
DISSERTATION

**NUMERISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN
ZUR UMFORMUNG EBENER IN DOPPELT GEKRÜMMTE
FLÄCHENTRAGWERKE**

DOCTORAL THESIS

**NUMERICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS
REGARDING THE TRANSFORMATION OF FLAT SLABS
TO DOUBLE CURVED SHELLS**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Clemens F. Preisinger
Matrikelnummer 9325295
Kenyongasse 22/17, 1070 Wien, Österreich

Referent: O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.-Ing. Johann Kollegger, M.Eng.
Institut für Stahlbeton- und Massivbau, Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/212, 1040 Wien, Österreich

Koreferent: O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Ulrich Schneider
Institut für Hochbau und Technologie, Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/212, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Jänner 2006

.....

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Umformung eben hergestellter Flächentragwerke in doppelt gekrümmte und somit nicht abwickelbare Strukturen unter der gezielten Anwendung äußerer Einwirkungen. Einer Darstellung der dazu erforderlichen Verfahrensschritte folgt die Beschreibung der grundlegenden Anforderungen hinsichtlich des eingesetzten Materials sowie der Geometrie der ebenen Ausgangsform. Letztere muss so beschaffen sein, dass sich die beträchtlichen Dehnungen der Mittelfläche, die im Zuge der Transformation von abwickelbarer zu nicht abwickelbarer Konfiguration auftreten, ausbilden können.

Die Ableitung der geometrischen Zusammenhänge zwischen doppelt gekrümmter und ebener Form erfolgt für den Spezialfall rotationssymmetrischer Schalen, die auch den Schwerpunkt der weiteren in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen bilden. Deren verebnete Anfangsformen lassen sich in statischer Hinsicht vereinfacht als polar orthotrope Kreisplatten behandeln. Ausgehend von der Biegetheorie isotroper Kreisplatten für kleine Deformationen erfolgt die Erweiterung auf polar orthotropes Material sowie der Übergang zur Theorie flacher Schalen. Dies schafft die Voraussetzungen zur mathematischen Behandlung der umzuformenden Struktur am Anfang des Transformationsprozesses, wenn die auftretenden Verformungen noch klein sind.

Für die korrekte Beschreibung des Verhaltens der Struktur in späteren Stadien der Umformung muss statt der Plattenbiege- die Schalenbiegetheorie zur Anwendung kommen. Diese wird für rotationssymmetrisch belastete Vieleckkuppeln und Drehschalen aus polar orthotropem Material formuliert.

Dem in dieser Arbeit beschriebenen Konzept zur Bemessung der ebenen Ausgangsformen, welches auf der Schalenbiegetheorie basiert, liegt die Tatsache zu Grunde, dass die im Zuge des Transformationsprozesses auftretenden Verformungen sich als Differenz zwischen bekannter Ziel- und Anfangslage berechnen lassen. Der Nachweis der Funktionstüchtigkeit des in Fortran programmierten Bemessungsalgorithmus für linear sowie nichtlinear elastisches Materialverhalten erfolgt anhand mehrerer Beispiele. Zur Kontrolle der Ergebnisse dienen Vergleichsrechnungen mittels Finiter Elemente Methode.

Diese Arbeit widmet sich neben numerischen auch experimentellen Untersuchungen an Modellschalen aus Stahlbeton bzw. glasfaserbewehrtem Eis. Den Ausgangspunkt stellt eine übersichtsmäßige Beschreibung des Versuchsprogramms dar, welches Laborversuche an Schalen mit Anfangsdurchmessern von $5m$ aber auch Großversuche beinhaltet. Es folgt eine detaillierte Erörterung der im Labor des Instituts für Tragkonstruktionen durchgeführten Experimente, sowie der daraus gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich konstruktiver Durchbildung der ebenen Anfangsformen und Ablaufsteuerung des Umformungsprozesses.

Abstract

This thesis deals with the transformation of flat slabs to double bent shells by means of the application of external forces. First a description of the basic principle and steps necessary to achieve that transformation is given. A discussion of the conditions to be met by the materials and geometry used for the initially plain structure follows. The geometry must be such, that the strains in the middle surface of the structure, which develop in the course of transformation to its final double bent configuration are not inhibited.

The geometrical connection between flat and double bent surfaces gets mathematically explored for the special case of axisymmetric shells. On these rests the main emphasis of the investigations contained in this thesis. Their flat initial forms can be conceived as polar orthotropic circular plates. Starting from the bending theory of isotropic plates with small deflections, extensions are made that allow for the inclusion of polar orthotropic material behavior as well as the consideration of flat shell problems. This paves the ground for the mathematical treatment of slabs at the beginning of the transformation process when the maximum deformation is still small.

A correct description of such structures at later stages of their transformation to shells necessitates the application of shell- instead of plate-bending-theory. Such a theory is formulated for the case of rectangular domes as well as for axisymmetric shells with polar orthotropic material behavior under the action of axisymmetric loads.

The presented design concept for the initially flat structures is based upon shell-bending-theory and on the fact that the deflections occurring during the transformation from flat to double curved configuration can be calculated as the difference between target- and initial geometry. The performance of the design algorithm which was implemented by using Fortran is demonstrated by solving several design problems involving linear as well as non-linear elastic material behavior. The resulting designs are checked by using them as input for subsequent Finite Element calculations.

This thesis is not only devoted to numerical but also includes experimental investigations comprising model shells made of reinforced concrete and ice rein-

forced with glass-fibre-mats. A description of the experimental program which included small shells of initial diameters of $5m$ as well as larger scale experiments serves as the starting point. This is followed by a detailed account of the experiments performed at the laboratory of the Institute for Structures and the conclusions to which they led regarding structural design of the initially flat slabs and fine tuning of the transformation process.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Beweggründe für diese Arbeit	1
1.2	Geschichtlicher Überblick über die Entwicklung des Schalenbaus .	2
1.3	Verfahren zum Bau räumlich gekrümmter Schalen — Stand der Technik	5
2	Umformung ebener Flächentragwerke	11
2.1	Grundidee und Verfahrensschritte	11
2.2	Wahl eines Fugenmaterials	13
2.3	Die Verebnung rotationssymmetrischer Flächen	16
2.4	Numerische Behandlung des Umformungsprozesses	21
3	Polar orthotrope Kreisplatten	23
3.1	Die vereinfachte Behandlung des Umformungsprozesses mittels po- lar orthotroper Kreisplatten	23
3.2	Symmetrisch verformte, polar orthotrope Kreisplatten	26
3.2.1	Kreisplatte mit kleinen Verformungen	26
3.2.2	Polar orthotrope Kreisplatte belastet durch Normalkräfte in Plattenebene	34
4	Von Platten- zu Schalenbiegetheorie	44
4.1	Verformungsenergie in polar orthotropen Kreisplatten	44
4.2	Membrantheorie rotationssymmetrischer Schalen	48
4.2.1	Grundlegendes	48
4.2.2	Gleichgewichtsbedingungen für Drehschalen unter rotati- onssymmetrischer Belastung	49
4.2.3	Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen	51
4.2.4	Einschränkungen bei der Wahl der Schalenform	53
4.3	Biegung rotationssymmetrischer Schalen unter axialsymmetrischen Lasten	54
4.3.1	Grundlegendes	54

4.3.2	Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und konstitutiven Beziehungen	55
4.4	Biegung von Vieleckkuppeln unter axialsymmetrischen Lasten . . .	57
4.5	Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen	60
5	Bemessung der Tragwerkskomponenten	62
5.1	Die Grundidee	62
5.2	Grundlagen für die Dimensionierung der Segmentfugen	62
5.3	Grundlagen für die Dimensionierung der Kuppelsegmente	64
5.4	Parameterstudien bezüglich der Schnittgrößen in Vieleckkuppelsegmenten	66
5.5	Dimensionierung der Kuppelsegmente unter Zugrundelegung linear elastischen Materialverhaltens	72
5.5.1	Beispiele und Vergleichsrechnungen mittels FEM	72
5.5.2	Verformungsberechnungen für Vieleckkuppelsegmente	83
5.5.3	Beispiel: Beullast eines linear elastischen Vieleckkuppelsegments	91
5.5.4	Querschnittsdimensionierung unter Berücksichtigung der elastischen Beullast der Schalensegmente	96
5.6	Dimensionierung der Kuppelsegmente unter Zugrundelegung nichtlinearen Materialverhaltens	102
5.6.1	Bemessung von Kuppelsegmenten unter Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens	104
5.6.2	Bemessung eines Plattenstreifens für reine Biegung	108
5.6.3	Bemessung eines Plattenstreifens für veränderliches Moment	109
5.6.4	Bemessung eines Vieleckkuppelsegments unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität	115
6	Experimentelle Untersuchungen	120
7	Laborversuche mit Beton- und Eisschalen	125
7.1	Stahlbetonschale mit Durchmesser 5.2m	125
7.1.1	Beschreibung der ebenen Ausgangsform	125
7.1.2	Umformung von ebener Ausgangs- in gekrümmte Ziellage	129
7.1.3	Durchführung und Ergebnisse des Traglastversuchs	134
7.2	Versuche mit Eisschalen	138
7.2.1	Überblick	138
7.2.2	Erster Eisschalenversuch	142
7.2.3	Zweiter Eisschalenversuch	145
7.2.4	Dritter Eisschalenversuch	148
7.2.5	Vierter Eisschalenversuch	151

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	viii
7.2.6 Fünfter Eisschalenversuch	154
8 Zusammenfassung	158

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Beweggründe für diese Arbeit

Räumlich gekrümmte Flächentragwerke findet man in der Natur dort, wo es darauf ankommt, Volumina mit möglichst geringem Materialaufwand zu umschließen. Als Beispiele für vollflächige Schalen seien etwa Muscheln, Schneckenhäuser oder Eischalen genannt. Wie die Hüllen von Kieselalgen verdeutlichen [20], bleiben die günstigen Trageigenschaften solcher Strukturen global gesehen selbst dann erhalten, wenn diese eine große Zahl von Durchbrüchen aufweisen und daher lokal eher als Stabwerk funktionieren.

Das Besondere an der Lastabtragung räumlich gekrümmter Strukturen, die man auch als Schalen bezeichnet, ist, dass diese hauptsächlich durch Normalkräfte in Schalenmittelebene — sogenannte Membrankräfte — erfolgt. Biegemomente, die zu einer ungleichmäßigen und somit weniger effektiven Beanspruchung des zur Verfügung stehenden Querschnitts führen, treten nur in sehr geringem Umfang auf. Aber nicht nur ihre statische Effizienz, sondern auch die Möglichkeit neuartige, ungewöhnliche, biomorphe Formen zu kreieren, sprechen für den Einsatz von Schalen im Bauwesen.

Der Hauptgrund dafür, dass sich derzeit der Bau räumlich gekrümmter Flächentragwerke auf einige wenige Prestigebauten mit besonders hohen architektonischen Ansprüchen beschränkt, liegt in den Herstellungskosten. Möchte man konventionelle Baustoffe (z.B. Bleche, Schaltafeln), die nur in ebener Form vorliegen, als Schalenbaustoff verwenden, muss die oft komplizierte Schalengeometrie facettenartig angenähert werden. Der damit einhergehende große Arbeitsaufwand macht in Ländern mit hohen Lohnkosten die Errichtung von Schalentragwerken teuer.

Nach [17] betragen bei konventioneller Bauweise in Stahlbeton die Aufwände für Schalung und Gerüstanbringung 60% bis 70% der Gesamterstellungskosten.

Zur Herstellung von Stahlbetonschalen benötigt man nämlich nicht nur eine doppelt gekrümmte Schalung, sondern auch einen entsprechend tragfähigen Unterbau zur Aufnahme der Frischbetonlasten. Im Vergleich zur Ausführung ebener Stahlbetonplatten zieht das Betonieren schräger, räumlich gekrümmter Stahlbetonflächen weiters in folgenden Punkten einen erhöhten Arbeitsaufwand nach sich:

- In Abhängigkeit von der Konsistenz der verwendeten Betonmischung ist für schräge Betonflächen ab einem Neigungswinkel zwischen 30° und 40° die Verwendung einer Doppelschalung erforderlich. Diese kann aufgrund des aufzunehmenden Flüssigkeitsdrucks des Frischbetons recht massiv ausfallen.
- Die Bewehrung soll der Schalengeometrie folgen, im Idealfall den in der Schale auftretenden Zugspannungstrajektorien. Die Tatsache, dass sich Bewehrungsmatten nur zu einfach gekrümmten Flächen verbiegen lassen, erschwert ihren Einsatz in doppelt gekrümmten Stahlbetonschalen. Der Einbau gekrümmter Bewehrungsstäbe bereitet Probleme in Bezug auf die Einhaltung der erforderlichen Lagegenauigkeit der Bewehrung.
- Das Einbringen und Verdichten von Frischbeton auf geneigten Flächen verlangt viel Geschick und Sorgfalt seitens des ausführenden Personals.

Diese Faktoren haben dazu geführt, dass derzeit eher Gitterschalen aus Holz- oder Stahlelementen bzw. Membrankonstruktionen zur Ausführung gelangen und weniger Schalen aus Stahlbeton [19].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Methode, welche in ihren Ursprüngen auf Peter E. Ellen zurückgeht ([12], [13]) und darin besteht, eine eben hergestellte Platte durch Anwendung von Vorspannung in eine räumlich gekrümmte Schale umzuformen (siehe auch [26], [27]). Der daraus resultierende Vorteil liegt auf der Hand: Die Herstellung einer ebenen Form kann viel einfacher und somit kostengünstiger erfolgen als bei einer räumlich gekrümmten Struktur. Neben Schalen aus Stahlbeton werden in dieser Arbeit auch gekrümmte Flächentragwerke aus glasfaserbewehrtem Eis behandelt. Letztere eignen sich auf Grund ihrer materialbedingten Vergänglichkeit für temporäre Bauwerke in kaltem Klima — etwa im Rahmen von Wintersport- oder sonstigen Veranstaltungen. Zusammen mit der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Herstellungsmethode ergeben sich so neue, interessante Einsatzmöglichkeiten von Schalentragwerken.

1.2 Geschichtlicher Überblick über die Entwicklung des Schalenbaus

Der Bau echter, als Flächentragwerke wirkender Kuppeln nimmt seinen Anfang in Rom. Zwischen dem 1. Jahrhundert vor und dem 3. Jahrhundert n. Chr. entstehen

dort Tempel, Thermen und Paläste mit Kuppeln aus sogenanntem Römischen Beton [19]. Das Pantheon, gebaut unter Kaiser Hadrian zwischen 118 bis 125 n. Chr. blieb mit einer lichten Weite des Innenraums von $43.39m$ bis ins Jahr 1913 die größte Kuppel der Welt. Das Hauptproblem damaliger Kuppelbauten lag mangels Verfügbarkeit geeigneter zugfester Materialien in der Ableitung des an der Schalengrundfläche auftretenden Horizontalschubs. Im Falle des Pantheons wurde dies durch eine geeignete Abstimmung zwischen Dichte des eingesetzten Baumaterials, Schalendicke und -geometrie gelöst [19].

Einen weiteren Meilenstein für die Entwicklung des Schalenbaus stellt die 537 fertiggestellte Hagia Sophia dar. Eine Hauptkuppel sowie zwei direkt anschließende Halbkuppeln überspannen einen stützenfreien Raum von $75m$ auf $30m$ und einer Höhe von $55m$. Als Baumaterial kamen flache Ziegel zwischen dicken Mörtelfugen — der Mörtelanteil übertraf jenen der Ziegel — zum Einsatz. Die horizontale Nachgiebigkeit eines Teils der Kuppelauflager verursachte zwischen 557 und 1346 mehrere Teileinstürze, die jedes Mal zu Verstärkungsmaßnahmen an der Tragstruktur führten.

In geringerem Ausmaß als Ziegel und Mörtel fand Holz Anwendung im Kuppelbau. Ein Beispiel liefert der Felsendom in Jerusalem: Erbaut 691 n. Chr. überwölbt die aus Zedernholz bestehende Kuppel eine Spannweite von $20.40m$.

Wesentliche Innovationen im Kuppelbau finden zu Beginn der Neuzeit statt. Filippo Brunelli entwirft für die Domkuppel in Florenz eine Struktur, deren Haupttragelement 24 massive, radial von Kuppelbasis zu -scheitel verlaufende Rippen darstellen. Zwischen diesen spannen sich einfach gekrümmte Flächen aus doppelschaligem Ziegelmauerwerk. Die äußere, dünnere dieser Schalen dient ausschließlich dem Witterungsschutz. Mit seinen $42.0m$ Durchmesser reicht dieses Bauwerk fast an die Spannweite des Pantheons heran, seine Scheitelhöhe von $103m$ übertrifft jene des Pantheons um etwa das Doppelte. Zur Aufnahme des horizontalen Gewölbeschubs sah Brunelli mehrere Holzringe vor, welche allerdings zu schwach dimensioniert waren, um tatsächlich von Nutzen zu sein [19]. Durch eine besondere Mauerwerkstechnik war es möglich, die Kuppel ohne tragende Schalung zu errichten.

Die später erbaute Kuppel von St. Peter in Rom führte zwar zu keinen wesentlichen bautechnischen Neuerungen, im Rahmen der Beurteilung der an der Kuppel immer wieder auftretenden Risse kommt es aber zum erstmaligen Einsatz mathematischer Methoden zur Bemessung von Bauteilen. Der italienische Ingenieur Giovanni Poleni verwendet die schon seit Robert Hooke und David Gregory bekannte Analogie zwischen Stützlinie und Seilkurve zur Beurteilung der Kuppel von St. Peter.

Mit der Kuppel der St. Paul's Cathedral in London geht deren Erbauer Christopher Wren den von Brunelli eingeschlagenen Weg weiter: Mittels eines drei-

schaligen Aufbaus trennt er die Außenhülle und den inneren Raumabschluss von der Tragstruktur. Um ein möglichst gutes Tragverhalten zu gewährleisten, formt Wren die Mittelschale, welche nur die relativ leichte, aus Holz bestehende Außenschale sowie die Laterne zu tragen hat, gemäß einer umgekehrten Kettenlinie.

Mit dem Aufkommen von Eisen und ab 1860 Stahl stand zur Mitte des 19. Jahrhunderts ein Baustoff zu Verfügung, der die Konstruktion von sehr leichten, schlanken Kuppeln zuließ [41]. Bautechnisch knüpfen diese Strukturen an die von Philibert de l'Orme (1510–1570) erfundenen hölzernen Binderstrukturen an: Radiale, aus mehreren Bohlen zusammengesetzte Rippen werden durch horizontale Ringe miteinander verbunden. Für die Aufnahme nicht axialsymmetrisch wirkender Lasten müssen die Kreuzungspunkte der Rippen und Ringe biegesteif ausgeführt werden. Aus diesem Grund bezeichnet man solche Strukturen als Rahmenkuppeln. Um die biegesteife Ausbildung der Rippen-Ring-Knoten zu vermeiden, facht der Berliner Ingenieur Johann Heinrich Schwedler die horizontalen Ringe mittels kreuzweise angeordneter Stäbe aus. Mit dieser Bauweise werden mehrere sogenannte Schwedler Kuppeln mit Durchmessern bis zu $65m$ errichtet [41].

Erste Stahlbetonkuppeln entstehen am Beginn des 20. Jahrhunderts. Zunächst diente die Konstruktionsweise der Schwedler Kuppeln als Ausgangspunkt, wobei die Auskreuzungen zwischen den konzentrischen Eisenringen durch Betonscheiben ersetzt wurden. Aufgrund der beschränkten Möglichkeiten der Bemessungsverfahren ist die Mehrheit der frühen Stahlbetonkuppeln den Rippenkuppeln zuzuordnen. Da solche Strukturen ihre Lasten nicht flächenhaft, sondern linienförmig abtragen, müssen die Rippen und Ringe relativ wuchtig ausfallen. Ein Beispiel für diese Bauart stellt mit einer Spannweite von $65m$ die 1913 fertiggestellte „Jahrhunderthalle“ in Breslau dar.

Die erste als Flächentragwerk wirkende Stahlbetonschale wird 1922 erbaut: Als Kuppel für ein Planetarium entstand auf dem Dach der Firma Zeiss in Jena eine halbkugelförmige Schale mit einem Durchmesser von $16m$ und einer Wanddicke von $3cm$. Die sogenannte „Zeiss-Dywidag“-Bauweise bestand darin, zunächst ein Netz aus dreiecksförmig angeordneten Bewehrungsstäben zu errichten. Auf dieses bereits recht stabile Bewehrungsnetz wurde Spritzbeton aufgebracht. Als Untergrund dienten ein außen aufgebrachtes Drahtgewebe sowie eine entsprechend dem Baufortschritt versetzbare Schalung von $3 \times 3m$. Die größte mit diesem Verfahren hergestellte Kuppel, eine Kugelkalotte mit einem Durchmesser von $40.0m$ und einer Pfeilhöhe von $7.87m$, wies eine Wandstärke von nur $6cm$ auf.

