

## DISSERTATION

### Untersuchungen zur schallnahen marginalen Ablösung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alfred Kluwick  
E322  
am Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

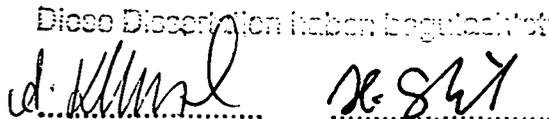
von

Dipl.-Ing. Bernhard Streibl  
Matr.-Nr.: 9225594  
Jörgerstraße 24/11  
1170 Wien

Wien, 18. Dezember 2005



Diese Dissertation haben begutachtet:



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Phänomen der marginalen Grenzschichtablösung an der Vorderkante eines dünnen Flügelprofils unter schallnahen Bedingungen in der Außenströmung sowie in der Grenze großer Reynoldszahlen untersucht. Die Außenströmung wird hierbei durch die Grenzschicht nur im Sinne einer schwachen - d.h. in der Grenze großer Reynoldszahlen verschwindenden - Störung beeinflusst. Ausgangspunkt der Untersuchung ist die Bestimmung der lokalen Struktur der Grenzschichtströmung um einen Punkt verschwindender Wandschubspannung mittels Ähnlichkeitsbetrachtungen. Es zeigt sich hierbei, dass in einem asymptotisch kurzen Gebiet um den Punkt verschwindender Wandschubspannung das hierarchische Konzept der Grenzschichttheorie versagt und die Wechselwirkung mit der schallnahen Außenströmung basierend auf einer asymptotischen Entwicklung der Navier Stokes Gleichungen in Betracht gezogen werden muss. Dieses Wechselwirkungsgebiet weist, wie aus der Untersuchung hervorgeht, eine für derartige Probleme charakteristische Dreischichtenstruktur auf. Die Untersuchung der Strömung im Lower-, Main- und Upper Deck führt, wie im Fall marginaler Ablösung in inkompressibler Strömung, auf eine Integralgleichung, die die Wandschubspannung im Wechselwirkungsgebiet mit dem am Grenzschichtrand wirkenden, durch die Wechselwirkung induzierten Druckgradienten in Beziehung setzt. In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, das auf einer simultanen Berechnung dieser Integralgleichung und der im Upper Deck durch die Wechselwirkung induzierten Störströmung beruht. Dieses wird auf den Fall schwach von reiner Unterschallströmung abweichender Strömung im Upper Deck zur Anwendung gebracht. Weiters wird die mit diesem Verfahren verbundene Möglichkeit genutzt, die Auswirkung vom im Upper Deck befindlichen, asymptotisch kleinen Objekten auf den Verlauf der Wandschubspannung zu untersuchen und so einen Beitrag zu den im Begriff des *Flow Control* zusammengefassten Methoden zu liefern.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>IV</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IV</b>
<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>V</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Kennzahlen und zugrundeliegende Gleichungen</b>	<b>2</b>
2.1 Voraussetzungen und Bestimmung der maßgebenden Kennzahlen . . . . .	2
2.2 Grundgleichungen . . . . .	3
2.2.1 Konstitutive Gleichungen . . . . .	4
2.2.2 Kontinuitätsgleichung für ebene, stationäre Strömung . . . . .	4
2.2.3 Bewegungsgleichungen für ebene, stationäre Strömung . . . . .	4
2.2.4 Energiegleichung für ebene, stationäre Strömung . . . . .	5
2.2.5 Grenzschichtgleichungen für ebene Strömung . . . . .	5
2.2.6 Gasdynamische Gleichung für ebene Strömung in natürlichen Koordinaten	7
2.2.7 Eulergleichungen für ebene Strömung in natürlichen Koordinaten . . .	7
2.2.8 Gleichung der Drehungsfreiheit (Wirbelfreiheit) . . . . .	7
2.2.9 Crocco-Busemannsche Lösung der Energiegleichung in der Grenzschicht	7
<b>3 Koordinatenentwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen um einen Punkt verschwindender Wandschubspannung</b>	<b>9</b>
3.1 Die Zweischichtenstruktur . . . . .	9
3.1.1 Wandnahe Schicht . . . . .	10
3.1.2 Zwischenschicht . . . . .	13
3.2 Die Grundlösung der marginalen Ablösung . . . . .	14
<b>4 Asymptotische Entwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen</b>	<b>16</b>
4.1 Die Grundlösung als Grenzlösung für kritischen Anstellwinkel . . . . .	16
4.2 Notwendigkeit der Erweiterung der Zweischichtenstruktur . . . . .	18
4.2.1 Main Deck . . . . .	18
4.2.2 Lower Deck . . . . .	19
4.3 Lösbarkeitsbedingung . . . . .	22
<b>5 Wechselwirkung mit der schallnahen Außenströmung</b>	<b>24</b>
5.1 Das transsonische Triple Deck . . . . .	24
5.1.1 Bestimmung der asymptotischen Struktur . . . . .	24
5.2 Main Deck . . . . .	28

5.3	Lower Deck . . . . .	29
5.4	Upper Deck . . . . .	31
5.5	Wechselwirkungsproblem und Lösbarkeitsbedingung . . . . .	32
5.6	Die Charakteristiken der Upper Deck Gleichung . . . . .	34
5.7	Ähnlichkeitslösung für das transsonische Fernfeld . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Asymptotische Entwicklung des Wechselwirkungsproblems für große negative Werte des Schallnäheparameters <math>K</math></b>	<b>42</b>
6.1	Der Grenzübergang zu reiner Unterschall- bzw. Überschallströmung . . . . .	42
6.2	Terme höherer Ordnung für $K \rightarrow -\infty$ . . . . .	44
6.3	Bestimmung des Potentials $\Phi_0$ im Fernfeld . . . . .	45
6.4	Bestimmung des Potentials $\Phi_1$ im Fernfeld . . . . .	48
6.5	Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Wandschubspannung $A_1$ . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Numerische Lösung des Wechselwirkungsproblems für <math>K \rightarrow -\infty</math></b>	<b>51</b>
7.1	Beschreibung des Verfahrens . . . . .	51
7.1.1	Diskretisierung der Wechselwirkungsgleichung erster und zweiter Ordnung . . . . .	51
7.1.2	Diskretisierung der Poisson-Gleichung . . . . .	52
7.1.3	Numerische Lösung der Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung . . . . .	55
7.2	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	56
7.2.1	Verlauf der Wandschubspannungen $A_0$ und $A_1$ . . . . .	56
7.2.2	Auswirkung additiver Potentiale im Upper Deck auf den Verlauf der Wandschubspannung $A_0$ . . . . .	58
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>62</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>66</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>67</b>
	<b>Anhang</b>	<b>67</b>
9.1	Affintransformationen . . . . .	67
9.2	Bestimmung der Lösbarkeitsbedingung für die Lower Deck Gleichung . . . . .	67
9.3	Bestimmung eines integrierenden Faktors mit Hilfe der gruppentheoretischen Methode . . . . .	70
9.4	Bestimmung der Sprungbedingung für die Upper Deck Gleichung . . . . .	73
	<b>Danksagung</b>	<b>76</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Natürliche Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$ mit Ursprung im Staupunkt $S$ und Geschwindigkeitskomponenten $(\tilde{u}, \tilde{v})$ zur Beschreibung der Strömung nahe der Vorderkante eines dünnen Flügelprofils. . . . .	3
2	Strömungsbild und Wandschubspannungsverlauf nahe eines Separationspunktes (a), eines Wiederanlegepunktes (b) und eines Punktes marginaler Ablösung (c). . . . .	15
3	Wandschubspannungsverläufe für verschiedene Werte der Anstellwinkelvariation $\Delta k$ . . . . .	23
4	Asymptotische Struktur des transonischen Triple Decks - Upper Deck ( <i>u.d.</i> ), Main Deck ( <i>m.d.</i> ) und Lower Deck ( <i>l.d.</i> ). . . . .	28
5	Charakteristikenscharen $\xi = const$ und $\eta = const$ dargestellt als äquidistante Höhenlinien der Funktionen $\xi(\tilde{X}, \tilde{Y})$ und $\eta(\tilde{X}, \tilde{Y})$ . Die Koordinate $\tilde{X}$ ist dabei gegeben durch $\tilde{X} = -K - cX = \sqrt{2}X - K$ . Die schwarze Linie mit größerer Strichbreite kennzeichnet die Schalllinie ( $\zeta = 1$ ). Die in der Abbildung ersichtlichen Linienhäufungen bzw. starken Anstiege von $\xi$ und $\eta$ befinden sich an den durch $\zeta = -1$ und $\zeta = 1/2$ definierten Orten. . . . .	36
6	Integrationsgebiet . . . . .	47
7	Diskretisierung des numerischen Definitionsbereiches . . . . .	54
8	Verlauf der Wandschubspannung $A_0$ in Abhängigkeit des Parameters $\tilde{a}$ . Unterschreitet der Parameter $\tilde{a}$ den Wert $-1.14$ , so nimmt die Wandschubspannung $A_0$ um den Koordinatenursprung negative Werte an - es bildet sich ein Rückströmungsgebiet aus. . . . .	56
9	Verlauf der Wandschubspannung $A_1$ in Abhängigkeit des Parameters $\tilde{a}$ . . . . .	57
10	Verlauf der mit dem Potenzial $\Phi_1$ assoziierten Geschwindigkeitskomponente $u_1 = \partial\Phi_1/\partial\tilde{X}$ in Abhängigkeit des Parameters $\tilde{a}$ . . . . .	58
11	Verlauf des Minimums der Wandschubspannung $A_0$ in Abhängigkeit der Wirbelposition in $\tilde{X}$ -Richtung $\tilde{X}_w$ sowie des Abstandes $\tilde{Y}_w$ des Wirbels über der Linie $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von $A_0$ , das sich ohne Wirbel ergibt. ( $\Gamma = -50$ , Anstellwinkelparameter $a = -0.8$ ) . . . . .	59
12	Verlauf des Minimums der Wandschubspannung $A_0$ in Abhängigkeit der Wirbelposition in $\tilde{X}$ -Richtung $\tilde{X}_w$ sowie des Abstandes $\tilde{Y}_w$ des Wirbels über der Linie $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von $A_0$ , das sich ohne Wirbel ergibt. ( $\Gamma = -50$ , Anstellwinkelparameter $\tilde{a} = -1.1$ ) . . . . .	60
13	Verlauf des Minimums der Wandschubspannung $A_0$ in Abhängigkeit der Dipolposition in $\tilde{X}$ -Richtung $\tilde{X}_d$ sowie des Abstandes $\tilde{Y}_d$ des Dipols über der Linie $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von $A_0$ , das sich ohne Dipol ergibt. ( $m = 95$ , Anstellwinkelparameter $\tilde{a} = -0.8$ ) . . . . .	60
14	Verlauf des Minimums der Wandschubspannung $A_0$ in Abhängigkeit der Dipolposition in $\tilde{X}$ -Richtung $\tilde{X}_d$ sowie des Abstandes $\tilde{Y}_d$ des Dipols über der Linie $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von $A_0$ , das sich ohne Dipol ergibt. ( $m = 95$ , Anstellwinkelparameter $\tilde{a} = -1.1$ ) . . . . .	61
15	Notation zur sprunghaften Änderung einer Strömungsgröße über eine durch die Koordinaten $(\tilde{Y}_s, \tilde{X}_s)$ festgelegte Linie. . . . .	74

## Verzeichnis der verwendeten Symbole

Anmerkung: Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränkt sich das nachfolgende Verzeichnis auf die für den logischen Aufbau der Arbeit wichtigsten Symbole, welche nach Themenbereichen geordnet sind. In eckigen Klammern gesetzte Größen bezeichnen solche, die durch Affintransformation aus der vor der Klammer stehenden Größe hervorgehen.

$\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{T} \dots$	Dimensionsbehaftete Größen (mit Ausnahme der Größen $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{a}$ )
$\bar{y}$	Grenzschichtkoordinate
$\gamma$	Isentropenexponent
$\tilde{c}_p$	spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck
$\tilde{c}_v$	spez. Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$\rho$	Dichte
$\rho_{ws}$	Dichte am Punkt verschwindender Wandschubspannung
$p$	Druck
$p_{00}, p_{01}, p_{02}, \dots$	Entwicklungskoeffizienten des Druckgradienten
$T$	Temperatur
$T_w$	adiabate Wandtemperatur (Eigentemperatur der Wand)
$T_{ws}$	Temperatur am Punkt verschwindender Wandschubspannung
$c$	Schallgeschwindigkeit sowie Parameter in der Upper Deck Gleichung
$c_*$	kritische Schallgeschwindigkeit
$\mu$	dynamische Viskosität
$\mu'$	Volumenviskosität
$C$	Chapman-Rubesin Konstante
$\beta$	Isobarer Audehnungskoeffizient des idealen Gases
Re	Reynoldszahl
Pr	Prandtlzahl
Ec	Eckertzahl
M	Machzahl
$M_*$	kritische Machzahl
$K_1 [K]$	schallnaher Ähnlichkeitsparameter
$n_1, n_2, \dots, n_{10}$	Affinkonstanten

### *Wandnahe Schicht*

$\eta$	Ähnlichkeitsvariable
$f_{01}(\eta), f_{02}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Stromfunktion $\psi$
$\rho_{01}(\eta), \rho_{02}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Dichte $\rho$
$T_{01}(\eta), T_{02}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Temperatur $T$
$a_0, b_0$	Konstanten in den Funktionen $f_{01}(\eta), f_{02}(\eta)$

### *Zwischenschicht*

$\psi_{00}(y), \psi_{01}(y), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Stromfunktion $\psi$
$\rho_{00}(y), \rho_{01}(y), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Dichte $\rho$
$T_{00}(y), T_{01}(y), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung der Temperatur $T$

### *Asymptotische Entwicklung der Strömungsgrößen für kleine Abweichung des Anstellwinkels $k$ vom kritischen Wert $k_c$*

$\psi_0, \psi_1, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung der Stromfunktion $\psi$
$\rho_0, \rho_1, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung der Dichte $\rho$
$T_0, T_1, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung der Temperatur $T$
$f_{11}(\eta), f_{12}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung von $\psi_1$
$\rho_{11}(\eta), \rho_{12}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung von $\rho_1$
$T_{11}(\eta), T_{12}(\eta), \dots$	Koeffizientenfunktionen der Koordinatenentwicklung von $T_1$
$a_1$	Konstante in den Funktionen $f_{11}(\eta), \rho_{11}(\eta), T_{11}(\eta)$
$b_1$	Konstante in den Funktionen $f_{12}(\eta)$

*Lower- und Main Deck im wechselwirkungsfreien Fall*

$x_l, y_l$	Lower Deck Koordinaten
$x_m, y_m$	Main Deck Koordinaten
$\psi_{L1}, \psi_{L2}, \dots; \rho_{L1}, \rho_{L2}, \dots; T_{L1}, T_{L2}, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung von Stromfunktion $\psi$ , Dichte $\rho$ und Temperatur $T$ im Lower Deck
$\psi_{M1}, \psi_{M2}, \dots; \rho_{M1}, \rho_{M2}, \dots; T_{M1}, T_{M2}, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung von Stromfunktion $\psi$ , Dichte $\rho$ und Temperatur $T$ im Main Deck

*Lower- und Main Deck mit Wechselwirkung*

$x_l [X], y_l [Y]$	Lower Deck Koordinaten
$x_m, y_m$	Main Deck Koordinaten
$\psi_{l1}, \psi_{l2}, \dots; \rho_{l1}, \rho_{l2}, \dots; T_{l1}, T_{l2}, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung von Stromfunktion $\psi$ , Dichte $\rho$ und Temperatur $T$ im Lower Deck
$\psi_{m1}, \psi_{m2}, \dots; \rho_{m1}, \rho_{m2}, \dots; T_{m1}, T_{m2}, \dots$	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung von Stromfunktion $\psi$ , Dichte $\rho$ und Temperatur $T$ im Main Deck
$\bar{\psi}_2 [\Psi]$	durch Transformation von $\psi_{l2}$ erhaltene Funktion
$p_l [p], p_m [p]$	durch die Wechselwirkung hervorgerufene Druckstörung im Lower Deck (Index l) und Main Deck (Index m)
$a$	Parameter, der die Anstellwinkelvariation charakterisiert

*Upper Deck*

$x_o [X], y_o [\bar{Y}]$	Upper Deck Koordinaten
$\phi$	Potenzialfunktion
$\Phi_{20}, \Phi_{02}, \Phi_{12}, \dots$	Koeffizientenfunktionen der generalisierten Koordinatenentwicklung des Potentials $\phi$
$\phi_o [\Phi]$	Störpotenzial
$p_o [p]$	Druckstörung im Upper Deck

*Asymptotik für große negative Werte des Schallnäheparameters  $K$*

$\tilde{X}, \tilde{Y}$	Innere Koordinaten der Entwicklung
$\tilde{a}$	zum Parameter $a$ (Anstellwinkelvariation)
	korrespondierender Parameter
$\Phi_0, \Phi_1$	Koeffizientenfunktionen erster und zweiter
	Ordnung der asymptotischen Entwicklung
	des (Stör-)Potenzials $\Phi$
$A_0, A_1$	Koeffizientenfunktionen erster und zweiter
	Ordnung der asymptotischen Entwicklung
	der Wandschubspannung $A$

# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Strömungsablösung nahe der Vorderkante von dünnen Flügelprofilen unter schallnahen Strömungsbedingungen und schließt an die von A. Ruban sowie K. Stewartson durchgeführten Untersuchungen dieses Problems an [1] [2] [3]. Die wesentliche, der Arbeit zugrunde liegende experimentelle Beobachtung wird an einem dünnen Flügelprofil gemacht, dessen Anstellwinkel gegenüber der Anströmung sukzessive erhöht wird. Für kleine Anstellwinkel bleibt die Strömung über der Vorderkante ablösungsfrei. Bei Erhöhung des Anstellwinkels kommt es mit Erreichen des sogenannten kritischen Anstellwinkels an der Vorderkante des Profils zur Ausbildung einer kleinen Ablöseblase (im Engl. *short separation bubble*), die die in erster Näherung reibungsfreie Außenströmung nur im Sinne einer schwachen - d.h. in der Grenze großer Reynoldszahlen verschwindenden - Störung beeinflusst. Diese Ablöseblase existiert nur innerhalb eines kleinen Anstellwinkelbereiches. Eine Erhöhung des Anstellwinkels über diesen Bereich hinaus führt zum Platzen der Blase (im Engl. *bubble bursting*) und - abhängig von der Größe der Reynoldszahl - entweder zur Ausbildung einer langen Blase oder eines ausgedehnten Ablösegebietes mit substanzieller Beeinflussung der Außenströmung [4]. Das Auftreten beider Strömungsregime (lange Blase und ausgedehntes Ablösegebiet) geht einher mit einer abrupten Reduktion des Auftriebs.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für Anstellwinkel nahe dem kritischen Wert und schallnaher Bedingungen in der Außenströmung die Strömungsverhältnisse im Ablösegebiet im Allgemeinen und die Wandschubspannung im Besonderen zu bestimmen, was sowohl von grundlegender theoretischer als auch, aufgrund der erwähnten Auftriebsreduktion, von praktischer Bedeutung ist. Zu diesem Zweck können asymptotische Methoden angewendet werden, da die typischerweise auftretenden Reynoldszahlen von der Größenordnung  $10^4 - 10^5$  sind [5]. Diese Größenordnung ist im Einklang mit der experimentellen Beobachtung, dass die Strömung im Bereich der Vorderkante laminar ist [6].

Gemäß der grundlegenden Arbeit von Prandtl aus dem Jahr 1904 [7] verschwindet in einer Grenzschichtströmung an einer Stelle, an der Grenzschichtablösung auftritt, die Wandschubspannung. Die asymptotische Analyse der Grenzschichtgleichungen zeigt nun, dass die Gültigkeit des hierarchischen Konzepts der Grenzschichttheorie nahe einem Punkt verschwindender Wandschubspannung nicht mehr gegeben ist. Es tritt, abhängig von der Intensität des auf die Grenzschicht wirkenden Druckgradienten, in der Lösung der Grenzschichtgleichungen eine Goldsteinsingularität [8] bzw. eine für marginal abgelöste Strömungen<sup>1</sup> - das heißt an der Grenze zur Ablösung befindliche Strömungen - typische Singularität auf [2] [3]. Die Goldsteinsingularität ist unter anderem dadurch charakterisiert, dass sie nicht durch Annahme einer lokalen Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Außenströmung aufgehoben werden kann [9] und dass bei ihrem Auftreten die Lösung der Grenzschichtgleichungen nicht über den Punkt verschwindender Wandschubspannung fortgesetzt werden kann. Für marginal abgelöste Strömungen ist dies hingegen möglich - die Wandschubspannung beginnt hierbei unmittelbar nach dem Punkt verschwindender Wandschubspannung wieder zu steigen. Weiters kann, wie in [2] und [3] gezeigt, die mit diesen Strömungen einhergehende Singularität in der Lösung der Grenzschichtgleichungen durch Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Außen-

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung Marginale Ablösung (engl. *Marginal Separation*) wurde erstmals in [3] verwendet.

strömung aufgelöst werden. In beiden Arbeiten ([2] und [3]) blieb dabei der Fall schallnaher Außenströmung unberücksichtigt und die Ausarbeitung der Theorie marginaler Ablösung auf inkompressible Strömungen beschränkt. Lediglich in [3] wurde, basierend auf den Ergebnissen in [9] und ohne explizite Ausführung der diebezüglichen Rechnungen das Ergebnis präsentiert, dass sich die asymptotische Struktur des Wechselwirkungsgebietes für reine Unterschall- bzw. Überschallströmung zum inkompressiblen Fall nicht ändert. Die vorliegende Arbeit versteht sich als Beitrag, die in der Theorie marginaler Ablösung für schallnahe Bedingungen in der Außenströmung bestehende Lücke zu schließen, wie dies für den Fall der freien Wechselwirkung (siehe zum Beispiel [10]) unter anderem durch die Arbeiten [11] und [12], denen schallnahe Außenströmung zugrunde liegt, geschehen ist.

## 2 Kennzahlen und zugrundeliegende Gleichungen

### 2.1 Voraussetzungen und Bestimmung der maßgebenden Kennzahlen

Die Untersuchung der schallnahen marginalen Ablösung an der Vorderkante eines dünnen Flügelprofils wird in der vorliegenden Arbeit unter der Voraussetzung ebener, laminarer und stationärer Strömung sowie unter Zugrundelegung des Konzepts des idealen Gases für das strömende Medium durchgeführt. Weiters wird vorausgesetzt, dass Auftriebseffekte keine Rolle spielen und dass die Strömung außerhalb der das Flügelprofil umgebenden Grenzschicht isoenergetisch ist. Die im weiteren Verlauf der Arbeit vorgestellte asymptotische Untersuchung der marginalen Ablösung in Schallnähe beruht auf dem Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$ , in dessen Folge weitere daran gekoppelte Grenzübergänge von Machzahl und Anstellwinkel betrachtet werden. Die charakteristischen Größen des Problems, welche für die Definition der Reynoldszahl benötigt werden, sind einerseits die vom Staupunkt an der Vorderkante bis zum Ablösepunkt gemessene Länge  $\bar{L}$  (siehe Abb. 1). Die weiteren charakteristischen Größen zur Definition der Reynoldszahl sind die kritische Schallgeschwindigkeit  $\bar{c}_*$ , die kritische Dichte  $\bar{\rho}_*$  sowie die dynamische Zähigkeit an der Profiloberfläche  $\bar{\mu}_w$ .<sup>2</sup>

Des weiteren wird der Arbeit zugrundegelegt, dass die Prandtl-Zahl des strömenden Mediums gleich 1 und von der Temperatur unabhängig ist. Letztere Annahme ist für Luft in guter Näherung erfüllt [13][6]. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass die Profiloberfläche adiabat ist. Mit diesen beiden Annahmen ist - wie sich zeigen läßt - die Differenz zwischen der sich einstellenden Temperatur an der Profiloberfläche (adiabate Wandtemperatur) und der Temperatur in der Außenströmung an einem betrachteten Punkt gleich der Temperaturerhöhung durch adiabate Kompression der Außenströmung. Unter den Voraussetzungen  $Pr = 1$  und adiabate Wand ist daher die charakteristische Temperaturerhöhung in einer Grenzschichtströmung gegenüber schallnaher Außenströmung gleich  $\Delta\bar{T} = \bar{c}_*^2/\bar{c}_p \cdot \bar{c}_p$  bezeichnet hierbei die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und  $\bar{c}_*$  die kritische Schallgeschwindigkeit.<sup>3</sup> Der Wert  $\bar{c}_*^2/\bar{c}_p$  entspricht zugleich der charakteristischen absoluten Temperatur des idealen Gases in Schallnähe. Aufgrund der Gleichheit von charakteristischer Temperaturerhöhung und charakteristischer

<sup>2</sup>Da unter den gemachten Annahmen die Temperatur an der Profiloberfläche nicht vom Ort abhängt, ist auch die dynamische Zähigkeit an der Profiloberfläche konstant.

<sup>3</sup>Die spezifische Wärmekapazität  $\bar{c}_p$  bei konstantem Druck wird in der vorliegenden Arbeit als konstant angenommen.

absoluter Temperatur ist  $\tilde{c}_*^2/\tilde{c}_p$  die adäquate Größe zur Entdimensionalisierung der Temperatur. Für die Eckert-Zahl folgt mit dieser Festlegung sofort  $Ec = 1$ . Zusammenfassend erhalten wir daher:

$$Re = \frac{\tilde{\rho}_* \tilde{c}_* \tilde{L}}{\tilde{\mu}_w} \rightarrow \infty; \quad Pr = \frac{\tilde{c}_p \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}} = 1; \quad Ec = \frac{\tilde{c}_*^2}{\tilde{c}_p \Delta \tilde{T}} = 1 \quad (2.1)$$

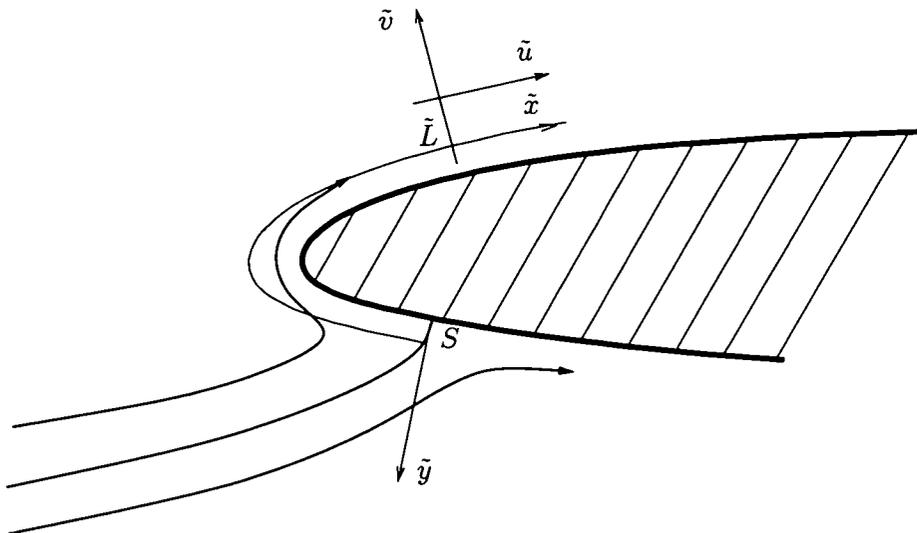
$\tilde{\lambda}$  bezeichnet hierbei die Wärmeleitfähigkeit.

Auf Basis des bisher Gesagten werden nun die folgenden Größen entdimensionalisiert: Dichte  $\tilde{\rho}$ , Temperatur  $\tilde{T}$ , Druck  $\tilde{p}$ , dynamische Viskosität  $\tilde{\mu}$ , Volumenviskosität  $\tilde{\mu}'$ , weiters die natürlichen Koordinaten  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  entlang der Körperkontur sowie die wandparallele Geschwindigkeitskomponente  $\tilde{u}$  und die wandnormale Geschwindigkeitskomponente  $\tilde{v}$  (siehe Abb. 1).

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}_*}; \quad \tilde{v} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{c}_*}; \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{c}_*} \sqrt{Re}; \quad x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}}; \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}} \sqrt{Re}; \quad \tilde{y} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}}; \quad (2.2)$$

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_w}; \quad \mu' = \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}'_w}; \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_*}; \quad T = \frac{\tilde{c}_p \tilde{T}}{\tilde{c}_*^2}; \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}_* \tilde{c}_*^2}$$

Die Größen  $y$  und  $v$  bezeichnen hierbei die jeweiligen entdimensionalisierten Größen in der klassischen Grenzschichtskalierung.



**Abbildung 1:** Natürliche Koordinaten  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  mit Ursprung im Staupunkt  $S$  und Geschwindigkeitskomponenten  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  zur Beschreibung der Strömung nahe der Vorderkante eines dünnen Flügelprofils.

## 2.2 Grundgleichungen

Im Folgenden werden die Grundgleichungen unter Zugrundelegung von natürlichen Koordinaten formuliert (siehe z.B. [6]). Die mit  $\tilde{L}$  entdimensionalisierte lokale Krümmung der Profilloberfläche wird mit  $\kappa(x)$  bezeichnet.

## 2.2.1 Konstitutive Gleichungen

Thermische Zustandsgleichung für das ideale Gas:

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T \quad (2.3)$$

$\gamma = \tilde{c}_p / \tilde{c}_v$  bezeichnet den Isentropenexponenten<sup>4</sup>. Die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen -  $\tilde{c}_p$  und  $\tilde{c}_v$  - werden als konstant vorausgesetzt.

Zähigkeitsgesetz:

$$\mu = CT \quad (2.4)$$

$C$  bezeichnet die *Chapman-Rubesin-Konstante*. Ihr Wert kann aus der Linearisierung des (genaueren) Sutherlandschen Zähigkeitsgesetzes um die für das Problem charakteristische Referenztemperatur bestimmt werden, [6].

Isobarer Ausdehnungskoeffizient für das ideale Gas:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \quad (2.5)$$

## 2.2.2 Kontinuitätsgleichung für ebene, stationäre Strömung

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\{1 + \kappa \bar{y}\} \rho v)}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.6)$$

## 2.2.3 Bewegungsgleichungen für ebene, stationäre Strömung

Mit den folgenden Bezeichnungen für die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors sowie der viskosen Spannungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w} &= \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} [(1 + \kappa \bar{y}) \bar{v}] \quad , \\ \tau_{xx} &= \mu \frac{2}{1 + \kappa \bar{y}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \bar{v} \right) + \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{w} \quad , \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{w} \quad , \\ \tau_{xy} &= \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} - \frac{\kappa u}{1 + \kappa \bar{y}} + \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

sind die auch als Navier Stokessche Gleichungen bezeichneten Bewegungsgleichungen gegeben durch:

<sup>4</sup>Es wird die im angelsächsischen Raum gebräuliche Bezeichnung für den Isentropenexponenten verwendet, da der dafür im deutschsprachigen Raum verwendete griechische Buchstabe  $\kappa$  in der vorliegenden Arbeit die lokale Krümmung der Profilloberfläche bezeichnet.

