

Dissertation

# Gasstrahlabstreifverfahren bei kontinuierlichen Beschichtungsverfahren

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads eines  
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alfred Kluwick  
E322

Institut für Strömungsmechanik und Wärmübertragung

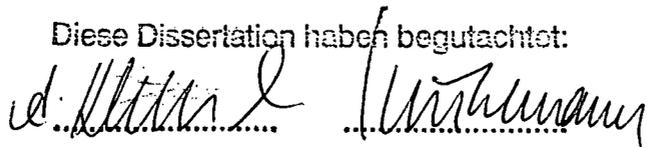
eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von  
Stephan Helma  
Matr.-Nr. 85 25 724  
Teybergasse 4/6, 1140 Wien



Wien, 27. April 2005

Diese Dissertation haben begutachtet:



## Kurzfassung

Der Gasdüsenabstreifprozeß kommt bei vielen kontinuierlichen Beschichtungsverfahren zum Einsatz, um die überschüssige Materialmenge, die vom Substrat aus dem Bad ausgetragen wird, zu reduzieren. Typische Anwendungsbereiche sind das Verzinken von Bandblechen und das Beschichten von photographischen Filmen. Das fundamentale Prinzip dieses Verfahrens besteht in dem Auftreffen eines Freistrahls auf einen von einem festen Substrat transportierten Flüssigkeitsfilm.

In dieser Arbeit wird dieser Prozeß rein zweidimensionalen untersucht. Unter der Voraussetzung, daß Trägheitseffekte vernachlässigt werden können, werden neben den Einflüssen der Druck- und Schubspannungsverteilung des Freistrahls auf das flüssige Beschichtungsmaterial auch der Einfluß der Oberflächenspannung untersucht. Es zeigt sich, daß eine einzige inhomogene Wellengleichung die Verteilung der Schichtdicke beschreibt. Schlußendlich werden numerische und graphische Ergebnisse für ausgewählte stationäre und instationäre Fälle inklusive der Ausbildung von Unstetigkeiten präsentiert.

## Abstract

The jet wiping process is widely used in continuous coating applications to remove the excess amount of liquid entrained by a sheet moving out of a liquid bath. Typical fields of applications are hot dip galvanization of metal strips and coating of photographic films. The process is based on the impact of a gas jet onto the liquid film carried by the solid substrate.

In the present study the process is investigated for the case of strictly two-dimensional flow. It is assumed that inertia effects in the film flow can be neglected, whereas the effects of the pressure gradient and the shear stress distribution of the impinging jet and the surface tension of the liquid film are taken into account. As a result it is possible to derive a single inhomogeneous wave equation which governs the distribution of the film thickness. Numerical and graphical results for representative steady and unsteady processes including the formation of shock discontinuities will be presented.

Diese Arbeit wurde vom Christian Doppler Laboratorium für kontinuierliche Erstarrungsvorgänge unterstützt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Beschichtungsverfahren . . . . .	1
1.1.1	Verfahren mit vorgegebener Beschichtungsmenge . . . . .	1
1.1.2	Durch Menisken bestimmte Beschichtungen . . . . .	1
1.1.3	Einstellen der Schichtdicke nach dem Meniskus . . . . .	2
1.2	Anforderungen an alle Beschichtungsverfahren . . . . .	2
1.3	Abstreifprozeß . . . . .	2
1.4	Auftretende Probleme . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Formulierung des Problems</b>	<b>6</b>
2.1	Allgemeine Formulierung . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Vereinfachungen und Lösungsansätze</b>	<b>11</b>
3.1	Aufgeprägte Druck- und Schubspannungsverteilung . . . . .	11
3.2	Vereinfachungen für schlanke Flüssigkeitsfilme . . . . .	12
3.3	Vereinfachungen für schleichende Strömungen . . . . .	12
3.3.1	Stationäre schleichende Strömung . . . . .	13
3.3.2	Instationäre schleichende Strömung . . . . .	18
3.3.3	Lösungsäste . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Numerische Berechnung der Lösungen</b>	<b>24</b>
4.1	Überblick . . . . .	24
4.2	Schubspannungsverteilung . . . . .	26
4.3	Stationäre Lösungen . . . . .	26
4.3.1	Lösung ohne Oberflächenspannung . . . . .	26
4.3.2	Lösung mit kleiner Oberflächenspannung . . . . .	27
4.4	Instationäre Lösungen . . . . .	28
4.4.1	Diskretisierung . . . . .	28
4.4.2	Riemann-Problem . . . . .	29
4.4.3	Randbedingung . . . . .	30
4.4.4	Quellterm . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Stationäre Strömungszustände</b>	<b>33</b>
5.1	Referenzszenario . . . . .	33
5.2	Lösung des Referenzszenario . . . . .	33
5.3	Einfluß der Druck- und Schubspannungsverteilung . . . . .	34
5.4	Einfluß der Oberflächenspannung . . . . .	36

5.5	Einfluß des Düsenabstands . . . . .	37
5.6	Einfluß der Bandgeschwindigkeit . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Instationäre Strömungszustände</b>	<b>39</b>
6.1	Anfahrvorgang . . . . .	39
6.2	Oberflächenstörung . . . . .	41
6.3	Bandschwingung . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>51</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	51
7.2	Ausblick . . . . .	52
	<b>Anhang</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Dimensionslose Formulierungen</b>	<b>54</b>
A.1	Dimensionsbehaftete Gleichungen der flüssigen Beschichtung . . . . .	54
A.2	Herleitung der dimensionslosen Form . . . . .	55
A.2.1	Bestimmung der Referenzgrößen . . . . .	56
A.2.2	Weitere dimensionslose Größen . . . . .	60
A.2.3	Randbedingungen . . . . .	62
A.3	Zusammenstellung der Gleichungen in dimensionsloser Form . . . . .	64
<b>B</b>	<b>Freistrah</b>	<b>67</b>
B.1	Druckverteilung . . . . .	67
B.1.1	Maximaler Druck im Staupunkt . . . . .	67
B.1.2	Druckverteilung entlang der Wand . . . . .	68
B.1.3	Dimensionslose Formulierung . . . . .	68
B.2	Schubspannungsverteilung . . . . .	70
B.2.1	Dimensionslose Formulierung . . . . .	72
<b>C</b>	<b>Gleichungslöser für Pentadiagonalmatrizen</b>	<b>74</b>
C.1	Löser für Tridiagonalmatrizen . . . . .	74
C.2	Löser für Pentadiagonalmatrizen . . . . .	75
<b>D</b>	<b>Typische Betriebszustände</b>	<b>78</b>
D.1	In der Industrie verwendete Einstellungen . . . . .	78
D.2	In den Berechnungen verwendete Einstellung . . . . .	78
D.3	Lösungen . . . . .	81
<b>E</b>	<b>Parameter für das Softwarepaket zink</b>	<b>84</b>
E.1	Kommandozeilenparameter . . . . .	84
E.2	Eingabedatei zink.ini . . . . .	84
<b>F</b>	<b>Materialwerte für Zinklegierungen</b>	<b>88</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>91</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kontinuierliche Bandverzinkungsanlage . . . . .	3
1.2	Prinzipskizze des Beschichtungsabschnitts . . . . .	4
1.3	Bandkantenüberhöhung . . . . .	5
2.1	Prinzipskizze mit den den Abblasprozeß beeinflussenden Parametern . . . . .	7
2.2	Variablen und Randbedingungen . . . . .	8
3.1	Beispielhafte Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Schichtdicke . . . . .	16
3.2	Typischer Verlauf von $h_1(x)$ . . . . .	18
3.3	Überlegung zur Herleitung der instationären Gleichung . . . . .	19
3.4	Strömungsverhältnisse bei den beiden unterschiedlichen Lösungsästen . . . . .	22
3.5	Typischer Verlauf der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c$ . . . . .	23
4.1	Diskretisierung des Rechengebiets . . . . .	29
4.2	Bezeichnungen zur Berechnung der Roe-Matrix . . . . .	29
5.1	Druck- und Schubspannungsverteilung für das Referenzszenario . . . . .	34
5.2	Einfluß der Druck- und Schubspannungsverteilung auf die Schichtdicke . . . . .	35
5.3	Erste drei Ableitungen der Schichtdickenverteilung für das Referenzszenario . . . . .	35
5.4	Einfluß der Oberflächenspannung $\sigma^*$ bzw. $Bo_{red}$ auf die Schichtdicke . . . . .	36
5.5	Einfluß des Düsenabstands $H_j^*$ auf die Schichtdicke . . . . .	37
5.6	Einfluß der Bandgeschwindigkeit $U^*$ auf die Schichtdicke . . . . .	38
6.1	Anfahrvorgang ohne und mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung $\sigma^*$ . . . . .	40
6.2	Detail zu den Anfahrvorgängen . . . . .	41
6.3	Versagen des Abblasen durch zu große Schichtdicke beim Einschalten des Freistrahls . . . . .	42
6.4	Versagen des Abblasen durch zu kleine Schichtdicke beim Einschalten des Freistrahls . . . . .	43
6.5	Wellenbild bei einer elliptische Erhöhung unterhalb des kritischen Punktes $x_c$ . . . . .	44
6.6	Wellenbild bei einer elliptische Einbuchtung unterhalb des kritischen Punktes $x_c$ . . . . .	45
6.7	Wellenbild bei einer elliptische Erhöhung oberhalb des kritischen Punktes $x_c$ . . . . .	47
6.8	Wellenbild bei einer elliptische Einbuchtung oberhalb des kritischen Punktes $x_c$ . . . . .	48
6.9	Wellenbild für ein schwingendes Band . . . . .	49
6.10	Wellenbild für ein schwingendes Band . . . . .	50
A.1	Prinzipskizze mit dem Koordinatensystem $x^*-y^*-z^*$ . . . . .	55
A.2	Verschiedene Möglichkeiten $P^{l*}$ zu definieren . . . . .	57
B.1	Schubspannungsverteilungen $\tau_j^*(x^*)$ , $\tau_{imp}^*(x^*)$ und $\tau_{wj}^*(x^*)$ . . . . .	72

# Tabellenverzeichnis

5.1	Betrachtete stationäre Szenarien . . . . .	33
D.1	Prozeßdaten . . . . .	78
D.2	Parameter für den als Referenzszenario gewählten Betriebszustand . . . . .	79
D.3	Parameter für geänderten Düsenabstand . . . . .	79
D.4	Parameter für geänderte Bandgeschwindigkeiten . . . . .	79
D.5	Parameter für Versagen des Anfahrvorgangs . . . . .	80
D.6	Parameter für Oberflächenstörungen . . . . .	80
D.7	Parameter für schwingendes Band . . . . .	80
D.8	Lösungen für das Referenzszenario . . . . .	81
D.9	Von $H_j^*$ abhängige Lösungen . . . . .	82
D.10	Von $U^*$ abhängige Lösungen . . . . .	83
E.1	Eingabeparameter für das Softwarepaket zink . . . . .	84
F.1	Materialeigenschaften von flüssigem Zink und ausgewählten Zinklegierungen . . .	88

# Nomenklatur

Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen und der Einheiten der dazugehörigen dimensionsbehafteten Größen.

## Lateinische Symbole

$a$	Formfaktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$a$	Roe-Matrix	–
$A$	Fläche	$m^2$
$b$	Formfaktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$B$	Konstante der Freistrahlgometrie, charakteristische Länge in $x$ -Richtung	$m$
$c$	Formfaktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$c$	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit	$m/s$
$C(x)$	„Integrationskonstante“	–
$d$	Formfaktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$D(x)$	„Integrationskonstante“	–
$D_j$	Spaltbreite bzw. Durchmesser der Abblasdüse	$m$
$\Delta D_j$	Amplitude des schwingenden Bands	$m$
$f$	Fluß	–
$f$	allgemeine Funktion	–
$g$	Erdbeschleunigung	$m/s^2$
$h$	Schichtdicke des Coatings	$m$
$\Delta h_h$	Amplitude der elliptischen Störung	$m$
$h_j$	veränderlicher Normalabstand Düse-Band	$m$
$H$	Referenzschichtdicke des Coatings, charakteristische Länge in $y$ -Richtung	$m$
$H_j$	Normalabstand Düse-Band	$m$
$i$	Diskretisierungsstelle auf der $x$ -Achse	–
$J$	Anzahl der Diskretisierungsstellen auf der $x$ -Achse	–
$\vec{n}$	Normalvektor	–
$p$	Druck im Coatingmaterial	$N/m^2$
$p_0$	Umgebungsdruck	$N/m^2$
$p_a$	Druck in der Düsenkammer	$N/m^2$
$p_j$	Druckverteilung des Freistrahls beim Auftreffen auf eine Wand	$N/m^2$
$p_s$	Staudruck des Freistrahls	$N/m^2$
$p_\sigma$	Druck durch Oberflächenspannung $\sigma$	$N/m^2$
$P'$	Referenzgradient in $x$ -Richtung des Referenzdrucks	$N/m^3$

$q$	Quellterm	m/s
$\dot{Q}$	Volumenstrom des Coatings pro Tiefeneinheit	m <sup>3</sup> /m
$\dot{Q}_0$	Referenzvolumenstrom des Coatings pro Tiefeneinheit	m <sup>3</sup> /m
$r$	Koordinate in Radialrichtung (bei rotationssymmetrischen Freistrahlen)	m
$t$	Zeit	s
$\Delta t$	Zeitintervall	s
$\vec{t}$	Tangentialvektor	–
$t_0$	Anfangszeit	s
$t_p$	Periode des schwingenden Bands	s
$T$	Referenzzeit	s
$\mathcal{T}$	Reibungsspannungstensor	N/m <sup>2</sup>
$u$	Geschwindigkeitskomponente des Coatings in $x$ -Richtung	m/s
$U$	Geschwindigkeit des Substrats, Referenzgeschwindigkeit in $x$ -Richtung	m/s
$v$	Geschwindigkeitskomponente des Coatings in $y$ -Richtung	m/s
$V$	Referenzgeschwindigkeit in $y$ -Richtung	m/s
$V_j$	Austrittsgeschwindigkeit des Freistrahlm mediums aus der Abblasdüse	m/s
$x$	Koordinate in Bandlaufrichtung	m
$\Delta x$	Längenintervall	m
$x_h$	$x$ -Koordinate, an der die elliptischen Störung auftritt	m
$\Delta x_h$	Breite der elliptischen Störung	m
$x_s$	Schnittpunkt zwischen $\tau_{\text{imp}}$ und $\tau_{\text{wj}}$	m
$X$	Referenzlänge, Längenskala in $x$ -Richtung	m
$y$	Koordinate normal zum Band	m
$Y$	Referenzlänge, Längenskala in $y$ -Richtung	m

### Griechische Symbole

$\alpha_{\text{imp}}$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$\alpha_j$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\alpha_{\text{wj}}$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\alpha_P$	Formfaktor der Druckverteilung des Freistrahls	–
$\beta$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$\beta_{\text{imp}}$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	–
$\beta_j$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\beta_{\text{wj}}$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\beta_\tau$	Formfaktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\eta$	Verhältnis $H_j/h_j$	–
$\gamma_j$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\gamma_{\text{wj}}$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Wandstrahlbereich des Freistrahls	–
$\varkappa$	Krümmung der freien Oberfläche des Coatings	1/m
$\mu$	dynamische Viskosität	kg/ms
$\nu$	kinematische Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\nu_j$	kinematische Zähigkeit des Freistrahlm mediums	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Dichte des Coatingmaterials	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_j$	Dichte des Freistrahlm mediums	kg/m <sup>2</sup>

$\sigma$	Oberflächenspannung des Coatingmaterials	N/m
$\tau$	Schubspannung	N/m <sup>2</sup>
$\tau_+$	Faktor der Schubspannungsverteilung im Kernstrahlbereich des Freistrahls	N/m <sup>2</sup>
$\tau_0$	Referenz-Schubspannung	N/m <sup>2</sup>
$\tau_j$	Schubspannungsverteilung des Freistrahls beim Auftreffen auf eine Wand	N/m <sup>2</sup>
$\tau_{\text{imp}}$	Schubspannungsverteilung des Freistrahls im Kernstrahlbereich	N/m <sup>2</sup>
$\tau_{\text{max}}$	maximale Schubspannung des Freistrahls im Kernstrahlbereich	N/m <sup>2</sup>
$\tau_{\text{wj}}$	Schubspannungsverteilung des Freistrahls im Wandstrahlbereich	N/m <sup>2</sup>
$\bar{\tau}$	Reibungsspannung	N/m <sup>2</sup>

**Indizes**

$c$	kritischer Punkt
$i$	Terme $i$ -ter Ordnung einer Taylorreihenentwicklung
$(i)$	$i$ -te Stützstelle der Diskretisierung
$L, R$	linke bzw. rechte Berandung eines Elements, in dem das Riemann-Problem gelöst wird
$LL, RR$	linke bzw. rechte Berandung des links bzw. rechts vom betrachteten Element liegenden Elements
$x$	Komponente in $x$ -Richtung
$y$	Komponente in $y$ -Richtung
$\pm\infty$	linker bzw. rechter Rand des Rechengebiets

**Andere Zeichen**

$'$ , $''$ , $'''$	Ableitungen in $x$ -Richtung
$\bar{\quad}$	Szenario mit vergrößertem Düsenabstand
$\underline{\quad}$	Szenario mit verringertem Düsenabstand
$\equiv$	Szenario mit vergrößerter Bandgeschwindigkeit
$\underline{\quad}$	Szenario mit verringerter Bandgeschwindigkeit
$\star$	dimensionsbehaftete Größen
$(i)$	$i$ -te Nullstelle einer Gleichung
$(n)$	$n$ -ter Zeitschritt
$N, Z$	Nullstelle des Zählers bzw. des Nenners

**Dimensionslose Kennzahlen**

$Bo$	Bond-Zahl	—
$Bo_{\text{red}}$	reduzierte Bond-Zahl	—
$Eu$	Euler-Zahl	—
$Fr$	Froude-Zahl	—
$Re$	Reynolds-Zahl	—
$Re_j$	Reynolds-Zahl des Freistrahls	—
$\lambda$	Schlankheitsparameter	—

# 1 Einleitung

Beschichtete Folien und Bleche werden in vielen Einsatzgebieten benötigt. Man denke nur an photographische Filme, Spezialpapiere, aber auch verzinkte Stahlbleche für die Automobilindustrie. Dazu wird eine dünne Schicht von flüssigem Material auf ein Trägersubstrat aufgebracht, die im weiteren Verlauf aushärtet, trocknet oder erstarrt. Für das Aufbringen existiert eine Vielzahl an Verfahren. Die einfachste Technik besteht aus dem Auftragen der Farbe mit Pinsel oder Rolle. Schon an diesem Beispiel ist einsichtig, daß es nicht immer leicht ist, die Schichtdicke zu bestimmen oder sogar eine vorgegebene Dicke zu erreichen; Diese wird vor allem von der Zähigkeit und der Oberflächenspannung – aber auch einigen anderen Parametern – abhängen.

Oft werden die Beschichtungsverfahren noch als eine Art schwarze Magie gesehen, da meist tiefergehende wissenschaftlich Untersuchungen fehlen oder geheim gehalten werden. Selbst Hersteller von Beschichtungsanlagen können häufig keine befriedigenden Vorhersagen über die Schichtdicke und Oberflächengüte treffen. Im Zuge dieser vom Christian-Doppler-Laboratorium für kontinuierliche Erstarrungsvorgänge finanzierten und von der VOEST Alpine Industrieanlagenbau initiierten Arbeit sollten wissenschaftliche Grundlagen und Verständnis für ein Abstreifprozeß genanntes Verfahren geschaffen werden.

## 1.1 Beschichtungsverfahren

Um präzise Schichtdicken erreichen zu können, wurden im Laufe der Zeit viele verschiedene Beschichtungsverfahren entwickelt [Rus85]. Hier sollen einige grundlegende Methoden vorgestellt werden.

### 1.1.1 Verfahren mit vorgegebener Beschichtungsmenge

Mit diesen Verfahren ist die Schichtdicke in gewissen Grenzen unabhängig von den Materialeigenschaften einstellbar. Dazu gehören z.B. das Florstreichen (Vorhangstreichverfahren) oder die Schlitzstreichmaschine. Bei letzterer wird eine vorgegebene Menge des Beschichtungsmaterials durch eine Schlitzdüse direkt auf das in geringem Abstand davor vorbeiziehende Band gedrückt. Solange eine Benetzung des Substrats erfolgt, läßt sich eine uniforme, vorgegebene Schichtdicke erzielen.

### 1.1.2 Durch Menisken bestimmte Beschichtungen

Ein klassisches Beispiel für diese Verfahren ist das Tauchverzinken. Dabei wird das zu beschichtende Werkstück in flüssiges Zink getaucht. Beim Herausholen bleibt eine Zinkschicht an der Oberfläche

zurück, die dort erstarrt. Den entscheidenden Einfluß auf die sich einstellende Schichtdicke üben die Materialeigenschaften der Beschichtung und die Geschwindigkeit, mit der das Werkstück aus der Flüssigkeit gezogen wird, aus. Der Oberflächenspannung kommt eine besondere Bedeutung zu. Diese beeinflusst nämlich den Meniskus, den die Flüssigkeitsoberfläche am Werkstück bildet.

### 1.1.3 Einstellen der Schichtdicke nach dem Meniskus

In diese Kategorie fallen alle Verfahren, bei denen das Beschichtungsmaterial über den im obigen Abschnitt 1.1.2 erwähnten Mechanismus ausgetragen wird, aber die endgültige Beschichtungsdicke erst durch geeignete Maßnahmen nach dem Meniskus eingestellt wird. Hier ist die bei der Papierherstellung zum Einsatz kommende Rakelstreichmaschine und die Rollrakel (Walzenstreichmaschine) zu erwähnen.

Aber auch der in dieser Arbeit behandelte Abstreifprozeß gehört zu dieser Gruppe von Beschichtungsverfahren.

## 1.2 Anforderungen an alle Beschichtungsverfahren

Der Anwender stellt vielfältige Anforderungen an ein Beschichtungsverfahren. Hier sind einige davon exemplarisch aufgeführt:

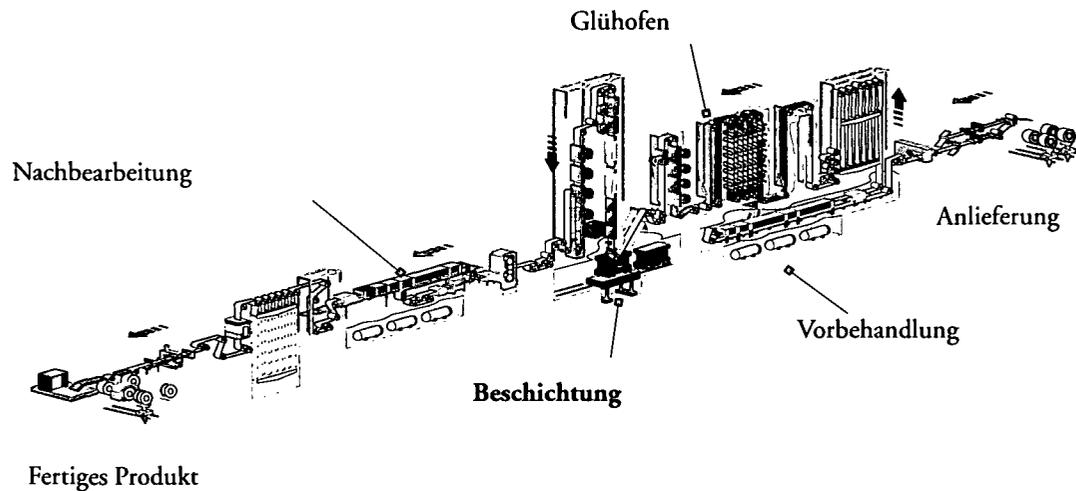
- Hohe Oberflächengüte,
- konstante Schichtdicke,
- Schichtdicke in weiten Bereichen einstellbar,
- meist dünne Schichtdicken,
- wenig Abfall in der Produktion (z.B. kein Beschneiden der Ränder),
- hoher (kontinuierlicher) Durchsatz,
- berührungsloses Verfahren zum Einstellen der Schichtdicke,
- keine (oder nur kurze) Stillstandzeiten (bedingt z.B. durch Werkzeugwechsel, Wechsel des Beschichtungsmaterials).

## 1.3 Abstreifprozeß

Aus der Vielzahl der Beschichtungsverfahren hat sich heute der Abstreifprozeß für das Verzinken von Bandblechen in der Metallindustrie durchgesetzt. Trotz der noch bestehenden Probleme erfüllt er die meisten der an ein Beschichtungsverfahren gestellten Anforderungen aus Abschnitt 1.2.

Dieser Prozeß gehört zur Gruppe der Verfahren, bei denen die entgültige Schichtdicke nach dem eigentlichen Beschichten eingestellt wird (siehe Kapitel 1.1.3).

Nach einer Vorbehandlung läuft das Band in das flüssige Zink, wo es senkrecht nach oben umgelenkt wird (siehe Abbildung 1.1 auf der nächsten Seite). Kurz nach Verlassen des Zinkbads läuft das



**Abbildung 1.1:** Von der VAI hergestellte und vertriebene kontinuierliche Bandverzinkungsanlage. Das in der gesamten Anlage befindliche Bandblech erreicht eine Länge von 1000 m; der Turm in der *coating section* erreicht eine Höhe von 60 m. Die Bandgeschwindigkeit beträgt ca. 3 m/s.

Band durch zwei horizontal auf gleicher Höhe angeordneten Schlitzdüsen durch, wobei das Abblasgas auf die ausgetragene, noch flüssige Zinkschicht geblasen wird (Abbildung 1.2 auf der nächsten Seite). Diese Freistrahlen bewirken eine Reduktion der Schichtdicke und das überflüssige Zink läuft wieder in das Bad zurück. Bevor das Band die Umlenkrollen oben im Turm erreicht, muß das Zink vollständig erstarrt sein. In dieser senkrecht nach oben laufenden freien Strecke können noch thermische Nachbehandlungen durchgeführt werden. Bevor das Blech wieder auf Rollen aufgewickelt wird, durchläuft es noch einige Stationen, die es mechanisch nachbehandeln. So wird es z.B. gewalzt, um die Oberflächengüte zu erhöhen, oder es werden die Ränder beschnitten.

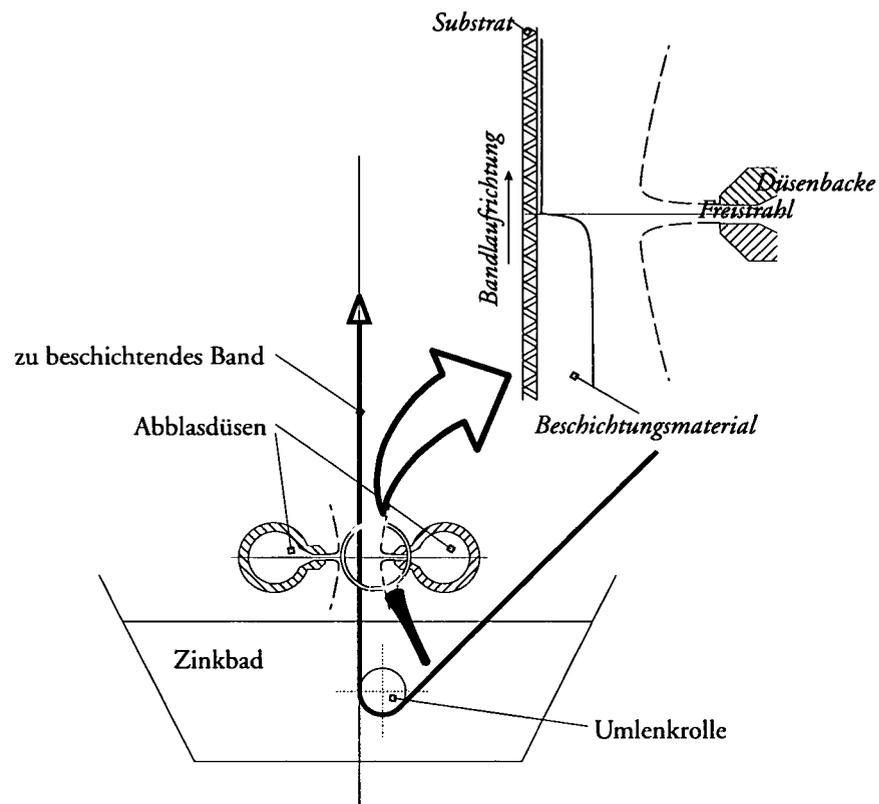
Dieses Beschichtungsverfahren ist unter vielen verschiedenen Namen bekannt. Einige sind: Abblasen, *air-knife*, *jet wiping*, kontinuierliches Bandverzinken aber auch proprietäre Markennamen wie *Dynamic Air Knife – DAK®*.

## 1.4 Auftretende Probleme

Im Betrieb können eine Vielzahl von Problemen auftreten. Diese sind meist an den heutzutage zu beobachtenden Trend zu immer höheren Bandgeschwindigkeiten gekoppelt. Besondere Probleme bereiten im Moment:

*splashing:*

Bei steigender Bandgeschwindigkeit läuft das abgeblasene Beschichtungsmaterial nicht mehr senkrecht am Band herunter. Das flüssige, in das Bad zurückfließende Material beginnt sich abzulösen und fällt als Freistrahle in das Bad zurück. Dieser Prozeß tritt zuerst an den Rändern auf. Von dort breitet er sich über die gesamte Bandbreite aus.

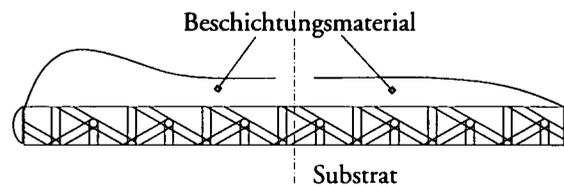


**Abbildung 1.2:** Prinzipskizze des Beschichtungsabschnitts aus Abbildung 1.1 auf der vorherigen Seite: Das zu beschichtende Band läuft senkrecht aus dem flüssigen Zinkbad. Die Dicke der Zinkbeschichtung wird auf beiden Seiten von den Abblasdüsen reduziert. Dabei läuft das überflüssige Beschichtungsmaterial in das Bad zurück.

*Detailbild:* Bereich, in dem der Freistrahle auf das ausgetragene Material trifft und somit die Schichtdickenreduktion bewirkt.

Das Problem besteht darin, daß sich das Beschichtungsmaterial an der Unterseite der Abblasdüse anlagern kann. Dort erstarrt es und es bildet sich ein sogenannter Bart. Erreicht dieser eine gewisse Dicke, muß die gesamte Anlage abgeschaltet werden, damit die Düse gereinigt werden kann.

**Bandkantenüberhöhung:** Wird ein Querschnitt durch das fertig beschichtete Bandblech angefertigt, so kann man an den Rändern abweichende Beschichtungsdicken beobachten. Dabei kann es sowohl zu Anhäufung von Material, als auch zu Materialmangel kommen, wie in Abbildung 1.3 dargestellt. In beiden Fällen muß das Blech nachträglich beschnitten werden, um den Anforderungen des Abnehmers zu genügen.



**Abbildung 1.3:** Bandkantenüberhöhung: Schnitt quer zur Bandlaufrichtung durch das zu beschichtende Substrat. *Links* ist eine Anhäufung von Material dargestellt, *rechts* ein Materialmangel.

Bei älteren Anlagen wird versucht, diesen Effekt mit Hilfe von Leitblechen (sogenannten *baffles*) zu minimieren. Da man annimmt, daß der an den Rändern nicht mehr zweidimensionale Freistrah diese Bandkantenüberhöhung verursacht, werden an den Berandungen Blenden angebracht, zwischen denen das Band läuft. Diese sollen helfen, den dreidimensionalen Freistrah möglichst konstant über den Abblasbereich zu halten.

