzen Ressourcen wie Arbeit, Rohstoffe, Boden, Kapital und Wissen mit dem Ziel der Gewinnmaximierung ein. Um diese Fragestellungen der Interdependenzen lösbar zu machen, werden von der Wirklichkeit abstrahierte mathematische Modelle untersucht. In der Regel wird angenommen, dass die Wirtschaftsakteure Nutzenmaximierung betreiben und rational handeln: Unter gegebenen Handlungsalternativen wird stets die beste ausgewählt. Ein derart handelnder Ideal-Akteur wird Homo Oeconomicus genannt.

### 1.1.2 Die Makroökonomie

Die Makroökonomie untersucht das Zusammenspiel aggregierter Wirtschaftsgrößen. Das Verhalten der Wirtschaft insgesamt wird untersucht, wie zum Beispiel Änderungen des Gesamteinkommens, der Beschäftigungsrate, der Inflationsrate und der Konjunktur. Anhand von mathematischen Modellen wird versucht, diese Schwankungen zu erklären und Empfehlungen für die Entscheidungsträger in Wirtschaft und Politik abzuleiten. Im Mittelpunkt vieler makroökonomischer Betrachtungen steht daher die Rolle des Staates im gesamtwirtschaftlichen Kontext. So werden durch Änderungen bei Steuern, Zinsen oder Staatsausgaben politisch definierte Ziele, wie beispielsweise Preisniveaustabilität, Vollbeschäftigung und Wirtschaftswachstum angestrebt.

## 1.2 Die Spieltheorie

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das Systeme mit mehreren Akteuren analysiert. Der Focus liegt dabei auf rationalem Entscheidungsverhalten in sozialen Konfliktsituationen. Historischer Ausgangspunkt der Spieltheorie ist der Versuch einer Analyse des Homo Oeconomicus. Seit 1970 setzt sich die Spieltheorie mehr und mehr als die beherrschende Methodik in den - traditionell normativ ausgerichteten - Wirtschaftswissenschaften sowie auch in deren sozialwissenschaftlichen Nachbardisziplinen durch.

## 1.3 Motivation

Diese Arbeit soll ein Baustein sein, der dazu beiträgt, die Lücke zwischen den beiden Gebieten der Mikroökonomie und der Makroökonomie zu schließen.

Aufbauend auf den Prinzipien und Methoden der Spieltheorie wird mithilfe einer spieltheoretischen Simulationsumgebung eine virtuelle, heterogene Population rational agierender Agenten erschaffen, die sich in wiederholtem Spiel ökonomisch betätigen. Die Agenten haben in jeder Periode die Wahl zwischen 3 reinen Strategien und optimieren ihren Nutzen über einen endlichen und im Laufe des Spiels veränderlichen Zeitraum. Durch die Simulation wird gezeigt, wie bekannte Modelle der Makroökonomie mit den Methoden der Spieltheorie mikroökonomisch fundiert werden können, ohne auf mathematisch exakte Gleichgewichtsergebnisse zurückzugreifen. Dieser Ansatz erscheint insbesondere deshalb praktikabel, da die theoretisch hergeleiteten Werte und Wachstumsraten im Wirtschaftsgleichgewicht oftmals hohe Instabilitäten gegenüber der Varianz ihrer erklärenden Parameter aufweisen.

Diese Arbeit versteht sich als Grundlage, auf der weiterführende spieltheoretische Volkswirtschaftsanalysen aufbauen können.

## 1.4 Überblick

In Kapitel (2.1) wird zunächst ein fundamentales Wachstumsmodell von Robert Merton Solow vorgestellt und hergeleitet. Dieses Modell ist heute noch immer von großer Bedeutung, da viele wesentliche Beiträge zur neoklassischen Wachstumstheorie - so auch das in der Simulation behandelte Lucas-Uzawa-Modell - darauf aufbauen.

In (2.2) wird die Theorie des Lucas-Uzawa-Modells behandelt. Im Lucas-Uzawa-Modell wird dauerhaftes Wirtschaftswachstum über Einführung von Humankapital in die Produktionsfunktion und dem nutzenmaximierenden Verhalten der Wirtschaftssubjekte erklärt. Es werden die Gleichungen für die Wachstumsraten der Input- und Output- und Entscheidungsgrößen im Steady-State betrachtet - dem langfristigen, gleichgewichtigen Wachstumspfad.

Kapitel (3.1) leitet die Theorie des Lucas-Uzawa-Modells für die spieltheoretische Simulation her. Es werden die Agenten, der Aktionsraum und die Entscheidungsalgorithmen der Agenten erklärt. Die zeitstetige Nutzenfunktion des Lucas-Uzawa-Modells wird diskretisiert, und die Annahme der Perfect Foresight (das heißt Optimierung über unendlichen Zeitraum bei perfekter Kenntnis aller Modellgrößen) für die Agenten wird zugunsten der Optimierung über einen endlichen Zeitraum fallen gelassen.

Kapitel (3.2) geht auf die technischen Details und die Steuerung der Simulation ein.

Kapitel (4.1) beschäftigt sich mit den Ergebnissen der Simulation unter verschiedenen deterministischen Parametersets.

Kapitel (4.2) analysiert die Sensitivität des Modells bezüglich der Veränderung von einzelnen Parameterwerten.

Kapitel (4.3) untersucht die Simulation mit stochastischen Parametersets.

Kapitel (4.4) geht auf Schocks innerhalb der Simulation ein.

In Abschnitt (4.5) werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und Kritikpunkte am Lucas-Uzawa-Modell angeführt.

In Kapitel (5.1) werden die Gleichungen des Lucas-Uzawa-Modells modifiziert.

In (5.2) wird die Simulation modifiziert.

Abschnitt (5.3) behandelt die Ergebnisse unter deterministischer Simulation.

In Abschnitt (5.4) wird die Sensitivität des modifizierten Modells analysiert.

Abschnitt (5.5) beschäftigt sich mit den Auswirkungen der Modifikation.

Kapitel (6.1) interpretiert die gewonnenen Erkenntnisse aus der Simulation.

Kapitel (6.2) bietet einen Ausblick, welche Fragestellungen auf Basis dieser Arbeit erforscht werden könnten.

(7.1) Enthält den Quellcode der Simulation.

(7.2) Enthält das Literatur- und Quellenverzeichnis.

## 2 Wichtige Modelle der Wachstumstheorie

### 2.1 Das Solow-Modell

Der US-amerikanische Ökonom Robert Menton Solow veröffentlichte 1956 im Quarterly Journal of Economics den Artikel [16] "A Contribution to the Theory of Economic Growth", der bis heute viele makroökonomische Wachstumsmodelle entscheidend beeinflusst. 1972 erhielt er den Nobelpreis der Wirtschaftswissenschaften für seine Arbeiten über ökonomische Wachstumstheorien.

Das von ihm entwickelte und nach ihm benannte Solow-Modell erklärt das langfristige Wachstum in einer Volkswirtschaft nur durch exogenen technischen Fortschritt. Es reiht sich damit in die Kategorie der neoklassischen Wachstumsmodelle ein, die die Entwicklung des Produktionspotentials als entscheidende Determinante für den Wohlstand einer Volkswirtschaft betrachtet. Diese Auffassung steht im Gegensatz zum Postkeynesianismus - benannt nach dem bedeutenden britischen Ökonomen John Maynard Keynes - der die Nachfrage-Entwicklung als entscheidenden Faktor für Wachstum ansieht.

Solow konnte die Gültigkeit seines Modells empirisch am Beispiel der USA nachweisen: Er fand heraus, dass ein Großteil des US-amerikanischen Wirtschaftswachstums in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts durch technischen Fortschritt vorangetrieben wurde (totale Faktorproduktivität) und nur ein geringer Teil des Wachstums auf den wachsenden Einsatz von Arbeit und Kapital zurückzuführen war.

#### 2.1.1 Definition der Grundannahmen

Solow unterstellt in seinem Modell folgende Annahmen:

- Die betrachtete Volkswirtschaft ist geschlossen - es existiert kein Handel mit anderen Volkswirtschaften und keine Beeinflussung durch externe Effekte
- Es wird nur ein homogenes Gut produziert
- Es herrscht Vollbeschäftigung
- Die Produktionsfunktion hat konstante Skalenerträge (d.h. eine Steigerung um  $\lambda > 0$  der Inputfaktoren erhöht das Output um  $\lambda$ )
- Das Grenzprodukt der Produktionsfunktion ist fallend
- Die Technologie und ihr Wachstum sind exogen gegeben (durch einen Parameter  $A$ )
- Die Rate des Bevölkerungswachstums  $n$  ist exogen gegeben
- Die Abschreibungsrate (d.h. Entwertung der vorhandenen Inputfaktoren pro Periode) ist exogen gegeben ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
- Die Sparquote (Anteil des gesparten Outputs am Gesamtoutput) ist exogen gegeben ( $0 \leq s \leq 1$ )

#### 2.1.2 Die Produktionsfunktion

Die zentrale Funktion des Solow-Modells ist die Güterangebotsfunktion, die zu jedem Zeitpunkt die Höhe der volkswirtschaftlichen Produktion  $Y$  bestimmt. Die Inputfaktoren der Produktionsfunktion sind substitutional und durch Kapital  $K$  und Arbeit  $L$  gegeben;  $t$  bezeichnet dabei den Zeitindex.

$$(1) \quad Y_t = F(K_t, L_t)$$

Es werden positive und abnehmende Grenzprodukte beider Faktoren unterstellt. Es gilt daher:

$$(2) \quad \frac{\delta F}{\delta K} = F_K > 0, \quad \frac{\delta^2 F}{\delta K^2} = F_{KK} < 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta L} = F_L > 0, \quad \frac{\delta^2 F}{\delta L^2} = F_{LL} < 0$$

Die Produktionsfunktion ist faktorenweise konkav. Weiters gelten die sogenannten Inada Bedingungen:

$$(3) \quad \lim_{K \rightarrow 0} F_K = \lim_{L \rightarrow 0} F_L = \infty$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F_K = \lim_{L \rightarrow \infty} F_L = 0$$

Diese Bedingungen besagen, dass die Grenzprodukte der Inputfaktoren bei unendlich kleinen Einsatzmengen über alle Grenzen wachsen, und dass die Grenzprodukte der Inputfaktoren gleich 0 sind, wenn ihre Einsatzmengen gegen unendlich gehen.

Die Annahme konstanter Skalenerträge lässt sich formal auf folgende Weise ausdrücken:

$$(4) \quad F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{für } \lambda > 0$$

Bei konstanter Technologie kann also das doppelte Output erzeugt werden, wenn alle Inputfaktoren verdoppelt werden.

Allgemein definieren die Eigenschaften (2) - (4) eine neoklassische Produktionsfunktion (siehe [3] Barro, Sala-i-Martin, 2004). Folgerung aus den oben angeführten Eigenschaften ist, dass sich jede Outputmenge nur durch den Einsatz beider Faktoren erzeugen lässt. Ist einer der Inputfaktoren gleich 0, ist das Output ebenfalls gleich 0. Strebt ein Inputfaktor gegen  $\infty$ , so strebt auch das Output gegen  $\infty$ .

### 2.1.3 Die Herleitung der Wachstumsraten

Aufgrund von (4) lässt sich die Produktionsfunktion durch die Wahl von  $\lambda = \frac{1}{L}$  in Pro-Kopf-Größen schreiben:

$$\frac{Y_t}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = f\left(\frac{K_t}{L_t}\right)$$

Durch Setzen von  $y = \frac{Y}{L}$  (Arbeitsproduktivität) und  $k = \frac{K}{L}$  (Kapitalintensität) erhält man die Gleichung

$$(5) \quad y_t = f(k_t)$$

Das Pro-Kopf-Einkommen hängt somit nur von der Kapitalintensität ab. Die Eigenschaften (2) - (4) bleiben erhalten (Äquivalenzumformungen). Wegen der Gültigkeit der Beziehung  $Y = Lf\left(\frac{K}{L}\right)$  folgt:

$$(6) \quad \frac{\delta Y}{\delta K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{1}{L} = f'(k)$$

$$\frac{\delta Y}{\delta L} = f\left(\frac{K}{L}\right) + Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{-K}{L^2}\right) = f(k) - kf'(k)$$

Die Produktion verteilt sich als Einkommen auf die beiden Inputfaktoren Arbeit und Kapital. Die Inputfaktoren werden mit ihren Grenzprodukten entlohnt. Das Grenzprodukt des Kapitals kann dabei als Realzinssatz  $r$  interpretiert werden, das Grenzprodukt der Arbeit als Reallohn  $w$ .

$$(7) \quad \frac{\delta Y}{\delta K} = r, \quad \frac{\delta Y}{\delta L} = w$$

Für eine weiterführende Analyse des Solow-Modells wird nun die am häufigsten verwendete neoklassische Produktionsfunktion  $F$  vom Cobb-Douglas-Typ unterstellt:

$$(8) \quad Y_t = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta \quad \alpha, \beta > 0$$

Dabei bezeichnet  $A$  einen exogenen Effizienzparameter, der den gegenwärtigen Stand der Technologie abbildet. Die Grenzprodukte der Inputfaktoren lauten allgemein:

$$(9) \quad \frac{\delta Y}{\delta K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta = \alpha \frac{Y}{K}$$

$$\frac{\delta Y}{\delta L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \beta \frac{Y}{L}$$

Gilt die Bedingung  $\alpha + \beta = 1$  liegen konstante Skalenerträge gemäß (4) vor, und  $\beta$  kann durch  $\alpha - 1$  substituiert werden. Mit  $\lambda = \frac{1}{L}$  kann in Pro-Kopf-Größen transformiert werden. Die transformierte Produktionsfunktion lautet:

$$(10) \quad y = \frac{Y}{L} = A \left( \frac{K}{L} \right)^\alpha = Ak^\alpha$$

Im neoklassischen Wachstumsmodell wird die Sparquote durch den konstanten exogenen Parameter  $0 \leq s \leq 1$  beschrieben. In einer geschlossenen Volkswirtschaft entspricht die Ersparnis den Bruttoinvestitionen ( $I = S$ ).

$$(11) \quad I = S = sY$$

Daraus folgt die Kapitalakkumulationsgleichung:

$$(12) \quad \dot{K} = I - \delta K = sF(K, L) - \delta K = sAK^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K$$

Sie besagt, dass die Veränderung des Kapitalstocks (in kontinuierlicher Zeit) der Differenz aus den Bruttoinvestitionen mit den Kapitalabschreibungen entspricht.  $0 < \delta < 1$  ist dabei ein konstanter exogener Faktor.

Die zeitkontinuierliche Arbeitsakkumulationsgleichung lautet:

$$(13) \quad \frac{\dot{L}}{L} = n$$

$n$  ist ein konstanter exogener Parameter. Aufgrund der unterstellten Vollbeschäftigung entspricht  $n$  dem Bevölkerungswachstum.

#### 2.1.4 Das Wachstumsgleichgewicht - Der "Steady-State"

In jedem neoklassischen Wachstumsmodell ist insbesondere der Zustand des Steady-State von Interesse - jenem gleichgewichtigen Wachstumspfad, entlang dem alle Größen mit einer konstanten Rate wachsen. Zur allgemeinen Herleitung des Steady-State im Solow-Modell werden die Wachstumsgleichungen (12) und (13) wieder in Pro-Kopf-Größen gebracht. (12) dividiert durch  $L$  liefert:

$$(14) \quad \frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k$$

Daraus folgt

$$\dot{k} = \frac{\delta \left( \frac{K}{L} \right)}{\delta t} = \frac{L \frac{\delta K}{\delta t} - K \frac{\delta L}{\delta t}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

Einsetzen für  $\frac{\dot{K}}{L}$  in (14) liefert folgende Differentialgleichung für die Veränderung der Kapitalintensität in stetiger Zeit:

$$(15) \quad \dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \quad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n + \delta)$$

Damit die pro Kopf Kapitalausstattung  $\dot{k}$  steigt, müssen die Investitionen  $sf(k)$  die Reduktion des Pro-Kopf-Kapitalstocks durch Abschreibungen und Bevölkerungswachstum übersteigen.

Der Steady-State impliziert, dass die Modellgrößen unverändert bleiben. Die Kapitalintensität muss daher konstant sein. Durch 0-Setzen von  $\dot{k}$  kann die Kapitalintensität im Steady-State ermittelt werden:

$$(16) \quad \dot{k} = 0 \Leftrightarrow sf(k^*) = (n + \delta)k^* \quad \frac{sf(k^*)}{k^*} = n + \delta$$

$k^*$  bezeichnet die Kapitalintensität im Steady-State. Aus einem konstanten  $k^*$  folgt mit (5), dass auch das Pro-Kopf-Einkommen im Steady-State konstant ist. Da die Bevölkerung mit der Rate  $n$  wächst, müssen das Output  $Y$  und der Kapitalstock  $K$  im Steady-State ebenfalls mit dieser Rate wachsen. Mit (11) folgt das Wachstum  $n$  der Sparquote.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass im Steady-State alle aggregierten Variablen mit der Rate  $n$  wachsen, während die Pro-Kopf-Variablen unverändert bleiben. Daher kann das empirisch nachweisbare Wachstum der Pro-Kopf-Größen nur durch den technischen Fortschritt erklärt werden.