1. Navier Stokesche Gleichung:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \kappa \bar{y}) \rho v \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \kappa \rho u v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ (1 + \kappa \bar{y})^2 \tau_{xy} \right] \right\} \quad (2.8)$$

2. Navier Stokesche Gleichung:

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + (1 + \kappa \bar{y}) \rho v \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} - \kappa \rho u^2 = -(1 + \kappa \bar{y}) \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ (1 + \kappa \bar{y}) \tau_{yy} \right] \right\} - \frac{1}{\text{Re}} \kappa \tau_{xx} \quad (2.9)$$

## 2.2.4 Energiegleichung für ebene, stationäre Strömung

Mit der Dissipationsfunktion  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left\{ \left[ \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \bar{v} \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} \\ & + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa u \right) \right]^2 + \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) (\text{div } \vec{w})^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

nimmt die Energiegleichung in natürlichen Koordinaten folgende Form an:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + (1 + \kappa \bar{y}) \rho v \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = & \frac{1}{\text{Pr Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{1 + \kappa \bar{y}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right) \right\} \\ & + \text{Ec } \beta T \left\{ u \frac{\partial p}{\partial x} + (1 + \kappa \bar{y}) v \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right\} \\ & + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} (1 + \kappa \bar{y}) \Phi \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.2.5 Grenzschichtgleichungen für ebene Strömung

Die im Folgenden dargestellten Gleichungen beschreiben eine zweidimensionale Grenzschichtströmung in der Grenze  $\text{Re} = \infty$  exakt bzw. stellen die führende Ordnung einer Entwicklung der Navier Stokes Gleichungen, der Energiegleichung sowie der Kontinuitätsgleichung für  $\text{Re} \rightarrow \infty$  dar, wenn folgende Variablenstreckungen zugrundegelegt werden:

$$\bar{y} \rightarrow \text{Re}^{-1/2} y; \quad \bar{v} \rightarrow \text{Re}^{-1/2} v \quad (2.12)$$

Wenn weiters vorausgesetzt wird, dass die Profilloberflächenkrümmung  $\kappa(x)$  folgenden Gleichungen genügt<sup>5</sup>:

$$\kappa = o(\text{Re}^{1/2}); \quad \frac{d\kappa}{dx} = o(\text{Re}), \quad (2.13)$$

so erhält man mit der Grenzschichtskalierung (2.12) die folgenden Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

1. Grenzschichtgleichung:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

2. Grenzschichtgleichung

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.16)$$

Energiegleichung in der Grenzschicht:

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \text{Ec} \left[ \beta T \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

Wie in Kapitel (2.1) erläutert werden die die Strömung begrenzenden Wände als adiabat angenommen. Die Größen  $u$ ,  $v$  und  $T$  müssen unter dieser Voraussetzung folgende Randbedingungen erfüllen:

$$y = 0 : \quad u = v = 0 \quad (2.18)$$

$$y = 0 : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.19)$$

$$y = \infty : \quad u = u_e(x); \quad T = T_e(x) \quad . \quad (2.20)$$

(2.18) ist mathematischer Ausdruck der sogenannten Haftbedingung. Die Vorgabe einer adiabaten Wand führt auf die Beziehung (2.19). (2.20) ist die Randbedingung am Grenzschichttrand.  $u_e(x)$  und  $T_e(x)$  bezeichnen hierbei die wandparallele Geschwindigkeitskomponente sowie die Temperatur der reibungsfreien Außenströmung an der Wand.

Für eine weiterführende und detaillierte Darstellung der Grenzschichttheorie kann auf [6] verwiesen werden.

<sup>5</sup>Die Profilloberflächenkrümmung ist unter diesen Voraussetzungen in der Grenzschichttheorie ein Effekt höherer Ordnung

## 2.2.6 Gasdynamische Gleichung für ebene Strömung in natürlichen Koordinaten

Im Fall reibungsfreier Strömung, in der die Entropie entlang von Stromlinien konstant ist, können die thermischen Zustandsgrößen aus Kontinuitätsgleichung, Energiegleichung und den Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Die damit verbleibende Beziehung ist die Gasdynamische Gleichung:

$$\frac{c^2 - u^2}{1 + \kappa y} \frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{1 + \kappa y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{c^2 \kappa v}{1 + \kappa y} = 0 \quad (2.21)$$

Für die Schallgeschwindigkeit  $c$  gilt hierbei unter Zugrundelegung der Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$c^2 = \frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2) \quad (2.22)$$

Die Außenströmung - als asymptotische Entwicklung für große Reynoldszahlen betrachtet - erfüllt bis zu den in der vorliegenden Arbeit maßgebenden Größenordnungen der Reynoldszahl die Voraussetzungen, um die Gasdynamische Gleichung anwenden zu können.

## 2.2.7 Eulergleichungen für ebene Strömung in natürlichen Koordinaten

Um Relationen zwischen den Größenordnungen von Druck und Geschwindigkeit in der asymptotischen Entwicklung der Außenströmung für große Reynoldszahlen zu erhalten, werden die für reibungsfreie Strömung geltenden Eulergleichungen herangezogen:

1. Eulergleichung:

$$\frac{\rho u}{1 + \kappa y} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\kappa}{1 + \kappa y} \rho uv = - \frac{1}{1 + \kappa y} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.23)$$

2. Eulergleichung:

$$\frac{\rho u}{1 + \kappa y} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\kappa}{1 + \kappa y} \rho u^2 = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.24)$$

## 2.2.8 Gleichung der Drehungsfreiheit (Wirbelfreiheit)

$$\frac{\partial (\{1 + \kappa y\} u)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

## 2.2.9 Crocco-Busemannsche Lösung der Energiegleichung in der Grenzschicht

Für den Fall  $Pr = 1$  besteht ein bemerkenswert einfacher Zusammenhang zwischen der Temperatur- und der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht. Diese von Crocco [14] und Busemann [15] gefundene Gesetzmäßigkeit besagt, dass für jedes Zähigkeitsgesetz  $\mu(T)$  die Temperatur nur von der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente  $u$  abhängt.

Für  $T = T(u)$  erhalten wir aus der Energiegleichung (2.17) unter Verwendung der 1. Grenzschichtgleichung (2.15) und 2. Grenzschichtgleichung (2.16)

$$-\frac{dp}{dx} \left( \frac{\partial T}{\partial u} + \text{Ec } u \right) + \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left[ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \text{Ec} \right] \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.26)$$

Für  $\text{Pr} = 1$  ist aus (2.26) ersichtlich, dass  $T(u)$  eine Lösung der Energiegleichung in der Grenzschicht ist, wenn gilt

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} = 0 : \quad T(u) &= -\frac{\text{Ec}}{2} u^2 + c_1 u + c_2 \quad , \\ \frac{dp}{dx} \neq 0 : \quad T(u) &= -\frac{\text{Ec}}{2} u^2 + c_2 \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Unter Benützung der Randbedingung  $u = 0$  an der die Grenzschicht begrenzenden Wand erhalten wir für den Fall mit nicht verschwindendem Druckgradienten

$$T + \frac{\text{Ec}}{2} u^2 = T_w \quad . \quad (2.28)$$

$T_w$  ist die sogenannte *adiabate Wandtemperatur* oder *Eigentemperatur* der Wand <sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Wenn, wie in der vorliegenden Arbeit, die Außenströmung als (in führender Ordnung) reibungsfrei vorausgesetzt wird und weiters gilt  $\text{Ec} = 1$ , so ist die adiabate Wandtemperatur konstant - siehe dazu auch [13].

### 3 Koordinatenentwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen um einen Punkt verschwindender Wandschubspannung

Gemäß der grundlegenden Arbeit von Prandtl aus dem Jahr 1904 [7] verschwindet in einer Grenzschichtströmung an einer Stelle, an der Grenzschichtablösung auftritt, die Wandschubspannung. Der Ausgangspunkt der Untersuchung schallnaher marginaler Ablösung ist daher ebenso wie bei der marginalen Ablösung in inkompressibler Strömung [1] die lokale Untersuchung der Grenzschichtgleichungen um einen Punkt verschwindender Wandschubspannung. Aufgrund der Parabolizität der Grenzschichtgleichungen wird unter der Voraussetzung, dass keine Rückströmung auftritt, die Grenzschichtströmung an einem betrachteten Punkt vom Verlauf der Außenströmung vom Staupunkt bis zu diesem Punkt beeinflusst. Eine lokale Analyse der Grenzschichtgleichungen in Form einer Koordinatenentwicklung, wie sie im Folgenden durchgeführt werden soll, kann daher nicht die Gesamtheit der Randbedingungen berücksichtigen und muss deshalb als Entwicklung von Eigenfunktionen angesetzt werden, [1].

#### 3.1 Die Zweischichtenstruktur

Unter der Annahme der Existenz eines Punktes mit verschwindender Wandschubspannung weist die Grenzschicht in der Umgebung dieses Punktes, wie zu zeigen sein wird, eine Zweischichtenstruktur auf. Die unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften der beiden Schichten sowie deren Abmessungen werden im Folgenden erörtert.

Wir untersuchen zunächst die Frage, in welchem Bereich der Grenzschicht um den Punkt verschwindender Wandschubspannung die Zähigkeits-, Reibungs- und Druckkräfte von gleicher Größenordnung sind. Diese Balance der genannten Kräfte ist physikalischer Ausdruck der Invarianz der 1. Grenzschichtgleichung gegenüber - in bestimmten Relationen zueinander stehenden - Gruppen von Transformationen der darin auftretenden Variablen<sup>7</sup>. Aus diesen Relationen zwischen den Transformationsgruppen kann der gesuchte Bereich bestimmt werden.

Wir untersuchen nun die 1. Grenzschichtgleichung (2.15) auf Invarianz gegenüber folgenden Transformationen sowohl der abhängigen als auch der unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned} x - x_s &\rightarrow \alpha (\hat{x} - \hat{x}_s); & y &\rightarrow \beta \hat{y}; & u &\rightarrow \gamma \hat{u}; & v &\rightarrow \kappa \hat{v}; \\ \rho - \rho_{ws} &\rightarrow \delta (\hat{\rho} - \hat{\rho}_{ws}); & \mu - \mu_w &\rightarrow \epsilon (\hat{\mu} - \hat{\mu}_w); & p - p_s &\rightarrow \lambda (\hat{p} - \hat{p}_s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\rho_{ws}$ ,  $\mu_w$ , und  $p_s$  bezeichnen hierbei die Werte von Dichte, dynamischer Zähigkeit und Druck im Punkt verschwindender Wandschubspannung.  $x_s$  sei der Abstand dieses Punktes vom Staupunkt.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  und  $\kappa$  sind die den Transformationen zugeordneten Parameter.

<sup>7</sup>Im konkreten Fall sind diese Transformationsgruppen sogenannte Punktgruppen. Eine Einführung in die gruppentheoretische Methode zur Auffindung von Lösungen von partiellen Differenzialgleichungen findet sich zum Beispiel in [16] sowie in [17].

Eintragen der in (3.1) zusammengefassten Beziehungen in die 1. Grenzschichtgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2}{\alpha} \rho_{ws} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\kappa \gamma}{\beta} \rho_{ws} \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\gamma^2 \delta}{\alpha} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_{ws}) \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\kappa \gamma \delta}{\beta} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_{ws}) \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \\ - \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\gamma}{\beta^2} \mu_w \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\gamma \epsilon}{\beta^2} (\hat{\mu} - \hat{\mu}_w) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Damit die 1. Grenzschichtgleichung invariant bleibt gegenüber den Transformationen (3.1), muss daher gelten:

$$\frac{\gamma^2}{\alpha} = \frac{\kappa \gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta^2} = \frac{\lambda}{\alpha}; \quad \epsilon = \delta . \quad (3.3)$$

Aufgrund des Verschwindens der Wandschubspannung  $\tau_w = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  im Punkt  $(x_s, 0)$  weist die Geschwindigkeitskomponente  $u$  in Punkten  $(x_s, y)$  nahe der Wand unter der Voraussetzung  $\frac{\partial p}{\partial x} = O(1)$  folgende Größenordnung auf:

$$u(x_s, y) \sim y^2 \quad \forall y \rightarrow 0 , \quad (3.4)$$

woraus unter Berücksichtigung von (3.1) folgt  $\gamma = \beta^2$ . Eintragen dieses Resultats in die Relationen (3.3) führt auf die, für die Untersuchung der Zweischichtenstruktur, wichtige Beziehung

$$\beta = \alpha^{1/4} . \quad (3.5)$$

Gemäß der physikalischen Bedeutung der Invarianz der 1. Grenzschichtgleichung gegenüber den besprochenen Transformationen sind demnach Trägheits-, Reibungs- und Druckterme in dem durch  $y = O(x_s - x)^{1/4}$  festgelegten Gebiet von gleicher Größenordnung. Dieses Gebiet soll fortan gemäß der in [18] verwendeten Terminologie als die *wandnahe reibungsbehaftete Schicht* (kurz: wandnahe Schicht) bezeichnet werden. Im verbleibenden, äußeren Teil der Grenzschicht mit der Größenordnung  $y = O(1)$  sind Reibungs- und Trägheitsterme nicht mehr in Balance. Da die Trägheitsterme das Anpassen an die reibungsfreie Außenströmung ermöglichen, lässt sich folgern, dass in diesem Bereich der Grenzschicht die Trägheitsterme dominieren und somit eine lokal reibungsfreie Schicht vorliegt. Letztere soll im weiteren Verlauf der Arbeit als *Zwischenschicht* bezeichnet werden.

### 3.1.1 Wandnahe Schicht

Wir bestimmen im Folgenden in der soeben definierten wandnahen Reibungsschicht eine Koordinatenentwicklung der Strömungsgrößen für  $x - x_s = s \rightarrow 0-$ . Es wird sich dabei zeigen, dass diese Entwicklung unter bestimmten Voraussetzungen über den Punkt  $x_s$  hinaus fortsetzbar ist. Die Koeffizienten der Entwicklung werden dabei als Funktionen der durch die Transformation (3.5) nahegelegten Ähnlichkeitsvariablen  $\eta = y/(-s)^{1/4} = y/\xi$  angesetzt. Diese Vorgangsweise zur lokalen Analyse der Grenzschichtgleichungen wurde gemäß dem Wissensstand des Autors erstmals in [19] angewendet. Entwickelt werden die Dichte, der Druck, die Temperatur

sowie die Stromfunktion, welche per definitionem ein Integral der Kontinuitätsgleichung (2.14) darstellt und implizit gegeben ist durch

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad (3.6)$$

Die Entwicklung für den der Grenzschicht aufgeprägten Druckgradienten lautet

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_{00} + p_{01}s + p_{02}s^2 + \dots \quad . \quad (3.7)$$

Zur Bestimmung des führenden Terms  $\psi(0, \eta)$  der Entwicklung der Stromfunktion  $\psi(s, \eta)$  setzen wir (3.6) und (3.7) in die 1. Grenzschichtgleichung (2.15) ein und erhalten am Ablösepunkt  $x_s$

$$-p_{00} + \frac{CT_{ws}}{\rho_{ws}} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

$T_{ws}$  und  $\rho_{ws}$  bezeichnen die Werte von Temperatur und Dichte am Ablösepunkt  $(x, y)=(x_s, 0)$ . Mit (3.8) muss die Entwicklung der Stromfunktion um den Ablösepunkt gemäß

$$\psi = \frac{p_{00}\rho_{ws}}{6CT_{ws}} y^3 + \dots \quad (3.9)$$

beginnen.

Die weiteren Terme der Entwicklung werden analog zu [1] in folgender Form angesetzt:

$$\psi = \xi^3 \left( \frac{p_{00}\rho_{ws}}{6CT_{ws}} \eta^3 + \xi^{4\alpha-3} f_{01}(\eta) + \xi^{8\alpha-6} f_{02}(\eta) + \dots \right); \quad \xi \rightarrow 0 \quad . \quad (3.10)$$

Die Größe  $\alpha$  nimmt hierbei die Rolle eines Eigenwertes der Funktion  $f_{01}$  ein, den es im weiteren zusammen mit  $f_{01}$  zu bestimmen gilt. Der dritte Term des obigen Ansatzes wird durch die quadratische Nichtlinearität der Grenzschichtgleichungen erzwungen. Diese hat zur Folge, dass in der Bestimmungsgleichung für  $f_{02}$  eine von  $f_{01}$  abhängige Inhomogenität auftritt. Die zur Balance weiterer Terme des Druckgradienten nötigen Anteile in der Stromfunktion werden, ebenfalls analog zu [1], weggelassen, da sie die benötigten Resultate der weiteren Analyse nicht verändern.

Aus (3.10), der Crocco-Busemannschen Lösung der Energiegleichung (2.28) sowie der thermischen Zustandsgleichung (2.3) erhalten wir die Ansätze für Temperatur und Dichte:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{ws} + \xi^4 \rho_{01}(\eta) + \dots \quad , \\ T &= T_{ws} + \xi^4 T_{01}(\eta) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Funktionen  $\rho_{01}$  sowie  $T_{01}$  sind durch die thermische Zustandsgleichung, die Crocco-Busemannsche Lösung der Energiegleichung sowie (3.10) eindeutig bestimmt, jedoch für die weitere Analyse nicht von Bedeutung. Die Bestimmungsgleichung der Funktion  $f_{01}$  ergibt sich nach Einsetzen von (3.10) und (3.11) in die 1. Grenzschichtgleichung zu

$$\begin{aligned} f_{01}''' - \frac{\alpha p_{00}\rho_{ws}\eta}{(CT_{ws})^2} f_{01} + \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) \frac{p_{00}\rho_{ws}\eta^2}{(CT_{ws})^2} f_{01}' - \frac{1}{8} \frac{p_{00}\rho_{ws}\eta^3}{(CT_{ws})^2} f_{01}'' &= 0 \quad , \\ f_{01}(0) = f_{01}'(0) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Diese Gleichung besitzt drei linear unabhängige Lösungen, die so gewählt werden können, dass deren Potenzreihenentwicklungen um den Punkt  $\eta = 0$  mit 1,  $\eta$  und  $\eta^2$  beginnen. Nur jene Lösung, deren Potenzreihenentwicklung mit  $\eta^2$  beginnt und - wie sich zeigen lässt - auch mit diesem Term endet, erfüllt die Randbedingungen.<sup>8</sup> Damit folgt

$$f_{01}(\eta) = \frac{1}{2}a_0\eta^2 \quad . \quad (3.13)$$

Zur Bestimmung von  $\alpha$  ist es notwendig, die Bestimmungsgleichung für die Funktion  $f_{02}$  zu untersuchen.  $f_{02}$  genügt der Gleichung

$$\begin{aligned} f_{02}''' - \frac{1}{8} \frac{p_{00}\rho_{ws}\eta^3}{(CT_{ws})^2} f_{02}'' + \left(\alpha + \frac{1}{4}\right) \frac{p_{00}\rho_{ws}\eta^2}{(CT_{ws})^2} f_{02}' - \\ \left(\frac{3}{4} - 2\alpha\right) \frac{p_{00}\rho_{ws}\eta}{(CT_{ws})^2} f_{02} = \frac{a_0^2\eta^2}{4CT_{ws}}(1 - 2\alpha); \quad f_{02}(0) = f_{02}'(0) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Gleichung ist von gleicher Struktur wie die in [1] für den Fall inkompressibler Strömung erhaltene. Deshalb gilt wie in [1] auch in unserem Fall, dass die Funktion  $f_{02}$  nur dann für  $\eta \rightarrow \infty$  nicht exponentiell aufklingt und damit an die Lösung in der Zwischenschicht angepasst werden kann, falls gilt

$$\alpha = \frac{m+1}{2}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (3.15)$$

Details zur Methodik dieses Beweises finden sich in [20]. Die asymptotische Ordnung der Terme in der Reihe (3.10) fordert, dass gilt  $\alpha > 3/4$ . Der erste, sich damit ergebende, mögliche Wert ist  $\alpha = 1$ . Dieser Fall wurde im Inkompressiblen in einer grundlegenden Arbeit von Goldstein erörtert [8], der diesen Wert für  $\alpha$  aufgrund numerischer Berechnungen von Hartree angenommen hatte. Es zeigte sich dabei, dass die sich ergebende Lösung nicht über den Punkt  $x_s$  fortgesetzt werden kann und dort eine Singularität aufweist (Goldstein Singularität). Eine detaillierte Darstellung des Versuches der Fortsetzung über  $x_s$  findet sich in [4].

Gemäß (3.15) ist der nächstmögliche Eigenwert  $\alpha = 3/2$ . Die sich damit ergebende Lösung in der wandnahen Schicht ist

$$\begin{aligned} \psi = \xi^3 \frac{p_{00}\rho_{ws}}{6CT_{ws}} \eta^3 + \xi^6 f_{01}(\eta) + \xi^9 f_{02}(\eta) + \dots; \\ f_{01} = \frac{1}{2}a_0\eta^2; \quad f_{02} = \frac{1}{2}b_0\eta^2 - \frac{a_0^2}{120CT_{ws}}\eta^5 + \frac{a_0^2 p_{00}\rho_{ws}}{40320C^3T_{ws}^3}\eta^9 \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Konstanten  $a_0$  und  $b_0$  bleiben im Rahmen der vorliegenden lokalen Analyse unbestimmt und müssen aus einer globalen Analyse numerisch berechnet werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezeigt werden, dass die Lösung (3.16) einerseits über den Punkt  $x_s$  hinaus fortgesetzt werden kann und dass sie andererseits die Grenzlösung ist, die sich beim kritischen Anstellwinkel einstellt. Zuvor soll jedoch die Lösung in der Zwischenschicht untersucht werden.

<sup>8</sup>Details zum Auffinden dieser Lösung können anhand der zu (3.12) strukturäquivalenten Gleichung (9.8) (im Anhang) nachvollzogen werden.

### 3.1.2 Zwischenschicht

Aus der Anwendung der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklungen auf die Lösung für die Stromfunktion in der wandnahen Schicht (3.16) sowie unter Verwendung der Crocco-Busemannschen Lösung der Energiegleichung (2.28) folgt für die Koordinatenentwicklung der Lösung in der Zwischenschicht

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{00}(y) + (-s)\psi_{01}(y) + \dots, \\ \rho &= \rho_{00}(y) + (-s)\rho_{01}(y) + \dots, \\ T &= T_{00}(y) + (-s)T_{01}(y) + \dots.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Für die Funktion  $T_{01}$  erhalten wir wiederum aus der Crocco-Busemann Lösung

$$T_{01}(y) = \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}^3} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy} \right)^2 - \frac{1}{\rho_{00}^2} \frac{d\psi_{00}}{dy} \frac{d\psi_{01}}{dy}. \quad (3.18)$$

Für  $\rho_{01}$  ergibt sich aus (3.18) und unter Verwendung der 2. Grenzschichtgleichung (2.16)

$$\rho_{01}(y) = \frac{1}{T_{ws}\rho_{00}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy} \right)^2} \left\{ \frac{d\psi_{00}}{dy} \frac{d\psi_{01}}{dy} \rho_{00} - \frac{\gamma\rho_{00}\rho_{00}^2}{\gamma-1} \right\}. \quad (3.19)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}M_{00}(y) &= \frac{1}{\sqrt{(\kappa-1)T_{00}}} \frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\psi_{00}}{dy}, \\ N(y) &= T_{ws}\rho_{00}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy} \right)^2,\end{aligned}\quad (3.20)$$

folgt schließlich zusammen mit den Ausdrücken für  $\rho_{01}$  und  $T_{01}$  aus der 1. Grenzschichtgleichung (2.15) für die Funktion  $\psi_{01}$

$$\begin{aligned}\psi_{01} \frac{d^2\psi_{00}}{dy^2} - \frac{d\psi_{00}}{dy} \frac{d\psi_{01}}{dy} &= -\rho_{00}\rho_{00}(M_{00}^2 - 1) \\ &\quad - \frac{C}{\rho_{00}^2} \left( \frac{d^2\psi_{00}}{dy^2} \right)^2 \left\{ 4 \frac{d\psi_{00}}{dy} - \frac{5}{N} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy} \right)^3 + \frac{1}{N^2} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy} \right)^5 \right\} \\ &\quad + \frac{CT_{00}}{\rho_{00}^2} \frac{d^3\psi_{00}}{dy^3} \\ &= F(y).\end{aligned}\quad (3.21)$$

$M_{00}$  bezeichnet hierbei die mit der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente  $u$  an der Stelle  $x = x_s$  im Abstand  $y$  von der Wand gebildete Machzahl.

Die Gleichung (3.21) besitzt die allgemeine Lösung

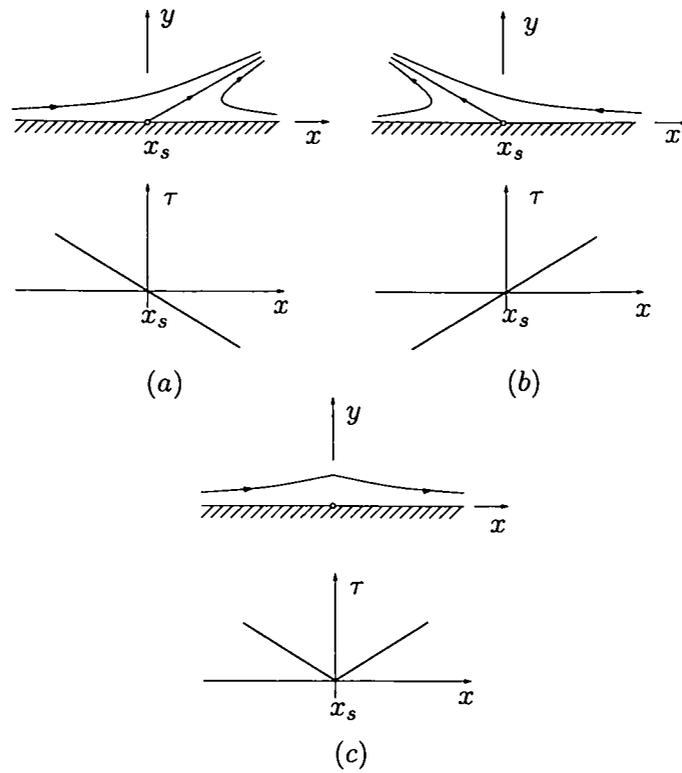
$$\psi_{01}(y) = \frac{d\psi_{00}}{dy} \left\{ B + \int_0^y \frac{-F(\bar{y})}{\left( \frac{d\psi_{00}}{d\bar{y}} \right)^2} d\bar{y} \right\}, \quad (3.22)$$

wobei sich die Konstante  $B$  durch Anpassen an das Ergebnis (3.16) für die wandnahe Schicht ergibt zu

$$B = \frac{a_0 C T_{ws}}{p_0 \rho_{ws}} . \quad (3.23)$$

### 3.2 Die Grundlösung der marginalen Ablösung

Durch Ansetzen einer zu (3.16) analogen Koordinatenentwicklung der Strömungsgrößen für  $s \rightarrow 0+$  kann, wie in [1] für den inkompressiblen Fall durchgeführt, rigoros gezeigt werden, dass die zum Eigenwert  $\alpha = 3/2$  korrespondierende lokale Lösung über den Punkt  $x_s$  hinaus fortgesetzt werden kann. Es ist jedoch, wie von A. Kluwick in [21] und [22] beschrieben, möglich, mit weitaus einfacheren Überlegungen zum selben Resultat zu gelangen. Die Lösung (3.16) ist bis zum Separationspunkt identisch mit einer lokalen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen um einen Separationspunkt, die, nebst anderen, von Oswatitsch gefunden wurde [23]. Wie in [24] beschrieben, erfüllt diese lokale Lösung der Navier-Stokes Gleichungen auch die Grenzschichtgleichungen in führender Ordnung. Da die Grenzschichtgleichungen keine zweiten Ableitungen nach der Koordinate  $x$  enthalten, kann nun die Lösung um einen Separationspunkt sowie jene um einen Wiederanlegepunkt gemäß Abb. 2 zu einer weiteren Lösung der Grenzschichtgleichungen zusammengesetzt werden. Diese Lösung wird in weiterer Folge als die Grenzlösung identifiziert werden, die sich beim kritischen Anstellwinkel außerhalb eines noch zu bestimmenden asymptotisch kurzen Gebietes um den Ablösepunkt einstellt. Da sie im Folgenden als führender Term einer Entwicklung für kleine Abweichung des Anstellwinkels vom kritischen Wert angesetzt wird, soll jene Lösung im Weiteren als Grundlösung der marginalen Ablösung bezeichnet werden.



**Abbildung 2:** Strömungsbild und Wandschubspannungsverlauf nahe eines Separationspunktes (a), eines Wiederanlegepunktes (b) und eines Punktes marginaler Ablösung (c).

## 4 Asymptotische Entwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen

### 4.1 Die Grundlösung als Grenzlösung für kritischen Anstellwinkel

Um die im vorhergehenden Kapitel definierte Grundlösung der marginalen Ablösung als die die lokalen Strömungsverhältnisse beim kritischen Anstellwinkel beschreibende Lösung zu identifizieren, wird eine asymptotische Entwicklung der Strömungsgrößen in der Grenzschicht für kleine Abweichung des Anstellwinkels  $k$  vom kritischen Wert  $k_c$  formuliert. Diese Variation sei mit  $\Delta k = k - k_c$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \Delta k \psi_1 + \dots \\ \rho &= \rho_0 + \Delta k \rho_1 + \dots \\ T &= T_0 + \Delta k T_1 + \dots \\ p &= p_0 + \Delta k p_1 + \dots\end{aligned}\quad (4.1)$$

Die Entwicklung, deren führender Term die Grundlösung ist, wird sowohl in der wandnahen Schicht als auch in der Zwischenschicht ausgeführt werden. Für die wandnahe Schicht wird analog zu [1] der folgende Ansatz für die Stromfunktion  $\psi_1$  gewählt:

$$\psi_1 = \xi^{4\beta} f_{11}(\eta) + \xi^{4\beta+3} f_{12}(\eta) + \dots; \xi \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

Zur Bestimmung der Ansätze für die Funktionen  $\rho_1$  und  $T_1$  wird auf die Crocco-Busemann Lösung (2.28), die thermische Zustandsgleichung (2.3) sowie die 2. Grenzschichtgleichung (2.16) zurückgegriffen. Unter Benützung der aus den genannten Gleichungen folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}T &= T_{ws} - \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)^2 + \Delta k \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right\} + \dots, \\ \frac{\partial}{\partial y} \{ \rho_0 T_1 + \rho_1 T_0 \} &= 0,\end{aligned}\quad (4.3)$$

erhalten wir die Struktur der Entwicklungen von  $\rho_1$  und  $T_1$ :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \xi^{4\beta+1} \rho_{11}(\eta) + \xi^{4\beta+5} \rho_{12}(\eta) + \dots, \\ T_1 &= \xi^{4\beta+1} T_{11}(\eta) + \xi^{4\beta+5} T_{12}(\eta) + \dots.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Das Eintragen der Ansätze für  $\psi_1$ ,  $\rho_1$  und  $T_1$  in die 1. Grenzschichtgleichung (2.15) sowie die Randbedingungen an der Profilloberfläche führt auf folgende Gleichungen für die Funktionen  $f_{11}$  und  $f_{12}$ :

$$\begin{aligned}f_{11}''' - \frac{1}{8} \frac{p_{00} \rho_{ws} \eta^3}{(CT_{ws})^2} f_{11}'' + \frac{1}{2} \left( \beta + \frac{1}{4} \right) \frac{p_{00} \rho_{ws} \eta^2}{(CT_{ws})^2} f_{11}' - \frac{\beta p_{00} \rho_{ws} \eta}{(CT_{ws})^2} f_{11} &= 0, \\ f_{11}(0) = f_{11}'(0) &= 0.\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
f_{12}''' - \frac{1}{8} \frac{p_{00} \rho_{ws} \eta^3}{(CT_{ws})^2} f_{12}'' + \frac{1}{2} (\beta + 1) \frac{p_{00} \rho_{ws} \eta^2}{(CT_{ws})^2} f_{12}' - (\beta + \frac{3}{4}) \frac{p_{00} \rho_{ws} \eta}{(CT_{ws})^2} f_{12} = & \quad (4.6) \\
-\frac{\beta + 1}{CT_{ws}} f_{01}' f_{11}' + \frac{\beta}{CT_{ws}} f_{11} f_{01}'' + \frac{3}{2CT_{ws}} f_{01} f_{11}'' & \quad , \\
f_{12}(0) = f_{12}'(0) = 0 & \quad .
\end{aligned}$$

Die Gleichungen weisen dieselbe Struktur wie jene für  $f_{01}$  und  $f_{02}$  auf. Die gleiche Argumentation, die zum Auffinden der Lösungen für  $f_{01}$  und  $f_{02}$  geführt hat, liefert hier für die möglichen Eigenwerte

$$\beta = m - \frac{1}{2}; \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.7)$$

Für  $f_{11}$  und  $f_{12}$  erhalten wir mit dem minimalen Wert von  $\beta = -\frac{1}{2}$

$$f_{11}(\eta) = \frac{1}{2} a_1 \eta^2; \quad f_{12}(\eta) = \frac{1}{2} b_1 \eta^2 \quad (4.8)$$

Im Rahmen der hier durchgeführten lokalen Analyse der Grenzschichtgleichungen können analog zu  $a_0$  und  $b_0$  auch die Konstanten  $a_1$  und  $b_1$  nicht bestimmt werden.