Moderne Entwicklungen [DDKK95] versuchen mit anpaßbaren Düsenspalten und einer Regelung dieses Problem in den Griff zu bekommen. Dabei wird knapp nach der Düse mit Hilfe eines Röntgenverfahrens die Schichtdicke bestimmt und eine Regelung stellt mit diesen Informationen die Spaltbreite ein.

Leider hat keine dieser Methoden den gewünschten Effekt gezeigt.

**Unregelmäßige Oberfläche:** Die fertigen Produkte weisen oft Oberflächenmuster, wie Wolkenbildungen oder Fischgrätmuster, auf. In modernen Beschichtungsanlagen wird daher versucht, die Beschichtungen durch nachträgliches Walzen zu glätten.

## 2 Formulierung des Problems

Der Prozeß des Abblasens wird durch eine Vielzahl von Parametern bestimmt (siehe Abbildung 2.1 auf der nächsten Seite). In der industriellen Praxis werden zum Erzielen der gewünschten Beschichtungsdicke und Oberflächengüte jedoch meist nur kleine Korrekturen einiger weniger Einstellungsgrößen vorgenommen. So wird bei den meisten bestehenden Anlagen nur der Düsenabstand  $H_j^*$ , die Bandgeschwindigkeit  $U^*$  und der Düsenkammerdruck – und somit die Ausströmgeschwindigkeit aus der Düse  $V_j^*$  – variiert. Eine Änderung der Spaltbreite  $D_j^*$  ist im Betrieb nicht möglich, da dies nur mit Hilfe eines kompletten und aufwendigen Düsenwechsels erreicht werden kann. Dabei muß die gesamte Anlage abgeschaltet werden. Die aus neuesten Entwicklungen hervorgegangenen Anlagen, wie die des *dynamic air knives*®[DDKK95], erlauben es, die Spaltbreite während des Betriebs anzupassen. Dabei läßt sich der Austrittsspalt auch über die Düsenbreite variieren.

Um den Durchsatz zu erhöhen, wird in den heutigen Anlagen mit möglichst hohen Bandgeschwindigkeiten gearbeitet. Das bedingt auch hohe Düsenausströmgeschwindigkeiten  $V_j^*$  und kleine Düsenabstände  $H_j^*$ , um den gewünschten Abstreifeffekt zu erreichen. Bei dieser Konstellation ist der Einflußbereich  $B^*$  des Freistrahls im Vergleich zur Bandbreite sehr klein. Deshalb wird in dieser Arbeit von einer zweidimensionalen Freistrahströmung ausgegangen und dreidimensionale Effekte werden vernachlässigt.

In dem nun folgenden Abschnitt soll das Problem ganz allgemein in dimensionsloser Form mit den dazugehörigen Randbedingungen formuliert werden. In weiteren Schritten werden Näherungslösungen zunächst für stationäre Zustände gesucht. Diese werden dann erweitert, um auch instationäre Effekte berücksichtigen zu können.

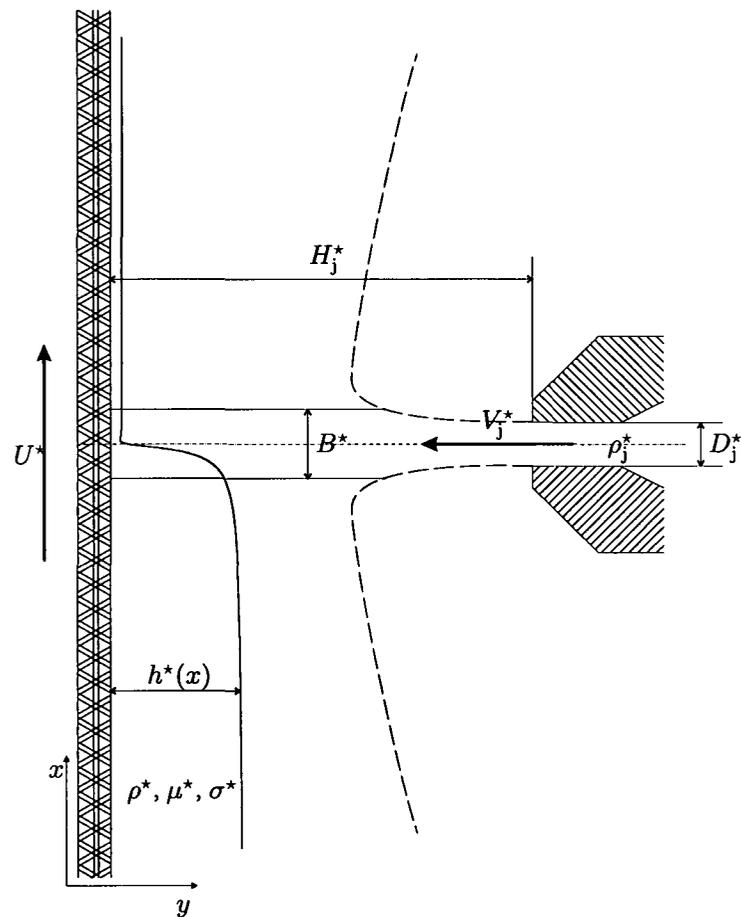
### 2.1 Allgemeine Formulierung

Die Gleichungen, die die Schichtdickenverteilung  $h(x,t)$  beschreiben, sind die Kontinuitätsgleichung (A.9) und die beiden Bewegungsgleichungen (A.12) und (A.13) in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Diese Gleichungen wurden mit geeignetem  $H^*$  und  $B^*$  als Referenzlängen in  $x$ - und  $y$ -Richtung entdimensionalisiert:

$$(A.9): \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1a)$$

$$(A.12): \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.1b)$$

$$(A.13): \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\text{Eu}}{\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial y} = \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2.1c)$$



**Abbildung 2.1:** Prinzipskizze mit den Parametern, die den Ablasprozeß und somit den Schichtdickenverlauf  $h^*(x)$  beeinflussen.

Geometrie:  $D_j^*$  – Düsenapertur,  $H_j^*$  – Abstand Düse–Band,  $B^*$  – Einflußbereich des Freistrahls,

Ablasgas:  $V_j^*$  – Ausströmgeschwindigkeit,  $\rho_j^*$  – Dichte,

Beschichtungsmaterial:  $\rho^*$  – Dichte,  $\mu^*$  – dynamische Viskosität,  $\sigma^*$  – Oberflächenspannung,

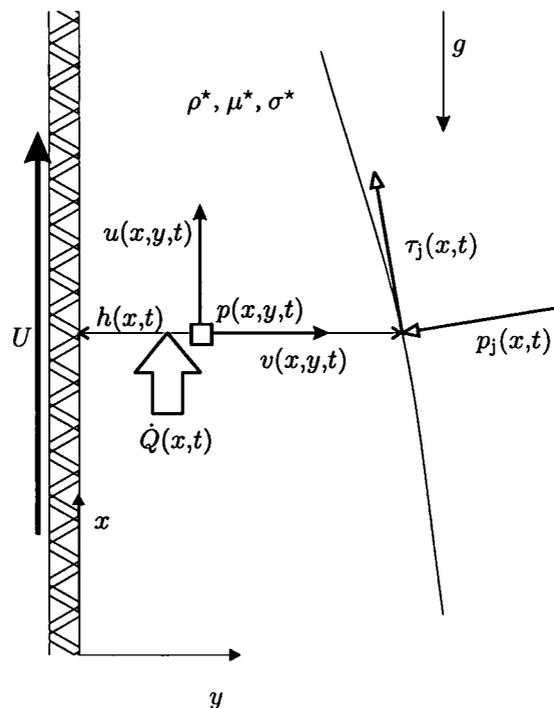
Substrat:  $U^*$  – Bandgeschwindigkeit.

(Zur Herleitung dieser dimensionslosen Formulierung siehe Anhang A.)

In diesen Gleichungen stehen  $u(x,y,t)$  und  $v(x,y,t)$  für die Geschwindigkeitsverteilungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung, die es zu bestimmen gilt.  $x$  und  $y$  sind die Koordinaten in bzw. normal zur Bandlaufrichtung und  $t$  bezeichnet die Zeit. Die in diesem Problem vorkommenden unabhängigen Variablen sind  $x$ ,  $y$  und  $t$ . Der in der Flüssigkeitsschicht herrschende Druck ist  $p(x,y,t)$  (siehe Abbildung 2.2).  $Fr$ ,  $Eu$  und  $\lambda$  sind dimensionslose Kennzahlen und folgendermaßen definiert (siehe Gleichung (A.11)):

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{H^*}{B^*} && \dots \text{ Schlankheitsparameter ,} \\ Fr &= \frac{U^*}{\sqrt{g^* B^*}} && \dots \text{ Froude-Zahl ,} \\ Eu &= \frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*} && \dots \text{ Euler-Zahl .}\end{aligned}\tag{2.2a}$$

Hierbei ist  $p_s^*$  der Staudruck des Freistrahls.



**Abbildung 2.2:** In den Grundgleichungen 2.1 und den Randbedingungen 2.3 verwendete Variablen (Erklärung siehe Text).

### Allgemeine Randbedingungen

Um das Gleichungssystem (2.1) lösen zu können, fehlen noch die Bedingungen an den Rändern. Für den Flüssigkeitsfilm müssen folgende drei Randbedingungen erfüllt werden:

- Haftbedingung am Band  $y = 0$ :

Die Flüssigkeitsschicht bei  $y = 0$  bewegt sich mit der Bandgeschwindigkeit  $U = 1$

$$u(x,0,t) = 1, \quad (2.3a)$$

$$v(x,0,t) = 0. \quad (2.3b)$$

- Druck an der freien Oberfläche  $y = h(x,t)$ :

An der Oberfläche des Flüssigkeitsfilms herrscht die Druckverteilung  $p_j(x,t)$  des auftreffenden Freistrahls. Durch die Oberflächenspannung  $\sigma^*$  und der Krümmung der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Freistrahlgas entsteht ein zusätzlicher Drucksprung  $p_\sigma(x,t)$  lt. Gleichung (A.16). (Zur Herleitung dieser dimensionslosen Formulierung siehe Anhang A.2.3. Dabei wird der Einfluß der viskosen Normalspannung vernachlässigt und kleine Werte von  $h^*$  vorausgesetzt.)

$$\text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, h(x,t), t) = \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x}(x, t) - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, t) \quad (2.3c)$$

mit der dimensionslosen Kennzahl  $\text{Bo}_{\text{red}}$  aus Gleichung (A.17):

$$\text{Bo}_{\text{red}} = \lambda \frac{\sigma^*}{\rho^* g^* B^{*2}} \quad \dots \text{reduzierte Bond-Zahl} . \quad (2.2b)$$

- Schubspannung an der freien Oberfläche  $y = h(x,t)$ :

Durch den Freistrahл entsteht eine Schubspannungsverteilung  $\tau_j$  an der Oberfläche des Flüssigkeitsfilms:

$$\begin{aligned} \tau(x, h(x,t), t) &= \\ &= \frac{1}{1 + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] - \lambda^4 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \Big|_{x,y=h(x,t),t} . \end{aligned}$$

(Zur Herleitung siehe Anhang A.2.3.)

An der Oberfläche darf der Spannungsvektor in tangentialer Richtung keinen Sprung aufweisen, d.h.

$$\tau_j(x,t) = \tau(x, h(x,t), t) . \quad (2.4)$$

### Randbedingungen für stationäre Strömungen

Bei stationärer Betrachtungsweise können zwei zusätzliche Randbedingungen aufgestellt werden:

- Konstanz des pro Zeiteinheit durch einen beliebigen Querschnitt fließenden Volumenstroms pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$ :

$$\int_0^{h(x)} u(x,y) dy \Big|_x = \dot{Q}(x) = \text{const} , \quad (2.3d)$$

- Konstante Schichtdicke  $h(x)$  in großer Entfernung  $x \rightarrow \pm\infty$  des auftreffenden Freistrahls:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \text{const} . \quad (2.3e)$$

## 3 Vereinfachungen und Lösungsansätze

Die Bestimmungsgleichungen (2.1) für den Flüssigkeitsfilm mit den Randbedingungen (2.3) sind einer direkten analytischen Lösung nicht zugänglich. Daher sollen in diesem Abschnitt physikalisch sinnvolle Vereinfachungen gesucht werden, mit deren Hilfe die Lösungen näherungsweise bestimmt werden können.

In einem ersten Schritt werden nur schlanke Flüssigkeitsfilme betrachtet, d.h. der Schlankheitsparameter  $\lambda$  muß klein gegen 1 sein. Danach werden zusätzlich die Beschleunigungsterme vernachlässigt und die Gleichungen für den stationären Fall mit und ohne Einfluß der Oberflächenspannung hergeleitet. Auf dieser Basis aufbauend werden Gleichungen für instationäres Verhalten entwickelt.

### Begründung

Ist der Schlankheitsparameter  $\lambda$  klein gegen 1, so bedeutet das, daß der Einflußbereich  $B^*$  des Freistrahls um vieles größer ist als die Schichtdicke  $H^*$ . Bei allen in dieser Arbeit untersuchten Fällen erreicht  $\lambda$  maximal den Wert 0,0014.

Die Einflüsse der Beschleunigungsterme können dann vernachlässigt werden, wenn der vor ihnen stehende Faktor  $Fr^2$  klein gegen 1 wird (siehe Gleichungssystem (2.1)). Jedoch wird in den heutigen modernen industriellen Anlagen der Betriebspunkt häufig so eingestellt, daß die Froude-Zahl  $Fr$  Werte zwischen 10 und 50 annimmt. Dabei erreicht die Euler-Zahl  $Eu$  Werte zwischen  $10^2$  und  $10^4$  und der Schlankheitsparameter  $\lambda$  die Größenordnung 1. Obwohl damit die oben getroffenen und begründeten Annahmen verletzt werden, sollen in dieser Arbeit diese Vereinfachungen beibehalten werden, da sich die bestimmenden Gleichungen dann zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung – oder sogar zu einer algebraischen Gleichung – vereinfachen lassen.

Um solch einen Betriebszustand ( $\lambda \ll 1$ ,  $Fr^2 \ll 1$ ) zu erreichen, muß der Düsenabstand  $H_j^*$  vergrößert und/oder die Bandgeschwindigkeit  $U^*$  verkleinert werden (siehe Tabelle D.3 auf Seite 79). Mit diesen Einstellungen arbeiten viele der älteren, langsam laufenden, aber auch einige der neuesten Anlagen. Ausführliche Darstellungen und Beschreibungen der Näherungslösungen finden sich in den Kapiteln 5 und 6.

### 3.1 Aufgeprägte Druck- und Schubspannungsverteilung

Die im Anhang B hergeleiteten Beziehungen für die Druck- und Schubspannungsverteilung eines auf die Flüssigkeitsschicht auftreffenden Freistrahls gilt streng genommen nur für das Auftreffen auf starre ebene Platten. Trifft der Freistrah auf eine Flüssigkeit, so verformt sich die Oberfläche derselben. Dies modifiziert jedoch wieder den Freistrah und die Druck- und Schubspannungsverteilung.

In dieser Arbeit soll der Einfachheit halber die Druck- und Schubspannungsverteilung als aufgeprägt betrachtet werden, d.h. es gibt keine Rückwirkung der Verformung der Flüssigkeitsoberfläche auf den Freistrah.

Typische Verteilungen der Druck- und Schubspannungen beim Auftreffen eines Freistrahls auf eine ebene Platte sind in Abbildung 5.1 auf Seite 34 dargestellt.

## 3.2 Vereinfachungen für schlanke Flüssigkeitsfilme

Ist der Schlankheitsparameter  $\lambda$  klein gegen 1 – d.h. der Einflußbereich des Freistrahls ist um vieles größer als die Schichtdicke –, so reduziert sich der Gleichungssatz (2.1) zu dem als Grenzschichtgleichungen bekannten Gleichungssystem:

$\lambda \ll 1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.1c)$$

Die dazugehörigen Randbedingungen (2.3) und (2.4) lauten:

$$u(x,0,t) = 1, \quad (3.2a)$$

$$v(x,0,t) = 0, \quad (3.2b)$$

$$\text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x,h(x,t),t) = \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x}(x,t) - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x,t), \quad (3.2c)$$

$$\tau(x,h(x,t),t) = \tau_j(x,t). \quad (3.2d)$$

## 3.3 Vereinfachungen für schleichende Strömungen

In einem zweiten Schritt werden die Beschleunigungsterme  $\text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  vernachlässigt, da die Froude-Zahl  $\text{Fr}$  als klein gegen 1 angenommen wird. Unter dieser zusätzlichen Annahme läßt sich das Gleichungssystem (3.1) folgendermaßen vereinfachen:

$\text{Fr} \ll 1, \lambda \ll 1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.3c)$$

Die dazugehörigen Randbedingungen lauten:

$$u(x,0,t) = 1 , \quad (3.4a)$$

$$v(x,0,t) = 0 , \quad (3.4b)$$

$$\text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, h(x,t), t) = \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x}(x,t) - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x,t) , \quad (3.4c)$$

$$\tau(x, h(x,t), t) = \tau_j(x,t) = \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (3.4d)$$

Das Strömungsverhalten dieser schleichenden Strömung wird nur durch die Zähigkeit, den Druckgradienten und die Oberflächenspannung bestimmt. Der große Vorteil dieser Vereinfachung besteht darin, daß in (3.3b) nur mehr die Geschwindigkeitskomponente  $u$  enthalten ist und somit das Gleichungssystem (3.3) mit wesentlich geringerem Aufwand lösbar ist.

### 3.3.1 Stationäre schleichende Strömung

Das Gleichungssystem (3.3) gilt noch allgemein für instationäre Zustände. Wir wollen vorerst noch eine weitere Einschränkung treffen und nur stationäre Strömungen betrachten. Die stationäre Form dieser Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \text{Fr} \ll 1, \lambda \ll 1:$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (3.5a)$$

$$1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \quad (3.5c)$$

mit den dazugehörigen Randbedingungen aus (3.4), (2.3d) und (2.3e):

$$u(x,0) = 1 , \quad (3.6a)$$

$$v(x,0) = 0 , \quad (3.6b)$$

$$\text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, h(x)) = \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x}(x) - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''(x) , \quad (3.6c)$$

$$\tau(x, h(x)) = \tau_j(x) = \frac{\partial u}{\partial y} , \quad (3.6d)$$

$$\int_0^{h(x)} u(x,y) dy \Big|_x = \dot{Q}(x) = \text{const} , \quad (3.6e)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \text{const} . \quad (3.6f)$$

Aufgrund von (3.5c) hängt  $p(x,y)$  nur von  $x$  ab und es kann für  $\frac{\partial p}{\partial x}$  der Einfachheit halber als  $p'(x)$  geschrieben werden.

Zweimalige Integration von (3.5b) und Einsetzen der Randbedingungen (3.6) liefert das Geschwindigkeitsfeld  $u(x,y)$  der Flüssigkeitsschicht:

$$\begin{aligned} 1 + \text{Eu} \cdot p' &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ (1 + \text{Eu} \cdot p') y &= \frac{\partial u}{\partial y} + C(x) \\ (1 + \text{Eu} \cdot p') \frac{y^2}{2} &= u + C(x)y + D(x) \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (3.6) legen die beiden vorerst unbekanntenen „Integrationskonstanten“  $C(x)$  und  $D(x)$  fest. Die zweite Gleichung mit den Randbedingungen (3.6d) und (3.6c) liefert  $C(x)$

$$\begin{aligned} (1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h''') h &= \tau_j + C(x) \\ \Rightarrow C(x) &= (1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h''') h - \tau_j \end{aligned}$$

und die dritte Gleichung mit den Randbedingungen (3.6a) und (3.6c) die Funktion  $D(x)$

$$\begin{aligned} (1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h''') \frac{0^2}{2} &= 1 + C(x) \cdot 0 + D(x) \\ \Rightarrow D(x) &= -1. \end{aligned}$$

Somit lautet das Geschwindigkeitsfeld  $u(x,y)$  in Abhängigkeit von der noch unbekanntenen Schichtdicke  $h(x)$

$$u = \left(1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''\right) \left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + \tau_j y + 1. \quad (3.7)$$

Die Integration der Geschwindigkeit  $u(x,y)$  über die Schichtdicke  $h(x)$  liefert den Volumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$  durch den Querschnitt  $x$  (Gleichung (3.6e)):

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_0^{h(x)} \left[ \left(1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''\right) \left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + \tau_j y + 1 \right] dy \\ &= \left(1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''\right) \left(\frac{y^3}{6} - h \frac{y^2}{2}\right) + \tau_j \frac{y^2}{2} + y \Big|_0^h \\ \dot{Q} &= - \left(1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''\right) \left(\frac{h^3}{3}\right) + \tau_j \frac{h^2}{2} + h. \end{aligned}$$

Die Bedingung (3.6e) konstanten Volumenstroms führt somit auf folgende Bestimmungsgleichung für die Schichtdicke  $h(x)$ :

$$\left[ 1 + \text{Eu} \cdot p'_j(x) - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''(x) \right] \frac{h^3(x)}{3} = \tau_j(x) \frac{h^2(x)}{2} + h(x) - \dot{Q}. \quad (3.8)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt die Schichtdicke  $h(x)$  in Abhängigkeit des noch unbekanntenen, aber konstanten, Volumenstroms pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$ , wenn die Druck- und die Schubspannungsverteilung  $p_j(x)$  und  $\tau_j(x)$  des auftreffenden Freistrahls und die Materialeigenschaften der Beschichtung bekannt sind.

**Lösung ohne Oberflächenspannung  $\sigma^*$** 

Die reduzierte Bond-Zahl  $Bo_{red}$ , gebildet mit der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  der üblichen zum Einsatz kommenden Beschichtungsmaterialien (und  $\lambda \ll 1$ ), ist klein gegen 1. (Für typische Größen der reduzierten Bond-Zahl  $Bo_{red}$  siehe Tabelle D.3 auf Seite 79.) Werden nun die Terme mit  $Bo_{red}$  vernachlässigt, so vereinfacht sich die gewöhnliche Differentialgleichung (3.8) zu einer algebraischen Gleichung mit den unbekanntenen Größen  $h(x)$  und  $\dot{Q}$ :

$Bo_{red} \ll 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ ,  $Fr \ll 1$ ,  $\lambda \ll 1$ :

$$(1 + Eu \cdot p_j') \frac{h^3}{3} = \tau_j \frac{h^2}{2} + h - \dot{Q}. \quad (3.9)$$

Der noch unbekanntene Volumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$  kann eliminiert werden, wenn diese Gleichung nach  $x$  differenziert und dann nach  $h'$  aufgelöst wird:

$$Eu \cdot p_j'' \frac{h^3}{3} + (1 + Eu \cdot p_j') h^2 h' = \tau_j' \frac{h^2}{2} + \tau_j h h' + h'$$

$$h' = \frac{\tau_j' \frac{h^2}{2} - Eu \cdot p_j'' \frac{h^3}{3}}{(1 + Eu \cdot p_j') h^2 - \tau_j h - 1}. \quad (3.10)$$

Diese Gleichung für die Steigung  $h'(x)$  der Schichtdicke weist eine Singularität auf, wenn den Nenner des Bruchs (3.10) verschwindet. Diese Stelle soll mit  $x_c$  bezeichnet werden. Da aber  $h'_c$  – der Wert der Steigung  $h'(x_c)$  – aus physikalischen Gründen über den gesamten Bereich endlich bleiben muß, muß an dieser Stelle auch der Zähler identisch Null werden. Aus dieser Beziehung läßt sich  $x_c$  berechnen.

Setzt man den Nenner von (3.10) gleich Null, so erhält man die Nullstellen  ${}^N h_c$ :

$${}^N h_c^{(1,2)} = \frac{\tau_j \pm \sqrt{\tau_j^2 + 4(1 + Eu \cdot p_j')}}{2(1 + Eu \cdot p_j')}. \quad (3.11)$$

Die Nullstellen  ${}^Z h_c$  des Zählers ergeben sich zu:

$${}^Z h_c^{(1,2)} = 0, \quad (3.12)$$

$${}^Z h_c^{(3)} = \frac{3}{2} \frac{\tau_j'}{Eu \cdot p_j''}. \quad (3.13)$$

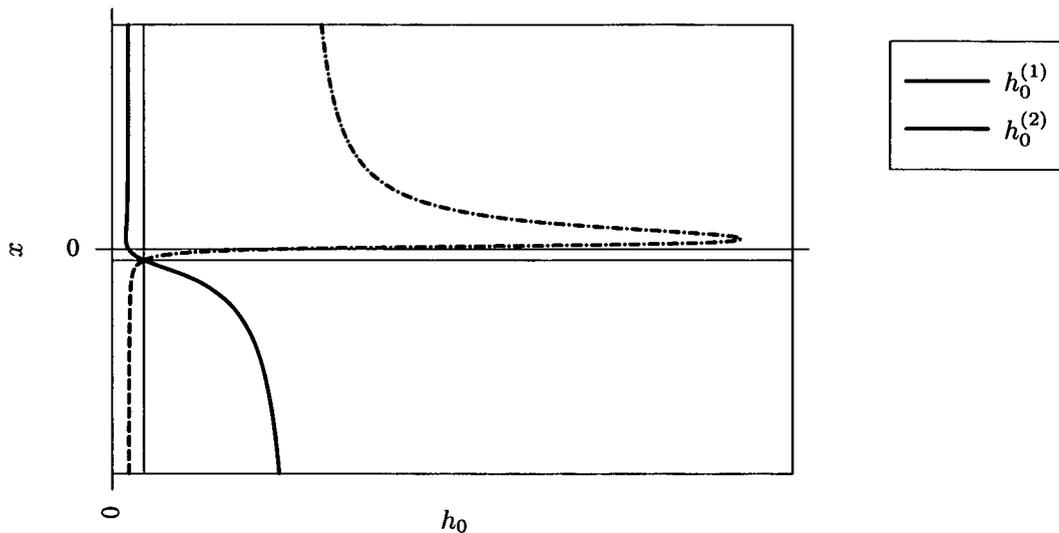
Die Lösung verschwindender Schichtdicke (3.12) ist trivial und wird hier nicht weiter betrachten. Durch Gleichsetzen von  ${}^N h_c^{(1,2)}$  aus (3.11) mit  ${}^Z h_c^{(3)}$  aus (3.13) erhält man die Bestimmungsgleichung für  $x_c$ :

$$0 = 3\tau_j'(x_c) - \frac{Eu \cdot p_j''(x_c)}{1 + Eu \cdot p_j'(x_c)} \left[ \tau_j(x_c) \pm \sqrt{\tau_j^2(x_c) + 4(1 + Eu \cdot p_j'(x_c))} \right]. \quad (3.14)$$

Ist nun  $x_c$  durch Lösung der Gleichung (3.14) einmal bekannt, so läßt sich daraus sowohl die Schichtdicke im kritischen Punkt  $h_c = h(x_c)$  (z.B. mit Hilfe der Gleichung (3.13)) als auch der Volumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$  aus Gleichung (3.9) berechnen.

Den gesamten Verlauf der Schichtdicke  $h(x)$  erhält man schlußendlich durch Lösen der kubischen Gleichung (3.9). Dabei ergeben sich drei Lösungsäste  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$  und  $h^{(3)}$  (siehe Abbildung 3.1), wobei der negative Ast  $h^{(3)}$  sofort ausgeschlossen werden kann, da er physikalisch nicht sinnvoll ist. Im kritischen Punkt  $x_c$  fallen die beiden Lösungen  $h^{(1)}$  und  $h^{(2)}$  im Punkt  $h_c$  zusammen (siehe Kapitel 3.3.3 für eine weiterführende Diskussion und Kapitel 6 für numerische Lösungen).

Um  $h(x)$  zu berechnen, könnte auch eine der beiden Gleichungen (3.11) bzw. (3.13) gelöst werden. Bei beiden können jedoch Singularitäten auftreten, weil der jeweilige Nenner Null werden kann. Desweiteren können Lösungsäste verloren gehen.



**Abbildung 3.1:** Beispielhafte Lösungen der Gleichung (3.9). Dargestellt sind die physikalisch sinnvollen Äste  $h_0^{(1)}$  und  $h_0^{(2)}$ . Durchgezogene Linien stellen die gesuchte Lösung dar, während die strichlierten Linien diejenige Lösungen darstellen, die ausgeschlossen werden müssen. Im Schnittpunkt der roten Linien liegt der kritische Punkt  $(x_c, h_c)$ .

### Lösung mit kleiner Oberflächenspannung $\sigma^*$

Für den Fall, daß die reduzierte Bond-Zahl  $Bo_{\text{red}}$  zwar klein gegen 1 ist, jedoch nicht vernachlässigt werden soll, läßt sich die Gleichung (3.8) asymptotisch mit folgendem Ansatz nach kleiner  $Bo_{\text{red}}$  entwickeln:

$$h(x, Bo_{\text{red}}) = h_0(x) + Bo_{\text{red}} \cdot h_1(x) + \dots, \quad (3.15a)$$

$$h'''(x, Bo_{\text{red}}) = h_0'''(x) + Bo_{\text{red}} \cdot h_1'''(x) + \dots, \quad (3.15b)$$

$$\dot{Q}(\text{Bo}_{\text{red}}) = \dot{Q}_0 + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \dot{Q}_1 + \dots \quad (3.15c)$$

Einsetzen in die Gleichung (3.8)

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \text{Eu} \cdot p'_j - \text{Bo}_{\text{red}} (h_0'''' + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h_1'''' + \dots) \right] \frac{(h_0 + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h_1 + \dots)^3}{3} = \\ & = \tau_j \frac{(h_0 + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h_1 + \dots)^2}{2} + (h_0 + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot h_1 + \dots) - (\dot{Q}_0 + \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \dot{Q}_1 + \dots) \end{aligned}$$

und zusammenfassen der Terme gleicher Ordnung in  $\text{Bo}_{\text{red}}$  liefert:

Terme mit  $\text{Bo}_{\text{red}}^0$ :

$$(1 + \text{Eu} \cdot p'_j) \frac{h_0^3}{3} = \tau_j \frac{h_0^2}{2} + h_0 - \dot{Q}_0, \quad (3.16)$$

Terme mit  $\text{Bo}_{\text{red}}^1$ :

$$\begin{aligned} & (1 + \text{Eu} \cdot p'_j) \frac{3h_0^2 h_1}{3} - \frac{h_0'''' h_0^3}{3} = \tau_j \frac{2h_0 h_1}{2} + h_1 - \dot{Q}_1, \\ & \left[ (1 + \text{Eu} \cdot p'_j) h_0^2 - \tau_j h_0 - 1 \right] h_1 - \frac{h_0'''' h_0^3}{3} = -\dot{Q}_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dabei entspricht die Gleichung (3.16) natürlich der Gleichung (3.9) für vernachlässigbare Oberflächenspannung.

Zum Lösen der Gleichung (3.17), wird diese im kritischen Punkt  $x_c$  ausgewertet. Dort verschwindet ja der Faktor vor  $h_1$  (Nenner von (3.10) und Lösung von (3.11)). Übrig bleibt:

$$\dot{Q}_1 = \frac{h_0''''(x_c) h_c^3}{3}. \quad (3.18)$$

Damit läßt sich aus (3.17) der gesamte Verlauf von  $h_1(x)$  berechnen:

$$h_1(x) = \frac{\frac{1}{3} h_0''''(x) h_0^3(x) - \dot{Q}_1}{\left[ 1 + \text{Eu} \cdot p'_j(x) \right] h_0^2(x) - \tau_j(x) h_0(x) - 1}. \quad (3.19)$$

Ein typischer Verlauf von  $h_1(x)$  ist in Abbildung 3.2 auf der nächsten Seite dargestellt. Eine zahlenmäßige Auswertung mit einer ausführlichen Diskussion des Einflusses der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  wird im Kapitel 5.4 durchgeführt (siehe insbesondere Abbildung 5.4 auf Seite 36).  $h_1(x)$  erreicht für den Referenzfall einen maximalen Wert von  $1,4 \cdot 10^{-3}$ , sodaß die Annahme des vernachlässigbaren Einflusses der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  – wie im Kapitel 3.3.1 vorausgesetzt – gerechtfertigt erscheint.