Für das konkrete Beispiel der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (8) und (10) gelten die folgenden Gleichungen im Steady-State:

$$(17) \quad y = Ak^\alpha$$

Wegen (16) gilt:

$$(18) \quad sAk^{*\alpha} = (n + \delta)k^*$$

Das impliziert:

$$(19) \quad k^* = \left( \frac{As}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad y^* = \left( \frac{As}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Danach ist eine Volkswirtschaft im Gleichgewicht produktiver, je höher ihr Technologiefaktor  $A$  und ihre Sparbereitschaft  $s$  ist. Eine Volkswirtschaft ist umso unproduktiver, je größer ihr Bevölkerungswachstum  $n$  und ihre Abschreibungsrate  $\delta$  ist.

Da an dieser Stelle nur ein Überblick über das Solow-Modell gegeben werden soll, werden die Anpassungsgleichungen einer Volkswirtschaft außerhalb ihres Steady-States an ihre Steady-State-Werte nicht hergeleitet. Für eine weiterführende Betrachtung des Solow-Modells sei auf [3] Barro, Sala-i-Martin 2004 verwiesen.

## 2.2 Das Lucas-Uzawa-Modell

### 2.2.1 Kritik am Solow-Modell

Im neoklassischen Solow-Modell konvergiert die Volkswirtschaft über die Zeit in ihren Steady-State. Die Steady-State-Werte sind dabei durch die exogenen Faktoren: Technologieniveau  $A$ , die Sparquote  $s$ , die Abschreibungen  $\delta$ , das Bevölkerungswachstum  $n$  und den Produktionsfaktor  $\alpha$  gegeben. Ein Schwachpunkt dieses Modells ist die Annahme einer konstanten exogenen Sparquote: Tatsächlich zeigen Personen, Haushalte und Firmen in ihrem Konsum- und Investitionsverhalten eine empirisch nachweisbare Gegenwartspräferenz. Hat eine Person die finanzielle Möglichkeit und die freie Wahl, wird sie in der Regel einen Konsum in der Gegenwart einem Konsum in der Zukunft vorziehen. Allgemein werden zukünftige Nutzen geringer bewertet als gegenwärtige. Das führt zu der Fragestellung, wie ein Wirtschaftssubjekt überhaupt seinen Nutzen definiert und wie es ihn über die Zeit bewertet.

### 2.2.2 Die Nutzenfunktion

Zur Quantifizierung des Nutzens wird eine Nutzenfunktion  $U_t$  eingeführt, die vom Konsum  $C_t$  in der Periode  $t$  abhängt. In der Nutzentheorie existieren verschiedene Ansätze zur Definition einer Nutzenfunktion. Sie haben jedoch alle gemeinsam, dass der Grenznutzen positiv und mit zunehmendem Konsumniveau abnehmend ist. Formalisiert bedeutet das

$$(1) \quad U' > 0 \quad U'' < 0$$

wobei  $U'$  die Ableitung nach dem Konsum bezeichnet. Außerdem wird die Gültigkeit der Inada-Bedingungen unterstellt - bei geringem Konsumniveau strebt der Grenznutzen gegen unendlich, bei hohem Konsumniveau gegen 0.

Es gibt eine Vielzahl von Funktionen, die die oben genannten Eigenschaften erfüllen - etwa im Argument logarithmische Funktionen. Die Wahl verschiedener Nutzenfunktionen führt zu durchaus unterschiedlichem Konsumverhalten. Für das vorliegende Lucas-Uzawa-Modell wurde eine CRRA-Nutzenfunktion gewählt (CRRA steht für constant relative risk aversion). Sie hat eine konstante intertemporale Substitutionselastizität von  $\frac{1}{\theta}$  und ist wie folgt definiert:

$$(2) \quad u(c_t) = \begin{cases} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} & \theta \in (0; \infty), \theta \neq 1 \\ \ln(c(t)) & \theta = 1 \end{cases}$$

Es wird angenommen, dass sich alle Wirtschaftsteilnehmer rational und nutzenmaximierend verhalten. Die Gegenwartspräferenz wird durch einen Faktor ( $0 < \rho < 1$ ) abgebildet. Daraus ergibt sich der Diskontierungsfaktor für zukünftigen Nutzen:  $\frac{1}{1+\rho}$

Wenn man unterstellt, dass die Wirtschaftsteilnehmer nicht durch Personen (endlicher Zeithorizont), sondern durch Haushalte (unendlicher Zeithorizont) modelliert werden, kann man den Gegenwartswert des Haushaltsnutzens anschreiben:

$$(3) \quad u(0) = \int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt$$

Dieses Nutzenmaximierungsproblem soll nun für ein Lucas-Uzawa-Modell - unter den Nebenbedingungen der entsprechenden Volkswirtschafts-Gleichungen - gelöst werden.

### 2.2.3 Einleitung und Modellannahmen

Der bedeutende US-amerikanische Ökonom und Nobelpreisträger Robert Emerson Lucas (bekannt unter anderem wegen der nach ihm benannten Lucas-Kritik - die Kritik an statischen Erwartungen in Wirtschaftsmodellen) veröffentlichte 1988 im Journal of Monetary Economics seinen Artikel [11] "On the Mechanics of Economic Development". Das hier vorgestellte Modell basiert auf diesem Artikel. Die wesentliche Neuerung im Vergleich zum Solow-Modell besteht in der Einführung von Humankapital (das heißt, Fähigkeiten und Wissen um ökonomisch verwertbare Tätigkeiten auszuführen) und der Endogenisierung der Akkumulationsentscheidungen. Ungelernte Arbeit kommt in dem Modell nicht mehr vor. Die Produktionsfunktion hat als Inputfaktoren Kapital und Humankapital; beide werden modellendogen akkumuliert.

Die bei Solow exogen gegebene Sparquote wird bei Lucas-Uzawa endogenisiert.

Es gelten folgende Modellannahmen:

- Die betrachtete Volkswirtschaft ist geschlossen - es existiert kein Handel mit anderen Volkswirtschaften und keine Beeinflussung durch externe Effekte
- Es wird nur ein homogenes Gut produziert
- Es herrscht Vollbeschäftigung
- Die Produktionsfunktion hat konstante Skalenerträge (d.h. eine Steigerung um  $\lambda > 0$  der Inputfaktoren erhöht das Output um  $\lambda$ )
- Das Grenzprodukt der Produktionsfunktion ist fallend
- Die Abschreibungsrate (d.h. Entwertung der vorhandenen Inputfaktoren Kapital und Humankapital pro Periode) ist exogen gegeben ( $0 \leq \delta \leq 1$ )

- Der Technologieparameter ist exogen gegeben
- Der Effizienzparameter des Bildungssystems ist exogen gegeben
- Die Wirtschaftssubjekte optimieren ihren Nutzen über einen unendlichen Zeithorizont
- Es gilt die in (1)-(3) definierte CRRA Nutzenfunktion
- Die Investitionsquote und die Humankapital-Akkumulationsquote werden endogen bestimmt

#### 2.2.4 Die Produktionsfunktion

Die Produktionsfunktion gleichgesetzt mit der Ressourcenbeschränkung lautet

$$(4) \quad Y_t = AK_t^\alpha (uH_t)^{1-\alpha} = C_t + I_t$$

Dabei ist  $A$  ein exogener Parameter, der die Technologie abbildet;  $K_t$  ist der physische Kapitalstock zum Zeitpunkt  $t$ ;  $H_t$  ist der Humankapitalstock zum Zeitpunkt  $t$ ;  $0 \leq u \leq 1$  - nicht mit der Nutzenfunktion  $u(c_t)$  zu verwechseln - ist jener Anteil am Humankapital, der in die Outputproduktion eingeht, und  $\alpha$  der Parameter der Inputfaktoreffizienz.  $C_t$  ist der Konsum und  $I_t$  die Investitionen in den physischen Kapitalstock zum Zeitpunkt  $t$

Die Bestände  $H_t$  und  $K_t$  werden durch Akkumulationsgleichungen bestimmt:

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{K}_t &= I_t - \delta K_t \\ \dot{H}_t &= B(1 - u)H_t - \delta H_t \end{aligned}$$

Sind die Investitionen  $I_t$  größer als der Verlust an Kapital durch Abschreibungen  $\delta K_t$ , wird Kapital akkumuliert. Ist  $B(1 - u)$  größer als der Verlust an Humankapital durch Abschreibungen  $\delta H_t$ , wird Humankapital akkumuliert.  $B$  ist ein exogener Parameter, der die Effizienz des Bildungssystems abbildet.

Über die Variable  $u$  wird entschieden, welcher Anteil des Humankapitals  $H$  in die Produktion von Sachgütern eingeht und welcher Anteil  $(1 - u)$  für die Akkumulation von Humankapital verwendet wird. Das erzeugte Output  $Y_t$  wird für den Konsum  $C_t$  und zur Investition in physisches Kapital  $I_t$  eingesetzt.

#### 2.2.5 Das Optimierungsproblem

Die Hamilton-Funktion für das Optimierungsproblem lautet:

$$(6) \quad \begin{aligned} J(C_t, I_t, u, K_t, H_t, \lambda_t, \mu_t, \nu_t, t) &= \\ &= \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} e^{-\rho t} + \lambda(I + \delta K) + \mu(B(1 - u)H - \delta H) + \nu(AK^\alpha (uH)^{1-\alpha} - C - I) \end{aligned}$$

Darin sind  $C$ ,  $u$  und  $I$  die Kontrollvariablen,  $K$  und  $H$  die Zustandsvariablen und die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  die Co-Zustandsvariablen. Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$(7) \quad \frac{dJ}{dC} = C^{-\theta} e^{-\rho t} - \nu = 0$$

$$(8) \quad \frac{dJ}{dI} = \lambda - \nu = 0$$

$$(9) \quad \frac{dJ}{du} = -\mu BH + \nu(1 - \alpha)AK^\alpha (uH)^{-\alpha} H = 0$$

$$(10) \quad \frac{dJ}{dK} = -\lambda\delta + \nu\alpha AK^{\alpha-1} (uH)^{1-\alpha} = -\dot{\lambda}$$

$$(11) \quad \frac{dJ}{dH} = \mu(B(1 - u) - \delta) + \nu(1 - \alpha)AK^\alpha (uH)^{-\alpha} u = -\dot{\mu}$$

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t H_t = 0$$

Die Transversalitätsbedingungen (12) besagen, dass beide Kapitalstöcke am Ende des unendlichen Planungshorizonts vollständig aufgebraucht sind.

Aus (8) folgt, dass im Nutzenoptimum  $\lambda = \nu$  gilt. Einsetzen von  $\lambda$  in (7) und differenzieren nach der Zeit liefert:

$$(13) \quad -\theta \dot{C}^{-\theta} e^{-\rho t} - \rho C^{-\theta} e^{-\rho t} = \dot{\lambda}$$

Einsetzen für  $\lambda$  und  $\dot{\lambda}$  in (10) liefert:

$$(14) \quad -C^{-\theta} e^{-\rho t} \delta + C^{-\theta} e^{-\rho t} \alpha AK^{\alpha-1} (uH)^{1-\alpha} = \theta \dot{C}^{-\theta} e^{-\rho t} + \rho C^{-\theta} e^{-\rho t}$$

Division durch  $e^{-\rho t}$  ergibt

$$(15) \quad -C^{-\theta} \delta + C^{-\theta} \alpha AK^{\alpha-1} (uH)^{1-\alpha} - \rho C^{-\theta} = \theta \dot{C}^{-\theta}$$

Herausheben und Zusammenfassen liefert die Gleichung für den optimalen Konsumpfad:

$$(16) \quad \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \left( \alpha A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \delta - \rho \right)$$

Die Konsumwachstumsrate ist unter anderem vom Kapitaleinsatzverhältnis  $\frac{K}{H}$  und der Aufteilungsrate des Humankapitaleinsatzes  $u$  abhängig.

Wenn das aus (4) gebildete Grenzprodukt des Realkapitals

$$\frac{dY}{dK} = \frac{dAK^\alpha (uH)^{1-\alpha}}{dK} = \alpha A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}$$

als Realzinssatz  $r$  aufgefasst wird, kann (16) auch als

$$(17) \quad \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} (r - \delta - \rho)$$

dargestellt werden.

### 2.2.6 Die Wachstumsraten der Modellgrößen

Für die weitere Analyse des Modells im langfristigen Gleichgewicht sind die Wachstumsraten der Modellgrößen von Interesse - sie werden in der Folge mit  $\gamma$  notiert.

Die Wachstumsrate des Sachkapitals  $\gamma_K$  ergibt sich, indem man die transformierte Kapitalakkumulationsgleichung (5) in die Outputgleichung (4) einsetzt:

$$\begin{aligned} I &= \dot{K} + \delta K \quad \Rightarrow \\ AK^\alpha (uH)^{1-\alpha} &= C + \dot{K} + \delta K \quad \Leftrightarrow \\ (18) \quad \gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} &= A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \frac{C}{K} - \delta \end{aligned}$$

Die Wachstumsrate des Humankapitals ergibt sich aus der Humankapitalakkumulationsgleichung (5):

$$(19) \quad \gamma_H = \frac{\dot{H}}{H} = B(1 - u) - \delta$$

Die Wachstumsrate des Faktoreinsatzverhältnisses  $\gamma_{K/H}$  ist die Differenz der Wachstumsraten der Inputfaktoren (18) und (19).

$$(20) \quad \gamma_{K/H} = A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \frac{C}{K} - B(1 - u)$$

Die Wachstumsrate des Kapital-Konsumverhältnisses  $\gamma_{C/K}$  ist die Differenz der Wachstumsraten (16) und (18)

$$(21) \quad \gamma_{C/K} = \left(\frac{\alpha - \theta}{\theta}\right) A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + \frac{C}{K} - \frac{1}{\theta} (\delta(1 - \theta) + \rho)$$

Schließlich ist noch die Wachstumsrate von  $u$  gesucht. Dazu müssen zunächst einige Hilfsgrößen berechnet werden:

(8) in (9) eingesetzt ergibt:

$$(22) \quad \frac{\mu}{\lambda} = (1 - \alpha) \frac{A}{B} \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} u^{-\alpha}$$

(8) in (10) eingesetzt ergibt:

$$(23) \quad \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\alpha A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + \delta$$

(8) in (11) eingesetzt ergibt:

$$(24) \quad \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{\lambda}{\mu} (1 - \alpha) A \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} u^{1-\alpha} - B(1 - u) + \delta$$

Das Einsetzen des Kehrwerts von (22) in (24) ergibt:

$$(25) \quad \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \delta - B$$

Zur Ermittlung der Wachstumsrate von  $u$  wird (24) nach der Zeit differenziert und zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}\lambda - \mu\dot{\lambda}}{\lambda^2} &= (1 - \alpha) \frac{A}{B} \left( \alpha \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{dK}{dt}\right) u^{-\alpha} - \alpha \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} u^{-\alpha-1} \dot{u} \right) = \\ &= (1 - \alpha) \frac{A}{B} \left( \alpha \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} \left(\frac{K}{H}\right)^{-1} \left(\frac{dK}{dt}\right) u^{-\alpha} - \alpha \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} u^{-\alpha} u^{-1} \dot{u} \right) = \\ &= (1 - \alpha) \frac{A}{B} \alpha \left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} u^{-\alpha} (\gamma_{K/H} - \gamma_u) \end{aligned}$$

Das führt unmittelbar zu:

$$(26) \quad \frac{\dot{\mu}}{\lambda} - \frac{\mu \dot{\lambda}}{\lambda^2} = (1 - \alpha) \frac{A}{B} \alpha \left( \frac{K}{H} \right)^\alpha u^{-\alpha} (\gamma_{K/H} - \gamma_u)$$

In (26) wird für  $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$  Gleichung (23) und für  $\gamma_{K/H}$  Gleichung (20) eingesetzt:

$$\frac{\dot{\mu}}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \left( -\alpha A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + \delta \right) = (1 - \alpha) \frac{A}{B} \alpha \left( \frac{K}{H} \right)^\alpha u^{-\alpha} \left( A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \frac{C}{K} - B(1 - u) - \gamma_u \right)$$