Weiters finden wir unter Verwendung der Ergebnisse für  $f_{11}$  und  $f_{12}$  sowie der Beziehungen (4.2) und (4.3):

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(\eta) &= \frac{1}{2} \frac{a_1 p_{00} \eta^3}{CT_{ws}^2} \quad , \\
T_{11}(\eta) &= -\frac{1}{2} \frac{a_1 p_{00} \eta^3}{CT_{ws} \rho_{ws}} \quad .
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Zusammenfassend kann deshalb für die Korrekturlösung 1. Ordnung in der wandnahen Schicht  $(\psi_1, \rho_1, T_1)$  geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{\xi^2} \frac{a_1 \eta^2}{2} + \dots \quad , \\
\rho_1 &= \frac{1}{\xi} \frac{a_1 p_{00} \eta^3}{2CT_{ws}^2} + \dots \quad , \\
T_1 &= -\frac{1}{\xi} \frac{a_1 p_{00} \eta^3}{2CT_{ws} \rho_{ws}} + \dots \quad .
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Aus der Anwendung der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklungen auf die Korrekturlösung - d.h. durch Auswertung der Lösung für  $\eta \rightarrow \infty$  - folgt für die Struktur der Lösung in der Zwischenschicht für  $s \rightarrow 0-$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{(-s)} \psi_{10}(y) + \dots; \quad \rho_1 = \frac{1}{(-s)} \rho_{10}(y) + \dots; \\
T_1 &= \frac{1}{(-s)} T_{10}(y) + \dots \quad .
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Aus den Beziehungen (4.10) und (4.11) ist ersichtlich, dass die asymptotische Entwicklung der Strömungsgrößen gemäß (4.1) für  $s \rightarrow 0-$  nicht gleichmäßig gültig ist. Die Grenze der Gültigkeit markiert die Gleichheit der Größenordnungen des ersten Terms der Korrekturlösung und des zweiten Terms der Koordinatenentwicklung der Grundlösung:

$$(-s) \sim \frac{\Delta k}{(-s)}; \quad \Delta k \sim (-s)^2 \quad . \quad (4.12)$$

## 4.2 Notwendigkeit der Erweiterung der Zweischichtenstruktur

Die Konsequenz aus Beziehung (4.12) ist, dass die asymptotische Entwicklung der Strömungsgrößen gemäß (4.1) im Bereich  $|x - x_s| = O(|\Delta k|^{1/2}) = O(\epsilon^{1/2})$  adaptiert werden muss. In jenem Bereich wird die wandnahe, reibungsbehaftete Schicht im Folgenden als Lower Deck, die Zwischenschicht als Main Deck bezeichnet werden. Gemäß den in Abschnitt 3.1 bestimmten Abmessungen von wandnaher Schicht und Zwischenschicht folgt:

$$\begin{aligned} \text{MainDeck} : \quad & |x - x_s| = O(\epsilon^{1/2}); \quad y = O(1) \quad , \\ \text{LowerDeck} : \quad & |x - x_s| = O(\epsilon^{1/2}); \quad y = O(\epsilon^{1/8}) \quad . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Begriffe Main Deck und Lower Deck sind aufgrund der Arbeiten von Stewartson [10] [25] im englischsprachigen Raum zu den Standardbezeichnungen für die in Wechselwirkungsproblemen auftretende Schichtenstruktur geworden. Sie sollen deshalb auch in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung kommen und hierbei die Schichtenstruktur sowohl im wechselwirkungsfreien Fall als auch im später zu besprechenden Fall mit Wechselwirkung benennen.

### 4.2.1 Main Deck

Unter Berücksichtigung von (4.11) folgt für die Ansätze im Main Deck unter Anwendung der gestreckten Variable  $x_m = \epsilon^{-1/2}(x - x_s)$  sowie mit  $y_m = y$  und  $k = k_c + \epsilon k_1 + \dots$

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{M0}(x_m, y_m) + \epsilon^{1/2} \psi_{M1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ \rho &= \rho_{M0}(x_m, y_m) + \epsilon^{1/2} \rho_{M1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ T &= T_{M0}(x_m, y_m) + \epsilon^{1/2} T_{M1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ p &= P_0 + \epsilon^{1/2} p_{00} x_m + \epsilon (k_1 P_1 + p_{01} x_m^2) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aus dem Anpassen an den Ansatz (3.17) für die Zwischenschicht in der Grenze  $x_m \rightarrow -\infty$  erhalten wir

$$\psi_{M0}(x_m, y_m) = \psi_{00}(y_m); \quad \rho_{M0}(x_m, y_m) = \rho_{00}(y_m); \quad T_{M0}(x_m, y_m) = T_{00}(y_m) \quad . \quad (4.15)$$

Das Einsetzen des Ansatzes (4.14) in die Grenzschichtgleichungen liefert unter Verwendung der Crocco-Busemann Lösung (2.28), der thermischen Zustandsgleichung (2.3) sowie der Abkür-

zungen (3.20)

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial^2 \psi_{M1}}{\partial x_m \partial y_m} - \frac{\partial \psi_{M1}}{\partial x_m} \frac{d^2 \psi_{00}}{dy_m^2} &= -p_{00} \rho_{00} (M_{00}^2 - 1) \\
&\quad - \frac{C}{\rho_{00}^2} \left( \frac{d^2 \psi_{00}}{dy_m^2} \right)^2 \left\{ 4 \frac{d\psi_{00}}{dy_m} - \frac{5}{N} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \right)^3 + \frac{1}{N^2} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \right)^5 \right\} \\
&\quad + \frac{CT_{00}}{\rho_{00}^2} \frac{d^3 \psi_{00}}{dy_m^3} \\
&= F(y_m) \quad .
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Wir erhalten als Lösung für  $\psi_{M1}, \rho_{M1}, T_{M1}$  (in impliziter Form)

$$\begin{aligned}
\psi_{M1} &= \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \left\{ \frac{A_1(x_m)CT_{ws}}{p_{00}\rho_{ws}} + x_m \int_0^{y_m} \frac{F(\hat{y})}{\left( \frac{d\psi_{00}}{d\hat{y}} \right)^2} d\hat{y} + G(y_m) \right\} \quad , \\
\rho_{M1} &= \frac{1}{N} \left\{ \rho_{00} \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial \psi_{M1}}{\partial y_m} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_{00} \rho_{00}^2 x_m \right\} \quad , \\
T_{M1} &= \frac{\rho_{M1}}{\rho_{00}^3} \left( \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \right)^2 - \frac{1}{\rho_{00}^2} \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial \psi_{M1}}{\partial y_m} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

wobei  $A(x_m)$  und  $G(y_m)$  zunächst noch beliebige Funktionen darstellen. Aus dem Anpassen an das Resultat (3.22) für die Zwischenschicht folgt

$$G(y_m) = 0; \quad A_1(x_m) = a_0(-x_m) + \dots; \quad x_m \rightarrow -\infty \quad . \tag{4.18}$$

#### 4.2.2 Lower Deck

Mit der durch die Dicke des Lower Decks festgelegten Variable  $y_l = \epsilon^{-1/8}y$  sowie mit  $x_l = x_m = \epsilon^{-1/2}(x - x_s)$  erhalten wir für die Stromfunktion  $\psi$  durch Anpassen an die Entwicklung (4.1) in der wandnahen Schicht

$$\begin{aligned}
\psi &= \epsilon^{3/8} \frac{p_{00}\rho_{ws}}{6CT_{ws}} y_l^3 \\
&\quad + \epsilon^{6/8} \left\{ \frac{a_0}{2} (-x_l) y_l^2 + \text{sign}(\Delta k) \frac{a_1}{2} \frac{y_l^2}{(-x_l)} \right\} \\
&\quad + \epsilon^{9/8} \left\{ \frac{a_0^2 p_{00} \rho_{ws}}{40320 C^3 T_{ws}^3} y_l^9 - \frac{a_0^2}{120 C T_{ws}} (-x_l) y_l^5 + \frac{b_0}{2} (-x_l)^{7/4} y_l^2 + \text{sign}(\Delta k) \frac{b_1}{2} \frac{y_l^2}{(-x_l)^{1/4}} \right\} \\
&\quad + \dots; \\
&\quad \forall y_l \rightarrow \infty; \quad x_l \rightarrow -\infty \quad .
\end{aligned} \tag{4.19}$$

und damit für die asymptotische Struktur der Entwicklung der Stromfunktion  $\psi$  im Lower Deck

$$\psi = \epsilon^{3/8} \frac{p_{00} \rho_{ws}}{6CT_{ws}} y_l^3 + \epsilon^{6/8} \psi_{L1}(x_l, y_l) + \epsilon^{9/8} \psi_{L2}(x_l, y_l) + \dots \quad (4.20)$$

Weiters folgt für Dichte und Temperatur durch Anpassen an die Entwicklung (4.1) in der wandnahen Schicht

$$\begin{aligned} \rho = \rho_{ws} + \epsilon^{1/2} \frac{p_{00}^2 \rho_{ws}}{8C^2 T_{ws}^3} y_l^4 \\ + \epsilon^{7/8} \left\{ \frac{\text{sign}(\Delta k) a_1 p_{00}}{2CT_{ws}^2} \frac{y_l^3}{(-x_l)} + \frac{p_{00}^2 \rho_{ws}}{13440C^4 T_{ws}^5} y_l^7 \right\} \\ + \dots; \quad \forall y_l \rightarrow \infty; \quad x_l \rightarrow -\infty \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} T = T_{ws} - \epsilon^{1/2} \frac{p_{00}^2}{8C^2 T_{ws}^2} y_l^4 \\ + \epsilon^{7/8} \left\{ \frac{-\text{sign}(\Delta k) a_1 p_{00}}{2CT_{ws} \rho_{ws}} \frac{y_l^3}{(-x_l)} + \frac{p_{00}^2}{26880C^4 T_{ws}^4} y_l^7 \right\} \\ + \dots; \quad \forall y_l \rightarrow \infty; \quad x_l \rightarrow -\infty \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Entwicklungen für Dichte und Temperatur haben daher im Lower Deck folgende asymptotische Struktur:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_{ws} + \epsilon^{1/2} \rho_{L1}(y_l) + \epsilon^{7/8} \rho_{L2}(x_l, y_l) + \dots \quad , \\ T = T_{ws} + \epsilon^{1/2} T_{L1}(y_l) + \epsilon^{7/8} T_{L2}(x_l, y_l) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aus (4.23) ist ersichtlich, dass die Strömung im Lower Deck in führender Ordnung inkompressibel ist. Wir erhalten nach Eintragen der Ansätze (4.20) und (4.23) in die Grenzschichtgleichungen folgende Beziehung für die Funktion  $\psi_{L1}$ :

$$\frac{p_{00} \rho_{ws}}{2(CT_{ws})^2} y_l^2 \frac{\partial^2 \psi_{L1}}{\partial x_l \partial y_l} - \frac{p_{00} \rho_{ws}}{(CT_{ws})^2} y_l \frac{\partial \psi_{L1}}{\partial x_l} = \frac{\partial^3 \psi_{L1}}{\partial y_l^3} \quad . \quad (4.24)$$

Diese ist bis auf die vorkommenden Konstanten mit der in [1] gefundenen Gleichung ident. Zusammen mit den Randbedingungen

$$y_l = 0: \quad \psi_{L1} = \frac{\partial \psi_{L1}}{\partial y_l} = 0 \quad , \quad (4.25)$$

$$y_l \rightarrow \infty: \quad \psi_{L1} = \frac{1}{2} A_1(x_l) y_l^2 \quad , \quad (4.26)$$

$$x_l \rightarrow -\infty: \quad \psi_{L1} = \frac{1}{2} A_1(x_l) y_l^2 \quad (4.27)$$

liegt ein lineares Randwertproblem vor, dessen Lösung mit der Methode der Fouriertransformationen gefunden werden kann. Wir erhalten für die Funktion  $\psi_{L1}$ :

$$\psi_{L1} = \frac{1}{2} A_1(x_l) y_l^2 \quad . \quad (4.28)$$

Die Funktionen  $\rho_{L1}$  und  $T_{L1}$  sind für den weiteren Verlauf der Untersuchung nicht maßgebend und werden deshalb nicht berechnet. Wesentlich ist hingegen  $\psi_{L1}$  und damit verbunden die Funktion  $A_1(x_l)$ , die unmittelbar mit der Wandschubspannung  $\tau_w = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=0}$  zusammenhängt.

$$\tau_w = \epsilon^{1/2} \frac{CT_{ws}}{\rho_{ws}} \frac{\partial^2 \psi_{L1}}{\partial y_l^2} |_{y_l=0} + \dots = \epsilon^{1/2} \frac{CT_{ws}}{\rho_{ws}} A_1(x_l) + \dots \quad (4.29)$$

Zur Bestimmung der Funktion  $A_1(x_l)$  muss auf die Bestimmungsgleichung für den Term  $\psi_{L2}$  zurückgegriffen werden:

$$\begin{aligned} \frac{p_{00}\rho_{ws}}{2(CT_{ws})^2} y_l^2 \frac{\partial^2 \psi_{L2}}{\partial x_l \partial y_l} - \frac{p_{00}\rho_{ws}}{(CT_{ws})^2} y_l \frac{\partial \psi_{L2}}{\partial x_l} &= \frac{\partial^3 \psi_{L2}}{\partial y_l^3} + \\ &+ \frac{1}{CT_{ws}} \frac{\partial^2 \psi_{L1}}{\partial y_l^2} \frac{\partial \psi_{L1}}{\partial x_l} - \frac{1}{CT_{ws}} \frac{\partial \psi_{L1}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 \psi_{L1}}{\partial x_l \partial y_l} \quad (4.30) \\ &= \frac{\partial^3 \psi_{L2}}{\partial y_l^3} - \frac{1}{2CT_{ws}} A_1 A_1' y_l^2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen dieser Differenzialgleichung sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{L2}}{\partial y_l} |_{y_l=0} &= 0; \quad \psi_{L2} |_{y_l=0} = 0; \\ \psi_{L2} &= \frac{a_0^2 p_{00} \rho_{ws}}{40320 C^3 T_{ws}^3} y_l^9 - \frac{a_0^2}{120 CT_{ws}} (-x_l) y_l^5 + \frac{b_0}{2} (-x_l)^{7/4} y_l^2 + \text{sign}(\Delta k) \frac{b_1}{2} \frac{y_l^2}{(-x_l)^{1/4}}; \\ \forall x_l &\rightarrow -\infty; \quad y_l \rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wie schon für die Funktion  $\psi_{L1}$  liegt auch für  $\psi_{L2}$  ein lineares Randwertproblem vor. Für dessen Lösung mittels der Methode der Fouriertransformation erweist es sich als vorteilhaft, auf eine Funktion  $\psi_2$  zu transformieren, die folgende Eigenschaft aufweist:

$$\psi_2(x_l, y_l) = o(1) \quad \forall x_l \rightarrow -\infty; \quad y_l \rightarrow +\infty \quad . \quad (4.32)$$

Dass diese Eigenschaft für die Lösung des Randwertproblems von Vorteil ist, wird anhand von Beziehung (9.19) im Anhang deutlich. Folgende Transformation führt auf eine Funktion  $\psi_2$ , die der Beziehung (4.32) genügt.

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \psi_{L2} - \\ &- \left\{ \frac{a_0^2 p_{00} \rho_{ws}}{40320 C^3 T_{ws}^3} y_l^9 - \frac{a_0^2}{120 CT_{ws}} (-x_l) y_l^5 + \frac{b_0}{2} (-x_l)^{7/4} y_l^2 + \text{sign}(\Delta k) \frac{b_1}{2} \frac{y_l^2}{(-x_l)^{1/4}} \right\} - \\ &- \left\{ \frac{CT_{ws}}{2p_{00}\rho_{ws}} (A_1^2 - a_0^2 x_l^2 - 2a_0 a_1 \text{sign}(\Delta k)) y_l \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Differenzialgleichung (4.30) und die zugehörigen Randbedingungen (4.31) gehen damit über in

$$\begin{aligned} \frac{p_{00}\rho_{ws}}{2(CT_{ws})^2}y_l^2 \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_l\partial y_l} - \frac{p_{00}\rho_{ws}}{(CT_{ws})^2}y_l \frac{\partial\psi_2}{\partial x_l} &= \frac{\partial^3\psi_2}{\partial y_l^3} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y_l}\Big|_{y_l=0} &= g(x_l); \quad \psi_2\Big|_{y_l=0} = 0; \\ g(x_l) &= -\frac{CT_{ws}}{2p_{00}\rho_{ws}} (A_1^2 - a_0^2x_l^2 - 2a_0a_1\text{sign}(\Delta k)) \quad y_l \rightarrow 0; \quad x_l \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (4.34)$$

Wieder kann, wie im Anhang durchgeführt, die Methode der Fouriertransformation benutzt werden. Dabei zeigt sich, dass für die Existenz einer nicht exponentiell aufklingenden Lösung eine Lösbarkeitsbedingung erfüllt sein muss.

### 4.3 Lösbarkeitsbedingung

Aus der Fouriertransformation der Gleichung (4.34) folgt, dass diese nur dann keine exponentiell aufklingenden Lösungen aufweist, wenn gilt

$$g(x_l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1(x_l) = a_0\sqrt{x_l^2 + 2\frac{a_1}{a_0}\text{sign}(\Delta k)} \quad (4.35)$$

Für den Fall inkompressibler Strömung folgt für die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  aus der numerischen Integration der Grenzschichtgleichungen entlang eines Flügelprofils im Bereich der Vorderkante welche parabolische Form aufweist [1]:

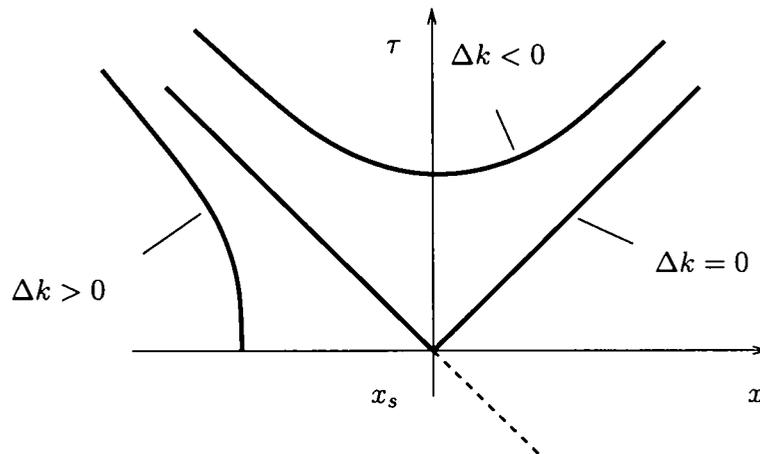
$$a_0 > 0; \quad a_1 < 0 \quad (4.36)$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Vorzeichenrelationen (4.36) auch im Fall kompressibler Strömung gültig bleiben, da Gleichung (4.35) nur dann mit dem experimentellen Befund übereinstimmt, dass für Werte des Anstellwinkels, die kleiner sind als der kritische Wert ( $\Delta k < 0$ ) die Wandschubspannung (und damit  $A_1(x_l)$ ) ein von null verschiedenes Minimum aufweist [26]. Für  $\Delta k > 0$  hingegen liefert Gleichung (4.35) - im Gegensatz zum Experiment - das Ergebnis, dass die Wandschubspannung im Punkt  $x_l = -(2|a_1|/a_0)^{1/2}$  wurzelartig den Wert null erreicht (siehe Abb. 3 sowie die Diskussion der Vorderkantenablösung in [4]). Die mathematische Formulierung dieses Ergebnisses wird als Goldsteinsingularität bezeichnet. Stromab des Punktes  $x_l = -(2|a_1|/a_0)^{1/2}$  ist das hierarchische Konzept der Grenzschichttheorie nicht mehr anwendbar. Die Tatsache, dass die Lösbarkeitsbedingung (4.35) unter der Bedingung (4.36) im Einklang mit den Beobachtungen ist, läßt den Schluss zu, dass die Grundlösung tatsächlich - mit gleich zu besprechenden Einschränkungen - die Strömungsverhältnisse beim kritischen Anstellwinkel beschreibt. Diese Identifikation gilt mit Ausnahme eines asymptotisch kurzen Gebietes um den Punkt verschwindender Wandschubspannung. Obwohl nämlich für die Grundlösung als Grenzlösung für  $\Delta k \rightarrow 0+$  die Stärke der Goldsteinsingularität beliebig klein wird, ist dennoch auch für diese Lösung das hierarchische Konzept der Grenzschichttheorie verletzt, da die Richtung der Stromlinien am Grenzschichttrand über dem Punkt verschwindender Wandschubspannung eine Diskontinuität aufweist. Dies macht folgende, unter Verwendung

von Gleichung (4.17) gewonnene, Beziehung für die Stromlinienneigung am Grenzschichtrand deutlich:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{\psi=\psi_{GS}=\text{const}} &= -\text{Re}^{-1/2} \epsilon^{-1/2} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \Big|_{y_m=\infty}}{\frac{\partial \psi}{\partial y_m} \Big|_{y_m=\infty}} \\ &= -\text{Re}^{-1/2} \left\{ \frac{CT_{ws}}{p_{00}\rho_{ws}} \frac{dA_1(x_m)}{dx_m} + \int_0^\infty \frac{F(\hat{y})}{\left(\frac{d\psi_{00}}{d\hat{y}}\right)^2 d\hat{y}} \right\} + O(\text{Re}^{-1/2} \epsilon^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$\psi_{GS}$  bezeichnet hierbei den der Stromlinie am Grenzschichtrand entsprechenden Wert der Stromfunktion  $\psi$ .



**Abbildung 3:** Wandschubspannungsverläufe für verschiedene Werte der Anstellwinkelvariation  $\Delta k$

## 5 Wechselwirkung mit der schallnahen Außenströmung

### 5.1 Das transsonische Triple Deck

Wie in Kapitel 4.3 dargelegt, ist für den Fall  $\Delta k \geq 0$  das hierarchische Konzept der Grenzschichttheorie verletzt und daher eine Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Grenzschichtströmung und reibungsfreier Außenströmung notwendig. In [2] und [3] wurde für den Fall inkompressibler Strömung diese Wechselwirkung analysiert. Dabei ergab sich, dass eine Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in einem gewissen, von der Reynoldszahl abhängigen Bereich existiert, für welche gilt, dass die Wechselwirkung auf ein asymptotisch kurzes Gebiet beschränkt bleibt, welches im Grenzfall  $Re = \infty$  verschwindet. Im Folgenden soll nun die Wechselwirkung für den Fall kompressibler Strömung und schallnaher Bedingungen in der Außenströmung analysiert werden, beginnend mit der Bestimmung der asymptotischen Abmessungen des Wechselwirkungsgebietes, das die Struktur eines Triple Decks aufweist<sup>9</sup>.

#### 5.1.1 Bestimmung der asymptotischen Struktur

Wie in den vorangegangenen Kapiteln ausgeführt, bestimmt die Größe der Anstellwinkelvariation  $\Delta k$  die Breite von Lower- und Main Deck (in Strömungsrichtung) und damit jenen Bereich, in dem die Lösung (4.35) gültig ist. Im Folgenden wird nun vorausgesetzt, dass die Größenordnung der betrachteten Anstellwinkelvariation derart an den Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$  gekoppelt ist, so dass die Ausdehnung des Wechselwirkungsgebietes in Strömungsrichtung mit jener, durch die Anstellwinkelvariation  $\Delta k$  festgelegten Ausdehnung von Lower- und Main Deck in Strömungsrichtung im wechselwirkungsfreien Fall übereinstimmt. Eine detaillierte Begründung für diese Voraussetzung wird in [4] gegeben. Weiters wird angenommen und a posteriori gezeigt, dass die bisher identifizierte Zweischichtenstruktur und die zugehörigen physikalischen Mechanismen durch die Wechselwirkung nicht beeinflusst werden. Das Lower Deck ist demnach, wie im wechselwirkungsfreien Fall, jener wandnahe Bereich, in dem Trägheits-, Reibungs- und Druckkräfte in Balance sind. Das Main Deck bezeichnet den an die Zwischenschicht anschließenden, lokal reibungsfreien Bereich des Wechselwirkungsgebietes. Neben Lower- und Main Deck muss auch jenes asymptotisch kurze Gebiet, das in der Außenströmung von der Wechselwirkung beeinflusst wird und gemäß der gängigen Konvention als Upper Deck bezeichnet wird, betrachtet werden. Dieses Gebiet habe die Abmessungen  $\Theta(Re)$  bzw.  $\Gamma(Re)$  in  $x$ - bzw.  $\bar{y}$ -Richtung. Die Außenströmung soll im Wechselwirkungsgebiet die Voraussetzungen der Schallnähe erfüllen, das Wechselwirkungsgebiet also demnach ein asymptotisch kurzer Bereich um die Schalllinie sein. In Schallnähe sind mögliche Stöße schwach und die Strömung näherungsweise isentrop. Dies wird a posteriori mit der für die Außenströmung erhaltenen asymptotischen Entwicklung bestätigt werden. Weiters wird sich zeigen, dass die in der Außenströmung induzierte Störströmung in führender Ordnung reibungsfrei ist. Unter der Voraussetzung der Reibungsfreiheit bzw. konstanter Entropie entlang einer Stromlinie kann, wie bei der Diskussion der Grundgleichungen ausgeführt, die Gasdynamische Gleichung verwendet werden. Demnach ist dies auch zur Analyse der ungestörten Außenströmung sowie der führenden Ordnung der induzierten Störströmung möglich. Eine (generalisierte) Koordinatenentwicklung der in der Gasdynamischen

<sup>9</sup>Eine deallierte Darstellung der Triple-Deck Theorie findet sich zum Beispiel in [25].

Gleichung vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$ <sup>10</sup> kann in Schallnähe unter Verwendung der gestreckten Koordinaten  $x_o = (x - x_s)/\Theta$  sowie  $y_o = \bar{y}/\Gamma$  folgendermaßen angesetzt werden:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} u &= 1 + K_1 \epsilon_1 + \Delta u; \quad v = \Delta v \quad , \\ \Delta u &= u_{10} x_o \Theta + u_{01}(\epsilon_1) \Gamma y_o + u_{11}(\epsilon_1) \Gamma \Theta x_o y_o + \dots + \bar{u}_o(x_o, y_o, \epsilon_1) \quad , \quad (5.1) \\ \Delta v &= v_{01}(\epsilon_1) \Gamma y_o + v_{11}(\epsilon_1) \Theta \Gamma x_o y_o + \dots + \bar{v}_o(x_o, y_o, \epsilon_1) \quad . \end{aligned}$$

$K_1$ , der sogenannte schallnahe Ähnlichkeitsparameter, ist zusammen mit dem Entwicklungsparameter  $\epsilon_1(\text{Re})$ , dessen Größenordnung noch zu bestimmen sein wird, ein Maß für die Schallnähe der Strömung.  $\bar{u}_o$  bzw.  $\bar{v}_o$  bezeichnen die aufgrund der Wechselwirkung induzierten Geschwindigkeitsstörungen in der Außenströmung.  $u_{10}$  ist ein konstanter Entwicklungskoeffizient. Die weiteren Koeffizienten ( $u_{01}, u_{11}, v_{01}$ , usw.) hängen vom Entwicklungsparameter  $\epsilon_1$  ab. Durch Einsetzen von (5.1) in die Gasdynamische Gleichung können Relationen zwischen diesen Koeffizienten bestimmt werden. Für den für die Bestimmung der asymptotischen Struktur des transonischen Triple Decks maßgeblichen Koeffizienten  $u_{01}$  ergibt sich

$$u_{01} = -\kappa_s + O(\epsilon_1). \quad (5.2)$$

$\kappa_s$  bezeichnet hierbei den lokalen Krümmungsradius der Wand am Punkt  $x = x_s$ . Im Wechselwirkungsgebiet soll per definitionem die lokale Machzahl nur wenig vom Wert 1 abweichen und insbesondere ein Schalldurchgang möglich sein. Damit erhalten wir für die Größenordnung der wandparallelen Geschwindigkeitsänderung im Wechselwirkungsgebiet

$$\Delta u \sim \epsilon_1 \quad . \quad (5.3)$$

Die asymptotischen Abmessungen des Wechselwirkungsgebietes  $\Gamma$  und  $\Theta$  sowie der Entwicklungsparameter  $\epsilon_1$  müssen nun so gewählt werden, dass die Geschwindigkeitsänderungen  $\Delta u$  und  $\Delta v$  durch eine nichttriviale Beziehung miteinander verknüpft werden, die Gasdynamische Gleichung demnach nicht degeneriert. Der dadurch charakterisierte Grenzübergang  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  bzw.  $\text{Re} \rightarrow \infty$  wird auch als transonisches Limit der Gasdynamischen Gleichung bezeichnet. Aus der Gasdynamischen Gleichung und der Bedingung der Drehungsfreiheit folgt damit

$$\begin{aligned} \Delta u (\Delta u / \Theta) &\sim \Delta v / \Gamma; \quad \Delta u / \Gamma \sim \Delta v / \Theta \quad , \\ \Rightarrow (\Delta u)^3 &\sim (\Delta v)^2 \sim \frac{\Theta^6}{\Gamma^6} \sim \epsilon_1^3 \quad , \quad (5.4) \\ \Rightarrow \Gamma &\sim \epsilon_1^{-1/2} \Theta \quad . \end{aligned}$$

Um die Analyse der Strömung im Upper Deck fortsetzen zu können, ist es notwendig, das Verhältnis der Größenordnungen von  $\bar{u}_o$  und  $\Theta$  zu kennen. Dazu muss die Strömung in Main- und Lower Deck untersucht werden. Letzteres habe die Abmessungen  $\Theta(\text{Re})$  bzw.  $\delta(\text{Re})$  in  $x$ -

<sup>10</sup>Im Fall des idealen Gases hängt die in der Gasdynamischen Gleichung auftretende Schallgeschwindigkeit  $c$  ausschließlich von den Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  ab (siehe Beziehung (2.22)).

<sup>11</sup>Um bei der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente  $u$  eine Gleichheit zwischen Bezeichnung und Index zu vermeiden, wird im Upper Deck statt des naheliegenden Index  $u$  der Index  $o$  verwendet.

bzw.  $\bar{y}$ -Richtung. Das Verhältnis, in dem die Abmessungen des Decks in  $x$ - bzw.  $\bar{y}$ -Richtung zueinander stehen, folgt aus der Analyse der Grenzschichtgleichungen am Beginn der Arbeit (Beziehung 3.5) zu:

$$\delta \text{Re}^{1/2} \sim \Theta^{1/4} \quad . \quad (5.5)$$

Aus der Anpassung an die linear von  $x$  abhängige Wandschubspannung außerhalb des Wechselwirkungswirkungsgebietes folgt für die Größenordnung der Wandschubspannung in diesem:

$$\tau \sim \Theta \sim \text{Re}^{-1/2} \frac{\bar{u}_l}{\delta} \quad . \quad (5.6)$$

$\bar{u}_l$  bezeichnet hierbei die wandparallele Geschwindigkeitsstörung im Lower Deck.

Wie aus Beziehung (4.30) hervorgeht, wird der Verlauf der Wandschubspannung durch nicht-lineare Trägheitsterme mitbestimmt. Die Wechselwirkung setzt demnach dann ein, wenn die Größenordnung des induzierten Druckgradienten jene der nichtlinearen Trägheitsterme erreicht und damit die - den Druckgradienten mittelbar bestimmende - Wandschubspannung beeinflusst wird.