Da rechteckige Grundrisse für die Überdachung von Industriebauten geeigneter sind als runde, wird die Entwicklung von Tonnengewölben aus Stahlbeton vorangetrieben. Für die Errichtung von Zeiss-Dywidag-Tonnengewölben diente das schon für Kuppeln verwendete Zeiss-Dywidag-Netzwerk als wiederverwendbarer Träger einer konventionellen Bretterschalung. Von Tonnengewölben ausgehend

entwickelt Franz Dischinger die Theorie der Vieleckkuppeln, die sich aus der Verschneidung zueinander gedrehter Zylinder ergeben. Zusammen mit Hubert Rüschi erbaut er zwischen 1928 und 1929 die Großmarkthalle in Leipzig: zwei achteckige Vieleckkuppel mit einer Spannweite von je $76m$ bestehend aus $9cm$ starken Zeiss-Dywidag-Schalengewölben. In Zusammenarbeit mit Ulrich Finsterwalder entsteht 1929 in Basel eine Vieleckkuppel gleichen Typs.

Ab 1930 schreitet die Entwicklung des Schalenbaus auch außerhalb Deutschlands voran. Die damit verbundenen Namen sind Robert Maillart, Pier Luigi Nervi, Eduardo Torroja und Felix Candela. Verbesserte Berechnungsmethoden und die Anwendung der Vorspannung brachten den Durchbruch für echte, als Flächentragwerk wirkende und daher sehr dünn ausführbare Stahlbetonschalen. Die Gestalt dieser Schalen beschränkte sich zunächst auf mathematisch leicht zu beschreibende Formen. 1954 begann der Schweizer Heinz Isler, auf experimentellen Formfindungsmethoden beruhende Schalen zu entwerfen. Unter anderem benutzt er die Verformung von mit Luftdruck beaufschlagten Gummimembranen als Schalenform. Da solche Membranen eine gegenüber der Dehnsteifigkeit vernachlässigbare Biegesteifigkeit aufweisen und im ausgelenkten Zustand nur Zugspannungen in ihrer Ebene auftreten, ergibt sich aus deren Form bei Belastungsumkehr eine formoptimierte Schale unter reinen Druckmembranspannungen.

Der hohe Lohnkostenanteil, der mit der Herstellung der für Stahlbetonschalen notwendigen Gussformen einhergeht, sorgte in den letzten Jahrzehnten zunehmend dafür, dass die Realisierung solcher Strukturen in Industriestaaten mit hohem Lohnniveau an Wirtschaftlichkeitsüberlegungen scheiterte. Als Konkurrenz zu Stahlbetonschalen traten außerdem andere, ökonomischere Bauweisen in Erscheinung: Gitterschalen aus Holz oder Stahl sowie Traglufthallen. Wegen der bei Traglufthallen für die Aufrechterhaltung des Innendrucks anfallenden Betriebskosten kommt dieser Tragwerkstyp in letzter Zeit seltener zur Ausführung. Mit dem von Jörg Schlaich entwickelten Gitterschalensystem wurden hingegen einige beeindruckende Bauwerke realisiert. Zu nennen sind hier die Hofüberdachung des British Museums, die Kuppel über dem Hallenbad in Neckarsulm sowie die Überdachung eines Museumshofs in Hamburg [19].

1.3 Verfahren zum Bau räumlich gekrümmter Schalen — Stand der Technik

Um die in der Einleitung genannten Probleme bei der Herstellung räumlich gekrümmter Stahlbetonschalen zu umgehen, wurden und werden immer wieder neue Schalenbauverfahren entwickelt. Im Fall von Stahlbetonschalen liegen die Schwierigkeiten der Herstellung hauptsächlich in den Bereichen Schalungstechnik und

Baustoffverarbeitung. Für die Schalung verwendet man heute meistens Rohrgerüste mit einer aus schmalen Brettern wie im Schiffsbau oder aus dünnem Sperrholz gefügten Schalhaut [19]. Der mit dieser Methode verbundene hohe Arbeitsaufwand führte auf Grund steigender Löhne zur fast völligen Stagnation im Stahlbetonschalensbau.

Um die Schalungskosten in vertretbarem Rahmen zu halten, muss die Schalung möglichst oft wiederverwendet werden können. Diesen Weg beschritt z.B. Heinz Isler Ende der siebziger Jahre bei der Errichtung einer Tennishalle: Die eingesetzte Schalung überspannte ein Tennisfeld und konnte nach erfolgtem Betonieren versetzt und zur Herstellung des nächsten Feldes benutzt werden. Die gleiche Strategie verfolgte Isler mit seinen Buckelschalen, die er durch wiederholte Ausführung zu Fabrikhallen mit beträchtlicher Grundfläche addierte.

Wie die Beispiele in [39] zeigen, lassen sich durch die Verwendung von Fertigteilen Herstellungskosten einsparen. Die werksmäßig oder durch Baustellen-vorfertigung erzeugten Teile müssen nur mehr in die richtige Position gehoben und geeignet verbunden werden. Natürlich hängt wie bei Komplettschalungen die Wirtschaftlichkeit dieser Methode von der Möglichkeit ab, gleiche Formen möglichst oft einsetzen zu können. Neben reinen Fertigteil- und Ortbetonschalen finden sich in [39] auch Beispiele für Mischformen.

Eine sehr einfache, allerdings nicht oft verwendete Methode zur Herstellung von Stahlbetonschalen besteht darin einen Erdhügel als Rüstung und Schalung heranzuziehen. Diese laut manchen Quellen schon beim Bau des Pantheons verwendete Methode wurde z.B. im Fall der Stadthalle von Albuquerque in New Mexico/USA angewandt [19]. Um Kosten zu sparen, diente ein schon vorhandener, nur noch entsprechend umgeformter Hügel als Rüstung. Bei diesem Herstellungsverfahren verursacht das Bewegen der riesigen Erdvolumina den Hauptteil der Herstellungskosten.

Neben herkömmlicher Bretterschalung kommen immer wieder pneumatische Schalungssysteme zum Einsatz. Diese bestehen aus einem Ballon, der wie bei einer Tragfluthalle aufgeblasen und durch den innen herrschenden Überdruck stabilisiert wird. Die Aufbringung des die spätere Schale bildenden Materials erfolgt gewöhnlich von außen (siehe Abbildung 1.1a). Es sind aber auch Beispiele bekannt, wo von innen erhärtbare Substanzen auf den Pneu aufgebracht wurden (Abbildung 1.1b) [15].

Kokawa [24] benutzte erstere Variante zum Bau einiger Eisschalen, die Spannweiten von bis zu 30m erreichten. Das Hauptanwendungsgebiet dieser Methode liegt allerdings im Bereich der Stahlbetonschalen. Gegenüber konventionellen Bretterschalungen bietet diese Schalungsvariante den Vorteil, in kurzer Zeit und ohne großen Werkzeugaufwand errichtet werden zu können, da die Fertigung des Pneus vollständig werksseitig erfolgen kann. Der Hauptnachteil dieser Methode

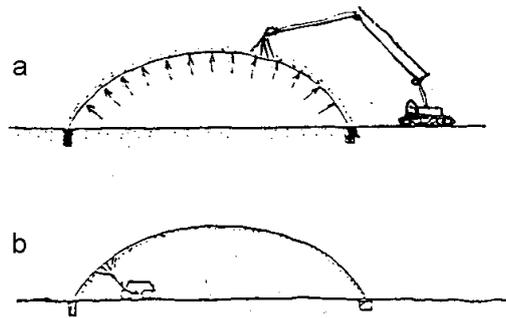


Abbildung 1.1: Aufbringung von erhärtbarem Material auf einen luftgefüllten Pneu a) von außen oder b) von innen [15]

besteht in der Nachgiebigkeit des aufgeblasenen Ballons. Um während des Betoniervorganges die Maßhaltigkeit der pneumatischen Schalung zu gewährleisten, muss deren Innendruck in Abhängigkeit vom Betonierfortschritt erhöht werden. Nach Abschluss des Betonierens kann der erforderliche Luftdruck laut [19] Werte von 10kN/m^2 annehmen. Schwierigkeiten bereitet außerdem die Formgebung: Da aufgeblasene Pneus von sich aus eine möglichst runde Gestalt anstreben [15], müssen ihnen davon abweichende Formen von außen aufgezwungen werden. Dazu ist es in der Regel erforderlich, den Pneu zugfest mit dem Untergrund zu verbinden, was gewöhnlich Schwierigkeiten bereitet. Abbildung 1.2 zeigt zwei Varianten der Verankerung: *a* mit Pfählen oder *b* mittels Auflast.

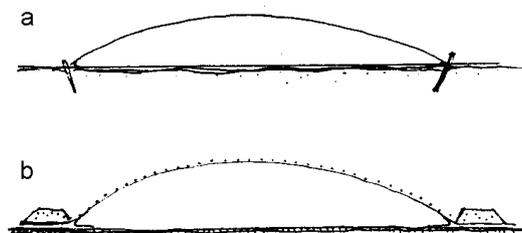


Abbildung 1.2: Verankerung des Pneus im Boden mittels a) Pfählen oder b) Auflast [15]

Ein weiteres Herstellungsverfahren, das auf pneumatischer Stützung basiert, ist jenes von Bini ([7], [19], [15]). Seine Methode besteht darin, Frischbeton samt Bewehrung auf eine im Anfangszustand ebene Membran aufzubringen (siehe Abbildung 1.3a), diese anschließend zur gewünschten Form aufzublasen (Abbildung

1.3b) und den Beton in dieser Position aushärten zu lassen (Abbildung 1.3c). Eine zweite Membran, die über den Frischbeton gespannt wird, gewährleistet während des Aufblasens, dass dieser nicht verrutscht. Da bei der Überführung der Ebenen in eine nicht abwickelbare Fläche Stauchungen der Schalensmittelfläche auftreten, muss die Verbindung der Bewehrungsstäbe so erfolgen, dass die auftretenden Relativverschiebungen unbehindert aufgenommen werden können. Mit der Methode nach Bini kann die ständige Anpassung des Innendrucks des Pneus an den Betonierfortschritt vermieden werden. Der Hauptvorteil gegenüber konventionellen pneumatischen Schalungssystemen liegt darin, dass das Betonieren schräger Flächen entfällt.

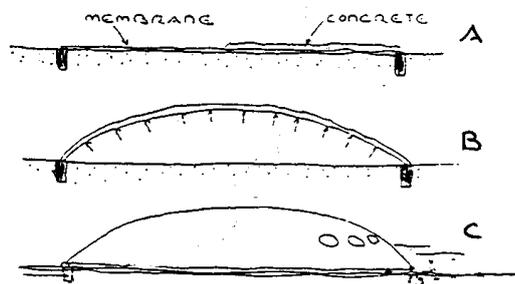


Abbildung 1.3: Verfahrensschritte bei der Herstellung einer Schale nach der Methode von Bini [15]

Aufgrund der geschilderten, mit pneumatischen Schalungssystemen einhergehenden Probleme in Bezug auf Formgebung und Formtreue konnten diese die konventionellen Bretterschaltungen nicht verdrängen.

Aus der Beobachtung, dass sich dünne Stahlbetonplatten unter der Einwirkung von Vorspannung verkrümmen lassen, leitete Peter E. Ellen die Grundzüge jener Schalenbaumethode ab, der sich die vorliegende Arbeit widmet. In seinem Patent [13] beschreibt Ellen die Errichtung einfach gekrümmter Stahlbetonschalen. Der erste Schritt seines Verfahrens besteht darin, eine ebene Stahlbetonplatte (10) herzustellen und unter dieser parabolisch geführte Spannglieder (11) anzuordnen (siehe Abbildung 1.4a). Letztere sind mittels vertikaler, zug- und druckfester Elemente (15) mit der Stahlbetonplatte verbunden. Durch Anspannen der von Plattenrand zu Plattenrand verlaufenden Zugglieder ergeben sich nach oben gerichtete Umlenkkräfte, welche die Stahlbetonplatte in die gekrümmte Ziellage bringen (Abbildung 1.4b)). In der Platte verlegte Bewehrung soll kleine Rissbreiten sowie ausreichende plastische Verformungskapazität gewährleisten.

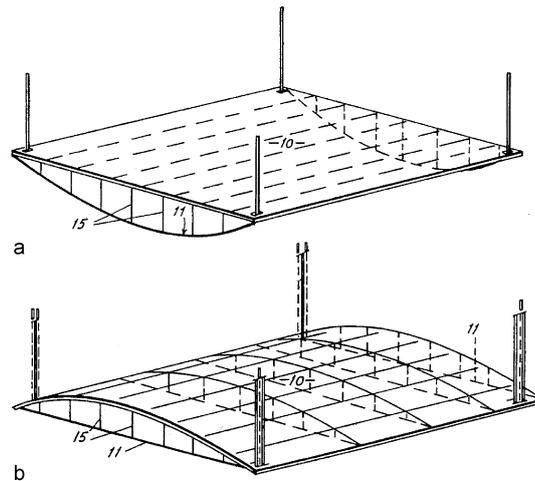


Abbildung 1.4: Verfahrensschritte bei der Herstellung von Zylinderschalen nach P.E. Ellen: *a*) Herstellung der ebenen Ausgangsform; *b*) Umformung in die gekrümmte Ziellage durch Anspannen der Zuglieder [13]

Ellens Patentschrift [13] enthält auch ein Beispiel zur Herstellung doppelt gekrümmter Flächentragwerke. Es bleibt allerdings offen, wie die beim Übergang in die doppelt gekrümmte Konfiguration auftretenden Stauchungen der Plattenmittelfläche aufgenommen werden.

Ein interessanter Vorschlag zur Herstellung beliebig gekrümmter Flächentragwerke aus Holz, die auch als Schalung dienen können, stammt von Becker [5]. Die Grundidee besteht darin, die gegebene Tragwerksgeometrie durch ebene Streifen, die aus Drei- oder Viereckselementen bestehen, anzunähern, die verebnete Form am Boden herzustellen und schließlich durch Vorspannung oder Hebezeuge in die gewünschte Endlage zu bringen. Abbildung 1.5 zeigt in Teilbild *a*, wie sich eine doppelt gekrümmte Fläche abschnittsweise durch Kegelstümpfe und Zylinder approximieren und so in einzelne Streifen zerlegen und verebnen lässt. Die schwarzen Flächen repräsentieren Spalte, die sich im Zielzustand (Teilbild *b*) schließen und so die Verformungen der Schalenmittelebene zulassen, die beim Übergang von der ebenen in die räumlich gekrümmte Lage auftreten.

Als Material verwendet Becker einen Werkstoffverbund aus Sperrholzplatten und hochfestem Kunststoffgewebe. Die Platten funktionieren hierbei als druckfeste Elemente. Das mit den Holzplatten flächig verklebte Kunststoffgewebe verbindet diese und bildet Scharniere (siehe Abbildung 1.6). Bringt man die aus der Verebnung resultierenden Streifen mittels Vorspannung in ihre gekrümmte Endlage, schließen sich die Fugen zwischen den Holzelementen, wodurch dort Druckspannungen auftreten, während sämtliche Zugkräfte dem Gewebe zufallen.

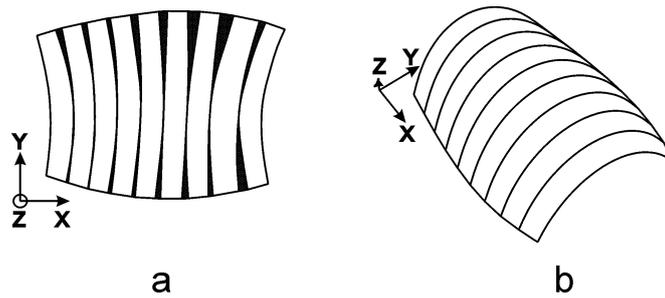


Abbildung 1.5: Grundriss einer verebneten Schale (links) und Ansicht (rechts) im umgeformten Endzustand [34]

Über diese mittels Vorspannung versteiften Gelenke lassen sich Druckkräfte und Biegemomente übertragen.

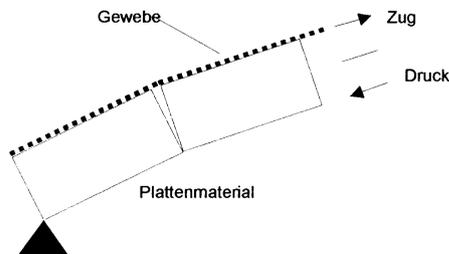


Abbildung 1.6: Funktionsweise des Holz-Kunststoffgewebe-Verbundwerkstoffes nach Becker [36]

Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass diese Schalung ohne aufwendige Unterstützungsstrukturen auskommt, da sie bei geeigneter Verbindung der einzelnen Bögen das räumliche Tragverhalten einer Schale aufweist. Die Sperrholzplattenelemente kann man werksseitig sehr präzise fertigen. Diese müssen dann auf der Baustelle nur mehr mittels Kunststoffgewebe miteinander verbunden werden.

Das Hauptproblem dieses Verfahrens besteht in der geringen Biegesteifigkeit der verspannten Gelenke, die sich aus dem kleinen inneren Hebelarm zwischen Kunststoffgewebe und resultierender Druckkraft in den Holzplatten erklärt. Außerdem bieten die Fugen in der Ausführungsvariante nach Abbildung 1.6 anfänglich keinen schubfesten Verbund und können deshalb einen transversalen Versatz zwischen benachbarten Elementen nicht verhindern. Abhilfe schaffen zueinander geneigte, auf Gehrung geschnittene Stirnflächen der Holzelemente, die sich im Endzustand vollkommen schließen. Allerdings bedeutet die Herstellung solcher Schnitte einen erheblichen Mehraufwand.

Kapitel 2

Umformung ebener Flächentragwerke in räumlich gekrümmte

2.1 Grundidee und Verfahrensschritte

Die Grundidee des Verfahrens, dem sich diese Arbeit widmet, besteht darin, eine ebene Platte herzustellen und mittels äußerer Krafteinwirkung in eine räumlich gekrümmte Form zu zwingen (siehe [26], [27]). Die Platte muss dabei so beschaffen sein, dass die Stauchungen der Plattenmittelebene, die unvermeidlich beim Übergang von ebener Ausgangs- in räumlich gekrümmte Ziellage auftreten, aufgenommen werden können. Die dafür vorgeschlagene Lösung besteht darin, die Zielform in abwickelbare und somit leicht biegbare Streifen zu zerlegen und zwischen diesen Stauchungsfugen vorzusehen. Die Approximation der nicht abwickelbaren Schalen geometrie erfolgt ähnlich wie beim Verfahren nach Becker [5]. Der Unterschied besteht darin, dass die verebnete Form eine zusammenhängende Fläche bildet. Für den einfachsten Fall einer doppelt gekrümmten Fläche — einer Kugelkappe — zeigt Abbildung 3.10 anhand einer Orangenschale eine Verebnungsvariante, bei der die Stauchungsfugen radial verlaufen. Die Fugenfüllung besteht in diesem Fall aus Luft. Bei der untersuchten Herstellungsmethode für Schalen kommt es darauf an, die verebnete Form so zu wählen, dass sich die zur Umformung notwendigen Kräfte, die mittels Spanngliedern und einem unter der Struktur befindlichen Druckluftpolster erzeugt werden, möglichst einfach in das Tragwerk einbringen lassen.

Abbildung 2.2 skizziert das Herstellungsverfahren anhand einer im Endzustand kugelkappenförmigen Struktur. Die Unterschiede zur aufgeschnittenen Orangenschale aus Abbildung 2.1 bestehen nur im Material sowie im Größenmaßstab.

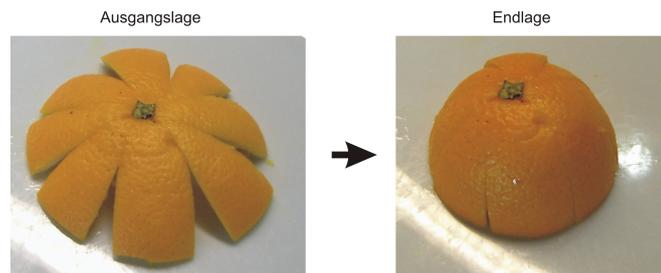


Abbildung 2.1: Übergang einer Orangenschale von ebener Anfangsform in umgeformte Endlage [28]

Aufgrund der radial verlaufenden Stauchungsfugen lässt sich die gesamte Platte durch ein einziges, entlang des Umfangs verlaufendes Spannglied vorspannen.

Der erste Schritt bei der Umformung der Platte besteht im Anziehen des Spannglieds. Die aus dem Spannglied resultierenden Umlenkkräfte wirken dabei in Richtung des Kreisplattenmittelpunktes senkrecht zu den Stauchungsfugen. Da im Anfangszustand die Wirkungsebene der Umlenkkräfte parallel zur Plattenmittelfläche liegt, kommt es nur zu geringfügigen Verformungen. Voraussetzung dafür ist, dass neben der ebenen keine benachbarte Gleichgewichtslage existiert, die radial wirkenden Druckkräfte nicht zu einem Ausbeulen der Platte führen. Stabilisierend wirkt hierbei das Eigengewicht der Struktur.

Der zweite Verfahrensschritt besteht darin, dem Eigengewicht der Platte z.B. mittels eines unter der Struktur befindlichen Druckkissens entgegenzuwirken und so ein kontrolliertes Ausbeulen in die gewünschte Endlage zu bewirken. Der dafür erforderliche Luftüberdruck unter der Platte entspricht in etwa dem zu kompensierenden Eigengewicht je Flächeneinheit und bewegt sich im Bereich von einigen Millibar. Durch Verkürzung des Spannglieds sowie über die Höhe des Luftüberdrucks lässt sich der Umformungsprozess steuern. Abbildung 2.2 zeigt die im Endzustand geschlossenen Stauchungsfugen, sowie im Schnitt *II – II* die resultierende Schale in ihrer Ziellage.