Da (22) invertiert  $\frac{\lambda}{\mu} = \left( (1 - \alpha) \frac{A}{B} \left( \frac{K}{H} \right)^\alpha u^{-\alpha} \right)^{-1}$  lautet, kann die linke Seite mit  $\frac{\lambda}{\mu}$  und die rechte Seite mit  $\left( (1 - \alpha) \frac{A}{B} \left( \frac{K}{H} \right)^\alpha u^{-\alpha} \right)^{-1}$  multipliziert werden. Das liefert:

$$\frac{\dot{\mu} \lambda}{\lambda \mu} + \alpha A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \delta = \alpha \left( A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \frac{C}{K} - B(1 - u) - \gamma_u \right)$$

Einsetzen von Gleichung (24) für  $\frac{\dot{\mu}}{\mu}$  und Subtraktion von  $\alpha A \left( \frac{K}{H} \right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha}$  auf beiden Seiten liefert

$$\delta - B - \delta = \alpha \left( -\frac{C}{K} - B(1 - u) - \gamma_u \right)$$

Daraus folgt schließlich

$$(27) \quad \gamma_u = B \left( \frac{1}{\alpha} + u - 1 \right) - \frac{C}{K}$$

### 2.2.7 Der Steady-State

Die Steady-State-Werte der relativen Größen  $\frac{K}{H}$ ,  $\frac{C}{K}$  und  $u$  können durch 0-Setzen der Gleichungen (20), (21) und (27) ausgerechnet werden:

$$(28) \quad \left( \frac{K}{H} \right)^* = \frac{1}{A} \left( \left( \frac{C}{K} \right)^* + B(1 - u^*) \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} u^*$$

$$(29) \quad \left( \frac{C}{K} \right)^* = \frac{1}{\theta} (\delta(1 - \theta) + \rho) - \left( \frac{\alpha - \theta}{\theta} \right) A \left( \left( \frac{K}{H} \right)^* \right)^{\alpha-1} (u^*)^{1-\alpha}$$

$$(30) \quad u^* = \left(\frac{C}{K}\right)^* \frac{1}{B} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

(30) kann auf die Form

$$Bu^* + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)B = \left(\frac{C}{K}\right)^*$$

gebracht werden und in (28) eingesetzt werden. Man erhält:

$$(31) \quad \left(\frac{K}{H}\right)^* = \frac{1}{A} \left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} u^*$$

(31) in (29) eingesetzt liefert:

$$\left(\frac{C}{K}\right)^* = \frac{1}{\theta} (\delta(1-\theta) + \rho) - \left(\frac{\alpha-\theta}{\theta}\right) A \left(\frac{1}{A} \left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} u^*\right)^{\alpha-1} (u^*)^{1-\alpha}$$

Nun kann die Steady-State-Rate von  $\frac{C}{K}$  in Abhängigkeit von exogenen Parametern angeschrieben werden:

$$(32) \quad \left(\frac{C}{K}\right)^* = \frac{1}{\theta} (\delta(1-\theta) + \rho) - B \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Einsetzen von (32) in (30) liefert  $u^*$  in Abhängigkeit von exogenen Parametern:

$$(33) \quad u^* = \frac{\delta(1-\theta) + \rho + B(\theta-1)}{B\theta}$$

Mit (31) und (33) erhält man noch für  $\frac{K}{H}$  im Steady-State:

$$(34) \quad \left(\frac{K}{H}\right)^* = \left(\frac{B}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\delta(1-\theta) + \rho + B(\theta-1)}{B\theta}$$

### 2.2.8 Interpretation der Ergebnisse

Der Steady-State-Wert für  $u^*$  - also jener Anteil des Humankapitals, der in die Sachgüterproduktion eingeht - ist umso höher, je höher die Zeitpräferenzrate  $\rho$  der Haushalte ist. Ohne weitere Annahmen oder Restriktionen kann über das Verhalten von  $u^*$  bezüglich einer Variation der anderen Parameter nichts ausgesagt werden. So erhöht eine steigende Abschreibungsrate  $\delta$  die Höhe von  $u^*$ , wenn  $\theta < 1$  ist - in diesem Fall ist die Aversion der Haushalte, Konsum in zukünftige Perioden zu

verlegen, nicht sehr groß. Ein Anstieg des Effizienzparameters  $B$  würde in diesem Fall einen höheren Einsatz von Humankapital nach sich ziehen.

Insgesamt wird im Lucas-Uzawa-Modell ein dauerhaftes Wachstum der Pro-Kopf-Größen durch die Bildung von Humankapital erklärt. Bei einem geringen Wert von  $\frac{K}{H}$  ist Sachkapital relativ knapp, während Humankapital reichlich vorhanden ist. Die Grenzproduktivität von Humankapital im Sachgütersektor ist relativ gering, was wiederum einen höheren Anreiz schafft, Humankapital im Bildungssektor einzusetzen, um in späteren Perioden ein höheres Wachstum zu erzielen. Ist hingegen der Wert von  $\frac{K}{H}$  groß, gibt es nur geringes Humankapital im Vergleich zum Sachkapital. Daraus folgt, dass die Grenzproduktivität des Humankapitals im Gütersektor hoch ist und nur ein geringer Anreiz besteht, Humankapital zur Bildung von Humankapital einzusetzen.

Mit diesen Erkenntnissen hilft das Lucas-Uzawa-Modell, das deutsche Wirtschaftswunder nach dem 2. Weltkrieg und die Armutsfalle in Entwicklungsländern zu erklären:

Nach dem 2. Weltkrieg war in Deutschland ein großer Teil des Sachkapitals - etwa Infrastruktur und Produktionsanlagen - zerstört, während Humankapital reichlich vorhanden war. Durch Zufluss von Sachkapital von außen (Wiederaufbauhilfen), wurde in kurzer Zeit ein enormes Wirtschaftswachstum erzielt. In Entwicklungsländern hingegen, die in den letzten Jahrzehnten ebenfalls einen Zufluss von Sachkapital erfahren haben, scheinen diese Zuflüsse kaum nachhaltige Folgen auf das Wirtschaftswachstum zu haben. Der Schlüssel liegt laut Lucas-Uzawa im zu geringen Ausmaß von Humankapital, das in diesen Ländern vorhanden ist. In Entwicklungsländern kommt, wegen der hohen Grenzproduktivität des wenig vorhandenen Humankapitals hinzu, dass die Wirtschaftsteilnehmer, die über ein hohes Maß an Humankapital verfügen, dieses eher in der gut entlohnten Sachgüterproduktion als in der schlecht entlohnten Fort- und Weiterbildung einsetzen.

## 3 Die Simulation

### 3.1 Das Lucas-Uzawa-Modell in der Simulation

Die Eigenschaften des Lucas-Uzawa-Modells im Steady-State sind wegen der Unbestimmtheit der genauen Höhe der einzelnen Werte - mathematisch gesprochen - nicht trivial. Als geschlossene Formeln von exogenen Parametern liegen lediglich Wachstumsraten und Verhältnisse vor. Zur Berechnung von geschlossenen Lösungen für  $H^*$ ,  $K^*$ ,  $C^*$  und  $u^*$  dieses 4-dimensionalen statisch unbestimmten Systems müssten etliche Parameterrestriktionen angenommen werden.

Beispielsweise müssten Ungleichungen für die Parameterwerte geschaffen werden, sodass  $u^*$  in Gleichung (2.2.7 (33)) in den gemäß seiner Definition vorgesehenen Schranken zwischen 0 und 1 bleibt. Es existieren bereits einige wichtige Publikationen, die die Suche nach geschlossenen Formeln behandeln: Etwa [7] Caballe und Santos (1993), [20] Xie (1994), [4] Benhabib und Perli (1994) und [14] Ortigueira (1998). Mit der Ausnahme von Xie, der einen sehr speziellen parametrischen Fall des Modells explizit löst, transformieren die Autoren das Lucas-Uzawa-Modell in ein Modell niedrigerer Dimension, um das Problem der statischen Unbestimmtheit zu umgehen. Erst [6] Boucekkine und Ruiz-Tamarit (2007) verfolgen eine neue von der Mathematischen Physik inspirierte Methode: Sie zeigen, dass das Lucas-Uzawa-Modell explizit für alle Variablen mit Gauß'schen hypergeometrischen Funktionen gelöst werden kann. Aber auch dieser Lösungsansatz gilt als noch nicht vollständig erforscht, da die Lösungspfade noch einige Unstetigkeitsstellen aufweisen.

Der Focus der hier vorliegenden Arbeit liegt nicht im Auffinden von geschlossenen Lösungen des Lucas-Uzawa-Modells - vielmehr soll die Gültigkeit der Modellaussagen anhand einer spieltheoretischen Simulation überprüft werden. Dazu sind einige Anpassungen und Vereinfachungen des ursprünglichen Modells erforderlich.

#### 3.1.1 Die Modellannahmen

Zunächst wird ein Aktionsraum erschaffen, in dem sämtliche simulationsrelevanten Ereignisse und Aktionen stattfinden. Die Gesetzmäßigkeiten im Aktionsraum können durch das Setzen von Parametern (exogene Variablen) gesteuert werden.

Im Aktionsraum wird nun eine Anzahl von  $n$  unabhängig voneinander agierenden Agenten (in diesem Fall: Wirtschaftssubjekten beziehungsweise Haushalten) erschaffen. Die Agenten verfügen über folgende Eigenschaften:

- Einmal erschaffen, existieren die Agenten innerhalb der Simulation unendlich lange. Erst ein Neustart der Simulation erzeugt eine neue Population
- Jeder Agent nimmt einen eindeutigen festen Platz im Aktionsraum ein, bestimmt durch seine räumlichen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$
- Jeder Agent wird mit individuellen Eigenschaftswerten erschaffen. Diese Eigenschaftswerte können durch das Setzen von exogenen Parametern modifiziert werden

- Um eine größtmögliche Heterogenität der Agenten zu erreichen, gibt es sowohl deterministisch vorgegebene Eigenschaftswerte und Parameter als auch stochastische Parameter
- Jeder Agent handelt autonom und egoistisch (im Sinne von Eigennutzenmaximierung)
- Die Agenten treffen ihre Entscheidungen zu diskreten Zeitpunkten
- Die Agenten nehmen an einer Lucas-Uzawa-Wirtschaft teil - es gelten sämtliche Lucas-Uzawa-Modellannahmen, mit Ausnahme der Optimierung über einen unendlichen Zeithorizont

### 3.1.2 Initialisierung der Parameter

Folgende - vom Simulationsanwender zu setzende - exogene Parameter werden den Agenten bei ihrer Erschaffung zugeordnet:

Parameter	Aufgabe	Wertebereich	Inkrement
$A$	Technologieparameter	deterministisch $[0; 2]$	0.01
$B$	Bildungseffizienzparameter	deterministisch $[0; 2]$	0.01
$\alpha$	Parameter der Produktionsfunktion	deterministisch $[0; 1]$ stochastisch: $\varepsilon \in [0; 1]$ , Werte $\in [0,1; 0,9]$	0.01
$\sigma$	Abschreibungsparameter des physischen Kapitals	deterministisch $[0; 1]$	0.01
$\delta$	Abschreibungsparameter des Humankapitals	deterministisch $[0; 1]$	0.01
$\rho$	Gegenwartspräferenz-Parameter	deterministisch $[0; 1]$ stochastisch: $\varepsilon \in [0; 1]$ , Werte $\in [0,1; 0,9]$	0.01
$\theta$	Parameter der Nutzenfunktion	deterministisch $(0; 1)$ stochastisch: $\varepsilon \in (0; 1)$ , Werte $\in [0,1; 0,9]$	0.01

Tabelle 1

Die Parameter können im User-Interface der Simulation festgesetzt werden. Die Spalte "Aufgabe" erklärt die Bedeutung des Parameters für das Modell. Die Spalte "Wertebereich" gibt das Intervall der möglichen Werte für den Parameter an.  $\alpha$ ,  $\rho$  und  $\theta$  können entweder fest (deterministisch) gesetzt werden, oder stochastisch als Realisation einer Zufallsvariablen. Im stochastischen Fall wird der Parameter für jeden Agenten individuell festgelegt, wobei eine normalverteilte Zufallsvariable

mit dem eingestellten Wert  $\varepsilon$  als Erwartungswert und einer Standardabweichung von 0,01 realisiert wird. Sollte die Realisation der Zufallsvariable einen Wert kleiner als 0,1 annehmen, wird der Wert auf 0,1 gesetzt. Analog wird der Wert auf 0,9 gesetzt, wenn die Realisation der Zufallsvariable größer als 0,9 ist. Damit werden extreme Realisationen ausgeschlossen, die die Modellaussage verzerren würden. Die Zufallsvariable wird jeweils stetig (mit der maximal erzielbaren Rechengenauigkeit  $\varepsilon$ ) realisiert. Die Spalte "Inkrement" bezeichnet den Mindestbetrag, durch den sich zwei deterministische Parameterwerte unterscheiden können.

Folgende endogene Variablen werden bei der Modellerstellung als Realisation einer Zufallsvariablen bestimmt:

Parameter	Aufgabe	Wertebereich	Inkrement
$k$	Physischer Kapitalstock	stochastisch $10 + ZV([0; 10])$	$\varepsilon$
$h$	Humankapitalstock	stochastisch $10 + ZV([0; 10])$	$\varepsilon$
$f$	Anzahl der Perioden, über die optimiert wird	stochastisch $10 + ZV([0; 10])$	1

Tabelle 2

Ein Wertebereich von  $10 + ZV([0; 10])$  bedeutet, dass der Variablen die Summe von 10 mit der Realisation einer gleichverteilten Zufallsvariablen aus dem Intervall  $[0; 10)$  zugeordnet wird. Ein Inkrement von  $\varepsilon$  steht für die Maschinengenauigkeit, die zur Darstellung von Gleitkommazahlen zur Verfügung steht. Ein Inkrement von 1 steht für ganzzahlige Variablenwerte.

Weiters werden jedem Agenten noch 3 Entscheidungsvariablen zugeordnet, die das Verhalten in jeder Periode bestimmen. Sie werden *cons*, *invh* und *invk* benannt. Schließlich werden noch die Hilfsvariablen  $q$ ,  $u$  und  $v$  eingeführt. Die endogenen Variablen, die Entscheidungsvariablen und die Hilfsvariablen können im Verlauf der Simulation Werte im Intervall von  $[0; \infty)$  annehmen. Einzige Einschränkungen sind auch hier wieder die Maschinengenauigkeit  $\varepsilon$  und die Ganzzahligkeit von  $f > 0$ .

### 3.1.3 Gesetzmäßigkeiten in der Simulation

Die Simulation läuft in zeitdiskreten Schritten. In jeder Periode  $t$  agiert jeder Agent genau einmal. Wenn alle Agenten ihre Aktion gesetzt haben, startet die nächste Periode  $t+1$ . Die Agenten haben pro Periode die Möglichkeit, eine von drei Aktionen auszuführen:

- Konsumation
- Investition in physisches Kapital
- Investition in Humankapital

Sie treffen ihre Entscheidungen auf Basis der zeitdiskreten Variante der CRRA-Nutzenfunktion, die im Kapitel (2.2) vorgestellt wurde:

$$(1) \quad u_i(t) = \frac{c_i(t)^{1-\theta_i} - 1}{1-\theta_i} \quad \theta \in [0; 1) \quad t \in [0; \infty) \quad i \in [0; n-1]$$

$t$  bezeichnet den Periodenindex,  $u_i(t)$  den Nutzen des Agenten  $i$  in der Periode  $t$ ,  $c_i(t)$  den Konsum des Agenten  $i$  in der Periode  $t$  und  $i$  den Index des Agenten in der Population. Künftig wird o.B.d.A. der Populationsindex  $i$  in der Notation unterdrückt - die Ergebnisse gelten für alle Agenten mit ihren jeweiligen individuellen Parameterwerten.

Die Produktionsfunktion ist nach Lucas-Uzawa:

$$(2) \quad y_t = Ak_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} = c_t + i_t$$

Ebenso gelten die zeitdiskreten Akkumulationsgleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\sigma)(k_t + i_t) \\ h_{t+1} &= (1-\delta)(h_t + B(1-u_t)h_t) \end{aligned}$$

Zu beachten ist:

- Im Gegensatz zum Lucas-Uzawa-Modell wird hier zwischen den Abschreibungsraten für physisches Kapital  $\sigma$  und Humankapital  $\delta$  unterschieden
- Den Agenten steht in jeder Periode nur eine der drei möglichen Strategien "Konsumieren", "Investieren in physisches Kapital", "Investieren in Humankapital" zur Verfügung. Die Agenten spielen nur reine Strategien über diese drei Möglichkeiten. Daher müssen die Gleichungen (2) und (3) leicht abgeändert angeschrieben werden:

$$(4) \quad y_t = Ak_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} = (v_t)c_t + (1-v_t)i_t$$

$$(5) \quad \begin{aligned} k_{t+1} &= (1-\sigma)(k_t + (1-v_t)i_t) \\ h_{t+1} &= (1-\delta)(h_t + B(1-u_t)h_t) \end{aligned}$$

Die Variablen  $u_t$  und  $v_t$  sind die Entscheidungsvariablen. Sie werden in jeder Periode von den Agenten neu festgesetzt und können nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

$$(6) \quad u_t = \begin{cases} 0 & \text{falls "Investieren in Humankapital" gespielt wird} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls  $u_t$  mit 0 gespielt wird, ist (4) gleich 0 und es wird kein Output erzeugt.  $c_t$  und  $i_t$  sind damit ebenfalls 0. Aus der zweiten Gleichung (5) folgt, dass der Agent Humankapital akkumuliert.