Wir erhalten daher für die im Lower Deck wirkende Druckstörung  $\bar{p}_l$  die Abschätzung

$$\bar{p}_l \sim \bar{u}_l^2 \quad . \quad (5.7)$$

Im Fall inkompressibler Strömung sind die Druckstörungen in den einzelnen Decks von gleicher Größenordnung, [2]. Dass dies für den kompressiblen Fall ebenfalls gültig ist, wird an dieser Stelle a priori angenommen und im weiteren Verlauf der Arbeit verifiziert werden:

$$\bar{p}_l \sim \bar{p}_o \sim \bar{p}_m \quad (5.8)$$

Aus der Linearisierung der Euler-Gleichung ergibt sich im Upper Deck der folgende Zusammenhang zwischen induzierter Druckstörung und wandparalleler Geschwindigkeitskomponente:

$$\bar{p}_o \sim \bar{u}_o \quad . \quad (5.9)$$

Wir erhalten damit aus den Beziehungen (5.5) - (5.9) für das Verhältnis der Größenordnungen von  $\bar{u}_o$  und  $\Theta$ :

$$\bar{u}_o \sim \Theta^{5/2} = o(\Theta) \quad . \quad (5.10)$$

Weiters verfeinern wir die Problemdefinition und legen fest, dass der Auftreffpunkt der Schalllinie im Wechselwirkungsgebiet liegen soll. Dies kommt einer Beschränkung der maximalen Krümmung im Punkt  $x = x_s$  gleich, wie aus den Beziehungen (5.1)-(5.4) und (5.10) ersichtlich wird:

$$\Theta \sim \epsilon_1; \quad \kappa_s = o(\epsilon_1^{1/2}) \quad . \quad (5.11)$$

Für die Störgeschwindigkeiten  $\bar{u}_o$  und  $\bar{v}_o$  folgt - unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.1)-(5.4) sowie (5.10) und (5.11) - aus der Gasdynamischen Gleichung sowie der Bedingung der Drehungsfreiheit

$$\bar{u}_o \sim \frac{\bar{v}_o}{\Gamma}; \quad \bar{u}_o \sim \bar{v}_o \frac{\Gamma}{\Theta} \quad . \quad (5.12)$$

Die für kritischen Anstellwinkel linear von  $x$  abhängige Wandschubspannung bzw. Verdrängungsdicke induziert eine - von der Unstetigkeit am Punkt  $x = x_s$  abgesehen - konstante Geschwindigkeitsstörung in  $\bar{y}$ -Richtung der Größenordnung  $\text{Re}^{-1/2}$  in der Außenströmung, so dass für die Größenordnung der wandnormalen Geschwindigkeitsstörung im Upper Deck folgt  $\bar{v}_o = O(\text{Re}^{-1/2})$ . Wir erhalten damit für die induzierte Druckstörung im Upper Deck

$$\bar{p}_o \sim \bar{u}_o \sim \frac{\bar{v}_o}{\Gamma} \sim \frac{\text{Re}^{-1/2}}{\Gamma} \sim \frac{\text{Re}^{-1/2}}{\Theta^{1/2}} \quad . \quad (5.13)$$

Die Lösung des durch die Beziehungen (5.5) (5.6) (5.7) (5.8) und (5.13) definierten algebraischen Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} \Theta \sim \epsilon_1 \sim \text{Re}^{-1/6}; \quad \Gamma \sim \text{Re}^{-1/12}; \quad \delta \sim \text{Re}^{-13/24}; \\ \bar{u}_l \sim \text{Re}^{-5/24}; \quad \bar{p}_l \sim \bar{p}_m \sim \bar{p}_o \sim \bar{u}_o \sim \text{Re}^{-5/12} \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aus  $\bar{u}_o = o(\Theta)$  und dem Ansatz (5.1) kann die physikalische Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Wechselwirkung die Lage der Schalllinie in führender Ordnung im Wechselwirkungsgebiet nicht beeinflusst.

Um zu überprüfen, ob die Voraussetzung der Drehungsfreiheit erfüllt ist, gehen wir aus von der folgenden, für das ideale Gas geltenden Beziehung [27] für den Entropiesprung über einen Stoß:

$$[s] = \frac{2}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} (M^2-1)^3 + \dots = \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{12} (M_*^2-1)^3 + \dots; \quad M_*^2-1 \rightarrow 0^+ \quad . \quad (5.15)$$

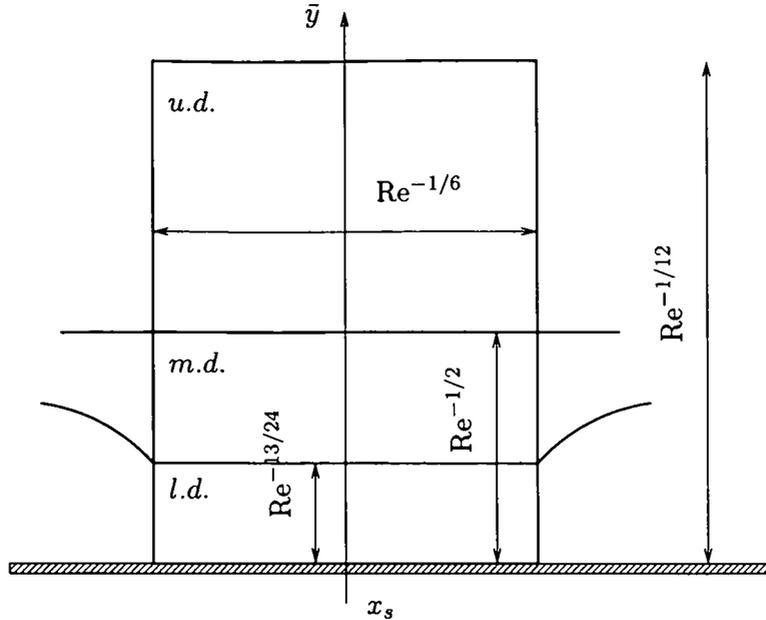
Unter Beachtung von  $M_*^2 = u^2 + v^2$  sowie mit (5.1) folgt aus (5.15) für die Größenordnung des Entropiesprungs

$$[s] \sim \epsilon_1^3 \sim \text{Re}^{-1/2} \quad . \quad (5.16)$$

Die über einen möglichen Stoß im Wechselwirkungsgebiet induzierte Drehung ist damit gemäß dem Croccoschen Wirbelsatz höchstens von der Größenordnung  $O(\epsilon_1^3) = O(\text{Re}^{-1/2})$ . Für die mögliche, mit den Störgeschwindigkeiten verbundene Drehung gilt jedoch

$$\frac{\partial \bar{u}_o}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_o}{\partial x} = O(\epsilon_1^2) = O(\text{Re}^{-1/3}) \quad . \quad (5.17)$$

Daraus folgt, dass die Strömung mindestens bis zu den in (5.1) betrachteten Größenordnungen drehungsfrei ist. In Abb. 4 ist die soeben bestimmte asymptotische Struktur des transonischen Triple Decks schematisch dargestellt. Im Folgenden soll nun die Strömung in den einzelnen Decks untersucht werden.



**Abbildung 4:** Asymptotische Struktur des transonischen Triple Decks - Upper Deck (*u.d.*), Main Deck (*m.d.*) und Lower Deck (*l.d.*).

## 5.2 Main Deck

Aufgrund der zuletzt gewonnenen Ergebnisse werden im Main Deck folgende Variablenstreckungen durchgeführt:

$$x_m = (x - x_s)Re^{1/6}; \quad y_m = \bar{y}Re^{1/2} \quad . \quad (5.18)$$

Aus der Anpassung der Strömungsgrößen in der wechselwirkungsfreien Außenzone an jene im Wechselwirkungsgebiet folgt, dass die asymptotische Struktur der Entwicklungen für die Strömungsgrößen in Lower- und Main Deck identisch ist mit jener in den genannten Bereichen im wechselwirkungsfreien Fall. Wir erhalten damit für das Main Deck aus (4.14) und unter Beachtung von  $\epsilon \sim |\Delta k| \sim Re^{-1/3}$ :

$$\begin{aligned} \psi(x_m, y_m) &= Re^{-1/2}\psi_{m0}(x_m, y_m) + Re^{-2/3}\psi_{m1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ \rho(x_m, y_m) &= \rho_{m0}(x_m, y_m) + Re^{-1/6}\rho_{m1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ T(x_m, y_m) &= T_{m0}(x_m, y_m) + Re^{-1/6}T_{m1}(x_m, y_m) + \dots \quad , \\ p(x_m, y_m) &= P_0 + Re^{-1/6}p_{00}x_m + Re^{-2/6}(k_1P_1 + p_{01}\frac{1}{2}x_m^2) + Re^{-5/12}p_m(x_m, y_m) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mittels der Anpassung an den Ansatz (3.17) für die Zwischenschicht können die führenden Terme folgendermaßen konkretisiert werden:

$$\psi_{m0}(x_m, y_m) = \psi_{00}(y_m); \quad \rho_{m0}(x_m, y_m) = \rho_{00}(y_m); \quad T_{m0}(x_m, y_m) = T_{00}(y_m) \quad . \quad (5.20)$$

Das Einsetzen von (5.19) in die 1. Navier-Stokes Gleichung (2.8) ergibt in führender Ordnung

$$\frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{d\rho_{00}}{dy_m} \frac{\partial\psi_{m1}}{\partial x_m} - \rho_{00} \frac{d^2\psi_{00}}{dy_m^2} \frac{\partial\psi_{m1}}{\partial x_m} - \left(\frac{d\psi_{00}}{dy_m}\right)^2 \frac{\partial\rho_{m1}}{\partial x_m} + \rho_{00} \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial^2\psi_{m1}}{\partial x_m \partial y_m} = F_1(\psi_{00}, T_{00}, \rho_{00}, p_{00}) \quad (5.21)$$

Aus der Energiegleichung (2.11) bzw. den Ableitungen der thermischen Zustandsgleichung (2.3) nach  $x$ - bzw.  $\bar{y}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial T_{m1}}{\partial x_m} - \frac{dT_{00}}{dy_m} \frac{\partial\psi_{m1}}{\partial x_m} &= F_2(\psi_{00}, T_{00}, \rho_{00}) \quad , \\ T_{00} \frac{\partial\rho_{m1}}{\partial x_m} + \rho_{00} \frac{\partial T_{m1}}{\partial x_m} &= \frac{\gamma p_{00}}{\gamma - 1} \quad , \\ \frac{\partial\rho_{00}}{\partial y_m} T_{00} + \rho_{00} \frac{\partial T_{00}}{\partial y_m} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Mit (5.22) vereinfacht sich (5.21) zu

$$\frac{d\psi_{00}}{dy_m} \frac{\partial^2\psi_{m1}}{\partial x_m \partial y_m} - \frac{d^2\psi_{00}}{dy_m^2} \frac{\partial\psi_{m1}}{\partial x_m} = F_3(\psi_{00}, T_{00}, \rho_{00}, p_{00}) \quad (5.23)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$\psi_{m1} = \frac{d\psi_{00}}{dy_m} \left\{ \frac{A_1(x_m) C T_{ws}}{\rho_{00} \rho_{ws}} + x_m \int_0^{y_m} \frac{F_3(y)}{\left(\frac{d\psi_{00}(y)}{dy}\right)^2} dy + H(y_m) \right\} \quad (5.24)$$

Anpassung an das Ergebnis (3.22) für die Zwischenschicht führt auf die Resultate

$$\begin{aligned} H(y_m) &= 0; \quad A_1(x_m) = a_0(-x_m) + \dots; \quad x_m \rightarrow -\infty \quad , \\ F_3(y) &= F(y) \quad , \end{aligned} \quad (5.25)$$

wobei  $F(y)$  gemäß Beziehung (4.16) gegeben ist.

Das Eintragen der Ansätze (5.19) in die 2. Navier Stokes Gleichung (2.9) ergibt in führender Ordnung

$$\frac{\partial p_m}{\partial y_m} = 0 \quad (5.26)$$

Wir sehen damit die in der Größenordnungsabschätzung vorweggenommene Gleichheit der Größenordnungen der Druckstörungen in den einzelnen Decks gemäß (5.8) bestätigt.

### 5.3 Lower Deck

Folgende Variablenstreckungen resultieren aus der asymptotischen Struktur des Lower Decks:

$$x_l = (x - x_s) \text{Re}^{1/6}; \quad y_l = y \text{Re}^{1/24} \quad (5.27)$$

Die asymptotische Form der Entwicklungen für die Strömungsgrößen im Lower Deck folgt gemäß den Ansätzen (4.20) und (4.23) für den wechselwirkungsfreien Fall zu

$$\begin{aligned}
\psi(x_l, y_l) &= \text{Re}^{-15/24} \frac{p_{00} \rho_{ws}}{6CT_{ws}} y_l^3 + \text{Re}^{-18/24} \psi_{l1}(x_l, y_l) + \text{Re}^{-21/24} \psi_{l2}(x_l, y_l) + \dots, \\
\rho(x_l, y_l) &= \rho_{ws} + \text{Re}^{-4/24} \rho_{l1}(x_l, y_l) + \text{Re}^{-7/24} \rho_{l2}(x_l, y_l) + \dots, \\
T(x_l, y_l) &= T_{ws} + \text{Re}^{-4/24} T_{l1}(x_l, y_l) + \text{Re}^{-7/24} T_{l2}(x_l, y_l) + \dots, \\
p(x_l, y_l) &= P_0 + \text{Re}^{-1/6} p_{00} x_l + \text{Re}^{-2/6} (k_1 P_1 + p_{01} \frac{1}{2} x_l^2) + \text{Re}^{-5/12} p_l(x_l, y_l) + \dots.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Nach Eintragen dieser Ansätze in die 1. Navier Stokes Gleichung (2.8) finden wir, dass die Bestimmungsgleichung, die wir für die Funktion  $\psi_{l1}$  erhalten, ident ist mit derjenigen für den wechselwirkungsfreien Fall:

$$\frac{p_{00} \rho_{ws}}{2(CT_{ws})^2} y_l^2 \frac{\partial^2 \psi_{l1}}{\partial x_l \partial y_l} - \frac{p_{00} \rho_{ws}}{(CT_{ws})^2} y_l \frac{\partial \psi_{l1}}{\partial x_l} = \frac{\partial^3 \psi_{l1}}{\partial y_l^3}. \tag{5.29}$$

Die Randbedingungen entsprechen ebenfalls denjenigen für den Fall ohne Wechselwirkung. Als Lösung erhalten wir demgemäß

$$\psi_{l1} = \frac{1}{2} A_1(x_l) y_l^2. \tag{5.30}$$

Weiters folgt für die Funktion  $\psi_{l2}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{p_{00} \rho_{ws}}{2CT_{ws}} y_l^2 \frac{\partial^2 \psi_{l2}}{\partial x_l \partial y_l} - \frac{p_{00} \rho_{ws}}{CT_{ws}} y_l \frac{\partial \psi_{l2}}{\partial x_l} &= CT_{ws} \frac{\partial^3 \psi_{l2}}{\partial y_l^3} - \rho_{ws} \frac{\partial p_l}{\partial x_l} + \\
&+ \frac{\partial^2 \psi_{l1}}{\partial y_l^2} \frac{\partial \psi_{l1}}{\partial x_l} - \frac{\partial \psi_{l1}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 \psi_{l1}}{\partial x_l \partial y_l}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{l2}}{\partial y_l} \Big|_{y_l=0} &= 0; \quad \psi_{l2} \Big|_{y_l=0} = 0; \\
\psi_{l2} &= \frac{a_0^2 p_{00} \rho_{ws}}{40320 C^3 T_{ws}^3} y_l^9 - \frac{a_0^2}{120 C T_{ws}} (-x_l) y_l^5 + \frac{b_0}{2} (-x_l)^{7/4} y_l^2 + k_1 \frac{b_1}{2} \frac{y_l^2}{(-x_l)^{1/4}}; \\
\forall x_l \rightarrow -\infty; \quad y_l &\rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Wie schon im wechselwirkungsfreien Fall erweist es sich für die Lösung dieses Randwertproblems mittels der Methode der Fouriertransformation als vorteilhaft, auf eine Funktion  $\bar{\psi}_2$  zu transformieren, die folgende Eigenschaft aufweist:

$$\bar{\psi}_2(x_l, y_l) = o(1) \quad \forall x_l \rightarrow -\infty; \quad y_l \rightarrow +\infty. \tag{5.33}$$

Dass diese Eigenschaft für die Lösung des Randwertproblems von Vorteil ist, wird anhand von Beziehung (9.19) im Anhang deutlich. Folgende Transformation führt auf eine Funktion  $\bar{\psi}_2$ , die

der Beziehung (5.33) genügt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 = \psi_{l2} - \left\{ \frac{p_{00}a_0^2}{40320}y_l^9 + \frac{a_0^2}{120}x_l y_l^5 + \frac{1}{2}A_2 y_l^2 \right\} \\ - \left\{ \frac{CT_{ws}}{2p_{00}\rho_{ws}} (A_1^2 - a_0^2 x_l^2 - 2a_0 a_1 k_1) y_l \right\} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Wir erhalten damit folgende Differenzialgleichung für die Funktion  $\bar{\psi}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{p_{00}\rho_{ws}}{2CT_{ws}}y_l^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial x_l \partial y_l} - \frac{p_{00}\rho_{ws}}{CT_{ws}}y_l \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x_l} = CT_{ws} \frac{\partial^3 \bar{\psi}_2}{\partial y_l^3} - \rho_{ws} \frac{\partial p_l}{\partial x_l} , \\ \bar{\psi}_2|_{y_l=0} = 0; \quad \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial y}|_{y_l=0} = g(x_l); \\ g(x_l) = -\frac{CT_{ws}}{2p_{00}\rho_{ws}} (A_1^2 - a_0^2 x_l^2 - 2a_0 a_1 k_1) \rightarrow 0; \quad x_l \rightarrow -\infty . \end{aligned} \quad (5.35)$$

## 5.4 Upper Deck

Basierend auf der asymptotischen Struktur des Upper Decks werden folgende Variablenstreckungen durchgeführt:

$$x_o = (x - x_s)Re^{1/6}; \quad y_o = \bar{y}Re^{1/12} . \quad (5.36)$$

Gemäß Kapitel 5.1.1 kann die Gasdynamische Gleichung zur Beschreibung der Strömung im Upper Deck verwendet werden. Die asymptotische Struktur eines Ansatzes des Druckes  $p$  sowie der in der Gasdynamischen Gleichung vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  folgt aus den Größenordnungsabschätzungen (5.13) und (5.14) zu

$$\begin{aligned} u = u_*(x, \bar{y}) + Re^{-5/12}u_o(x_o, y_o) + \dots , \\ v = v_*(x, \bar{y}) + Re^{-1/2}v_o(x_o, y_o) + \dots , \\ p = p_*(x, \bar{y}) + Re^{-5/12}p_o(x_o, y_o) + \dots . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Größen  $u_*$ ,  $v_*$  und  $p_*$  beschreiben hierbei die ungestörte, reibungsfreie Außenströmung. Wie bereits dargelegt, ist die Strömung bis zu den betrachteten Größenordnungen drehungsfrei und in der Darstellung der Strömung kann daher auf eine Potenzialfunktion übergegangen werden:

$$u = \frac{1}{1 + \kappa \bar{y}} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} . \quad (5.38)$$

$\kappa(x)$  bezeichnet hierbei die lokale Krümmung der Wand an der Stelle  $x$ . Das dem Ansatz (5.37) entsprechende Potenzial wird nun in Form einer generalisierten Koordinatenentwicklung angesetzt:

$$\begin{aligned} \phi = (1 + K_1 Re^{-1/6})Re^{-1/6}x_o + \Phi_{20}Re^{-2/6}x_o^2 + \Phi_{12}(Re)Re^{-2/6}x_o y_o^2 + \\ + \Phi_{02}(Re)Re^{-1/6}y_o^2 + \dots + Re^{-7/12}\phi_o(x_o, y_o) + \dots . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die ungestörten Größen  $u_*(x, \bar{y})$  und  $v_*(x, \bar{y})$  um den Punkt  $x = 0, \bar{y} = 0$  in eine Taylorreihe entwickelt werden können und damit in den gestreckten Koordinaten  $x_o$  und  $y_o$  ausgedrückt werden können. Weiters bezeichnet die Funktion  $\phi_o(x_o, y_o)$  das mit den Störgeschwindigkeiten  $u_o(x, \bar{y})$  und  $v_o(x, \bar{y})$  assoziierte Störpotenzial. Nach Eintragen von (5.39) in die Gasdynamische Gleichung folgen Relationen zwischen den Koeffizienten der generalisierten Potenzialentwicklung. Jene für die weitere Analyse wesentlichen Relationen sind:

$$\Phi_{02}(\text{Re}) = \text{Re}^{-1/6} (\gamma + 1) K_1 \Phi_{20} + O(\text{Re}^{-2/6}); \quad \bar{\Phi}_{12}(\text{Re}) = 2\Phi_{20}^2 (\gamma + 1) + O(\text{Re}^{-1/6}) \quad (5.40)$$

Damit ergibt sich für die Entwicklung für das Potenzial  $\phi$ :

$$\phi = (1 + K_1 \text{Re}^{-1/6}) \text{Re}^{-1/6} x_o + \Phi_{20} \text{Re}^{-2/6} x_o^2 + 2\Phi_{20}^2 (\gamma + 1) \text{Re}^{-2/6} x_o y_o^2 + (\gamma + 1) K_1 \Phi_{20} \text{Re}^{-1/6} y_o^2 + \dots + \text{Re}^{-7/12} \phi_o(x_o, y_o) + \dots \quad (5.41)$$

Nach Eintragen von (5.41) in die Gasdynamische Gleichung erhalten wir für das Störpotenzial  $\phi_o$ :

$$(\gamma + 1) [K_1 + 2\Phi_{20} x_o + \bar{\Phi}_{12} y_o^2] \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial x_o^2} - \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial y_o^2} = -(\gamma + 1) 2\Phi_{20} \frac{\partial \phi_o}{\partial x_o} \quad (5.42)$$

mit  $\bar{\Phi}_{12} = 2\Phi_{20}^2 (\gamma + 1)$ .

Für die Druckstörung folgt aus der Euler Gleichung (2.23)

$$p_o = -\frac{\partial \phi_o}{\partial x_o} \quad (5.43)$$

Schließlich erhalten wir mittels Anpassens der Entwicklungen (5.19) im Main Deck und (5.37) im Upper Deck:

$$v_o(x_o, 0) = \frac{\partial \phi_o}{\partial y_o}(x_o, 0) = -\frac{CT_{ws}}{p_{00}\rho_{ws}} \frac{dA_1}{dx_o} \quad (5.44)$$

## 5.5 Wechselwirkungsproblem und Lösbarkeitsbedingung

Die Beziehungen (5.35), (5.42), (5.43) und (5.44) definieren zusammen das Wechselwirkungsproblem. Für die numerische Behandlung ist es vorteilhaft, möglichst viele der auftretenden Konstanten mittels Affintransformationen zu eliminieren. Für das vorliegende Wechselwirkungsproblem werden dazu folgende Transformationen durchgeführt:

$$\begin{aligned} x_l &= x_o = n_1 X; & y_l &= n_2 Y; & \bar{\psi}_2 &= n_3 \Psi & p_l &= p_o = n_4 p; \\ a_1 k_1 &= n_5 a; & A_1 &= n_6 A; & \phi_o &= n_7 \Phi; & y_o &= n_8 \bar{Y}; \\ K_1 &= n_9 K; & 2\Phi_{20} &= n_{10} c \end{aligned} \quad (5.45)$$

Die Werte der Konstanten  $n_1$  bis  $n_{10}$  sind im Anhang angeführt. Für die Konstante  $c$  ergibt sich, wie ebenfalls im Anhang ausgeführt, der Wert  $-\sqrt{2}$ .

Das Wechselwirkungsproblem liegt nunmehr in einer von den speziellen Werten der die ungestörte Strömung kennzeichnenden Größen  $p_{00}$ ,  $\phi_{20}$ ,  $a_0$ ,  $C$ ,  $T_{ws}$ ,  $\rho_{ws}$  unabhängigen Form vor. Im Lower Deck erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{dp}{dX} \quad , \\ \Psi|_{Y=0} &= 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y}|_{Y=0} = -\frac{1}{2} (A^2 - X^2 - 2a) = g(X) \quad , \\ Y = +\infty : \Psi &= 0; \quad X = -\infty : \Psi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Die im Upper Deck geltende Beziehung (5.42) sowie die Kopplungsgleichungen (5.43) und (5.44) werden unter den Affintransformationen übergeführt in

$$\begin{aligned} [K + cX + \bar{Y}^2] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{Y}^2} &= -c \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad , \\ p = -\frac{\partial \Phi}{\partial X}(X, 0); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}}(X, 0) &= -\frac{dA}{dX} \quad . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Aus der im Anhang durchgeführten Fouriertransformation der Gleichung (5.46) folgt, dass diese nur dann keine exponentiell aufklingende Lösung aufweist, wenn folgende Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist:

$$A^2 - X^2 - 2a = \lambda \int_{-\infty}^X \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t, 0) \frac{dt}{\sqrt{X-t}} \quad , \quad (5.48)$$

mit  $\lambda = \frac{(-1/4)!}{\sqrt{2}(1/4)!}$ .

Der Parameter  $a$  ist gemäß den Affintransformationen (5.45) mit dem die Anstellwinkelvariation charakterisierenden Parameter  $k_1$  assoziiert.<sup>12</sup>

<sup>12</sup>Es gilt hierbei zu beachten, dass mit  $a_1 < 0$  (siehe Beziehung (4.36)) und  $n_5 > 0$  (siehe Kapitel 8.1) eine positive Anstellwinkelvariation ( $k_1 > 0$ ) mit einem negativen Wert des Parameters  $a$  verbunden ist.

## 5.6 Die Charakteristiken der Upper Deck Gleichung

Dier Upper Deck Gleichung (5.47)

$$[K + cX + \bar{Y}^2] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{Y}^2} = -c \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (5.49)$$

ist eine Differenzialgleichung vom gemischten Typus, d.h sie hat abhängig vom Ort hyperbolischen, elliptischen oder parabolischen Charakter. Es gilt:

$$\begin{aligned} [K + cX + \bar{Y}^2] < 0 &: \text{elliptischerTyp} \quad , \\ [K + cX + \bar{Y}^2] > 0 &: \text{hyperbolischerTyp} \quad , \\ [K + cX + \bar{Y}^2] = 0 &: \text{parabolischerTyp} \quad . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Durch die Gleichung  $K + cX + \bar{Y}_s^2(X) = 0$  wird die Lage der Schalllinie  $\bar{Y}_s(X)$  festgelegt - jener Linie, an der die Differenzialgleichung vom elliptischen zum hyperbolischen Typ wechselt. Die Bestimmung der Charakteristiken einer hyperbolischen Gleichung stellt einen systematischen Schritt zur Lösung derselben dar. Zur Berechnung der (reellen) Charakteristiken der Upper Deck Gleichung im hyperbolischen Bereich ( $[K + cX + \bar{Y}^2] > 0$ ) wird auf die Variablen  $\xi(X, Y)$  sowie  $\eta(X, Y)$  transformiert, die die Upper Deck Gleichung in die kanonische Form

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \Psi\right); \quad \Phi(X, Y) = \Psi(\xi(X, Y), \eta(X, Y)) \quad (5.51)$$

überführen, wenn  $\xi$  und  $\eta$  die charakteristischen Koordinaten der Upper Deck Gleichung sind, d.h. die folgenden Bedingungen erfüllen<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} [K + cX + \bar{Y}^2] \left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right)^2 + (-1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{Y}}\right)^2 &= 0 \quad , \\ [K + cX + \bar{Y}^2] \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2 + (-1) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{Y}}\right)^2 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Aus dem totalen Differenzial von  $\xi$  und  $\eta$  erhalten wir:

$$\frac{d\bar{Y}}{dX} \Big|_{\xi=const} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial X}}{\frac{\partial \xi}{\partial \bar{Y}}}; \quad \frac{d\bar{Y}}{dX} \Big|_{\eta=const} = -\frac{\frac{\partial \eta}{\partial X}}{\frac{\partial \eta}{\partial \bar{Y}}} \quad (5.53)$$

Zusammen mit (5.52) folgen aus der soeben erhaltenen Beziehung die Richtungsbedingungen der Charakteristikenscharen  $\xi = const$  sowie  $\eta = const$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Y}}{dX} \Big|_{\xi=const} &= +\frac{1}{\sqrt{K + cX + \bar{Y}^2}} \quad , \\ \frac{d\bar{Y}}{dX} \Big|_{\eta=const} &= -\frac{1}{\sqrt{K + cX + \bar{Y}^2}} \quad . \end{aligned} \quad (5.54)$$

<sup>13</sup>Die zu den genannten Bedingungen führenden Rechenschritte werden zum Beispiel in [28] anhand einer allgemeinen partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung im Detail durchgeführt.

Die Vorzeichen der Terme  $\frac{\partial \xi}{\partial X} / \frac{\partial \xi}{\partial Y}$  sowie  $\frac{\partial \eta}{\partial X} / \frac{\partial \eta}{\partial Y}$  wurden hierbei derart gewählt, dass die Charakteristikenschar  $\xi = const$  gemäß der gängigen Konvention die von der Strömungsrichtung aus gesehen linksläufige Schar ist und die Schar  $\eta = const$  jene ist, deren Richtung nach rechts weist.

Um die Charakteristiken  $\xi(X, \bar{Y})$  und  $\eta(X, \bar{Y})$  explizit zu bestimmen, werden die zugehörigen Richtungsbedingungen in der folgenden Form dargestellt:

$$\begin{aligned} -dX + g\sqrt{K + cX + \bar{Y}^2}d\bar{Y} &= 0 \quad , \\ \xi = const : g &= 1; \quad \eta = const : g = -1 \quad . \end{aligned} \quad (5.55)$$

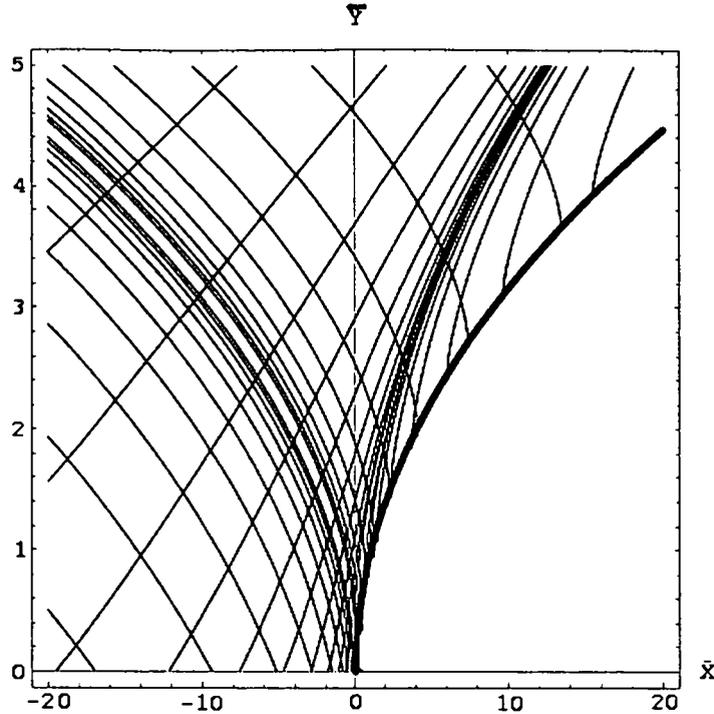
Gleichung (5.55) liegt nicht in der Form eines vollständigen Differenzials vor. Im Anhang ist ausgeführt, wie ein integrierender Faktor von (5.55) gefunden werden kann, welcher gegeben ist durch:

$$M = \frac{1}{g\sqrt{K + cX + \bar{Y}^2} - \frac{K+cX}{c}} \quad . \quad (5.56)$$

Die damit mögliche Integration von (5.55) ergibt unter Verwendung der Variablen  $\zeta = -(K + cX)/\bar{Y}^2 = \bar{X}/\bar{Y}^2$ :

$$\begin{aligned} \xi(\zeta, \bar{Y}) &= \ln \left| -2\zeta - c\sqrt{1-\zeta} \right| \\ &\quad - \frac{2c}{\sqrt{16+c^2}} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{4\sqrt{1-\zeta}-c}{\sqrt{16+c^2}} \right] + 2 \ln \bar{Y} \quad , \\ \eta(\zeta, \bar{Y}) &= \ln \left| -2\zeta + c\sqrt{1-\zeta} \right| \\ &\quad + \frac{2c}{\sqrt{16+c^2}} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{4\sqrt{1-\zeta}+c}{\sqrt{16+c^2}} \right] + 2 \ln \bar{Y} \quad . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die durch  $\xi = const$  bzw.  $\eta = const$  festgelegten Charakteristikenscharen sind in Abb. 5 dargestellt. Darin sind an den durch  $\zeta = -1$  und  $\zeta = 1/2$  definierten Punkten Linienhäufungen zu erkennen, die eine Folge der Darstellung der Funktionen  $\xi$  und  $\eta$  mittels äquidistanter Höhenlinien sind und damit starke Anstiege in den Funktionen kennzeichnen. Wie im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, sind die durch  $\zeta = -1$  und  $\zeta = 1/2$  definierten Punkte Orte möglicher Unstetigkeiten in der Lösung der Upper Deck Gleichung. Mittels sowohl mathematischer als auch physikalischer Argumente können diese Unstetigkeiten bestimmt werden. Dies wird im weiteren Verlauf der Arbeit durchgeführt.