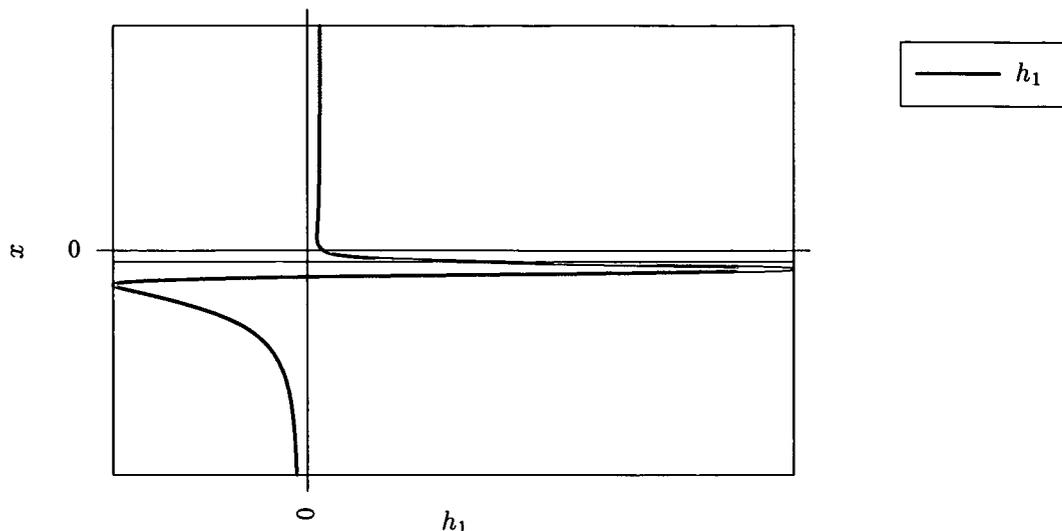


Abbildung 3.2: Typischer Verlauf von  $h_1(x)$  aus Gleichung (3.19).

### 3.3.2 Instationäre schleichende Strömung

Im industriellen Einsatz ist kaum mit stationären Betriebsbedingungen zu rechnen; man denke nur an den großen Abstand zwischen den beiden vertikalen Umlenkrollen, der benötigt wird, damit für das flüssige Zink genügend Zeit verstreicht, um erstarren zu können. In diesem Abschnitt wird das Band transversal zu schwingen beginnen und sich der Abstand  $H_j^*$  zwischen Düsenlippe und Band periodisch ändern. Die die Schichtdicke beeinflussende, aufgeprägte Druck- und Schubspannungsverteilungen sind Funktionen des Düsenabstands  $H_j^*$  und werden dadurch nun zu periodischen Funktionen der Zeit  $t$ :  $p_j(x,t)$  und  $\tau(x,t)$ .

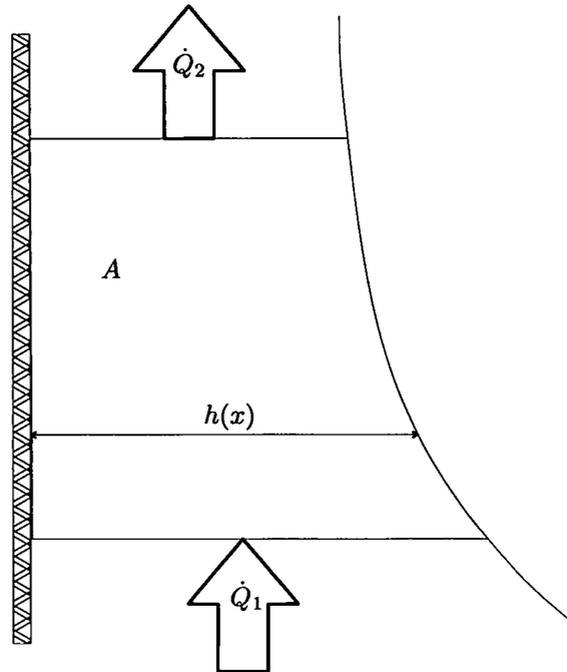
Das soll Motivation genug sein, um im folgenden Gleichungen für instationäre Strömungszustände herzuleiten.

#### Herleitung der Wellengleichung

Für eine anschauliche Herleitung der Gleichungen für instationäre Strömungszustände betrachten wir die Flüssigkeitsschicht im Abschnitt zwischen  $x_1$  und  $x_2$  (siehe Abbildung 3.3 auf der nächsten Seite). Die in diesem Abschnitt zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  enthaltene Fläche  $A|_{x_1}^{x_2}$  ist

$$A(t)|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} h(x,t) dx .$$

Die Fläche  $A|_{x_1}^{x_2}$  zum Zeitpunkt  $t_2$  ist die Fläche  $A|_{x_1}^{x_2}$  zu einem früheren Zeitpunkt  $t_1$  plus den im Zeitabschnitt  $\Delta t = t_2 - t_1$  durch die Stelle  $x_1$  zufließenden Volumenstrom pro Tiefeneinheit



**Abbildung 3.3:** Überlegung zur Herleitung der instationären Gleichung (siehe Text).

$\dot{Q}_1 \Big|_{t_1}^{t_2}$  weniger den durch die Stelle  $x_2$  abfließenden Volumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}_2 \Big|_{t_1}^{t_2}$ :

$$Q(t_2) \Big|_{x_1}^{x_2} = Q(t_1) \Big|_{x_1}^{x_2} + \dot{Q}_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \dot{Q}_2 \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Somit gilt

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} h(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}(x_2, t) dt. \quad (3.20)$$

Werden die Integrale folgendermaßen für kleine Abstände  $x_2 - x_1$  ausgewertet:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u) du = (u_2 - u_1) \cdot f(u_1) + O((u_2 - u_1)^2),$$

so läßt sich eq:1) umschreiben zu

$$\Delta x \cdot h(x_1, t_2) = \Delta x \cdot h(x_1, t_1) + O(\Delta x^2) + \Delta t \cdot \dot{Q}(x_1, t_2) - \Delta t \cdot \dot{Q}(x_1, t_1) + O(\Delta t^2)$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Durch nacheinanderfolgender Division durch  $\Delta t$  und  $\Delta x$  mit anschließendem Grenzübergang  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  erhält man die Erhaltungsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = 0} . \quad (3.21)$$

$h(x,t)$  hat die Bedeutung einer Erhaltungsgröße und  $\dot{Q}(x,t)$  die einer Flußvariablen.

Für die weitere Vorgehensweise ist es sinnvoll, die Gleichung (3.8) so umzuformen, daß  $\dot{Q}(x,t)$  als Funktion von  $h(x,t)$ ,  $\text{Bo}_{\text{red}} \cdot h'''(x,t)$ ,  $\text{Eu} \cdot p'_j(x,t)$  und  $\tau_j(x,t)$  geschrieben werden kann:

$$\dot{Q} = h + \tau_j \frac{h^2}{2} - \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \frac{h^3}{3} .$$

Daraus läßt sich die in (3.21) vorkommende Größe  $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}$  berechnen:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}} \frac{\partial \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \frac{\partial p_j}{\partial x}} \frac{\partial \frac{\partial p_j}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \tau_j} \frac{\partial \tau_j}{\partial x} .$$

Mit folgenden darin vorkommenden Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial h} &= 1 + \tau_j h - \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) h^2 , \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}} &= \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{h^3}{3} , \\ \frac{\partial \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}}{\partial x} &= \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} , \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \frac{\partial p_j}{\partial x}} &= -\text{Eu} \cdot \frac{h^3}{3} , \\ \frac{\partial \frac{\partial p_j}{\partial x}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} , \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \tau_j} &= \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

kann die partielle  $x$ -Ableitung des Flusses  $\dot{Q}$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} &= \left[ 1 + \tau_j h - \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) h^2 \right] \frac{\partial h}{\partial x} - \\ &\quad - \left( \text{Eu} \cdot \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \tau_j}{\partial x} . \end{aligned}$$

Somit wird aus der Erhaltungsgleichung (3.21) endgültig die gesuchte Bestimmungsgleichung für  $h(x,t)$  in Form einer inhomogenen Wellengleichung.

$Fr \ll 1, \lambda \ll 1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} &= q, \\
 c &= c(h(x,t), Bo_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x,t), \frac{\partial p_j}{\partial x}(x,t), \tau_j(x,t)) \\
 &= 1 + \tau_j h - \left( 1 + Eu \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - Bo_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) h^2, \\
 q &= q(h(x,t), Bo_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}(x,t), \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}(x,t), \frac{\partial \tau_j}{\partial x}(x,t)) \\
 &= \left( Eu \cdot \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} - Bo_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) \frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial \tau_j}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$c$  entspricht dabei einer Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und  $q$  dem Quellterm.

### Wellengleichung ohne Oberflächenspannung $\sigma^*$

Zunächst soll analog zum stationären Fall (siehe Kapitel 3.3.1) der Einfluß der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ , bzw. der reduzierten Bond-Zahl  $Bo_{\text{red}}$ , vernachlässigt werden. Die Gleichung (3.22) vereinfacht sich zu einer kinematischen Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} &= q \\
 c &= 1 + \tau_j h - \left( 1 + Eu \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} \right) h^2 \\
 q &= \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} \frac{h^3}{3} - \frac{\partial \tau_j}{\partial x} \frac{h^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

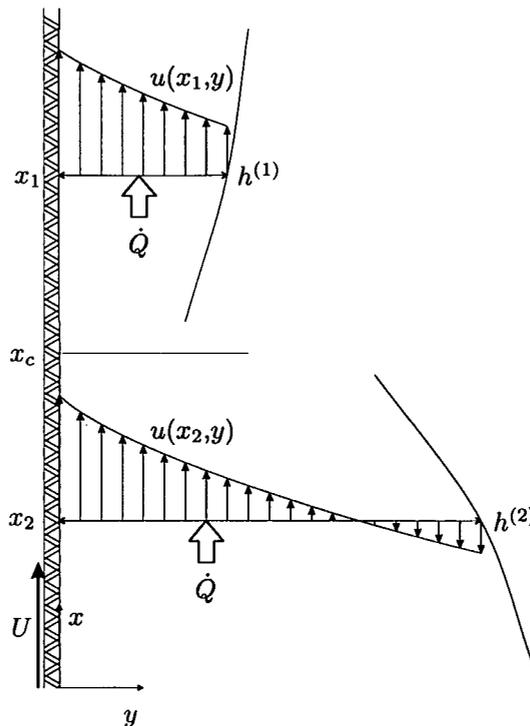
Eine Eigenschaft von kinematischen Wellengleichungen besteht darin, daß Unstetigkeiten in der Erhaltungsgröße auftreten können. Dieses Verhalten ist auch hier zu erwarten und wird sich in Sprüngen der Schichtdicke  $h$  manifestieren (siehe Kapitel 6).

### Einfluß der Oberflächenspannung $\sigma^*$

Die bei der Lösung ohne Oberflächenspannung  $\sigma^*$  auftretenden Sprünge besitzen eine unendliche örtliche dritte Ableitung von  $h$ . Somit kann der Ausdruck  $Bo_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$  nicht mehr vernachlässigt werden und es muß die gesamte Gleichung (3.22) gelöst werden. Für ein mögliches Lösungsverfahren sei hier auf das in Kapitel 4.4 beschriebene *operator splitting* verwiesen. Beispielhafte Lösungen finden sich im Kapitel 6.

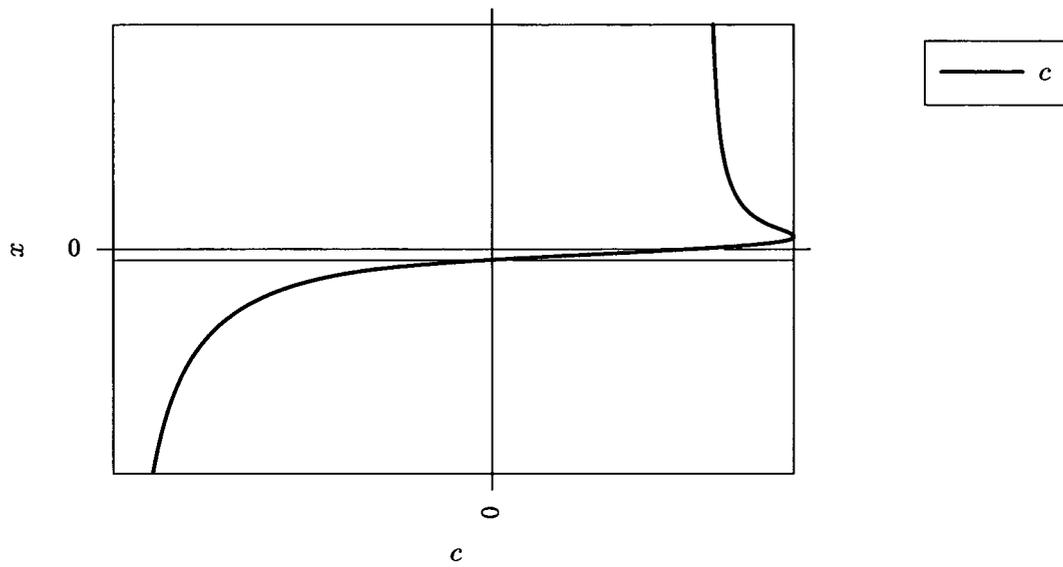
### 3.3.3 Lösungsäste

Wie bereits im Kapitel 3.3.1 erwähnt, existieren für jede Stelle  $x$  zwei physikalisch sinnvolle Lösungen,  $h^{(1)}(x)$  und  $h^{(2)}(x)$ . Diese Tatsache läßt sich anschaulich anhand der Abbildung 3.4 erklären: Im Bereich oberhalb der kritischen Stelle  $x_c$  – d.h. dort, wo die gesuchte Lösung, diejenige mit der geringeren Schichtdicke  $h$  ist – bewegt sich das gesamte Beschichtungsmaterial mit dem Substrat nach oben. Unterhalb von  $x_c$  kommt es zu einem teilweisen Rückströmen des Material. In beiden Fällen ist jedoch der durch einen Querschnitt fließende Nettovolumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$  (siehe Gleichung (3.6e)) der gleiche!



**Abbildung 3.4:** Strömungsverhältnisse in zwei Querschnitten der beiden Lösungsäste  $h^{(1)}(x_1)$  und  $h^{(2)}(x_2)$  mit  $x_1 > x_c$  und  $x_2 < x_c$ . Dargestellt ist das sich einstellende Geschwindigkeitsprofil  $u(x, y)$ .

Im instationären Fall gibt das Vorzeichen der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  an, ob die Störung nach oben ( $c > 0$ ) oder nach unten, d.h. zurück ins Bad ( $c < 0$ ) läuft. Nimmt  $c$  an einer Stelle  $x$  den Wert 0 an, so kann durch diesen Querschnitt keine Störung hindurchlaufen. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Problem tritt dieser Fall im kritischen Punkt  $x_c$  ein, wie leicht durch Vergleich der Geschwindigkeit  $c$  aus Gleichung (3.23) mit dem Zähler von Gleichung (3.10), der 0 werden muß, überprüft werden kann. Aus der Abbildung 3.5 auf der nächsten Seite ist ersichtlich, daß  $c$  unterhalb des kritischen Punktes  $x_c$  negative Werte annimmt – die Störung läuft somit in das Bad zurück. Oberhalb von  $x_c$  ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit jedoch positiv, d.h. daß dort auftretende Störungen nach oben laufen werden. Im weiteren Verlauf werden sie erstarren und sich als unerwünschte Unregelmäßigkeiten in der Oberfläche niederschlagen.



**Abbildung 3.5:** Typischer Verlauf der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Die rote Linie markiert den kritischen Punkt  $x_c$ . Unterhalb von  $x_c$  ist  $c$  negativ und oberhalb von  $x_c$  nimmt  $c$  positive Werte an.

# 4 Numerische Berechnung der Lösungen

Im vorherigen Kapitel 3 wurden allgemeine Vereinfachungen getroffen und begründet. Dort wurden auch Lösungswege aufgezeigt, um das komplexe Problem behandelbar zu machen. Hier sollen Wege für die numerische Umsetzung diskutiert und eventuell dabei auftretende Schwierigkeiten besprochen werden. Dabei soll die im Kapitel 3 verwendete Struktur steigender Komplexität beibehalten werden.

## 4.1 Überblick

Zur Berechnung der Verteilung der Schichtdicke wurde das Softwarepaket `zink` entwickelt. Dieses Programm liest zuerst die Parameter aus der Konfigurationsdatei `zink.ini` ein, die Problem beschreiben (siehe Anhang E) und überprüft deren Plausibilität. In einem ersten Schritt werden die Referenzgrößen berechnet:

### 1. Referenzgrößen

#### a) Jet

- $p_s^*$ : Maximaler Druck
- $\tau_0^*$ : Referenzschubspannung
- $\alpha_{\text{imp}}$ : Faktor vor  $\tau_{\text{imp}}^*$
- $\alpha_{\text{wj}}$ : Faktor vor  $\tau_{\text{wj}}^*$

#### b) Beschichtung

- $X^*$ : Charakteristische Länge in  $x$ -Richtung
- $Y^*$ : Charakteristische Länge in  $y$ -Richtung
- $U^*$ : Referenzgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung
- $V^*$ : Referenzgeschwindigkeit in  $y$ -Richtung
- $\dot{Q}^*$ : Referenzvolumenstrom pro Tiefeneinheit
- $T^*$ : Zeitkonstante

Danach werden die folgenden dimensionslosen Kennzahlen berechnet und ausgegeben:

### 2. Dimensionslose Kennzahlen

#### a) Jet

- $Re_j$ : Reynolds-Zahl

## b) Beschichtung

- $\lambda$ : Schlankheitsparameter
- Fr: Froude-Zahl
- Eu: Euler-Zahl
- Re: Reynolds-Zahl
- $Bo_{red}$ : Reduzierte Bond-Zahl

In einem nächsten Rechenschritt wird die Schubspannungsverteilung und deren Parameter bestimmt:

## 3. Schubspannungsverteilungsfunktion

- $(x_s, \tau_j(x_s))$ : Schnittpunkt zwischen Kern- und Wandstrahlverteilung  $\tau_{imp}, \tau_{wj}$
- $\alpha_j, \beta_j$ : Parameter der Schubspannungsverteilung

Nun stehen alle Daten zur Verfügung, um die stationäre Lösung zu berechnen:

## 4. Stationäre Lösung

- $x_c$ : Kritischer Punkt
- $h_{0,c}$ : Schichtdicke im kritischen Punkt ohne Oberflächenspannung
- $\dot{Q}_0$ : Führender Term des Volumenstroms pro Tiefeneinheit
- $\dot{Q}_1$ : Term 1. Ordnung des Volumenstroms pro Tiefeneinheit

Danach wird – sofern in der Konfigurationsdatei angegeben – der zeitliche Verlauf der Schichtdickenverteilung berechnet und in einer Ausgabedatei zur weiteren Bearbeitung abgespeichert.

Parallel dazu werden in einem getrennten Fenster folgende Graphen ausgegeben:

## 5. Graphische Ausgabe

- Druck- und Schubspannungsverteilung  $Eu \cdot p'_j, \tau_j$  (mit  $\tau_{imp}, \tau_{wj}, (x_s, \tau_j(x_s))$ ) der Gleichungen (B.3), (B.10a)
- Die Bestimmungsgleichung (3.14) für  $x_c$  und deren Lösungen
- Verlauf der Schichtdicke  $h_0(x)$  und  $h_1(x)$  aus den Gleichungen (3.9) und (3.19)
- Die ersten drei Ableitungen des Schichtdickenverlaufs:  $h'_0(x), h''_0(x)$  und  $h'''_0(x)$
- Zeitlicher Verlauf  $h_0(x,t)$  der instationären Lösung (falls in der Konfigurationsdatei angegeben)

In diesem Graphikfenster ist es z.B. möglich zu zoomen, um ein Detail genauer betrachten zu können. Nach Erzeugung der graphischen Ausgabe ist es möglich, diese in drei verschiedenen Dateiformaten abzuspeichern.

## 4.2 Schubspannungsverteilung

Wie in Anhang B.2 dargelegt, existiert im Moment keine bekannte brauchbare, geschlossene analytische Formulierung für die Schubspannungsverteilung, die sowohl den Kern- als auch den Wandstrahlbereich einschließt. Deshalb wurde folgende Vorgangsweise gewählt: Die dimensionslosen Schubspannungsverteilungen  $\tau_{\text{imp}}$  und  $\tau_{\text{wj}}$  (lt. Gleichungen (B.12) oder (B.13) und (B.14)) werden geschnitten. Mit Hilfe des resultierenden Schnittpunkts  $(x_s, \tau_j(x_s))$  läßt sich zuerst der Faktor  $\beta_j$  durch eine Nullstellenbestimmung von (B.11c) und dann  $\alpha_j$  (Gleichung (B.11b)) der Schubspannungsverteilung  $\tau_j(x)$  (Gleichung B.10a) berechnen ( $\gamma_j = 1$  aus (B.11a)). Somit ist der gesamte Verlauf der Schubspannungsverteilung bekannt.

## 4.3 Stationäre Lösungen

### 4.3.1 Lösung ohne Oberflächenspannung

Nach Bestimmung der Faktoren für die Schubspannungsverteilung muß die Lage  $x_c$  des kritischen Punkts, der durch (3.14) gegeben ist, bestimmt werden. Aufgrund der zwei möglichen Vorzeichen vor der Diskriminante läuft dies auf zwei getrennt durchzuführende Nullstellenbestimmungen mit anschließender Plausibilitätsprüfung hinaus. Zur Berechnung wird die Brent-Dekker Methode [GDT<sup>+</sup>04] verwendet: Es wird der Schnittpunkt der quadratischen Interpolation durch drei Punkte mit der  $x$ -Achse berechnet. Liegt dieser Wert im aktuellen Intervall, so wird er als neuer Schätzwert für die Lösung genommen. Aufgrund des Vorzeichen des neuen Schätzwerts wird das Intervall dermaßen verkleinert, daß die Lösung innerhalb des neuen Intervalls zu liegen kommt. Liegt der Schnittpunkt außerhalb des Intervalls, schaltet der Gleichungslöser auf ein einfaches Bisektionsverfahren zurück. Damit läßt sich ein schneller, aber gleichzeitig robuster Algorithmus realisieren. Beim ersten Iterationsschritt stehen nur die beiden Randpunkte zur Verfügung. Deshalb wird die Gerade durch die Funktionswerte der Ränder mit der  $x$ -Achse geschnitten. Der Funktionswert an dieser Stelle ergibt den fehlenden dritten Stützpunkt.

Die beiden Lösungen für  $x_c$  (für je ein Vorzeichen der Diskriminante) werden wie folgt einer Plausibilitätsprüfung unterzogen:

1.  $h_0(x_c)$  muß eine reelle Zahl sein,
2.  $h_0(x_c)$  muß positiv sein,
3.  $\dot{Q}_0(x_c, h_c)$  muß eine reelle Zahl sein,
4.  $\dot{Q}_0(x_c, h_c)$  muß positiv sein,
5.  $\dot{Q}_0(x_c, h_c)$  muß ein Minimum in  $x_c$  aufweisen, d.h.  $\ddot{Q}_0''(x_c, h_c)$  muß positiv sein.

Sollte sich dabei herausstellen, daß beide Lösungen diese Bedingungen erfüllen, so bricht das Programm mit einer Fehlermeldung ab.

Mit Hilfe des gefundenen  $x_c$  läßt sich  $h_c$  und  $\dot{Q}$  aus den Gleichungen (3.13) und (3.9) berechnen.

### Berechnung der Schichtdicke $h(x)$

Mit den gefundenen Werten  $x_c$ ,  $h_c$  und  $\dot{Q}$  läßt sich die Verteilung  $h(x)$  der Schichtdicke durch Lösung der kubischen Gleichung (3.9) berechnen. Für jeden Wert  $x$  muß dabei aus den drei möglichen Lösungen für die Schichtdicke  $h$  die richtige bestimmt werden (siehe Abbildung 3.1 auf Seite 16). Dies geschieht mit Hilfe des folgenden Algorithmus:

1. Gibt es eine dreifache Lösung, so ist diese  $h(x)$ .
2. Bei drei unterschiedlichen Lösungen ist diejenige mit negativem Wert physikalisch unsinnig. Für die übriggebliebenen zwei Lösungen gilt: Für  $x < x_c$  stellt der größere Wert  $h(x)$  dar, für  $x > x_c$  der kleinere.

### Möglicherweise auftretende Probleme

Bei diesem Lösungsweg können folgende Probleme auftreten:

1. In der Gleichung (3.14) tritt eine Singularität auf, wenn  $1 + Eu \cdot p' = 0$  wird. Diese läßt sich leicht umgehen, indem die mit  $1 + Eu \cdot p'$  erweiterte Gleichung gelöst wird:

$$0 = 3 \left( 1 + Eu \cdot p'_j(x_c) \right) \tau'_j(x_c) - Eu \cdot p''_j(x_c) \left[ \tau_j(x_c) \pm \sqrt{\tau_j^2(x_c) + 4 \left( 1 + Eu \cdot p'_j(x_c) \right)} \right].$$

2. Falls die Diskriminante in Gleichung (3.14) negativ wird, so existiert keine reelle Lösung. Deshalb muß dieser Bereich beim Auffinden der Nullstellen ausgeklammert werden.
3. In der Umgebung von  $x = 0$  treten numerische Ungenauigkeiten, z.B. Unstetigkeiten, auf.
  - a) Beim Berechnen der Nullstelle von (3.14) wird ein kleiner Bereich  $\pm \varepsilon$  um  $x = 0$  ausgeschlossen.
  - b) Liegt das Argument einer Funktion (z.B.  $\tau_j$ ) im kleinen Bereich  $\pm \varepsilon$ , so wird der Funktionswert nicht direkt, sondern mittels einer Taylorreihenentwicklung um  $x = 0$ , berechnet<sup>1</sup>.

### 4.3.2 Lösung mit kleiner Oberflächenspannung

Der Einfluß erster Ordnung  $h_1(x)$  und  $\dot{Q}_1$  der Oberflächenspannung läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.18) und (3.19) berechnen. Dabei treten keine numerischen Schwierigkeiten auf.

<sup>1</sup>Für  $\varepsilon$  kann z.B.  $\sqrt{[\text{Solver control}]xtolerance\_abs}$  (siehe Anhang E.2) verwendet werden.

## 4.4 Instationäre Lösungen

Die Wellengleichung (3.22) kann mit dem Softwarepaket CLAWPACK [LeV97] gelöst werden. Dieser Gleichungslöser arbeitet nach dem bekannten Godunovverfahren. (Für eine genaue Beschreibung dieses Verfahrens sei auf die Literatur [LeV97] und [Tor97] verwiesen).

CLAWPACK arbeitet nach dem Prinzip des *operator splitting*. Dabei wird das Problem in vier nacheinander zu berechnende Teilschritte zerlegt:

1. Berechnen einer vorläufigen Schichtdicke  $h$  mit Hilfe des Quellterms  $q$  zum Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{4}$  und dem Zeitschritt  $\frac{\Delta t}{2}$ :

$$h^{(n+\frac{1}{2})} = h^{(n)} + q^{(n+\frac{1}{4})} \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

2. Lösen des Riemann-Problems zum Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{2}$ .
3. Lösen der Randbedingung zum Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{2}$ .
4. Berechnen der endgültigen Schichtdicke  $h$  mit Hilfe des Quellterms  $q$  zum Zeitpunkt  $t + \frac{3\Delta t}{4}$  und dem Zeitschritt  $\frac{\Delta t}{2}$ :

$$h^{(n+1)} = h^{(n+\frac{1}{2})} + q^{(n+\frac{3}{4})} \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

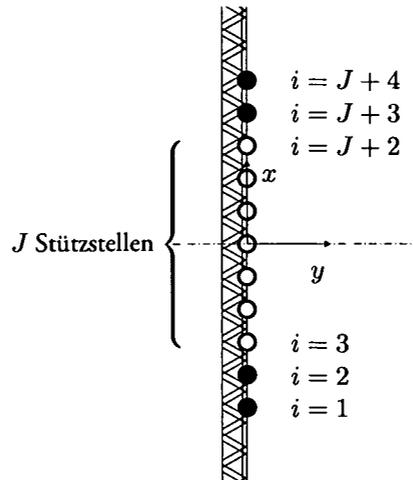
Hierbei bezeichnet das Superskript  $^{(n)}$  den diskreten Wert zum Zeitpunkt  $t + n\Delta t$ .

Somit müssen die Programmteile zur Lösung des Riemann-Problems, der Berechnung des Quellterms und der Randbedingungen (sofern nicht ein schon im Paket enthaltener Algorithmus verwendet wird) als externen Routinen programmiert werden.

Für diese Arbeit wurde das in FORTRAN 77 programmierte CLAWPACK in die Programmiersprache C umgeschrieben, da der originale Code zu wenig Flexibilität in der Übergabe der Programmparameter aufweist.

### 4.4.1 Diskretisierung

Das Rechengebiet wird in  $J + 4$  Stützstellen zerlegt. Dabei läuft das eigentliche Rechengebiet von  $i = 3$  bis  $i = J + 2$ . Die beiden Zellen links und rechts sind sogenannte Geisterzellen, die für die Erfüllung der Randbedingungen benötigt werden (siehe Abschnitt 4.4.3). Die Zellen werden mit Index  $(i)$  bezeichnet (siehe Abbildung 4.1 auf der nächsten Seite).



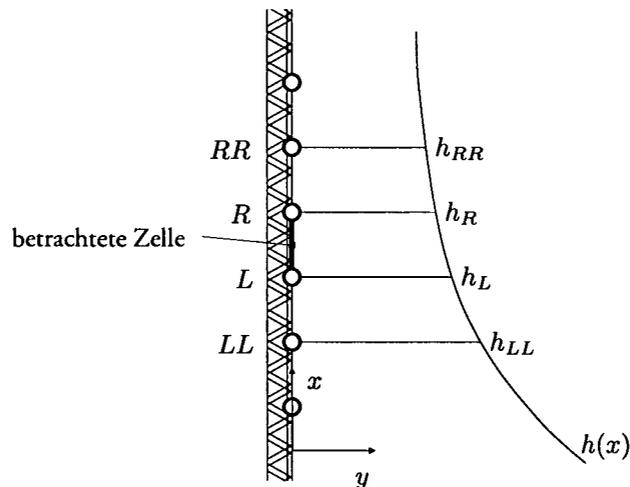
**Abbildung 4.1:** Diskretisierung des Rechengebiets in  $J$  Stützstellen. Die mit  $\circ$  gekennzeichneten Zellen stellen das eigentliche Rechengebiet dar, die  $\bullet$ -Zellen die sogenannten Geisterzellen, um die Randbedingungen erfüllen zu können.

#### 4.4.2 Riemann-Problem

Zur Lösung des Riemann-Problems muß die Roe-„Matrix“  $a$  berechnet werden:

$$a = \frac{f(h_L) - f(h_R)}{h_L - h_R}. \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet die Funktion  $f(h)$  den bei der Schichtdicke  $h$  in das Element strömenden Fluß und  $h_L$  und  $h_R$  die Schichtdicke an der linken bzw. rechten Berandung der betrachteten Zelle (siehe Abbildung 4.2).