Falls  $u_t$  auf 1 gespielt wird, wird Output erzeugt. In diesem Fall ist die Entscheidung  $v_t$  relevant:

$$(7) \quad v_{t|(u_t=1)} = \begin{cases} 0 & \text{falls "Investieren in physisches Kapital" gespielt wird} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wird  $v_t$  auf 0 gespielt, bedeutet das, der Agent akkumuliert physisches Kapital. Das gesamte Output der Periode  $t$  wird in physischem Kapital angelegt, es findet kein Konsum  $c_t$  statt.

Falls  $v_t$  auf 1 gespielt wird, wird das gesamte Output der Periode  $t$  konsumiert. Aus (1) folgt, dass der Agent nur in diesem Fall positiven Nutzen beziehen kann.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich nun mit der Ermittlung von  $u_t$  und  $v_t$  in der Periode  $t$ . Im Gegensatz zu Lucas-Uzawa wird angenommen, dass die Agenten nicht allwissend sind und nur über einen endlichen Zeitraum optimieren. Die Annahme der "Perfect Foresight" wird zugunsten einer Nutzenoptimierung über  $0 < f < \infty$  Perioden fallengelassen. Gemäß Tabelle 2 wird  $f$  als eine ganze Zahl zwischen 10 und 19 individuell für jeden Agenten initialisiert. Im Laufe der Simulation ist  $f$  Anpassungen unterworfen - je nachdem, welche Strategie der Agent in der Periode  $t$  spielt:

$$f_{t+1} = \begin{cases} f_t + 1 & \text{falls "Konsumieren" gespielt wird} \\ f_t - 1 & \text{falls "Investieren in physisches Kapital" gespielt wird} \\ f_t - 2 & \text{falls "Investieren in Humankapital" gespielt wird} \end{cases}$$

Diese Veränderungen des Optimierungszeitraums bilden empirisch beobachtbares Verhalten ab:

Wenn jemand eine größere nutzenbringende Konsumation, wie etwa eine teure Urlaubsreise oder den Erwerb von Luxusgütern tätigt, wird er in den folgenden Perioden eher geneigt sein, wieder Kapital anzusparen, als jemand, der noch über ausreichend angespartes Kapital verfügt. Heuristisch gesprochen: Jemand, der gerade viel für Konsum ausgegeben hat, wird eher einen sorgenvollen Blick in die Zukunft wagen, als jemand, der nichts ausgegeben hat. Jemand der nichts ausgegeben hat, wird wiederum sorgenvoller in die Zukunft blicken, als jemand, der gerade eine neue Maschine angeschafft hat, die seine künftige Produktivität erhöht (Investition in physisches Kapital). Die Investition in Humankapital wird doppelt so hoch bewertet, wie die Investition in physisches Kapital. Diese Bewertung mag auf den ersten Blick willkürlich erscheinen, folgt aber ebenfalls der Empirie: Vor die Wahl gestellt, seine Produktivität kurz und schmerzlos durch die leistbare Anschaffung eines Arbeitsgerätes zu erhöhen, oder die gleiche Produktivitätserhöhung durch Erlernen von neuen Arbeitsweisen zu erreichen, wird der Homo Oeconomicus eher den Griff zur Geldbörse wagen, als sich ins Studierzimmer zurückzuziehen.

Mit der Anzahl der Perioden  $f$ , über die der Agent optimiert, können nun die Entscheidungsvariablen  $invh$ ,  $invk$  und  $cons$  berechnet werden, aus denen die Werte für die optimalen Entscheidungen  $u_t$  und  $v_t$  gefolgert werden.

### 3.1.4 Die Berechnung von $cons$

$cons$  bezeichnet den diskontierten Gegenwartsnutzen über  $f$  Perioden, wenn in jeder Periode "Konsumieren" gespielt wird. Tabelle 3 stellt das Output (= den Konsum) und den Nutzen in Abhängigkeit von  $t$  dar:

$t$	$y_t = c_t$	Gegenwartswert von $u_t(c_t)$
1	$Ak^\alpha h^{1-\alpha}$	$\frac{(Ak^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$
2	$A((1-\sigma)k)^\alpha ((1-\delta)h)^{1-\alpha}$	$(1-\rho) \frac{(A((1-\sigma)k)^\alpha ((1-\delta)h)^{1-\alpha})^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$
3	$A((1-\sigma)^2 k)^\alpha ((1-\delta)^2 h)^{1-\alpha}$	$(1-\rho)^2 \frac{(A((1-\sigma)^2 k)^\alpha ((1-\delta)^2 h)^{1-\alpha})^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f$	$A((1-\sigma)^{f-1} k)^\alpha ((1-\delta)^{f-1} h)^{1-\alpha}$	$(1-\rho)^{f-1} \frac{(A((1-\sigma)^{f-1} k)^\alpha ((1-\delta)^{f-1} h)^{1-\alpha})^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$

Tabelle 3

Durch die Definition von  $q$

$$(8) \quad q = (1-\rho)(1-\sigma)^\alpha (1-\delta)^{\alpha-1}$$

lässt sich der Gegenwartswert des Nutzenstroms über die betrachteten  $f$  Perioden einfach anschreiben:

$$(9) \quad cons = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta} \left( \sum_{j=0}^{f-1} q^j \right) - \sum_{l=0}^{f-1} (1-\rho)^l \right)$$

Auf beide Summen kann die Summenformel für geometrische Reihen angewandt werden. Man erhält:

$$(10) \quad cons = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta} \left( \frac{q^f - 1}{q - 1} \right) + \frac{(1-\rho)^f - 1}{\rho} \right)$$

### 3.1.5 Die Berechnung von *invh*

*invh* bezeichnet den diskontierten Gegenwartsnutzen über  $f$  Perioden, wenn in der ersten Periode "Investieren in Humankapital" und in den  $f - 1$  Folgeperioden "Konsumieren" gespielt wird. Für die erste Periode gilt die Humankapital-Akkumulationsgleichung (5). Gleichung (8) wird verwendet, um  $q$  herauszuheben. Tabelle 4 stellt das Output und den Nutzen in Abhängigkeit von  $t$  dar:

$t$	$y_t = c_t$	Gegenwartswert von $u_t(c_t)$
1	0	$\frac{-1}{1-\theta}$
2	$A((1-\sigma)k)^\alpha ((1-\delta)(h+hB))^{1-\alpha}$	$q \frac{(Ak^\alpha (h(1+B))^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)}{1-\theta}$
3	$A((1-\sigma)^2 k)^\alpha ((1-\delta)^2 (h+hB))^{1-\alpha}$	$q^2 \frac{(Ak^\alpha (h(1+B))^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)^2}{1-\theta}$
⋮	⋮	⋮
$f$	$A((1-\sigma)^{f-1} k)^\alpha ((1-\delta)^{f-1} (h+hB))^{1-\alpha}$	$q^{f-1} \frac{(Ak^\alpha (h(1+B))^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)^{f-1}}{1-\theta}$

Tabelle 4

Der Gegenwartswert des Nutzenstroms über  $f$  Perioden lautet:

$$(11) \quad invh = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha (h(1+B))^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \sum_{j=0}^{f-2} q^j \right) - \sum_{l=0}^{f-1} (1-\rho)^l \right)$$

Nach Anwendung der geometrischen Summenformel erhält man:

$$(12) \quad invh = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha (h(1+B))^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \frac{q^{f-1} - 1}{q - 1} \right) + \frac{(1-\rho)^f - 1}{\rho} \right)$$

### 3.1.6 Die Berechnung von *invk*

*invk* berechnet den diskontierten Gegenwartsnutzen über  $f$  Perioden, wenn in der ersten Periode "Investieren in Kapital" und in den  $f - 1$  Folgeperioden "Konsumieren" gespielt wird. Für die erste Periode gilt die Kapital-Akkumulationsgleichung (5). Gleichung (8) wird verwendet, um  $q$  herauszuheben. Tabelle 5 stellt das Output und den Nutzen in Abhängigkeit von  $t$  dar:

$t$	$y_t = c_t$	Gegenwartswert von $u_t(c_t)$
1	0	$\frac{-1}{1-\theta}$
2	$A((1-\sigma)k)^\alpha ((1-\delta)h)^{1-\alpha}$	$q \frac{(A(k + Ak^\alpha h^{1-\alpha})^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)}{1-\theta}$
3	$A((1-\sigma)^2 k)^\alpha ((1-\delta)^2 h)^{1-\alpha}$	$q^2 \frac{(A(k + Ak^\alpha h^{1-\alpha})^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)^2}{1-\theta}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f	$A((1-\sigma)^{f-1} k)^\alpha ((1-\delta)^{f-1} h)^{1-\alpha}$	$q^{f-1} \frac{(A(k + Ak^\alpha h^{1-\alpha})^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)^{f-1}}{1-\theta}$

Tabelle 5

Der Gegenwartswert des Nutzenstromes über  $f$  Perioden lautet:

$$(13) \quad invk = \frac{1}{1-\theta} \left( (A(k + Ak^\alpha h^{1-\alpha})^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \sum_{j=0}^{f-2} q^j \right) - \sum_{l=0}^{f-1} (1-\rho)^l \right)$$

Nach Anwendung der geometrischen Summenformel erhält man:

$$(14) \quad invk = \frac{1}{1-\theta} \left( (A(k + Ak^\alpha h^{1-\alpha})^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \frac{q^{f-1} - 1}{q - 1} \right) + \frac{(1-\rho)^f - 1}{\rho} \right)$$

### 3.1.7 Die optimale Entscheidung

Nach Ermittlung der drei Hilfsvariablen  $invh$ ,  $invk$  und  $cons$  in den Gleichungen (10), (12) und (14) kann nun die optimale Strategie festgelegt werden: Jeder Agent spielt diejenige Strategie, deren zugeordnete Hilfsvariable für ihn den höchsten Nutzenstrom über die nächsten  $f$  Perioden erzeugt. Dazu wird folgende Funktion ausgewertet:

$$(15) \quad \max \{cons, invh, invk\} = \begin{cases} cons & \Rightarrow u_t = 1, v_t = 1, f_{t+1} = f_t + 1 \\ invh & \Rightarrow u_t = 0, v_t = 1, f_{t+1} = f_t - 2 \\ invk & \Rightarrow u_t = 1, v_t = 0, f_{t+1} = f_t - 1 \end{cases}$$

Da nur ein Größenvergleich der Hilfsvariablen *cons*, *invh* und *invk* benötigt wird und nicht deren exakte Werte, kann die Recheneffizienz in der Simulation optimiert werden: Die Gleichungen (10), (12) und (14) können mit  $1 - \theta$  multipliziert und der Strafterm  $\frac{(1-\rho)^f - 1}{\rho}$  kann ignoriert werden.

### 3.2 Die Bedienung der Simulation

Die Simulation der Lucas-Uzawa-Volkswirtschaft ist in der vorliegenden Arbeit in der Entwicklungsumgebung Netlogo3d Preview 4 realisiert. Netlogo ist eine von Wissenschaftlern der Northwestern University Chicago entwickelte und unter <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/> frei erhältliche, programmierbare Multi-Agenten-Entwicklungsumgebung.

#### 3.2.1 Das Simulationsinterface

Nach dem Öffnen der Simulationsdatei "Lucas-Uzawa.nlogo" - Quellcode siehe Kapitel (7.1) - in Netlogo3d Preview 4 erscheint das Simulationsinterface:

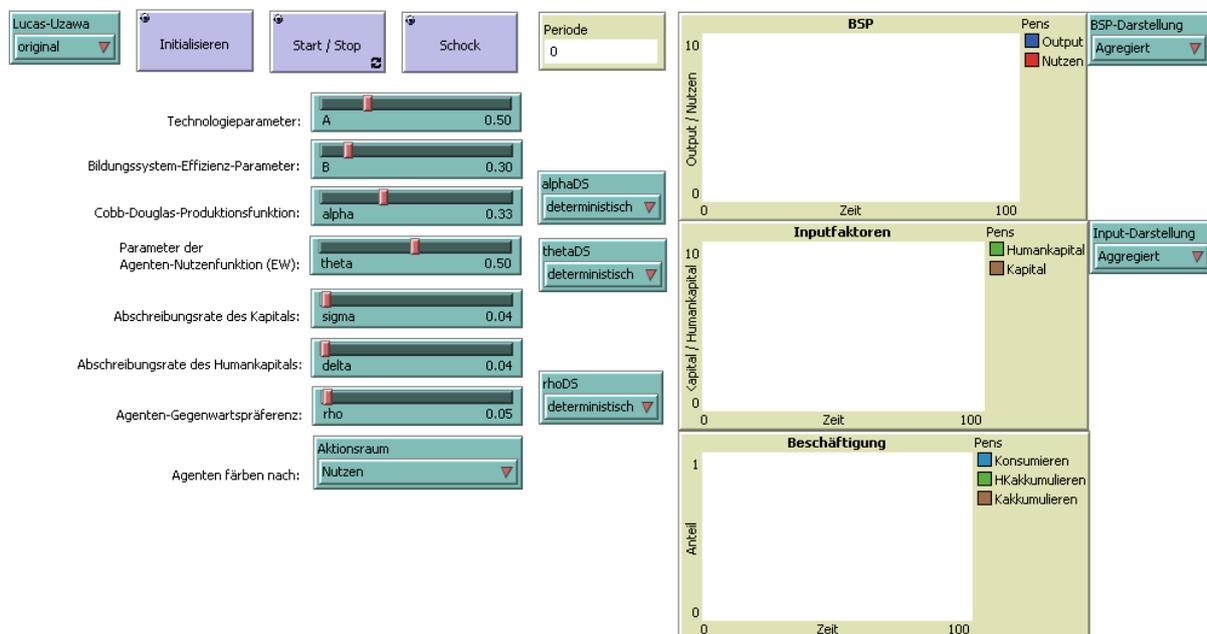


Abbildung (1)

#### 3.2.2 Die Steuerung

Durch Klicken auf den Button "Initialisieren" wird eine Population von 2091 Agenten mit den aktuell eingestellten Parameterwerten aus Tabelle (1) *A*, *B*, *alpha*, *theta*, *sigma*, *delta* und *rho* und den in Tabelle (2) definierten endogenen Variablen *k*, *h* und *f* erstellt. Jedem Feld des Aktionsraums ist ein Agent zugeordnet. Über die Auswahlbox "Lucas-Uzawa" kann dabei festgelegt werden, ob das in 4.1 behandelte original Lucas-Uzawa-Modell, oder das in 5.1 vorgestellte modifizierte Lucas-Uzawa-Modell initialisiert wird.

Anmerkung: Die Zahl 2091 ergibt sich aus der Größe des Aktionsraums (51 x 41 Felder = 2091 Felder). Auf jedem Feld befindet sich genau ein Agent. Die gewählte Größe des Aktionsraums ist ein

Kompromiss aus der gewünschten Heterogenität der Population und der benötigten Rechenleistung pro Simulationsperiode. Die Zahl kann jederzeit und ohne Verzerrung der wesentlichen Modellaussagen erhöht werden.

Die Parameterwerte aus Tabelle (1) können über die Schieberegler im Simulationsinterface verändert werden. Betätigt man nach der Veränderung der Schieberegler den Button "Initialisieren", wird eine Agentenpopulation mit den entsprechenden Startwerten erstellt.

Die Parameter  $\alpha$ ,  $\theta$  und  $\rho$  können den Agenten über die entsprechende Auswahlbox entweder deterministisch oder stochastisch zugeordnet werden. Die Gesetzmäßigkeiten der Zufallsvariablen sind in Tabelle (1) aufgelistet.

Durch Klicken auf den Button "Start / Stop" kann die Simulation gestartet oder angehalten werden.

Werden die Schieberegler während einer laufenden Simulation verändert, hat das keine unmittelbaren Auswirkungen.

Durch Klicken auf den Button "Schock" werden den Agenten die über die Schieberegler aktuell eingestellten Parameterwerte neu zugeordnet - auch bei bereits laufender Simulation. Zufallsvariablen werden bei diesem Vorgang neu realisiert. Die endogenen Variablen  $h$ ,  $k$  und  $f$  bleiben unverändert erhalten. Mithilfe des "Schock"-Buttons können die Auswirkungen von plötzlichen Parameteränderungen auf die Wirtschaft studiert werden.