**Abbildung 5:** Charakteristikenscharen  $\xi = const$  und  $\eta = const$  dargestellt als äquidistante Höhenlinien der Funktionen  $\xi(\bar{X}, \bar{Y})$  und  $\eta(\bar{X}, \bar{Y})$ . Die Koordinate  $\bar{X}$  ist dabei gegeben durch  $\bar{X} = -K - cX = \sqrt{2}X - K$ . Die schwarze Linie mit größerer Strichbreite kennzeichnet die Schalllinie ( $\zeta = 1$ ). Die in der Abbildung ersichtlichen Linienhäufungen bzw. starken Anstiege von  $\xi$  und  $\eta$  befinden sich an den durch  $\zeta = -1$  und  $\zeta = 1/2$  definierten Orten.

## 5.7 Ähnlichkeitslösung für das transsonische Fernfeld

In der vorliegenden Arbeit konnte für das durch die Gleichungen (5.47) und (5.48) definierte Wechselwirkungsproblem keine geschlossene Lösung in Form einer Integralgleichung für die Wandschubspannung  $A$  und insbesondere kein analytischer Zusammenhang zwischen dem Potenzial  $\Phi$  und der Wandschubspannung  $A$  gefunden werden wie dies im Fall der marginalen Ablösung bei inkompressibler Strömung [2] möglich war. Das Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi$  ist jedoch analytisch zugänglich und ermöglicht Einsichten sowohl in die Mathematik als auch die Physik des Wechselwirkungsproblems. Darüberhinaus ist es auch für eine weiterführende numerische Behandlung des Problems von Bedeutung. Im Folgenden wird gezeigt, dass das Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi$  durch eine Ähnlichkeitslösung der Upper Deck Gleichung (5.49) bzw. (5.47) gegeben ist. Wir gehen dazu unter Verwendung der bereits eingeführten Koordinate  $\bar{X} = -K - cX$  aus von der Upper Deck Gleichung in der Form:

$$[\bar{Y}^2 - \bar{X}] c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{X}^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{Y}^2} = c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} \quad (5.58)$$

Die Randbedingung für das Potenzial  $\Phi$  (siehe Beziehung (5.47)) nimmt im Fernfeld unter Verwendung der Heaviside'schen Sprungfunktion  $\Theta(X)$  folgende Form an:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}}(\bar{X}, 0) = -2\Theta(\bar{X}) + 1 + \dots; \quad |\bar{X}| \rightarrow \infty \quad . \quad (5.59)$$

Diese Beziehung folgt aus der Tatsache, dass sich die Funktion  $A$  für  $|\bar{X}| \rightarrow \infty$  an die in Kapitel 3.2 beschriebene Grundlösung der marginalen Ablösung annähert, deren Steigung nach Anwendung der Affintransformationen (5.45) den Absolutbetrag 1 aufweist.

Wir untersuchen nun, unter welchen Transformationen - wir beschränken uns hierbei auf Streckungen - der unabhängigen sowie abhängigen Variablen die Differentialgleichung (5.58) sowie die zugehörige Randbedingung (5.59) im Fernfeld invariant bleibt<sup>14</sup>. Folgende Notation soll dafür verwendet werden:

$$\tilde{X} = e^\alpha \bar{X}; \quad \tilde{Y} = e^\beta \bar{Y}; \quad \tilde{\Phi} = e^\gamma \Phi \quad . \quad (5.60)$$

Das Durchführen der Transformationen (5.60) in (5.58) und (5.59) führt auf das Resultat, dass die Differentialgleichung und die zugehörige Randbedingung invariant gegenüber (5.60) sind, falls die Transformationsparameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  folgendem Zusammenhang unterliegen:

$$\beta = \gamma = \alpha/2 \quad . \quad (5.61)$$

Offenkundig gilt für die transformierten Größen im Fall der Invarianz von (5.58) und (5.59):

$$\tilde{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \Phi(\bar{X}, \bar{Y}) \quad . \quad (5.62)$$

Daraus resultiert zusammen mit (5.60) und (5.61):

$$\Phi(\bar{X}, \bar{Y}) = e^{-\alpha/2} \tilde{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad . \quad (5.63)$$

Wir erhalten weiters durch Ableiten nach dem Transformationsparameter  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \Phi(\bar{X}, \bar{Y}) = 0 &= \frac{d}{d\alpha} \left( e^{-\alpha/2} \tilde{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right) = -\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha/2} \tilde{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + e^{-\alpha/2} \alpha \tilde{X} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{X}} + e^{-\alpha/2} \frac{\alpha}{2} \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{Y}} \\ &\Rightarrow \tilde{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 2\tilde{X} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{X}} + \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{Y}} \quad . \end{aligned} \quad (5.64)$$

Die Analyse der Charakteristiken der soeben erhaltenen Gleichung erlaubt das Potenzial  $\Phi$  näher zu bestimmen. Mit  $s$  als Laufparameter auf einer Charakteristik ist die differenzielle Änderung der Funktion  $\Phi$  bei Weiterschreiten des Weges  $ds$  auf dieser Charakteristik gegeben durch:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{ds} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{Y}} \frac{d\tilde{Y}}{ds} = \frac{d\tilde{\Phi}}{ds} \quad . \quad (5.65)$$

<sup>14</sup>Eine Gleichung ist gegenüber einer Transformation ihrer Variablen invariant, falls die Transformation die Struktur der Gleichung nicht ändert, die Gleichung daher in den transformierten Koordinaten gleich gelesen wird wie in den ursprünglichen (siehe dazu [16]).

Durch Vergleich der Beziehungen (5.64) und (5.65) können folgende Gleichungen für die Differentialquotienten in (5.65) gewonnen werden:

$$\frac{d\tilde{X}}{ds} = 2\tilde{X}; \quad \frac{d\tilde{Y}}{ds} = \tilde{Y}; \quad \frac{d\Phi}{ds} = \Phi \quad . \quad (5.66)$$

Mittels Integration erhalten wir:

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{2s}; \quad \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^s; \quad \Phi = \Phi_0 e^s \quad . \quad (5.67)$$

Der Index 0 bezeichnet hierbei die betreffenden Größen für  $s = 0$ . Durch Elimination des Parameters  $s$  folgt schließlich:

$$\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}^2} = \frac{\tilde{X}_0}{\tilde{Y}_0^2} := \zeta; \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{\tilde{Y}_0} \tilde{Y} = \tilde{Y} G(\zeta) \quad . \quad (5.68)$$

Beziehung (5.68) zeigt, dass das Potenzial  $\Phi$  im Fernfeld durch eine Ähnlichkeitslösung gegeben ist. In den ursprünglichen Koordinaten erhalten wir daher:

$$\Phi(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y} G\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}^2}\right) = \bar{Y} G(\zeta) \quad . \quad (5.69)$$

Das Eintragen dieser Ähnlichkeitslösung in die Differentialgleichung (5.58) und die zugehörige Randbedingung (5.59) führt mit  $c = -\sqrt{2}$  (siehe Anhang zur Bestimmung der Konstante  $c$ ) auf folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} G''(2\zeta^2 + \zeta - 1) + G'(\zeta - 1) &= 0 \quad , \\ G - 2\zeta G' &= -1; \quad \zeta = +\infty \quad , \\ G - 2\zeta G' &= +1; \quad \zeta = -\infty \quad . \end{aligned} \quad (5.70)$$

Gleichung (5.70) ist vom hypergeometrischen Typus und weist die singulären Stellen

$$\zeta_1 = -1; \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \quad (5.71)$$

auf. Die durch  $\zeta = -1$  definierte Linie ist identisch mit einer rechtslaufenden Charakteristik  $\eta = const$ , jene durch  $\zeta = -1/2$  festgelegte ist identisch mit einer linkslaufenden Charakteristik  $\xi = const$  (siehe Abb. 5).

Mit der Transformation

$$G(\zeta) \rightarrow H(\gamma); \quad \gamma = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \frac{2}{3}(\zeta + 1) \quad (5.72)$$

wird (5.70) in die Normalform der hypergeometrischen Gleichung übergeführt:

$$\begin{aligned} H''\gamma(\gamma - 1) + H' \left[ \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{3} \right] &= 0 \quad , \\ H - 2 \left[ \gamma - \frac{2}{3} \right] H' &= -1; \quad \gamma = +\infty \quad , \\ H - 2 \left[ \gamma - \frac{2}{3} \right] H' &= +1; \quad \gamma = -\infty \quad . \end{aligned} \quad (5.73)$$

Die zugehörige allgemeine Lösung lautet mit  $F$  als allgemein üblicher Bezeichnung für die hypergeometrische Funktion <sup>15</sup>:

$$H = A_1 + A_2 \gamma^{1/3} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \gamma\right); \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (5.74)$$

$$= B_1 + B_2 \gamma^{1/2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{1}{\gamma}\right); \quad 1 \leq \gamma \leq \infty, \quad (5.75)$$

$$= C_1 + C_2 |\gamma - 1|^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)^{1/3} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right); \quad -\infty \leq \gamma \leq 0. \quad (5.76)$$

Die Sprungbedingungen, welche die Funktion  $H$  an den singulären Stellen 0 und 1 erfüllen muss, ergeben sich zu (siehe Anhang zur Ableitung):

$$\gamma_s(\gamma_s - 1) \{H'\}_s - \frac{1}{2}(\gamma_s - \frac{2}{3}) \{H\}_s = 0; \quad \gamma_s = 0, 1 \quad . \quad (5.77)$$

Die Notation  $\{ \}_s$  kennzeichnet hierbei die Differenz zwischen Rechtswert (an der Stelle  $\gamma_s^+$ ) und Linkswert (an  $\gamma_s^-$ ) einer Strömungsgröße. Wie sich mit dem Verhalten der Lösung  $H$  an den singulären Stellen 0 und 1 zeigen lässt, gilt für den ersten Term der Sprungbedingung

$$\gamma_s(\gamma_s - 1) \{H'\}_s = 0; \quad \gamma_s = 0, 1 \quad . \quad (5.78)$$

Damit verbleibt die Bedingung

$$\{H\}_s = 0; \quad \gamma_s = 0, 1 \quad . \quad (5.79)$$

Zusammen mit den Randbedingungen (siehe Beziehung 5.73) erhalten wir damit für die Konstanten der Funktion  $H$ :

$$A_1 = C_1 = 1; \quad B_1 = -1; \quad B_2 = 2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2}{3}) + A_2 \Gamma(\frac{7}{6}) \Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})}{\pi \Gamma(\frac{7}{6})} \quad . \quad (5.80)$$

Zur Festlegung der weiteren Konstanten  $A_2$  und  $C_2$  der Funktion  $H$  benutzen wir eine physikalische Argumentation, die auf den mit dem Potenzial  $\Phi$  assoziierten Geschwindigkeiten aufbaut, für die gilt:

$$\bar{u} = \partial\Phi/\partial\bar{X} = \frac{2}{3} \frac{H'}{\bar{Y}}; \quad \bar{v} = \partial\Phi/\partial\bar{Y} = H - 2 \left[ \gamma - \frac{2}{3} \right] H' \quad . \quad (5.81)$$

Auf der durch  $\xi = -1$  bzw.  $\gamma = 0$  festgelegten rechtslaufenden und damit in das Wechselwirkungsgebiet einlaufenden Charakteristik darf kein Sprung in den Geschwindigkeiten auftreten. Dieser müsste in diesem Fall stromaufwärts generiert werden, was auszuschließen ist. Mathematisch wird dieser Sachverhalt ausgedrückt durch:

$$\{\bar{u}\}_s = \frac{2}{3} \frac{\{H'\}_s}{\bar{Y}} = 0; \quad \{\bar{v}\}_s = \{H\}_s - 2 \left[ \gamma_s - \frac{2}{3} \right] \{H'\}_s = 0; \quad \gamma_s = 0 \quad . \quad (5.82)$$

<sup>15</sup>Die hypergeometrische Funktion  $F(a, b, c; x)$  ist an der Stelle  $|x| = 1$  absolut konvergent, wenn  $c > a + b$  ist [29]. Dies ist im vorliegenden Fall zutreffend, weshalb die angegebenen Wertebereiche jeweils die Stelle 1 beinhalten.

Das Anwenden dieser Bedingungen auf die allgemeinen Lösungen (5.74) und (5.76) liefert das Ergebnis:

$$A_2 = C_2 \quad . \quad (5.83)$$

Um eine physikalisch anschaulichere Darstellung der Sprungbedingung (5.77) zu erhalten, gehen wir ebenfalls auf die mit dem Potenzial  $\Phi$  assoziierten Geschwindigkeiten  $\bar{u} = \partial\Phi/\partial\bar{X}$  und  $\bar{v} = \partial\Phi/\partial\bar{Y}$  zurück und erhalten die Sprungbedingung in der Form:

$$(\gamma_s - \frac{4}{3})\bar{Y} \{ \bar{u} \}_s = (\gamma_s - \frac{2}{3}) \{ \bar{v} \}_s; \quad \gamma_s = 0, 1 \quad . \quad (5.84)$$

Das Verhalten der Lösung der hypergeometrischen Gleichung (5.73) ist für  $\gamma \rightarrow 0+$  gegeben durch:

$$H(\gamma) = A_1 + A_2\gamma^{1/3} + \dots; \quad \gamma \rightarrow 0+ \quad . \quad (5.85)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$ , die gemäß (5.81) proportional zur ersten Ableitung von  $H$  sind, weisen damit für den Fall  $A_2 \neq 0$  an der Stelle  $\gamma = 0$  eine Singularität auf. Die durch  $\gamma = 0$  bzw.  $\zeta = -1$  festgelegte Charakteristik verläuft jedoch in das Gebiet der ungestörten Strömung hinein, die keine Singularitäten enthält. Daher folgt:

$$A_2 = C_2 = 0 \quad . \quad (5.86)$$

Das Potenzial  $\Phi$  ist damit im Fernfeld bis auf eine additive Konstante festgelegt, welche für die Wechselwirkung ohne Bedeutung ist. Die das Wechselwirkungsproblem konstituierenden Gleichungen können damit hinsichtlich einer numerischen Behandlung vervollständigt werden. Wie schon in Kapitel 5.5 ausgeführt, erhalten wir im Lower Deck (siehe Beziehung (5.46)) mit den dort eingeführten Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{dp}{dX} \quad , \\ \Psi|_{Y=0} &= 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y}|_{Y=0} = -\frac{1}{2}(A^2 - X^2 - 2a) = g(X) \quad , \\ Y = +\infty : \Psi &= 0; \quad X = -\infty : \Psi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.87)$$

Die Existenz einer nicht aufklingenden und damit die Randbedingung an der Stelle  $Y = +\infty$  erfüllenden Lösung dieser Differentialgleichung ist an folgende Bedingung geknüpft (siehe Beziehung(5.48)):

$$A^2 - X^2 - 2a = -\lambda \int_{-\infty}^X \frac{dp}{dt}(t) \frac{dt}{\sqrt{X-t}} \quad . \quad (5.88)$$

Mit dem soeben bestimmten Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi$  können die im Upper Deck geltenden Beziehungen (5.47) erweitert werden zu:

$$\begin{aligned} [K + cX + \bar{Y}^2] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{Y}^2} &= -c \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad , \\ p = -\frac{\partial \Phi}{\partial X}(X, 0); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}}(X, 0) &= -\frac{dA}{dX} \quad , \\ \Phi = \bar{Y}H \left( \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{K + cX}{\bar{Y}^2} \right\} \right) + \dots; \quad X^2 + \bar{Y}^2 &\rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \quad (5.89)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird eine numerische Behandlung des durch die Gleichungen (5.87), (5.88) und (5.89) definierten Fundamentalproblems der schallnahen marginalen Ablösung für den Fall  $K \rightarrow -\infty$  vorgestellt. Die dort verwendete Methodik ist grundsätzlich auch im Fall  $K = O(1)$  anwendbar und die für die vorliegende Arbeit geschaffenen Computerprogramme sind auch dahingehend adaptierbar. Dass zuerst eine Numerik für  $K \rightarrow -\infty$  erarbeitet wurde, liegt darin begründet, dass das soeben dargestellte Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi$  für  $K = O(1)$  erst am Ende der für die vorliegende Arbeit anberaumten Zeitspanne bestimmt werden konnte.

## 6 Asymptotische Entwicklung des Wechselwirkungsproblems für große negative Werte des Schallnäheparameters $K$

### 6.1 Der Grenzübergang zu reiner Unterschall- bzw. Überschallströmung

Im Folgenden wird das Wechselwirkungsproblem - repräsentiert durch die Beziehungen (5.88) und (5.89) - mit Hilfe einer asymptotischen Analyse für den Fall großer Werte des Schallnäheparameters  $K$  untersucht. Für  $|K| \rightarrow \infty$  findet im Wechselwirkungsgebiet der Übergang vom schallnahen Strömungsregime zur reinen Unterschallströmung ( $\text{sign}(K) < 0$ ) bzw. Überschallströmung ( $\text{sign}(K) > 0$ ) statt. Für den Schallnäheparameter  $K$  folgt gemäß (5.1) und (5.45):

$$K = \frac{K_1}{n_9} = \frac{M_0^* - 1}{n_9} \text{Re}^{1/6} = \frac{u_0 - 1}{n_9} \text{Re}^{1/6} \quad (6.1)$$

$M_0^*$  bezeichnet hierbei die kritische Machzahl und  $u_0$  die wandparallele Geschwindigkeitskomponente am Punkt  $x_o = y_o = 0$ .

Im Fall inkompressibler Strömung ist die Ausdehnung des Wechselwirkungsgebietes in Strömungsrichtung sowie normal dazu von der Größenordnung  $\text{Re}^{-1/5}$ , [2]. Im Fall reiner Unterschall- bzw. Überschallströmung weist das Wechselwirkungsgebiet ebenfalls diese Größe auf, wie unter Zuhilfenahme der Prandtl-Glauert Transformation gezeigt werden kann. Gemäß (6.1) strebt der Absolutbetrag des Schallnäheparameters  $|K|$  beim Übergang zum Fall reiner Unterschall- bzw. Überschallströmung mit  $\text{Re}^{1/6}$  gegen unendlich. Im Übergang  $|K| = O(1)$  auf  $|K| = O(\text{Re}^{1/6})$  schrumpft deshalb die Ausdehnung des Wechselwirkungsgebietes in Strömungsrichtung von  $\text{Re}^{-1/6}$  auf  $\text{Re}^{-1/5}$  sowie jene normal dazu von  $\text{Re}^{-1/12}$  auf  $\text{Re}^{-1/5}$ . Ein Wechsel auf innere Koordinaten ( $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ) im Sinne der Grenzschichtterminologie für dieses verkleinerte Wechselwirkungsgebiet im Fall  $|K| \rightarrow \infty$  wird daher folgendermaßen angesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X \text{Re}^{1/30} = X \left\{ \frac{K n_9}{M_0^* - 1} \right\}^{1/5}, \\ \tilde{Y} &= \bar{Y} \text{Re}^{7/60} = Y' \left\{ \frac{|M_0^* - 1|}{n_9} \right\}^{1/2}, \\ Y' &= \bar{Y} \left\{ \frac{K n_9}{M_0^* - 1} \right\}^{7/10}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Koordinate  $Y'$  wird nachfolgend zur Demonstration der korrekten Anpassung der erhaltenen Ergebnisse an jene im nicht schallnahen Strömungsregime geltenden benutzt werden. Die Anstellwinkelvariation ( $\Delta k$ ) ist über die Reynoldszahl an die Geometrie des Wechselwirkungsgebietes gekoppelt (siehe zum Beispiel Kapitel 5.2). Dies beachtend folgt für den die Anstellwinkelvariation charakterisierenden Parameter  $\tilde{a}$  im verkleinerten Wechselwirkungsgebiet:

$$\tilde{a} = a \text{Re}^{1/15} = a(-K)^{2/5} \quad (6.3)$$

Die zugehörige innere Entwicklung des Potentials  $\Phi$  ( $\Phi_i$ ) und der Wandschubspannung  $A$  wird wie folgt angesetzt:

$$\begin{aligned}\Phi_i &= |K|^{-7/10} \Phi_0(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \dots, \\ A &= |K|^{-1/5} A_0(\tilde{X}) + \dots.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Die Größenordnung  $|K|^{-1/5}$  des führenden Terms der Entwicklung für die Wandschubspannung  $A$  ist Folge der Linearität derselben außerhalb des Wechselwirkungsgebietes. Aus der Koppelungsbedingung (siehe auch Beziehung (5.47))

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tilde{Y}}(X, 0) = -\frac{dA}{d\tilde{X}}, \quad (6.5)$$

sowie aus der Definition der inneren Koordinaten (6.2) erhalten wir die Größenordnung  $|K|^{-7/10}$  des führenden Terms der Entwicklung für das Störpotential  $\Phi$ . Einsetzen von (6.4) in (5.47) führt auf das Resultat, dass die Funktion  $\Phi_0$  folgenden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{X}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{Y}^2} &= 0, \quad \text{sign}(K) < 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{X}^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{Y}^2} &= 0, \quad \text{sign}(K) > 0.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Unter Verwendung der Koordinate  $Y'$  (siehe (6.2)) ergibt sich hingegen:

$$\frac{M_0^* - 1}{n_9} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{X}^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial Y'^2} = 0. \quad (6.7)$$

Werden in der soeben erhaltenen Gleichung die Affintransformationen (5.45) rückgängig gemacht und mit den Affinkonstanten  $n_1, n_7$  und  $n_8$  zu den Variablen  $\tilde{X}, Y'$  bzw.  $\Phi_0$  korrespondierende Größen eingeführt gemäß

$$x = \tilde{X} n_1; \quad y = Y' n_8; \quad \phi_0 = \Phi_0 n_7, \quad (6.8)$$

so erhalten wir mit den im Anhang angeführten Werten von  $n_1, n_7, n_8$  und  $n_9$ :

$$(\gamma + 1)(M_0^* - 1) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = 0. \quad (6.9)$$

Für ein durch marginale Wechselwirkung in kompressibler, nicht schallnaher Strömung im Upper Deck induziertes Störpotential  $\phi$  gilt hingegen:

$$(M_0^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (6.10)$$

Mit der zwischen der kritischen Machzahl  $M_0^*$  und der entsprechenden Machzahl  $M_0$  geltenden Beziehung (siehe zum Beispiel [27])

$$M_0^* - 1 = \frac{1}{\gamma + 1} (M_0^2 - 1) + O(M_0^2 - 1)^2; \quad M_0 \rightarrow 1 \quad (6.11)$$

ist unmittelbar ersichtlich, dass das für  $|K| \rightarrow \infty$  erhaltene Ergebnis (6.9) korrekt in jenes für das nicht schallnahe Strömungsregime geltende (6.10) übergeht.

## 6.2 Terme höherer Ordnung für $K \rightarrow -\infty$

Der Fall großer negativer Werte des Schallnäheparameters  $K$  repräsentiert den Übergang zur reinen Unterschallströmung. Um diesen Übergang im Detail zu studieren, erweitern wir die Entwicklungen des Potentials  $\Phi$  und der Wandschubspannung  $A$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\Phi_i &= (-K)^{-7/10} \Phi_0(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (-K)^\beta \Phi_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \dots, \\ A &= (-K)^{-1/5} A_0(\tilde{X}) + (-K)^\alpha A_1(\tilde{X}) + \dots.\end{aligned}\quad (6.12)$$

Durch Einsetzen von (6.12) in (5.47) ergeben sich die die Größenordnung der Terme 2. Ordnung bestimmenden Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  zu

$$\alpha = -\frac{14}{10}; \quad \beta = -\frac{19}{10}.\quad (6.13)$$

Weiters erhalten wir daraus für das Störpotential 2. Ordnung,  $\Phi_1$ , folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tilde{X}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tilde{Y}^2} = c \tilde{X} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{X}^2} + c \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{X}}.\quad (6.14)$$

Um die Bestimmungsgleichungen der Wandschubspannungsterme  $A_0$  und  $A_1$  zu erhalten, setzen wir die Entwicklungen (6.12) in die Lösbarkeitsbedingung (5.48) ein:

$$\begin{aligned}& \left( A_0 (-K)^{-1/5} + A_1 (-K)^{-14/10} + \dots \right)^2 - \tilde{X}^2 (-K)^{-2/5} - 2\tilde{a} (-K)^{-2/5} = \\ & + \lambda \int_{-\infty}^{b=O(1)} \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial t^2}(t, 0) \frac{dt}{\sqrt{\tilde{X} - t}} + \lambda \int_{b(-K)^{1/5}}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}} (-K)^{3/10}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

$\Phi_a$  bezeichnet hierbei die äußere Entwicklung (im Sinne der Grenzschichtterminologie) des Potentials  $\Phi$  für  $K \rightarrow -\infty$ . Die Kenntnis dieser äußeren Entwicklung ist für die Bestimmung der Wandschubspannungsterme  $A_0$  und  $A_1$  nicht notwendig. Wir erhalten aus der führenden Ordnung  $(-K)^{-2/5}$  sowie aus der zweiten Ordnung  $(-K)^{-8/5}$  der Entwicklung (6.15) folgende Bestimmungsgleichungen für  $A_0$  und  $A_1$ :

$$A_0^2 - \tilde{X}^2 - 2\tilde{a} = +\lambda \int_{-\infty}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}}.\quad (6.16)$$

$$2A_0 A_1 = +\lambda \int_{-\infty}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}}.\quad (6.17)$$

Bei den Beziehungen (6.16) und (6.17) muss beachtet werden, dass divergierende Anteile der darin enthaltenen Integrale nicht mehr den Größenordnungen  $(-K)^{-2/5}$  bzw.  $(-K)^{-8/5}$  zugehören. Diese Tatsache wird bei der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von  $A_1$  für  $\tilde{X} \rightarrow -\infty$  von Bedeutung sein.

Aus der Kopplungsbedingung (6.5) und den Entwicklungen (6.4) erhalten wir in den ersten beiden Ordnungen:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{Y}}(\bar{X}, 0) = -\frac{dA_0}{d\bar{X}} \quad , \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{Y}}(\bar{X}, 0) = -\frac{dA_1}{d\bar{X}} \quad . \quad (6.19)$$

Das Wechselwirkungsproblem erster Ordnung für  $K \rightarrow -\infty$  wird damit durch die Gleichungen (6.6), (6.16) und (6.18) beschrieben, jenes zweiter Ordnung durch die Gleichungen (6.14), (6.17) und (6.19). Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, findet im Wertebereich  $K \rightarrow -\infty$  im Wechselwirkungsgebiet der Übergang von schallnaher Strömung zur reinen Unterschallströmung statt, in der für die im Upper Deck induzierte Störströmung Beziehung (6.10) gültig ist. Die marginale Ablösung im reinen Unterschall ist damit strukturell jener in inkompressibler Strömung äquivalent - der in (6.10) auftretende Faktor  $M_0^2 - 1$  kann in die Affintransformationen aufgenommen werden. Das für  $K \rightarrow -\infty$  erhaltene Wechselwirkungsproblem erster Ordnung ist damit abgesehen von den Affintransformationen identisch mit dem in [2] behandelten.

### 6.3 Bestimmung des Potentials $\Phi_0$ im Fernfeld

Das Potential  $\Phi_0$  ist in Abhängigkeit von  $A_0$  über das Hilbert-Integral analytisch zugänglich. Dies wurde in [2] benutzt und als (analytisches) Ergebnis des Wechselwirkungsproblems eine Integralgleichung für die Wandschubspannung  $A$  erhalten. In der vorliegenden Arbeit wurde ein anderer Weg beschritten und auch das Wechselwirkungsproblem erster Ordnung (Gleichungen (6.6), (6.16) und (6.18)), welches mit dem in [2] behandelten identisch ist, numerisch gelöst. Eine numerische Behandlung ist im Hinblick auf weiterführende Arbeiten ein Vorteil, als dadurch die Möglichkeit gegeben ist, rasch eine Lösung für den Fall modifizierter Randbedingungen zu erhalten. Als Beispiel sei hier die Erforschung der Auswirkung eines kleinen Störkörpers im Upper Deck erwähnt, die in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurde (siehe Kapitel 7.2.2). Die numerische Behandlung und die damit einhergehende (numerische) Einschränkung des Definitionsbereiches des Wechselwirkungsproblems machen die Bestimmung des Fernfeldverhaltens der Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  notwendig. Zu dessen Berechnung wird von der 2. Greenschen Identität ausgegangen:

$$\int \int_B (S \Delta \Phi_0 - \Phi_0 \Delta S) dB = \oint_{\partial B} (S \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial S}{\partial n}) db \quad . \quad (6.20)$$

$B$  bezeichnet hierbei einen noch näher zu spezifizierenden zweidimensionalen Bereich, auf dem die Funktion  $\Phi_0$  bestimmt werden soll.  $\partial/\partial n$  ist die Ableitung in Richtung des nach außen weisenden Normalvektors in einem Punkt der Berandung  $\partial B$  des Bereiches  $B$ .