**Abbildung 4.2:** Bezeichnungen zur Berechnung der Roe-Matrix (4.1) zur Lösung des Riemannproblems.

Der Fluß  $f$  ergibt sich aus der Gleichung (3.22):

$$f(h) = \int_0^h c \, dy ,$$

$$f(h) = h + \tau_j \frac{h^2}{2} - \left( 1 + Eu \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \frac{h^3}{3} . \quad (4.2)$$

Da die Gleichung (4.1) bei konstanter Schichtdicke ( $h_L = h_R$ ) eine Singularität aufweist, erweist es sich als zweckmäßig, Gleichung (4.2) in (4.1) einzusetzen und durch  $h_L - h_R$  zu dividieren:

$$a = 1 + \tau_j \cdot \frac{h_L + h_R}{4} - \left( 1 + Eu \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \cdot \frac{h_L^2 + h_L h_R + h_R^2}{3} .$$

Dabei werden  $\frac{\partial p_j}{\partial x}$  und  $\tau_j$  entweder an der Stelle  $\frac{x_L + x_R}{2}$  ausgewertet oder es wird als gute Näherung das arithmetische Mittel der Werte an der linken und rechten Berandung genommen.

Für  $\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$  kann ebenso der Mittelwert gewählt werden. Mit unwesentlich mehr Rechenaufwand läßt sich die Genauigkeit mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \approx \frac{-h_{LL} + 3h_L - 3h_R + h_{RR}}{\Delta x^3}$$

auf  $O(\Delta x^2)$  erhöhen.  $h_{LL}$  und  $h_{RR}$  bezeichnen die Schichtdicken an der linken bzw. rechten Berandung der links bzw. rechts von der betrachtenden Zelle liegende Zelle (siehe Abbildung 4.2 auf der vorherigen Seite).

#### 4.4.3 Randbedingung

Störungen, die sich vom Rechengebiet zum Rand bewegen, sollen dort ungehindert hinauslaufen können, ohne reflektiert zu werden. Für unseren Fall müssen wir folgende Gleichung erfüllen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x,t) = h_{\pm\infty}(t) ; \quad (4.3)$$

der Wert  $h_{\pm\infty}$  bezeichnet die Schichtdicke am linken und rechten Rand des Rechengebiets.

Dazu wird das Rechengebiet auf beiden Seiten um zwei Elemente, den sogenannten Geisterzellen, erweitert (siehe Abbildung 4.1 auf der vorherigen Seite) und der Wert  $h$  am jeweiligen Rand in diese Elemente kopiert.

#### 4.4.4 Quellterm

Die im Quellterm  $q(x,t)$  der Wellengleichung (3.22) vorkommende vierte Ableitung  $\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}$  wird mit Hilfe folgender finiter Differenz mit der Genauigkeit  $O(\Delta x^2)$  angenähert:

$$\frac{d^4 h_{(i)}}{dx^4} = \frac{h_{(i-2)} - 4h_{(i-1)} + 6h_{(i)} - 4h_{(i+1)} + h_{(i+2)}}{\Delta x^4} . \quad (4.4)$$

Bei der Berechnung des Quellterms lassen sich prinzipiell zwei Wege einschlagen: Verwendung eines

- expliziten Verfahrens  
oder eines
- impliziten Verfahrens

### Explizites Verfahren – Lösung ohne Oberflächenspannung $\sigma^*$

Vorteile des expliziten Verfahrens wäre eine kürzere Rechenzeit, jedoch wird es bei einem zu großem Verhältnis  $\text{Bo}_{\text{red}} \frac{\Delta t}{2\Delta x^4}$  instabil:

$$q_{(i)}^{(n+\frac{1}{2})} = \left[ \left( \text{Eu} \cdot \frac{\partial^2 p_{j(i)}^{(n)}}{\partial x^2} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^4 h_{(i)}^{(n)}}{\partial x^4} \right) \frac{(h_{(i)}^{(n)})^3}{3} - \frac{\partial \tau_{j(i)}^{(n)}}{\partial x} \frac{(h_{(i)}^{(n)})^2}{2} \right] \frac{\Delta t}{2}.$$

Im Falle verschwindender Oberflächenspannung  $\sigma^*$  (d.h.  $\text{Bo}_{\text{red}} = 0$ ) läßt sich dieses Verfahren jedoch ohne Einschränkung anwenden. Das Programmpaket `zink` schaltet in diesem Fall automatisch vom impliziten auf das schnellere explizite Verfahren um.

### Implizites Verfahren – Lösung mit kleiner Oberflächenspannung $\sigma^*$

Das implizite Verfahren bietet den Vorteil der uneingeschränkten Stabilität. Dazu wird folgendes Gleichungssystem gelöst:

$$q_{(i)}^{(n)} = \left[ \text{Eu} \cdot \frac{\partial^2 p_{j(i)}^{(n)}}{\partial x^2} \frac{(h_{(i)}^{(n)})^3}{3} - \text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^4 h_{(i)}^{(n+\frac{1}{2})}}{\partial x^4} \frac{(h_{(i)}^{(n)})^3}{3} - \frac{\partial \tau_{j(i)}^{(n)}}{\partial x} \frac{(h_{(i)}^{(n)})^2}{2} \right] \frac{\Delta t}{2}.$$

Auflösen dieser Gleichung nach  $h^{(n+\frac{1}{2})}$  mit der Gleichung (4.4) und Einsetzen der Randbedingung  $h = \text{const}$  liefert ein diagonaldominiertes Gleichungssystem mit besetzten Haupt- und je 2



# 5 Stationäre Strömungszustände

Im diesem Kapitel sollen beispielhafte stationäre Lösungen diskutiert werden. Ausgehend von einem Referenzfall sollen die Einflüsse der Druck- und Schubspannungsverteilung auf die Schichtdicke, aber auch die Bedeutung des Düsenabstands und der Oberflächenspannung aufgezeigt werden.

Dazu sollen folgende in Tabelle 5.1 aufgelisteten Fälle berechnet und diskutiert werden:

	$p_j(x)$	$\tau_j(x)$	$\sigma^*$	$H_j^*$	$U^*$	Legende	Abbildung	
<b>1.</b>	×	×		=	=	$h(p,\tau)$	5.4	
<b>2.</b>	×	×	×	=	=	$h(p,\tau,\sigma)$	5.2	← Referenzszenario
<b>3.</b>	×			=	=	$h(p)$	(5.2)	
<b>4.</b>	×		×	=	=	$h(p,\sigma)$	5.2	
<b>5.</b>		×		=	=	$h(\tau)$	(5.2)	
<b>6.</b>		×	×	=	=	$h(\tau,\sigma)$	5.2	
<b>7.</b>	×	×	×	$\searrow$	=	$\underline{h}(p,\tau,\sigma)$	5.5	
<b>8.</b>	×	×	×	$\nearrow$	=	$\bar{h}(p,\tau,\sigma)$	5.5	
<b>9.</b>	×	×	×	=	$\searrow$	$\underline{\underline{h}}(p,\tau,\sigma)$	5.6	
<b>10.</b>	×	×	×	=	$\nearrow$	$\bar{\bar{h}}(p,\tau,\sigma)$	5.6	

**Tabelle 5.1:** In diesem Kapitel betrachteten Szenarien.

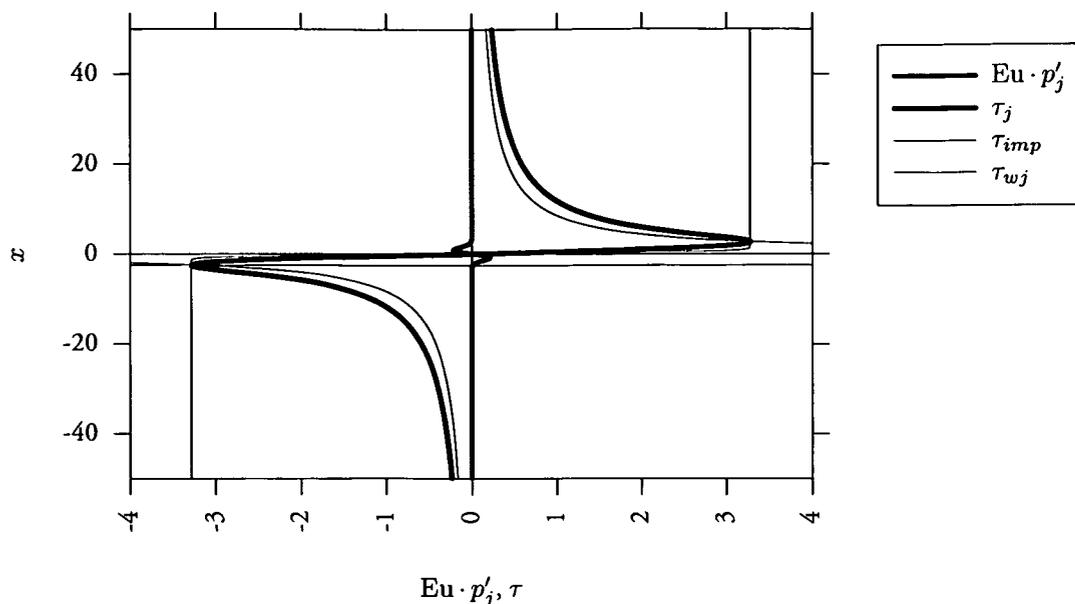
Bedeutung der Zeichen: × – der entsprechende Einfluß wird berücksichtigt;  $\nearrow$  und  $\searrow$  –  $H_j^*$  ist größer bzw. kleiner als im Referenzfall; = –  $H_j^*$  ist wie im Referenzfall.

## 5.1 Referenzszenario

Für das Referenzszenario wurde ein repräsentativer Betriebspunkt gewählt, in dem auch industrielle Anlagen arbeiten. Die dazugehörigen Einstellungen sind in der Tabelle D.2 aufgelistet.

## 5.2 Lösung des Referenzszenario

Aus den Einstellungen für den Referenzfall lassen sich die dimensionslose Kennzahlen, Referenzgrößen, die sich einstellende Druck- und Schubspannungsverteilung und schließlich der kritische Punkt und die beiden ersten Terme des Volumenstroms pro Tiefeneinheit berechnen. Die numerischen Ergebnisse der Lösungen für dieses Referenzszenarios sind in der Tabelle D.8 aufgelistet.



**Abbildung 5.1:** Druck- und Schubspannungsverteilung für das Referenzszenario. (Für die Bedeutung von  $\tau_{imp}$  und  $\tau_{wj}$  siehe Anhang A.2.3.)

Die Verläufe der sich bei dieser Geometrie einstellenden Druck- und Schubspannungsverteilungen sind aus der Abbildung 5.1 ersichtlich.

Aus dem in der Abbildung 5.2 auf der nächsten Seite dargestellten Schichtdickenverlauf  $h(p, \tau, \sigma)$  ist die erwünschte Reduktion der Beschichtung klar erkennbar. Vom Bad aus kommend verringert sich die Schichtdicke bis zu einem lokalen Minimum nach dem kritischen Punkt in der Nähe der Symmetrieachse, verursacht durch das Maximum in der Schubspannungsverteilung. Oberhalb dieser Stelle steigt die Schichtdicke in einem kleinen Bereich auf einen konstanten Wert an.

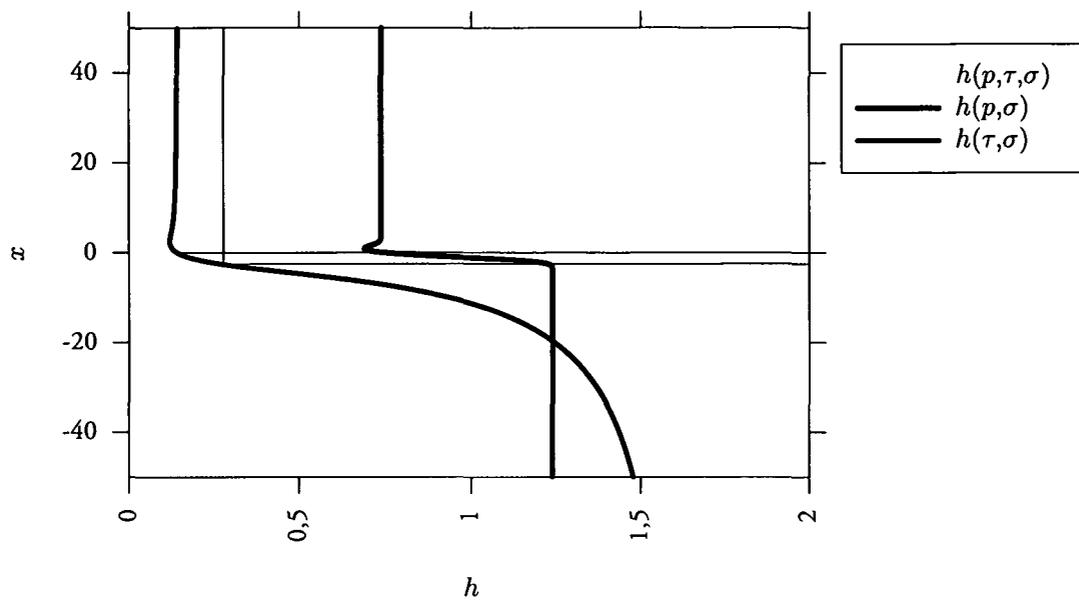
Der Vollständigkeit halber seien in der Abbildung 5.3 auf der nächsten Seite noch die ersten drei Ableitungen der Schichtdickenverteilung  $h(p, \tau, \sigma)$  dargestellt.

### 5.3 Einfluß der Druck- und Schubspannungsverteilung

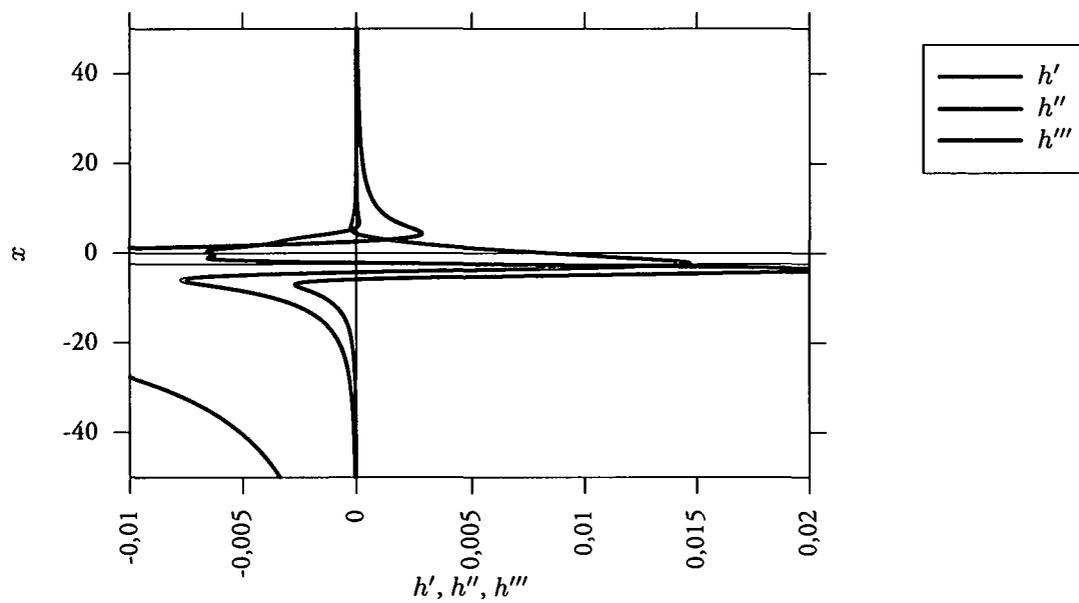
Die sich einstellenden Schichtdicken unter dem alleinigen Einfluß von entweder der Druck- oder der Schubspannungsverteilung sind in der Abbildung 5.2 auf der nächsten Seite dargestellt.

Klar erkennbar sind die Minima oberhalb des kritischen Punkts. Dieses liegt an der Stelle des Extremums der jeweiligen Verteilungsfunktion des Freistrahls.

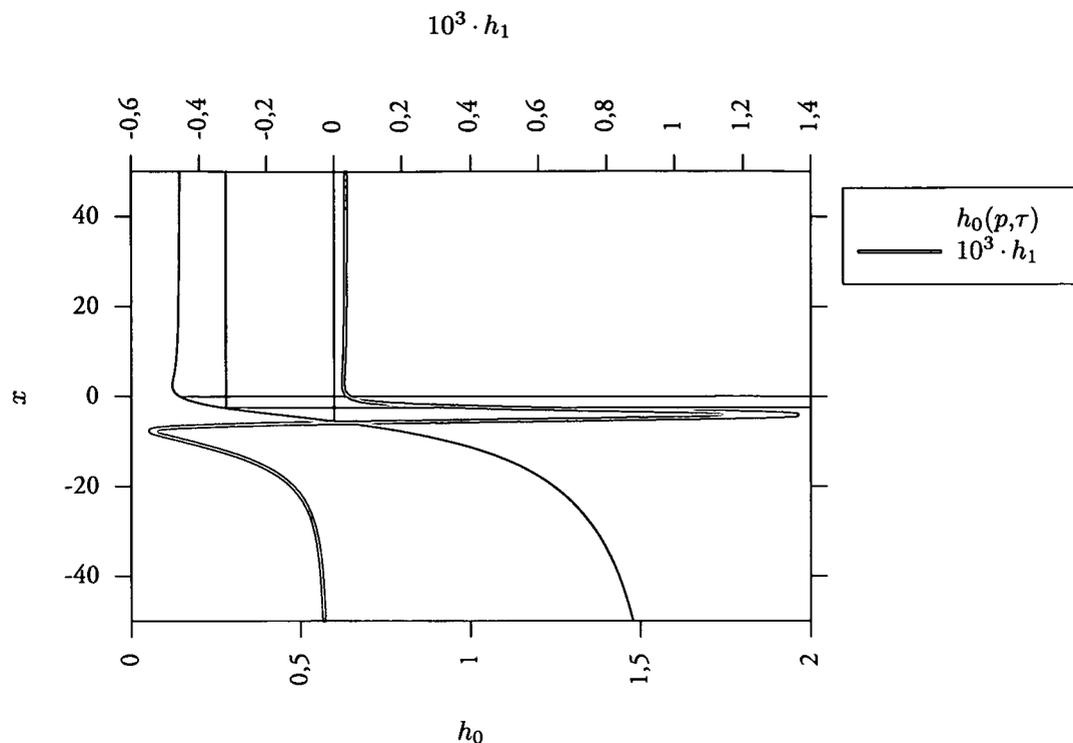
Es ist offensichtlich, daß vor allem die Schubspannungsverteilung  $\tau_j$  zur Reduktion der Schichtdicke beiträgt. Dies steht im scheinbaren Widerspruch zu den in der Literatur (z.B. [TG76]) erwähnten Ergebnissen, daß vor allem die Druckverteilung  $p_j$  zum Abblaseffekt beiträgt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß in unseren Berechnungen entsprechend den heute in der Industrie verwendeten



**Abbildung 5.2:** Einfluß der Druck- und Schubspannungsverteilung: Verteilung der Schichtdicke  $h$  für die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Fälle 2, 4 und 6. Rot eingezeichnet sind die kritischen Werte  $x_c$  und  $h_c$  für den Fall 2 (Referenzszenario).



**Abbildung 5.3:** Erste drei Ableitungen der Schichtdickenverteilung  $h$  für den Fall 2 (Referenzszenario) aus Tabelle 5.1.



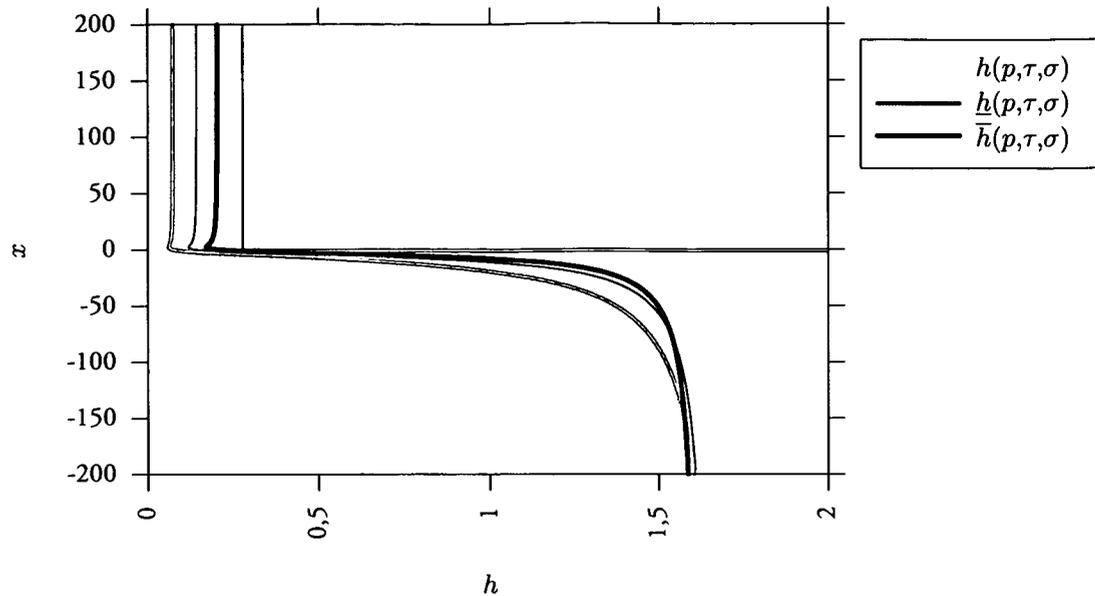
**Abbildung 5.4:** Einfluß der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  bzw.  $Bo_{\text{red}}$  für den Referenzszenario: Führender Term  $h_0$  und erste Ordnung  $h_1$  (siehe Gleichung (3.15)).

Einstellungen ein kleinerer Abstand der Düse zum Band verwendet wird und somit der Einfluß der Schubspannungverteilung überhand nimmt.

## 5.4 Einfluß der Oberflächenspannung

Der Einfluß der Oberflächenspannung des Beschichtungsmaterials auf die sich einstellende Schichtdicke ist in der Abbildung 5.4 dargestellt. Die Oberflächenspannung hat einen glättenden Einfluß auf die Schichtdickenverteilung. Aus der Abbildung ist auch ersichtlich, daß  $h_1$  maximal einen Wert von  $1,4 \cdot 10^{-3}$  erreicht. Somit hat der Faktor  $Bo_{\text{red}} \cdot h_1$  im Referenzszenario die Größenordnung von  $10^{-9}$  und die Annahme des vernachlässigbaren Einflusses der Oberflächenspannung ist für den stationären Zustand gerechtfertigt.

Erst wenn es zu starken lokalen Änderungen – oder sogar zu Unstetigkeiten, Stößen – im Schichtdickenverlauf kommt, kann die Oberflächenspannung nicht mehr vernachlässigt werden: In der instationären Gleichung (3.22) tritt die dritte und vierte Ableitung der Schichtdicke auf (siehe auch Abbildung 5.3 auf der vorherigen Seite). Diese Ableitungen höherer Ordnungen nehmen bei starken Gradienten große Werte an und werden somit eine wesentliche Rolle bei der Lösung der instationären Gleichung spielen (siehe auch folgendes Kapitel 6).



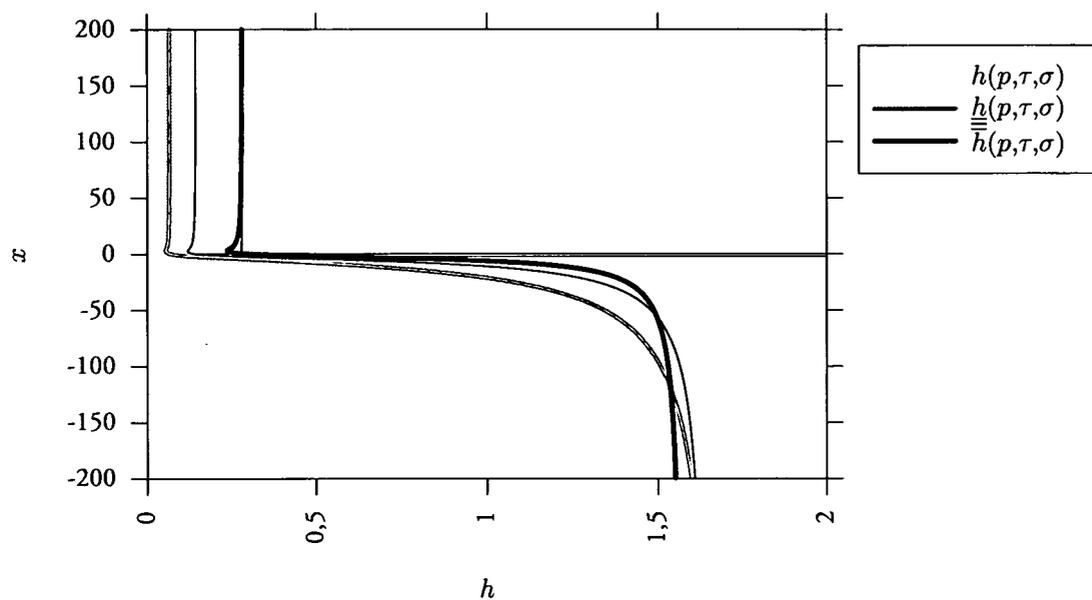
**Abbildung 5.5:** Einfluß des Düsenabstands  $H_j^*$ : Verteilung der Schichtdicke  $h$  für die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Fälle 2, 7 $\circ$  und 8 $\bullet$  mit den Düsenabständen aus Tabelle D.3.

## 5.5 Einfluß des Düsenabstands

Um den Einfluß des Düsenabstands auf die Schichtdickenverteilung zu untersuchen, soll der Düsenabstand  $H_j^*$  variiert werden (Fall 7 und 8 in Tabelle 5.1 auf Seite 33). Siehe Tabelle D.3 für die in den Berechnungen verwendeten Werte und Tabelle D.9 für die numerischen Ergebnisse. Dabei ist der Abblaseeffekt, wie zu erwarten war, zum Düsenabstand umgekehrt proportional: Wird der Düsenabstand vergrößert, so nimmt auch die Schichtdicke bandaufwärts zu (siehe Abbildung 5.5). Interessanterweise beschränkt sich dabei der Bereich, in dem es zur Schichtdickenreduktion kommt, auf ein schmäleres Gebiet als bei kleinerem  $H_j^*$ .

## 5.6 Einfluß der Bandgeschwindigkeit

Die Wirkung der Bandgeschwindigkeit  $U^*$  auf die sich einstellende Schichtdicke ist aus der Abbildung 5.6 auf der nächsten Seite ersichtlich (Fall 9 und 10 in Tabelle 5.1 auf Seite 33. Siehe Tabelle D.4 für die in den Berechnungen verwendeten Werte und Tabelle D.10 für die numerischen Ergebnisse): Es verringert sich die Abblaswirkung bei höherer Geschwindigkeit des Substrats. Dieser Effekt muß bei den modernen, schnellaufenden Anlagen durch geringere Düsenabstände und/oder verstärkter Austrittsgeschwindigkeit des Freistrahls kompensiert werden, wobei jedoch die Neigung zum *splashing* zunimmt.



**Abbildung 5.6:** Einfluß der Bandgeschwindigkeit  $U^*$ : Verteilung der Schichtdicke  $h$  für die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Fälle 2, 9 $\circ$  und 10 $\bullet$  mit den Bandgeschwindigkeiten aus Tabelle D.4.

## 6 Instationäre Strömungszustände

Im Kapitel 3.3.2 wurde bereits die Motivation dargelegt, warum es wichtig ist, nicht nur die stationären, sondern auch die instationären Strömungszustände zu betrachten. Hier sollen nun einige ausgewählte instationäre Fälle genauer untersucht werden:

- **Anfahrvorgang:**  
Bei einem Band, das mit einer Beschichtung konstanter Dicke nach oben läuft, wird die Freistrahldüse eingeschaltet. Nach diesem Zeitpunkt kommt es zum Abblasen des Beschichtungsmaterials.
- **Störung in der Oberfläche:**  
An einer beliebigen Stelle der Beschichtung soll instantan eine Erhöhung oder Vertiefung auftauchen. Das zeitliche Verhalten dieser Störung soll untersucht werden.
- **Periodische Schwingung des Bands:**  
Das Band, das zwischen der unteren und oberen Umlenkrolle frei läuft, kann ins Schwingen geraten. Hierbei soll das sich einstellende Wellenmuster diskutiert werden.

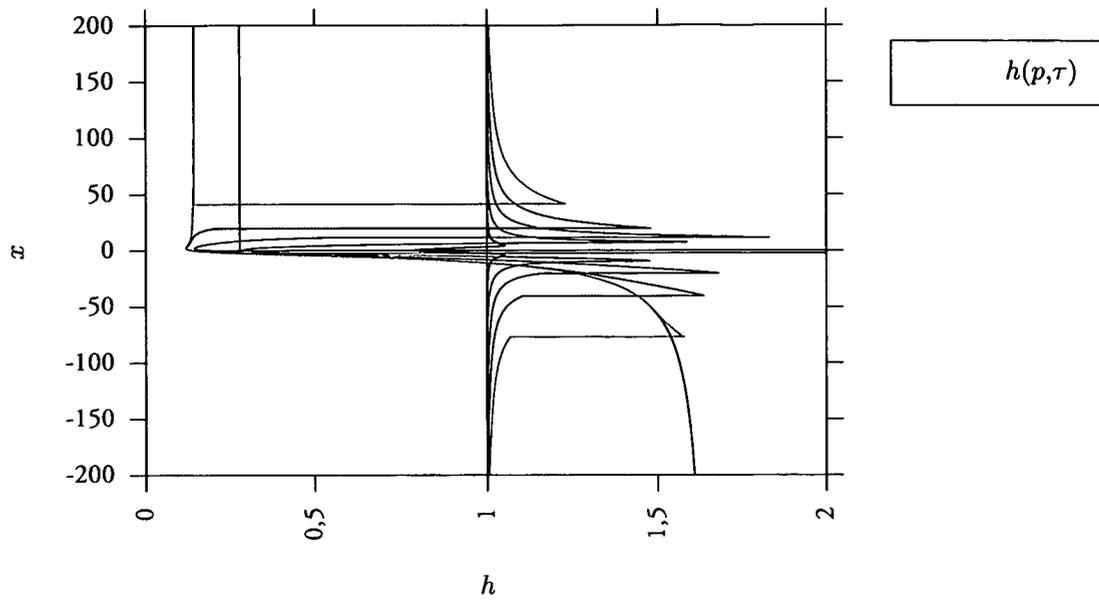
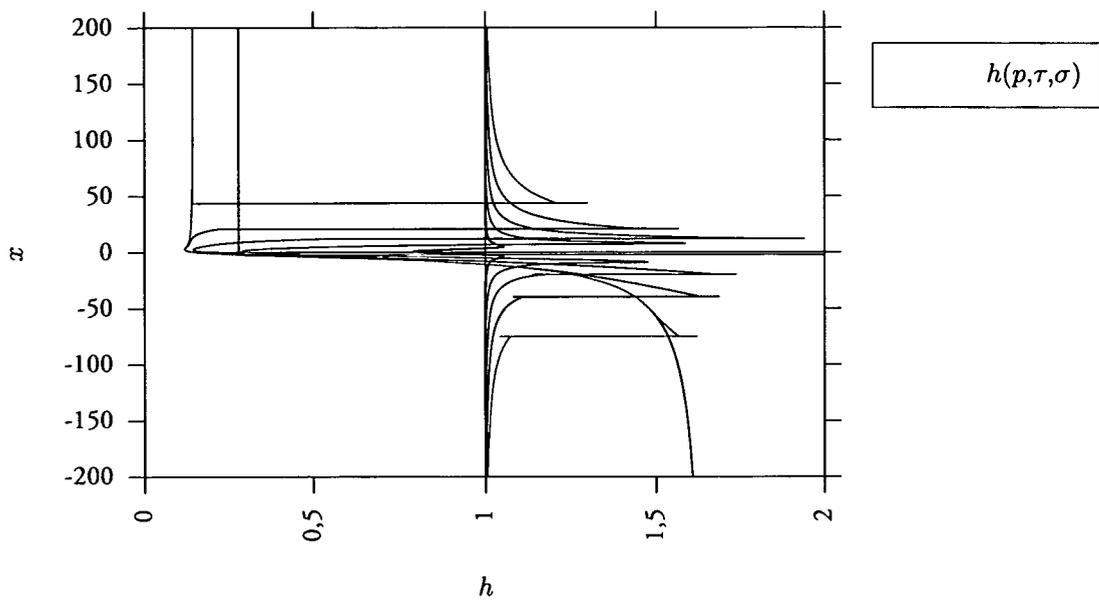
Jedes dieser drei Szenarien soll dabei mit – und teilweise auch ohne – Einfluß der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  betrachtet werden.