Die Ausgabe des Simulationsverlaufs erfolgt über Grafiken und den Aktionsraum:

### **3.2.3 Die Grafik "BSP"**

Die Grafik "BSP" gibt den Verlauf der beiden Größen Output und Nutzen (y-Koordinate) über die Zeit (x-Koordinate) an. Es kann durch die entsprechende Auswahlbox zwischen aggregierter Darstellung und Pro-Kopf-Darstellung gewählt werden.

### **3.2.4 Die Grafik "Inputfaktoren"**

Die Grafik "Inputfaktoren" gibt den Verlauf der beiden Größen Kapital und Humankapital an. Es kann durch die entsprechende Auswahlbox zwischen Aggregierter-Darstellung und Pro-Kopf-Darstellung gewählt werden.

### **3.2.5 Die Grafik "Beschäftigung"**

Die Grafik "Beschäftigung" gibt die Anteile der Agenten, die konsumieren, Kapital akkumulieren beziehungsweise Humankapital akkumulieren an.

### **3.2.6 Der Aktionsraum**

Über die Auswahlbox "Aktionsraum" können verschiedene Visualisierungen der Agenten im Aktionsraum gewählt werden. Je heller ein Wert dargestellt wird, desto höher ist die entsprechende Variable für den betreffenden Agenten. Schwarze Agenten haben in der aktuellen Periode einen Variablenwert von 0 oder nahe 0. Die Farbskalen sind logarithmisch über den betrachteten Variablen.

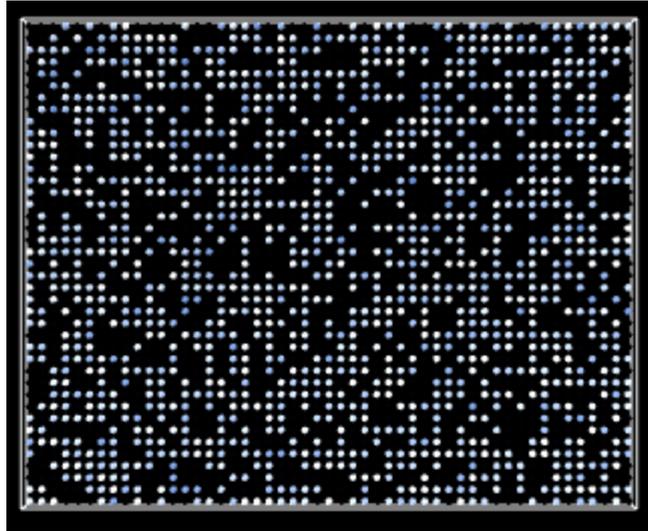


Abbildung (2): Beispiel einer Aktionsraum-Ausgabe nach Output

## 4 Ergebnisse

### 4.1 Deterministische Parameterdefinitionen

#### 4.1.1 Das Parameterset $x_1$

Nachdem im letzten Kapitel die Funktionsweise der Simulation betrachtet wurde, sollen nun die Modellaussagen, die Sensitivität der Parameterwerte und der Lucas-Uzawa-Volkswirtschaft insgesamt untersucht werden.

Ziel der Simulation ist es nicht, einzelnen Parametersets genaue Werte oder prozentgenaue Wachstumsraten zuzuordnen, sondern vielmehr, ein qualitatives Bild von den Größenordnungen und Richtungen der Entwicklungen innerhalb der Volkswirtschaft zu erhalten.

Dazu wird ein Vektor  $x_i$  definiert, der für jeden Simulationsdurchlauf ein spezifisches Set von Parameterwerten der exogenen Variablen enthält.  $i$  bezeichnet den  $i$ -ten definierten Vektor  $x$ .

$$(1) \quad x_i = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix}$$

Die Simulation läuft jeweils 100 Perioden. Zunächst werden alle Parameter deterministisch initialisiert und die Wirtschaft läuft ohne Schocks.

$$(2) \quad x_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,33 \\ 0,5 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.2 Die Bedeutung der Parameter

Der Parameter  $A$  steht für die Technologie-Effizienz. Solange Agenten in jeder Periode konsumieren, skaliert der Parameter lediglich den Anstieg des Outputs. Sobald er aber über Investition in den Kapitalstock eingeht, steigt die Bedeutung von  $A$ .  $A$  beschreibt dann eine lineare Funktion über dem Output - jenen Anteil, der direkt in den Kapitalstock investiert werden kann. Wenn  $A$  nun zu groß angenommen wird - nahe bei 1 oder gar darüber, steigen die Erträge von Investitionen in den Kapitalstock unverhältnismäßig.  $A$  wird daher zunächst bei 0,5 initialisiert.

Der Parameter  $B$  repräsentiert den linearen Zuwachs an Humankapital, der in einer Periode Humankapitalakkumulation erzielt werden kann. Ein Wert von  $B$  nahe bei 1 bedeutet ein Wachstum des Humankapitals um nahezu das Doppelte in jeder Periode der Wissensakkumulation. Die Empirie

legt daher einen Wert weit darunter nahe.  $B$  wird bei 0,3 vermutet. Das bedeutet immer noch einen Wissenszuwachs von annähernd 30% in jeder Periode der Wissensakkumulation.

Über  $\alpha$  wird die Effektivität des Faktoreinsatzes gesteuert. Empirische Studien legen einen Wert von  $\alpha \approx \frac{1}{3}$  für Industrieländer nahe. Der Einsatz des Inputfaktors Kapital ist damit etwa halb so produktiv, wie der Einsatz des Inputfaktors Humankapital. Am Beispiel der vor 20 Jahren noch planwirtschaftlich gelenkten Länder der ehemaligen Sowjetunion lässt sich diese Wahl von  $\alpha$  untermauern: Fabriken, Produktionsanlagen und Infrastruktur waren in der Sowjetunion in relativ hohem Ausmaß vorhanden - sie wurden von den zentralistischen Regierungen zur Verfügung gestellt. Für den einzelnen Wirtschaftsteilnehmer hingegen war der Anreiz, sich zu bilden, gering - das Grenzprodukt der Bildung war gering, und damit gab es kein hohes Lohngefälle zwischen den Bildungsschichten. Investition in Bildung zahlte sich schlichtweg nicht aus. Bei etwa gleicher Infrastruktur war in diesen Ländern ein geringeres Output und Wirtschaftswachstum zu beobachten als in vielen - teilweise sogar kapitalärmeren - Industrieländern. Dieser Unterschied kann durch die unterschiedliche Höhe der Humankapitalproduktivität erklärt werden.

Der Parameter  $\theta$  der Nutzenfunktion wird bei 0,5 angesiedelt. Die Wahl von  $\theta$  ist wohl am schwierigsten empirisch zu begründen. Der Nutzen, den ein Wirtschaftssubjekt aus dem Konsum einer Gütermenge  $G$  bezieht, ist subjektiv und verändert sich über die Zeit. Das sei am Beispiel eines Wirtschaftssubjekts verdeutlicht, das in jungen Jahren bereits über eine eigene Wohnung oder ein eigenes Auto verfügt: In jungen Jahren erzeugen diese Güter einen höheren Nutzen als in späteren, wo sie als selbstverständlich vorausgesetzt werden. Auf dem Gebiet der Nutzenforschung existieren bereits viele wichtige Publikationen. Beispielsweise verfolgt der Artikel [1] "Optimal taxation when consumers have endogenous benchmark levels of consumption" (2005) von Andrew B. Abel den vielversprechenden Ansatz, dass der Nutzen des Individuums aus dem Verhältnis des eigenen Konsums zu einem Durchschnittskonsum (benchmark level of consumption) einer Vergleichsgruppe innerhalb der Population generiert wird. Da die Nutzenproblematik nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist, wird zunächst ein  $\theta$  von 0,5 als repräsentativer Schnitt über die Agentenpopulation angenommen.

Die Abschreibungsrate von  $\sigma$  des physischen Kapitals bei 0,04 impliziert, dass sich ein vorhandener Kapitalstock  $K$  binnen  $n = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,96)} \approx 16,98$  Jahren im Wert halbiert. Eine durchaus realistische Annahme, wenn man an eine Volkswirtschaft denkt, die 17 Jahre nichts in ihre Infrastruktur und Produktionsanlagen investiert.

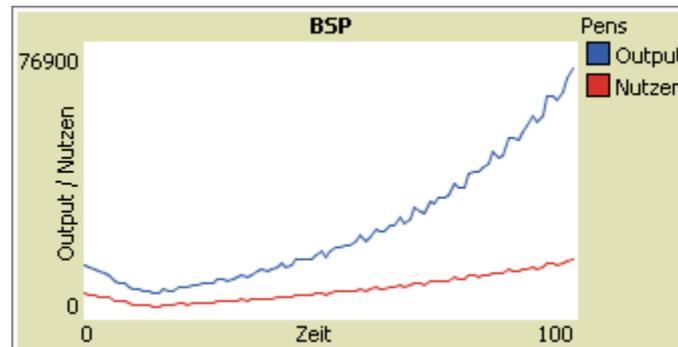
Die Abschreibungen vom Humankapital  $\delta$  von 0,04 pro Periode erscheinen ebenfalls realistisch. Man denke an ein Wirtschaftssubjekt, das nichts von den letzten 17 Jahren technologischer Entwicklung mitbekommen hat und noch nie etwas mit Mobiltelefonen, E-Mails oder Computern zu tun hatte. Der Wert dieses Wirtschaftssubjektes am Arbeitsmarkt liegt mit Bestimmtheit signifikant unter dem jener Mitbewerber, die sich in den letzten 17 Jahren den Umgang mit den neuen Technologien beigebracht haben.

Der Gegenwartspräferenzfaktor  $\rho$  schließlich wird bei 0,05 angesiedelt. Er repräsentiert jene Rate, um die Güter im Schnitt pro Periode billiger werden müssen, damit das Wirtschaftssubjekt indifferent gegenüber einem Kauf in dieser oder in der nächsten Periode ist. Ist  $\rho$  groß, muss die Rate der

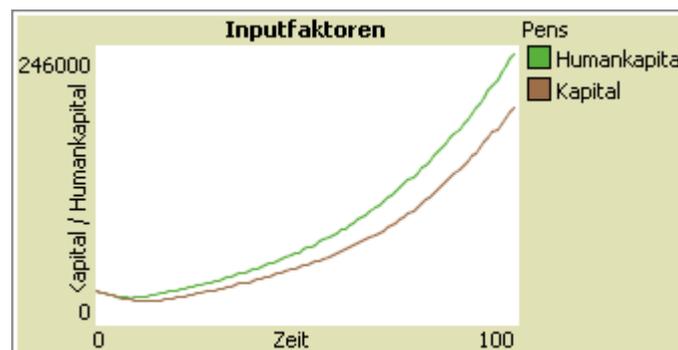
Verbilligung von Gütern hoch sein, damit das Wirtschaftssubjekt den Konsum in zukünftige Perioden verlagert. Ist  $\rho$  gering, tendiert das Wirtschaftssubjekt eher dazu, den Konsum auch bei nur geringer Güterverbilligung in zukünftige Perioden zu verlagern.

#### 4.1.3 Die Simulation unter $x_1$

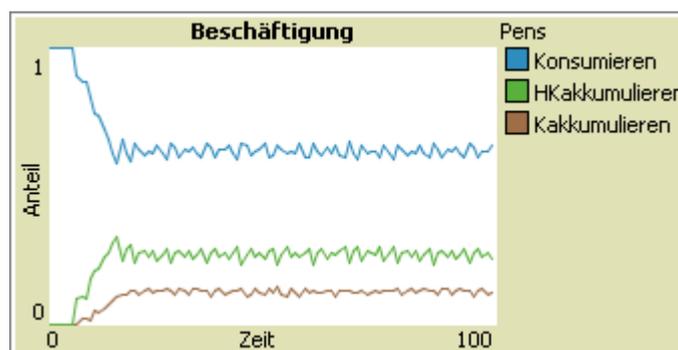
Mit dem Parameterset  $x_1$  wird nun die Simulation gestartet. Als Ausgabegrafiken erhält man:



$x_{1.1}$  Output und Nutzenverlauf (aggregiert)



$x_{1.2}$  Verlauf der Inputfaktoren (aggregiert)



$x_{1.3}$  Anteil der gespielten Strategien an der Gesamtheit

In Grafik  $x_{1.1}$  und  $x_{1.3}$  ist der Anpassungsprozess der Wirtschaft in den ersten 15 Perioden an ihren Steady-State deutlich zu erkennen. Dieses Ergebnis ist wenig überraschend, da die Startwerte der endogenen Variablen  $h$ ,  $k$  und  $f$  außerhalb ihrer Steady-State-Werte gemäß Tabelle (2) im vorigen Kapitel zufällig generiert wurden.

Ab Periode 15 stellt sich stabiles Wachstum der Größen Output  $y$  und Nutzen  $u$  ein. Während sich das Output in den 85 folgenden Perioden von etwa 7300 auf 69000 fast verzehnfacht, hat sich der Nutzen von 3500 auf 16400 weniger als verfünffacht. Dieses Ergebnis ist empirisch nachvollziehbar: Das reale Output hat sich in den letzten 50 Jahren wesentlich stärker erhöht als der empfundene Nutzen des Einzelnen. Die Inputfaktoren Kapital und Humankapital wachsen in  $x_{1,2}$  nach der ersten Anpassungsphase kontinuierlich, und ihr Verhältnis wächst über die Zeit annähernd konstant. Das deckt sich mit den theoretischen Erkenntnissen über die Wachstumsraten der Faktorenverhältnisse im Steady-State (siehe Gleichung (2.2.7 (34)), in der die Wachstumsrate  $\left(\frac{K}{H}\right)^*$  nur von festen exogenen Parametern abhängt). Einfacher lässt sich diese Erkenntnis auch mit Grafik  $x_{1,3}$  untermauern: sie sagt aus, dass das Verhältnis der gespielten Strategien langfristig relativ konstant ist. Der Anteil an Agenten, die pro Periode konsumieren, bewegt sich zwischen 60 und 65 Prozent. Der Anteil der Agenten, die Humankapital akkumulieren, liegt zwischen 20 und 28 Prozent. Physisches Kapital wird von etwa 10 bis 14 Prozent der Agenten pro Periode akkumuliert.

Fazit: Mit dem Parameterset  $x_1$  erreicht die Lucas-Uzawa-Wirtschaft einen stabilen Wachstumspfad, entlang dessen die Inputfaktoren Kapital und Humankapital in einem konstanten Verhältnis akkumuliert werden. Output und Nutzen steigen ebenfalls über die Zeit. Das zu beobachtende Wirtschaftswachstum kann in Einklang mit Lucas-Uzawa über Investitionen in die beiden Inputfaktoren Kapital und Humankapital erklärt werden und ist somit im Gegensatz zum Solow-Modell nur von endogenen Variablen abhängig.

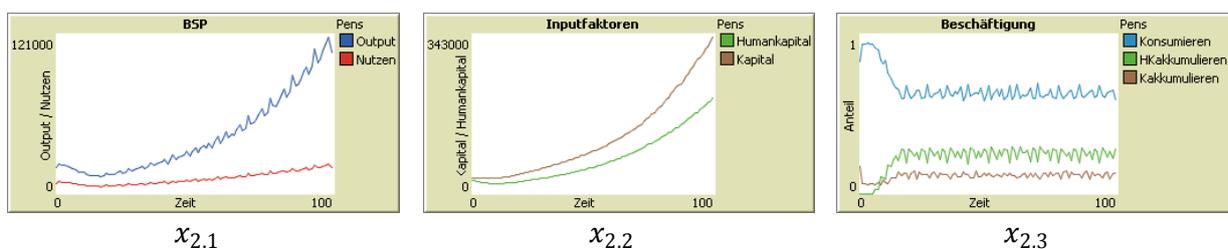
## 4.2 Sensitivitätsanalysen

### 4.2.1 Parameter A

In der Folge soll nun untersucht werden, wie sich die Wirtschaft verhält, wenn einzelne Parameterwerte verändert werden.

$$(3) \quad x_2 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Ausgabe erhält man:



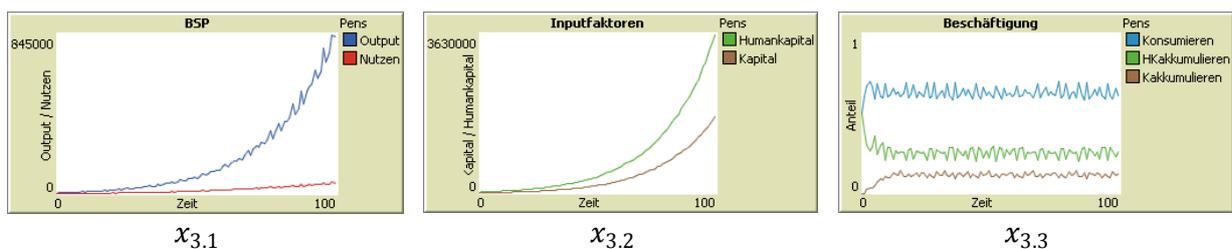
Durch Steigerung des Technologieparameters  $A$  wachsen Output und Nutzen schneller, zumindest in absoluten Zahlen - die prozentuelle Steigerung von Output und Nutzen sind bei den Parametersets  $x_1$  und  $x_2$  ungefähr gleich. Aus den Grafiken  $x_{2,2}$  und  $x_{2,3}$  lässt sich erkennen, dass die Agenten dieselben Strategien wie beim Parameterset  $x_1$  spielen, die Kapitalakkumulation im Parameterset  $x_{2,2}$  aber wesentlich effizienter abläuft, wodurch das physische Kapital insgesamt einen höheren Anteil am Produktionsinput einnimmt als das Humankapital.