Bei Verwendung spröder Materialien wie z.B. Beton oder Eis als Baustoff für die anfangs ebene Platte muss darauf geachtet werden, dass die bei der Umformung in die gekrümmte Endlage unvermeidlich am gezogenen Querschnittsrand auftretenden Risse kleine Breiten bzw. Abstände voneinander aufweisen. Dies lässt sich durch entsprechende Wahl der eingelegten Bewehrung gewährleisten.

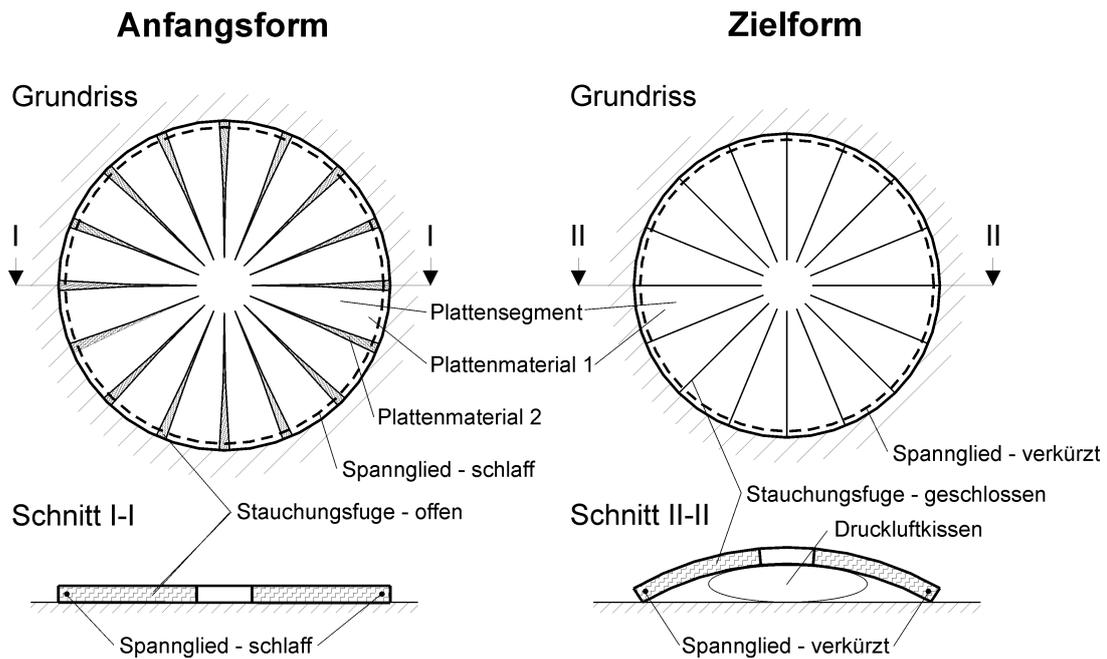


Abbildung 2.2: Ausgangs- und Zielform bei der Herstellung einer Kuppel

2.2 Wahl eines Fugenmaterials

Je nach Beschaffenheit des in den Stauchungsfugen befindlichen Materials kommt es während der Umformung in unterschiedlichem Ausmaß zu einer Übertragung von Kräften zwischen benachbarten Plattensegmenten. Weisen die Fugen keine Füllung auf, können Druckkräfte senkrecht zu den Fugenufern erst dann übertragen werden, wenn diese in Kontakt miteinander stehen. Ein günstiger, für Schalen charakteristischer, zweidimensionaler Spannungszustand stellt sich erst sehr spät ein. Davor funktioniert die Struktur in statischer Hinsicht als Ansammlung sich überschneidender Bögen. Führt man jedoch die Stauchungsfugen so aus, dass diese auch während der Umformung Schnittgrößen übertragen können, lässt sich mit deren Hilfe eine Struktur schaffen, die schon während des Umformungsprozesses die statisch günstigen Eigenschaften einer Schale aufweist. Je nach Verhältnis zwischen radial und tangential wirkenden Normalkräften liegt das erzielte Tragverhalten zwischen dem einer Ansammlung von Bögen und dem eines räumlichen Flächentragwerks.

Verbleibt das Fugenmaterial während des Umformungsprozesses an Ort und Stelle, muss dieses in der Lage sein, große Stauchungen aufzunehmen. Die im Endzustand vorhandenen Fugenstauchungen resultieren aus der gegenseitigen Verschiebung der Fugenufer sowie der anfänglichen Fugenbreite. Da die Stauchung

der Plattenmittelfläche einzig von der angestrebten Zielform abhängt, verhalten sich Fugenanzahl und anfängliche Fugenbreite umgekehrt proportional zur vom Fugenmaterial aufzunehmenden Stauchung. Da mit zunehmendem Verhältnis zwischen Fugenbreite und Plattendicke die Gefahr örtlichen Ausknickens des Fugenmaterials wächst, gilt es einen Kompromiss zwischen maximaler Fugenstauchung, Anzahl der Fugen und Fugenbreite zu finden. Im Rahmen der experimentellen Erprobung des Herstellungsverfahrens wurden Fugennennstauchungen von 70% bis 85% zugelassen.

Bei der Suche nach einem als Fugenfüller geeigneten Material fiel die Wahl auf Kunststoffhartschaum. Abbildung 2.3 zeigt die typische Arbeitslinie von extrudiertem Polystyrol (XPS) im Druckbereich. Die beiden Arbeitslinien repräsentieren das Verhalten des selben Probekörpers. Der Unterschied liegt in den entlang der Abszisse aufgetragenen Dehnungsmaßen. Für die blaue Kurve kamen Nennstauchungen, definiert als $-\Delta l/l$, für die rote Kurve wahre Stauchungen [30], definiert als $-\ln(1 + \Delta l/l)$, zur Anwendung. Wie man sieht, weichen ab einer Stauchung von 60% die beiden Darstellungen beträchtlich voneinander ab, was im Rahmen von Finite Elemente Berechnungen mit großen Dehnungen zu beachten ist.

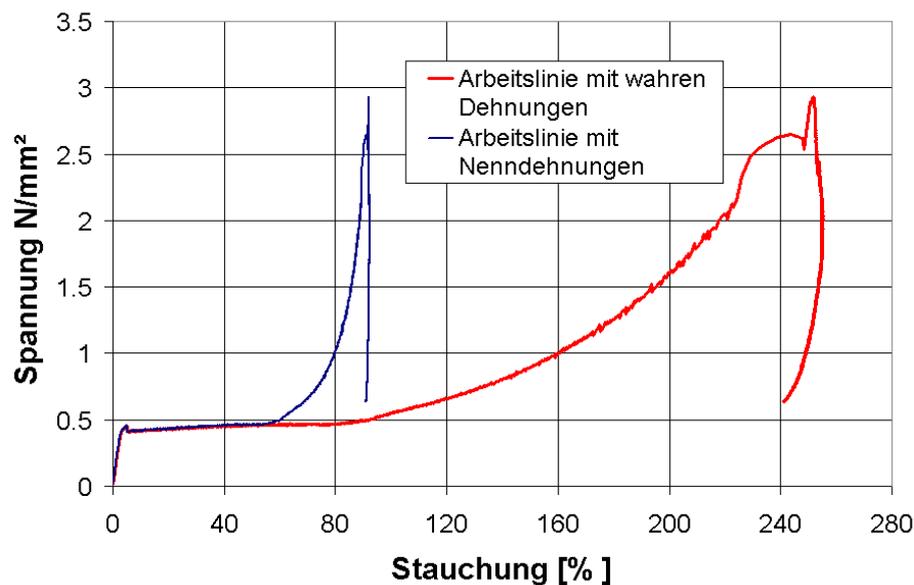


Abbildung 2.3: typische Arbeitslinie von extrudiertem Polystyrol (XPS)

Aus den Kurven in Abbildung 2.3 lässt sich entnehmen, dass nach einem kurzen elastischen Bereich mit einem E-Modul von hier $7N/mm^2$ ein plasti-

scher Abschnitt mit einer Fließspannung von etwa 0.5N/mm^2 (als Druckspannung hier positiv) und einem Verfestigungsmodul E_h von 0.15N/mm^2 folgt. Ab ungefähr 60% Nennstauchung steigen Druckspannung und Steifigkeit wieder an. Die XPS-Produkte unterschiedlicher Hersteller liefern quantitativ leicht variierende Festigkeits- und Steifigkeitswerte, jedoch qualitativ recht ähnliche Arbeitslinien. In [18] finden sich Versuchsergebnisse aus Würfeldruckversuchen an XPS-Probekörpern sowie solchen aus expandiertem Polystyrol (EPS). Letztere weisen, wie Abbildung 2.4 zeigt, eine deutlich geringere Fließspannung auf. Für XPS als auch EPS gilt, dass die gemessenen Arbeitslinien eine starke Abhängigkeit von der verwendeten Belastungsgeschwindigkeit aufweisen.

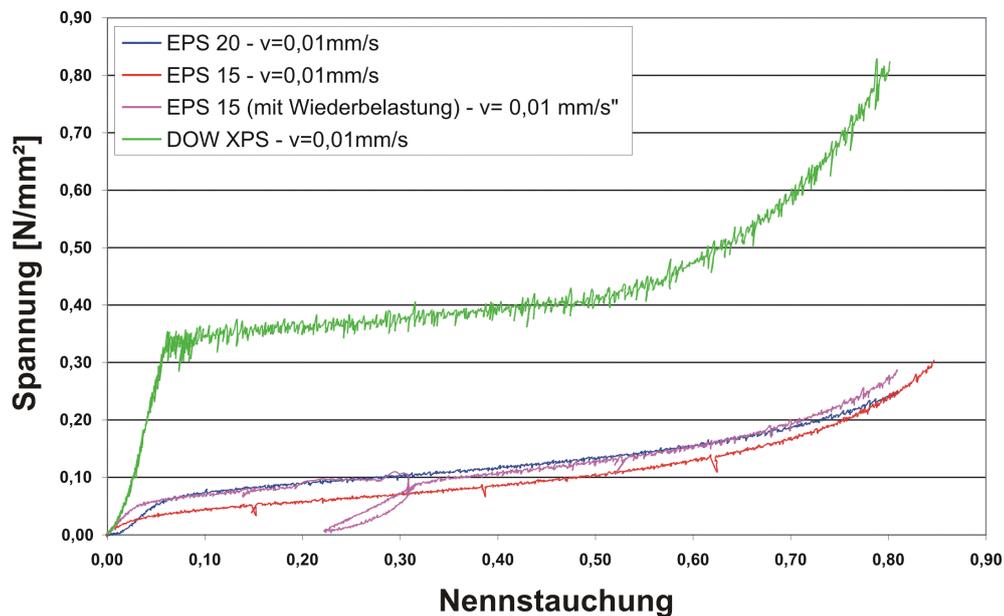


Abbildung 2.4: Vergleich der Arbeitslinien von extrudiertem (XPS) und expandiertem Polystyrol (EPS)

Der Grund für die zunächst paradox erscheinende Form der Arbeitslinien in den Abbildungen 2.3 und 2.4 liegt in der Feinstruktur des Hartschaums: Dieser besteht zu etwa 98% aus Luft. Ab dem Ende des kurzen elastischen Bereichs beginnen die Wände der Schaumstoffbläschen auszuknicken. Dies bewirkt das lang gestreckte Fließplateau bis etwa 60% Stauchung und erklärt die Tatsache, dass für die Querdehnungszahl $\nu \approx 0$ gilt. Die Ursache der danach eintretenden Wiederverfestigung liegt in der Zunahme des Anteils des Polystyrols am Gesamtvolumen infolge des Entweichens der Luft. Am Ende des Druckversuchs verbleibt nur noch annähernd reines Polystyrol, welches einen E-Modul von 4000N/mm^2

bis $5000N/mm^2$ sowie bei Zimmertemperatur und einer Belastungsdauer von einem Jahr eine Druckfestigkeit von etwa $30N/mm^2$ aufweist [6]. Da es sich bei Polystyrol um einen thermoplastischen Kunststoff handelt, zeigt sich eine starke Abhängigkeit der Werkstoffeigenschaften von der Umgebungstemperatur: Bei 90° Celsius beträgt die Druckfestigkeit nur mehr $5N/mm^2$.

Beim Einsatz von XPS bzw. EPS als Fugenfüller ist es von Interesse, ab welcher Fugenbreite sich das Material einer Aufnahme von Druckkräften durch Ausknicken in transversaler Richtung entzieht. Um einen Anhaltswert für das zulässige Verhältnis von Breite b_f zu Querschnittshöhe h der Fugenfüllung zu erhalten, wird ein Abschnitt von einem Meter Länge mit konstanter Fugenbreite betrachtet. Die Lagerung des Fugenmaterials sei an beiden Fugenufern unverdrehbar. Die kritische Spannung bei elastisch-plastischem Materialverhalten lässt sich mittels des Engesser'schen Knickmoduls T ermitteln [44], [43], der im Falle eines Rechteckquerschnitts die Form

$$T = \frac{4 E_0 E_h}{(\sqrt{E_0} + \sqrt{E_h})^2} \quad (2.1)$$

annimmt. E_0 bezeichnet den E-Modul im linear elastischen Bereich. Aus dem in Abbildung 2.3 beschriebenen Materialverhalten ergibt sich $T = 1.25N/mm^2$. Mit einer Knicklänge von $l_k = b_f/2$, einem Trägheitsradius des Fugenquerschnitts von $i = h/\sqrt{12}$ und dem Ausdruck

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T}{(l_k/i)} \quad (2.2)$$

für die Knickspannung gelangt man zur Formel

$$b_f/h = \pi \sqrt{\frac{T}{3 \sigma_k}} \quad (2.3)$$

Bei Einsetzen einer Fließspannung von $0.5N/mm^2$ als kritische Spannung σ_k liefert Gleichung 2.3 für b_f/h einen Wert von 2.86. Im Falle des Knickens beträgt der Abstand der Momentennullpunkte somit nur das 1.43 fache der Querschnittshöhe und liegt außerhalb des Anwendungsbereichs der Biegetheorie. Aus diesem Grund stellt das ermittelte b_f/h -Verhältnis nur einen ungefähren Anhaltswert dar. Im Rahmen der experimentellen Untersuchungen wurde ein Verhältnis von $b_f/h \approx 2$ gewählt.

2.3 Die Verebnung rotationssymmetrischer Flächen

Die Form der Schalen, die mit Hilfe der neuen Technik hergestellt werden können, unterliegt zumindestens zwei praktischen Beschränkungen:

1. Bei unregelmäßiger Gestalt der Schale wächst der Aufwand, der betrieben werden muss, um die zur Formgebung notwendigen Vorspannkkräfte in die Struktur einzuleiten.
2. Erfordert der Übergang von Anfangs- zu Zielform große Stauchungen der Plattenmittelebene, müssen viele Stauchungsfugen vorgesehen werden, da deren maximale Breite wie im vorherigen Abschnitt nachgewiesen in Folge Knickgefahr beschränkt ist. Die Breite der dazwischenliegenden Segmente aus hartem Material schrumpft, was diese empfindlich gegenüber Bauungenauigkeiten oder ungewollt eingeleiteten Kräften (z.B. infolge Spanngliedreibung) macht.

Aus diesen Gründen bilden die einfachsten doppelt gekrümmten Flächentragwerke, nämlich kugelhappenförmige Schalen, den Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen. Im Falle allgemeiner, doppelt gekrümmter Flächen erfolgt deren Approximation durch abwickelbare Teilflächen wie in [5] beschrieben, mittels geeigneter Computerprogramme. Vor allem im Bereich der Textilindustrie, wo man seit jeher vor dem Problem steht, aus ebenen Ausgangsmaterialien räumlich gekrümmte Flächen herzustellen, sind entsprechende Softwareprodukte verbreitet. Für Rotationsschalen, die in radiale Streifen zerlegt werden sollen, lassen sich hingegen Lösungen mit weniger Aufwand angeben.

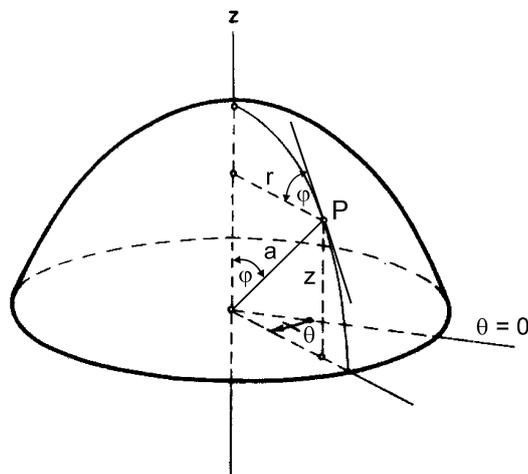


Abbildung 2.5: Darstellung einer Rotationsfläche in Zylinderkoordinaten [10]

Abbildung 2.5 zeigt eine Drehschale sowie einen Meridian mit einem Punkt P, dargestellt in Zylinderkoordinaten r , z und θ . Zur eindeutigen Festlegung der

Schalengeometrie dient eine Erzeugende, z.B. angegeben als Parameterkurve. Im Falle einer Kugelkappe nimmt diese die Form

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= a \sin(\varphi) \\ z(\varphi) &= a (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_a)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

an. Hierbei bezeichne a den Kugelradius und φ den Winkel der Meridiantangente im Bogenmaß, der im Bereich zwischen 0 und φ_a liegt. Der Wert 0 entspricht dem Schalenpunkt auf der Symmetrieachse, φ_a dem Schalenfußkreis. Ein auf der Drehschale befindlicher Punkt $P(\varphi_P)$ weist einen Abstand $r(\varphi_P)$ von der Rotationsachse auf. Im verebneten Zustand entspricht dieser Abstand der Länge der Erzeugenden von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_P$, die sich als

$$l(\varphi_P) = \int_0^{\varphi_P} \sqrt{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = a \varphi_P \quad (2.5)$$

ausdrücken lässt. Die bei der Umformung von ebener in doppelt gekrümmte Lage notwendige mittlere Nennstauchung ε_B des Umfangs des Breitenkreises mit dem Punkt $P(t_P)$, beträgt demnach

$$\varepsilon_B = \frac{l(\varphi_P) - r(\varphi_P)}{l(\varphi_P)} = 1 - \frac{\sin(\varphi_P)}{\varphi_P} \quad (2.6)$$

Den ersten Schritt bei der Verebnung der durch die Gleichungen 2.4 beschriebenen Rotationsschale bildet die Festlegung der Zahl n_S der radialen Streifen in welche die Struktur zerlegt werden soll. Je größer n_S desto genauer die Approximation der ursprünglichen Schalengeometrie durch die daraus hervorgehende Vieleckkuppel. Dimensioniert man die Vieleckkuppel so, dass diese die ursprüngliche Drehschale umschreibt, berühren sich beide Schalen genau entlang der Mitte eines jeden der n_S Abschnitte. Wie sich einfach zeigen lässt, weisen deshalb die Kanten der Vieleckkuppel, die auch als Grate bezeichnet werden, einen Abstand von $r_K = r / \cos(\pi/n_S)$ von der Drehachse auf. Die Parameterdarstellung der Grate nimmt die Form

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= a \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\pi/n_S)} \\ z(\varphi) &= a (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_a)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

an und führt eingesetzt in Gleichung 2.5 auf ein Integral, welches nicht mehr geschlossen, sondern nur mehr numerisch gelöst werden kann. Abbildung 2.6 zeigt den Verlauf der mittleren Stauchung der Breitenkreise für eine Vieleckkuppel mit $n_S = 32$. Der relative Fehler in den mittleren Stauchungen, den eine Vernachlässigung des Terms $\cos(\pi/n_S)$ in Gleichung 2.7 nach sich zieht, beläuft sich für

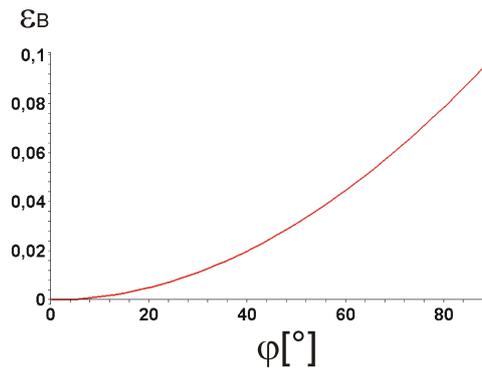


Abbildung 2.6: Mittlere Stauchung in Umfangsrichtung bei Umformung von ebener Ausgangs- in doppelt gekrümmte Zielform

$n_S = 32$ zwar nur auf etwa 0.5%, steigt aber mit kleiner werdendem n_S schnell an.

Von größerem Interesse als die mittlere Breitenkreisstauchung ist jene, die in den Stauchungsfugen auftritt und mit ε_F bezeichnet werden soll. Unter der Annahme, dass in den harten Segmenten keine Verformung auftritt, und der Anteil der Fugen am Gesamtumfang a_F Prozent ausmacht, ergibt sich diese zu

$$\varepsilon_B = \frac{l(\varphi_P) - r(\varphi_P)}{l(\varphi_P) a_F / 100} \quad (2.8)$$

Sind die Nennstauchungen des Fugenmaterials im gekrümmten Endzustand gegeben, lässt sich der dazu erforderliche relative Anteil der Fugen am Gesamtumfang aus

$$a_F = \frac{l(\varphi_P) - r(\varphi_P)}{l(\varphi_P) \varepsilon_B / 100} \quad (2.9)$$

ermitteln. Abbildung 2.7 zeigt den Verlauf von a_F für Kugelkappen mit Meridiantangentenneigungen am Fußkreis bis 90° und unter Zugrundelegung einer Fugennennstauchung von $\varepsilon_B = 0.85$. Wie man sieht, steigt a_F gegen den Rand hin überproportional an.