### 6.1 Anfahrvorgang

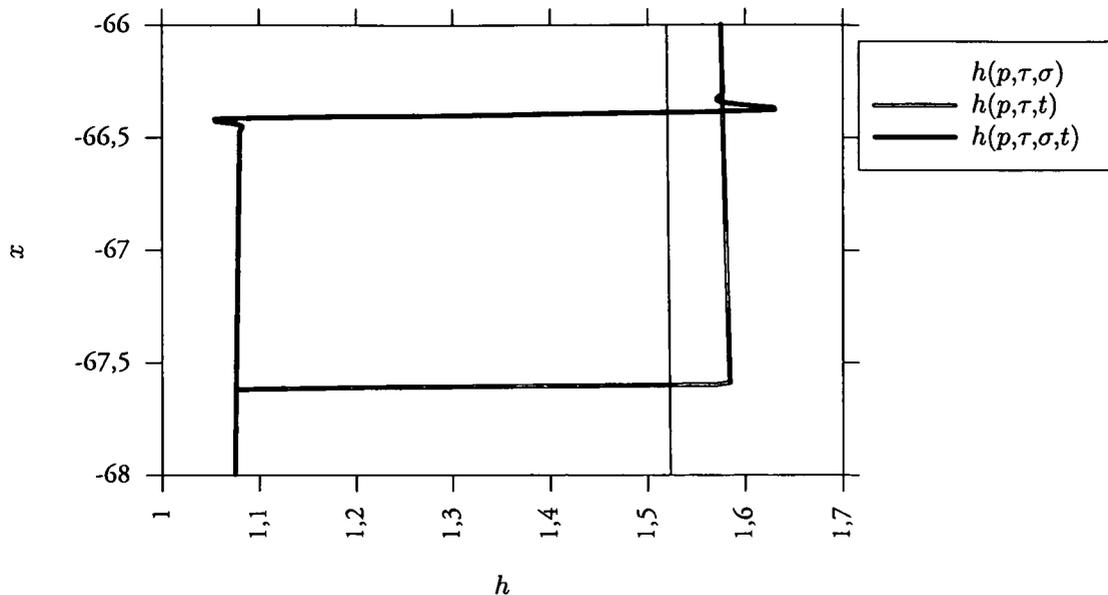
Das zu beschichtende Band trägt Material aus dem Bad aus, das eine Beschichtung konstanter Dicke bilden soll. Das Band läuft an der zunächst ausgeschalteten Abblasdüse vorbei, die zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  eingeschaltet wird. Danach kommt es zum Abblasen und zur erwünschten Verringerung der Schichtdicke.

Beim Einschalten des Freistrahls trifft dieser senkrecht auf die ungestörte Oberfläche und verursacht dort eine an den Rändern überhöhte Delle. Erreicht die Oberfläche unter dem Einfluß der Druck- und Schubspannungsverteilung den kritischen Wert  $h_c$ , so verzweigt sich die Lösung wie in Kapitel 3.3.3 dargelegt. Der bandaufwärts liegende Teil erfährt die gewünschte Schichtdickenreduzierung. Der Abblaseeffekt hat gegriffen (siehe Abbildung 6.1 auf der nächsten Seite und 6.2 auf Seite 41).

Ist die ursprüngliche Schichtdicke zu hoch oder der Abblaseeffekt der Düse zu gering, so kommt es nur zu einer lokalen Reduzierung der Beschichtung im Bereich des Freistrahls, aber zu keiner dauerhaften Schichtdickenreduzierung – die Schichtdicke erreicht wieder den ursprünglichen Wert. In

(a) Ohne Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .(b) Mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .

**Abbildung 6.1:** Anfahrvorgang ohne und mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .  
 ( $t = 0 \bullet; 0,210 \bullet; 2,131 \bullet; 7,106 \bullet; 19,983 \bullet; 53,325 \circ$ )



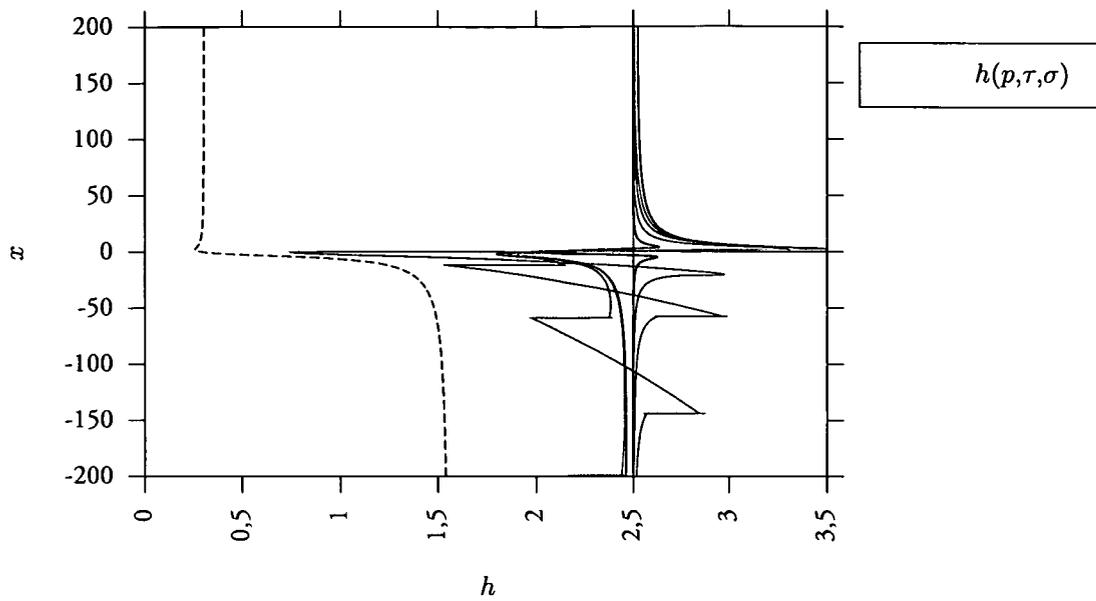
**Abbildung 6.2:** Detail zu den Anfahrvorgängen aus Abbildung 6.1. Das veränderte Verhalten von  $h(p, \tau, \sigma, t)$  an den Stellen mit großen Gradienten ist deutlich sichtbar: Hier wird die abrupte Änderung im Schichtdickenverlauf durch die Oberflächenspannung  $\sigma^*$  geglättet. ( $t = 53,325$ )

diesem Fall hat das Abblasen versagt (siehe Abbildung 6.3 auf der nächsten Seite). Um trotzdem den gewünschten Erfolg zu erlangen, müssen die Einstellungen geändert werden: zum Beispiel kann die Düse näher an das Band herangefahren oder der Düsendruck erhöht werden. Ist die ursprünglich ausgetragene Beschichtungsmenge zu gering, so kommt es im Bereich des Freistrahls ebenfalls zu einer Oberflächenverformung (siehe Abbildung 6.4). Dabei stellt sich wiederum nach der Abblasdüse die gleiche Schichtdicke wie davor ein, d.h. die endgültige Schichtdicke ist nur von der ursprünglich ausgetragenen Materialmenge abhängig und wird nicht durch den Freistrahle beeinflusst. (Die Parameter für beide Fälle finden sich in Tabelle D.5.)

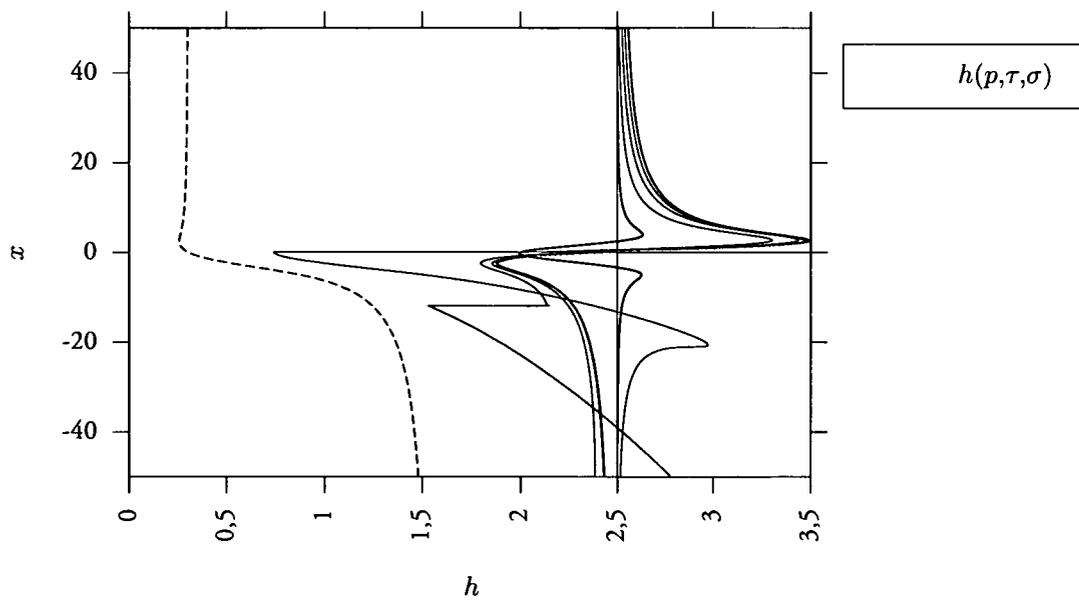
## 6.2 Oberflächenstörung

Tritt eine kleine Störung an der Oberfläche auf, so wird sich diese als Welle ausbreiten. Für den Fall, daß sie oberhalb der Abblasdüse lokalisiert ist, so wird sie erstarren und als Unregelmäßigkeit auf dem fertig beschichteten Produkt aufscheinen.

Für die folgenden Untersuchungen wurde eine elliptische Erhöhung oder Einbuchtung um  $x_h$  mit der Breite  $\Delta x_h$  und der maximalen Höhe  $\Delta h_h$  auf der sich im stationären Fall einstellenden Oberfläche aufgebracht (siehe Tabelle D.6). Befindet sich die Störung zur Gänze bandabwärts von  $x_c$ , so breitet sich die Störung nur nach unten aus und läuft in das Bad mit dem Beschichtungsmaterial (siehe Abbildung 6.5 auf Seite 44 bzw. Abbildung 6.6 auf Seite 45). Nach oben kann sich die Störung nicht ausbreiten, sodaß die Oberfläche oberhalb  $x_c$  davon unberührt bleibt.



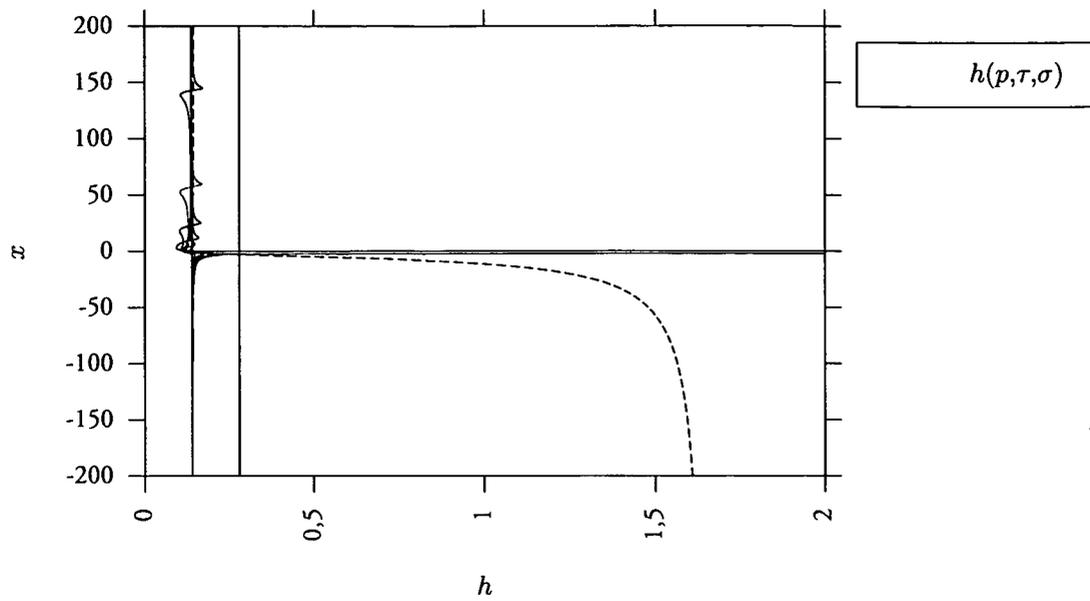
(a) Wellenbild.

(b) Detail der Umgebung des kritischen Punktes  $(x_c, h_c)$ .

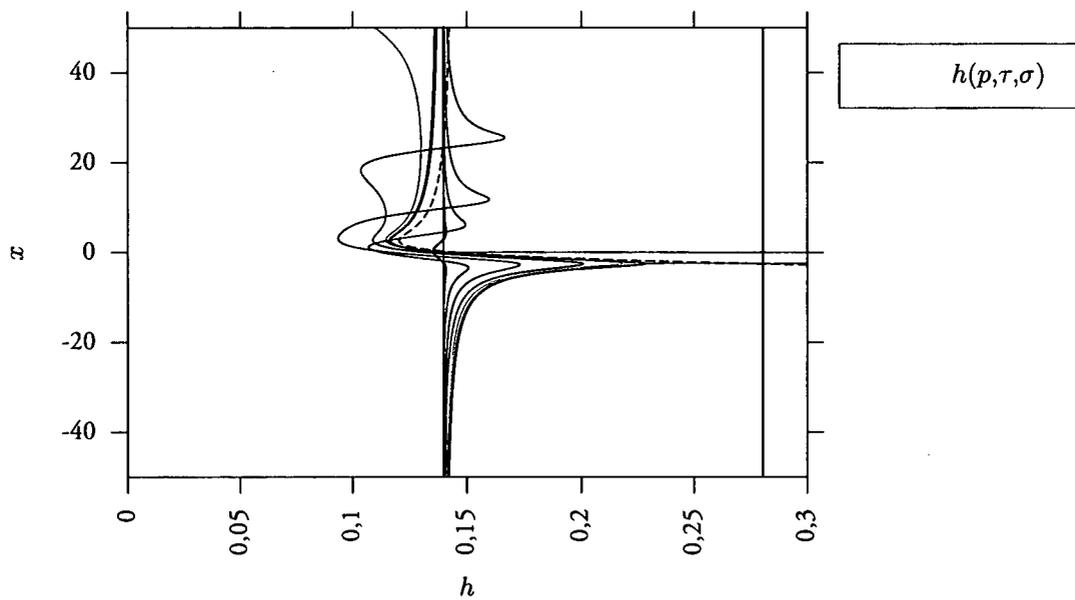
**Abbildung 6.3:** Versagen des Abblasen durch zu große Schichtdicke beim Einschalten des Freistrahls mit den Parametern aus Tabelle D.5.

Die strichlierte Linie stellt die stationäre Lösung für das Referenzszenario aus Kapitel 5.1 dar.

( $t = 0\bullet; 0,210\bullet; 2,131\bullet; 7,106\bullet; 19,983\bullet; 53,325\circ$ )



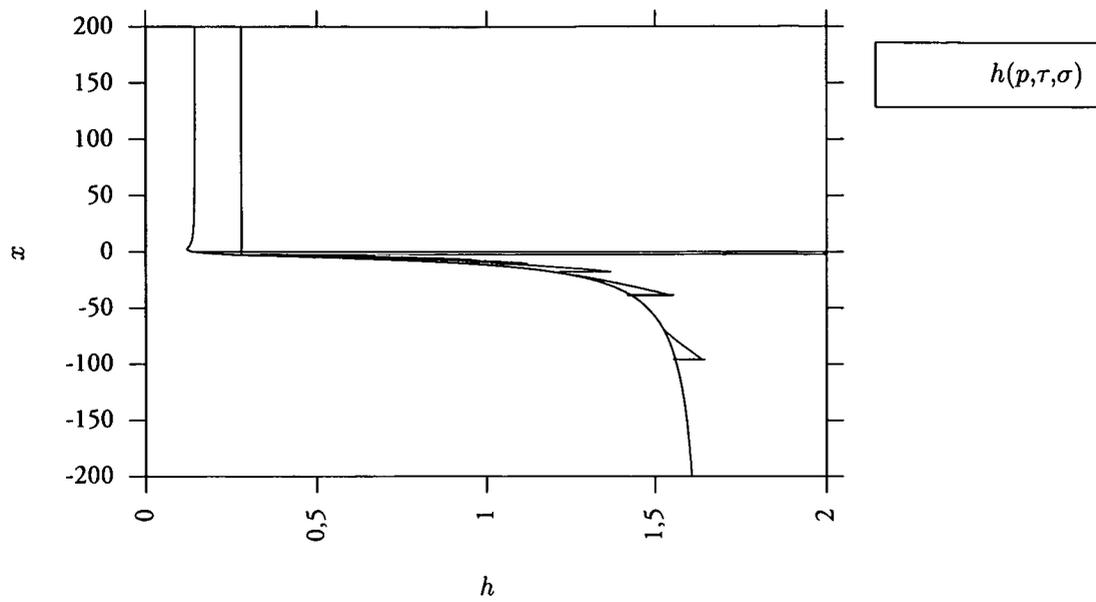
(a) Wellenbild.

(b) Detail der Umgebung des kritischen Punktes  $(x_c, h_c)$ .

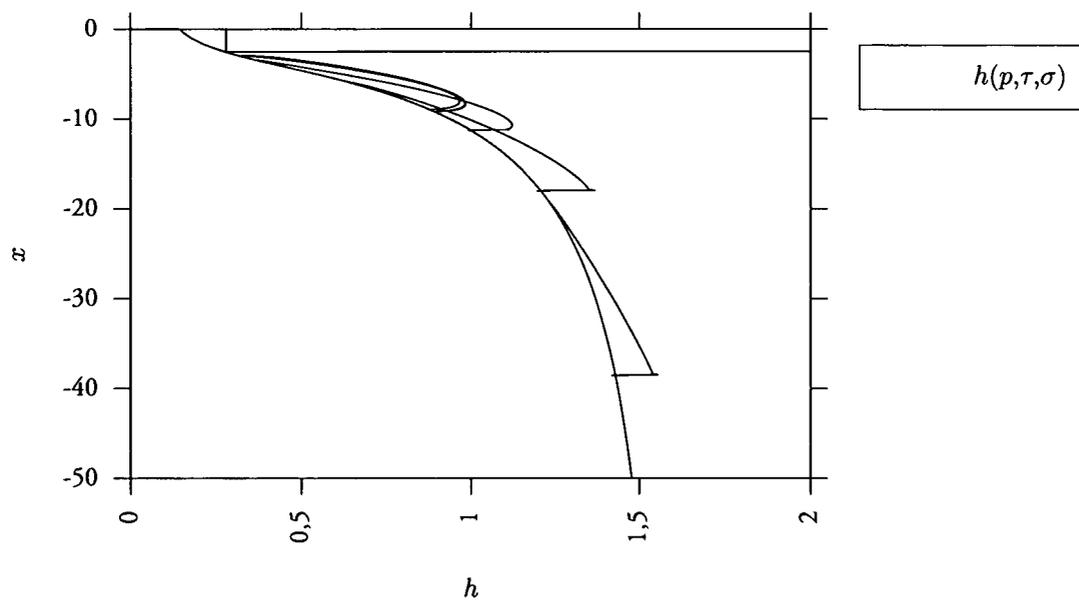
**Abbildung 6.4:** Versagen des Abblasen durch zu kleine Schichtdicke beim Einschalten des Freistrahls mit den Parametern aus Tabelle D.5.

Die strichlierte Linie stellt die stationäre Lösung für das Referenzszenario aus Kapitel 5.1 dar.

( $t = 0\bullet; 0,210\bullet; 2,131\bullet; 7,106\bullet; 19,983\bullet; 53,325\circ$ )

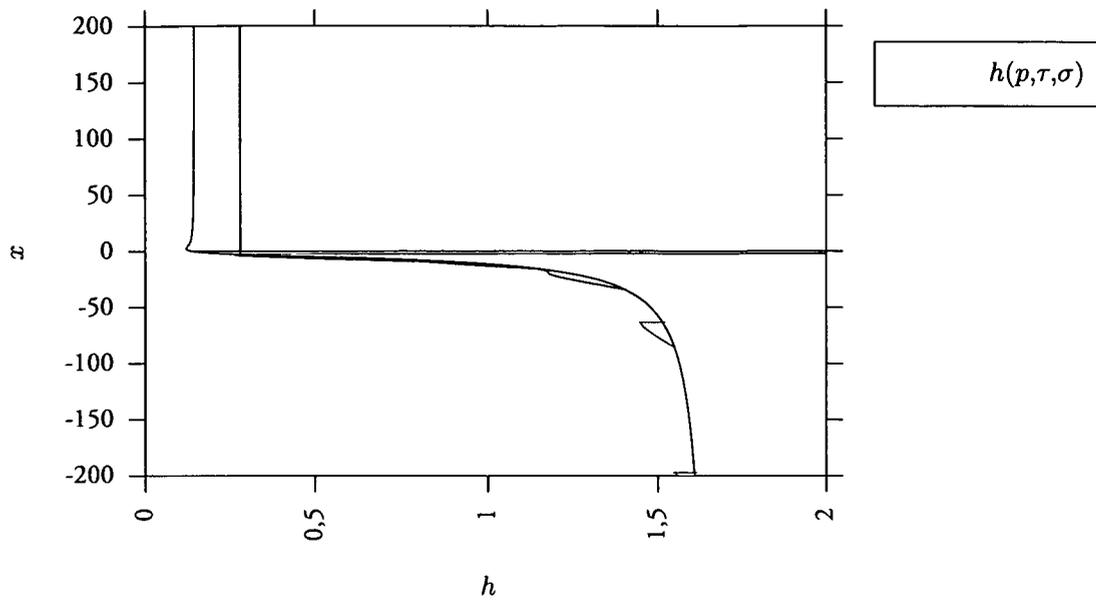


(a) Wellenbild.

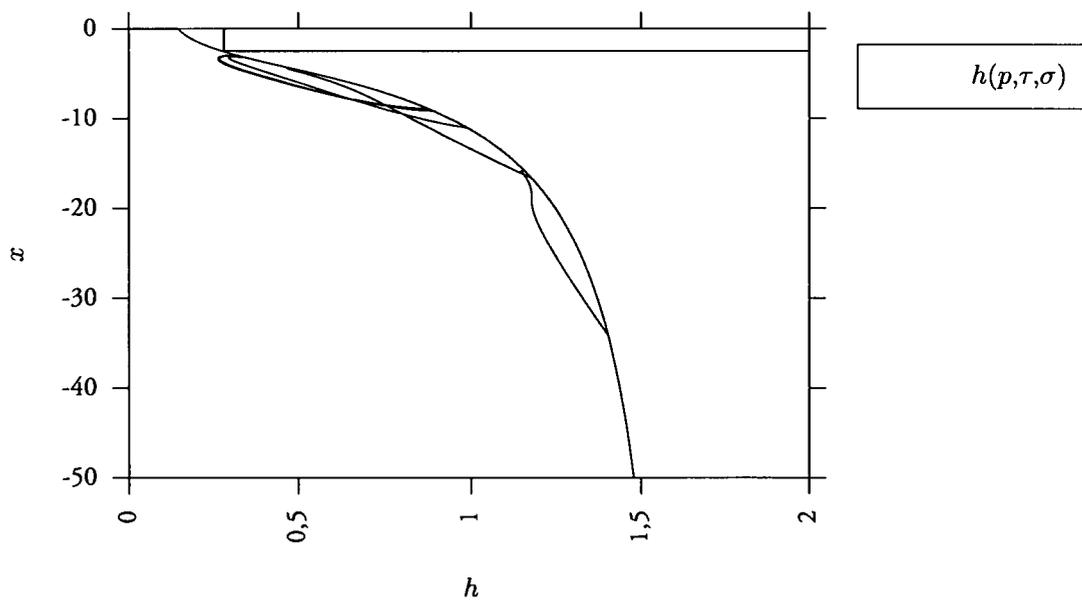


(b) Detail zum Wellenbild.

**Abbildung 6.5:** Wellenbild bei einer elliptische Erhöhung unterhalb des kritischen Punktes  $x_c$  mit den Parametern aus Tabelle D.6.  
 ( $t = 0 \bullet; 0,210 \bullet; 2,131 \bullet; 7,106 \bullet; 19,983 \bullet; 53,325 \circ$ )



(a) Wellenbild.



(b) Detail zum Wellenbild.

**Abbildung 6.6:** Wellenbild bei einer elliptische Einbuchtung unterhalb des kritischen Punktes  $x_c$  mit den Parametern aus Tabelle D.6.

( $t = 0\bullet; 0,210\bullet; 2,131\bullet; 7,106\bullet; 19,983\bullet; 53,325\circ$ )

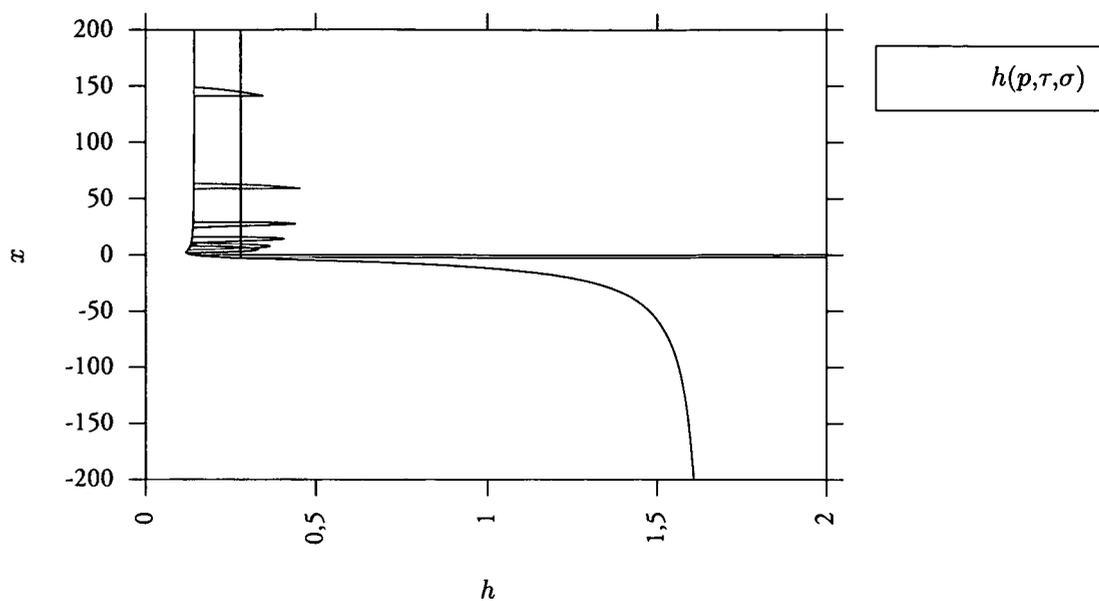
Kommt die Störung jedoch oberhalb der kritischen Stelle  $x_c$  zu liegen, so breitet sie sich nur in Bandlaufrichtung nach oben aus (siehe Abbildung 6.7 auf der nächsten Seite bzw. Abbildung 6.8 auf Seite 48) und manifestiert sich dort nach dem Erstarren als Oberflächenfehler.

## 6.3 Bandschwingung

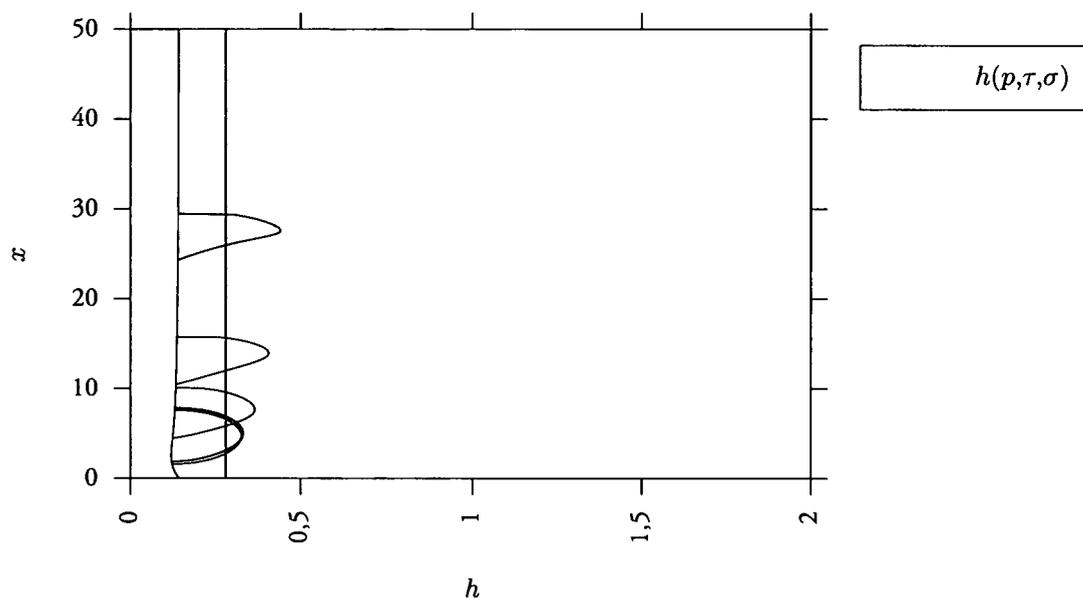
Bei den großen Einspannlängen zwischen der unteren und oberen Umlenkrolle kann das nach oben laufende Band zum Schwingen beginnen. Dabei verändert sich der Distanz zwischen Düse und Band periodisch und somit variiert auch die Druck- und Schubspannungsverteilung. Die dabei auftretenden Wellenmuster für eine sinusförmige Schwingung mit der Periode  $t_p$  und der Amplitude  $\Delta D_j$  sind für die Parameter aus Tabelle D.7 in der Abbildung 6.9 auf Seite 49 einmal ohne und einmal mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung dargestellt. Dabei ist deutlich zu erkennen, daß die Amplitude der nach oben laufenden Wellen erhalten bleibt. Beim Erstarren des Beschichtungsmaterials wird somit ein wellenförmiges Muster sichtbar werden. Um die geforderte hohe Oberflächengüte zu erreichen, muß das beschichtete Band deshalb durch aufwendige Nachbehandlungen, wie Aufschmelzen der Beschichtung oder Walzen, verbessert werden.