#### 4.2.2 Parameter $B$

Als nächstes wird eine Veränderung der Bildungssystemeffizienz untersucht:

$$(4) \quad x_3 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

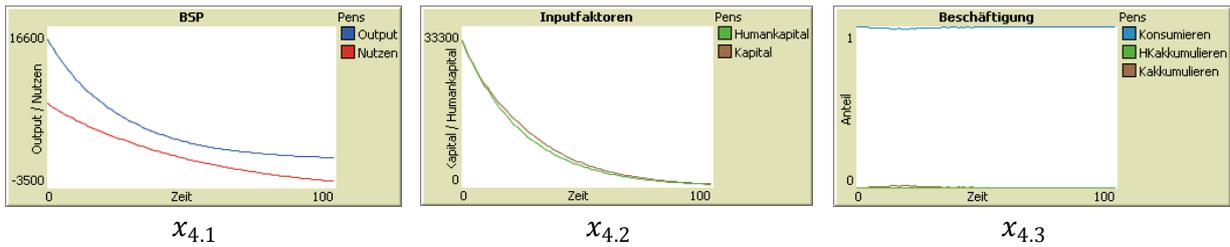
Man erhält:



Man kann deutlich erkennen, dass Output und Nutzen wesentlich stärker ansteigen als in den Parametersets  $x_1$  und  $x_2$ , das Verhältnis der gespielten Strategien bleibt hingegen gleich. Das vorliegende Modell reagiert extrem sensitiv auf eine Veränderung der Bildungseffizienz  $B$ . Begründet kann dieses Ergebnis mit der Linearität des Bildungszuwachses werden: Es gibt keine fallenden Grenzerträge der Humankapitalakkumulation.

Aufgrund der Wichtigkeit des Parameters  $B$  für dieses Modell soll auch noch der Fall einer Verkleinerung von  $B$  untersucht werden:

$$(5) \quad x_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

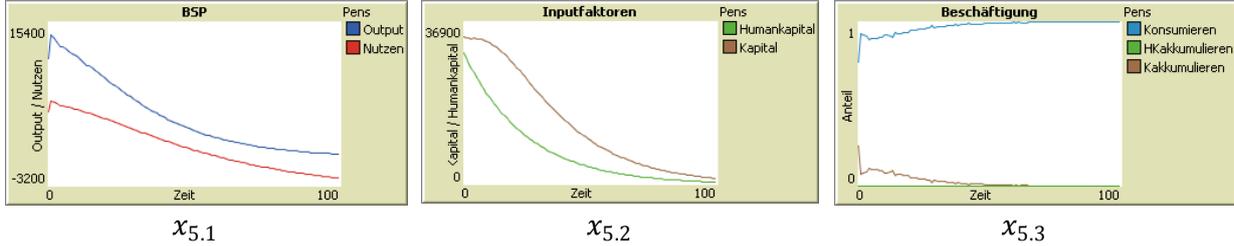


Output und Nutzen fallen deutlich ab. Fast alle Agenten spielen jede Periode "Konsumieren", die Inputfaktoren verlieren über die Zeit mangels Investitionen an Wert. Die Wirtschaft stagniert, der Gesamtnutzen erreicht sogar negatives Niveau.  $B$  ist derart gering, dass sich die Strategiewahl "Humankapital akkumulieren" innerhalb des betrachteten Zeitraums von  $f$  Perioden für die Agenten nicht rentiert. Die Abschreibungsrate des Humankapitals ist im Verhältnis zu ihrer Akkumulationsrate zu groß, als dass sich eine Periode Konsum-Entgang zu Gunsten von Wissensakkumulation rentieren würde. In der Folge rentiert sich auch die Investition in Sachkapital nicht mehr - der Inputfaktor Humankapital hat den größeren Grenzertrag und fällt ständig - dieser freie Fall kann nicht durch Sachkapital-Akkumulation ausgeglichen werden. Die Wirtschaft verarmt. Empirisch kann dieses Ergebnis bei Ländern wie Nordkorea beobachtet werden: Den Wirtschaftsteilnehmern wird nur so viel an Wissen mitgegeben, wie sie gerade benötigen, um einfachen Tätigkeiten nachzugehen. Ein Zuviel an Wissen wird als Gefahrenpotential für die Führungselite betrachtet. Über die Jahre verarmt ein derart regiertes Land zwangsläufig.

**4.2.3 Parameter  $\alpha$**

Als Nächstes wird die Änderung der Faktoreffizienz untersucht:

$$(6) \quad x_5 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



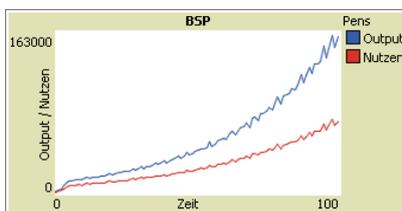
Output und Nutzen fallen. Anfangs wird noch von einigen Agenten physisches Kapital akkumuliert, Humankapital wird zu keiner Zeit akkumuliert. Der Grenzertrag des Humankapitals ist für die Agenten zu gering, um eine Periode Konsum-Entgang zu Gunsten von Kapitalakkumulation auf sich zu nehmen. Das Humankapital fällt durch Abschreibungen - irgendwann ist es so gering, dass sich auch Investitionen ins physische Kapital nicht mehr auszahlen und nur noch konsumiert wird.

Daraus kann ein interessantes Ergebnis abgeleitet werden, das erst auf den zweiten Blick intuitiv erscheint: Je geringer der Anteil des Inputfaktors Humankapitals am Output ist, desto effizienter muss das Bildungssystem sein. Bei Werten von 0,4 für  $B$  stellt sich wieder stabiles Wachstum ein.

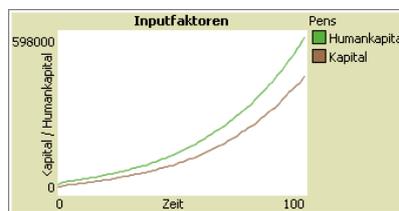
#### 4.2.4 Parameter $\theta$

Die Variation des Parameters  $\theta$  der Nutzenfunktion liefert:

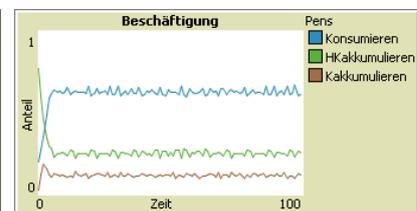
$$(7) \quad x_6 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_7 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



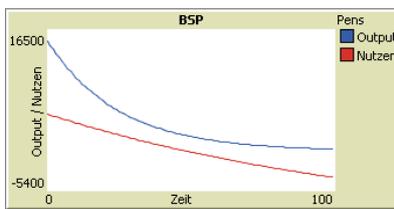
$x_{6.1}$



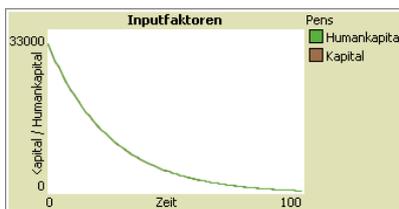
$x_{6.2}$



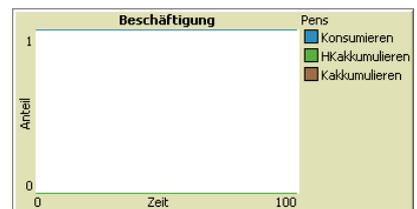
$x_{6.3}$



$x_{7.1}$



$x_{7.2}$



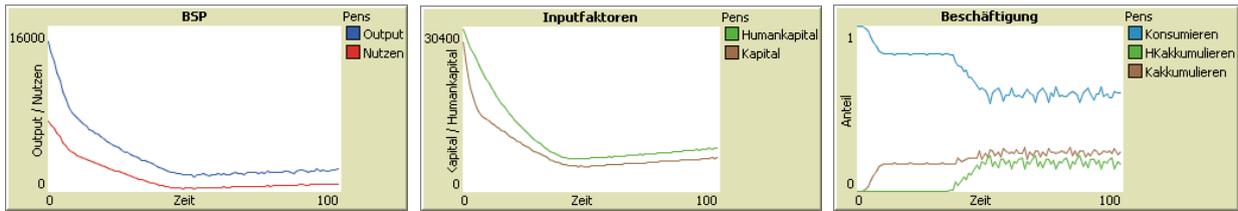
$x_{7.3}$

Gleichungen (10), (12) und (14) liefern die Begründung für das Verhalten der Agenten: Je kleiner  $\theta$  ist, umso näher liegt der Nutzenverlauf beim Outputverlauf. In allen Entscheidungsvariablen wird das Output wegen  $(Ak^\alpha h^{1-\alpha})^{1-\theta}$  mit  $1 - \theta$  gewichtet. Ein kleines  $\theta$  gewichtet  $Ak^\alpha h^{1-\alpha}$  stark im Vergleich zum Strafterm  $\frac{(1-\rho)^f - 1}{\rho}$  für geringen Konsum und Konsumentgang. Ein  $\theta$  nahe bei 1 steigert die relative Bedeutung des Strafterms gegenüber dem Output. Je näher  $\theta$  bei 1 liegt, umso schlimmer wird Konsum-Entgang bewertet. Je näher  $\theta$  bei 0 liegt, umso eher ist der Agent bereit, zugunsten von Investitionen auf Konsum zu verzichten.

#### 4.2.5 Parameter $\sigma$ und $\delta$

Variation der Abschreibungsfaktoren  $\sigma$  und  $\delta$ :

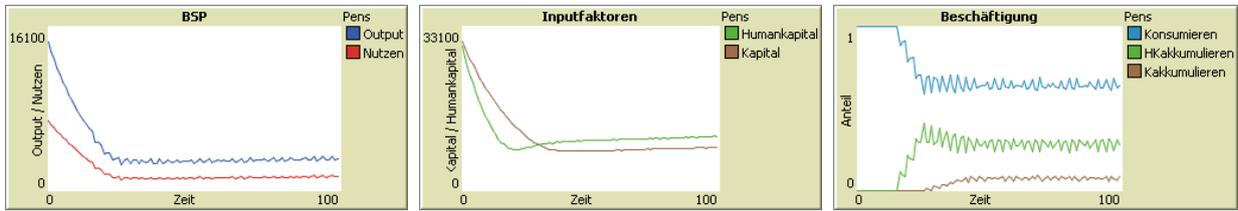
$$(8) \quad x_8 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,08 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_9 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,03 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$x_{8,1}$

$x_{8,2}$

$x_{8,3}$



$x_{9,1}$

$x_{9,2}$

$x_{9,3}$

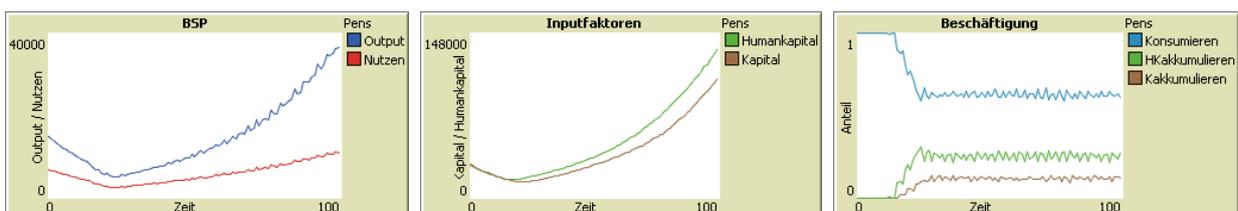
Die Grafiken  $x_{8,1}$  bis  $x_{8,3}$  zeigen die Verlangsamung des Wirtschaftswachstums. Ein gleichgewichtiger Wachstumspfad ist gerade noch möglich. Ist  $\delta$  nur noch ein wenig größer, konvergiert das Output gegen 0 - Wachstum ist dann nicht mehr möglich. Deutlich erkennbar ist auch die langsamere Anpassung der Wirtschaft an ihren gleichgewichtigen Wachstumspfad. Das kann mit der zufälligen Initialisierung der endogenen Variablen erklärt werden: Der Parameter  $f$  muß erst durch wiederholtes Konsumieren so stark ansteigen, bis sich Investitionen überhaupt rentieren. Auffällig ist auch, dass sich die Anzahl der Agenten, die Kapital akkumulieren, deutlich erhöht hat und im Gegenzug der Anteil der Agenten die konsumieren, gesunken ist. Im Steady-State wird sogar häufiger Kapital als Humankapital akkumuliert.

Aus  $x_{9,1}$  bis  $x_{9,3}$  lässt sich ablesen: Schon eine geringfügige Erhöhung von  $\delta$  führt die Wirtschaft nahe an den Rand des Kollaps. Es zeigt sich die Bedeutung des Größenverhältnisses zwischen  $B$  und  $\delta$ . In Zeiten hoher Innovation - wie wir sie zum Beispiel gegenwärtig erleben - steht und fällt das Wirtschaftswachstum mit der Effizienz des Bildungssystems.

#### 4.2.6 Parameter $\rho$

Variation von  $\rho$ :

$$(9) \quad x_{10} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$



$x_{10,1}$

$x_{10,2}$

$x_{10,3}$

Qualitativ sind die Ergebnisse  $x_{10,1}$  bis  $x_{10,3}$  den Ergebnissen  $x_{1,3}$  bis  $x_{1,3}$  ähnlich. Output und Nutzen fallen bei  $x_{10}$  auf dem Weg zum Steady-State stärker als bei  $x_1$ . Das kann wieder durch die nötige Anpassung der endogenen Variable  $f$  erklärt werden. Bei großen Werten von  $\rho$  muss zunächst länger konsumiert werden, um  $f$  soweit zu steigern, dass sich Investitionen über dem betrachteten Zeitraum schließlich lohnen. Ist  $\rho$  zu groß, schafft die Wirtschaft diesen Anpassungsprozess nicht mehr - das Output geht gegen 0, die Agenten konsumieren in jeder Periode lieber, anstatt in ihre Zukunft zu investieren.