Wir setzen für  $S$  die Greensche Funktion des Laplace-Operators für den zweidimensionalen Fall ohne Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} \Delta S(\bar{X}, \bar{Y}; \xi, \eta) &= \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} = \delta(\bar{X} - \xi, \bar{Y} - \eta) \quad , \\ S(\bar{X}, \bar{Y}; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\bar{X} - \xi)^2 + (\bar{Y} - \eta)^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Weiters sei festgelegt, die Integrationen in Beziehung (6.20) in den kartesischen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  auszuführen. Die Randbedingung (6.18) für das Potenzial  $\Phi_0$  nimmt im Fernfeld unter Verwendung der Heaviside'schen Sprungfunktion  $\Theta(X)$  folgende Form an:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, 0) = -2\Theta(\tilde{X}) + 1 + \dots; \quad |\tilde{X}| \rightarrow \infty \quad . \quad (6.22)$$

Diese Beziehung folgt aus der Tatsache, dass sich die Funktion  $A_0$  für  $|\tilde{X}| \rightarrow \infty$  an die in Kapitel 3.2 beschriebene Grundlösung der marginalen Ablösung annähert, deren Steigung nach Anwendung der Affintransformationen (5.45) den Absolutbetrag 1 aufweist. Um für diese Randbedingung das Potenzial  $\phi_0$  im Fernfeld  $\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 \rightarrow \infty$  zu bestimmen, wird von der weiter oben angeführten Greenschen Identität ausgegangen, der als Bereich  $B$  die obere Halbebene  $\tilde{Y} > 0$  zugrundegelegt wird. Die Berechnung der Greenschen Identität auf diesem Gebiet setzt jedoch die Kenntnis des Fernfeldes von  $\Phi_0$  bereits voraus. Deshalb soll zunächst ein Potenzial  $\bar{\Phi}$  bestimmt werden, von dem gewährleistet ist, dass es über die Greensche Identität unmittelbar berechenbar ist und das folgenden Beziehungen genügt:

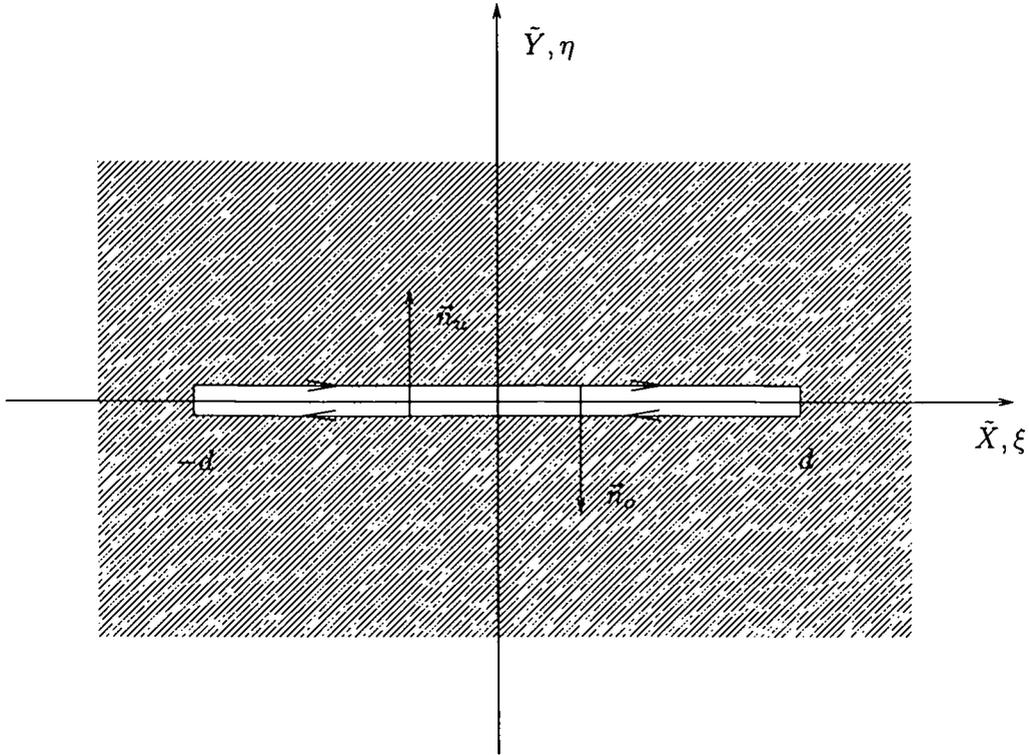
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \tilde{X}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \tilde{Y}^2} &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, 0+) &= -2\Theta(\tilde{X}) + 1; \quad |\tilde{X}| < d, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, 0-) = +2\Theta(\tilde{X}) - 1; \quad |\tilde{X}| < d, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tilde{Y}}(\tilde{X}, 0) &= 0; \quad |\tilde{X}| > d \quad , \quad \bar{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left| \nabla \bar{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right| = 0; \quad \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 = \infty \quad . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Auswertung der Greenschen Identität auf dem gesamten Raum mit Ausnahme eines Schlitzes auf der  $x$ -Achse der Länge  $2d$  (siehe Abb. 6) führt unter der Voraussetzung der Stetigkeit von  $\bar{\Phi}$  auf:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= 2 \int_{-d}^d S(\tilde{X}, \tilde{Y}; \xi, 0) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}(\xi, 0+) d\xi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-d}^d (2\Theta(\xi) - 1) \ln \sqrt{(\tilde{X} - \xi)^2 + \tilde{Y}^2} d\xi \quad . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Die Berechnung dieses Integrals ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{1}{\pi} \left( -2\tilde{Y} \arctan \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} - 2\tilde{X} \ln \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left( \tilde{Y} \arctan \frac{\tilde{X} + d}{\tilde{Y}} + (\tilde{X} + d) \ln \sqrt{(\tilde{X} + d)^2 + \tilde{Y}^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left( \tilde{Y} \arctan \frac{\tilde{X} - d}{\tilde{Y}} + (\tilde{X} - d) \ln \sqrt{(\tilde{X} - d)^2 + \tilde{Y}^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (6.25)$$



**Abbildung 6:** Integrationsgebiet

Der Vergleich der Beziehungen (6.22) und (6.23) zeigt, dass das Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi_0$  im Rahmen seiner durch die Randbedingung (6.18) festgelegten Bestimmbarkeit<sup>16</sup> durch  $\bar{\Phi}$  gegeben ist, wenn für die im Fernfeld betrachteten Punkte  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  gilt:

$$\frac{\tilde{X}}{d} \rightarrow 0; \quad \frac{\tilde{Y}}{d} \rightarrow 0 \quad . \quad (6.26)$$

In diesem Fall erhält man folgende Entwicklung des Potentials  $\bar{\Phi}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \frac{1}{\pi} \left\{ -2\tilde{Y} \arctan \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} - 2\tilde{X} \ln \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \right\} + \\ + \frac{1}{\pi} 2\tilde{X} (1 + \ln d) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Wandschubspannung  $A_0$ , die das Potenzial  $\Phi_0$  über die Randbedingung (6.18) bestimmt, hängt ihrerseits nur von der 2. Ableitung von  $\Phi_0$  nach  $\tilde{X}$  ab (Beziehung 6.16). Der Term  $2\tilde{X} (1 + \ln d)$  in der 2. Zeile von Beziehung (6.27) ist deshalb ohne Einfluss auf die Wandschubspannung, weshalb das Fernfeldverhalten von  $\Phi_0$  geschrieben wird als:

$$\Phi_0 \sim \frac{1}{\pi} \left\{ -2\tilde{Y} \arctan \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} - 2\tilde{X} \ln \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \right\}; \quad \tilde{X} \rightarrow \infty, \quad \tilde{Y} \rightarrow \infty \quad . \quad (6.28)$$

<sup>16</sup> $\Phi_0$  ist bis auf Funktionen  $f$  bestimmt, für die gilt:  $\Delta f = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}|_{y=0} = 0$

Die Kenntnis des Fernfeldverhaltens von  $\Phi_0$  ermöglicht in weiterer Folge die Bestimmung des Potentials  $\Phi_1$  im Fernfeld.

#### 6.4 Bestimmung des Potentials $\Phi_1$ im Fernfeld

Mit dem Fernfeldverhalten von  $\Phi_0$  (6.28) und Beziehung (6.14) folgt, dass das Potential  $\Phi_1$  im Fernfeld folgender Gleichung genügt:

$$\Delta\Phi_1 = -\frac{2c}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\tilde{X}^2}{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} + \ln \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \right\} . \quad (6.29)$$

Zur Berechnung von  $\Phi_1$  erweist es sich als günstig, auf Polarkoordinaten überzugehen. Mit  $r = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}$  und  $\theta = \arctan \tilde{Y}/\tilde{X}$  erhalten wir folgende Darstellung der Gleichung (6.29):

$$\Delta\Phi_1 = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\theta^2} = -\frac{2c}{\pi} \{ \cos^2\theta + 1 + \ln r \} = f(r, \theta) . \quad (6.30)$$

Zunächst soll der mit der Inhomogenität  $f(r, \theta)$  assoziierte Potenzialanteil

$$\bar{\Phi}_1 = \iint_B S\Delta\Phi_1 dB = \iint_B SfdB; \quad \Delta\bar{\Phi}_1 = f \quad (6.31)$$

bestimmt werden. Als Bereich  $B$  wird hierbei die gesamte Ebene zugrundegelegt.

Die Berechnung von  $\bar{\Phi}_1$  über das Flächenintegral in Beziehung (6.31) gestaltet sich aufwendig. Wesentlich effizienter ist es, von der Struktur der Inhomogenität auf jene der Funktion  $\bar{\Phi}_1$  zu schließen. Mit Hilfe des Laplace Operators kann leicht bestätigt werden, dass gilt:

$$\bar{\Phi}_1(r, \theta) = K_1(\theta)r^2 \ln r + K_2(\theta)r^2 , \quad (6.32)$$

wobei die Funktionen  $K_1$  und  $K_2$  das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} K_1'' + 4K_1 + \frac{2c}{\pi} &= 0 , \\ K_2'' + 4K_2 + 4K_1 + \frac{3c}{\pi} + \frac{c \cos(2\theta)}{\pi} &= 0 . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Die Lösung dieses Systems ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} K_1(\theta) &= -\frac{c}{2\pi} + C_1 \cos(2\theta) + C_2 \sin(2\theta) , \\ K_2(\theta) &= -\frac{c}{4\pi} + D_1 \cos(2\theta) + D_2 \sin(2\theta) + C_2 \theta \cos(2\theta) \\ &\quad - C_1 \theta \sin(2\theta) - \frac{c\theta}{4\pi} \sin(2\theta) . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Aufgrund der resonanten Anregung, die die rechte Seite der Gleichung (6.30) darstellt, treten hierbei die homogenen Lösungsanteile  $D_1 \cos(2\theta)$  sowie  $D_2 \sin(2\theta)$  auf. Die Gleichung (6.30)

ist invariant gegenüber der Variablentransformation  $\Theta \rightarrow \pi - \Theta$ .  $\bar{\Phi}_1$  muss deshalb ebenfalls diese Invarianzeigenschaft aufweisen, woraus folgt:

$$C_1 = -\frac{c}{4\pi}; \quad C_2 = 0 \quad . \quad (6.35)$$

Wir erhalten damit als Lösung für das Potenzial  $\bar{\Phi}_1$ :

$$\bar{\Phi}_1(r, \theta) = -\frac{c}{2\pi} r^2 \ln r \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right\} - \frac{c}{4\pi} r^2 \quad . \quad (6.36)$$

Im Hinblick auf das Fernfeldverhalten des Potentials  $\Phi_1$  ist die Frage zu klären, ob homogene Lösungsanteile der Gleichung (6.30) existieren, die für  $r \rightarrow \infty$  stärker als  $\bar{\Phi}_1$  aufklingen. Der aufklingende Anteil der homogenen Lösung  $\Phi_h$  von (6.30) ist von der Form

$$\Phi_h = \int_0^\infty r^\omega \{a(\omega) \cos(\omega\Theta) + b(\omega) \sin(\omega\Theta)\} d\omega \quad , \quad (6.37)$$

und wird durch die Randbedingung (6.19) festgelegt.

Ein auklingender Lösungsanteil  $r^\omega \{a(\omega) \cos(\omega\Theta) + b(\omega) \sin(\omega\Theta)\}$  wird gemäß (6.19) durch einen gleichartig aufklingenden Wandschubspannungsanteil hervorgerufen. Die Wandschubspannung  $A_1$  - als Korrektur zu  $A_0$  - muss jedoch mit zunehmendem Abstand vom Wechselwirkungsgebiet kleiner werden, weshalb eine aufklingende homogene Lösung der Form (6.37) auszuschließen ist. Wir erhalten deshalb für das für die Lösung des Wechselwirkungsproblems zweiter Ordnung relevante Fernfeldverhalten der Funktion  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(r, \theta) \sim -\frac{c}{2\pi} r^2 \ln r \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right\} - \frac{c}{4\pi} r^2; \quad r \rightarrow \infty \quad . \quad (6.38)$$

## 6.5 Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Wandschubspannung $A_1$

Für die numerische Behandlung der Wechselwirkungsprobleme erster und zweiter Ordnung für  $K \rightarrow -\infty$  ist neben dem Fernfeldverhalten der Potentiale  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  auch die Kenntnis der Wandschubspannung  $A_1$  für große negative Werte der Kordinate  $\tilde{X}$  notwendig. Wir tragen dazu - nach Rücktransformation auf kartesische Koordinaten - (6.38) in die Integralgleichung (6.17) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 2A_0A_1 &= +\lambda \int_{-\infty}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi_1(\tilde{t}, 0)}{\partial \tilde{t}^2} \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}} \\ &\sim -\frac{c\lambda}{2\pi} \left\{ \sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}} - 12 \sqrt{|\tilde{X}|} \arctan\left(\frac{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}}{\sqrt{|\tilde{X}|}}\right) - 3 \sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}} \log(\tilde{t}^2) \right\} \Bigg|_{-\infty}^{\tilde{X}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wie in Kapitel 6.2 ausgeführt, sind die divergierenden Anteile dieser Integralgleichung nicht mehr der der Gleichung zugeordneten Größenordnung von  $(-K)$  zugehörig (in diesem Fall  $(-K)^{-16/10}$ ). Mit dem asymptotischen Verhalten der Wandschubspannung  $A_0$ ,

$$A_0 = |\bar{X}| + \dots; \quad \bar{X} \rightarrow -\infty, \quad (6.40)$$

erhalten wir deshalb für das asymptotische Verhalten der Wandschubspannung  $A_1$

$$A_1 = -\frac{3\lambda c}{2\sqrt{|\bar{X}|}} + \dots; \quad \bar{X} \rightarrow -\infty. \quad (6.41)$$

## 7 Numerische Lösung des Wechselwirkungsproblems für

$$K \rightarrow -\infty$$

### 7.1 Beschreibung des Verfahrens

In Kapitel 6 wurde eine Entwicklung des Wechselwirkungsproblems für große negative Werte des Schallnäheparameters  $K$  durchgeführt und die sich daraus ergebenden Wechselwirkungsprobleme erster und zweiter Ordnung abgeleitet. Diese waren Gegenstand der im Folgenden skizzierten Berechnung, die wesentlich darauf beruht, für die Potentiale  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  ein numerisches Resultat in Abhängigkeit der unbekanntenen Wandschubspannungen  $A_0$  und  $A_1$  zu erhalten. Diese numerischen Ergebnisse wurden anschließend in die Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung (6.16) und (6.17) eingetragen und die sich ergebenden Gleichungssysteme nichtlinearer und linearer Natur für  $A_0$  und  $A_1$  gelöst.

#### 7.1.1 Diskretisierung der Wechselwirkungsgleichung erster und zweiter Ordnung

Zur numerischen Behandlung der Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung (6.16) und (6.17) teilen wir die dort auftretenden Integrale in zwei Anteile auf:

$$\lambda \int_{-\infty}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}} = \lambda \int_{-\infty}^{\tilde{X}_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}} + \lambda \int_{\tilde{X}_0}^{\tilde{X}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}, 0) \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\tilde{X} - \tilde{t}}} \quad (7.1)$$

$\tilde{X}_0 < 0; \quad \Phi = \Phi_0, \Phi_1$  .

Im Intervall  $[\tilde{X}_0, |\tilde{X}_0|]$  sollen diese Integrale numerisch gelöst werden, außerhalb dieses Intervalls wird für die Potentiale  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  auf die im Kapitel 6 berechneten Fernfeldlösungen zurückgegriffen, die eine analytische Auswertung der Integrale ermöglichen.

Wir definieren auf dem Intervall  $[\tilde{X}_0, |\tilde{X}_0|]$  äquidistante Stützpunkte  $\tilde{X}_i$  mit dem Abstand  $\Delta h$ , sodass in den derart diskretisierten Wechselwirkungsgleichungen (6.16) und (6.17) Integrale der folgenden Form zu bestimmen sind:

$$I(\tilde{X}_i) = \int_{\tilde{X}_0}^{\tilde{X}_i} \frac{f(t)}{\sqrt{\tilde{X}_i - t}} dt; \quad \tilde{X}_i = \tilde{X}_0 + i\Delta h \quad , \quad (7.2)$$

mit einer beliebigen stetigen Funktion  $f$ . Zur numerischen Lösung von (7.2) wird eine in [30] konzipierte und erfolgreich angewandte Methode benutzt. Diese besteht im Wesentlichen darin die Funktion  $f$  zwischen den Stützstellen  $\tilde{X}_i$  linear zu interpolieren, sodass sich ergibt:

$$I(\tilde{X}_i) = \sum_{l=0}^{i-1} \int_{\tilde{X}_0 + l\Delta h}^{\tilde{X}_0 + (l+1)\Delta h} \left( f_l + \frac{f_{l+1} - f_l}{\Delta h} (t - t_l) \right) \frac{dt}{\sqrt{\tilde{X}_0 + i\Delta h - t}}; \quad f_l := f(t_l). \quad (7.3)$$

Mit der Substitution  $s = (\tilde{X}_0 - t)/\Delta h$  erhalten wir:

$$I(\tilde{X}_i) = \sum_{l=0}^{i-1} \int_{-(l+1)}^{-l} \{f_l + (f_l - f_{l+1})\} (s+l) \frac{\sqrt{\Delta h} ds}{\sqrt{s+i}} \quad (7.4)$$

Die Durchführung der Integration führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} I(\tilde{X}_i) &= \sum_{l=0}^{i-1} \sqrt{\Delta h} \{a(i, l) f_{l+1} + b(i, l) f_l\} \quad , \\ a(i, l) &= \frac{2}{3} \left\{ 2(i-l)^{3/2} - (1+2i-2l) \sqrt{i-l-1} \right\} \quad , \\ b(i, l) &= \frac{2}{3} \left\{ 2(i-l-1)^{3/2} - (2i-2l-3) \sqrt{i-l} \right\} \quad . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dieses Resultat wird in der numerischen Berechnung in folgender Darstellungsweise verwendet:

$$\begin{aligned} I(\tilde{X}_i) &= \sqrt{\Delta h} \sum_{l=0}^{i-1} c(i, l) f_l \quad , \\ l=0 : \quad c(i, l) &= b(i, l) \quad , \\ 0 < l < i : \quad c(i, l) &= a(i, l-1) + b(i, l) \quad , \\ l=i-1 : \quad c(i, l) &= a(i, l) \quad . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Wir erhalten damit als Zwischenergebnis für die Diskretisierung der Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} A_{0j}^2 - \tilde{X}_j^2 - 2\tilde{a} - \lambda\sqrt{\Delta h} \sum_{l=0}^{j-1} c(j, l) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2}(t, 0)|_{t=t_l} &= 0; \quad A_{0j} := A_0(\tilde{X}_j) \quad , \\ 2A_{0j}A_{1j} - \lambda\sqrt{\Delta h} \sum_{l=0}^{j-1} c(j, l) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2}(t, 0)|_{t=t_l} &= 0; \quad A_{1j} := A_1(\tilde{X}_j) \quad . \end{aligned} \quad (7.7)$$

### 7.1.2 Diskretisierung der Poisson-Gleichung

Die Poisson- bzw. - als deren Sonderfall - die Laplace-Gleichung tritt in den Wechselwirkungsproblemen erster und zweiter Ordnung auf. Unter Benützung der Notation

$$\Phi_0(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j) = \Phi_{0, i, j}; \quad \Phi_1(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_j) = \Phi_{1, i, j} \quad , \quad (7.8)$$

und unter der Voraussetzung gleicher Abstände ( $\Delta h$ ) der Stützstellen  $\tilde{X}_i$ - und  $\tilde{Y}_j$  in den beiden Koordinatenrichtungen ist die zweiter Ordnung genaue Diskretisierung mit zentralen Differenzen der aus der Upper Deck Gleichung in der Grenze  $K \rightarrow -\infty$  hervorgehenden Laplace-Gleichung (6.6) (erste Ordnung) und Poisson-Gleichung (6.14) (zweite Ordnung)

$$\Delta \Phi_k = \rho_k; \quad k = 0, 1; \quad \rho_0 = 0; \quad \rho_1 = c \left\{ \tilde{X} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \tilde{X}^2} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{X}} \right\} \quad (7.9)$$

gegeben durch:

$$\Phi_{k\ i+1,j} + \Phi_{k\ i-1,j} + \Phi_{k\ i,j+1} + \Phi_{k\ i,j-1} - 4\Phi_{k\ i,j} = \Delta h^2 \rho_{k\ i,j}; \quad k = 0, 1 \quad . \quad (7.10)$$

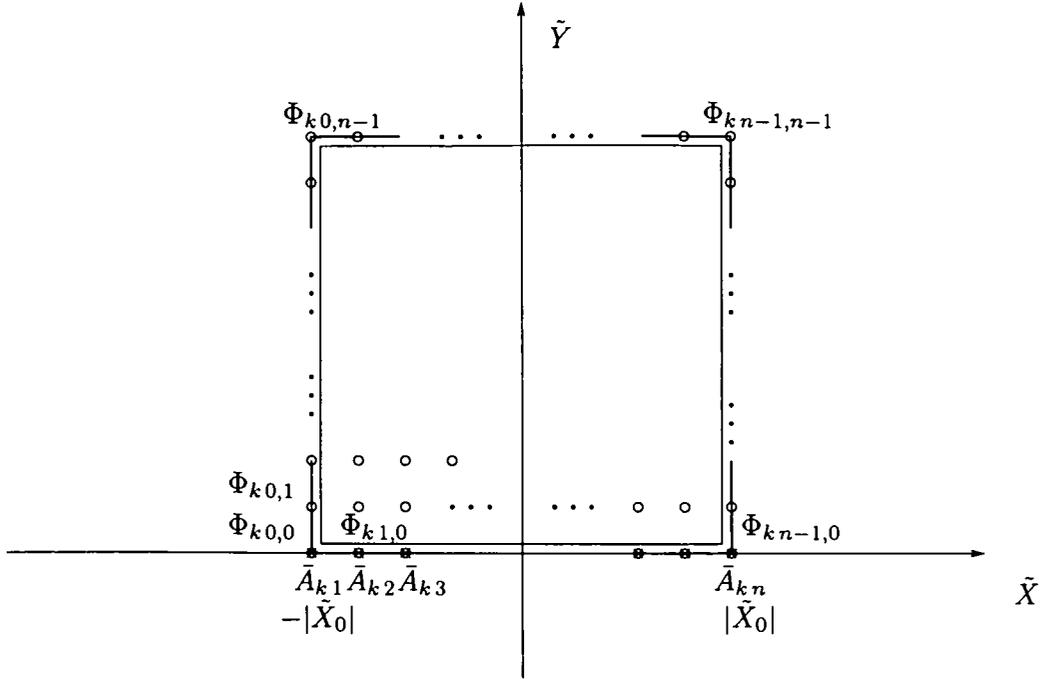
Beiden Gleichungen (erster und zweiter Ordnung) liegt als Definitionsbereich die Halbebene  $\bar{Y} \geq 0$  zugrunde. Wir beschränken im Folgenden die numerische Behandlung beider Gleichungen auf einen quadratischen Bereich gemäß Abb. 7 und ordnen die Potenzialwerte erster Ordnung  $\Phi_{0\ i,j}$  sowie jene zweiter Ordnung  $\Phi_{1\ i,j}$  auf den darin befindlichen Stützstellen gemäß folgender Konvention in einem Spaltenvektor an:

$$\bar{\Phi}_{k\ m} := \Phi_{k\ i,j}; \quad m = n * j + i;$$

$$i = 0, \dots, n - 1; \quad j = 0, \dots, n - 1; \quad k = 0, 1; \quad \bar{\Phi}_k = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{k\ 0} \\ \bar{\Phi}_{k\ 1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{k\ n*n-1} \end{pmatrix} . \quad (7.11)$$

An der Berandung des numerischen Definitionsbereiches (siehe Abb. 7) werden mit Ausnahme jenes Abschnitts, der auf der  $\bar{X}$ -Achse liegt, die aus der Fernfelduntersuchung erhaltenen Werte für die Potentiale erster und zweiter Ordnung  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  vorgeschrieben (siehe (6.38) und (6.28)). Am verbleibenden Rand werden an  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  die Kopplungsbedingungen (6.18) und (6.19) gestellt:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \bar{Y}} \Big|_{\bar{Y}=0} = -\frac{dA_0}{d\bar{X}}; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{Y}} \Big|_{\bar{Y}=0} = -\frac{dA_1}{d\bar{X}} \quad . \quad (7.12)$$



**Abbildung 7:** Diskretisierung des numerischen Definitionsbereiches

Unter Benützung der Notation

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} \bar{A}_{01} \\ \bar{A}_{02} \\ \vdots \\ \bar{A}_{0n} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{12} \\ \vdots \\ \bar{A}_{1n} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

führt die Diskretisierung der aus der Upper Deck Gleichung in der Grenze  $K \rightarrow -\infty$  resultierenden Gleichungen erster (6.6) und zweiter Ordnung (6.14) samt den zugehörigen Randbedingungen (7.12) auf folgende Matrixgleichungen:

$$\hat{C}_0 \bar{\Phi}_0 = \bar{g}_0 + \hat{B}_0 \bar{A}_0; \quad \hat{C}_1 \bar{\Phi}_1 = \bar{g}_1 + \hat{B}_1 \bar{A}_1 \quad (7.14)$$

Die Dimensionen der darin vorkommenden Vektoren bzw. Matrizen sind:

$$\hat{C}_0, \hat{C}_1 : n^2 \times n^2; \quad \bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_1 : n^2; \quad \bar{g}_0, \bar{g}_1 : n^2; \quad \hat{B}_0, \hat{B}_1 : n^2 \times n; \quad \bar{A}_0, \bar{A}_1 : n \quad (7.15)$$

Mit den inversen Matrizen  $\hat{C}_0^{-1}$  bzw.  $\hat{C}_1^{-1}$  erhalten wir für die Potenziale  $\bar{\Phi}_0$  und  $\bar{\Phi}_1$ :

$$\bar{\Phi}_0 = \hat{C}_0^{-1} \bar{g}_0 + \hat{C}_0^{-1} \hat{B}_0 \bar{A}_0; \quad \bar{\Phi}_1 = \hat{C}_1^{-1} \bar{g}_1 + \hat{C}_1^{-1} \hat{B}_1 \bar{A}_1 \quad (7.16)$$

### 7.1.3 Numerische Lösung der Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung

Unter Benützung der im letzten Kapitel eingeführten Notation sowie eines symmetrischen Differenzenquotienten zweiter Ordnung für die Potenziale  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  kann die Diskretisierung der Wechselwirkungsgleichungen erster und zweiter Ordnung (6.16) und (6.17) folgendermaßen vervollständigt werden:

$$\begin{aligned} A_{0j}^2 - \bar{X}_j^2 - 2\bar{a} - \lambda\Delta h^{-3/2} \sum_{l=0}^{j-1} c(j,l) \{ \Phi_{0l+1,0} - 2\Phi_{0l,0} + \Phi_{0l-1,0} \} &= 0; \quad j = 1, \dots, n, \\ 2A_{0j}A_{1j} - \lambda\Delta h^{-3/2} \sum_{l=0}^{j-1} c(j,l) \{ \Phi_{1l+1,0} - 2\Phi_{1l,0} + \Phi_{1l-1,0} \} &= 0; \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Wir setzen die in (7.16) in den Vektoren  $\bar{\Phi}_0$  und  $\bar{\Phi}_1$  zusammengefassten Ausdrücke für die Potenziale  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  in die diskretisierten Wechselwirkungsgleichungen ein und erhalten das in den  $A_{0j}$  nichtlineare Gleichungssystem

$$F_j(A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0n}) = 0; \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.18)$$

sowie das in den  $A_{1j}$  lineare Gleichungssystem

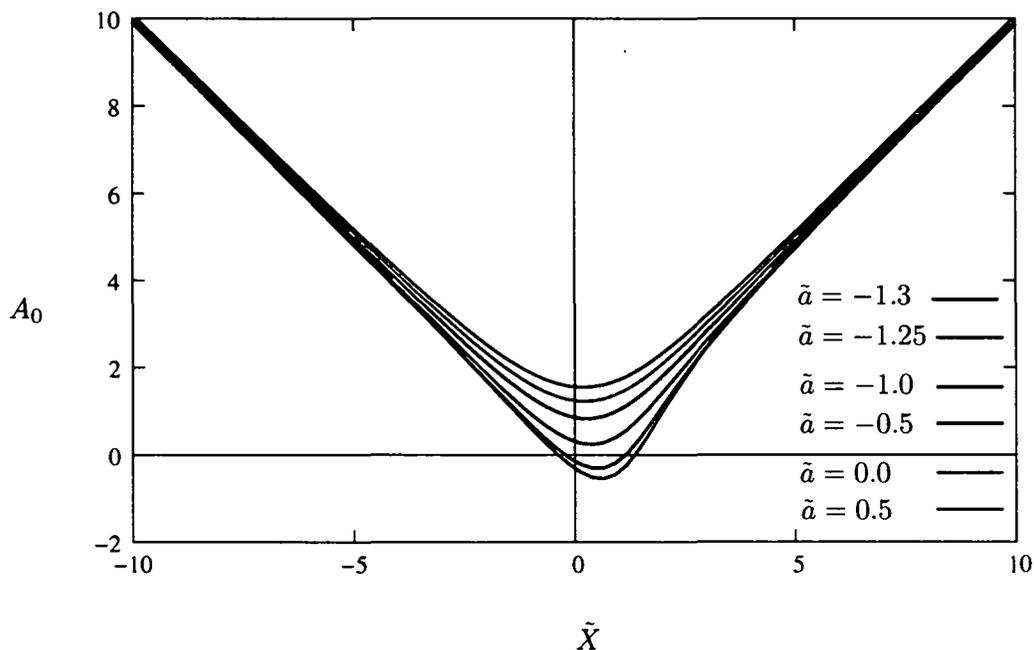
$$G_j(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}) = 0; \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.19)$$

Zur numerischen Lösung beider Gleichungssysteme wurde eine C-Routine der *Numerical Algorithms Group* (NAG) verwendet, welche auf einer Modifikation der Methode von Powell beruht [31].

## 7.2 Diskussion der Ergebnisse

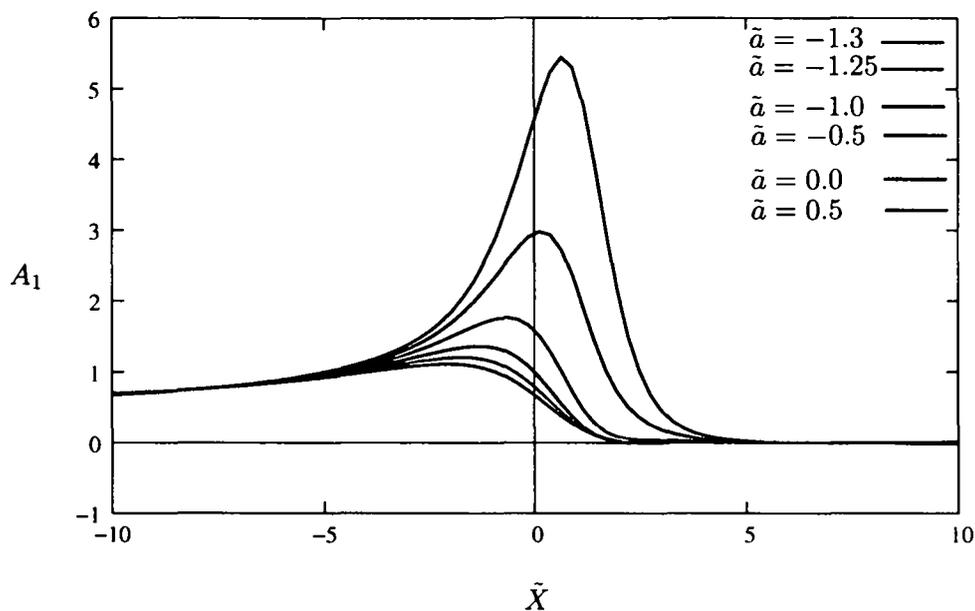
### 7.2.1 Verlauf der Wandschubspannungen $A_0$ und $A_1$

Mit dem im Kapitel 7.1 vorgestellten numerischen Berechnungsverfahren wurden die Wandschubspannungen  $A_0$  und  $A_1$ , welche sich aus der asymptotischen Analyse des Wechselwirkungsproblems für  $K \rightarrow -\infty$  in erster und zweiter Ordnung ergeben, in Abhängigkeit des Anstellwinkelparameters  $\tilde{\alpha}$  berechnet. Wie in Kapitel 6.2 ausgeführt wurde, ist das Wechselwirkungsproblem erster Ordnung strukturell mit jenem für den Fall marginaler Ablösung in inkompressibler Strömung identisch. Die Wandschubspannung  $A_0$  muss deshalb auch mit der in [2] erhaltenen Wandschubspannung übereinstimmen. Um dies zu verifizieren, wurden die in [2] präsentierten Ergebnisse mit dem dort angewandten Verfahren reproduziert und mit den für die Wandschubspannung  $A_0$  erhaltenen Ergebnissen verglichen. In Abbildung 8 sind die Resultate für die Wandschubspannung  $A_0$  dargestellt. Im Rahmen der in dieser Abbildung verwendeten Darstellungsgenauigkeit sind die gemäß [2] gerechneten Wandschubspannungsläufe ununterscheidbar von den  $A_0$ -Resultaten. Weiters stellte, wie in den Berechnungen in [2] ebenfalls, der Wert  $\tilde{\alpha}_c = -1.33$  für den Parameter  $\tilde{\alpha}$  jene Grenze dar, unterhalb derer kein konvergentes numerisches Ergebnis für  $A_0$  erhalten werden konnte - die Wechselwirkungsgleichung weist für  $\tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}_c$  keine reellen Lösungen auf (siehe [32]). Darüber hinaus ist, wie in [3] gezeigt wurde, die Lösung des Wechselwirkungsproblems mehrdeutig. Diese Mehrdeutigkeit kann mit dem in [2] und dem in der vorliegenden Arbeit eingesetzten numerischen Verfahren nicht reproduziert werden kann.