Wird das Rechengelände groß genug gewählt, so entstehen die schon früher (Abbildung 6.2 auf Seite 41) beobachteten Unstetigkeiten nicht nur unterhalb, sondern auch oberhalb des Freistrahls (siehe Abbildung 6.10 auf Seite 50).

Bei einigen mit dem in dieser Arbeit untersuchten Verfahren verzinkten Bandblechen zeigte sich auf der Oberfläche eine Art Wolken- oder auch ein Fischgrätmuster. Diese Oberflächenzeichnungen ließen sich durch die nie ganz vermeidbaren Bandschwingungen erklären. So kann z.B. ein Fischgrätmuster dadurch entstehen, daß das Band nicht nur transversal schwingt, sondern auch Torsionsschwingungen ausführt. Die dabei entstehenden Wellen laufen schräg zur Bandlaufrichtung und bilden beim Erstarren das beobachtete Fischgrätmuster.



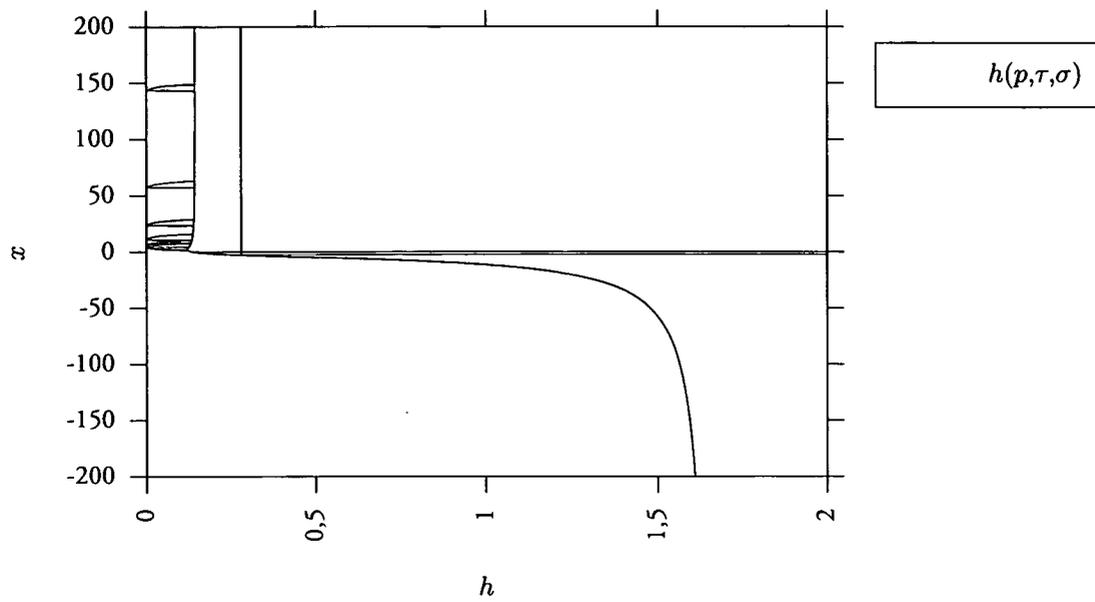
(a) Wellenbild.



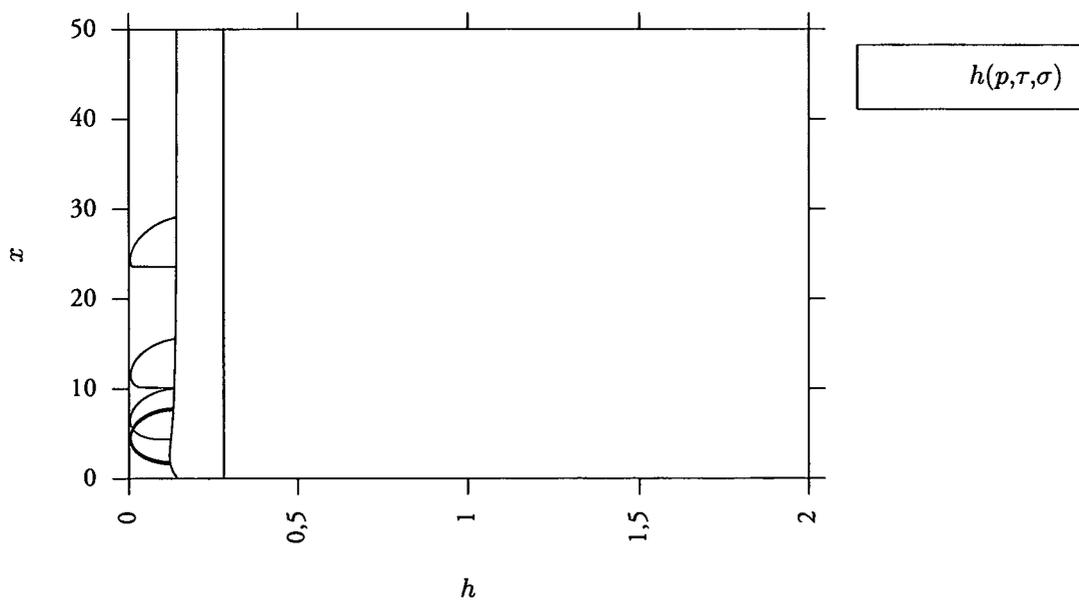
(b) Detail zum Wellenbild.

**Abbildung 6.7:** Wellenbild bei einer elliptische Erhöhung oberhalb des kritischen Punktes  $x_c$  mit den Parametern aus Tabelle D.6.

( $t = 0 \bullet; 0,210 \bullet; 2,131 \bullet; 7,106 \bullet; 19,983 \bullet; 53,325 \circ$ )

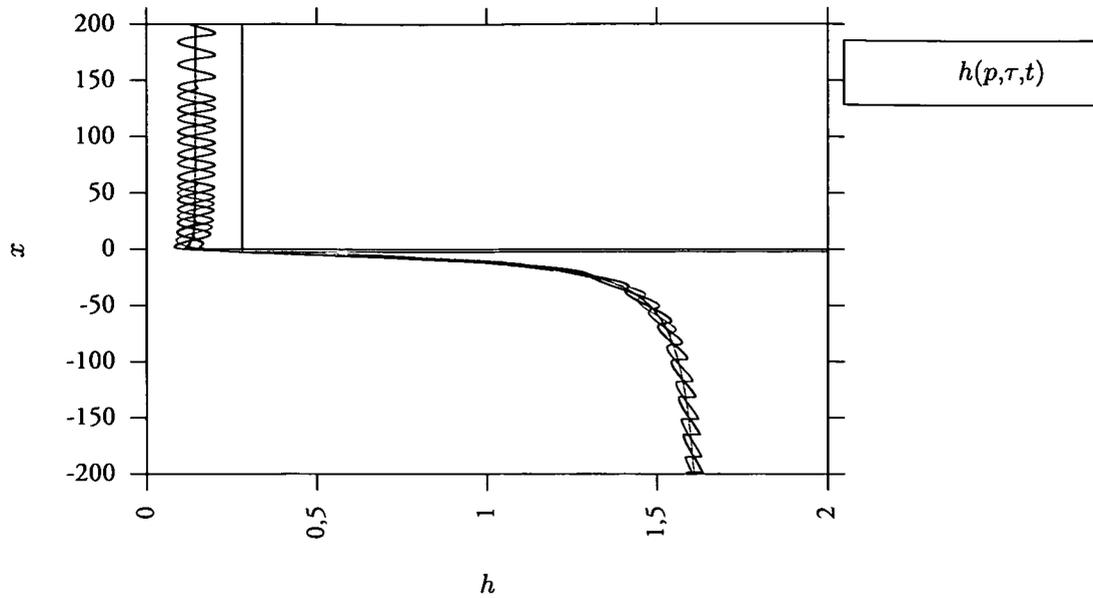
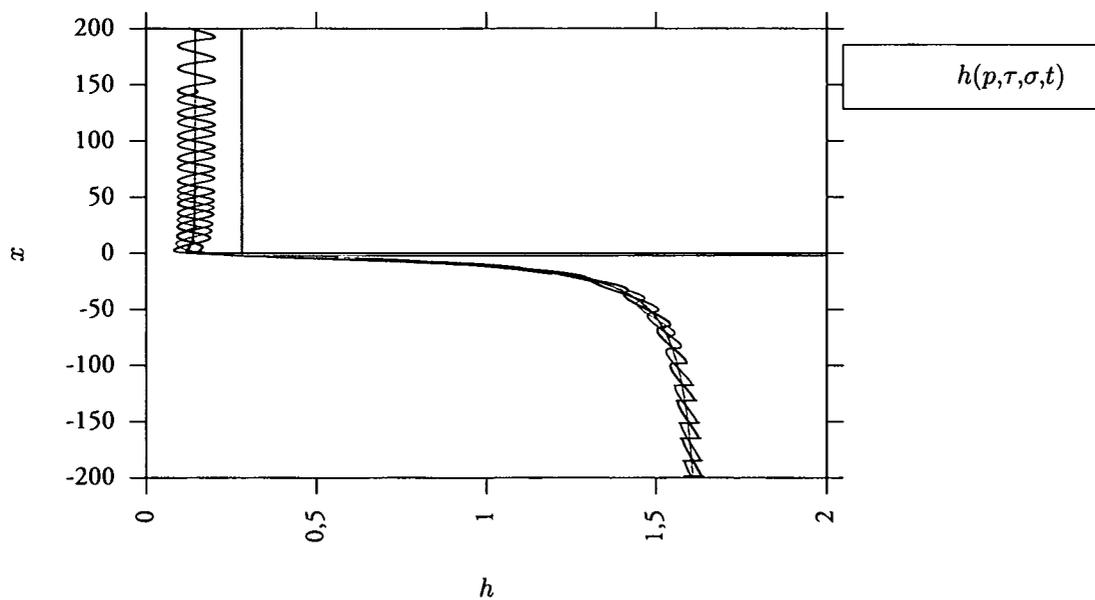


(a) Wellenbild.



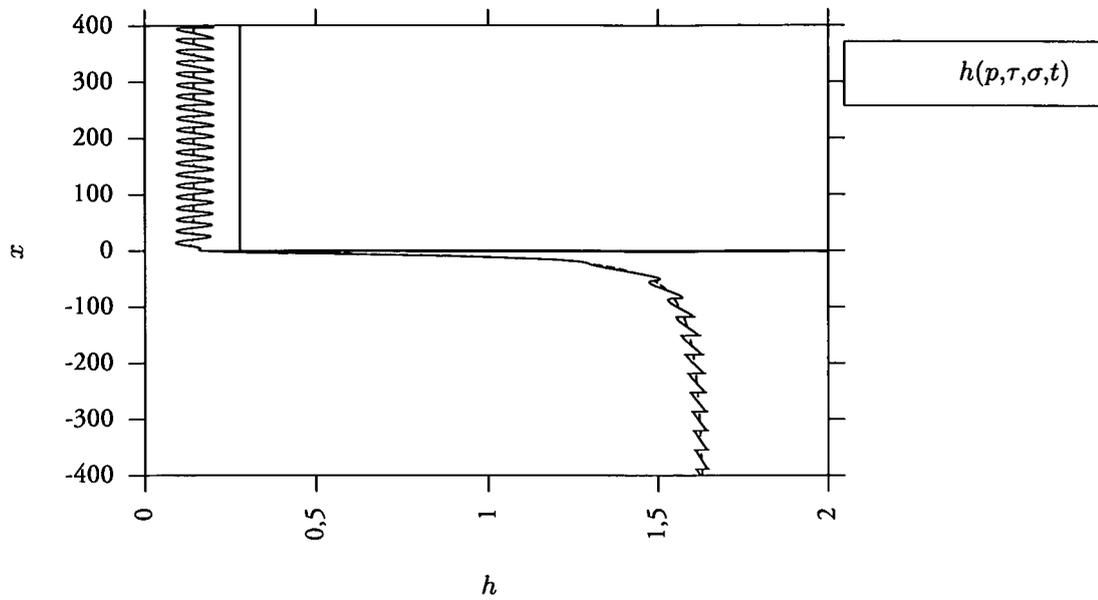
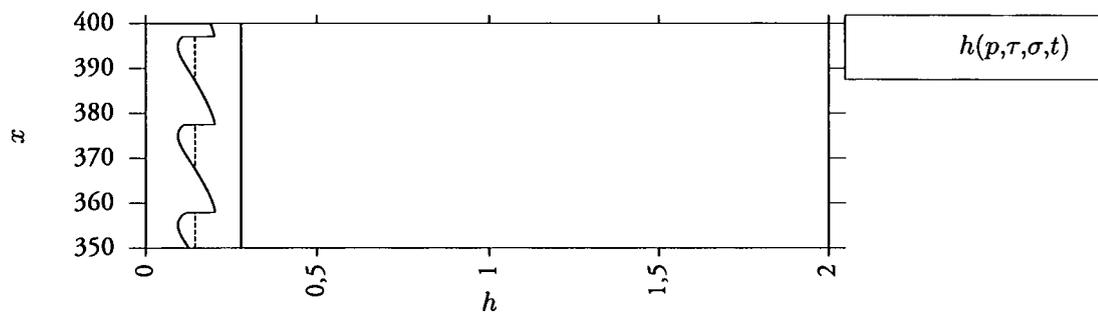
(b) Detail zum Wellenbild.

**Abbildung 6.8:** Wellenbild bei einer elliptische Einbuchtung oberhalb des kritischen Punktes  $x_c$  mit den Parametern aus Tabelle D.6.  
 ( $t = 0 \bullet; 0,210 \bullet; 2,131 \bullet; 7,106 \bullet; 19,983 \bullet; 53,325 \circ$ )

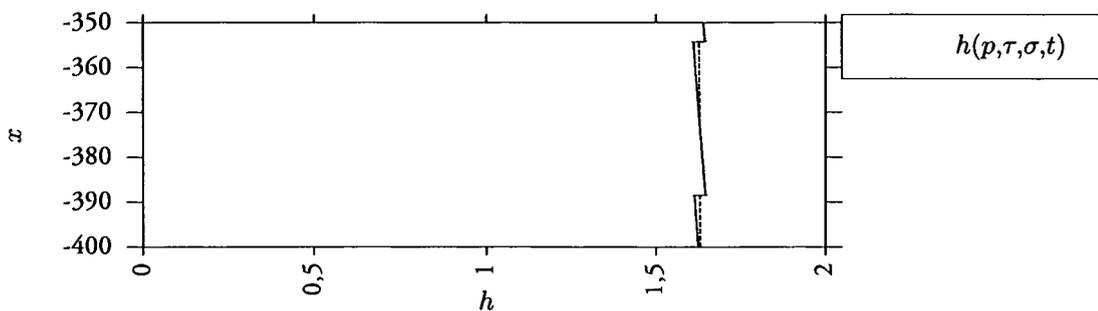
(a) Ohne Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .(b) Mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .

**Abbildung 6.9:** Wellenbild ohne und mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  für sinusförmige Abstandsänderung zwischen Düse und Band, wie sie z.B. durch Bandschwingungen hervorgerufen werden. Den Unterschied, der durch die Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  entsteht, sieht man bei genauerer Betrachtung im Gebiet unterhalb des Freistrahls ( $x < 0$ ).

( $t = 0\bullet; 0,210\bullet; 2,131\bullet; 7,106\bullet; 19,983\bullet; 53,325\circ$ )

(a) Mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$ .

(b) Detail am oberen Rand.



(c) Detail am unteren Rand.

**Abbildung 6.10:** Wellenbild mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  für sinusförmige Abstandsänderung zwischen Düse und Band, wie sie z.B. durch Bandschwingungen hervorgerufen werden.  
( $t = 439,356$ )

# 7 Zusammenfassung und Ausblick

## 7.1 Zusammenfassung

Wird ein Substrat senkrecht aus einem Bad gezogen, so trägt es Beschichtungsmaterial mit sich. Das Abblasgas wird von einer Schlitzdüse mit einer Austrittsgeschwindigkeit, die nahe der Schallgeschwindigkeit liegt, auf das Band geblasen. Dort wird der Freistrahls umgelenkt und erzeugt auf der Oberfläche des Beschichtungsmaterials eine Druck- und Schubspannungsverteilung. Diese bewirken wiederum die gewünschte Schichtdickenreduktion. Oberhalb der Achse des Freistrahls stellt sich ein Geschwindigkeitsprofil derart ein, daß das gesamte Material in Richtung des sich bewegenden Bands nach oben transportiert wird. Unterhalb der Abblasdüse entsteht jedoch ein Rückflußgebiet, in dem das Beschichtungsmaterial in das Bad zurück fließt.

Während des Betriebs können folgende ungelöste Probleme auftreten:

- Unregelmäßigkeiten auf der erstarrten Oberfläche, die die Qualität des fertigen Produkts beeinträchtigen.
- Es existiert eine kritische Geschwindigkeit des Bands, unterhalb der das flüssige Beschichtungsmaterial sich beim Zurückfließen abzulösen beginnt und als Tropfen in das Bad zurück fallen.
- An den Rändern des Bandes kommt es üblicherweise zu Materialanhäufung oder -mangel.

In dieser Arbeit wurde der Schwerpunkt auf die Berechnung der Beschichtungsdicke gelegt. Dabei wurden sowohl stationäre als auch instationäre Effekte berücksichtigt.

Dieses komplexe Problem ist einer direkten Lösung nicht zugänglich, deshalb wurden folgende Annahmen getroffen: Da die Schichtdicke im Vergleich zum Einflußbereichs des Freistrahls klein ist und die charakteristische Geschwindigkeit der Beschichtung klein gegenüber der Geschwindigkeit des Freistrahlgases ist, wurde angenommen, daß die Verformung der freien Oberfläche der Beschichtung die auf sie ausgeübte Druck- und Schubspannungsverteilung nicht beeinflusse. Außerdem wurde angenommen, daß die Trägheitseffekte in der flüssigen Beschichtung vernachlässigbar klein und die Materialeigenschaften konstant seien. Weiters wurden das Problem nur zweidimensional betrachtet.

Aus den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen wurde durch Entdimensionalisierung und Anwendung der oben erwähnten Annahmen ein stark vereinfachter Gleichungssatz hergeleitet. Dabei zeigte es sich, daß im stationären Fall eine gewöhnliche Differentialgleichung die sich einstellende Schichtdickenverteilung beschreibt.

Der Einfluß der kleinen Oberflächenspannung wurde über eine Entwicklung berechnet.

Die Generalisierung für den instationären Fall liefert eine inhomogene Wellengleichung. Diese reduziert sich bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung zu einer kinematischen Wellengleichung, die als Lösung auch Unstetigkeiten in der Oberfläche zuläßt.

Mit Hilfe des für dieses Problem entwickelten Softwarepackets `zink` wurde exemplarische stationäre und instationäre Fälle für das Verzinken von Stahlbändern berechnet und der Einfluß der Oberflächenspannung, des Düsenabstands und der Bandgeschwindigkeit aufgezeigt. Desweiteren wurde der Anfahrvorgang, das Verhalten von Störungen in der Oberfläche und die Wellenausbreitung auf schwingenen Bändern untersucht. Die Ergebnisse wurden sowohl zahlenmäßig als auch graphisch präsentiert.

## 7.2 Ausblick

In dieser Arbeit konnten nicht alle anstehenden Probleme bearbeitet werden. So blieb die Bandkantenüberhöhung und die genauere Untersuchung des *splashing* unberücksichtigt. Für ein genaueres Verständnis des *splashing* müßte der Einfluß der Trägheitseffekte in der flüssigen Beschichtung wieder berücksichtigt werden.

Für das Verständnis der Bandkantenüberhöhung könnte die Betrachtung des Marangoni-Effekts sich als zielführend erweisen, da die Oberflächenspannung von flüssigem Zink stark temperaturabhängig ist und das Band während der Erstarrungsphase sicherlich ungleichmäßig abkühlen wird.

# A Dimensionslose Formulierungen

Um die Einflüsse der verschiedenen Prozeßparameter abschätzen zu können, werden die bestimmenden Gleichungen mit geeigneten Referenzgrößen so dimensionslos gemacht, daß alle Variablen die Größenordnung 1 aufweisen. Zeigt sich nach Lösung der Gleichungen, daß die Variablen auch wirklich diese Voraussetzung erfüllen, so hat man es aller Wahrscheinlichkeit nach mit einem gutmütigen Problem zu tun. Wird diese Annahme verletzt, so wurde das Problem nicht den physikalischen Gegebenheiten entsprechend skaliert. Als Möglichkeit bietet sich dann zum Beispiel an, mit mehreren Längenskalen dimensionslos zu machen.

## A.1 Dimensionsbehaftete Gleichungen der flüssigen Beschichtung

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die Kontinuitätsgleichung (A.1) und die Navier-Stokes-Gleichungen (A.2) und (A.3) für die beiden Koordinatenrichtungen  $x^*$  und  $y^*$  – die Bandlaufrichtung und die Normale zur Bandoberfläche. In dieser Arbeit wird das Problem nur zweidimensional betrachtet, d.h. der Freistrah ist konstant über die Bandbreite und die Ränder haben keinen Einfluß auf die Strömungsverhältnisse in der Beschichtung. Deshalb wird die Koordinatenrichtung quer zur Bandlaufrichtung in der Ebene des Bandes nicht betrachtet (siehe Abbildung A.1 auf der nächsten Seite). Ebenso beschränkt sich diese Arbeit auf inkompressible Beschichtungsmedien mit konstanter Zähigkeit (siehe auch Abbildung 2.2 auf Seite 8):

Kontinuitätsgleichung:

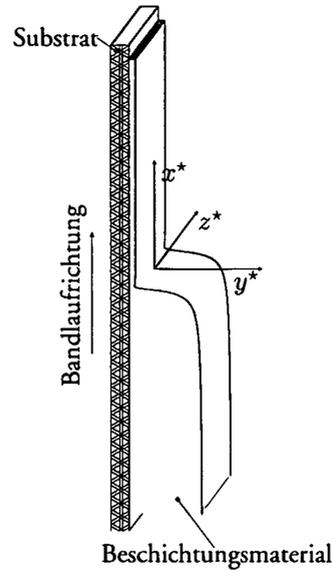
$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (\text{A.1})$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + g_{x^*}^* + \nu^* \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + g_{y^*}^* + \nu^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (\text{A.3})$$

In diesen Gleichungen sind  $u^*$  und  $v^*$  die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsschicht in  $x^*$ - und  $y^*$ -Richtung,  $\frac{\partial}{\partial t^*}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^*}$  und  $\frac{\partial}{\partial y^*}$  die Ableitungen nach der Zeit und den beiden Koordinatenrichtungen  $x^*$ ,  $y^*$ ;  $p^*$  der Druck in der Flüssigkeitsschicht,  $g_{x^*}^*$  und  $g_{y^*}^*$  die Komponenten der



**Abbildung A.1:** Prinzipskizze mit dem Koordinatensystem  $x^*-y^*-z^*$ .

Erdbeschleunigung und  $\nu^*$  die kinematische Zähigkeit des Beschichtungsmaterials. Der Exponent  $*$  besagt, daß es sich hierbei um dimensionsbehaftete Größen handelt.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen nur senkrechte Bänder betrachtet werden, d.h. die  $y^*$ -Komponente der Erdbeschleunigung ist gleich Null:

$$\begin{aligned} g_{x^*}^* &= -g^* , \\ g_{y^*}^* &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Mit der Gleichung (A.4) folgen aus (A.2) und (A.3) die dimensionsbehafteten Bewegungsgleichungen für die flüssige Beschichtung bei senkrecht nach oben laufenden Bändern und zweidimensionaler Betrachtungsweise:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - g^* + \nu^* \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) , \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) . \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Herleitung der dimensionslosen Form

Um die Gleichungen (A.5) und (A.6) dimensionslos zu machen, werden die vorkommenden Variablen mit geeigneten Referenzgrößen so skaliert, daß sie die Größenordnung 1 bekommen:

- Koordinaten, Längen

$$x = \frac{x^*}{X^*} ,$$

$$y = \frac{y^*}{Y^*},$$

- Geschwindigkeiten

$$u = \frac{u^*}{U^*},$$

$$v = \frac{v^*}{V^*},$$

- Druck

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{P'^*},$$

- Zeit

$$t = \frac{t^* - t_0^*}{T^*}.$$

Dabei bezeichnen die in Großbuchstaben geschriebenen Größen die jeweiligen Referenzgrößen.

### A.2.1 Bestimmung der Referenzgrößen

#### $U^*$ Referenzgeschwindigkeit in $x^*$ -Richtung

An der Bandoberfläche weist das Beschichtungsmaterial infolge der Haftbedingung die Geschwindigkeit des Bandes auf. Daher liegt es nahe, die Bandlaufgeschwindigkeit als Referenzgröße zu verwenden.

#### $P'^*$ Gradient des Referenzdrucks

Als typische Steigung  $P'^*$  kann entweder die maximale Steigung im Wendepunkt von  $p_j^*$  oder der Wert  $p_s^*/B^*$  genommen werden (siehe Abbildung A.2 auf der nächsten Seite).  $p_s^*$  ist dabei der Staudruck des auftreffenden Freistrahls (siehe Kapitel B.1.1) und  $B^*$  der Abstand, bei dem sich der Druck  $p_s^*/2$  einstellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die zweite Möglichkeit gewählt, da sie auf einfache Weise und anschaulich auch gleich die Referenzgröße liefert, mit der alle Längen in  $x^*$ -Richtung entdimensionalisiert werden können.

#### $X^*$ Längenskala in $x^*$ -Richtung

Die Annahme, daß der Bereich der Druckverteilung des auftreffenden Freistrahls entscheidend für die Strömungsprozesse ist, legt nahe, für die Skalierung der Längen in  $x^*$ -Richtung  $B^*$ , also den Abstand, bei dem der Druck  $p_j^*(x)$  den halben Staudruck  $p_s^*/2$  erreicht (siehe Abbildung A.2 auf der nächsten Seite), als Referenzwert zu verwenden.

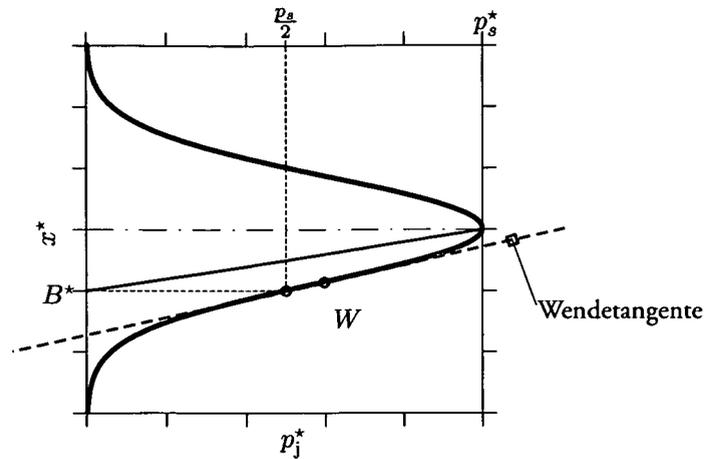


Abbildung A.2: Verschiedene Möglichkeiten  $P^*$  zu definieren.

### $Y^*$ Längenskala in $y^*$ -Richtung

Die Längen in  $y^*$ -Richtung können mit der typischen Schichtdicke  $H^*$  dimensionslos gemacht werden. Dabei ist  $H^*$  die Dicke der Beschichtung, die sich einstellt, wenn das Band ohne äußeren Einflüssen aus dem Bad gezogen wird. In ihrer Arbeit [RS95] geben Rudischer und Steinrück eine untere kritische Bandgeschwindigkeit an, ab der die Schichtdicke nicht mehr vom Meniskus, sondern nur mehr von der Materialdicke am meniskusfernen Ende bestimmt wird. Dazwischen existiert ein Übergangsbereich, in dem sich beide Lösungen einstellen können. Der untere Wert, ab dem beide Lösungen auftreten können, ist  $\sqrt{\frac{\mu^* U^*}{\rho^* g^*}}$ . Diese Größe wird als Referenzschichtdicke  $H^*$  verwendet.

Diese Schichtdicke läßt sich auch folgendermaßen deuten: Nimmt die Schichtdicke den Wert  $H^*$  an, so wird die maximale Materialmenge aus dem Bad ausgetragen. Diese ist nur durch die Viskosität  $\mu^*$  bestimmt. Wird der Wert  $H^*$  überschritten, so kommt es zu einem durch die Gravitation angetriebenen Rückströmen in Nähe der freien Oberfläche und dadurch zu einer Verminderung der ausgetragenen Menge.

### $V^*$ Referenzgeschwindigkeit in $y^*$ -Richtung

Der Wert von  $V^*$  läßt sich erst über eine Größenordnungsbetrachtung der Kontinuitätsgleichung ermitteln (siehe Gleichung (A.8)).

### $T^*$ Referenzzeit

Als Referenzzeit  $T^*$  kann z.B. die Zeit gewählt werden, die das Band benötigt, um das Einflußgebiet des Freistrahls ( $\frac{B^*}{U^*}$ ) zu durchlaufen. Da die Schwerkraft einen wesentlichen Einfluß auf die Strömung hat, ist es aber sinnvoller,  $T^*$  mit der Schwerkraft wie folgt zu bilden:  $T^* = U^*/g^*$ .

Hier sind die Skalierungen noch einmal zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x^*}{B^*}, \\
 y &= \frac{y^*}{H^*}, \\
 u &= \frac{u^*}{U^*}, \\
 v &= \frac{v^*}{V^*}, \\
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \frac{B^*}{p_s^*}, \\
 t &= (t^* - t_0^*) \frac{g^*}{U^*}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Daraus ergeben sich für die Ableitungen in  $x^*$ -Richtung und nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{dx}{dx^*} = \frac{U^*}{B^*} \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^*}{B^*} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{dx^*} = \frac{U^*}{B^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial u^*}{\partial t} \frac{dt}{dt^*} = \frac{U^*}{T^*} \frac{\partial u}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Analog dazu werden die anderen Ableitungen bzw. deren Integrale gebildet:

$$\begin{aligned}
 p_j &= \frac{p_j^* - p_0^*}{p_s^*}, \\
 \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} &= \frac{H^*}{B^{*2}} \frac{d^2 h}{dx^2}, \\
 \frac{dh^*}{dx^*} &= \frac{H^*}{B^*} \frac{dh}{dx}, \\
 h &= \frac{h^*}{H^*}.
 \end{aligned}$$

Die Ableitungen in  $y^*$ -Richtung ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{U^*}{H^*} \frac{\partial u}{\partial y}, \\
 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &= \frac{U^*}{H^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung (A.1) folgende dimensionslose Form:

$$\frac{U^*}{B^*} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V^*}{H^*} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

bzw. nach Multiplikation mit  $\frac{B^*}{U^*}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{V^* B^*}{U^* H^*} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Durch die Wahl der Skalierung sind die beiden Terme  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial v}{\partial y}$  von der gleichen Größenordnung 1. Soll diese Gleichung nicht-triviale Lösungen besitzen, so muß auch der Faktor  $\frac{V^* B^*}{U^* H^*}$  von der Größenordnung 1, bzw. gleich 1, sein:

$$\frac{V^* B^*}{U^* H^*} = 1 . \quad (\text{A.8})$$

Endgültig erhält man für die Kontinuitätsgleichung die dimensionslose Form

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \quad (\text{A.9})$$

und auch die Referenzgröße

$$V^* = \frac{U^* H^*}{B^*} . \quad (\text{A.10})$$

Durch Einsetzen der Skalierungen (A.7) und (A.10) in die Bewegungsgleichung (A.5) in  $x^*$ -Richtung nimmt diese nach Division durch  $g^*$  folgende Form an:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{U^*}{g^* T^*}}_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\frac{U^{*2}}{g^* B^*}}_{\text{Fr}^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = - \left( 1 + \underbrace{\frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*}}_{\text{Eu}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \underbrace{\frac{B^{*2}}{H^{*2}}}_{\frac{1}{\lambda^2}} \underbrace{\frac{U^{*2}}{g^* B^*}}_{\text{Fr}^2} \underbrace{\frac{\nu^*}{U^* B^*}}_{\frac{1}{\text{Re}}} \left( \frac{H^{*2}}{B^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) . \end{aligned}$$

In der Gleichung kommen folgende vier dimensionslose Kennzahlen vor:

$$\begin{aligned} \text{Fr} &= \frac{U^*}{\sqrt{g^* B^*}} && \dots \text{ Froud-Zahl ,} \\ \text{Eu} &= \frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*} && \dots \text{ Euler-Zahl ,} \\ \text{Re} &= \frac{U^* B^*}{\nu^*} && \dots \text{ Reynolds-Zahl ,} \\ \lambda &= \frac{H^*}{B^*} && \dots \text{ Schlankheitsparameter .} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Die Froud-Zahl Fr ist ein Maß für das Verhältnis der Trägheits- zur Schwerkraft und die Euler-Zahl Eu für das Verhältnis der Druck- zur Trägheitskraft. Die Reynolds-Zahl Re kann als das Verhältnis

der Trägheits- zur Reibungskraft gedeutet werden. Der Schlankheitsparameter  $\lambda$  gibt Auskunft über das Verhältnis des Einflußbereichs des Freistrahls in Strömungsrichtung zur Schichtdicke.