### 4.3 Stochastische Simulation

#### 4.3.1 Parameterset $x_{11}$

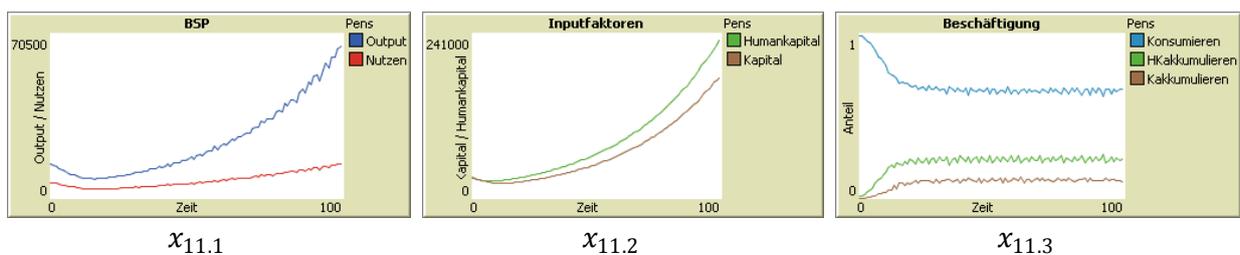
Abschließend werden noch die Ergebnisse der Simulation mit stochastischen Werten für die Parameter  $\alpha$ ,  $\theta$  und  $\rho$  gezeigt. Intention hinter den stochastischen Parametern ist es, eine höhere Heterogenität der Population zu erreichen. In  $x_{11}$  werden alle drei Parameter stochastisch generiert:

$$(10) \quad x_{11} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ \varepsilon(\alpha) = 0,33 \\ \varepsilon(\theta) = 0,5 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ \varepsilon(\rho) = 0,05 \end{pmatrix}$$

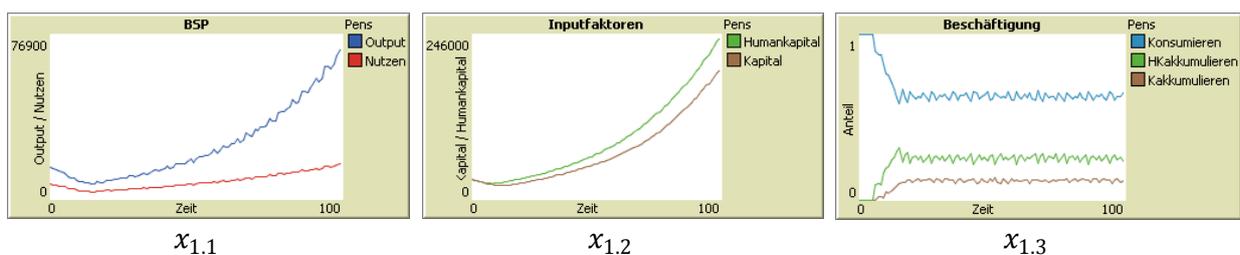
Die Bildungsgesetze der Zufallsvariablen finden sich in Tabelle (1) in Kapitel 3.1.2

#### 4.3.2 Die Simulation unter $x_{11}$

Als Ausgabe erhält man:

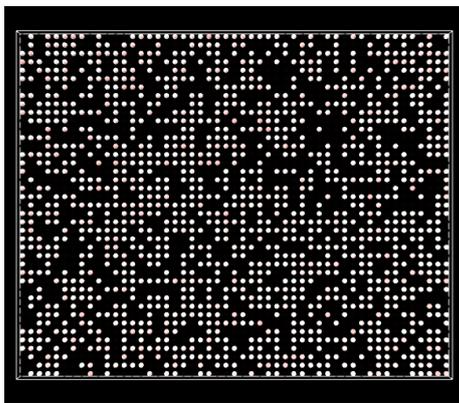


Zum Vergleich werden an dieser Stelle noch einmal die Ergebnisse der Simulation mit deterministischen Startwerten  $x_1$  angeführt:

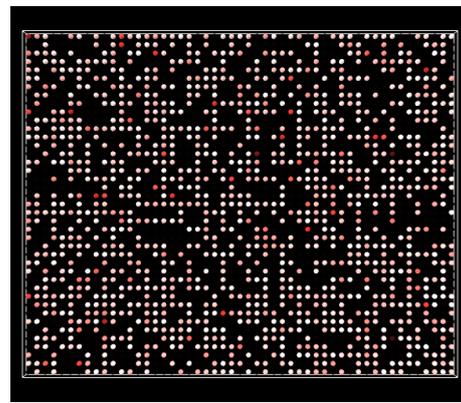


Man erkennt sofort: Das Ergebnis der Simulation mit dem stochastischen Parametervektor  $x_{11}$  ist dem Ergebnis der Simulation mit den deterministischen Startwerten  $x_1$  sehr ähnlich. Output und Nutzen bewegen sich nach 100 Perioden in denselben Größenordnungen, das Verhältnis der Wachstumsraten und die Aufteilung der Strategiewahl sind annähernd gleich. Die von  $x_{11}$  erzeugten Kurven sind lediglich etwas glatter. Zurückzuführen ist dieses Ergebnis auf die Stabilität des Steady-States in der Lucas-Uzawa-Wirtschaft, die bei geringfügigen Veränderungen der Parameterwerte  $\alpha$ ,  $\theta$  und  $\rho$  nicht sofort von den gleichgewichtigen Wachstumspfaden abweicht.  $\alpha$ ,  $\theta$  und  $\rho$  sind normalverteilte Zufallsgrößen. Der Durchschnitt über ihre Realisationen muss, gemäß Konstruktion und gemäß dem Gesetz der großen Zahlen, in der Nähe ihrer Erwartungswerte liegen.

Die einzigen Unterschiede lassen sich bei Ausgabe des Aktionsraums nach dem Nutzen der Agenten erkennen:



$x_{1.4}$



$x_{11.4}$

Wegen der unterschiedlichen Struktur der Nutzenfunktionen und der unterschiedlichen Höhe der Gegenwartspräferenz  $\rho$  entstehen in  $x_{11.4}$  deutlich unterscheidbare Nutzenniveaus der einzelnen Agenten. Diese Unterschiede führen aus der Sicht eines sozialen Planers beziehungsweise aus der Sicht von Gesamtnutzen maximierenden Regierungen, zu den Problematiken des sozialen Ausgleichs. Die Mittel, um diesen sozialen Ausgleich zu erreichen und den Gesamtnutzen zu maximieren, könnten beispielsweise Besteuerung und Transferleistungen sein. Diese beiden Größen müssen im Gegenzug wieder in die Entscheidungsvariablen der einzelnen Agenten einfließen. Derartige Modifikationen verkomplizieren das Modell jedoch ungemein und sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

#### 4.4 Schocks

Es besteht die Möglichkeit, den Verlauf der Simulation mit Schocks (plötzliche Veränderungen von Modellparametern) zu beeinflussen. Da diese Beeinflussungen qualitativ stets den bereits in 4.2 erklärten Ergebnissen entsprechen, wird an dieser Stelle nicht mehr im Detail auf die Ergebnisse eingegangen.

## 4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit dem Lucas-Uzawa-Modell kann in der Simulation langfristiges und endogenes Wirtschaftswachstum erklärt werden. Stabile Wachstumspfade hängen jedoch in hohem Ausmaß von geeignet gewählten Parametersets  $x_i$  ab. Um Parameter mit Hilfe ökonomischer Methoden zu schätzen, müsste eine Vielzahl an Restriktionen angenommen werden, um einen stabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad zu erhalten.

Alle Wachstumsraten des Modells sind letztlich auf Humankapitalakkumulation zurückzuführen. Stagniert die Humankapitalakkumulation, kann auch die Akkumulation von Sachkapital den langfristigen Abwärtstrend nicht stoppen. Das ist insgesamt ein realitätsnahes Ergebnis, das die Wichtigkeit eines funktionierenden Bildungssektors für jede Volkswirtschaft unterstreicht. Das Lucas-Uzawa-Modell hilft, stagnierende Volkswirtschaften wie Nordkorea zu erklären. Es erklärt das Versenden von Kapitaltransfers in Entwicklungsländer, die kein langfristiges Wachstum des Outputs nach sich ziehen, wie auch das Zustandekommen des deutschen Wirtschaftswunders nach dem Zweiten Weltkrieg.

Als Kritikpunkt am Lucas-Uzawa-Modell lässt sich die idealisierte Struktur des Bildungssektors anführen: Es gibt keine fallenden Grenzerträge in der Kapitalakkumulation und es fließt kein physisches Kapital in die Produktion von Humankapital ein. Letzteren Kritikpunkt konnten [3] Barro und Sala-i-Martin entkräften. Sie analysierten ein allgemeines Lucas-Uzawa-Modell mit physischem Kapital in der Humankapitalproduktion und konnten nachweisen, dass sich bezüglich des Steady-States und der dynamischen Anpassungsprozesse keine wesentlichen Unterschiede gegenüber dem ursprünglichen Modell ergeben.

Um auf den ersten Kritikpunkt einzugehen, wird im nächsten Kapitel eine Variante des Lucas-Uzawa-Modells betrachtet, die fallende Grenzerträge der Kapitalakkumulation aufweist.

## 5 Ein modifiziertes Lucas-Uzawa-Modell

### 5.1 Modifikation der Gleichungen

Um auf den Kritikpunkt der linearen Humankapitalakkumulation einzugehen, wird in diesem Kapitel die Humankapitalakkumulation mit fallenden Grenzerträgen eingeführt. Die fundamentalen Gleichungen des Lucas-Uzawa-Modells lauteten bisher:

$$(1) \quad y_t = Ak_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} = (v_t)c_t + (1 - v_t)i_t$$

$$(2) \quad \begin{aligned} k_{t+1} &= (1 - \sigma)(k_t + (1 - v_t)i_t) \\ h_{t+1} &= (1 - \delta)(h_t + B(1 - u_t)h_t) \end{aligned}$$

Die Humankapitalakkumulationsgleichung in (2) soll nun fallende Grenzerträge aufweisen. Die naheliegendste Modifikation der Kapitalakkumulationsgleichung wird in Gleichung (3) vorgestellt:

$$(3) \quad h_{t+1} = (1 - \delta)(h_t + (1 - u_t)h_t^{1-B})$$

$B$  mißt dabei noch immer die Effizienz des Bildungssystems. Nahe bei 1 liegende Werte von  $B$  implizieren eine geringe Effizienz des Bildungssektors, nahe bei 0 liegende Werte von  $B$  eine hohe.

### 5.2 Anpassung der Simulation

Die Entscheidungsvariablen  $cons$  und  $invk$  verändern sich durch die modifizierte Kapitalakkumulationsgleichung nicht. Lediglich  $invh$  muß angepasst werden:

#### 5.2.1 Die Berechnung von $invh$

Tabelle 1 stellt das Output und den Nutzen in Abhängigkeit von  $t$  dar:

$t$	$y_t = c_t$	Gegenwartswert von $u_t(c_t)$
1	0	$\frac{-1}{1 - \theta}$
2	$A((1 - \sigma)k)^\alpha ((1 - \delta)(h + h^{1-B}))^{1-\alpha}$	$q \frac{(Ak^\alpha (h + h^{1-B})^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1 - \theta} - \frac{(1 - \rho)}{1 - \theta}$
3	$A((1 - \sigma)^2 k)^\alpha ((1 - \delta)^2 (h + h^{1-B}))^{1-\alpha}$	$q^2 \frac{(Ak^\alpha (h + h^{1-B})^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1 - \theta} - \frac{(1 - \rho)^2}{1 - \theta}$

⋮	⋮	⋮
f	$A((1-\sigma)^{f-1}k)^\alpha((1-\delta)^{f-1}(h+h^{1-B}))^{1-\alpha}$	$q^{f-1} \frac{(Ak^\alpha(h+h^{1-B})^{1-\alpha})^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{(1-\rho)^{f-1}}{1-\theta}$

Tabelle 1

Der Gegenwartswert des Nutzenstroms über  $f$  Perioden lautet:

$$(4) \quad invh = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha(h+h^{1-B})^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \sum_{j=0}^{f-2} q^j \right) - \sum_{l=0}^{f-1} (1-\rho)^l \right)$$

Nach Anwendung der geometrischen Summenformel erhält man:

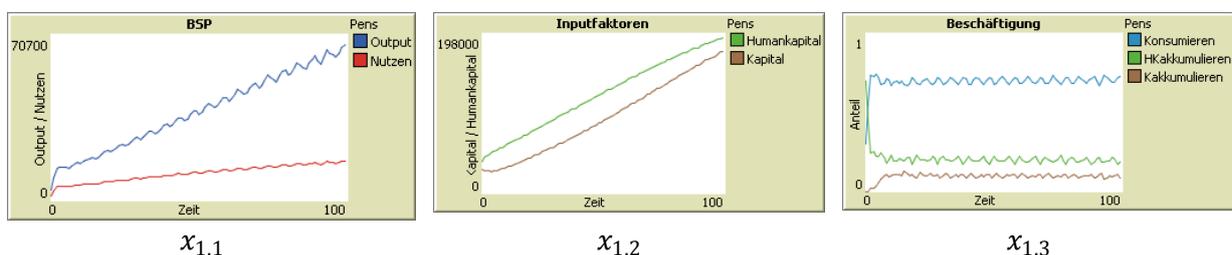
$$(5) \quad invh = \frac{1}{1-\theta} \left( (Ak^\alpha(h+h^{1-B})^{1-\alpha})^{1-\theta} q \left( \frac{q^{f-1}-1}{q-1} \right) + \frac{(1-\rho)^f-1}{\rho} \right)$$

### 5.3 Ergebnisse der deterministischen Simulation

Wenn man für die Simulation das Parameterset  $x_1$  heranzieht

$$(6) \quad x_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,33 \\ 0,5 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

erhält man



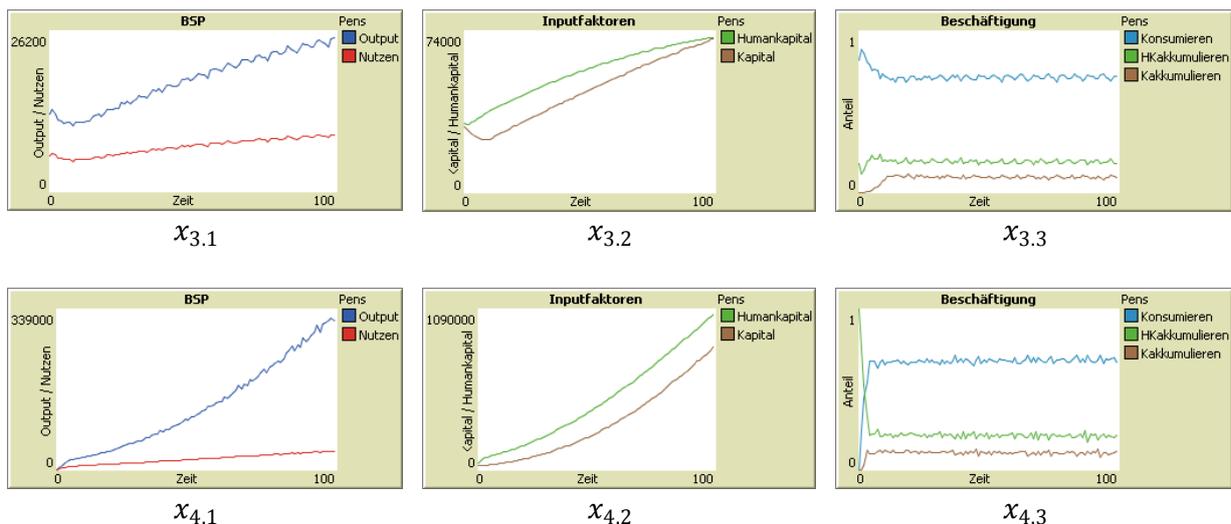
Es fällt sofort auf, dass die Anpassungsphase der Wirtschaft an ihren Steady-State deutlich kürzer ist. Output und Nutzen bewegen sich in denselben Größenordnungen wie im Originalmodell, aber die Inputfaktoren liegen deutlich enger beieinander. Die Grafik  $x_{1.3}$  verrät die wohl interessanteste Veränderung: Im Steady-State konsumieren pro Periode rund 70 Prozent der Agenten, rund 20 Prozent akkumulieren Humankapital und rund 10 Prozent physisches Kapital. Dieses Ergebnis entspricht auf den ersten Blick nicht der Intuition: Trotz fallender Skalenerträge des Inputfaktors

Humankapital wird nun öfter konsumiert - und das Wohlstandsniveau ist trotzdem mit jenem vergleichbar, welches bei linearer Humankapitalakkumulation erzielt wird. Erst auf den zweiten Blick kann man die Ursachen erkennen: Das Humankapital wächst für große  $h$  in geringerem Ausmaß als für kleine  $h$ . Investitionen in Humankapital zahlen sich daher bei einem hohen Stand von  $h$  seltener aus. Seltener Humankapitalakkumulation bedeutet im Gegenzug einen höheren Anteil der Strategie "Konsumieren" an der Gesamtheit der gespielten Strategien. Die beiden Inputfaktoren Kapital und Humankapital wachsen homogener - den Agenten bleibt öfter die Möglichkeit zu konsumieren.

## 5.4 Sensitivitätsanalyse

Schließlich soll noch die Sensitivität von  $B$  im angepassten Modell untersucht werden. Es werden wieder die Parametersets  $x_3$  und  $x_4$  herangezogen:

$$(7) \quad x_3 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \alpha \\ \theta \\ \sigma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} = x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Das Parameterset  $x_3$  erzeugt noch immer ein stabiles Outputwachstum. Das vergleichbare Parameterset 4.2.  $x_4$  - beide verringern die Effizienz des Bildungssektors - ist bereits instabil und führt zu einem Wirtschaftskollaps. Die Faktoren Kapital und Humankapital gleichen sich einander an - im Verlauf weiterer Perioden würde der aggregierte Wert des Inputfaktors Kapital irgendwann sogar den Wert des Inputfaktors Humankapital übersteigen.

Das Parameterset  $x_4$  - vergleichbar mit dem Parameterset 4.2.2  $x_3$  erzeugt ebenfalls einen stabilen Wachstumspfad. Das Wachstum explodiert jedoch nicht in der gleichen Weise, wie das bei 4.2.2  $x_3$  der Fall ist. Das erscheint ebenfalls realistischer: Ein Anstieg der Bildungseffizienz um 33% generiert im angepassten Lucas-Uzawa-Modell noch immer ein 4-mal höheres Output am Ende von 100 Perioden - im ursprünglichen Modell generiert derselbe prozentuelle Anstieg in der Bildungseffizienz ein 11-mal höheres Output in der einhundertsten Periode.