Bei der Umsetzung der Stauchungsfugen als XPS- oder EPS-Keile sind der kleinsten ausführbaren Fugenbreite herstellungstechnische Grenzen gesetzt: Mit abnehmender Aufstandsweite, lassen sich die Hartschaum-Teile schwieriger in ihrer Sollage fixieren bzw. verlegen und werden generell empfindlicher gegenüber ungewollten, mechanischen Einwirkungen wie sie gewöhnlich auf Baustellen vorkommen.

Im Rahmen der experimentellen Erprobung des Herstellungsverfahrens wurde eine aus 32 Segmenten bestehende Kugelkappenschale mit einem Stich von 1.7m,

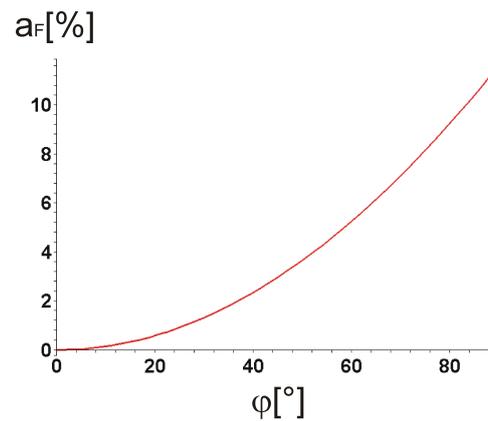


Abbildung 2.7: Anteil der Stauchungsfugen am Umfang der Breitenkreise in Abhängigkeit von der Neigung φ der Meridiantangente

einer maximalen Fugennennstauchung von 85% und einem Fußkreisdurchmesser von $10.4m$ im ebenen Anfangszustand unter Baustellenbedingungen hergestellt. Abbildung 2.8 zeigt den Verlauf der Fugenbreite b_f in Abhängigkeit vom Meridianneigungswinkel φ . Als gerade noch ausführbar erwies sich eine kleinste Fugenbreite von etwa $2.5mm$. Die Keile endeten aus diesem Grund in einem Abstand von $1.6m$ vom Mittelpunkt der Kreisplatte.

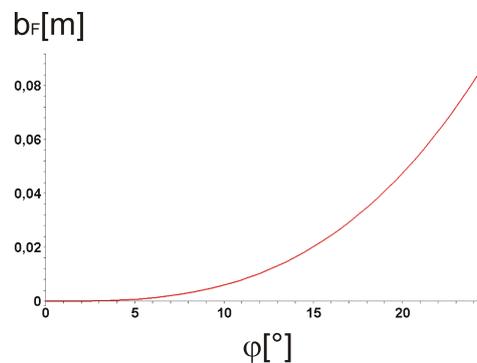


Abbildung 2.8: Fugenbreite in Abhängigkeit vom Meridianneigungswinkel φ für eine Kugelkappenschale mit Stich $f = 1.7m$, einer Fugennennstauchung von 85% und einem Fußkreisdurchmesser von $10.4m$ im ebenen Zustand

2.4 Numerische Behandlung des Umformungsprozesses

Die rechnerische Behandlung des Umformungsprozesses der oben beschriebenen Platten birgt je nach Realitätsnähe interessante Herausforderungen. Einige der Phänomene bzw. Sachverhalte die auf den Verlauf der Umformung unterschiedlich stark Einfluss nehmen, seien im Folgenden aufgezählt:

1. Die Verschiebungen von Anfangs- zu Ziellage sind von gleicher Größenordnung wie die Abmessungen der Struktur selbst. Dies zwingt zur Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität.
2. Sowohl Fugen- als auch i.d.R. das Plattenmaterial werden über ihren linear elastischen Bereich hinaus beansprucht. Das physikalisch nichtlineare Verhalten dieser Werkstoffe muss daher in das Berechnungsmodell eingehen.
3. Die in den Stauchungsfugen auftretenden Dehnungen sind groß. Die korrekte Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Fugenmaterial bedingt daher die Benutzung wahrer Spannungen und Dehnungen anstatt der sonst üblichen Nennspannungen und -dehnungen (siehe Abschnitt 2.2).
4. Je nach der Ausbildung des unter der Platte befindlichen Druckluftkissens bzw. Hebevorrichtung erfolgt das Abheben der Platte vom Untergrund unter Umständen nicht gleichmäßig. Daraus ergibt sich ein seinem Wesen nach nichtlineares Kontaktproblem.
5. Durch die Verkleinerung des Platten- bzw. Schalenumfangs kommt es zu Relativbewegungen zwischen Struktur und Untergrund. Dies verursacht Reibungskräfte.
6. Infolge der beträchtlichen Verformungen können sich die Umlenkkräfte, welche infolge der Spannglieder auf die Struktur wirken, verändern.
7. Zwischen Spannglied und Platte treten Reibungskräfte auf, die zu ungünstigen Beanspruchungen der Kuppelsegmente führen können.
8. Die Plattensteifigkeit in Breitenkreisrichtung hängt stark von den Fugenbreiten ab. Die genaue Erfassung der Steifigkeitsverhältnisse bedingt demnach eine exakte Modellierung der Fugengeometrie.

Eine Berechnung mittels Finite Elemente Methode (FEM) gestattet die Berücksichtigung aller obiger Punkte. Zur Klärung der prinzipiellen Zusammenhänge, für Parameterstudien und Bemessungsaufgaben eignen sich solche FE-Modelle

aufgrund ihrer Schwerfälligkeit und Rechenintensität nur bedingt. Deshalb widmen sich die folgenden Kapitel der Herleitung vereinfachter Berechnungsmöglichkeiten. Wenn im Zuge nichtlinearer FEM-Berechnungen die Frage auftaucht, ob ein Modell aus numerischen oder physikalischen Gründen nicht das angestrebte Ergebnis liefert, geben vereinfachte Berechnungen oft wertvolle Anhaltspunkte. Außerdem eignen sich diese zur überschlagsmäßigen Kontrolle der mittels FEM gewonnenen Resultate.

Kapitel 3

Polar orthotrope Kreisplatten

3.1 Die vereinfachte Behandlung des Umformungsprozesses mittels polar orthotroper Kreisplatten

Polare Orthotropie bei Kreisplatten bedeutet, dass diese in radialer und Umfangsrichtung unterschiedliche Materialeigenschaften aufweisen. Die in Abbildung 3.1 dargestellte Ausgangsform einer späteren Kugelkappe lässt sich näherungsweise als eine solche polar orthotrope Kreisplatte auffassen: In radialer Richtung wirken die Plattenmaterialien 1 und 2 parallel. Der um einige Größenordnungen steifere Werkstoff 1 der Kreisplattensegmente übernimmt deshalb den Großteil der in dieser Richtung anfallenden Biegemomente. In tangentialer Richtung wirken Segment- und Fugenwerkstoff in Serie. Aus diesem Grund ist für die Bestimmung der tangentialen Biegemomente das weiche Fugenmaterial maßgebend. Die Vereinfachung der Betrachtung liegt darin, in tangentialer Richtung mittlere Materialeigenschaften so zu wählen, dass damit das kombinierte Verhalten der Plattenmaterialien 1 und 2 näherungsweise abgebildet werden kann.

Zu diesem Zweck betrachtet man einen Kreisabschnitt der Länge l , der ein Segment sowie eine Fuge umfasst (siehe Abbildung 3.1). Das harte Segment der Länge l_s besteht aus Material mit E-Modul E_s . Die entsprechenden Angaben für die weiche Fuge sind l_f und E_f . Die in Serie wirkenden Abschnitte liefern

$$\begin{aligned} E_\theta \varepsilon_\theta &= E_s \varepsilon_s = E_f \varepsilon_f \\ \varepsilon_\theta l &= \varepsilon_s l_s + \varepsilon_f l_f \end{aligned} \tag{3.1}$$

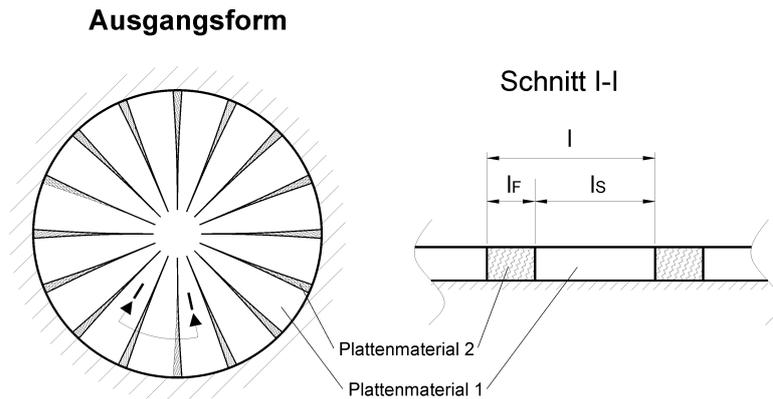


Abbildung 3.1: Ebene Anfangsform sowie Schnitt durch ein Segment und eine Fuge in tangentialer Richtung

wobei ε_s und ε_f die im Segment bzw. in der Fuge auftretenden Nenndehnungen bezeichnen, E_θ und ε_θ den resultierenden E-Modul bzw. die Gesamtnenndehnung des betrachteten Abschnitts. Auflösung der drei Gleichungen nach E_θ ergibt

$$E_\theta = \frac{E_s E_f}{\frac{l_s}{l} E_f + \frac{l_f}{l} E_s} \quad (3.2)$$

Für $E_s \gg E_f$ und dem in Abschnitt 2.3 eingeführten Anteil a_F der Fugen am Gesamtumfang erhält man

$$E_\theta \approx E_f \frac{l}{l_f} = \frac{E_f}{a_F/100} \quad (3.3)$$

Wie sich anhand von Abbildung 2.7, die den Verlauf von a_F zeigt, erkennen lässt, steigt die Gesamtsteifigkeit E_θ in tangentialer Richtung mit abnehmendem Abstand zum Plattenzentrum stark an.

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der Steifigkeitsverhältnisse E_θ/E_f für unterschiedliche Fugengeometrien in Abhängigkeit vom Verhältnis r/r_a . Hierbei bezeichnet r den Abstand des jeweils betrachteten Punktes vom Kreisplattenmittelpunkt, r_a den Außenradius. Die radialen, weichen Fugen enden bei $r/r_a = 0.3$, was bei einer Kreisplatte mit Außendurchmesser $10.4m$ einen Abstand von $1.6m$ vom Plattenzentrum bedeutet. Als Meridianneigungswinkel φ an der Stelle $r = r_a$ wird ein Wert von 38.9° gewählt. Dieser ergibt sich z.B. bei einer Kugelkappe mit Durchmesser $10.4m$ und Stichhöhe $1.7m$.

Entspricht die Fugengeometrie genau jener in Abschnitt 2.3 ermittelten, die im Zielzustand zu vollständig geschlossenen Fugen führt, so erhält man den durch

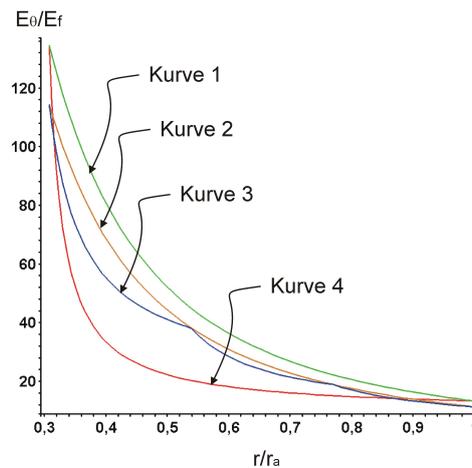


Abbildung 3.2: Verlauf der Steifigkeitsverhältnisse E_θ/E_f für unterschiedliche Fugengeometrien

Kurve 1 repräsentiert den E_θ/E_f -Verlauf. Wird das Fugenmaterial nur einer maximalen Nennstauchung von z.B. 85% ausgesetzt, ergibt sich ein im Vergleich mit der ersten Kurve um 15% geringeres E_θ/E_f -Verhältnis (siehe Kurve 2).

Im Rahmen der Experimente erwies es sich als äußerst mühsam, die Stauchungskeile exakt nach der rechnerisch ermittelten Figur zu formen [28]. Für die Versuchsschale mit Anfangsdurchmesser $10.4m$ (siehe Abschnitt 6) wurden die Keile mittels einer Bandsäge, die nur gerade Schnitte zulässt, hergestellt. Es ergab sich daher die Frage, mit wie viel geraden Schnitten die Keilform approximiert werden kann, ohne die Steifigkeitsverhältnisse allzu nachteilig zu beeinflussen. Kurve 4 in Abbildung 3.2 zeigt den E_θ/E_f -Verlauf für den Fall, dass die Keilkante durch nur eine Gerade gebildet wird. Wie sich erkennen lässt, führt dies zu einem beträchtlichen Abfall der tangentialen Steifigkeit im inneren Plattenbereich. Im Rahmen des Experiments erfolgte die Ausbildung der Keilkanten als Polygon mit drei gleich langen Geraden. Den entsprechenden Steifigkeitsverlauf repräsentiert Kurve 3.

Die bisherigen Überlegungen betreffen nur den Bereich linearer Elastizität. Ab dem Punkt wo im Rahmen der Umformung physikalische Nichtlinearität auftritt, sind die oben verwendeten E-Module E_s und E_f durch Sekantenmodule zu ersetzen.

3.2 Symmetrisch verformte, polar orthotrope Kreisplatten

3.2.1 Kreisplatte mit kleinen Verformungen

Kreisplatten oder -ringe deren Belastung sowie Materialhauptachsen symmetrisch zum Kreismittelpunkt angeordnet sind, verformen sich symmetrisch. Daraus folgt, dass zur Beschreibung der Deformationsfigur ein Schnitt entlang eines beliebigen Durchmessers, wie ihn Abbildung 3.3 zeigt, ausreicht. Die Lage eines Punktes im verformten Zustand ist eindeutig bestimmt durch seinen Abstand r vom Plattenmittelpunkt im unverformten Zustand. Die vertikale Verschiebung $w(r)$ — positiv definiert in Richtung der Z -Achse — sowie die radiale Verschiebung $u(r)$ — positiv in Richtung wachsender r — beschreiben den Verformungszustand der Platte vollständig. Für bekannte Funktionen $w(r)$ und $u(r)$ ergeben sich die Krümmungen $1/r_n$ in radialer bzw. $1/r_t$ in tangentialer Richtung wie folgt [42], [9]:

$$\frac{1}{r_n} = \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{\frac{du}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{d^2u}{dr^2} \frac{dw}{dr}}{\left(\left(\frac{du}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r_t} = \frac{\varphi}{r} \quad . \quad (3.5)$$

Hierbei lässt sich φ durch Integration von Gleichung 3.4 unter Berücksichtigung der Randbedingung $\varphi(0) = 0$ berechnen. Aus Symmetriegründen stellt r_n einen der beiden Hauptkrümmungsradien dar. Betrachtet man Plattenpunkte, die im unverformten Zustand den Abstand r vom Kreisplattenmittelpunkt aufweisen, so sieht man, dass deren Normalen zur verformten Plattenmittelebene (die Strecke $A - B$ in Abbildung 3.3) den Mantel eines Kegels bilden. Aus diesem Grund muss der zweite Hauptkrümmungsradius r_t der Strecke $A - B$ entsprechen.

Besteht die Platte aus einem isotropen Material, lässt sich folgender Zusammenhang zwischen den Hauptkrümmungen und den daraus resultierenden Momenten angeben [42]:

$$M_r = D \left(\frac{1}{r_n} + \nu \frac{1}{r_t} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (3.6)$$

$$M_t = D \left(\frac{1}{r_t} + \nu \frac{1}{r_n} \right) = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (3.7)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad . \quad (3.8)$$

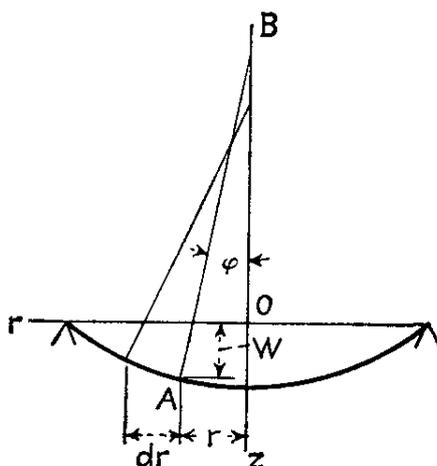


Abbildung 3.3: Schnitt durch eine Kreisplatte entlang eines Durchmessers [42]

Die Formeln 3.6 und 3.7 gelten für dünne Platten und basieren auf der Annahme, dass Schubdeformationen vernachlässigt werden können. M_r und M_t bezeichnen die Biegemomente pro Längeneinheit, die radial bzw. tangential gerichtete Spannungen über den Querschnitt hervorrufen, D die richtungsunabhängige Plattenbiegesteifigkeit, h die Querschnittshöhe sowie ν die Querdehnzahl. Positive Biegemomente erzeugen an der Plattenunterseite — das ist jene Seite mit Flächennormale in Richtung der Z -Achse — Zug. Liegt polar orthotropes Material vor und setzt man vereinfachend $\nu = 0$ voraus, so gehen die Formeln 3.6 und 3.7 über in

$$M_r = \frac{E_r h^3}{12} \frac{d\varphi}{dr} = D_r \frac{d\varphi}{dr} \quad (3.9)$$

$$M_t = \frac{E_t h^3}{12} \frac{\varphi}{r} = D_t \frac{\varphi}{r} \quad , \quad (3.10)$$

wobei D_r und D_t die jeweils in radialer und tangentialer Richtung vorliegenden Plattenbiegesteifigkeiten bezeichnen.

In den Gleichungen 3.9 und 3.10 tritt als einzige Unbekannte der Verdrehungswinkel $\varphi(r)$ auf. Zu dessen Bestimmung wird die Gleichgewichtsbedingung für die Momente M_r herangezogen. Wie aus Abbildung 3.4 ersichtlich, ergibt

$$M_r r d\theta \quad (3.11)$$

das resultierende Moment entlang der Kante $c - d$,

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta \quad (3.12)$$

jenes entlang der Strecke $a - b$. Da die Seiten $b - c$ sowie $a - d$ und somit auch die dort angreifenden, tangential gerichteten Biegemomente M_t den Winkel $d\theta$ einschließen, liefert M_t einen Anteil zum Momentengleichgewicht in radialer Richtung. Dieser beträgt

$$M_t dr d\theta \quad . \quad (3.13)$$

Was die Querkräfte betrifft, so ist aus der Symmetriebedingung der Belastung bezüglich des Kreisplattenmittelpunktes ersichtlich, dass entlang der Kanten $b - c$ und $a - d$ keine Schubkräfte wirken. Die resultierenden Querkräfte entlang der Seiten $c - d$ und $a - b$ verschwinden nicht und ergeben sich zu

$$Q r d\theta \quad (3.14)$$

sowie

$$\left[Q + \left(\frac{dQ}{dr} \right) dr \right] (r + dr) d\theta \quad . \quad (3.15)$$

Unter Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit liefert dieses Kräftepaar einen Beitrag von

$$Q r d\theta dr \quad (3.16)$$

zum Momentengleichgewicht in radialer Richtung. Bei konstanter transversaler Flächenlast q lässt sich die Querkraft Q als Funktion von r aus der einfachen Gleichgewichtsbeziehung [42]

$$2\pi r Q = \int_A q dA = \pi r^2 q \quad (3.17)$$

zu

$$Q = \frac{q r}{2} \quad (3.18)$$

bestimmen.

Die Summe der einzelnen Beiträge aus den Gleichungen 3.12, 3.11, 3.13 und 3.16 ergibt

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_t dr d\theta + Q r d\theta dr = 0 \quad . \quad (3.19)$$

Dies nimmt unter Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit sowie nach Division durch $d\theta dr$ die Form

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Q r = 0 \quad (3.20)$$

an. Einsetzen der Gleichungen 3.9 und 3.10 in 3.20 liefert die folgende Differentialgleichung für polar orthotrope Kreisplatten:

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{D_t}{D_r} \varphi = \frac{Q}{D_r} \quad . \quad (3.21)$$

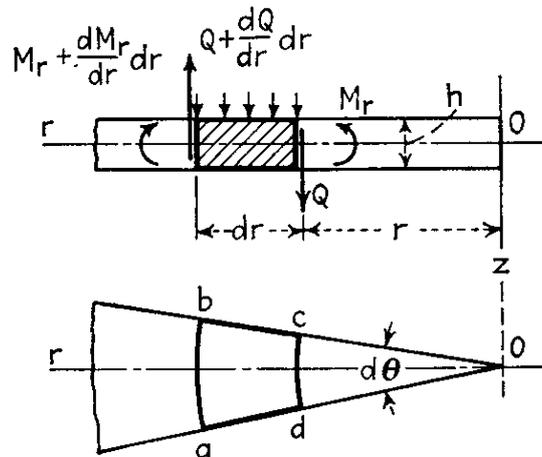


Abbildung 3.4: Schnittgrößen am infinitesimalen Element einer Kreisplatte [42]

Die vertikalen Verschiebungen erhält man zu

$$w = \int \sin \varphi \, dr + C \quad . \quad (3.22)$$

Für im Vergleich zur Querschnittshöhe kleine Deformationen geht diese Formel über in

$$w = \int \varphi \, dr + C \quad , \quad (3.23)$$

wobei sich die Integrationskonstante C aus den Verschiebungsrandbedingungen ergibt. Gilt $D_t/D_r = 1$ lässt sich Gleichung 3.21 mit wenig Aufwand integrieren. Trifft $D_t/D_r = 1$ nicht zu, wird die Suche nach einer Lösung wesentlich mühsamer.