**Abbildung 8:** Verlauf der Wandschubspannung  $A_0$  in Abhängigkeit des Parameters  $\tilde{\alpha}$ . Unterschreitet der Parameter  $\tilde{\alpha}$  den Wert -1.14, so nimmt die Wandschubspannung  $A_0$  um den Koordinatenursprung negative Werte an - es bildet sich ein Rückströmungsgebiet aus.

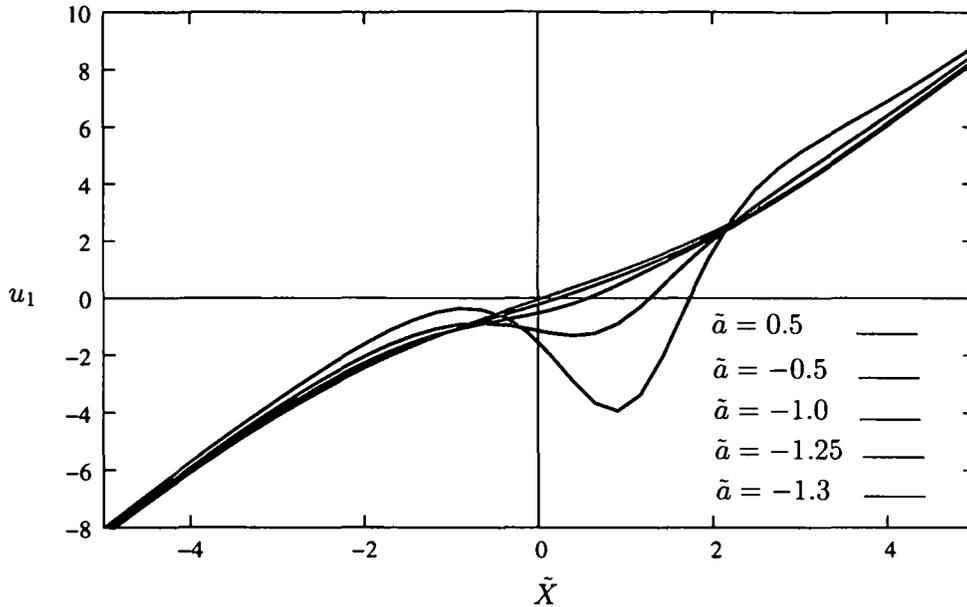
Der durch die Wechselwirkung auf die Außenströmung ausgeübte Verdrängungseffekt wird durch den Verlauf der Wandschubspannung  $A$  bestimmt. Der Grund dafür liegt im Wesentlichen in der allgemein als Passivität bezeichneten Eigenschaft des Main Decks ([25],[18]). Diese besteht darin, dass die Strömung im Main Deck in führender Ordnung reibungsfrei und frei von einem Druckgradienten ist. Daraus resultierend werden die mit der Wechselwirkung verbundenen Druckstörungen unverändert zwischen Lower- und Upper Deck übertragen (siehe Beziehung (5.26)). Schallnahe Strömungen weisen nun eine besonders hohe Empfindlichkeit gegenüber Verdrängungseffekten auf. Dies manifestiert sich auch in der schallnahen marginalen Ablösung im Fall  $K \rightarrow -\infty$ , als hier der Korrekturterm  $A_1$  zur Wandschubspannung  $A_0$  selbst von  $A_0$  und damit der die Verdrängungseffekte in führender Ordnung bestimmenden Größe abhängt. Eine mit einer Änderung des Anstellwinkelparameters  $\bar{\alpha}$  verbundene Variation des Verlaufes von  $A_0$  geht daher einher mit einer von dieser Variation abhängenden Korrektur ( $A_1$ ) der Wandschubspannung.



**Abbildung 9:** Verlauf der Wandschubspannung  $A_1$  in Abhängigkeit des Parameters  $\bar{\alpha}$ .

Abbildung 9 zeigt den Verlauf der Wandschubspannung  $A_1$  in Abhängigkeit des Parameters  $\bar{\alpha}$ . Eine physikalische Interpretation von  $A_1$  wird durch Analyse des Korrekturterms  $u_1 = \partial\Phi_1/\partial\bar{X}$  zur Geschwindigkeit am Grenzschichttrand ermöglicht. Der Verlauf dieses Korrekturterms ist in Abbildung 10 dargestellt. Aus Abbildung 10 ist ersichtlich, dass im schallnahen Strömungsregime die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand mit Annäherung an das Wechselwirkungsgebiet ansteigt. Dies entspricht einem Eintrag von kinetischer Energie in die Grenzschicht, welcher ein Ansteigen der Wandschubspannung zur Folge hat (siehe Abb. 9). Aus Abbildung 10 ist weiters ersichtlich, dass für Werte des Parameters  $\bar{\alpha}$ , welche mit Bereichen negativer Wandschubspannung und damit Rückströmungsbereichen korrespondieren, die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand über dem Rückströmungsgebiet in Strömungsrichtung erneut sinkt. De-

mentprechend ist zu erwarten, dass die Wandschubspannung in diesem Bereich ebenfalls sinkt. Dies wird durch die positive Korrektur  $A_1$  zur negativen Wandschubspannung  $A_0$  im Rückströmungsgebiet bestätigt.



**Abbildung 10:** Verlauf der mit dem Potenzial  $\Phi_1$  assoziierten Geschwindigkeitskomponente  $u_1 = \partial\Phi_1/\partial\tilde{X}$  in Abhängigkeit des Parameters  $\tilde{a}$ .

### 7.2.2 Auswirkung additiver Potenziale im Upper Deck auf den Verlauf der Wandschubspannung $A_0$

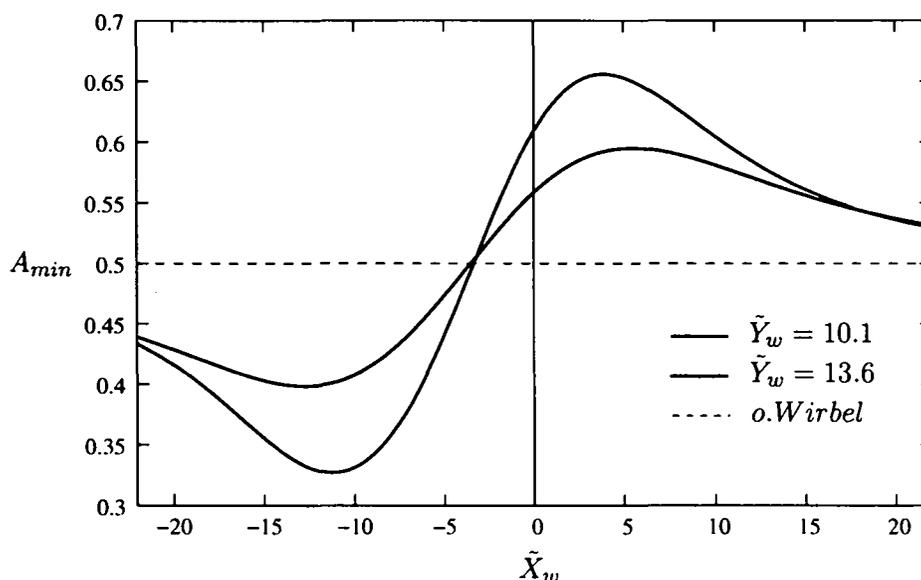
Da das Platzen von Ablöseblasen an der Vorderkante dünner Flügelprofile bei Erhöhung des Anstellwinkels über einen kritischen Wert hinaus mit einer abrupten Reduktion des Auftriebs verbunden ist, ist es wünschenswert, die Bildung von Ablöseblasen hinauszuzögern im Sinne einer Verschiebung zu höheren Anstellwinkeln (siehe [4]). Maßnahmen konstruktiver Art, die neben einer Erhöhung des kritischen Anstellwinkels weiters die Manövrierfähigkeit eines Flugzeugs erhöhen sowie die durch die Luftströmung induzierte Schallentwicklung reduzieren, werden generell unter dem Begriff des *Flow control* zusammengefasst. Derartige Maßnahmen beinhalten unter anderem die Verwendung kleiner am Flügelprofil montierter Hindernisse sowie Grenzschichtabsaugung. Wie in [33] im Rahmen der asymptotischen Theorie instationärer dreidimensionaler marginaler Ablösung gezeigt wurde, kann mit diesen beiden Maßnahmen der kritische Anstellwinkel in obigem Sinn positiv beeinflusst werden. Weitere Beiträge zur Auswirkung von kleinen, auf der Profilloberfläche befindlichen Hindernissen auf die marginale Strömungsablösung sind [30] und [34] bzw. wurden in [35] zusammengefasst.

Als Erweiterung zu den bisherigen Untersuchungen wurde in der vorliegenden Arbeit die Auswirkung von im Upper Deck befindlichen, asymptotisch kleinen Objekten auf die marginale Strömungsablösung untersucht. Da der qualitative Aspekt dieser Untersuchungen im Vordergrund stand, wurden nicht konkrete geometrische Formen untersucht, sondern die Auswirkung

der Änderung des Störpotenzials  $\bar{\Phi}_0$  durch additive Potentiale eines Dipols sowie eines Potenzialwirbels. Eine weitere Einschränkung bestand darin, nur das sich für  $K \rightarrow -\infty$  ergebende Wechselwirkungsproblem führender Ordnung (Gleichung 6.16) in dieser Hinsicht zu untersuchen. Wie in Kapitel 6.3 bereits ausgeführt, bietet die numerische Behandlung der Upper Deck Gleichung für den Fall  $K \rightarrow -\infty$  die Möglichkeit, rasch eine Lösung für veränderte Randbedingungen zu erhalten. Um die Auswirkung eines Potenzialwirbels sowie eines Dipols auf die marginale Strömungsablösung zu untersuchen, ist es lediglich notwendig, in die Wechselwirkungsgleichung (6.16) ein Potenzial  $\bar{\Phi}_0$  einzusetzen, für das gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_0 &= \bar{\Phi}_0(A_0) + \bar{\Phi}_{add}; & \bar{\Phi}_{add} &= \bar{\Phi}_d, \bar{\Phi}_w \\ \bar{\Phi}_w &= \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{\tilde{Y} - \tilde{Y}_w}{\tilde{X} - \tilde{X}_w} \\ \bar{\Phi}_d &= \frac{m}{\pi} \frac{\tilde{X} - \tilde{X}_d}{(\tilde{X} - \tilde{X}_d)^2 + (\tilde{Y} - \tilde{Y}_d)^2}\end{aligned}\quad (7.20)$$

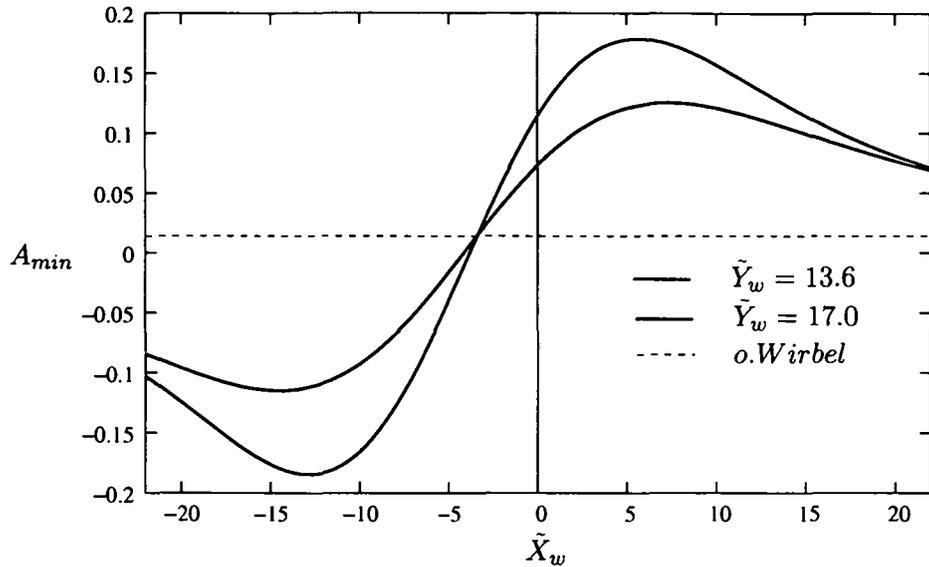
$\bar{\Phi}_0(A_0)$  bezeichnet hierbei den durch die Wandschubspannung  $A_0$  bestimmten Potenzialanteil (siehe Beziehung 6.18).  $\bar{\Phi}_{add}$  ist das additive Potenzial eines Dipols bzw. eines Potenzialwirbels.  $(\tilde{X}_d, \tilde{Y}_d)$  sowie  $(\tilde{X}_w, \tilde{Y}_w)$  bezeichnen die Koordinaten im Upper Deck, an denen sich der Dipol (Index d) beziehungsweise der Potenzialwirbel (Index w) befinden.



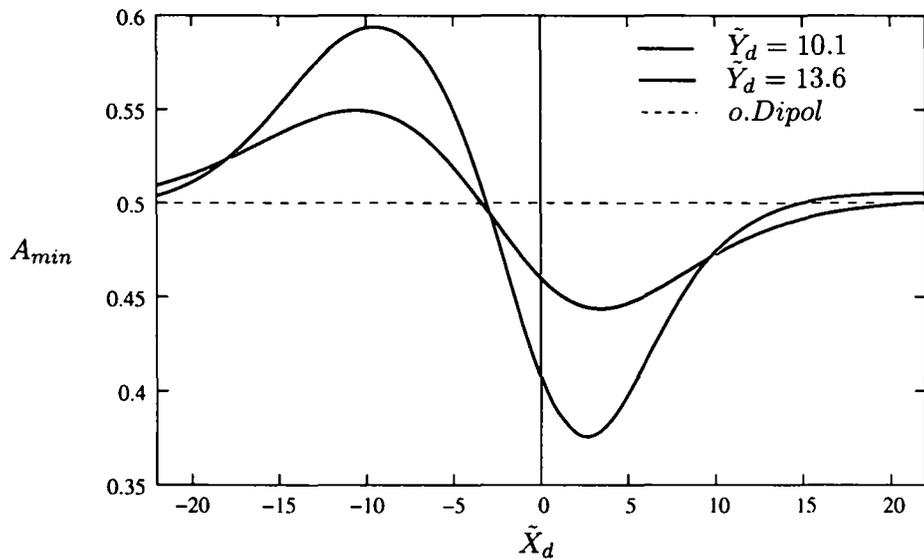
**Abbildung 11:** Verlauf des Minimums der Wandschubspannung  $A_0$  in Abhängigkeit der Wirbelposition in  $\tilde{X}$ -Richtung  $\tilde{X}_w$  sowie des Abstandes  $\tilde{Y}_w$  des Wirbels über der Linie  $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von  $A_0$ , das sich ohne Wirbel ergibt. ( $\Gamma = -50$ , Anstellwinkelparameter  $\alpha = -0.8$ )

Aus Abb. 11-14 ist zu erkennen, dass abhängig von der Position des Potenzialwirbels bzw. des Dipols in  $\tilde{X}$ -Richtung das Minimum der Wandschubspannung  $A_0$  verändert und insbesondere zu höheren Werten verschoben werden kann. Folglich ist damit auch die Möglichkeit verbunden,

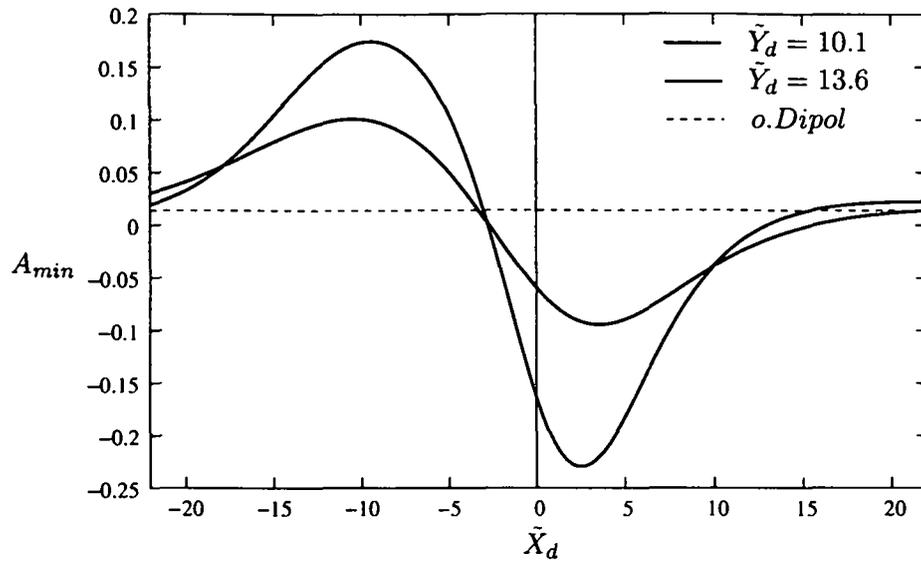
den kritischen Wert  $a_c$  des Parameters  $a$  zu erniedrigen und so den kritischen Anstellwinkel zu erhöhen.



**Abbildung 12:** Verlauf des Minimums der Wandschubspannung  $A_0$  in Abhängigkeit der Wirbelposition in  $\tilde{X}$ -Richtung  $\tilde{X}_w$  sowie des Abstandes  $\tilde{Y}_w$  des Wirbels über der Linie  $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von  $A_0$ , das sich ohne Wirbel ergibt. ( $\Gamma = -50$ , Anstellwinkelparameter  $\tilde{a} = -1.1$ )



**Abbildung 13:** Verlauf des Minimums der Wandschubspannung  $A_0$  in Abhängigkeit der Dipolposition in  $\tilde{X}$ -Richtung  $\tilde{X}_d$  sowie des Abstandes  $\tilde{Y}_d$  des Dipols über der Linie  $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von  $A_0$ , das sich ohne Dipol ergibt. ( $m = 95$ , Anstellwinkelparameter  $\tilde{a} = -0.8$ )



**Abbildung 14:** Verlauf des Minimums der Wandschubspannung  $A_0$  in Abhängigkeit der Dipolposition in  $\tilde{X}$ -Richtung  $\tilde{X}_d$  sowie des Abstandes  $\tilde{Y}_d$  des Dipols über der Linie  $\tilde{Y} = 0$ . Die waagrechte Linie kennzeichnet das Minimum von  $A_0$ , das sich ohne Dipol ergibt. ( $m = 95$ , Anstellwinkelparameter  $\tilde{a} = -1.1$ )

## 8 Zusammenfassung

Unter Zugrundelegung kompressibler Strömung ergab sich aus einer Ähnlichkeitsanalyse der Grenzschichtgleichungen um einen Punkt verschwindender Wandschubspannung das Resultat, dass die Grenzschicht in der Umgebung dieses Punktes eine Zweischichtenstruktur aufweist. In der so genannten wandnahen Schicht, die an die strömungsbegrenzende Wand anschließt, sind Druck-, Reibungs- und Trägheitskräfte in Balance. Die zwischen Grenzschichttrand und wandnaher Schicht befindliche Zwischenschicht ist dadurch charakterisiert, dass hier Trägheits- und Druckkräfte dominieren. Basierend auf der sich aus dieser Schichtenstruktur ergebenden Ähnlichkeitsvariablen wurde eine Koordinatenentwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen um den Punkt verschwindender Wandschubspannung durchgeführt. Dabei wurde ganz analog zu der für inkompressible Strömung durchgeführten Untersuchung in [1] das Ergebnis erhalten, dass Lösungen der Grenzschichtgleichungen existieren, die über den Punkt verschwindender Wandschubspannung fortgesetzt werden können und dass diese Lösungen mit einem linearen Verlauf der Wandschubspannung einhergehen. Aufgrund der Tatsache, dass die Grenzschichtgleichungen keine zweiten Ableitungen nach der Koordinate  $x$  enthalten, ist im Speziellen auch ein bis zum Wert null linear fallender und unmittelbar danach linear ansteigender Wandschubspannungsverlauf möglich. Im weiteren Verlauf der Arbeit wurde, mit der zu diesem Wandschubspannungsverlauf korrespondierenden Lösung als führendem Term, eine asymptotische Entwicklung der Lösung der Grenzschichtgleichungen für kleine Variationen eines Kontrollparameters durchgeführt. Dieser Kontrollparameter wurde in der vorliegenden Arbeit mit dem Anstellwinkel eines dünnen Flügelprofils gleichgesetzt. Dabei zeigte sich, dass der führende Term dieser Entwicklung (in der Arbeit als Grundlösung bezeichnet) eine beim so genannten kritischen Anstellwinkel ( $k_c$ ) auftretende, marginal abgelöste Grenzschichtströmung lokal (um den Punkt verschwindender Wandschubspannung) zu beschreiben vermag. Davon ausgenommen ist allerdings ein asymptotisch kurzer Abschnitt der Grenzschicht um den Punkt verschwindender Wandschubspannung. Innerhalb jenes Abschnittes ist das hierarchische Konzept der Grenzschichttheorie nicht gültig, da die aus der Grundlösung folgende Richtung der Stromlinien am Grenzschichttrand über dem Punkt verschwindender Wandschubspannung eine Unstetigkeit aufweist. In der Untersuchung der Strömung in diesem Abschnitt muss deshalb auf die Navier Stokes Gleichungen zurückgegriffen werden und die Wechselwirkung zwischen Grenzschicht und Außenströmung mit einbezogen werden. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit für den Fall schallnaher Außenströmung durchgeführt, beginnend mit der Bestimmung der asymptotischen Abmessungen des für die Wechselwirkung charakteristischen Triple Decks sowie der Kopplung der Grenzübergänge für Machzahl und Anstellwinkel ( $M \rightarrow 1$  und  $k \rightarrow k_c$ ) an die Reynoldszahl. Daraus folgte, dass sich das Wechselwirkungsgebiet in Strömungsrichtung auf einer Länge der Größenordnung  $Re^{-1/6}$  erstreckt. Das Lower Deck, in dem Druck-, Reibungs- und Trägheitskräfte in Balance sind, erstreckt sich normal zur Strömungsrichtung auf einer Länge der Größenordnung  $Re^{-13/24}$ . Das Main Deck umfasst die eigentliche Grenzschicht (Ausdehnung  $Re^{-1/2}$ ) und das Upper Deck erstreckt sich auf einer Länge der Größenordnung  $Re^{-1/12}$  in die Außenströmung hinein. Weiters ergab sich, dass die durch die Wechselwirkung hervorgerufene Störströmung im Upper Deck einem linearen Zusammenhang unterliegt (Upper Deck Gleichung) und dass jene, die Wechselwirkung charakterisierende Integralgleichung, welche die Wandschubspannung mit dem am Grenzschichttrand induzierten Druckgradienten verknüpft,

strukturell ident ist zu der im inkompressiblen Fall erhaltenen [2] [3]. Eine numerische Behandlung des schallnahen Wechselwirkungsproblems für den gesamten Wertebereich  $[-\infty, \infty]$  - des die Schallnähe charakterisierenden Parameters  $K$  wurde in der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt. Es wurde jedoch einerseits als Vorarbeit zu einer derartigen numerischen Behandlung das Fernfeld des mit der Störströmung im Upper Deck assoziierten Potentials bestimmt und andererseits eine numerische Berechnung basierend auf einer asymptotischen Entwicklung des Wechselwirkungsproblems für große negative Werte des Parameters  $K$  implementiert. Die damit erhaltenen Wandschubspannungsverläufe führender Ordnung stimmen mit jenen für den inkompressiblen Fall erhaltenen sehr gut überein und bieten somit einen Hinweis auf die korrekte Implementierung des Verfahrens. Dieses bietet - im Gegensatz zu jenem in [2] angewandten - die Möglichkeit rasch Lösungen des Wechselwirkungsproblems für veränderte Randbedingungen im Upper Deck zu erhalten. Diese Eigenschaft wurde dazu benutzt, die Auswirkung von asymptotisch kleinen, im Upper Deck befindlichen Objekten zu studieren. Es zeigte sich dabei, dass damit eine effektive Beeinflussung des Einsetzens marginaler Strömungsablösung möglich ist.

## Literatur

- [1] RUBAN, A. I.: *Singular solution of boundary layer equations which can be extended continuously through the point of zero surface friction*. Izv. Akad. Nauk SSSR: Mekh. Zhidk. Gaza, 6:42–52, 1981 (engl. Übersetzung *Fluid Dyn.* 16:835-843).
- [2] RUBAN, A. I.: *Asymptotic theory of short separation regions on the leading Edge of a slender Airfoil*. Izv. Akad. Nauk SSSR: Mekh. Zhidk. Gaza, 1:42–51, 1981 (engl. Übersetzung *Fluid Dyn.* 17:33-41).
- [3] STEWARTSON, K., F. T. SMITH und K. KAUPS: *Marginal separation*. Stud. Appl. Math., 67:45–61, 1982.
- [4] SYCHEV, V. V., A. I. RUBAN, VIK. V. SYCHEV und G. L. KOROLEV: *Asymptotic theory of separated flows*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] ELY, W. L. und R. N. HERRING: *Laminar Leading Edge Stall Prediction for Thin Airfoils*. AIAA Paper, Seiten 78–122, 1978.
- [6] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G.Braun, 1965.
- [7] PRANDTL, L.: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verh. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Teubner, Leipzig, 1905.
- [8] GOLDSTEIN, S.: *On laminar boundary-layer flow near a position of separation*. Q. J. Mech. Appl. Math., 1:43–69, 1948.
- [9] STEWARTSON, K.: *Is the singularity at separation removable?* J. Fluid Mech., 44:347–364, 1970.
- [10] STEWARTSON, K.: *Self-induced separation*. Proc. Royal Soc. London (A), 312:181–206, 1969.
- [11] BODONYI, R. J. und A. KLUWICK: *Freely interacting transonic boundary layers*. The Physics of Fluids, 20(9):1432–1437, 1977.
- [12] BODONYI, R. J. und A. KLUWICK: *Transonic trailing edge flow*. Q. J. Mech. appl. Math., 51:297–310, 1998.
- [13] STEWARTSON, K.: *The theory of laminar boundary layers in compressible fluids*. Oxford University Press, 1964.
- [14] CROCCO, L.: *Sulla trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ad alta velocità*. L' Aerotecnica, 12:181–197, 1932.
- [15] BUSEMANN, A.: *Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte*. ZAMM, 15:23–25, 1935.
- [16] CANTWELL, B. J.: *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, 2002.

- [17] BLUMAN, G. W. und J. D. COLE: *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer, 1974.
- [18] KLUWICK, A.: *Stationäre, laminare wechselwirkende Reibungsschichten*. Z. Flugwiss. Weltraumforsch., 3:157–174, 1979.
- [19] GOLDSTEIN, S.: *Concerning some Solutions of the Boundary Layer Equations in Hydrodynamics*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26:1–30, 1930.
- [20] STEWARTSON, K.: *The behaviour of a laminar compressible boundary layer near a point of zero skin-friction*. J. Fluid Mech., 12:117–128, 1962.
- [21] KLUWICK, A.: *Marginally separated flows in dilute and dense gases*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 358:3169–3192, 2000.
- [22] KLUWICK, A.: *Recent advances in boundary layer theory*. Springer, 1998.
- [23] OSWATITSCH, K.: *Die Ablösebedingung von Grenzschichten*. In *Grenzschichtforschung, IUTAM Symp., Freiburg 1957*, (ed. H. Görtler). Springer, 1958.
- [24] KLUWICK, A., PH. GITTNER und R. J. BODOYNI: *Viscous-inviscid interactions on axisymmetric bodies of revolution in supersonic flow*. J. Fluid Mech., 140:281–301, 1984.
- [25] STEWARTSON, K.: *Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies*. Advances in Applied Mechanics, 14:145–239, 1974.
- [26] CHANDRASEKHARA, M. S., M. C. WILDER und L. W. CARR: *Competing Mechanisms of Compressible Dynamic Stall*. AIAA Journal, 36(3):387–393, 1998.
- [27] OSWATITSCH, K.: *Gasdynamik*. Springer, 1952.
- [28] KEVORKIAN, J.: *Partial Differential Equations*. Springer, 2000.
- [29] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [30] BRAUN, S. und A. KLUWICK: *The effect of three-dimensional obstacles on marginally separated laminar boundary layer flows*. Journal of Fluid Mechanics, 460:57–82, 2002.
- [31] POWELL, M. J.: *A Hybrid Method for Nonlinear Algebraic Equations*. Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, (ed. P. Rabinowitz), Gordon and Breach.
- [32] CHERNYSHENKO, S. I.: *On the asymptotics of stationary solutions of the Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 285:1353–1355, 1985.
- [33] BRAUN, S. und A. KLUWICK: *Unsteady three-dimensional marginal separation caused by surface-mounted obstacles and/or local suction*. Journal of Fluid Mechanics, 514:121–152, 2004.

- [34] HACKMÜLLER, G. und A. KLUWICK: *The effect of a surface-mounted obstacle on marginal separation*. Z. Flugwiss. Weltraumforsch., 13:365–370, 1989.
- [35] KLUWICK, A.: *Interacting laminar and turbulent boundary layers*. In *Recent Advances in Boundary Layer Theory*. CISM courses and lectures No. 390 (ed. A. Kluwick). Springer, 1998.
- [36] COLE, J. D. und L. P. COOK: *Transonic Aerodynamics*. Elsevier Publishers B.V, 1986.