## 5.5 Auswirkungen der Modifikation

Ein derart modifiziertes Lucas-Uzawa-Modell hat zwei Vorteile:

- Es erscheint realistischer: Je höher der Wissensstand bereits ist, umso schwieriger ist die zusätzliche Humankapitalakkumulation (Prinzip der abnehmenden Grenzakkumulation). Im ursprünglichen Modell wird Humankapitalakkumulation mit wachsendem Humankapital immer leichter.
- Es ist stabiler gegenüber Veränderungen der exogenen Variablen; Die Simulation hat gezeigt, dass der Parameter  $B$  der ursprünglichen Lucas-Uzawa-Volkswirtschaft bei ökonometrischen Schätzungen sehr genau getroffen werden muss, um einen stabilen Wachstumspfad zu erhalten. Das scheitert in der Realität oftmals schon an den zur Verfügung stehenden Daten. Bereits kleinste Abweichungen von  $B$  können zu völlig verzerrten Modellaussagen führen.

## 6 Erkenntnisse

### 6.1 Konklusion

Das Lucas-Uzawa-Modell bewährt sich ausgezeichnet in der empirischen Überprüfung durch die Methoden der Spieltheorie. Wie im theoretischen Modell kann in der spieltheoretischen Simulation das Zustandekommen von Wirtschaftswachstum durch die individuellen nutzenmaximierenden Entscheidungen von vielen heterogenen Wirtschaftsakteuren erklärt werden. Die in der Simulation entstandenen Wachstumspfade sind bezüglich der Variation ihrer Parameter hinreichend stabil, so dass von einer empirischen Gültigkeit des Lucas-Uzawa-Modells ausgegangen werden kann.

Aber auch ein Kritikpunkt am Lucas-Uzawa-Modell fand sich in der Simulation bestätigt: Die Annahme der linearen Wissensakkumulation sollte tatsächlich im theoretischen Modell zugunsten einer Akkumulationsgleichung mit fallendem Grenzprodukt aufgegeben werden. Die entsprechenden theoretischen Steady-State-Werte wurden zwar in dieser Arbeit nicht explizit hergeleitet, durch den Testlauf des modifizierten Lucas-Uzawa-Modells in der Simulation kann aber von einem stabileren Ergebnis für die gleichgewichtigen Wachstumsraten in der modifizierten Version ausgegangen werden.

Die derart bewiesene empirische Gültigkeit des Lucas-Uzawa-Modells impliziert weitreichende Folgen für jede wachstumsorientierte Volkswirtschaft:

- Das Wirtschaftswachstum steht und fällt mit der Effizienz des Bildungssektors. Gerade in Zeiten, in denen sich vorhandenes Wissen innerhalb kürzester Zeit durch neue Erkenntnisse überholt, müssen vorausschauende wohlfahrtsmaximierende Regierungen alle erdenklichen Anstrengungen unternehmen, um die Effizienz des Bildungssektors zu erhalten und sogar auszubauen. Wissen kann bereits heute als der wesentlichste Inputfaktor der Produktion angesehen werden, und es liegt nahe, dass sich seine Bedeutung mit wachsendem Gesamtwissensstand in der Zukunft noch verstärken wird. Ineffiziente Bildungssysteme stellen daher für das Wachstum der Volkswirtschaft - und damit den Wohlstand aller - eine größere Gefahr dar, als zu geringe Investitionen in Sachgüter und Infrastruktur.
- Der Zugang zu Wissen wird bei Lucas-Uzawa als kostenlos angenommen. Regierungen, die den Empfehlungen des Lucas-Uzawa-Modells folgen wollen, sind daher angehalten, den Zugang zu Bildung für den Einzelnen so kostengünstig wie möglich zu gestalten. Je kostengünstiger dieser Zugang für den einzelnen Wirtschaftsteilnehmer ist, umso eher ist er bereit, Wissen zu akkumulieren. Je mehr Wissen akkumuliert wird, umso höher ist das Output und damit der Wohlstand der gesamten Volkswirtschaft.
- Das Grenzprodukt des Humankapitals muss auch im staatlich finanzierten Ausbildungssektor entsprechend entlohnt werden. Es muss für nutzenmaximierende Wirtschaftsteilnehmer, die über entsprechend viel Humankapital verfügen, einen Anreiz geben, dieses Humankapital in der Humankapitalakkumulation (Forschung und Lehre) einzusetzen. Es sollte vermehrt versucht werden, Personen mit exzellenter Ausbildung und hohem Wissensstand an Schulen und Universitäten zu halten, anstatt sie wegen zu geringer Entlohnung an die Privatwirtschaft zu verlieren.

- Regierungen sollten nach Möglichkeit wirtschaftliche Rahmenbedingungen schaffen, in denen sich Wissensakkumulation für den einzelnen Wirtschaftsteilnehmer rentiert. Bessere Entlohnung für höheres Bildungsniveau schafft für den Einzelnen den Anreiz, sich zu bilden. Höhere Bildung impliziert ein höheres Output. Ein höheres Output führt zu mehr Lohn für den Einzelnen und zu höheren Steuereinnahmen für den Staat, von denen wiederum die gesamte Volkswirtschaft profitiert.

## 6.2 Ausblick

Durch die vorliegende spieltheoretische Modellierung der Lucas-Uzawa-Wirtschaft ist der Grundstein für weiterführende volkswirtschaftliche Analysen gelegt: Aufbauend auf dem vorliegenden Simulations-Modell könnten etwa Probleme der optimalen sozialen Wohlfahrt (Erreichung globaler Nutzenmaxima) durch Besteuerung und Staatsausgaben betrachtet werden. Möglich wäre auch auf Basis dieses Modells Mehrgüter-Märkte und endogene Preisbildungen einzuführen. Weiters ließe sich das vorliegende Modell auch noch näher an die Wirklichkeit heranführen, wenn die Agenten nicht mit perfekter Kenntnis der Wirtschaftsmechanismen, sondern nur mit (rationalen) Erwartungen über die Zukunft ausgestattet werden.

Genauere Ausführungen dieser Gedankenexperimente werden mit einem Zitat von John von Neumann, dem Begründer der modernen Spieltheorie, künftigen Publikationen überlassen:

"There's no sense in being precise when you don't even know what you're talking about."

## 7 Anhang

### 7.1 Quellcode der Simulation

```
turtles-own [y k h u c f q t al r pa pb invh invk cons]
```

```
globals [Periode suminvh suminvk sumcons]
```

```
to Setup
```

```
; Initialisierung der Volkswirtschaft
```

```
ca
```

```
set Periode 0
```

```
set suminvh 0
```

```
set suminvk 0
```

```
set sumcons 0
```

```
loop[
```

```
  crt 1 [
```

```
; Initialisiere Agent (Position, Farbe, Größe)
```

```
  set color 5 + (random 14 * 10)
```

```
  set shape "circle"
```

```
  set size .6
```

```
  set xcor 25 - Periode mod 51
```

```
  set ycor 20 - floor(Periode / 51)
```

```
  set zcor 0
```

```
; Initialisiere Kapital und Humankapital
```

```
  set k 10 + random-float 10
```

```
  set h 10 + random-float 10
```

```
  set f 10 + random 10
```

```
; Initialisiere Nutzenfunktion
```

```
  ifelse (thetaDS = "deterministisch") [
```

```
    set t theta
```

```

]
[ set t random-normal theta 0.01
  if (t < 0.1) [set t 0.1]
  if (t > 0.9) [set t 0.9]
]

```

; Initialisiere Produktionsfunktion

```

ifelse (alphaDS = "deterministisch") [
  set al alpha
]
[ set al random-normal alpha 0.01
  if (al < 0.1) [set al 0.1]
  if (al > 0.9) [set al 0.9]
]

```

; Initialisiere Diskontfaktor

```

ifelse (rohDS = "deterministisch") [
  set r roh
]
[ set r random-normal roh 0.01
  if (r < 0.01) [set r 0.01]
  if (r > 0.9) [set r 0.9]
]

```

; Schrittweise Berechnung von q

```

set q (1 - sigma) ^ (al)
set q q * (1 - delta) ^ (1 - al)
set q q ^ (1 - t)
set q q * (1 - r)

```

; Initialisiere Entscheidungsvariablen

```

set invh 0
set invk 0

```

```

set cons 0

set pa A

set pb B

]

; Abbruchbedingung - Stop nach 2091 Agenten
if (Periode = 2090) [
  set Periode 0

  stop

]

set Periode (Periode + 1)

]

end

to Shock

; Neudefinition der agentenspezifischen Parameter
ask turtles [

; Initialisiere Nutzenfunktion

  ifelse (thetaDS = "deterministisch") [

    set t theta

  ]

  [ set t random-normal theta 0.01

    if (t < 0.1) [set t 0.1]

    if (t > 0.9) [set t 0.9]

  ]

; Initialisiere Produktionsfunktion

  ifelse (alphaDS = "deterministisch") [

    set al alpha

  ]

```

```

[ set al random-normal alpha 0.01
  if (al < 0.1) [set al 0.1]
  if (al > 0.9) [set al 0.9]
]
; Initialisiere Diskontfaktor
ifelse (rohDS = "deterministisch") [
  set r roh
]
[ set r random-normal roh 0.01
  if (r < 0.01) [set r 0.01]
  if (r > 0.9) [set r 0.9]
]
; Schrittweise Berechnung von q
set q (1 - sigma) ^ (al)
set q q * (1 - delta) ^ (1 - al)
set q q ^ (1 - t)
set q q * (1 - r)
; Initialisiere Entscheidungsvariablen
set invh 0
set invk 0
set cons 0
set pa A
set pb B
]
end

```

to Go

; Abbruch nach 100 Perioden

```

if (Periode = 100) [stop]

; Initialisiere Regierungsausgaben

set suminvh 0

set suminvk 0

set sumcons 0

ask turtles [

; Abschreibungen

set k (k * (1 - sigma))

set h (h * (1 - delta))

ifelse (Lucas-Uzawa = "original") [

; invh mit mit linearer Wissensakkumulation

set invh ((pa * (k ^ (al)) * ((h * (1 + pb)) ^ (1 - al))) ^ (1 - t) * q * (q ^ (f - 1) - 1) / (q - 1))

]

; invh mit fallender Grenzakkumulation

[set invh ((pa * (k ^ (al)) * ((h + (h ^ (1 - pb))) ^ (1 - al))) ^ (1 - t) * q * (q ^ (f - 1) - 1) / (q - 1))

]

set invk ((pa * ((k + (pa * k ^ (al) * h ^ (1 - al))) ^ (al)) * (h ^ (1 - al))) ^ (1 - t) * q * (q ^ (f - 1) - 1) / (q - 1))

set cons ((pa * k ^ (al) * h ^ (1 - al)) ^ (1 - t) * ((q ^ (f)) - 1) / (q - 1))

; Entscheidung: Konsumieren oder Investieren

ifelse ((cons >= invh) and (cons >= invk))

; Konsumieren

[set c (pa * k ^ (al) * h ^ (1 - al))

set y c

; Nutzenfunktion mit Strafterm für Nullkonsum

set u ((c ^ (1 - t) - 1) / (1 - t))

set f (f + 1)

set sumcons (sumcons + 1)

```

```

]
; Investieren
    [ifelse (invh > invk) [
; Humankapital akkumulieren
        ifelse (Lucas-Uzawa = "original") [
; Lineare Humankapitalakkumulation
            set h h + (h * pb)
        ]
    ]
    [
; Fallende Skalenerträge der Humankapitalakkumulation
        set h h + (h ^ (1 - pb))
    ]
    set c 0
    set u 0
    set y 0
    ifelse (f > 2) [set f (f - 2)] [set f 1]
    set suminvh (suminvh + 1)
    ]
    [
; Kapital akkumulieren
        set k (k + pa * (k ^ (al)) * (h ^ (1 - al)))
        set c 0
        set u 0
        set y 0
        if (f > 1) [set f (f - 1)]
        set suminvk (suminvk + 1)
    ]
    ]
    ]

```

; Anpassung der Zählvariablen

set Periode Periode + 1

; Ausgabe der Ergebnisse

Ausgabe

end

to Ausgabe

; Graphische Ausgabe der Wirtschaftsdaten

; Ausgabe von Output und Nutzen

set-current-plot "BSP"

set-current-plot-pen "Output"

ifelse (BSP-Darstellung = "Pro Kopf") [plot sum values-from turtles [y] / 2091] [plot sum values-from turtles [y]]

set-current-plot-pen "Nutzen"

ifelse (BSP-Darstellung = "Pro Kopf") [plot sum values-from turtles [u] / 2091] [plot sum values-from turtles [u]]

; Ausgabe der Inputfaktoren

set-current-plot "Inputfaktoren"

set-current-plot-pen "Kapital"

ifelse (Input-Darstellung = "Pro Kopf") [plot sum values-from turtles [k] / 2091] [plot sum values-from turtles [k]]

set-current-plot-pen "Humankapital"

ifelse (Input-Darstellung = "Pro Kopf") [plot sum values-from turtles [h] / 2091] [plot sum values-from turtles [h]]

; Ausgabe der Beschäftigung nach Sektoren

set-current-plot "Beschäftigung"

set-current-plot-pen "Konsumieren"

plot sumcons / 2091

set-current-plot-pen "Kakkumulieren"

plot suminvk / 2091

```

set-current-plot-pen "HKakkumulieren"

plot suminvh / 2091

; Einfärben der Agenten im Aktionsraum

if (Aktionsraum = "Output") [ask turtles [ifelse (y > 0) [set color 101 + (9 / (ln (max values-from
turtles[y] + 1)) * (ln (y + 1)))] [set color 100] ]]

if (Aktionsraum = "Nutzen") [ask turtles [ifelse (u > 0) [set color 11 + (9 / (ln (max values-from
turtles[u] + 1)) * (ln (u + 1)))] [set color 10] ]]

if (Aktionsraum = "Kapital") [ask turtles [ifelse (k > 0) [set color 31 + (9 / (ln (max values-from
turtles[k] + 1)) * (ln (k + 1)))] [set color 30] ]]

if (Aktionsraum = "Humankapital") [ask turtles [ifelse (h > 0) [set color 51 + (9 / (ln (max values-from
turtles[h] + 1)) * (ln (h + 1)))] [set color 50] ]]

if (Aktionsraum = "Foresight") [ask turtles [ifelse (f > 0) [set color 121 + (9 / (ln (max values-from
turtles[h] + 1)) * (ln (h + 1)))] [set color 120]]]

if (Aktionsraum = "Theta") [ask turtles [set color (111 + (9 / (max values-from turtles [t] - min values-
from turtles [t]) * (t - (min values-from turtles [t] )))) ]]]

end

```

## 7.2 Literaturverzeichnis

- [1] Abel, Andrew B. (2001): "Optimal taxation when consumers have endogenous benchmark levels of consumption", *Review of Economic Studies*, Volume 72
- [2] Barro, Robert J. (1990): "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Band 98
- [3] Barro, Robert J.; Sala-i-Martin, Xavier (2004): "Economic growth", second edition, MIT Press
- [4] Benhabib J.; Perli R. (1994): "Uniqueness and indeterminacy: on the dynamics of endogenous growth", *Journal of Economic Theory*, Volume 63
- [5] Blanchard, Olivier (1999) : "Macroeconomics", second edition, Prentice Hall
- [6] Boucekkiné, R.; Ruiz-Tamarit, R. (2007): "Special functions for the study of economic dynamics: the case of the Lucas-Uzawa model", *Journal of Mathematical Economics*
- [7] Caballe, J., Santos, M. (1993): " On endogenous growth with physical and human capital" *Journal of Political Economy* 101
- [8] Dreger, Christian (2006): "Wachstumstheorie", Skriptum Universität Kassel
- [9] Frenkel, Michael (1999): "Grundlagen der Wachstumstheorie", Vahlen, Handbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
- [10] Haunschmied, Josef L. (2003): "Operations Research 2", Skriptum TU-Wien
- [11] Lucas, Robert E. (1988): "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, Volume 22
- [12] Mankiw, Gregory N.; Romer, David; Weil, David N. (1992): "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* 152
- [13] Mehlmann, Alexander (1997): "Wer gewinnt das Spiel", Vieweg Verlagsgesellschaft, Auflage: 1 (1997)
- [14] Ortigueira, Salvador (1998): "Fiscal policy in an endogenous growth model with human capital accumulation", *Journal of Monetary Economics*, Volume 42
- [15] Romer, Paul M. (1990): "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*", Band 98
- [16] Solow, Robert M. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*. Jahrgang 70, Nr. 1
- [17] Solow, Robert M. (1994): "Perspectives on Growth Theory", *Journal of Economic Perspectives*, Volume 8
- [18] Uzawa, Hierofumi (1965): "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review*, Vol. 6

- [19] Varian, Hal R. (2003): "Grundzüge der Mikroökonomik", Oldenburg Verlag, 6. Auflage
- [20] Xie, D. (1994): "Divergence in Economic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equilibria" Journal of Economic Theory, Volume 63