Beispiel: Polar orthotrope Kreisplatte mit Randverdrehungen

Im Folgenden soll der Einfluss unterschiedlicher Verhältnisse D_t/D_r anhand einer Kreisplatte studiert werden, die entlang ihres Randes eine konstante Verdrehung erfährt. Um die Rechnung zu vereinfachen, variiert D_t nicht mit dem Abstand vom Kreisplattenzentrum.

Es sei eine Kreisplatte mit Radius $r_a = 5.2m$ und Querschnittshöhe $h = 4cm$ gegeben. Der E-Modul in radialer Richtung ist konstant und beträgt $E_r = 30500N/mm^2$. Dies entspricht dem Anfangs E-Modul von Beton C25/30. Von der Berücksichtigung des Eigengewichts der Platte wird abgesehen. Als äußere Einwirkung sei einzig eine entlang des gesamten Plattenumfangs vorhandene, konstante Verdrehung um die Tangente des Plattenrandes gegeben. Deren Größe

von $\varphi(r_a) = 0.1$ widerspricht der Annahme kleiner Verformungen und dient hier nur dazu, die wesentlichen Charakteristika des Problems darzustellen.

Zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung 3.21 sind zwei Randbedingungen erforderlich:

$$\varphi(0) = 0 \quad (3.24)$$

$$\varphi(r_a) = 0.1 \quad (3.25)$$

Die Randbedingung 3.24 ergibt sich aus der Forderung nach Rotationssymmetrie der verformten Platte. Da im Falle unterschiedlicher tangentialer und radialer Biegesteifigkeiten diese im Kreisplattenmittelpunkt nicht eindeutig definiert sind, ist es erforderlich, diese Problemstelle aus dem Lösungsgebiet auszuschließen. Am einfachsten lässt sich dies bewerkstelligen, indem man die Randbedingung 3.24 nicht für $r = 0m$, sondern für einen kleinen Wert von r z.B. $r = 0.001m$ anschreibt. Vertikale Unverschieblichkeit der Kreisplatte entlang ihres Umfangs bedeutet

$$w(r_a) = 0 \quad (3.26)$$

und ermöglicht die Bestimmung von $w(r)$ aus Gleichung 3.23 oder 3.22. Abbildung 3.5 zeigt Lösungen der Differentialgleichung 3.21 unter den Randbedingungen 3.24, 3.26 und 3.25 sowie für unterschiedliche relative Steifigkeiten D_t/D_r . Wie man sieht, führen kleinere Verhältnisse von D_t zu D_r zu größeren maximalen Auslenkungen in Plattenmitte, sowie zu kleineren radialen Krümmungen am Plattenrand. Für sehr kleine Verhältnisse der Biegesteifigkeiten gleicht die Verformungsfigur annähernd einem Kegel. Abbildung 3.6 verdeutlicht dies für vier unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse.

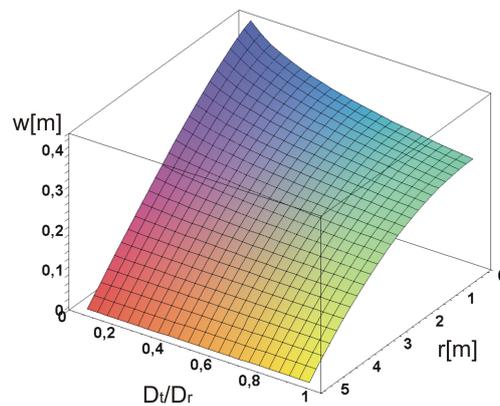


Abbildung 3.5: Vertikalverschiebung in Abhängigkeit von Steifigkeitsverhältnis D_t/D_r und Entfernung r vom Kreisplattenmittelpunkt

Denkt man sich die Kreisplatte unterteilt in radiale Segmente, die im Mittelpunkt spitz zulaufen und untereinander keine Biegemomente austauschen, so ergibt sich eine Struktur mit polar orthotropen Eigenschaften und $D_t/D_r = 0$. Nun lässt sich das oben beschriebene Phänomen wie folgt erklären: Die Breite jedes Segments nimmt vom Außenrand zum Plattenmittelpunkt mit r ab, dementsprechend auch die Biegesteifigkeit in radialer Richtung. Im Kreisplattenzentrum wo die radiale Biegesteifigkeit verschwindet, muss sich für eine gegebene Momentenbeanspruchung ein Knick ergeben, unter axial-symmetrischer Biegebeanspruchung für den Grenzfall $D_t/D_r = 0$ ein Kegel.

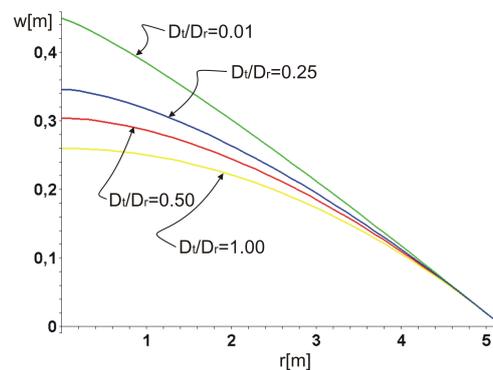


Abbildung 3.6: Vertikalverschiebung in Abhängigkeit von Entfernung r vom Kreisplattenmittelpunkt für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse D_t/D_r

Abbildung 3.7 gibt das Moment in radialer Richtung für unterschiedliche Steifigkeiten D_t und D_r wieder. Für $D_t/D_r = 1$ weist das Biegemoment M_r einen konstanten Wert auf und es gilt für die gesamte Platte $M_r = M_t = const.$ Mit kleiner werdendem D_t/D_r verringert sich das Moment am Rand und steigt zur Plattenmitte hin stark an.

Beispiel: Kreisplatte zusammengesetzt aus isotropem und polar orthotropem Material

Bei der Herstellung einer polar orthotropen Kreisplatte durch Aneinanderreihung harter Segmente und weicher, in radialer Richtung verlaufender Stauchungsfugen unterliegen letztere fertigungstechnischen Einschränkungen: Sie müssen wie in Abschnitt 3.1 dargelegt eine gewisse Mindestbreite aufweisen, um noch praktikabel herstellbar zu sein. Aus diesem Grund ist es notwendig, die mit weichem Material gefüllten Fugen in einem Abstand r_i vom Kreisplattenmittelpunkt enden

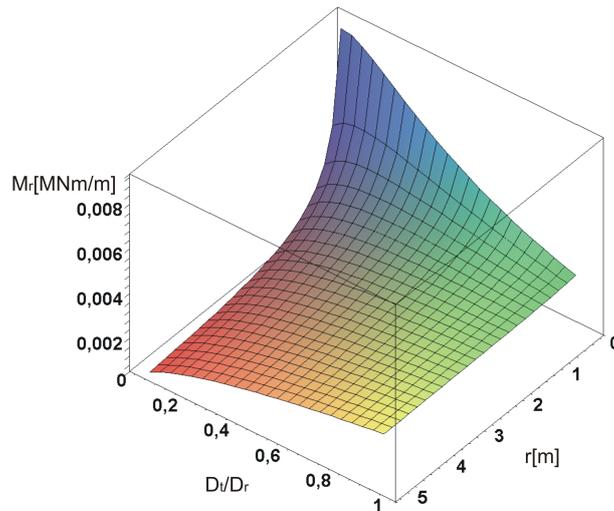


Abbildung 3.7: Radiales Moment in Abhängigkeit von Entfernung r vom Kreisplattenmittelpunkt für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse D_t/D_r

zu lassen. Auf diese Weise entsteht eine Kreisplatte mit isotropem Material im inneren und polar orthotropem Material im außenliegenden Bereich.

Zur rechnerischen Behandlung solcher Kreisplatten erfolgt eine Aufteilung des Lösungsgebietes in einen Teil r_a bis r_i entsprechend dem polar orthotropen Plattenbereich sowie in die isotrope Zone r_i bis 0. Für beide Bereiche gilt Gleichung 3.21 und liefert Lösungen φ_a und φ_i für die innere bzw. äußere Zone. An der Stelle $r = r_i$ gelten folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi_a(r_i) &= \varphi_i(r_i) \\ \frac{d\varphi_a(r_i)}{dr} &= \frac{d\varphi_i(r_i)}{dr} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Das im vorhergehenden Abschnitt behandelte Kreisplattenproblem soll nun um eine innere, isotrope Zone mit $r_i = 1.6m$ und $E_r = E_t = 30500N/mm^2$ ergänzt werden. Für unterschiedliche Verhältnisse von D_t/D_r ergeben sich die in Abbildung 3.8 bzw. 3.9 gezeigten Verschiebungsverläufe

Es fällt auf, dass der Einfluss unterschiedlicher Steifigkeitsverhältnisse D_t/D_r auf die Vertikalverschiebungen bei weitem geringer ausfällt, als bei Platten mit durchgehend polar isotropem Material. Für $D_t/D_r = 0.01$ ergibt sich die maximale Auslenkung in Plattenmitte zu $0.32m$ anstatt $0.45m$ wie im Beispiel in Abschnitt 3.2.1.

Abbildung 3.10 enthält den Verlauf der Biegemomente in radialer Richtung in Abhängigkeit von D_t/D_r und r . Im Gegensatz zu Abbildung 3.7 zeigt sich keine

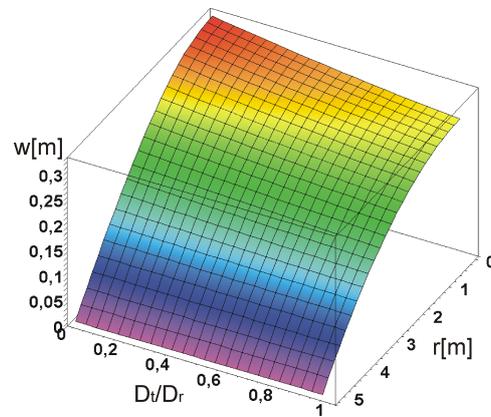


Abbildung 3.8: Vertikalverschiebung in Abhängigkeit von Steifigkeitsverhältnis D_t/D_r und Entfernung r vom Kreisplattenmittelpunkt für eine zusammengesetzte Platte

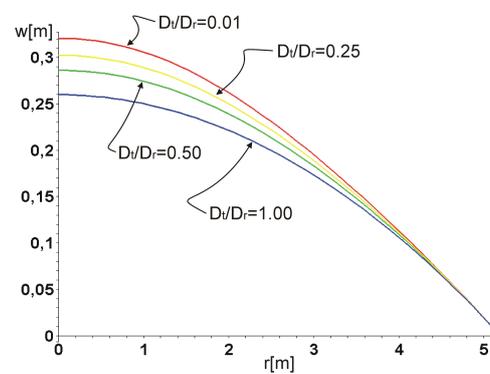


Abbildung 3.9: Vertikalverschiebung in Abhängigkeit von Entfernung r vom Mittelpunkt einer zusammengesetzten Kreisplatte für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse D_t/D_r

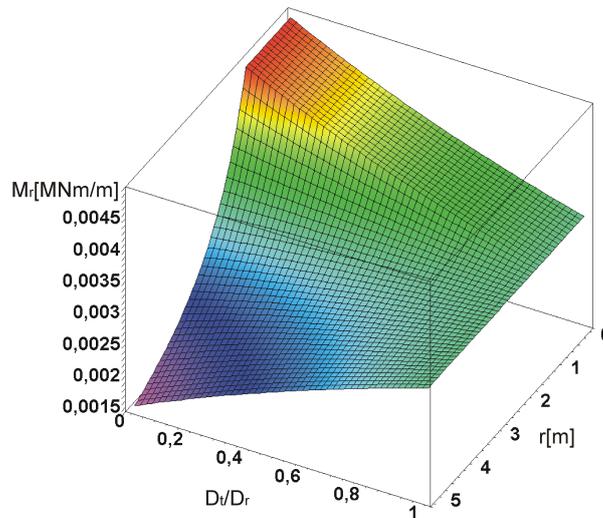


Abbildung 3.10: Radiales Moment in Abhängigkeit von Entfernung r vom Mittelpunkt einer zusammengesetzten Kreisplatte für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse D_t/D_r

ausgeprägte Spitze im Plattenmittelpunkt für kleine D_t/D_r -Verhältnisse, da im isotropen Platteninnenteil die Biegemomente einen konstanten Wert annehmen.

Im gegenständlichen Beispiel beträgt der Anteil des isotropen Bereichs am gesamten Plattenradius 30.7%. Da r_i nur durch baupraktische Überlegungen bestimmt und im wesentlichen konstant ist, sinkt das Verhältnis r_i/r_a mit zunehmendem Gesamtradius r_a der Platte. Damit nähert sich das Verhalten der Kreisplatte wieder dem im vorherigen Beispiel beschriebenen an.

3.2.2 Polar orthotrope Kreisplatte belastet durch Normalkräfte in Plattenebene

Die Betrachtung polar orthotroper Kreisplatten in Abschnitt 3.2.1 beschränkt sich auf Fälle mit transversal wirkenden Lasten. Bei gleichzeitigem Vorhandensein von in Plattenmittelebene wirkender Belastung sind die in 3.2.1 gewonnenen Differentialgleichungen zu ergänzen. Die Betrachtung eines Kreisringes der Breite dr führt auf folgende Gleichgewichtsbedingung in transversaler Richtung

$$\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr \right) \left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr} dr \right) \right) (r + dr) 2\pi - \quad (3.28)$$

$$- (Q + N_r \varphi) r 2\pi - q ((r + dr)^2 - r^2) \pi = 0 \quad .$$

Die Normalkraft in tangentialer Richtung N_t bewirkt keine vertikal gerichteten Umlenkkräfte, da bei axialsymmetrischer Verformungsfigur und gegebenem Abstand r vom Kreisplattenmittelpunkt $w = const$ gilt. Bei Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit lässt sich Gleichung 3.28 in

$$\frac{d}{dr}(rQ) + \frac{d}{dr}(rN_r\varphi) + rq = 0 \quad (3.29)$$

überführen [40]. Integration von Gleichung 3.29 über r liefert

$$Q + N_r\varphi + \frac{rq}{2} = 0 \quad . \quad (3.30)$$

Nach Einsetzen in Gleichung 3.21 erhält man

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \left(\frac{1}{r^2} D_t - N_r \right) \frac{\varphi}{D_r} = -\frac{rq}{2D_r} \quad (3.31)$$

als Differentialgleichung für ebene, polar orthotrope Kreisplatten unter transversal und in Richtung der Plattenmittelebene wirkender Belastung.

Die Berücksichtigung einer anfänglichen transversalen Auslenkung w_0 der Plattenmittelfläche gestaltet sich einfach, wenn w_0 klein ist im Vergleich zur Plattendicke. Da für kleine Verschiebungen das Superpositions-gesetz gilt, ergibt sich die gesamte Verformung w durch Überlagerung von w_0 und der Verschiebung w_1 infolge transversaler und in Plattenmittelebene vorhandener Lasten q bzw. N_r . Die transversale Komponente der radialen Kräfte N_r hängt dabei nicht nur von w_1 , sondern von der Gesamtverformung w ab. Gleichung 3.30 geht dann über in

$$Q + N_r(\varphi_1 + \varphi_0) + \frac{rq}{2} = 0 \quad , \quad (3.32)$$

wobei φ_0 den Winkel der anfänglich verformten Mittelfläche zur Horizontalen bezeichnet, φ_1 den Zuwachs infolge transversaler und in Plattenebene wirkender Last. Einsetzen in Gleichung 3.21 liefert schließlich die zu 3.31 analoge Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} - \left(\frac{1}{r^2} D_t - N_r \right) \frac{\varphi_1}{D_r} = -\frac{rq}{2D_r} - \frac{N_r\varphi_0}{D_r} \quad . \quad (3.33)$$

Als Anwendungsbeispiel für die soeben abgeleiteten Beziehungen wird im Folgenden die in Abbildung 3.11 dargestellte Kreisplatte mit Radius r_a und radial wirkender Randlast N_{ra} behandelt.

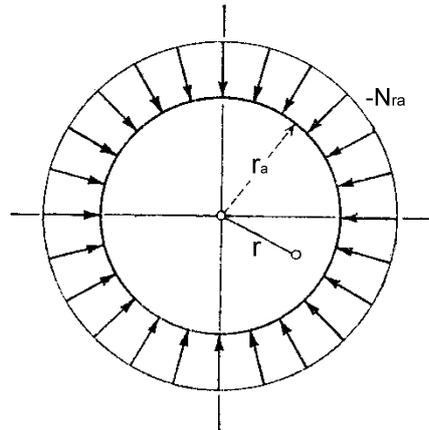


Abbildung 3.11: Kreisplatte unter axialsymmetrischer Druckbeanspruchung [42]

Bestimmung der in Scheibenebene wirkenden Kräfte

Im Falle isotroper Materialeigenschaften und symmetrischer Randbelastung ergeben sich die radialen und tangentialen Normalkräfte pro Längeneinheit in Plattenebene zu $N_r = N_t = N = const.$

Für polar orthotrope Kreisplatten gestaltet sich die Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte in Plattenebene etwas komplizierter. Da nun nicht mehr $N_r = N_t = N = const$ gilt, muss der Verlauf der radialen Normalkraft vorab ermittelt werden. Aus der Betrachtung eines infinitesimalen Flächenelements (siehe Abbildung 3.12) und unter Beachtung der Tatsache, dass bei rotationssymmetrischer Belastung sämtliche Ableitungen nach θ sowie alle Schubspannungen verschwinden, erhält man als Gleichgewichtsbedingung in radialer Richtung bei konstanter Plattendicke h

$$\left(N_r + \frac{dN_r}{dr}\right) \left(r + \frac{dr}{d\theta}d\theta\right) d\theta - N_r r d\theta - N_t dr d\theta = 0 \quad . \quad (3.34)$$

Nach Division durch $r dr d\theta$ und Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit ergibt sich aus 3.34

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_t}{r} = 0 \quad . \quad (3.35)$$

Bei gegebener Verschiebung $u(r)$ — jene ist positiv definiert in Richtung von zunehmendem Abstand r vom Plattenzentrum — lassen sich mit Hilfe der E-Module E_r und E_t unter der Annahme verschwindender Querdehnzahl ν in radialer bzw. tangentialer Richtung die Normalkräfte N_r und N_t wie folgt ausdrücken

$$N_r = h \sigma_r = h E_r \varepsilon_r = h E_r \frac{du}{dr} \quad (3.36)$$

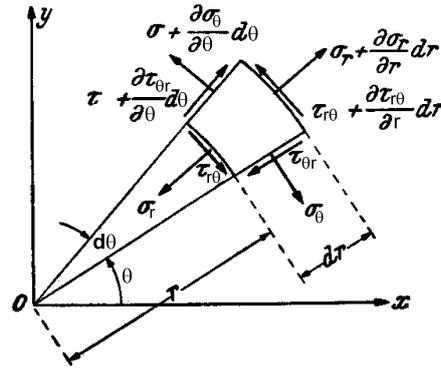


Abbildung 3.12: Spannungen an einem infinitesimalen Scheibenelement in Polarkoordinaten [16]

$$N_t = h \sigma_t = h E_t \varepsilon_t = h E_t \frac{u}{r} \quad .$$

Einsetzen in Gleichung 3.35 führt auf

$$E_r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(E_r \frac{du}{dr} - E_t \frac{u}{r} \right) = 0 \quad (3.37)$$

bzw.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{E_t}{E_r} \frac{u}{r} \right) = 0 \quad . \quad (3.38)$$

Zur eindeutigen Lösung dieser Differentialgleichung sind zwei Randbedingungen nötig. Die erste Bedingung ergibt sich aus den am Scheibenumfang wirkenden Kräften:

$$N_r(r = r_a) = N_{ra} \quad . \quad (3.39)$$

Die zweite Bedingung erhält man unter der Annahme, dass die radiale Verschiebung im Kreisscheibenmittelpunkt verschwindet:

$$u(r = 0) = 0 \quad . \quad (3.40)$$

Setzt sich die Kreisscheibe wie jene in Abschnitt 3.2.1 aus zwei Abschnitten mit unterschiedlichem Materialverhalten zusammen, so resultiert daraus ein Differentialgleichungssystem mit zwei Gleichungen zur Bestimmung der Verschiebungen $u_i(r)$ im Innen- bzw. $u_a(r)$ im Außenbereich. Für $r = r_i$ wo die beiden Bereiche aneinander grenzen, sind folgende Übergangsbedingungen zu setzen:

$$\begin{aligned} u_i(r_i) &= u_a(r_i) \\ \frac{du_i(r_i)}{dr} &= \frac{du_a(r_a)}{dr} \end{aligned} \quad . \quad (3.41)$$

$u_i(r)$ und $u_a(r)$ lassen sich berechnen und zur Gesamtlösung $u(r)$ zusammensetzen. Die Normalkräfte in radialer und tangentialer Richtung ergeben sich durch Einsetzen von $u(r)$ in die Gleichungen 3.36.