## 9 Anhang

### 9.1 Affintransformationen

Wie in Kapitel 5.5 ausgeführt, ist es vorteilhaft, die im Wechselwirkungsproblem der schallnahen marginalen Ablösung auftretenden Konstanten mittels Affintransformationen zu eliminieren. Die ebendort eingeführten Konstanten (siehe (5.45)) ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} x_l = x_o = n_1 X; \quad y_l = n_2 Y; \quad \bar{\psi}_2 = n_3 \Psi \quad p_l = p_o = n_4 p; \\ a_1 k_1 = n_5 a; \quad A_1 = n_6 A; \quad \phi_o = n_7 \Phi; \quad y_o = n_8 \bar{Y}; \\ K_1 = n_9 K; \quad 2\Phi_{20} = n_{10} c; \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{(\gamma + 1)^{5/2} p_{00}^{22} \bar{\Phi}_{12}^{5/2} \rho_{ws}^{12}}{a_0^{18} C^{20} T_{ws}^{20}}; \quad n_2 = \frac{a_0^{10} C^{12} T_{ws}^{12}}{(\gamma + 1)^{3/2} p_{00}^{13} \bar{\Phi}_{12}^{3/2} \rho_{ws}^7}; \\ n_3 &= \frac{(\gamma + 1)^2 p_{00}^{17} \bar{\Phi}_{12}^2 \rho_{ws}^9}{a_0^{14} C^{15} T_{ws}^{15}}; \quad n_4 = \frac{a_0^{10} C^{11} T_{ws}^{11}}{(\gamma + 1)^{3/2} p_{00}^{12} \bar{\Phi}_{12}^{3/2} \rho_{ws}^7}; \\ n_5 &= \frac{(\gamma + 1)^5 p_{00}^{44} \bar{\Phi}_{12}^5 \rho_{ws}^{24}}{a_0^{35} C^{40} T_{ws}^{40}}; \quad n_6 = \frac{(\gamma + 1)^{5/2} p_{00}^{22} \bar{\Phi}_{12}^{5/2} \rho_{ws}^{12}}{a_0^{17} C^{20} T_{ws}^{20}}; \\ n_7 &= \frac{(\gamma + 1) p_{00}^{10} \bar{\Phi}_{12} \rho_{ws}^5}{a_0^8 C^9 T_{ws}^9}; \quad n_8 = \frac{(\gamma + 1) p_{00}^{11} \bar{\Phi}_{12} \rho_{ws}^6}{a_0^9 C^{10} T_{ws}^{10}}; \\ n_9 &= \frac{(\gamma + 1)^2 p_{00}^{22} \bar{\Phi}_{12}^3 \rho_{ws}^{12}}{a_0^{18} C^{20} T_{ws}^{20}}; \quad n_{10} = \frac{\bar{\Phi}_{12}^{1/2}}{(\gamma + 1)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

$\bar{\Phi}_{12}$  ist gegeben durch (siehe Bez. (5.42)):

$$\bar{\Phi}_{12} = 2\Phi_{20}^2(\gamma + 1) \quad . \quad (9.3)$$

Für die in den Affintransformationen auftretenden Ausdrücke der Form  $\bar{\Phi}_{12}^{n/2}$  wird der negative Zweig der Wurzel verwendet:

$$\bar{\Phi}_{12}^{1/2} = -\Phi_{20} \sqrt{2(\gamma + 1)} > 0 \quad . \quad (9.4)$$

Als Folge dieser Festlegung bleiben die Koordinatenrichtungen - was im Hinblick auf die Anschaulichkeit wünschenswert erscheint - durch die Affintransformationen unverändert ( $n_1 > 0$ ,  $n_2 > 0$ ). Für die Konstante  $c$  folgt damit:

$$c = 2\Phi_{20}/n_{10} = -\sqrt{2} \quad . \quad (9.5)$$

### 9.2 Bestimmung der Lösbarkeitsbedingung für die Lower Deck Gleichung

Da sich die Lower Deck Gleichung für den Fall mit Wechselwirkung (5.46) und jene für den wechselwirkungsfreien Fall (4.34) nur durch den Druckterm und in den Randbedingungen unterscheiden und ansonsten von gleicher Struktur sind, soll hier exemplarisch nur auf das Wechselwirkungsproblem eingegangen werden. Die zu lösende Gleichung ist daher (5.46) und wird

an dieser Stelle noch einmal angeführt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{dp}{dX} \quad , \\ \Psi|_{Y=0} &= 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y}|_{Y=0} = -\frac{1}{2} (A^2 - X^2 - 2a) = g(X) \quad , \\ Y = +\infty : \Psi &= 0; \quad X = -\infty : \Psi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Zur Lösung dieser linearen parabolischen Differenzialgleichung erweist sich die Methode der Fouriertransformation als geeignet. Ihre Anwendung auf diese Gleichung wird im Folgenden, eng angelehnt an die Darstellung in [2], skizziert. Ausgangspunkt ist die Fouriertransformierte  $H(j\omega, Y)$  der Funktion  $\Psi$  bezüglich der Variable  $X$ :

$$H(j\omega, Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(X, Y) e^{-j\omega X} dX \quad . \quad (9.7)$$

Wir erhalten nach Eintragen der Fouriertransformierten in (9.6):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 H}{dY^3} - \frac{j\omega}{2} Y^2 \frac{dH}{dY} + j\omega Y H &= F(\omega) \quad , \\ H(j\omega, 0) &= 0; \quad \frac{dH}{dY}(j\omega, 0) = G(\omega); \quad H(j\omega, \infty) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.8)$$

$F(\omega)$  bezeichnet die Fouriertransformierte des Druckgradienten,  $G(\omega)$  die Fouriertransformierte der Funktion  $g(X)$ <sup>17</sup>.

Die allgemeine Lösung von (9.8) ist von der Form

$$H = c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3 + F(\omega) H_* \quad . \quad (9.9)$$

$H_1, H_2$  und  $H_3$  sind dabei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung und  $H_*$  eine Partikulärlösung von (9.8), wenn die rechte Seite der Gleichung auf den Wert 1 gesetzt wird. Wir machen den folgenden Potenzreihenansatz:

$$H(j\omega, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j\omega) Y^n \quad . \quad (9.10)$$

Nach Eintragen in (9.8) erhalten wir mit der Abkürzung  $\Omega = j\omega/2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{n+3}(n+3)(n+2)(n+1)Y^n + 2\Omega a_n Y^{n+1} - \Omega a_{n+1}(n+1)Y^{n+2} \} = F(\omega) \quad . \quad (9.11)$$

<sup>17</sup>Im Gegensatz zu [2] weist der Druckgradient im Fall der schallnahen marginalen Ablösung die Eigenschaft der absoluten Integrabilität auf. Diese ist eine Voraussetzung für die Anwendung der Methode der Fouriertransformation und kann mit Hilfe der Ähnlichkeitslösung für das transonische Fernfeld gezeigt werden (siehe Kapitel 5.7).

Zwischen den Koeffizienten  $a_n$  besteht folgender Rekursionszusammenhang:

$$a_n = \frac{\Omega(n-6)}{n(n-1)(n-2)} a_{n-4}; \quad n \geq 4 \quad . \quad (9.12)$$

Die Funktionen  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$  können nun so gewählt werden, dass ihre Potenzreihenentwicklungen am Punkt  $Y = 0$  jeweils mit 1,  $Y$  und  $Y^2$  beginnen.

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 + a_4 Y^4 + \dots \\ H_2 &= Y + a_5 Y^5 + \dots \\ H_3 &= Y^2 + a_6 Y^6 + \dots \end{aligned} \quad (9.13)$$

Aus (9.12) ist ersichtlich, dass der Koeffizient  $a_6$  null ist und damit ebenfalls alle höheren Koeffizienten der Funktion  $H_3$ , für die damit gilt  $H_3 = Y^2$ .

Aus (9.9) und (9.11) folgt, dass folgende Potenzreihe eine Partikulärlösung darstellt:

$$H_* = \frac{1}{6} Y^3 + a_7 Y^7 + \dots \quad . \quad (9.14)$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  lassen sich aus den Randbedingungen an der Stelle  $Y = 0$  bestimmen zu

$$c_1 = 0; \quad c_2 = G(\omega) \quad . \quad (9.15)$$

Unter Benützung der Gamma Funktion  $\Gamma(z) = (z+1)!$  lassen sich nun die Funktionen  $H_2$  und  $H_*$  schreiben als

$$\begin{aligned} H_2 &= -\left(\frac{1}{4}\right)! \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Omega}{16}\right)^m \frac{1}{m!(m+1/4)!(4m-1)} Y^{4m+1} \quad , \\ H_* &= \frac{\pi^{1/2}}{16} \left(-\frac{1}{4}\right)! \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Omega}{16}\right)^m \frac{1}{(m+3/4)!(m+1/2)!(4m+1)} Y^{4m+3} \quad . \end{aligned} \quad (9.16)$$

Mit Hilfe folgender zweier Eigenschaften der Gamma Funktion kann leicht überprüft werden, dass die Koeffizienten in (9.16) den Rekursionszusammenhang (9.12) erfüllen:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \quad \Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = \frac{\pi^{1/2}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x) \quad . \quad (9.17)$$

Für die Fouriertransformierte  $H$  der Lösung der Lower Deck Gleichung ist nun genauso wie für die Lösung selbst zu fordern, dass für  $Y \rightarrow \infty$  kein exponentielles Aufklingen auftritt. Mit den Eigenschaften der Besselschen sowie der Struveschen Funktionen kann gemäß [2] das asymptotische Verhalten von  $H_2$  und  $H_*$  bestimmt werden zu

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{(1/4)!}{2\pi^{1/2}\Omega^{1/4}} e^{-j\pi/4} \left(\frac{4}{j\Omega^{1/2}Y^2}\right)^{5/4} \sin\left(\frac{j\Omega^{1/2}Y^2}{2} - \frac{3}{8}\pi\right) + \dots; \quad Y \rightarrow \infty \quad , \\ H_* &= \frac{(-1/4)!}{8\Omega^{3/4}} e^{-j3\pi/4} \left(\frac{4}{j\Omega^{1/2}Y^2}\right)^{5/4} \sin\left(\frac{j\Omega^{1/2}Y^2}{2} - \frac{7}{8}\pi\right) + \dots; \quad Y \rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \quad (9.18)$$

Aus dem komplexen Sinus ist ersichtlich, dass die beiden Funktionen exponentiell aufklingen. Damit dies für die Funktion  $H$  nicht zutrifft, muss gelten

$$G(\omega)H_2 + F(\omega)H_* \rightarrow 0; \quad Y \rightarrow \infty \quad . \quad (9.19)$$

Letztere Bedingung garantiert damit auch zugleich die Erfüllung der Randbedingung für  $Y \rightarrow \infty$ . Aus den letzten beiden Beziehungen folgt somit

$$G(\omega) = \frac{(-1/4)! \pi^{1/2}}{(1/4)! 2^{3/2}} \frac{F(\omega)}{(j\omega)^{1/2}} \quad . \quad (9.20)$$

Unter Verwendung von

$$\pi^{1/2} \frac{e^{j\omega X}}{(j\omega)^{1/2}} = \int_{-\infty}^X \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{X-t}} dt \quad , \quad (9.21)$$

kann die Rücktransformation von (9.20) leicht durchgeführt werden mit dem Ergebnis

$$A^2 - X^2 - 2a = -\frac{(-1/4)!}{\sqrt{2}(1/4)!} \int_{-\infty}^X \frac{p'(t)}{\sqrt{X-t}} dt \quad . \quad (9.22)$$

Erfüllen die Variablen  $A$ ,  $a$  und  $p$  diesen Zusammenhang, ist die Lösbarkeit der Differenzialgleichung (9.6) bzw. (5.46) gegeben. Die Lösbarkeitsbedingung (4.35) für den Fall ohne Wechselwirkung ergibt sich ganz analog mittels der hier vorgestellten Methode.

### 9.3 Bestimmung eines integrierenden Faktors mit Hilfe der gruppentheoretischen Methode

Im Folgenden werden die wesentlichen Schritte, die das Auffinden eines integrierenden Faktors einer gewöhnlichen Differenzialgleichung erster Ordnung erleichtern, skizziert. Die Darstellung wird dabei eng an jene in [16] angelehnt. Grundlegend für die Methode, die hier zur Anwendung kommen soll, ist das Konzept der Invarianz einer Funktion gegenüber Gruppen von Transformationen der abhängigen Variablen. Dies sei anhand einer Funktion  $\Psi(x, y)$  demonstriert, deren abhängige Variablen  $x$  und  $y$  den folgenden - auf die Variablen  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  führenden - Transformationen unterworfen werden:

$$\tilde{x} = F_1(x, y; s); \quad \tilde{y} = F_2(x, y; s) \quad . \quad (9.23)$$

Wir fordern, dass die Transformationen  $F_1$  und  $F_2$  Gruppencharakter haben, d.h. mit  $s$  als Gruppenparameter die vier Attribute *Identität*, *inverses Element*, *Vollständigkeit* und *Assoziativität* aufweisen (siehe [16]).

Die Funktion  $\Psi$  wird als invariant gegenüber der Transformationsgruppe  $(F_1, F_2)$  bezeichnet, falls gilt:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(F_1(x, y; s), F_2(x, y; s)) = \Psi(x, y) \quad . \quad (9.24)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll für das Einheitselement der Gruppe der Parameter  $s$  gleich null sein. Davon ausgehend führen wir eine Taylorentwicklung der Funktion  $\Psi$  um die Stelle  $s = 0$  durch:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(x, y) + \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} s + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \frac{s^2}{2!} + \dots \quad (9.25)$$

Wir wenden die Kettenregel auf die partielle Ableitung  $\partial \Psi / \partial s$  an und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial s} &= \frac{\partial \Psi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \Psi}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \xi_2 \quad , \\ \xi_1(x, y) &= \frac{\partial F_1}{\partial s} \Big|_{s=0} ; \quad \xi_2(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad . \end{aligned} \quad (9.26)$$

$\xi_1$  und  $\xi_2$  werden hierbei als die *Infinitesimalen* der Gruppe  $(F_1, F_2)$  bezeichnet. Damit folgt:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(x, y) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \xi_2 \right) s + \frac{s^2}{2!} \left( \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \xi_2 \right) + \dots \quad (9.27)$$

Um die Invarianzbedingung (9.24) zu erfüllen, muss folglich gelten:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \xi_2 = 0 \quad . \quad (9.28)$$

Ist die Invarianzbedingung erfüllt, so führt die Transformation  $(F_1, F_2)$  Punkte auf der durch die Funktion  $\Psi = \text{const}$  definierten Kurve auf Punkte über, die wiederum auf  $\Psi$  liegen -  $\Psi$  ist in diesem Fall invariant gegenüber der Transformation  $(F_1, F_2)$ .

Eine Transformation  $(G_1, G_2)$  der Art (9.23) mit den Infinitesimalen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  führt weiters eine Schar von Kurven  $\psi = \Psi(x, y)$ <sup>18</sup> ineinander über, wenn gilt:

$$\tilde{\psi} = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(G_1(x, y; s), G_2(x, y; s)) = H(\Psi(x, y); s) = H(\psi, s) \quad , \quad (9.29)$$

wobei  $H$  eine beliebige stetige Funktion ist.

Um dies zu gewährleisten, müssen die Infinitesimalen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  der betrachteten Gruppe die Beziehung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \eta_2 = 1 \quad (9.30)$$

erfüllen. Hinsichtlich des Beweises dieser Gleichung wird auf [16] verwiesen. Weiters ohne Beweis sei die wichtige Tatsache angeführt, dass die betrachtete Gruppe mit den Infinitesimalen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  jene gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung invariant lässt, deren Lösungskurven die Kurven  $\Psi(x, y) = \text{const}$  sind. Das Konzept der Invarianz einer gewöhnlichen Differenzialgleichung erster Ordnung fügt sich in die bisherige Darstellung ein, da in diesem Fall gilt:

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \Phi\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right) \quad , \quad (9.31)$$

<sup>18</sup>Zum Beispiel würde  $\psi$  unter der Annahme  $\Psi = x^2 + y^2$  die Schar der Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung bezeichnen.

wobei  $\Phi$  die betrachtete Differenzialgleichung sein soll.

Zur Illustration wird folgende gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung betrachtet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)} \xrightarrow{(G_1, G_2)} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{B(\tilde{x}, \tilde{y})}{A(\tilde{x}, \tilde{y})} \quad (9.32)$$

Diese kann alternativ als ein autonomes System zweier gewöhnlicher Differenzialgleichungen dargestellt werden:

$$\frac{dy}{dt} = B(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = A(x, y) \quad (9.33)$$

Die Lösung dieses Systems seien Kurven  $\Psi(x, y) = \text{const.}$  Beziehung (9.33) ermöglicht uns nun, das totale Differenzial der Funktion  $\Psi$  darzustellen als

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = \left\{ \frac{\partial\Psi}{\partial x} A(x, y) + \frac{\partial\Psi}{\partial y} B(x, y) \right\} dt \quad (9.34)$$

Für die Lösungskurven, welche durch die Bedingung  $d\Psi = 0$  charakterisiert sind, folgt damit

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} A(x, y) + \frac{\partial\Psi}{\partial y} B(x, y) = 0 \quad (9.35)$$

Wir ordnen weiters einer noch zu bestimmenden Gruppe, die die Differenzialgleichung (9.32) invariant lässt, die Infinitesimalen  $(\omega_1, \omega_2)$  zu. Für diese Gruppe folgt aus dem bisher Gesagten, dass sie auch die Schar der Lösungskurven  $\psi = \Psi(x, y)$  der Differenzialgleichung (9.32) invariant lässt. Den mathematischen Ausdruck findet diese Tatsache, wie beschrieben, durch

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} \omega_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \omega_2 = 1 \quad (9.36)$$

Die Beziehungen (9.35) und (9.36) gestatten uns, nach den partiellen Ableitungen  $\partial\Psi/\partial x$  und  $\partial\Psi/\partial y$  aufzulösen. Wir erhalten

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{-B}{A\omega_2 - B\omega_1}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{A}{A\omega_2 - B\omega_1} \quad (9.37)$$

Mit der Differenzialgleichung (9.32) in der Form

$$-B(x, y)dx + A(x, y)dy = 0 \quad (9.38)$$

und (9.37) lässt sich der Term

$$M = \frac{1}{A\omega_2 - B\omega_1} \quad (9.39)$$

als der integrierende Faktor der Differenzialgleichung (9.32) identifizieren.

Wir wenden das bisher Gesagte nun auf die Richtungsbedingungen der in Kapitel 5.7 eingeführten Charakteristikenscharen  $\xi = \text{const}$  und  $\eta = \text{const}$  an. Die Richtungsbedingungen (siehe 5.54) lauten in der für die weitere Darstellung adequaten Form:

$$\begin{aligned} -dX + g\sqrt{K + cX + Y^2}dY &= 0, \\ \xi = \text{const} : g &= 1; \quad \eta = \text{const} : g = -1 \end{aligned} \quad (9.40)$$

Es liegt in diesem Fall kein vollständiges Differenzial vor, die Gleichung (9.40) kann nicht unmittelbar integriert werden. Es soll deshalb die soeben dargestellte gruppentheoretische Methode dazu benützt werden, einen integrierenden Faktor der Gleichung (9.40) zu bestimmen. Da kein systematischer Weg existiert (siehe [16]), um von (9.40) ausgehend zu der diese Differenzialgleichung invariant lassenden Gruppe zu gelangen, ist man auf den Versuch angewiesen. Durch Einsetzen lässt sich verifizieren, dass folgende Transformation die Differenzialgleichung (9.40) invariant lässt:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \frac{1}{c} \{e^s (K + cX) - K\} = F_1(X, Y; s) \quad , \\ \tilde{Y} &= e^{s/2} Y = F_2(X, Y; s) \quad .\end{aligned}\tag{9.41}$$

$s$  bezeichnet hierbei den Gruppenparameter.

Die Infinitesimalen dieser Gruppe ergeben sich zu

$$\omega_1 = \frac{\partial F_1}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{K}{c} + X; \quad \omega_2 = \frac{\partial F_2}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{Y}{2} \quad .\tag{9.42}$$

Weiters können die weiter oben eingeführten Parameter  $A$  und  $B$  identifiziert werden zu

$$A = g\sqrt{K + cX + Y^2}; \quad B = 1 \quad .\tag{9.43}$$

Wir erhalten deshalb für den integrierenden Faktor von (9.40)

$$M = \frac{1}{g\sqrt{K + cX + Y^2} \frac{Y}{2} - \frac{K+cX}{c}} \quad .\tag{9.44}$$

#### 9.4 Bestimmung der Sprungbedingung für die Upper Deck Gleichung

Bei der Upper Deck Gleichung (5.49) handelt es sich um eine Erhaltungsgleichung. Um dies zu verdeutlichen, benützen wir, ausgehend von der Upper Deck Gleichung in der Form (5.58), folgende äquivalente Darstellung:

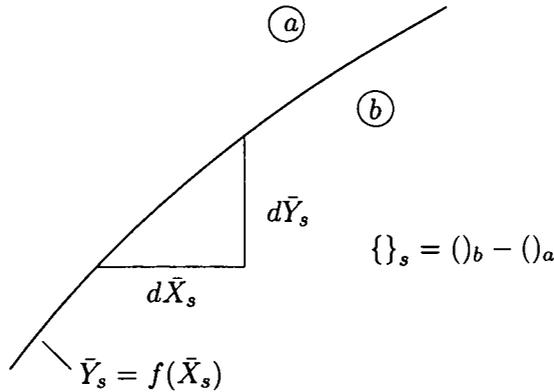
$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left\{ c^2 (\bar{Y}^2 - \bar{X}) \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} \right\} + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} \right\} = 0 \quad .\tag{9.45}$$

Aus dieser Erhaltungsform der Upper Deck Gleichung lässt sich ableiten<sup>19</sup>, dass eine sprunghafte Änderung der Größen  $\partial\Phi/\partial\bar{X}$  und  $\partial\Phi/\partial\bar{Y}$  über eine durch die Koordinaten  $(\bar{X}_s, \bar{Y}_s)$  festgelegten Linie folgender Bedingung genügen muss:

$$c^2 (\bar{Y}_s^2 - \bar{X}_s) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} \right\}_s d\bar{Y}_s + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}} \right\}_s d\bar{X}_s = 0 \quad .\tag{9.46}$$

Die Notation  $\{ \}_s$  bezeichnet hierbei eine sprunghafte Änderung einer Strömungsgröße über die durch die Koordinaten  $(\bar{X}_s, \bar{Y}_s)$  festgelegten Linie (siehe dazu Abb.15).

<sup>19</sup>Eine detaillierte Ableitung an Hand einer ähnlichen Gleichung findet sich zum Beispiel in [36].



**Abbildung 15:** Notation zur sprunghaften Änderung einer Strömungsgröße über eine durch die Koordinaten  $(\bar{Y}_s, \bar{X}_s)$  festgelegte Linie.

Im Folgenden soll nun die Sprungbedingung (9.46) an den durch die singulären Stellen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  der Differenzialgleichung (5.70) definierten Linien

$$\bar{Y}_{s1} = \sqrt{\frac{\bar{X}_{s1}}{\zeta_1}}; \quad \bar{Y}_{s2} = \sqrt{\frac{\bar{X}_{s2}}{\zeta_2}} \quad (9.47)$$

für die Fernfeldlösung der Upper Deck Gleichung

$$\Phi(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y}G(\zeta); \quad \zeta = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}^2} \quad (9.48)$$

ausgewertet werden.

Mit den Termen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{X}} = \frac{G'}{\bar{Y}}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}} = G - 2\zeta G'; \quad d\bar{X} = 2\zeta \bar{Y} d\bar{Y} \quad (9.49)$$

erhalten wir für die Sprungbedingung mit  $c = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 0 &= \{G'\}_s (4\zeta_s^2 + c^2\zeta_s - c^2) - 2\zeta_s \{G\}_s \\ &= \{G'\}_s (2\zeta_s^2 + \zeta_s - 1) - \zeta_s \{G\}_s; \quad \zeta_s = \zeta_1, \zeta_2 \end{aligned} \quad (9.50)$$

In Kapitel 5.7 wurde auf die Variablen der Fernfeldlösung (9.48) folgende Transformation angewandt:

$$G(\zeta) \rightarrow H(\gamma); \quad \gamma = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = \frac{2}{3}(\zeta + 1) \quad (9.51)$$

Diese Transformation lässt die singulären Stellen  $\zeta_1 = -1$  und  $\zeta_2 = 1/2$  in die Punkte 0 und 1 übergehen. Wir erhalten damit für die Sprungbedingung in den in Kapitel 5.7 verwendeten Variablen:

$$\gamma_s(\gamma_s - 1) \{H'\}_s - \frac{1}{2}(\gamma_s - \frac{2}{3}) \{H\}_s = 0; \quad \gamma_s = 0, 1 \quad (9.52)$$

# Lebenslauf

## Bernhard Streibl

### Persönliche Daten

geboren 28.10.1972 in Vöcklabruck/OÖ  
Familienstand ledig

### Ausbildung

1979 - 1983 Volksschule  
1983 - 1987 Bundesgymnasium Vöcklabruck  
1987 - 1992 HTBLA Salzburg - Ausbildungszweig Nachrichtentechnik  
1992 - 1998 Studium Technische Physik  
Technische Universität Wien

### Beruflicher Werdegang

10/1998 - 04/2000 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universitätsklinik für Neurologie  
am AKH Wien  
05/1999 - 04/2000 Zivildienst  
05/2000 - 04/2004 Universitätsassistent  
Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung  
Technische Universität Wien  
seit 11/2004 Firma VA TECH Hydro in Weiz

## Danksagung

Vielleicht wird der Leser oder die Leserin meine Überzeugung teilen, dass der eigene Anteil am Gelingen eines Vorhabens oftmals geringer ist, als man geneigt ist, sich einzugestehen. Zu dieser Überzeugung wird man meines Erachtens geführt, wenn man bedenkt, wie viele Menschen den eigenen Lebensweg positiv beeinflussen und Unterstützung in verschiedenster Hinsicht anbieten.

Ich möchte deshalb an dieser Stelle meinen Eltern Franz und Renate Streibl danken, die mir ermöglicht haben, ein Studium zu absolvieren und die damit großen Anteil daran haben, dass ich die vorliegende Dissertation beginnen konnte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Alfred Kluwick, der mich geduldig in die Thematik hineingeführt und anschließend durch die Arbeit geleitet hat. Seine Unterstützung war für das Zustandekommen dieser Dissertation von größter Bedeutung.

Weiters danke ich herzlich Herbert Steinrück für die Übernahme des Koreferats, für wichtige Diskussionen über die Dissertation und für die freundschaftliche Verbundenheit.

Meinem Kollegen Christoph Grinschgl danke ich für zahlreiche bereichernde Gespräche über Gott und die Welt im buchstäblichen Sinn des Wortes und für eine für mich sehr wertvolle Freundschaft. Diese verbindet mich auch mit Stefan Braun, Bernhard Scheichl, Marcus Wrabel und Harald Schmidt, denen ich darüber hinaus für die gute Kollegenschaft danken möchte.

Weiters möchte ich Harald Neth und Kathi Chernohorsky für ihre Unterstützung danken.

In den schwierigen, mitunter von Selbstzweifeln geprägten Phasen der Dissertation war mir meine Partnerin Ivana Lackova immer die größte Stütze. Ein großes Danke dafür!

*Wie ist das klein, womit wir ringen,  
was mit uns ringt, wie ist das groß;  
ließen wir, ähnlicher den Dingen,  
uns so vom großen Sturm bezwingen,-  
wir würden weit und namenlos.*

*Was wir besiegen, ist das Kleine,  
und der Erfolg selbst macht uns klein.  
Das Ewige und Ungemeine  
will nicht von uns gebogen sein.  
Das ist der Engel, der den Ringern  
des Alten Testaments erschien:[...]*

*Wen dieser Engel überwand,  
welcher so oft auf Kampf verzichtet,  
der geht gerecht und aufgerichtet  
und groß aus jener harten Hand,  
die sich, wie formend, an ihn schmiegte.*

*Die Siege laden ihn nicht ein.  
Sein Wachstum ist: der Tiefbesiegte  
von immer Größerem zu sein.*

Rainer Maria Rilke, *Der Schauende*



TU Wien

[myTopJobs](#) [home](#) [feedback](#) [englisch](#)

> TU Wien > Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften > E300 Dekanat der Fakultät für Maschinenbau

### TopJobs-HiWay



Das österreichweite studienbezogene Jobportal für AkademikerInnen.

Mit täglich 20 aktuellen TopJobs für AbsolventInnen und Young Professionals aus dem Uni- und FH-Bereich.

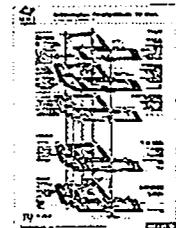
Jetzt **anmelden** und die neuesten Jobangebote kostenlos per E-Mail erhalten.



## E300 Dekanat der Fakultät für Maschinenbau

Dekan Prof. Bruno Grösel  
 Ort A-1040 Wien, Karlsplatz 13  
 Gebäude Hauptgebäude, Stiege II, Karlstrakt; 2 1/2 Stock (oberhalb der Studienabteilung)  
 Tel 01/58801-30001  
 weitere Tel 01/58801-30011  
 Fax 01/30099  
 E-Mail [etltzer@pop.tuwien.ac.at](mailto:etltzer@pop.tuwien.ac.at)  
 Web <http://Info.tuwien.ac.at/maschinenbau/dekmb/mbdekg.html>  
 Dekanatskanzlei Mo-Fr 10-11:30  
 Geschäftsbereich keine

### Gebäudeplan



1001 x 1403  
pxl,  
110 KB  
 A4,  
159 KB

*Fr. Titzer*

295 Pageimpressions seit 1.Aug.2005 - letzte Aktualisierung: 15.12.2005 um 12:21

- redaktion: )( unikat in Kooperation mit

Unterstützt durch:

© 2000-2006 )( unikat

Laufzeit:0:00:00.777608



# Gebäudeplan: Hauptgebäude, TU Wien, A-1040 Wien, Karlsplatz 13

## 4. Obergeschoß

SEM 1-7

- Inst für Städtebau
- Inst für Architektur und Entwurf
- Abt. Hochbau, Konstruktion, Installation und Entwerfen
- Abt. Gebäudelehre und Entwerfen
- Abt. Raumgestaltung und Entwerfen
- Abt. Wohnbau und Entwerfen
- Abt. Hochbau und Entwerfen
- Dekanat für Architektur und Raumplanung
- Staatsprüfungsamt Arch. (Sitzungszimmer Dekanat)
- Kleiner Akzeichensaal 1 und 2

## Dachgeschoß

- Turmzimmer
- Inst für konstr. Wasserbau (s.3.00)
- Inst für künstlerische Gestaltung
- Abt. für plast. Gestalten u. Modellbau
- Modellwerkstatt
- Abt. für zeichnerische u. malerische Darstellung

## 3. Obergeschoß

HS 17

- Friedrich Hartmann HS
- Inst für Hoch- u. Industriebau
- Inst für Stahlbau
- HS 9
- Inst für Baustofflehre Bauphysik u. Brandschutz
- Inst für Stahlbeton u. Massivbau
- Inst für Eisenbahnenwesen
- Inst für Grundbau u. Bodenmechanik

- Inst für künstlerische Gestaltung
- Inst für Kunstgeschichte
- Inst für Baukunst
- Inst für Hochbau (Bauphysik)
- Inst für Konstr. Wasserbau
- Inst für Hydraulik u. Wasserverbau
- HS 20
- HS 16
- Karl von Terzaghi HS

## 2. Obergeschoß

HS 12

- HS 12 Ernz Mehn HS
- Dekanat Baingenieurw.
- Inst für Baustofflehre
- Inst für Baugewerk
- Inst für Baustoffe
- HS 18 Cauer HS
- Inst für Kunstgeschichte (Abt. Denkmalpflege)
- Inst für Festigkeitlehre
- Inst für Tragwerkslehre

- Inst für Hoch- und Industriebau
- TVFA - Techn. Versuchsu. Forschungsanstalt
- Inst für Werkstoffkunde
- Sekretariat Werkstoffkunde
- Inst für Wasserkraftmaschinen u. Pumpen
- Inst für Wassergüte u. Abfallwirtschaft

## 1. Obergeschoß

- EDY-Labor der Fak. f. Architektur u. Raumplan
- HS 8 Heinz Parkus HS
- Aufbauabw.
- Evidenzstelle / Studien- u. Prüfungsabteilung
- Disziplinarprüfungsamt BI
- Universitätsschreib.
- Quästor
- Zentrale Verwaltung (ZV)

- TVFA - Techn. Versuchsu. Forschungsanstalt (s.2.00)
- Büro d. Vizerektors für Forschung und Büro d. Vizerektors für Lehre
- Informationslabor

## Erdgeschoß

- ZID Internet-Raum KP
- EDY-Labor SEM
- HS 8 Heinz Parkus HS
- HS 7
- Schöner Lithitzky HS
- Inst für Baustoffe
- Inst für Grundbau u. Bodenmechanik
- HS 6
- Raumlabor
- Poststube
- Buffet
- Prechtsaal

- Inst für Fertigungstechnik
- Inst für Ingenieurgeologie
- TVFA - Techn. Versuchsu. Forschungsanstalt



Stiegennummer

Symbollegende siehe unter [www.wegweiser.ac.at/symbollegende.html](http://www.wegweiser.ac.at/symbollegende.html)