Wird  $H^* = \sqrt{\frac{\mu^* U^*}{\rho^* g^*}}$  in  $\frac{Fr^2}{\lambda^2 Re}$  eingesetzt, so zeigt sich, daß dieser Faktor gleich 1 wird.

Mit diesen Kennzahlen läßt sich die dimensionslose Bewegungsgleichung in  $x^*$ -Richtung in folgender Form vereinfacht schreiben:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + Fr^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( 1 + Eu \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (A.12)$$

Analog wird für die Bewegungsgleichung in  $y^*$ -Richtung (A.6) vorgegangen:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{U^*}{g^* T^*}}_1 \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\frac{U^{*2}}{g^* B^*}}_{Fr^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ &= - \underbrace{\frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*}}_{Eu} \underbrace{\frac{B^{*2}}{H^{*2}}}_{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{B^{*2}}{H^{*2}}}_{\frac{1}{\lambda^2}} \underbrace{\frac{U^{*2}}{g^* B^*}}_{Fr^2} \underbrace{\frac{\nu^*}{U^* B^*}}_{\frac{1}{Re}} \left( \underbrace{\frac{H^{*2}}{B^{*2}}}_{\lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Mit obigen Definitionen erhält man die dimensionslose Bewegungsgleichung in  $y^*$ -Richtung:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + Fr^2 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{Eu}{\lambda^2} \frac{\partial p}{\partial y} = \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \quad (A.13)$$

## A.2.2 Weitere dimensionslose Größen

### $\tau_0^*$ Schubspannung

Zur Abschätzung der Referenzschubspannung wird vom Wandschubspannungsgesetz einer ausgebildeten Strömung ausgegangen:

$$\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \tau^* .$$

Die Schubspannungsverteilung wird mit Hilfe der Relation

$$\tau = \frac{\tau^*}{\tau_0^*}$$

dimensionslos gemacht:

$$\mu^* \frac{U^*}{H^*} \frac{\partial u}{\partial y} = \tau \cdot \tau_0^* ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0^* H^*}{\underbrace{\mu^* U^*}_1} \tau .$$

Da sowohl  $\frac{\partial u}{\partial y}$  als auch  $\tau$  von der Größenordnung 1 sein sollen, muß auch der Faktor  $\frac{\tau_0^* H^*}{\mu^* U^*}$  von derselben Größenordnung sein. Der Einfachheit halber setzt man ihn gleich 1.

Somit ist die Referenzschubspannung

$$\tau_0^* = \frac{\mu^* U^*}{H^*} = \sqrt{\mu^* U^* \rho^* g^*} = \rho^* g^* H^* . \quad (\text{A.14})$$

### $\dot{Q}_0^*$ Ausgetragenes Coatingvolumen

Das pro Zeiteinheit vom Band durch den Querschnitt  $x^*$  transportierte Volumen pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}^*$  ist

$$\dot{Q}^*(x^*, t^*) = \int_0^{h^*(x^*, t^*)} u^*(x^*, y^*, t^*) \Big|_{x^*} dy^*$$

und wird mit

$$\dot{Q} = \frac{\dot{Q}^*}{\dot{Q}_0^*}$$

dimensionslos gemacht:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* \dot{Q} &= \int_0^h U^* u d(H^* y) , \\ \dot{Q} &= \frac{U^* H^*}{\dot{Q}_0^*} \int_0^h u dy . \end{aligned}$$

Für den Referenzvolumenstrom pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}_0^*$  wird angenommen, daß das gesamte Beschichtungsmaterial mit der konstanten Bandgeschwindigkeit  $U^*$  über die Dicke  $H^*$  nach oben transportiert wird. Dann wird durch jeden Querschnitt die Materialmenge

$$\dot{Q}_0^* = U^* H^*$$

transportiert. Somit ist

$$\dot{Q}(x, t) = \int_0^{h(x, t)} u(x, y, t) dy .$$

### A.2.3 Randbedingungen

#### Druckverteilung

An der freien Oberfläche  $h^*(x^*, t^*)$  der Beschichtung entsteht ein Drucksprung  $p_{\sigma}^*$  zufolge der Krümmung der Oberfläche  $\varkappa^*$  und der Oberflächenspannung  $\sigma^*$  [LL91]

$$p_{\sigma}^* = -\sigma^* \varkappa^* .$$

Mit der Krümmung  $\varkappa^*$  der Oberfläche

$$\varkappa^* = \frac{h''^*}{(1 + h'^*{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und der Vereinfachung für kleine  $h'^*$

$$\varkappa^* = h''^* \quad \text{mit } h''^* \ll 1$$

ergeben sich:

$$\begin{aligned} p_{\sigma}^* &= -\sigma^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} , \\ \frac{dp_{\sigma}^*}{dx^*} &= -\sigma^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial x^{*3}} . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Wird mit  $P'^* = p_s^*/B^*$  entdimensionalisiert, nimmt der Drucksprung zufolge der Oberflächenspannung die dimensionslose Form an:

$$\frac{\partial p_{\sigma}}{\partial x} = -\frac{H^*}{p_s^* B^{*2}} \sigma^* \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} .$$

Da in der Gleichung (A.12) der Druckgradient die Euler-Zahl  $Eu$  als Faktor aufweist, wollen wir hier gleich  $Eu \cdot p'_{\sigma}$  berechnen:

$$\begin{aligned} Eu \cdot \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial x} &= -\frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*} \frac{H^*}{p_s^* B^{*2}} \sigma^* \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \\ &= -\frac{H^*}{B^*} \underbrace{\frac{\sigma^*}{\rho^* g^* B^{*2}}}_{\lambda} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Die neu eingeführte dimensionslose Kennzahl  $Bo$  ist die Bond-Zahl und ein Maß für das Verhältnis der Oberflächen- zur Schwerkraft:

$$Bo = \frac{\sigma^*}{\rho^* g^* B^{*2}} \quad \dots \text{Bond-Zahl} . \quad (\text{A.17})$$

Weiters soll folgende Abkürzung eingeführt werden:

$$Bo_{\text{red}} = \lambda Bo \quad \dots \text{reduzierte Bond-Zahl} .$$

Endgültig erhält man für die Randbedingung des Drucksprungs an der freien Oberfläche zufolge der Oberflächenspannung:

$$\text{Eu} \cdot \frac{\partial p_\sigma}{\partial x} = -\text{Bo}_{\text{red}} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}.$$

Hierbei wurden der Einfluß der Reibungsnormalspannungen gegenüber der an der Oberfläche ausgeprägten Schubspannungsverteilung  $\tau_j$  vernachlässigt [Joh97].

### Schubspannungsverteilung

Der Reibungsspannungstensor  $\mathcal{T}^*$  einer zweidimensionalen inkompressiblen Strömung lautet (siehe z.B. [SG97]):

$$\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} \tau_{x^*x^*}^* & \tau_{x^*y^*}^* \\ \tau_{y^*x^*}^* & \tau_{y^*y^*}^* \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \tau_{x^*x^*}^* &= 2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \\ \tau_{y^*y^*}^* &= 2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \\ \tau_{x^*y^*}^* &= \tau_{y^*x^*}^* = \mu^* \left( \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right). \end{aligned}$$

Der Faktor  $\mu^*$  ist die dynamische Viskosität.

Bei inkompressiblen Strömungen ist aufgrund der Kontinuitätsgleichung (A.1)

$$\text{div} \vec{v}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0.$$

Die Reibungsspannung  $\vec{\tau}^*$  in einem beliebigen Punkt an der freien Oberfläche erhält man, indem man  $\mathcal{T}^*$  mit dem Normalvektor  $\vec{n}^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2}} \left( -\frac{\partial h^*}{\partial x^*}, 1 \right)$  multipliziert:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^* &= \mathcal{T}^* \cdot \vec{n}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\tau_{xx}^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \tau_{xy}^* \\ -\tau_{yx}^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \tau_{yy}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Schubspannung  $\tau^*$  entlang der Oberfläche erhält man, wenn  $\vec{\tau}^*$  mit dem Einheitsvektor in Tangentialrichtung  $\vec{t}^* = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h^*}{\partial x^*})^2}} \left( 1, \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)$  skalar multipliziert wird:

$$\begin{aligned} \tau^* &= \vec{\tau}^* \cdot \vec{t}^* \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2} \left[ \left( -\tau_{xx}^* + \tau_{yy}^* \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \tau_{xy}^* - \tau_{yx}^* \left( \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2} \left[ -2\mu^* \left( +\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \mu^* \left( \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \left( 1 - \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2 \right) \right].$$

Wird diese Gleichung für  $\tau^*$  in gewohnter Weise dimensionslos gemacht, so erhält man:

$$\tau^* = \frac{1}{1 + \lambda^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2} \frac{\mu^* U^*}{H^*} \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2 \right] - \lambda^4 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2 \right\}$$

und endgültig mit (A.14)

$$\tau(x, h, t) = \frac{1}{1 + \lambda^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2 \right] - \lambda^4 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*}\right)^2 \right\}.$$

Der auf die Oberfläche des Beschichtungsmaterials auftreffende Freistrahler erzeugt eine Schubspannung, die auf die Flüssigkeitsschicht übertragen wird. Dies führt zur Randbedingung

$$\tau(x, h, t) = \tau_j(x, t).$$

### A.3 Zusammenstellung der Gleichungen in dimensionsloser Form

#### Annahmen

- Zweidimensionale Betrachtungsweise
- Senkrechte Bänder
- $\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \ll 1$  (wegen der Linearisierung der Randbedingung der Oberflächenspannung)
- Betrachteter Bereich:  $\frac{x^*}{B^*} \sim O(1)$

#### Bestimmungsgleichungen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( 1 + \text{Eu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Fr}^2 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\text{Eu} \partial p}{\lambda^2 \partial y} = \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

**Dimensionslose Kennzahlen**

$$\lambda = \frac{H^*}{B^*} \quad \text{Schlankheitsparameter}$$

$$\text{Fr} = \frac{U^*}{\sqrt{g^* B^*}} \quad \text{Froude-Zahl}$$

$$\text{Eu} = \frac{p_s^*}{\rho^* g^* B^*} \quad \text{Euler-Zahl}$$

$$\text{Bo}_{\text{red}} = \lambda \text{Bo} = \frac{H^*}{B^*} \frac{\sigma^*}{\rho^* g^* B^{*2}} \quad \text{reduzierte Bond-Zahl}$$

**Referenzgrößen**

$$T^* = \frac{U^*}{g^*} \quad \text{Zeitkonstante}$$

$$B^* \left( = 2H_j^* \sqrt{\frac{\ln 2}{\alpha_p}} \right) \quad \text{charakteristische Länge in } x\text{-Richtung}$$

$$H^* = \sqrt{\frac{\mu^* U^*}{\rho^* g^*}} \quad \text{charakteristische Länge in } y\text{-Richtung, Referenzschichtdicke}$$

$$U^* \quad \text{Referenzgeschwindigkeit in } x\text{-Richtung, Bandgeschwindigkeit}$$

$$V^* = \frac{U^* H^*}{B^*} = \lambda U^* \quad \text{Referenzgeschwindigkeit in } y\text{-Richtung}$$

$$p_s^* \left( = \frac{1}{0,13} \frac{D_j^*}{H_j^*} \frac{\rho_j^* V_j^{*2}}{2} \right) \quad \text{Referenzdruck, maximaler Staudruck des Freistrahls}$$

$$\tau_0^* = \frac{\mu^* U^*}{H^*} = \sqrt{\mu^* U^* \rho^* g^*} = \rho^* g^* H^* \quad \text{Referenzschubspannung}$$

$$\dot{Q}_0^* = U^* H^* \quad \text{Referenzvolumenstrom pro Tiefeneinheit}$$

**Randbedingungen (aus Kapitel 2.1)**

$$u(x,0,t) = 1, v(x,0,t) = 0 \quad \text{Haftbedingung an der Wand } y = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, h, t) = \frac{\partial p_j}{\partial x}(x, t) - \frac{Bo_{\text{red}}}{Eu} \cdot \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, t) \quad \text{Druck an der freien Oberfläche } y = h(x, t)$$

$$\tau(x, h, t) = \tau_j(x, t) \quad \text{Schubspannung an der freien Oberfläche } y = h(x, t)$$

### Randbedingungen für stationäre Strömungen (aus Kapitel 2.1)

$$\int_0^{h(x)} u(x, y) dy \Big|_x = \dot{Q}(x) = \text{const}$$

Konstanz des pro Zeiteinheit durch einen beliebigen Querschnitt fließenden Volumenstroms pro Tiefeneinheit  $\dot{Q}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \text{const}$$

Konstante Schichtdicke  $h(x)$  in großer Entfernung  $x \rightarrow \pm\infty$  des auftreffenden Freistrahls

# B Freistrahl

In dieser Arbeit wurde der Schwerpunkt auf die Untersuchung des Verhaltens der flüssigen Zinkschicht im Bereich des Einflußbereichs des Freistrahls und nicht auf die genaue Modellierung dieses Freistrahls gelegt. Deshalb wurde auf die exakte Berechnung der Druck- und Schubspannungsverteilung des auf die Flüssigkeitsoberfläche auftreffenden Freistrahls verzichtet und dafür vorhandene Daten aus der Literatur herangezogen.

In den zur Verfügung stehenden Quellen werden von den verschiedenen Autoren unterschiedliche Werte sowohl für die jeweiligen Maximalwerte, als auch für die Verteilung, angegeben. Die detailliertesten Daten finden sich in [Raj76] – jedoch nur für rotationssymmetrische Freistrahlen. Der Vergleich mit Messungen [DDKK95] zeigt jedoch, daß die Unterschiede im Aufbau der Formeln klein sind.

## B.1 Druckverteilung

### B.1.1 Maximaler Druck im Staupunkt

[Raj76] gibt für den Druck im Staupunkt bei rechtwinkeligem Auftreffen eines rotationssymmetrischen Freistrahls auf eine ebene Platte folgenden Wert an:

$$p_s^* \simeq \frac{50}{\left(\frac{H_j^*}{D_j^*}\right)^2} \frac{\rho_j^* V_j^{*2}}{2}.$$

Andere Autoren kamen zu teilweise abweichenden Werten für den Staudruck. So findet sich z.B. in [DDKK95] der Wert

$$p_s^* = 7,7 \frac{\rho_j^* V_j^{*2}}{2} \frac{D_j^*}{H_j^*}.$$

Dieser geht jedoch für  $D_j^*/H_j^* = 0,154$  in dem von [Raj76] angegebenen Wert über.

Die von [BR73] durchgeführten umfangreichen experimentellen Untersuchungen einer großen Anzahl von ebenen Freistrahlen ergaben für den Staudruck folgende Beziehung (und entspricht daher dem der Arbeit [DDKK95]):

$$p_s^* = \frac{1}{0,13} \frac{D_j^*}{H_j^*} \frac{\rho_j^* V_j^{*2}}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Für die vorliegende Arbeit wurde der Staudruck nach Gleichung (B.1) verwendet.

### B.1.2 Druckverteilung entlang der Wand

Für die Druckverteilung  $p_j^*(x^*)$  entlang der Wand, gibt [Raj76] für den rotationssymmetrischen Fall

$$\frac{p_j^*(x^*)}{p_s^*} = e^{-114 \left( \frac{x^*}{H_j^*} \right)^2}$$

an, während [Buc97] und [BMA<sup>+</sup>95] folgende Verteilung für ebene Freistrahlen verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{p_j^*(x^*)}{p_s^*} &= e^{-0,693 \left( \frac{x^*}{B^*} \right)^2} \\ &= e^{-\left( \frac{x^*}{B^*} \right)^2 \ln 2} \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang verliert für ebene Freistrahlen ihre Gültigkeit, wenn der Abstand  $H_j^*/D_j^* < 5$  wird.

[BR73] ermittelte aus umfangreichen Experimenten folgenden Zusammenhang für ebene turbulente Freistrahlen:

$$\frac{p_j^*}{p_s^*} = e^{-\alpha_p \left( \frac{x^*}{H_j^*} \right)^2} \quad (\text{B.2a})$$

mit

$$\alpha_p = 38,5 \quad (\text{B.2b})$$

und einem maximalen Druck  $p_s^*$  im Staupunkt nach (B.1).

Die Beziehungen (B.2) entsprechen unserer Problemstellung und werden deshalb für die Druckverteilung verwendet.

### B.1.3 Dimensionslose Formulierung

Wie in Kapitel 3.3.2 dargelegt, kann sich der Düsenabstand  $H_j^*$  mit der Zeit  $t^*$  ändern. Dies wirkt sich wiederum auf die Größen  $p_j^*$  und  $p_s^*$  aus.

$$\begin{aligned} \frac{p_j^*(x^*, t^*)}{p_s^*(t^*)} &= e^{-\alpha_p \left( \frac{x^*}{h_j^*(t^*)} \right)^2} \\ &= e^{-\alpha_p \left( \frac{x^*}{H_j^*} \frac{H_j^*}{h_j^*(t^*)} \right)^2} \\ \frac{p_j^*(x^*, t^*)}{p_s^*(t^*)} &= e^{-\alpha_p \left( \frac{x^*}{H_j^*} \right)^2 \eta^2(t^*)} \\ \text{mit } \eta(t^*) &= \frac{H_j^*}{h_j^*(t^*)}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

wobei  $h_j^*(t^*)$  den mit der Zeit veränderlichen Düsenabstand bezeichnet. Die in obigem Zusammenhang vorkommende Größe des zeitabhängigen maximalen Staupunktdrucks  $p_s^*(t^*)$  läßt sich aus Gleichung (B.1) berechnen:

$$p_s^*(t^*) = \frac{1}{0,13} \frac{D_j^*}{h_j^*(t^*)} \frac{\rho_j^* V_j^{*2}}{2}$$

$$p_s^*(t^*) = \eta(t^*) \cdot p_s^* .$$

So wie im Anhang A.2, wird auch die Druckverteilung  $p_j^*(x^*)$  (B.3) entdimensionalisiert:

$$p_j(x,t) = \frac{p_j^*(x^*,t^*) - p_0^*}{p_s^*(t^*)} ,$$

$$x = \frac{x^*}{B^*} .$$

Daraus folgt die dimensionslose Form

$$p_j(x,t) = \eta(t) \cdot e^{-\alpha_p x^2 \left(\frac{B^*}{H_j^*}\right)^2 \eta^2(t)} - p_0 \quad (\text{B.4})$$

mit  $p_0 = \frac{p_0^*}{p_s^*}$ .

Der Wert  $B^*$  ist laut Definition im Anhang A.2.1 die Stelle  $x^*$ , in der die Druckverteilung  $p_j^*(x^*)$  die Hälfte des Staupdrucks  $p_s^*$  erreicht; bzw.:

$$p_j^*(B^*) = \frac{1}{2} p_s^*$$

$$e^{-\alpha_p \left(\frac{B^*}{H_j^*}\right)^2} = \frac{1}{2} .$$

Die Referenzgröße  $B^*$  ergibt sich hiermit in unserem Fall zu

$$B^* = 2H_j^* \sqrt{\frac{\ln 2}{\alpha_p}} . \quad (\text{B.5})$$

(B.4) läßt sich damit zu

$$p_j(x,t) = \eta(t) \cdot e^{-x^2 \ln 2 \cdot \eta^2(t)} - p_0 \quad (\text{B.6})$$

vereinfachen.

Die benötigten Ableitungen von  $p_j(x,t)$  errechnen sich zu:

$$\frac{\partial p_j}{\partial x}(x,t) = -(p_j(x,t) + p_0) \cdot 2 \ln 2 \cdot x \eta^2(t) ,$$

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}(x,t) = (p_j(x,t) + p_0) \cdot 2 \ln 2 \cdot \eta^2(t) \left( 2 \ln 2 \cdot x^2 \eta^2(t) - 1 \right) ,$$

$$\frac{\partial^3 p_j}{\partial x^3}(x,t) = -(p_j(x,t) + p_0) \cdot 4 \ln^2 2 \cdot x \eta^4(t) \left( 2 \ln 2 \cdot x^2 \eta^2(t) - 3 \right) .$$

## B.2 Schubspannungsverteilung

Bei der Angabe der Schubspannungsverteilung divergieren die Autoren noch mehr als bei der Druckverteilung. So werden in [Buc97] und [DDKK95] zwei Bereiche unterschieden: Der Bereich nahe der Achse des Freistrahls, der sogenannte Kernstrahlbereich, und der Bereich, der ausreichend vom Kernstrahl entfernt ist, dem sogenannten Wandstrahlbereich. Für den Kernstrahlbereich werden Formeln der Bauart

$$\tau_{\text{imp}}^*(x^*) = \tau_{\text{max}}^* \left[ a \cdot \text{erf}(bx^*) + c \cdot f(p_j^*(x), p_j'^*(x)) \right]$$

angegeben. Den Wandstrahl beschreibt [DDKK95] mit:

$$\tau_{\text{wj}}^*(x^*) = \tau_{\text{max}}^* d \frac{1}{\sqrt[5]{\text{Re}_j}} \frac{1}{x^*} .$$

Die Werte  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  sind dem jeweiligen Freistrahls angepaßte Konstanten. [DDKK95] gibt für die Konstanten im Fall des ebenen Freistrahls folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}}^* a &= \beta \frac{D_j^*}{2H_j^*} \frac{p_a^* V_j^{*2}}{\tau_+^*} , \\ \beta &= 0.058 , \\ \tau_+^* &= \rho_j^* g^* \sqrt{\frac{\nu_j^* U_0^*}{g^*}} , \\ b^2 &= \ln 2 , \\ c &= 0 , \\ \tau_{\text{max}}^* d &= \beta_\tau \frac{D_j^*}{2H_j^*} \frac{p_a^* V_j^{*2}}{\tau_+^*} , \\ \beta_\tau &= 1.953 . \end{aligned}$$

[BR73] finden aufgrund von Experimenten die Zusammenhänge für die Schubspannungsverteilung im Kernbereich als

$$\frac{H_j^*}{D_j^*} \cdot \frac{\tau_{\text{imp}}^*(x^*)}{\frac{\rho_j^* V_j^*}{2}} = \alpha_{\text{imp}} \cdot \text{erf}\left(\beta_{\text{imp}} \frac{x^*}{H_j^*}\right)$$

mit

(B.7)

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{imp}} &= 0,058 , \\ \beta_{\text{imp}} &= 6,2 \end{aligned}$$

und im Wandstrahlbereich als

$$\frac{\tau_{wj}^*(x^*)}{\frac{\rho_j^* V_j^*}{2}} = \alpha_{wj} \cdot \left( \frac{x^*}{D_j^*} - \gamma_{wj} \right)^{-\beta_{wj}}$$

mit

(B.8)

$$\alpha_{wj} = 0,0288 \div 0,0525 ,$$

$$\beta_{wj} = 1,04 \div 1,20 ,$$

$$\gamma_{wj} = 0 \div 35 .$$

Um einen stetigen Übergang vom Kern- zum Wandstrahlbereich zu erhalten, muß  $\tau_{imp}^*$  im Übergangsbereich an  $\tau_{wj}^*$  angepaßt werden. Von Vorteil wäre eine Formel, die die Schubspannungsverteilung für den gesamten Freistrah berechnet. Einen solchen Zusammenhang entwickelte [Raj76] für den rotationssymmetrischen Fall:

$$\frac{\tau_j^*(r^*)}{\tau_{max}^*} = \alpha \frac{1 - e^{-114 \left( \frac{r^*}{H_j^*} \right)^2}}{\frac{r^*}{H_j^*}} - \beta \frac{r^*}{H_j^*} e^{-114 \left( \frac{r^*}{H_j^*} \right)^2} ,$$

dabei ist

$$\tau_{max}^* = \frac{0,16}{\left( \frac{H_j^*}{D_j^*} \right)^2} \rho_j^* V_j^{*2} .$$

Für diese Arbeit soll als Gleichung für die Schubspannungsverteilung  $\tau^*(x^*)$  eine Formel der Bauart nach [Raj76]

$$\tau_j^*(x^*) = \alpha_j^* \frac{1 - \gamma_j^* e^{-\beta_j^* x^{*2}}}{x^*} \quad (B.9)$$

aufgrund des stetigen und glatten Übergangs zwischen den beiden Einflußbereichen des Freistrahls dienen (siehe Abbildung B.1 auf der nächsten Seite). Diese soll an die Formeln (B.7) und (B.8) angepaßt werden (hier bereits in dimensionsloser Schreibweise):

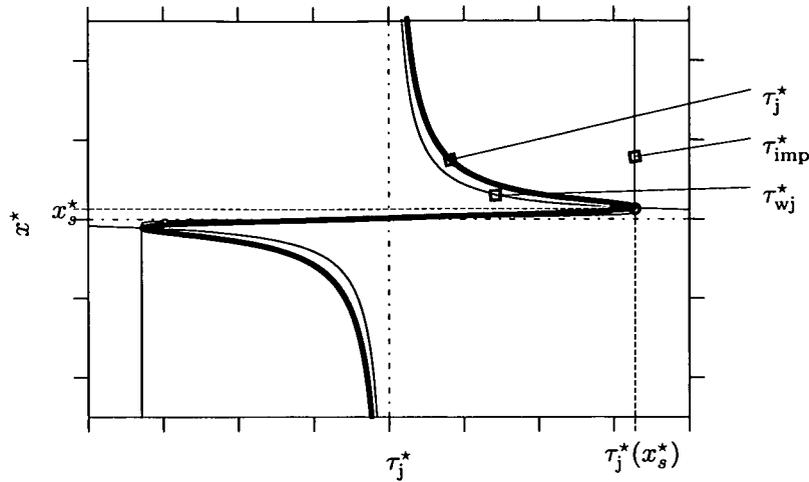
$$\tau_j(x) = \alpha_j \frac{1 - \gamma_j e^{-\beta_j x^2}}{x} \quad (B.10a)$$

mit den Bedingungen

$$\tau_j(0) = 0 , \quad (B.10b)$$

$$\tau_j(x_s) = \tau_{imp}(x_s) = \tau_{wj}(x_s) , \quad (B.10c)$$

$$\tau_j'(x_s) = 0 . \quad (B.10d)$$



**Abbildung B.1:** Schubspannungsverteilung  $\tau_j^*(x^*)$  und Schubspannung im Kern- und Wandstrahlbereich  $\tau_{imp}^*(x^*)$  und  $\tau_{wj}^*(x^*)$ .

Die Gleichung (B.10b), (B.10c) und (B.10d) liefern sofort

$$\gamma_j = 1, \quad (B.11a)$$

$$\alpha_j = \frac{\tau_j(x_s) \cdot x_s}{1 - e^{-\beta_j x_s^2}} \quad (B.11b)$$

und die Bestimmungsgleichung für  $\beta_j$ :

$$e^{-\beta_j x_s^2} (2\beta_j x_s^2 + 1) - 1 = 0. \quad (B.11c)$$

### B.2.1 Dimensionslose Formulierung

Analog zu Anhang B.1.3 wird  $\tau_{imp}^*(x^*)$  und  $\tau_{wj}^*(x^*)$  (Gleichungen (B.7) und (B.8)) so erweitert, daß wiederum der Düsenabstand  $H_j^*$  eine Funktion von  $t^*$  ist ( $h_j^*(t^*)$ ). Dann nehmen die Schubspannungsverteilungen mit  $\tau_0^* = \rho_j^* g^* H^*$  folgende dimensionslose Formen an:

$$\tau_{imp}(x,t) = \frac{1}{\tau_0^*} \frac{D_j^*}{h_j^*(t^*)} \frac{\rho_j^* V_j^*}{2} \cdot \alpha_{imp} \cdot \operatorname{erf}\left(\beta_{imp} \frac{x B^*}{h_j^*(t^*)}\right), \quad (B.12)$$

bzw. mit der bekannten Definition von  $\eta(t^*) = \frac{H_j^*}{h_j^*(t^*)}$ :

$$\tau_{imp}(x,t) = \frac{1}{\tau_0^*} \frac{D_j^*}{H_j^*} \eta(t) \frac{\rho_j^* V_j^*}{2} \cdot \alpha_{imp} \cdot \operatorname{erf}\left(\beta_{imp} \frac{x B^*}{H_j^*} \eta(t)\right), \quad (B.13)$$

$$\tau_{wj}(x,t) = \frac{1}{\tau_0^*} \frac{\rho_j^* V_j^*}{2} \cdot \alpha_{wj} \cdot \left(\frac{x B^*}{D_j^*} - \gamma_{wj}\right)^{-\beta_{wj}}. \quad (B.14)$$

Nach Bestimmung der – jetzt zeitabhängigen – Faktoren  $\alpha_j(t)$ ,  $\beta_j(t)$  und  $\gamma_j(t)$  durch die Gleichungen (B.10b-B.10d) erhält man die dimensionslose Form der Schubspannungsverteilung aus der Gleichung (B.10a).