Im Folgenden soll die schon im Abschnitt 3.2.1 behandelte Platte als Beispiel dienen. Die radial gerichteten Kräfte am Außenrand seien Umlenkkräfte infolge eines am Umfang angeordneten Spannungsglieds. Mit einer Vorspannkraft P von $0.14MN$ ergibt sich die radiale Normalspannung am Scheibenaußenrand zu

$$\sigma_{ra} = -\frac{P}{r_a h} = -\frac{0.14}{5.20 \cdot 0.04} = -0.67MN/m^2 \quad . \quad (3.42)$$

Abbildung 3.13 zeigt den Verlauf der radialen Verschiebungen über den Radius der Kreisscheibe in Abhängigkeit von unterschiedlichen Verhältnissen E_t/E_r . Wie man sieht, weist die vollkommen isotrope Kreisscheibe am Umfang eine nur etwa halb so große Radialverschiebung auf wie jene, die von $r = r_a$ bis $r = r_i$ aus polar orthotropem Material mit $E_t/E_r = 0$ besteht. Am Übergang zwischen isotroper und polar orthotroper Zone lassen sich keine wesentlichen Änderungen des radialen Verschiebungsverlaufs feststellen.

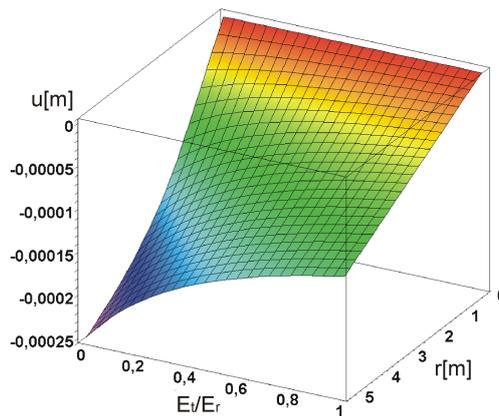


Abbildung 3.13: Verschiebung in radialer Richtung in Abhängigkeit von Mittelpunktsentfernung r und Verhältnis E_t/E_r

Im Gegensatz dazu zeigen sich in den Abbildungen 3.14 und 3.15 für Radial- und Tangentialspannung deutliche Unterschiede zwischen isotropem und polar orthotropem Bereich: Im isotropen Mittenbereich gilt $\sigma_r = \sigma_t = const$. Für $r = r_i$ und $E_t/E_r = 0$ ergibt sich als Lösung für σ_r eine Spannung von $-2.187N/mm^2$. Stellt man sich die Scheibe als Ansammlung radialer Segmente vor, entspricht

dies exakt dem erwarteten Wert von $\sigma_r(r = r_a) \cdot r_a/r_i = -2.187\text{N/mm}^2$. Die tangentialen Spannungen streben im polar orthotropen Scheibebereich mit kleiner werdendem E_t/E_r gegen 0 und weisen am Übergang zum isotropen Bereich einen Sprung auf, da dort $\sigma_r = \sigma_t$ gilt.

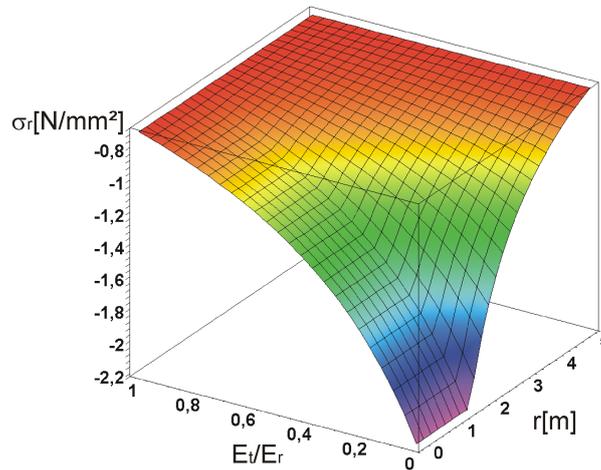


Abbildung 3.14: Spannung σ_r in radialer Richtung in Abhängigkeit von Mittelpunktsentfernung r und Verhältnis E_t/E_r

Kreisplatte unter Eigengewicht und radialer Vorspannung

Für die Umformung einer Kreisplatte in eine Kugelkappe nach dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren ist es von Interesse, bei welcher Mittenauslenkung eine gegebene Umlenkkraft das Eigengewicht der Platte gerade kompensiert. Um die Berechnung möglichst einfach zu halten, wird zur Bestimmung der transversalen Verformung der Kreisplatte $E_t/E_r = D_t/D_r = 0$ angenommen. Für den polar orthotropen Außenbereich gilt dann

$$N_r = N_{ra} \frac{r_a}{r} \quad , \quad (3.43)$$

im isotropen Innenbereich

$$N_r = N_{ra} \frac{r_a}{r_i} = \text{const} \quad . \quad (3.44)$$

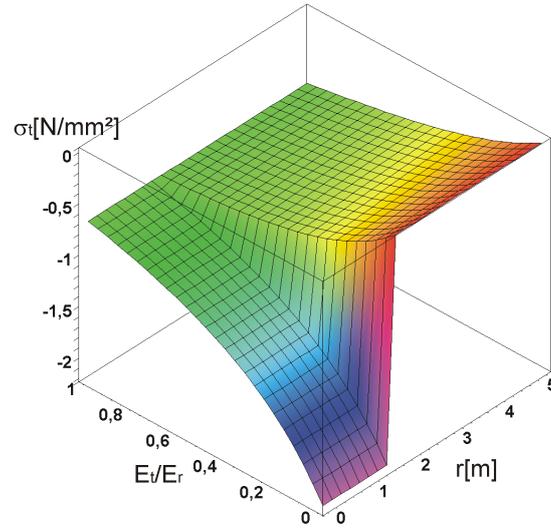


Abbildung 3.15: Spannung σ_t in Umfangsrichtung in Abhängigkeit von Mittelpunktsentfernung r und Verhältnis E_t/E_r

Die Vorverformung sei zunächst parabelförmig mit einer größten Auslenkung $w_{0,\max}$ in Kreisplattenmitte angenommen. Der in Gleichung 3.33 benötigte Winkel φ_0 ergibt sich für kleine w_0 zu

$$\varphi_0 = \frac{dw_0}{dr} = \frac{2w_{0,\max}}{r_a} \frac{r}{r_a} \quad . \quad (3.45)$$

Aufgrund der Annahme $D_t/D_r = 0$ vereinfacht sich Gleichung 3.33 auf

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{N_r}{D_r} (\varphi_1 + \varphi_0) = -\frac{r q}{2D_r} \quad . \quad (3.46)$$

Die Aufgabe, die zuerst gelöst werden soll, besteht darin, bei gegebenem Eigengewicht q , Außenradius r_a und Vorverformung $w_{0,\max}$ N_r so zu bestimmen, dass in Plattenmitte $w_1 = 0$ gilt. Es sei $q = h\gamma = 0.04 \cdot 0.025 = 0.001 \text{ MN/m}^2$, $r_a = 5.2 \text{ m}$, $r_i = 1.6 \text{ m}$, $E_r = 30500 \text{ MN/m}^2$ und $w_{0,\max} = -0.05 \text{ m}$ gegeben. Aus Symmetriegründen ergibt sich $\varphi(0) = 0$. Da am Außenrand keine radialen Momente vorhanden sind, gilt dort $d\varphi(r_a)/dr = 0$. Die Ermittlung der transversalen Verschiebungen $w(r, N_{ra})$ kann mittels Gleichung 3.23 und der Randbedingung $w(r = r_a, N_{ra}) = 0$ erfolgen. Die Forderung $w_1(r = 0, N_{ra}) = 0$ liefert $N_{ra} = -0.094 \text{ MN/m}$, was bei einer Scheibendicke von 4 cm am Übergang vom polar orthotropen zum isotropen Bereich zu einer mittleren Spannung von $N_{ra}/h \cdot r_a/r_i = -0.094/0.04 \cdot 5.2/1.6 = 7.64 \text{ MN/m}^2$ führt.

Die exakte Lösung von Gleichung 3.46 stellt einen sehr unhandlichen Formel-
ausdruck dar. Unter der zulässigen Annahme $\varphi_1 \ll \varphi_0$ nimmt 3.46 die Gestalt

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} = -\frac{r q}{2D_r} - \frac{N_r \varphi_0}{D_r} \quad (3.47)$$

an. Statt der zuvor ermittelten radialen Normalkraft $N_{ra} = -0.094MN/m$ ergibt
sich nun $N_{ra} = -0.096MN/m$, was einem relativen Fehler von 2% entspricht.

Die in den Abbildungen 3.16 und 3.17 gezeigten Zusammenhänge basieren auf
Gleichung 3.47. Diese Gleichung gilt nur für im Vergleich zur Plattendicke klei-
ne Verformungen bzw. Vorverformungen. Der Grund dafür liegt hauptsächlich
in der Tatsache, dass im Falle großer Verformungen transversale Lasten neben
Biegemomenten M_r und M_t auch Membrankräfte N_r und N_t hervorrufen (siehe
Abschnitt 4.3). Der Fehler infolge der Nichtberücksichtigung des Membrantra-
ganteils in den Abbildungen 3.16 und 3.17 wird aber dadurch gemildert, dass im
polar orthotropen Bereich ($r_a > r > r_i$) infolge $E_t = 0$ keine Normalkräfte N_t
auftreten.

Den Berechnungen für die Abbildungen 3.16 und 3.17 liegen Kreisplatten
mit einer Querschnittshöhe von $4cm$ zu Grunde. Die Anfangsverformung hat
die Form einer Parabel mit Stich $w_{0,max}$. Die Wichte des Plattenmaterials be-
trägt $0.025MN/m^3$, die E-Module in radialer und tangentialer Richtung sind
 $E_r = 30500MN/m^2$ bzw. $E_t = 0$.

Abbildung 3.16 zeigt für Kreisplatten mit Außenradien von $5m$ bis $40m$ wel-
che radiale Normalkraft am Außenrand aufgebracht werden muss, um bei ver-
schiedenen Anfangsverformungsamplituden das Eigengewicht der Platte gerade
zu kompensieren, sodass in Plattenmitte keine Verschiebung auftritt. Es zeigt
sich, dass die erforderlichen Radialkräfte mit wachsendem Kreisplattendurchmes-
ser überproportional ansteigen. Dies erklärt sich aus dem Umstand, dass die Um-
lenkkraft infolge der radialen Normalkraft proportional zur Krümmung der Vor-
verformungsfigur κ_{r0} in radialer Richtung wächst. Da für κ_{r0} bei parabelförmiger
Vorverformung

$$\kappa_{r0} = \frac{2 w_{0,max}}{r_a^2} \quad (3.48)$$

gilt, muss zur Erzielung der gleichen Umlenkkraft bei doppeltem Außenradius r_a
das vierfache Vorverformungsmaximum $w_{0,max}$ gewählt werden.

In Abbildung 3.17 sieht man, wie sich die erforderliche Amplitude der Vor-
verformung bei konstanter radialer Normalkraft am Außenrand mit wachsendem
Plattenradius r_a verändert. Für die drei Kurven wurden solche Werte für N_{ra}
gewählt, dass am Übergang vom polar orthotropen zum isotropen Bereich bei
 $r = r_i$ die in der Abbildung 3.17 ausgewiesenen Spannungen σ_{ri} in Plattenmitte
auftreten. Für $\sigma_{ri} = -30MN/m^2$, einem Wert, der für Stahlbetonschalen in Frage

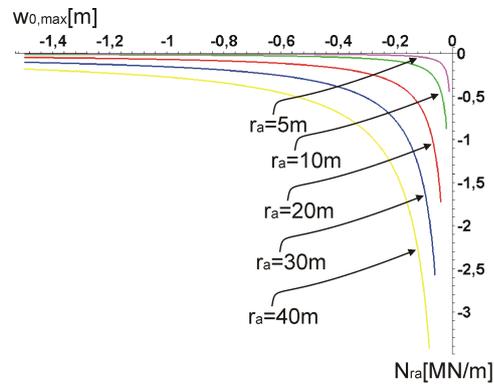


Abbildung 3.16: Zusammenhang zwischen Vorverformung und erforderlicher Randradialkraft zur Kompensierung eines Eigengewichts von $0.001MN/m^2$ für unterschiedliche Kreisplattendurchmesser

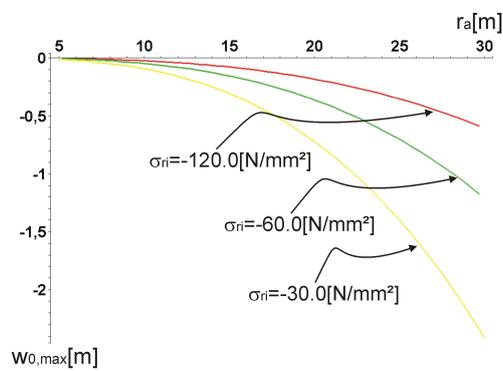


Abbildung 3.17: Zusammenhang zwischen Vorverformung und Kreisplattenradius für unterschiedliche maximale, über die Querschnittshöhe gemittelte Radialspannungen bei Kompensation des Eigengewichts $g = 0.001MN/m^2$

kommt, wachsen, wie man erkennen kann, die notwendigen Vorverformungsamplituden mit zunehmendem Radius r_a überproportional an. Die in der Platte auftretende, maximale Normalspannung ergibt sich zu

$$\sigma_{ri} = N_{ra}/h \cdot r_a/r_i \quad . \quad (3.49)$$

Sie lässt sich also durch Vergrößerung der Querschnittshöhe h oder des Durchmessers der isotropen Zone r_i reduzieren. Da mit wachsender Querschnittshöhe allerdings auch das Eigengewicht der Platte zunimmt, stellt im betrachteten Fall die Erhöhung von h kein geeignetes Mittel zur Verminderung von σ_{ri} dar.

Kapitel 4

Übergang von Platten- zu Schalenbiegetheorie

4.1 Verformungsenergie in polar orthotropen Kreisplatten

Bei der Herleitung der Beziehungen in Abschnitt 3.2.1 wurde von der Annahme kleiner Verschiebungen Gebrauch gemacht, damit die resultierenden Gleichungen handlich bleiben. Dadurch konnte vereinfachend davon ausgegangen werden, dass sich bei äußerer Belastung die Lage der neutralen Fläche relativ zur Plattenmittelfläche nicht ändert. Dies trifft streng genommen für Platten nur dann zu, wenn die resultierende Deformationsfigur eine abwickelbare Fläche darstellt. Andernfalls treten Dehnungen in der Plattenmittelfläche auf [42]. Sobald diese Dehnungen Spannungen hervorrufen, deren Betrag nicht mehr klein im Vergleich zu den Spannungen infolge Biegung ist, führt ihre Vernachlässigung zu ungenauen Resultaten.

Zur Abschätzung des Einflusses der getroffenen Vereinfachungen soll im Folgenden eine Kreisplatte mit den gleichen Abmessungen und Materialparametern wie jenen in Abschnitt 3.2.1 untersucht werden. Die Verformungsfigur infolge äußerer Kräfte sei gegeben als Kugelabschnitt mit unterschiedlichen Durchbiegungsmaxima f in Plattenmitte. Als Vergleichsparameter dient die in der Struktur gespeicherte Verformungsenergie.

Vereinfachend sei vorausgesetzt, dass in radialer Richtung keine Stauchungen auftreten. Für polar orthotrope Kreisplatten mit $D_r \gg D_t$ fällt die daraus resultierende Abweichung vom wahren Ergebnis nicht ins Gewicht. Mit dieser Annahme erhält man die in Abbildung 4.1 ersichtlichen geometrischen Zusammenhänge

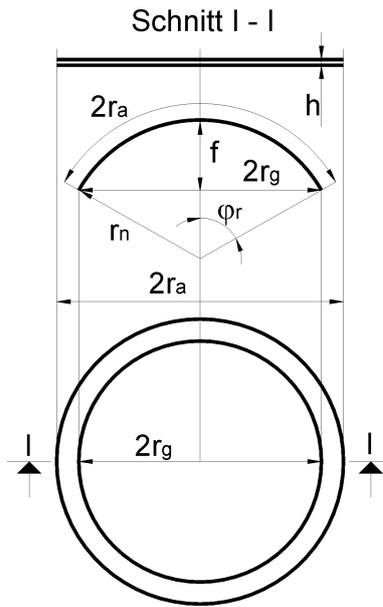


Abbildung 4.1: Kreisplatte unter großen Verformungen

zwischen verformter und unverformter Lage. Für gegebenen Öffnungswinkel φ_r ergibt sich

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{r_a}{\varphi_r} & (4.1) \\ f &= r_n (1 - \cos \varphi_r) \\ r_g &= r_n \sin \varphi_r \quad . \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Breitenkreis am Kugelabschnitt, dessen Position durch seinen ursprünglichen Abstand r vom Kreisplattenmittelpunkt gegeben ist, lassen sich vertikale und horizontale Verschiebung w (nach oben positiv) und u (nach innen positiv) wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r}{r_a} \varphi_r & (4.2) \\ u &= r (1 - \sin \varphi) \\ w &= f + r_n (\cos \varphi - 1) \quad . \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich die Dehnung in tangentialer Richtung zu

$$\varepsilon_t = -\frac{u}{r} \quad . \quad (4.3)$$

Die gesamte Formänderungsenergie der Platte setzt sich aus Biege- und Membrananteilen zusammen:

$$\begin{aligned} V_{b,r} &= \frac{1}{2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} D_r \left(\frac{1}{r_n} \right)^2 r d\theta dr = \frac{1}{2} D_r \pi \left(\frac{1}{r_n} \right)^2 r_a^2 \\ V_{b,t} &= \frac{1}{2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} D_t \left(\frac{1}{r_t} \right)^2 r d\theta dr = \frac{1}{2} D_t \pi \left(\frac{1}{r_n} \right)^2 r_a^2 \\ V_{m,t} &= \frac{1}{2} \int_0^{r_a} \int_0^{2\pi} E_t h \varepsilon_t^2 r d\theta dr = E_t h \pi \int_0^{r_a} \varepsilon_t^2 r dr \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnen $V_{b,r}$ und $V_{b,t}$ die Formänderungsenergien infolge Biegung in radialer bzw. tangentialer Richtung. In Plattenebene ergeben sich nur Beiträge $V_{m,t}$ zur Formänderungsenergie, da voraussetzungsgemäß keine radialen Stauchungen der Mittelfläche auftreten. Als maximale Durchbiegung, für welche die einzelnen Formänderungsenergieanteile verglichen werden, sei ein Wert von $1.7m$ festgelegt, was einem Öffnungswinkel φ_r von $0.68rad \approx 40^\circ$ entspricht.

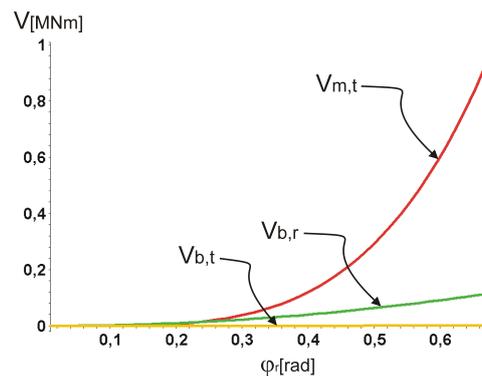


Abbildung 4.2: Formänderungsenergie infolge Biegung und Stauchung der Plattenmittelfläche

Abbildung 4.2 zeigt einen Vergleich der einzelnen Anteile der Formänderungsenergie für die in Abschnitt 3.2.1 behandelte Platte. Als E-Modul in radialer Richtung wurde wie dort ein Wert von $E_r = 30500N/mm^2$ gewählt, für den tangentialen E-Modul ein Wert von $E_t = 305N/mm^2$. Wie sich erkennen lässt, spielt der Energieanteil aus tangentialer Biegung nur eine untergeordnete Rolle. Mit wachsender Neigung des Plattenrandes wächst der Anteil aus radialer Biegung ungefähr linear an. Ab einem Randneigungswinkel von $\varphi_r \approx 0.23rad \approx 12.6^\circ$ übertrifft die in der Struktur infolge Stauchung der Mittelfläche gespeicherte Energie jene aus Biegung. Für diese Randverdrehung ergibt sich die maximale

Durchbiegung in Plattenmitte zu $f = 0.60m$ sowie die tangentielle Stauchung am Plattenrand zu $\varepsilon_t = -0.009$.

Um einen Anhaltspunkt zu erhalten, bis zu welcher maximalen Verformung die Stauchung der Mittelfläche vernachlässigt werden kann, sei jener Zustand gesucht, bei dem das Verhältnis

$$\left(|V_{ges} - V_{ges,Näherung}| \right) / V_{ges} = V_{m,t} / (V_{m,t} + V_{b,r} + V_{b,t}) \quad (4.5)$$

einen Wert von 0.1 annimmt. Dies bedeutet, dass 10% der von außen in die Struktur eingebrachten Verformungsenergie in der vereinfachten Berechnung keine Berücksichtigung finden. Für $E_r = 30500N/mm^2$ und $E_t = 305N/mm^2$ führt dies auf eine maximale Durchbiegung in Plattenmitte von $0.201m$. Liegt hingegen ein isotropes Plattenmaterial mit $E = 30500N/mm^2$ vor, so erhält man eine zulässige Verformung in Plattenmitte von nur mehr $0.028m$.

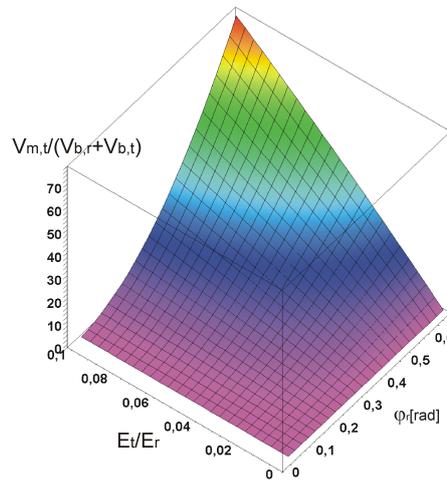


Abbildung 4.3: $V_{m,t}/(V_{b,r} + V_{b,t})$ für unterschiedliche Verhältnisse E_t/E_r .

Abbildung 4.3 zeigt, wie sich das Verhältnis der Energieanteile aus Stauchung der Plattenmittelfläche in Breitenkreisrichtung und Biegung mit unterschiedlichen Verhältnissen der tangentialen und radialen E-Module verändert. Zwischen den Verhältnissen E_t/E_r und $V_{m,t}/(V_{b,r} + V_{b,t})$ ergibt sich ein ungefähr linearer Zusammenhang. Den dominierenden Einfluss der tangentialen Stauchung der Plattenmittelebene veranschaulicht auch Abbildung 4.4. Hier zeigt sich, dass der Anteil der Energie infolge Stauchung der Mittelebene an der gesamten Verformungsenergie mit zunehmendem Randverdrehungswinkel und Verhältnis E_t/E_r rasch ansteigt.

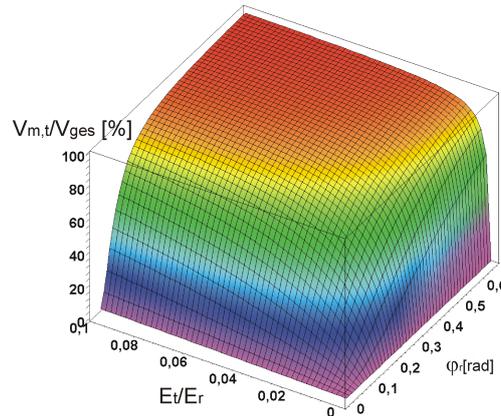


Abbildung 4.4: $V_{m,t}/V_{ges}$ für unterschiedliche Verhältnisse E_t/E_r

Aus den in diesem Abschnitt angestellten Betrachtungen lässt sich ablesen, dass bei Vorliegen linear elastischen, isotropen Materials die Plattenbiegetheorie nur für im Vergleich zur Plattendicke kleine Verformungen zutreffende Aussagen liefert [42]. Im Falle polar orthotroper Kreisplatten ergibt sich abhängig vom Verhältnis E_t/E_r ein erweiterter Geltungsbereich.

4.2 Membrantheorie rotationssymmetrischer Schalen

4.2.1 Grundlegendes

In der bisher behandelten Plattentheorie für kleine Verformungen geschieht die Ableitung äußerer Kräfte ausschließlich über Biegemomente. Die Membrantheorie für Schalen repräsentiert das genaue Gegenteil: Sie basiert auf der Annahme, dass die Lastabtragung ausschließlich über Normal- und Schubkräfte parallel zur Plattenmittelebene — sogenannte Membrankräfte — erfolgt. Diese Annahme bedingt, dass die Querschnittshöhe der Schale so klein ist, dass ihre Biege- und Torsionssteifigkeit vernachlässigt werden darf [10]. Eine weitere Bedingung für die Anwendbarkeit der Membrantheorie betrifft die Verformungen: Diese müssen sich frei ausbilden können. Für die Gestaltung der Auflager bedeutet dies, dass entlang des gesamten Schalenrandes die Resultierende der Reaktionskräfte tangential zur Mittelfläche gerichtet sein muss. Im Rahmen der Membrantheorie treten als Unbekannte zwei Normalkräfte sowie eine Schubkraft auf. Da drei

Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, lassen sich die unbekanntenen Schnittgrößen allein durch diese bestimmen.

4.2.2 Gleichgewichtsbedingungen für Drehschalen unter rotationssymmetrischer Belastung

Abbildung 4.5a zeigt ein durch Meridiane an den Stellen θ und $\theta + d\theta$ sowie durch Breitenkreise bei φ und $\varphi + d\varphi$ berandetes Membranschalelement. Beschränkt man sich auf den Fall rotationssymmetrischer Belastung, so ergibt sich daraus, dass die Kräfte $N_{\varphi\theta}$ und $N_{\theta\varphi}$ verschwinden. Die verbleibenden Schnittgrößen N_{φ} und N_{θ} lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen senkrecht zur Schalenmittelfläche und in Richtung der Meridiantangente bestimmen.

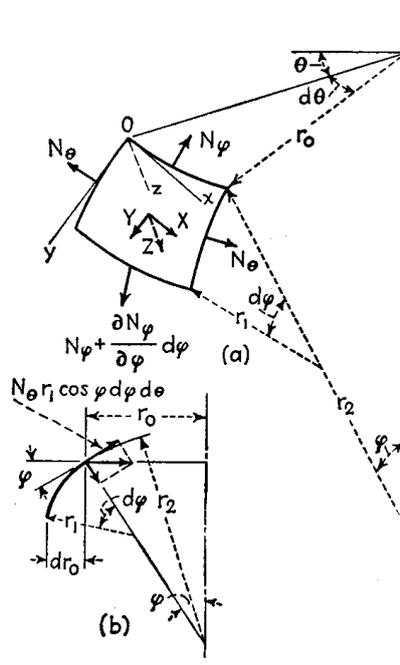


Abbildung 4.5: Membrankräfte an einem infinitesimalen Schalelement [42]

Gleichgewicht in Richtung der Meridiantangente

Am oberen Breitenkreis greift die Kraft

$$N_{\varphi} r_0 d\theta = N_{\varphi} r_2 \sin \varphi d\theta \quad (4.6)$$

an. N_φ , sowie die Länge des zugehörigen Breitenkreises verändern sich mit wachsendem φ . Daher wirkt am unteren Breitenkreis die Kraft

$$\left(N_\varphi + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta \quad . \quad (4.7)$$

Bei Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit liefern diese beiden Ausdrücke einen resultierenden Beitrag von

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r_0) d\varphi d\theta \quad (4.8)$$

in Richtung der Meridiantangente.

Da die verteilten Kräfte N_θ den Winkel $d\theta$ einschließen, weisen sie eine horizontale, zur Rotationsachse gerichtete Komponente auf (siehe Abbildung 4.5b). Deren Anteil in Meridianrichtung beläuft sich auf

$$-N_\theta r_1 \cos \varphi d\varphi d\theta \quad . \quad (4.9)$$

Unter Berücksichtigung der äußeren, auf der Fläche $r_1 r_0 d\theta d\varphi$ wirkenden Kraft Y und nach Division durch $d\varphi d\theta$ nimmt die Gleichgewichtsbeziehung in Meridianrichtung die Gestalt

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r_0) - N_\theta r_1 \cos \varphi + Y r_1 r_0 = 0 \quad (4.10)$$

an.

Gleichgewicht senkrecht zur Schalenmittelfläche

Die am oberen und unteren Elementrand angreifenden Kräfte N_φ und $N_\varphi + dN_\varphi$ schließen den Winkel $d\varphi$ miteinander ein, und weisen bei Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit eine Z -Komponente von

$$N_\varphi r_0 d\theta d\varphi \quad (4.11)$$

auf. Wie Abbildung 4.5b zeigt, beträgt der Z -Anteil der Schnittgrößen N_θ

$$N_\theta r_1 \sin \varphi d\varphi d\theta \quad . \quad (4.12)$$

Zusammen mit der äußeren Kraft $Z r_1 r_0 d\theta d\varphi$ und nach Division durch den gemeinsamen Faktor $d\varphi d\theta$ ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung senkrecht zur Schalenmittelfläche zu

$$N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + Z r_1 r_0 = 0 \quad . \quad (4.13)$$

Unter Berücksichtigung von $r_0 = r_2 \sin \varphi$ lässt sich diese Gleichung anschreiben als

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + Z = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Bemerkenswert an Gleichung 4.14 ist die Tatsache, dass anders als bei 4.10 kein Differentialquotient der Schnittgrößen vorkommt.

4.2.3 Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen

Mit Hilfe von Gleichung 4.14 lässt sich in 4.10 N_θ eliminieren und man erhält nach Multiplikation mit $\sin \varphi$

$$\frac{d(r_0 N_\varphi)}{d\varphi} \sin \varphi + r_0 N_\varphi \cos \varphi + r_1 r_2 Z \cos \varphi \sin \varphi + r_1 r_2 Y \sin^2 \varphi = 0 \quad . \quad (4.15)$$

Weil die ersten zwei Terme auf der linken Seite zum Ausdruck $\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi \sin \varphi)$ zusammengefasst werden können, lässt sich N_φ einfach durch Integration gewinnen [14]:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{1}{r_2 \sin^2 \varphi} \left[\int r_1 r_2 (Z \cos \varphi + Y \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + C \right] = \quad (4.16) \\ &= -\frac{1}{r_2 \sin^2 \varphi} \frac{L}{2\pi} \quad . \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus den Randbedingungen für N_φ . Gleichung 4.16 kann in einfacher Weise gedeutet werden: Der Umfang des der Meridianneigung φ entsprechenden Breitenkreises beträgt $2r_0\pi = 2r_2 \sin \varphi \pi$. Die vertikale Komponente der über den Kreisumfang aufsummierten Meridiankraft entspricht daher $2r_2 \sin^2 \varphi \pi N_\varphi$. Da der in eckigen Klammern stehende Ausdruck in Gleichung 4.16 den gesamten, durch 2π dividierten Lasten L oberhalb des betrachteten Breitenkreises entspricht, drückt Gleichung 4.16 nichts anderes als das globale Gleichgewicht des betrachteten Schalenabschnitts in vertikaler Richtung aus. Daraus folgt, dass horizontal gerichtete, axialsymmetrische, äußere Kräfte p_H , wie sie Abbildung 4.6 zeigt, keinen Einfluss auf die Meridiankräfte N_φ haben. Solche Lasten führen im Rahmen der Membrantheorie ausschließlich entlang des Breitenkreises, an dem sie angreifen, zu Ringkräften $N_\theta = -p_H r_0$.

Für eine Membranschale von der Form einer Kugelkappe mit Krümmungsradius r und Flächengewicht p_0 lässt sich das Schalengewicht oberhalb eines mit φ bestimmten Breitenkreises wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} L &= p_0 \int_0^\varphi 2\pi r_0 r d\varphi = p_0 2\pi r \int_0^\varphi r_0 d\varphi = p_0 2\pi r^2 \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi = \quad (4.17) \\ &= p_0 2\pi r^2 [-\cos \varphi]_0^\varphi = p_0 2\pi r^2 (1 - \cos \varphi) \quad . \end{aligned}$$

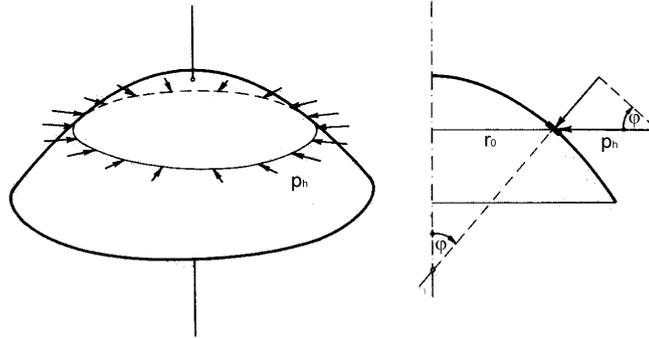


Abbildung 4.6: Senkrecht zur Rotationsachse gerichtete äußere Last [10]

Nach Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung 4.16 geht diese bei Berücksichtigung von $r = r_1 = r_2$ über in

$$N_\varphi = -p_0 r \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = -p_0 r \frac{1}{1 + \cos \varphi} \quad . \quad (4.18)$$

Die zugehörige Ringkraft ergibt sich unter Beachtung von $Z = p_0 \cos \varphi$ mit Gleichung 4.14 zu

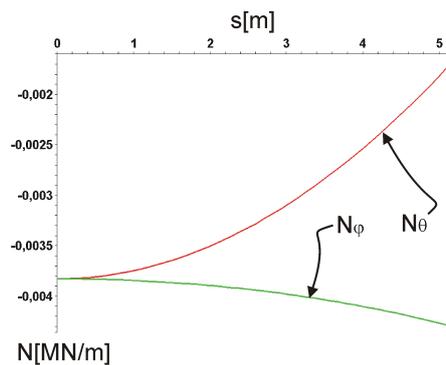
$$N_\theta = -p_0 r \left(\cos \varphi - \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) = -p_0 r \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad . \quad (4.19)$$

Für $\varphi = 0$ erhält man aus den Formeln 4.18 und 4.19

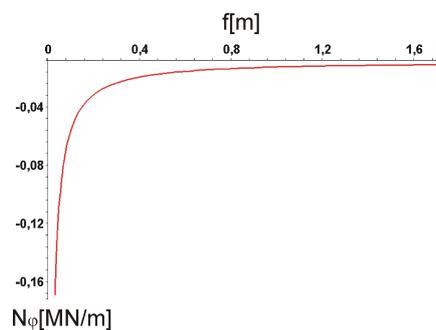
$$N_\varphi(0) = N_\theta(0) = \frac{-p_0 r}{2} \quad . \quad (4.20)$$

Wie sich zeigt, nimmt N_θ im oberen Schalenbereich negative Werte an. Zur Ermittlung der Lage jenes Breitenkreises, ab welchem Zugkräfte in Ringrichtung auftreten ist die Gleichung 4.19 für $N_\theta = 0$ nach φ aufzulösen. Bei Kugelschalen ergibt sich die Lage dieses neutralen Breitenkreises unabhängig von der Größe des Eigengewichts zu $\varphi \approx 51^\circ 50'$.

Abbildung 4.7 zeigt den Verlauf von N_φ und N_θ für eine Kugelkappe mit Stichhöhe $1.7m$ und einem Krümmungsradius von $r = 7.65m$. Die Bogenlänge s , gemessen von der Rotationsachse bzw. dem Pol der Schale nach außen beträgt am Umfang $5.2m$. Bei einer Querschnittshöhe von $0.04m$ und einer Wichte von $\gamma = 0.025MN/m^3$ entsprechend jener von Beton erhält man $p_0 = 0.001MN/m^2$. Der Größtwert von N_θ in Schalenmitte ergibt sich zu $-0.003835MN/m$ und führt auf eine Spannung in Breitenrichtung von $-0.096N/mm^2$. Diese liegt größenordnungsmäßig im Bereich der Fließspannung von handelsüblichem, expandierten Polystyrol.

Abbildung 4.7: N_φ und N_θ für eine Kugelkappe unter Eigengewicht

Wie sich die Schnittgrößen verändern, wenn bei Schalen gleicher Oberfläche die Stichtiefe f variiert, zeigt Abbildung 4.8 exemplarisch anhand der Meridiankraft am Fuß der Schalen. Querschnittshöhe, Flächengewicht und Bogenlänge am Schalenumfang entsprechen der zuvor behandelten Schale. Wie Gleichung 4.18 zeigt, wird der steile Anstieg von N_φ für kleine Scheitelhöhen f durch das Anwachsen des Krümmungsradius r bewirkt, da für $f \rightarrow 0$ r gegen unendlich und $\cos\varphi$ gegen 1 streben.

Abbildung 4.8: N_φ am äußeren Schalenrand für Kugelkappen gleicher Fläche mit unterschiedlichen Stichtiefen f

4.2.4 Einschränkungen bei der Wahl der Schalenform

Wie Gleichung 4.16 zeigt, erfolgt die Abtragung vertikaler, äußerer Einwirkungen über die Meridiankräfte N_φ . Für die Geometrie der mittels Membrantheorie behandelbaren Drehschalen bedeutet dies, dass deren Erzeugenden in keinem Punkt eine horizontale Tangente aufweisen dürfen. Gemäß Gleichung 4.16 würde dies zu

$N_\varphi = \infty$ führen. Abbildung 4.9 zeigt in den Teilbildern *a* bis *c* Meridianschnitte durch Drehschalen, die in dem mit „A“ gekennzeichneten Breitenkreis horizontale Tangenten aufweisen. Die Bestimmung der Schnittgrößen kann in solchen Fällen nur unter Einbeziehung der Biegemomente erfolgen. Es sei hier angemerkt, dass die Drehschalen, die im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden, der Form nach der Schale in Teilbild *a* ähneln: Der nicht von Stauchungsfugen durchzogene Mittenteil bleibt während der Umformung näherungsweise eben, während sich die Segmente im Außenbereich zu Kreisabschnitten verbiegen.

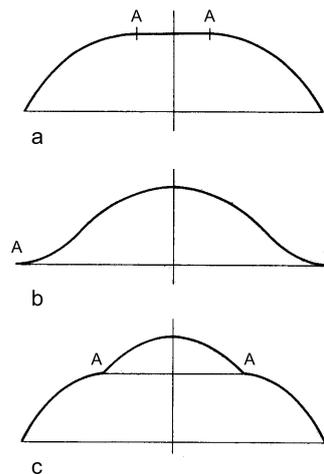


Abbildung 4.9: Schnitte durch Drehschalen, die nicht mittels der Membrantheorie behandelt werden können [10]

4.3 Biegung rotationssymmetrischer Schalen unter axialsymmetrischen Lasten

4.3.1 Grundlegendes

Sobald Membrankräfte und Biegemomente in einer Struktur Spannungen hervorrufen, die relativ zueinander nicht mehr klein sind, liefern weder Membran- noch Plattenbiegetheorie zutreffende Ergebnisse. Den ersten Schritt zur Berücksichtigung von Membrankräften im Rahmen der Plattentheorie bildet die in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Theorie flacher Schalen. Da diese die in Plattenebene wirkenden Kräfte als von Schalenform und Plattenverformung unabhängig behandelt, beschränkt sich ihr Gültigkeitsbereich auf kleine Verformungen und Schalen geringer Scheitelhöhe.

Den nächsten Schritt stellt die Plattentheorie für große Verformungen dar [42]. Mit dieser kann der Einfluss transversaler Deformationen auf die Kräfte in Plattenebene erfasst werden. Ihr Anwendungsbereich beschränkt sich auf im Vergleich zur Plattendicke große aber relativ zu den restlichen Abmessungen kleine Verformungen. Der Grund dafür liegt in der Voraussetzung, dass der Winkel zwischen verformter und unverformter Plattenmittelebene klein bleibt.

Erst mit Hilfe der Schalenbiegetheorie lassen sich sowohl Biege- als auch Membranwirkung bei beliebig großen Deformationen berücksichtigen. Der Preis, der dafür zu zahlen ist, liegt im hohen Lösungsaufwand für die resultierenden nichtlinearen Differentialgleichungen. Wenn geometrisch- und physikalisch nichtlineare Schalenprobleme gelöst werden sollen, empfiehlt sich daher im Allgemeinen die Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM). Ist hingegen die Verformungsfigur bzw. Endlage einer Schale bekannt, wie bei dem in Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren zur Herstellung räumlich gekrümmter Schalen, ermöglicht die Schalenbiegetheorie ohne großen Aufwand Aussagen über die auftretenden Schnittgrößen.

4.3.2 Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und konstitutiven Beziehungen

Zusätzlich zu den Membrankräften N_φ und N_θ sind bei der Bildung der Gleichgewichtsbeziehungen im Fall symmetrischer Belastung Momente M_φ und M_θ sowie die Querkraft Q_φ einzubeziehen (siehe Abbildung 4.10). Die Komponente von Q_φ in Meridianrichtung ergibt sich zu

$$- \left(Q_\varphi + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta d\varphi \quad . \quad (4.21)$$

Nach Vernachlässigung von Größen höherer Kleinheit und Division durch $d\theta d\varphi$ verbleibt der Ausdruck $-Q_\varphi r_0$, um den die linke Seite von Gleichung 4.10 zu ergänzen ist. Senkrecht zur Schalenmittelfläche liefert die Querkraft einen Beitrag von der Größe

$$-Q_\varphi r_0 d\theta d\varphi + \left(Q_\varphi + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta d\varphi \quad . \quad (4.22)$$

Auf der linken Seite von Gleichung 4.14 führt dies zu dem zusätzlichen Term $d(Q_\varphi r_0)/d\varphi$. Die dritte Gleichgewichtsbedingung erhält man durch Betrachtung des Momentengleichgewichts um die Tangente an den unteren Breitenkreis:

$$\begin{aligned} & \left(M_\varphi + \frac{dM_\varphi}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta - M_\varphi r_0 d\theta - \\ & - M_\theta r_1 \cos \varphi d\theta d\varphi - Q_\varphi r_2 \sin \varphi r_1 d\theta d\varphi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Hier ist zu beachten, dass ähnlich wie bei der Membrankraft N_θ die Momente M_θ infolge des Winkels $d\theta$ eine Komponente in Meridianrichtung aufweisen. Insgesamt liefern die Gleichgewichtsbedingungen nach Durchführung von Vereinfachungen für die fünf unbekanntenen Schnittgrößen das folgende Differentialgleichungssystem [42]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r_0) - N_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_0 + Y r_1 r_0 &= 0 \\ N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + \frac{d}{d\varphi} (Q_\varphi r_0) + Z r_1 r_0 &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (M_\varphi r_0) - M_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_1 r_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

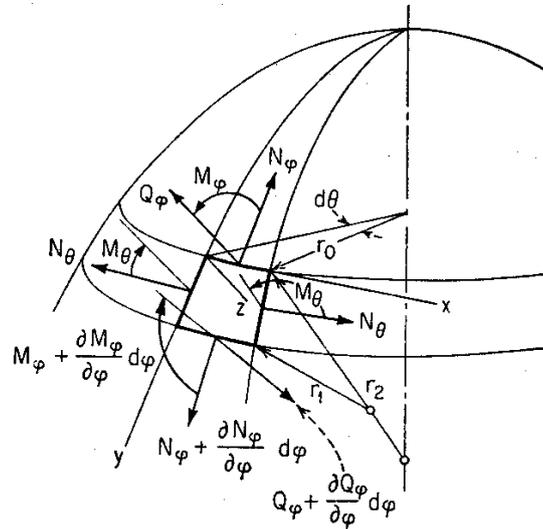


Abbildung 4.10: Infinitesimales Schalenelement [42]

Die Schnittgrößen N_φ , N_θ , M_φ und M_θ lassen sich mittels der konstitutiven und kinematischen Beziehungen als Funktionen der Verschiebungen u in Meridianrichtung und w senkrecht zur Schalenmittelfläche anschreiben. Die konstitutiven Beziehungen lauten bei Vernachlässigung der Querdehnung für polar orthotropes Material

$$\begin{aligned} N_\varphi &= E_\varphi h \varepsilon_\varphi \\ N_\theta &= E_\theta h \varepsilon_\theta \\ M_\varphi &= D_\varphi \varkappa_\varphi \\ M_\theta &= D_\theta \varkappa_\theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

Hierbei bezeichnen ε_φ , \varkappa_φ und ε_θ , \varkappa_θ die Membrandehnungen bzw. Krümmungen in Meridian- und Breitenkreisrichtung. Für die Vorzeichen von \varkappa_φ und \varkappa_θ gilt, dass positive Krümmungen eine Vergrößerung der in Abbildung 4.10 als r_1 und r_2 bezeichneten Krümmungsradien der Schalenmittelfläche bewirken. Die Größen E_φ , E_θ , D_φ und D_θ stellen Sekantenmodule dar, die im Falle materieller Nichtlinearität als Funktion der Verformungen ausgedrückt werden können.