Die ersten zwei Ableitungen ergibt sich damit zu:

$$\tau_j'(x) = \alpha_j \frac{e^{-\beta_j x^2} (2\beta_j x^2 + 1) - 1}{x^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$\tau_j''(x) = -2\alpha_j \frac{e^{-\beta_j x^2} [\beta_j x^2 (2\beta_j x^2 + 1) + 1] - 1}{x^3}. \quad (\text{B.16})$$

### Singularität bei $x = 0$

Alle drei Formeln (B.10a), (B.15) und (B.16) weisen an der Stelle  $x = 0$  eine Singularität auf. Durch eine Taylorreihenentwicklung an der Stelle  $x = 0$  lassen sich dennoch die Funktionswerte von  $\tau(0,t)$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial x}(0,t)$  und  $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(0,t)$  berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j(x) &= \alpha_j \frac{1 - \left(1 - \beta_j x^2 + \frac{\beta_j^2 x^4}{2!} - \frac{\beta_j^3 x^6}{3!} + \frac{\beta_j^4 x^8}{4!} - \dots\right)}{x} \\ &= \alpha_j \left( \beta_j x - \frac{\beta_j^2}{2!} x^3 + \frac{\beta_j^3}{3!} x^5 - \frac{\beta_j^4}{4!} x^7 + \dots \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j(x) &= -\alpha_j \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_j^n x^{2n-1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j'(x) &= \alpha_j \frac{\left(1 - \beta_j x^2 + \frac{\beta_j^2 x^4}{2!} - \frac{\beta_j^3 x^6}{3!} + \frac{\beta_j^4 x^8}{4!} - \dots\right) (2\beta_j x^2 + 1) - 1}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j'(x) &= \alpha_j \beta_j \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_j^n x^{2n} \frac{2n+1}{(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j''(x) &= -2\alpha_j \frac{\left(1 - \beta_j x^2 + \frac{\beta_j^2 x^4}{2!} - \frac{\beta_j^3 x^6}{3!} + \frac{\beta_j^4 x^8}{4!} - \dots\right) [\beta_j x^2 (2\beta_j x^2 + 1) + 1] - 1}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \tau_j''(x) &= -2\alpha_j \beta_j \left[ 2\beta_j x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_j^n x^{2n-1} \frac{2\beta_j x^2 (n+1) + n}{(n+1)!} \right]. \end{aligned}$$

# C Gleichungslöser für Pentadiagonalmatrizen

Das implizite Verfahren zur Lösung des Quellterms (siehe Kapitel 4.4.4) führt zu einem Gleichungssystem mit besetzter Haupt- und je zwei benachbarten Nebendiagonalen (Gleichung (4.5)). Für Dreidiagonalmatrix-Systeme existieren fertige Programmbibliotheken, z.B. [PTVF95], Aber auch die verwendete GSL-Programmbibliothek stellt ab Version 1.5 eine entsprechende Routine zur Verfügung [GDT<sup>+</sup>04].

## C.1 Löser für Tridiagonalmatrizen

Der Gleichungslöser für Tridiagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1 & & & \\ b_2 & d_2 & a_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & b_i & d_i & a_i & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & b_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

arbeitet nach dem bekannten Tridiagonalmatrixalgorithmus (TDMA oder Thomas-Algorithmus): Dabei wird das Gleichungssystem in zwei Schritten gelöst. In einem ersten Schritt, dem sogenannten *forward sweep*, wird die linke Nebendiagonale eliminiert:

$$\begin{array}{lll} d_1 = 1 & a_1 = \frac{a_1}{d_1} & r_1 = \frac{r_1}{d_1}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_i = 0 & d_i = 1 & a_i = \frac{a_i}{d_i - b_i a_{i-1}} & r_i = \frac{r_i - b_i r_{i-1}}{d_i - b_i a_{i-1}}. \end{array}$$

Dabei läuft der Index  $i$  von 1 bis  $n$ .

Anschließend wird in einer zweiten Phase, der *back substitution*, die Lösung aus  $a_i$  und  $r_i$  berechnet:

$$\begin{array}{l} x_n = r_n, \\ \vdots \end{array}$$



Einsetzen von  $x_1$  in  $x_2$ , bzw. allgemein  $x_{i-2}$  und  $x_{i-1}$  in den Ausdruck für  $x_i$ , liefert:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{r_1}{D_1} \\
 &\quad \underbrace{R_1}_{a_1} \\
 &\quad - \frac{D_1}{D_1} x_2 \qquad \qquad \qquad - \frac{C_1}{d_1} x_3, \\
 x_2 &= \frac{r_2 - b_2 R_1}{D_2} \\
 &\quad \underbrace{R_2}_{a_2 - b_2 C_1} \\
 &\quad - \frac{D_2}{D_2} x_3 \qquad \qquad \qquad - \frac{C_2}{D_2} x_4, \\
 &\quad \vdots \\
 x_i &= \frac{r_i - f_i (R_{i-2} - A_{i-2} R_{i-1}) + b_i R_{i-1}}{D_i} \\
 &\quad \underbrace{R_i}_{(f_i A_{i-2} - b_i) C_{i-1} + a_i} \\
 &\quad - \frac{D_i}{D_i} x_{i+1} \qquad \qquad \qquad - \frac{C_i}{D_i} x_{i+2}, \\
 &\quad \vdots \\
 x_{n-1} &= \frac{r_{n-1} - f_{n-1} (R_{n-3} - A_{n-3} R_{n-2}) + b_{n-1} R_{n-1}}{D_{n-1}} \\
 &\quad \underbrace{R_{n-1}}_{(f_{n-1} A_{n-3} - b_{n-1}) C_{n-2} + a_{n-1}} \\
 &\quad - \frac{D_{n-1}}{D_{n-1}} x_n, \\
 x_n &= \frac{r_n - f_n (R_{n-2} - A_{n-2} R_{n-1}) + b_n R_{n-1}}{D_n}. \\
 &\quad \underbrace{R_n}
 \end{aligned} \tag{C.3a}$$

Dabei wurden für die Dividenden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= d_1, \\
 D_2 &= d_2 - b_2 A_1, \\
 &\quad \vdots \\
 D_i &= d_i - b_i A_{i-1} + f_i (A_{i-2} A_{i-1} - C_{i-2}), \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \tag{C.3b}$$

Dieser Schritt (*forward sweep*) eliminiert die linken Nebendiagonalen  $b_i$  und  $f_i$ .

In einem zweiten Schritt (*back substitution*) wird bei  $i = n$  begonnen die Lösungen für  $x_i$  zu

berechnen:

$$\begin{aligned}x_n &= R_n , \\x_{n-1} &= R_{n-1} - A_{n-1}x_n , \\&\vdots \\x_i &= R_i - A_i x_{i+1} - C_i x_{i+2} .\end{aligned}\tag{C.4}$$

Somit erhält man mit  $2n$  Schleifendurchläufen die gewünschte Lösung. Im Moment ist kein effizienteres Verfahren bekannt.

## D Typische Betriebszustände

### D.1 In der Industrie verwendete Einstellungen

Die in Tabelle D.1 angegebene Parameter sind Anhaltswerte, mit denen nach heutiger Technologie gebauten Anlagen betrieben werden.

<b>Zink</b>				
Schichtdicke vor der Düse	$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$	$\sim 0,1$	mm	
<b>Abblasgas</b>				
Druck in der Düsenkammer		$(50 \div) 600$	mbar	
Gas-Volumenstrom		$< 6000$	Nm <sup>3</sup> /h	
<b>Geometrie</b>				
Normalabstand Düse-Band	$H_j^*$	$5 \div 30$	mm	wenn möglich 10 mm
Düsenpalt	$D_j^*$	$1,2 \div 1,4$	mm	
Abstand Düse-Badspiegel		$< 0,3$	m	
<b>Band</b>				
Bandgeschwindigkeit	$U^*$	$< 160$	m/min	
Bandbreite		$0,5 \div 1 \div 2$	m	
Banddicke		$0,25 \div 2$	mm	
Oberflächenrauigkeit		$0,6 \div 1,0$	mm	

**Tabelle D.1:** Prozeßdaten.

### D.2 In den Berechnungen verwendete Einstellung

Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurde für den Referenzfall eine Einstellung gemäß Tabelle D.2 ausgewählt. Die sich daraus ergebenden Referenzgrößen und dimensionslosen Kennzahlen sind in Tabelle D.8 zusammengefaßt dargestellt.

Die Werte für die vom Referenzszenario (Tabelle D.2) abweichenden Düsenabstände und Bandgeschwindigkeiten sind in den Tabellen D.3 und D.4 angegeben. Die daraus resultierenden numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen D.9 und D.10 dargestellt.

<b>Abblasgas Luft</b>				Luft, 20 °C
Dichte	$\rho_j^*$	1,188		kg/m <sup>3</sup>
Dynamische Viskosität	$\nu_j^*$	153,5 · 10 <sup>7</sup>		m/s <sup>2</sup>
Austrittsgeschwindigkeit	$V_j^*$	300		m/s
<b>Geometrie</b>				
Abstand Düse-Band	$H_j^*$	0,4		m
Spaltbreite der Düse	$D_j^*$	0,002		m
Bandgeschwindigkeit	$U^*$	0,1		m/s
<b>Zink-Al 0,2%</b>				(Tabelle F.1)
Dichte	$\rho^*$	6,5 · 10 <sup>3</sup>		kg/m <sup>3</sup>
Dynamische Viskosität	$\mu^*$	3,5 · 10 <sup>-3</sup>		kg/ms
Oberflächenspannung	$\sigma^*$	0,78		kg/s <sup>2</sup>

Tabelle D.2: Parameter für den als Referenzszenario gewählten Betriebszustand.

<b>Abstand Düse-Band <math>H_j^*</math></b>			
	m	Legende	Abbildung
<b>2.</b>	0,4	$h(p,\tau,\sigma)$	5.5
<b>7.</b>	0,2	$\underline{h}(p,\tau,\sigma)$	5.5
<b>8.</b>	0,6	$\bar{h}(p,\tau,\sigma)$	5.5

Tabelle D.3: Düsenabstand für die in der Tabelle 5.1 gelisteten Fälle 7 und 8.

<b>Bandgeschwindigkeit <math>U^*</math></b>			
	m/s	Legende	Abbildung
<b>2.</b>	0,1	$h(p,\tau,\sigma)$	5.6
<b>9.</b>	0,02	$\underline{\underline{h}}(p,\tau,\sigma)$	5.6
<b>10.</b>	0,5	$\bar{\bar{h}}(p,\tau,\sigma)$	5.6

Tabelle D.4: Bandgeschwindigkeiten für die in der Tabelle 5.1 gelisteten Fälle 9 und 10.

Die Parameter, bei denen der Anfahrvorgang versagt, finden sich in der Tabelle D.5, die für die Berechnungen mit Oberflächenstörung und Bandschwingung in den Tabellen D.6 und D.7.

<b>Versagen des Abblasens</b>			
	$h _{t=0}$	$H_j^*$	Abbildung
Zu große Schichtdicke	2,5	1,0	6.3
Zu geringe Schichtdicke	0,14	0,4	6.4

**Tabelle D.5:** Parameter, bei denen das Abblasen versagt (siehe Kapitel 6.1).

<b>Elliptische Störung</b>				
	$x_h$	$\Delta x_h$	$\Delta h_h$	Abbildung
Erhöhung oberhalb $x_c$	-6,0	3,0	0,2	6.5
Einbuchtung oberhalb $x_c$	-6,0	3,0	-0,2	6.6
Erhöhung unterhalb $x_c$	4,5	3,0	0,2	6.7
Einbuchtung unterhalb $x_c$	4,5	3,0	-0,12	6.8

**Tabelle D.6:** Parameter für die Oberflächenstörungen aus Kapitel 6.2.

<b>Bandschwingung</b>		
$t_p$	$\Delta D_j$	Abbildung
20,0	$0,2 \cdot D_j$	6.9, 6.10

**Tabelle D.7:** Parameter für die Berechnung der Bandschwingung aus Kapitel 6.3.

## D.3 Lösungen

Dimensionslose Kennzahlen				
Schlankheitsparameter	$\lambda$		0,000 69	
Froude-Zahl	Fr		0,097	
Euler-Zahl	Eu		0,300	
Reynolds-Zahl	Re		19 900	
Reduzierte Bond-Zahl	$B_{\text{red}}$		$7,3 \cdot 10^{-7}$	
Reynolds-Zahl des Freistrahls	$Re_j$		46 400	
Referenzgrößen Beschichtung				
Referenzzeit	$T^*$		0,010 19	s
Charakteristische Länge in $x$ -Richtung	$B^*$		0,107	m
Charakteristische Länge in $y$ -Richtung	$H^*$		$7,4 \cdot 10^{-5}$	m
Referenzgeschwindigkeit in $x$ -Richtung	$U^*$		0,1	m/s
Referenzgeschwindigkeit in $y$ -Richtung	$V^*$		$6,9 \cdot 10^{-5}$	m/s
Referenzvolumenstrom	$\dot{Q}_0^*$		$7,4 \cdot 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
Referenzgrößen Jet				
Referenzschubspannung	$\tau_0^*$		4,72	N/m <sup>2</sup>
Druck im Staupunkt des Freistrahls	$p_s^*$		2 056	N/m <sup>2</sup>
Schubspannungsverteilung				
Schnittpunkt von $\tau_{\text{imp}}$ und $\tau_{\text{wj}}$	$x_s$		2,569 92	–
Schubspannung in $x_s$	$\tau_j(x_s)$		3,281 72	–
Faktor $\alpha_j$	$\alpha_j$		11,79	–
Faktor $\beta_j$	$\beta_j$		0,190 239	–
Lösungen				
Kritischer Punkt	$x_c$		–2,561	–
Schichtdicke im kritischen Punkt	$h_{0,c}$		0,280	–
Führender Term des Volumenstroms pro Tiefeneinheit	$\dot{Q}_0$		0,144	–
Term 1. Ordnung des Volumenstroms pro Tiefeneinheit	$\dot{Q}_1$		$3,7 \cdot 10^{-5}$	–

Tabelle D.8: Lösungen für das Referenzszenario aus Tabelle D.2.

Größe	Szenario			Einheit
	7. $h_0(p,\tau,\sigma)$	2. $h_0(p,\tau,\sigma)$	8. $\bar{h}_0(p,\tau,\sigma)$	
$H_j^*$	0,2	0,4	0,6	m
$H_j^*/D_j^*$	100	200	300	–
$\lambda$	0,001 38	0,000 69	0,000 46	–
Fr	0,137	0,097	0,079	–
Eu	1,202	0,300	0,134	–
Re	10 000	19 900	29 900	–
$Bo_{red}$	$58,6 \cdot 10^{-07}$	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-07}$	–
$Re_j$	46 400	46 400	46 400	–
$T^*$	0,010 19	0,010 19	0,010 19	s
$B^*$	0,054	0,107	0,161	m
$H^*$	$7,4 \cdot 10^{-05}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$	$7,4 \cdot 10^{-05}$	m
$U^*$	0,1	0,1	0,1	m/s
$V^*$	$13,8 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^{-05}$	m/s
$\dot{Q}_0^*$	$7,4 \cdot 10^{-06}$	$7,4 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-06}$	m <sup>2</sup> /s
$\tau_0^*$	4,72	4,72	4,72	N/m <sup>2</sup>
$p_s^*$	4 112	2 056	1 371	N/m <sup>2</sup>
$x_s$	2,569 92	2,569 92	2,569 92	–
$\tau_j(x_s)$	6,563 44	3,281 72	2,187 81	–
$\alpha_j$	23,58	11,79	7,86	–
$\beta_j$	0,190 239	0,190 239	0,190 239	–
$x_c$	–2,560 51	–2,561 06	–2,561 77	–
$h_{0,c}$	0,149	0,280	0,388	–
$\dot{Q}_0$	0,075	0,144	0,204	–
$\dot{Q}_1$	$-0,07 \cdot 10^{-6}$	$36,73 \cdot 10^{-6}$	$246,8 \cdot 10^{-6}$	–

**Tabelle D.9:** Von  $H_j^*$  abhängige Lösungen für die in Tabelle 5.1 gelisteten Fälle 7 und 8 (siehe auch Tabelle D.3).

Größe	Szenario			Einheit
	7. $\underline{h_0}(p,\tau,\sigma)$	2. $h_0(p,\tau,\sigma)$	8. $\overline{h_0}(p,\tau,\sigma)$	
$U_j^*$	0,02	0,1	0,5	m/s
$\lambda$	0,000 31	0,000 69	0,001 54	–
Fr	0,019	0,097	0,487	–
Eu	0,300	0,300	0,300	–
Re	4 000	19 900	100 000	–
$Bo_{red}$	$3,3 \cdot 10^{-07}$	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$16,4 \cdot 10^{-07}$	–
$Re_j$	46 400	46 400	46 400	–
$T^*$	0,002 04	0,010 19	0,050 97	s
$B^*$	0,107	0,107	0,107	m
$H^*$	$3,3 \cdot 10^{-05}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$	$16,6 \cdot 10^{-05}$	m
$U^*$	0,02	0,1	0,5	m/s
$V^*$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$	$77,2 \cdot 10^{-05}$	m/s
$\dot{Q}_0^*$	$0,7 \cdot 10^{-06}$	$7,4 \cdot 10^{-6}$	$82,8 \cdot 10^{-06}$	m <sup>2</sup> /s
$\tau_0^*$	2,11	4,72	10,6	N/m <sup>2</sup>
$p_s^*$	2 056	2 056	2 056	N/m <sup>2</sup>
$x_s$	2,569 92	2,569 92	2,569 92	–
$\tau_j(x_s)$	7,338 15	3,281 72	1,467 63	–
$\alpha_j$	26,36	11,79	5,27	–
$\beta_j$	0,190 239	0,190 239	0,190 239	–
$x_c$	–2,568 06	–2,561 06	–2,531 84	–
$h_{0,c}$	0,134	0,280	0,505	–
$\dot{Q}_0$	0,067	0,144	0,274	–
$\dot{Q}_1$	$-0,08 \cdot 10^{-6}$	$36,73 \cdot 10^{-6}$	$708,9 \cdot 10^{-6}$	–

**Tabelle D.10:** Von  $U^*$  abhängige Lösungen für die in Tabelle 5.1 gelisteten Fälle 9 und 10 (siehe auch Tabelle D.4).

# E Parameter für das Softwarepaket zink

Das im Zuge dieser Arbeit entwickelte Programm `zink` bestimmt mit Hilfe einer vorgegebenen Düsenkonfiguration die Schub- und Schubspannungsverteilung beim Auftreffen auf eine ebene Platte. Diese Verteilungen dienen als Eingangsgrößen, um die stationäre Verteilung der Beschichtungsdicke zu berechnen. Desweiteren können Anfahreffekte und instationäre Betriebszustände ermittelt werden. Die Lösungen können sowohl in Dateien gespeichert, als auch graphisch aufbereitet am Bildschirm ausgegeben werden. Das Verhalten des Softwarepakets wird über die Eingabedatei `zink.ini` gesteuert.

## E.1 Kommandozeilenparameter

Als einziger Parameter auf der Kommandozeile ist `-no-stop` erlaubt. Dieser bewirkt, daß der Programmablauf am Ende der Berechnungen nicht zur Betrachtung der graphischen Ausgabe angehalten wird, sondern das Programm wird regulär beendet. Damit lassen sich unbeaufsichtigt mehrere Berechnungen hintereinander ausführen.

## E.2 Eingabedatei `zink.ini`

Die Eingabedatei `zink.ini` folgt der üblichen Konvention von Initialisationsdatei und gruppiert die Parameter, die als `parameter = Wert` geschrieben werden, in einzelne Sektionen.

**Tabelle E.1:** Eingabeparameter für das Softwarepaket `zink`.

Sektion bzw. Parameter	Typ	Vorgabe	Einheit	Bemerkung
[Behaviour]	Generelle Einstellungen des Programms			
<code>pressure</code>	bool	No	—	Wird die Druckverteilung $p_j$ im Freistrahл berücksichtigt?
<code>shearstress</code>	bool	No	—	Wird die Schubspannungsverteilung $\tau_j$ im Freistrahл berücksichtigt?
<code>surfacetension</code>	bool	No	—	Wird die Oberflächenspannung $\sigma$ des Beschichtungsmaterials berücksichtigt?

unsteady	bool	No	—	Soll die instationären Lösung mit vorgegebener Anfangsverteilung der Beschichtung berechnet werden („Anfahreffekt“)?
periodic	bool	No	—	Soll die periodisch instationären Lösungen berechnet werden?
<hr/>				
[Domain]	Orts- und Zeitdiskretisierung			
x_lower	double	—	m/-	Untere Grenze des Rechengebiets
x_upper	double	—	m/-	Obere Grenze des Rechengebiets
x_dim	bool	No	—	Sind die Angaben der Grenzen x_lower und x_upper dimensionsbehaftet?
x_delta	double	—	m/-	Schrittweite $\Delta x$ der Ortsdiskretisierung
x_delta_dim	bool	No	—	Ist die Angabe der Schrittweite x_delta dimensionsbehaftet?
t_start	double	—	s/-	Startzeit für die instationäre Berechnung
t_end	double	—	s/-	Endzeit für die instationäre Berechnung
t_dim	bool	No	—	Sind die Werte t_start und t_end dimensionsbehaftet?
<hr/>				
[Initial thickness]	Anfangsverteilung der Schichtdicke falls unsteady=Yes			
stationary	double	1,0	—	Anteil der stationären Verteilung
constant	double	0,0	m/-	Konstanter Anteil
constant_dim	bool	No	—	Ist der Wert constant dimensionsbehaftet?
hump_amplitude	double	0,0	m/-	Erzeugt eine elliptische Höcker um hump_center ( $x_h$ ) mit der Breite hump_width ( $\Delta x_h$ ) und der Höhe hump_amplitude ( $h_h$ )
hump_center	double	0,0	m/-	siehe hump_amplitude
hump_width	double	0,0	m/-	siehe hump_amplitude
hump_dim	bool	No	—	Sind die Angaben hump_amplitude, hump_center und hump_width dimensionsbehaftet?
<hr/>				
[Periodic]	Einstellungen des zeitlichen Verhaltens falls unsteady=Yes			
period	double	0,0	s/-	Periodendauer $t_p$ der Abstandschwankung
period_dim	bool	No	—	Ist der Wert period dimensionsbehaftet?

amplitude	double	0,0	m/–	Amplitude $\Delta D_j$ der Abstandsschwankung
amplitude_rel	bool	No	—	Ist <code>amplitude</code> relativ zu <code>distance</code> angegeben? (Oder als absoluter, dimensionsbehafteter Wert?)
<hr/>				
[Jet geometry]	Geometrie der Freistrahldüse			
distance	double	—	m	Normalabstand Düse-Band $H_j^*$
nozzlegap	double	—	m	Spaltbreite der Düse $D_j^*$
pressure_factor_a	double	38,5	—	Faktor $\alpha_P$ (B.2b)
tau_imp_factor_a	double	0,058	—	Faktor $\alpha_{imp}$ (B.7)
tau_imp_factor_b	double	6,2	—	Faktor $\beta_{imp}$ (B.7)
tau_wj_factor_a	double	0,04	—	Faktor $\alpha_{wj}$ (B.8)
tau_wj_factor_b	double	1,0	—	Faktor $\beta_{wj}$ (B.8)
tau_wj_factor_c	double	0,0	—	Faktor $\gamma_{wj}$ (B.8)
<hr/>				
[Jet]	Eigenschaften des Abblasgases			
density	double	1,188	kg/m <sup>3</sup>	Dichte $\rho_j^*$
viscosity	double	$153,5 \cdot 10^{-7}$	kg/m/s	Dynamische Zähigkeit $\mu_j^*$
velocity	double	—	m/s	Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse $V_j^*$
<hr/>				
[Coating]	Stoffeigenschaften des Beschichtungsmaterials			
density	double	—	kg/m <sup>3</sup>	Dichte $\rho^*$
viscosity	double	—	kg/m/s	Dynamische Zähigkeit $\mu^*$
surfacetension	double	—	kg/s <sup>3</sup>	Oberflächenspannung $\sigma^*$
<hr/>				
[Substrate]	Eigenschaften des Bandmaterials			
velocity	double	—	m/s	Geschwindigkeit $U^*$
<hr/>				
[Solver control]	Eigenschaften der Gleichungslöser			
max_iterations	integer	—	—	Maximal mögliche Anzahl von Iterationsschritten
series_iterations	integer	3	—	Anzahl der Terme in Taylorreihenentwicklungen
explicit_source	bool	No	—	Soll der Quellterm im instionären Fall explizit berechnet werden?
xtolerance_abs	double	1	—	Absolute Rechengenauigkeit
xtolerance_rel	double	1	—	Relative Rechengenauigkeit
max_timesteps	integer	10000	—	Maximal mögliche Anzahl der Zeitschritte, bevor das Programm abbricht

<sup>1</sup>Maschinenabhängige Konstante. Dieser Wert wird in der GSL-Programmbibliothek [GDT<sup>+</sup>04] als Macro `GSL_DBL_EPSILON` definiert.

nout	integer	—	—	Anzahl der graphischen Ausgaben im gesamten Zeitintervall
nout_log	bool	No	—	Soll das gesamte Zeitintervall in nout logarithmisch verteilte Unterintervalle geteilt werden?
halt_on	bool	No	—	Soll das Programm abbrechen, falls Inkonsistenzen beim Programmablauf auftreten?
plot_progress	bool	Yes	—	Soll bei der Berechnung des kritischen Punkts der Fortschritt graphisch angezeigt werden?
plot_results	bool	Yes	—	Soll die Ausgabe auch graphisch erfolgen?
save_plplotmeta	bool	Yes	—	Soll die graphische Ausgabe als PLPlot-Datei gespeichert werden?
save_postscript	bool	Yes	—	Soll die graphische Ausgabe als PostScript-Datei gespeichert werden?
save_xfig	bool	Yes	—	Soll die graphische Ausgabe als xfig-Datei gespeichert werden?
save_steadydata	bool	Yes	—	Soll das Ergebnis der stationären Berechnung in einer Daten-Datei gespeichert werden?
save_unsteadydata	bool	Yes	—	Soll das Ergebnis der instationären Berechnungen in einer Daten-Datei gespeichert werden?
print_timesteps	bool	Yes	—	Soll beim Berechnen der instationären Lösung jeder einzelne Zeitschritt ausgegeben werden?
[Misc]	Sonstige allgemeine Einstellungen			
gravity	double	9,81	m/s <sup>2</sup>	Die Erdbeschleunigung $g^*$

## F Materialwerte für Zinklegierungen

<b>Reines Zink</b>			[SBB92]
Schmelztemperatur	$\vartheta_{mp}$	419	°C
Dichte	$\rho_0$	6,575	g/cm <sup>3</sup>
$\rho = \rho_0 + (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d\rho}{d\vartheta}$	$\frac{d\rho}{d\vartheta}$	-1,10	mg/cm <sup>3</sup> K
Dynamische Viskosität im Schmelzpunkt	$\mu_{mp}$	3,85	mNs/m <sup>2</sup>
Dynamische Viskosität	$\mu_0$	0,4131	mNs/m <sup>2</sup>
$\mu = \mu_0 e^{\frac{E}{R \cdot \vartheta [K]}}$	$E$	12,7	kJ/mol
	$R$	8,3144	J/Kmol
Oberflächenspannung	$\sigma$	782	mN/m
$\sigma = \sigma_0 + (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d\sigma}{d\vartheta}$	$\frac{d\sigma}{d\vartheta}$	-0,17	mN/mK
<b>Zink-Al 0,2%</b>			[Wag90]
Dichte	$\rho$	6,5 · 10 <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Dynamische Viskosität	$\mu$	3,5 · 10 <sup>-3</sup>	kg/ms
Kinematische Viskosität	$\nu$	0,538 · 10 <sup>-6</sup>	m <sup>2</sup> /s
Oberflächenspannung	$\sigma$	0,78	kg/s <sup>2</sup>
<b>Galfan (Zn-Al 5%)</b>			[Wag90]
Dichte	$\rho$	6,0 · 10 <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Dynamische Viskosität	$\mu$	2,8 · 10 <sup>-3</sup>	kg/ms
Kinematische Viskosität	$\nu$	0,467 · 10 <sup>-6</sup>	m <sup>2</sup> /s
Oberflächenspannung	$\sigma$	0,79	kg/s <sup>2</sup>

**Tabelle F.1:** Materialeigenschaften von flüssigem Zink und einigen ausgewählten Zinklegierungen.

# Literaturverzeichnis

- [BMA<sup>+</sup>95] BUCHLIN, J.-M., M. MANNA, M. ARNALSTEEN, M.L. RIETHMULLER und M. DUBOIS: *Theoretical and Experimental Investigation of Gas-Jet Wiping*. preprint 1995-41, von Kàrmàn Institute, Belgium, 1995.
- [BR73] BELTAOS, SPYRIDON und N. RAJARATNAM: *Plane Turbulent Impinging Jets*. Journal of Hydraulic Research, 11(1):29–59, 1973.
- [Buc97] BUCHLIN, J.-M.: *Modelling of Gas Jet Wiping*. In: *Lecture Series 1997-06 „Thin Liquid Films and Coating Processes”*. Belgium, May 26-29 1997.
- [DDKK95] DAVENE, J., L. DONDIN, J.K. KIM und S.J. KIM: *Dynamic Air Knives: DAK®*. In: *Galvatech '95 Conference Proceedings*, 1995.
- [GDT<sup>+</sup>04] GALASSI, M., J. DAVIES, J. THEILER, B. GOUGH, R. PRIEDHORSKY, G. JUNGMAN und M. BOOTH: *GSL - The GNU Scientific Library*. <http://www.gnu.org/software/gsl/>, 1996-2004.
- [HK02] HELMA, STEPHAN und ALFRED KLUWICK: *Steady and Unsteady Jet Wiping Processes*. In: *PAMM*, Band 1, Seiten 327 – 328, <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/abstract/93513208/ABSTRACT>, 2002. GAMM.
- [Joh97] JOHNSON, ROBIN STANLEY: *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Kapitel Appendix B, Seite 445. Cambridge University Press, 1997.
- [LeV97] LEVEQUE, RANDALL J.: *CLAWPACK Software and User Notes*. <http://www.amath.washington.edu/~rjl/clawpack.html>, 1997.
- [LL91] LANDAU, L.D. und E.M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI - Hydrodynamik*. Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1991.
- [PTVF95] PRESS, WILLIAM H., SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING und BRIAN P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Second Edition 1992 Auflage, 1995.
- [Raj76] RAJARATNAM, N.: *Turbulent Jets*. 5. Developments in Water Science, 1976.
- [RS95] RUDISCHER, CHRISTIAN und HERBERT STEINRÜCK: *Meniskus und Schmierspalt*. Technischer Bericht, Christian Doppler Labor für kontinuierliche Erstarrungsvorgänge, Wiedner Hauptstraße 7 1040 Wien, 1995.

- [Rus85] RUSCHAK, KENNETH J.: *Coating Flows*. Ann. Rev. Fluid Mech., 17:65–89, 1985.
- [SBB92] SMITHELLS, COLIN J., ERIC A. BRANDES und G.B. BROOK: *Smithells Metals Reference Book*, Kapitel 14, Seiten 7–8. 7 Auflage, 1992.
- [SG97] SCHLICHTING, HERRMANN und KLAUS GERSTEN: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, 1997.
- [TG76] THORNTON, JOHN A. und HART F. GRAFF: *An Analytical Description of the Jet Finishing Process for Hot-Dip Metallic Coatings on Strip*. Metallurgical Transactions B, 7B:607–618, 1976.
- [Tor97] TORO, ELEUTERIO F.: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1997.
- [Wag90] WAGNER, K.: *Untersuchung der gasdynamischen Eigenschaften von Abstreifdüsen*. 1990.

# Lebenslauf

29. Juni 1967	geboren in Wien
Mai 1985	Matura am BGBRG Wien 14, Astgasse 3
1985-1993	Studium „Maschinenbau – Schiffstechnik“ an der Technischen Universität Wien
1993/94	Studium „Naval Architecture – Small Craft Technology“ an der University of Newcastle, UK
1994/95	Diplomarbeit „Strömungstechnische Untersuchungen in einem Lungenmodell unter verschiedenen Beatmungsformen“ am Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung, Technische Universität Wien
Mai 1995	Sponision an der Technischen Universität Wien
seit 1995	Freiberufliche Tätigkeit als Konsulent und Planer im Bereich Schiffstechnik
Feb. 1997 – Juli 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der „Energieverwertungsagentur E.V.A.“, Wien
Okt. 1998 – Dez. 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am „Österreichischen Forschungs- und Prüfzentrum arsenal research“, Wien
Jän. 1999 – Aug. 2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am „Christian-Doppler Laboratorium“, Wien
Mai 2000	Ziviltechnikerprüfung
Feb. 2001	Vereidigung als Ingenieurkonsulent für „Maschinenbau – Schiffstechnik“
seit Sept. 2001	Universitätsassistent am Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung, Technische Universität Wien