Da sich sämtliche Größen ε_φ , ε_θ , \varkappa_φ und \varkappa_θ als Funktion von u und w anschreiben lassen (siehe [42], [14]), reduziert Einsetzen von 4.25 in 4.24 die Gleichgewichtsbedingungen auf drei Gleichungen mit den drei Unbekannten u , w und Q_φ womit 4.24 prinzipiell lösbar wird.

4.4 Biegung von Vieleckkuppeln unter axialsymmetrischen Lasten

Bei den in Abschnitt 2.1 beschriebenen, kugelkappenförmigen Flächentragwerken handelt es sich nur näherungsweise um Drehschalen. Tatsächlich entstehen der geometrischen Form nach Vieleckkuppeln. Deren Behandlung erfolgt in statischer Hinsicht analog zur Vorgehensweise im vorherigen Abschnitt. Den Gegenstand der weiteren Betrachtungen bildet die in Abbildung 4.11 dargestellte Vieleckkuppel, die einer Rotationsschale mit gegebenen Krümmungsradien r_1 und r_2 (siehe Abbildung 4.10) umschrieben ist.

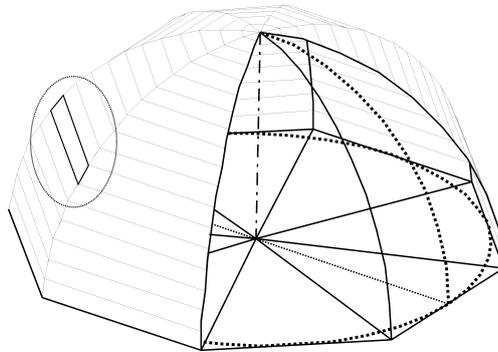


Abbildung 4.11: Ansicht einer Vieleckkuppel, die einer Rotationsschale umschrieben ist

Zur Herleitung der Gleichgewichtsbeziehungen dient ein infinitesimales Flächenelement, welches durch zwei Breitenkreise sowie durch zwei Grate der Vieleckkuppel begrenzt wird. In Abbildung 4.11 symbolisiert das dick umrandete und mit einem Kreis gekennzeichnete Trapez ein solches Element. Die Kantenlängen

des infinitesimalen Elements lassen sich in Abbildung 4.12 ablesen. Am oberen Breitenkreis beträgt die Breite des Flächenelements b am unteren Breitenkreis $b + (db/d\varphi)d\varphi$. Da in Segmentmitte die Vieleckkuppel den eingeschriebenen Rotationskörper berührt, beträgt die Elementhöhe $r_1 d\varphi$. Im Grundriss betrachtet schließen Segmentmittellinie und Grat einen Winkel von π/n_S ein, wobei n_S die Anzahl der Segmente bezeichnet. In dem um den Winkel φ gegen die horizontale Ebene geneigten Flächenelement aus Abbildung 4.12 lässt sich daraus für den Winkel α

$$\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{n_S} \cos \varphi \quad (4.26)$$

ableiten [14]. Die Länge der seitlichen Berandung beträgt demnach $r_1 d\varphi / \cos \alpha$.

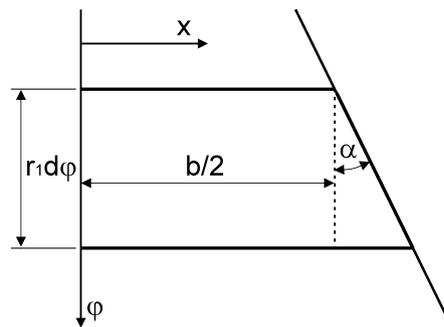


Abbildung 4.12: Ausschnitt aus einem Vieleckkuppelsegment mit Blickrichtung senkrecht zur Schalenmittelfläche; Darstellung einer Hälfte

Im Gegensatz zu Drehschalen besitzen Vieleckkuppeln nur eine endliche Zahl von Symmetrieebenen: Diese verlaufen durch die Grate sowie die Segmentmitten. Bezüglich dieser Ebenen symmetrische Belastungen bewirken symmetrische Verformungen. Für die inneren Kräfte bedeutet dies einen variablen Verlauf zwischen Segmentmitte und Grat. Auf die Ermittlung deren genauen Verteilung über die Segmentbreite kann verzichtet werden, wenn man ein Segment als ganzes betrach-

tet. In diesem Fall gehen in die aufzustellenden Gleichgewichtsbedingungen nur die Resultierenden der Schnittkräfte sowie der äußeren Einwirkungen ein:

$$\mathbf{N}_\varphi = \int_b N_\varphi db \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Q}_\varphi = \int_b Q_\varphi db$$

$$\mathbf{M}_\varphi = \int_b M_\varphi db$$

$$\mathbf{Y} = \int_b Y db \quad (4.28)$$

$$\mathbf{Z} = \int_b Z db \quad (4.29)$$

Deren Darstellung unterscheidet sich im Folgenden von den entsprechenden verteilten Größen durch die Verwendung fett gedruckter Buchstaben.

Die horizontal wirkenden Kräfte je Längeneinheit N_θ greifen entlang der Segmentseiten an, stehen im Grundriss senkrecht auf die Grate der Vieleckkuppel und schließen so einen Winkel von $\pi/2 - \pi/n_S$ mit der Segmentmittellinie ein. Die aus ihnen resultierende, nach innen gerichtete Umlenkkraft je Längeneinheit des Grates beträgt somit $2 \sin(\pi/n_S) N_\theta$. Analoges gilt für die Komponente der Biegemomente M_θ in Richtung von M_φ . Die weitere Vorgehensweise bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen entspricht jener bei Drehschalen und führt auf folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{N}_\varphi) - 2N_\theta \sin \frac{\pi}{n} r_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - \mathbf{Q}_\varphi + \mathbf{Y} r_1 = 0 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{N}_\varphi + 2N_\theta \sin \frac{\pi}{n} r_1 \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} + \frac{d}{d\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi) + \mathbf{Z} r_1 = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{M}_\varphi) - M_\theta r_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - \mathbf{Q}_\varphi r_1 = 0 \quad .$$

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, lassen sich \mathbf{N}_φ , N_θ , \mathbf{M}_φ und M_θ mittels der kinematischen und konstitutiven Beziehungen als Funktion der Verschiebungen anschreiben. Über die Verteilung der Verformungen entlang der Segmentbreite liefern die Gleichungen 4.30 keine Aussage. Jene sind geeignet zu wählen. Abhängig von der Güte dieser Wahl stellen die gewonnenen Lösungen mehr oder weniger gute Näherungen des wirklichen Verhaltens dar. Unter der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte senkrecht zur Segmentmittellinie verbleiben zusammen mit \mathbf{Q}_φ drei Unbekannte. Somit lässt sich das Gleichungssystem 4.30 bei Vorliegen dreier Randbedingungen eindeutig lösen.

4.5 Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen

Die Herleitung der Gleichungssysteme 4.30 bzw. 4.24 erfolgte in einem Koordinatensystem, dessen Achsen parallel und senkrecht zur Schalenmittelfläche gerichtet sind. Diese Wahl des Bezugssystems erweist sich dann als vorteilhaft, wenn die Gleichgewichtsbeziehungen als Ausgangspunkt zur Ermittlung der Verformungen dienen. Für Bemessungsaufgaben im Rahmen der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Herstellungsmethode spielen Schnittgrößen und nicht Verformungen die Hauptrolle. Letztere lassen sich aus der Differenz zwischen bekannter Anfangs- und gewünschter Ziellage vorab ermitteln. Die Wahl eines fixen, sich nicht an die Systemmittelebene anpassenden Koordinatensystems erlaubt die Integration der Gleichungen 4.30 bzw. 4.24 und liefert einfache Beziehungen zur Bestimmung der Schnittgrößen. Die neuen Koordinatenrichtungen z und r_0 werden definiert durch

$$\begin{aligned} dz &= \sin \varphi r_1 d\varphi \\ dr_0 &= \cos \varphi r_1 d\varphi \quad , \end{aligned} \quad (4.31)$$

wobei der Koordinatenursprung mit dem inneren Ende des Schalensegments, wo $\varphi = \varphi_i$ gilt, zusammenfällt.

Zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen 4.30 in Richtung z ist die erste Gleichung mit $\sin \varphi$, die zweite mit $\cos \varphi$ zu multiplizieren. Anschließend Addition ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (\mathbf{N}_\varphi) \sin \varphi - \mathbf{Q}_\varphi \sin \varphi + \mathbf{Y} r_1 \sin \varphi + \mathbf{N}_\varphi \cos \varphi + \\ + \frac{d}{d\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi) \cos \varphi + \mathbf{Z} r_1 \cos \varphi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nach Vereinfachungen nimmt obige Gleichung die Form

$$\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{N}_\varphi \sin \varphi) + \frac{d}{d\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi \cos \varphi) + r_1 (\mathbf{Y} \sin \varphi + \mathbf{Z} \cos \varphi) = 0 \quad (4.33)$$

an, lässt sich integrieren und geht schließlich über in

$$\mathbf{N}_\varphi \sin \varphi + \mathbf{Q}_\varphi \cos \varphi = - \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\mathbf{Y} \sin \eta + \mathbf{Z} \cos \eta) r_1 d\eta + C_V = \mathbf{V}_\varphi \quad . \quad (4.34)$$

\mathbf{V}_φ bezeichnet die vertikale Resultierende aus \mathbf{N}_φ und \mathbf{Q}_φ , C_V stellt eine Integrationskonstante dar, mit der sich die Lösung von Gleichung 4.34 an eine Randbedingung anpassen lässt. Im Fall der zu behandelnden Vieleckkuppeln liegt diese

Bedingung am inneren Ende der Schalensegmente bei $\varphi = \varphi_i$ vor, wo die Stauungsfugen enden. Repräsentiert L die Gewichtskraft des ungeschlitzten Schalennenteils, so ergibt sich C_V zu

$$C_V = -L/n_S \quad . \quad (4.35)$$

Hier bezeichnet n_S die Zahl der Segmente, auf die sich die Kraft L aufteilt.

Recht ähnlich wie oben gestaltet sich die Herleitung der Formel für das Kräftegleichgewicht in Richtung r_0 : Multiplikation der ersten beiden Gleichungen in 4.30 mit $-\cos \varphi$ bzw. $\sin \varphi$ liefert nach deren Addition und einigen Umformungen die horizontale Resultierende \mathbf{H}_φ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\varphi \cos \varphi - \mathbf{Q}_\varphi \sin \varphi &= & (4.36) \\ \int_{\varphi_i}^{\varphi} \left[\frac{2N_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} - \mathbf{Y} \cos \eta + \mathbf{Z} \sin \eta \right] r_1 d\eta + C_H &= \mathbf{H}_\varphi \end{aligned}$$

mit C_H als Integrationskonstante zur Anpassung an eine Randbedingung.

Das Momentengleichgewicht um die Breitenkreistangente geht bei Verwendung von \mathbf{V}_φ und \mathbf{H}_φ über in

$$\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{M}_\varphi) - M_\theta r_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - r_1 (\mathbf{V}_\varphi \cos \varphi - \mathbf{H}_\varphi \sin \varphi) = 0 \quad . \quad (4.37)$$

Liegen als Einwirkungen ins Schalenninnere gerichtete Flächenlast p_0 sowie Eigengewicht g_0 vor, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= b(p_0 + g_0 \cos \varphi) & (4.38) \\ \mathbf{Y} &= b g_0 \sin \varphi \quad . \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4.34 und 4.36 nehmen dann die Form

$$\mathbf{H}_\varphi = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \left[\frac{2N_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} + b p_0 \sin \eta \right] r_1 d\eta + C_H \quad (4.39)$$

$$\mathbf{V}_\varphi = - \int_{\varphi_i}^{\varphi} (g_0 + p_0 \cos \eta) b r_1 d\eta + C_V \quad (4.40)$$

an. Bei bekannten \mathbf{V}_φ und \mathbf{H}_φ lassen sich \mathbf{N}_φ und \mathbf{Q}_φ aus

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varphi &= \mathbf{V}_\varphi \cos \varphi - \mathbf{H}_\varphi \sin \varphi & (4.41) \\ \mathbf{N}_\varphi &= \mathbf{V}_\varphi \sin \varphi + \mathbf{H}_\varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

bestimmen.

Kapitel 5

Bemessung der Tragwerkskomponenten

5.1 Die Grundidee

Die Endform der Struktur bestimmt sich aus den Eigenschaften der Vieleckkuppelsegmente und aus dem Verhalten der dazwischen liegenden Fugen. Aus diesem Grund ergeben sich zwei unterschiedliche Arten von Bemessungsaufgaben: Liegt eine der beiden Tragwerkskomponenten als gegeben vor, ist die jeweils andere, wie in den folgenden Abschnitten beschrieben, zu dimensionieren. Dabei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass sich ein Teil der Schnittgrößen aus den kinematischen und konstitutiven Beziehungen mittels der bekannten Verschiebungen von Anfangs- zu Zielform bestimmen lässt. Einsetzen in die Gleichungen 4.30 liefert die restlichen inneren Kräfte und somit die Grundlage zur Bemessung.

5.2 Grundlagen für die Dimensionierung der Segmentfugen

Den Ausgangspunkt zur Wahl des Fugenmaterials bzw. der Fugenstauchung im gekrümmten Endzustand bildet die in der Fuge aufzunehmende tangentielle Normalkraft N_θ . Zu deren Ermittlung werden zunächst die Momente \mathbf{M}_φ und M_θ bestimmt.

Da Querschnitts- und Materialeigenschaften der Segmente vorliegen, lässt sich im Falle physikalischer Linearität \mathbf{M}_φ mittels der bekannten Krümmung \varkappa_φ der Zielform berechnen. Im Falle nichtlinearen Materialverhaltens benötigt man außerdem die Dehnung ε_0 im Querschnittsschwerpunkt. Diese ergibt sich allerdings erst in einem späteren Berechnungsschritt aus der Normalkraft \mathbf{N}_φ . Für eine phy-

sikalisch nichtlineare Rechnung ist es daher erforderlich, einen Startwert für ε_0 zu wählen (etwa $\varepsilon_0 = 0$) und diesen iterativ zu verbessern.

In die Ermittlung von M_θ gehen die zunächst unbekanntes mechanischen und geometrischen Eigenschaften der Fugen ein. Wird als Fugenfüller ein Material mit annähernd konstanter Fließspannung verwendet (z.B. XPS) und die Fugenbreite so eingestellt, dass sich das Material während der Umformung nicht verfestigt, aber über die ganze Fugenhöhe fließt, kann $M_\theta = 0$ angenommen werden. Tritt dies nicht ein, muss die Bemessung des Fugenmaterials bzw. der Fugengeometrie iterativ erfolgen.

Im Gleichungssystem 4.30 treten nur noch die Unbekannten \mathbf{N}_φ , N_θ und \mathbf{Q}_φ auf. \mathbf{Q}_φ erhält man umgehend aus der dritten Gleichung zu

$$\mathbf{Q}_\varphi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{M}_\varphi) - M_\theta r_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \right) . \quad (5.1)$$

\mathbf{N}_φ ergibt sich nach Umformung von Gleichung 4.34 und Einsetzen von \mathbf{Q}_φ zu

$$\mathbf{N}_\varphi = -\frac{1}{\sin \varphi} \left[\frac{\cos \varphi}{r_1} \left(\frac{d}{d\varphi} (\mathbf{M}_\varphi) - M_\theta r_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} \right) + \right. \quad (5.2)$$

$$\left. + \int_0^\varphi r_1 (\mathbf{Y} \sin \eta + \mathbf{Z} \cos \eta) d\eta - C_V \right] . \quad (5.3)$$

Da die Schnittgröße \mathbf{N}_φ nun als bekannt vorliegt, lässt sich mit ihrer Hilfe ε_0 bestimmen und im Falle physikalischer Nichtlinearität \mathbf{M}_φ iterativ verbessern.

Eine Umformung der zweiten der Gleichungen 4.30 liefert

$$N_\theta = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n} r_1 \sin \varphi} \left(-\mathbf{N}_\varphi - \frac{d}{d\varphi} (\mathbf{Q}_\varphi) - \mathbf{Z} r_1 \right) . \quad (5.4)$$

Nach Einsetzen von \mathbf{Q}_φ und \mathbf{N}_φ aus den Gleichungen 5.2 und 5.1 liegt N_θ als Funktion der bekannten Größen \mathbf{M}_φ und M_θ sowie der äußeren Einwirkungen vor. Bei gegebener Arbeitslinie des Fugenmaterials lässt sich die mittlere Stauchung ε_θ berechnen, die notwendig ist, um in den Fugen die tangential Normalkraft N_θ zu erzeugen. Aus ε_θ erhält man die im Anfangszustand erforderliche Fugenbreite. Decken sich die in den Fugen ermittelten Spannungen nicht mit der Annahme, dass über die gesamte Fugenhöhe die einheitliche Fließspannung vorliegt, muss dies bei der Bestimmung von M_θ berücksichtigt werden und erfordert ein iteratives Vorgehen in Bezug auf die Bestimmung der Fugenbreiten.

Das Problem bei der Bemessung von Vieleckkuppeln nach der oben beschriebenen Methode besteht darin, dass N_θ im Allgemeinen einen in Fugenlängsrichtung veränderlichen Verlauf aufweist. Bei Vorliegen konstanter Fugenquerschnittshöhe und Verwendung von Hartschaum als Fugenfüllung zwingt dies zur Ausnutzung

des Wiederverfestigungsbereichs des Fugenmaterials und somit zu unrealistisch hohen Genauigkeitsanforderungen in Bezug auf die Einhaltung der plangemäßen Fugenbreiten. Aus diesem Grund basiert der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Bemessungsalgorithmus auf dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Konzept.

5.3 Grundlagen für die Dimensionierung der Kuppelsegmente

Für die Bemessung der Schalensegmente benötigt man bei Vorliegen linear elastischen Materials das Moment \mathbf{M}_φ , im Falle physikalischer Nichtlinearität außerdem die Normalkraft \mathbf{N}_φ . Da die Eigenschaften der Stauchungsfugen als gegeben vorliegen, lassen sich die Schnittgrößen N_θ und M_θ vorab berechnen. Das Gleichungssystem 4.30 liefert die restlichen Unbekannten \mathbf{M}_φ , \mathbf{Q}_φ und \mathbf{N}_φ .

Den ersten Schritt dazu bildet die Bestimmung der Integrationskonstanten C_V und C_H in den Gleichungen 4.34 und 4.36. Für C_V wurde in Abschnitt 4.5 die Beziehung 4.35 abgeleitet. Bei der Festlegung der Integrationskonstante C_H geht man von den Kräften aus, welche die Umformung der ebenen in die gekrümmte Struktur bewirken. Im Falle einer Vieleckkuppel sind dies die Umlenkkräfte u der am Rand ($\varphi = \varphi_a$) angeordneten Spannglieder (siehe Abbildung 2.2), genauer deren horizontale Komponente u_H . Integration über die Segmentbreite liefert eine resultierende horizontale Kraft \mathbf{H}_a je Segment. Einsetzen in Gleichung 4.36 führt für C_H auf den Ausdruck

$$C_H = \mathbf{H}_a - \int_{\varphi_i}^{\varphi_a} \left[\frac{2N_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} - \mathbf{Y} \cos \eta + \mathbf{Z} \sin \eta \right] r_1 d\eta \quad . \quad (5.5)$$

Aus Gleichung 4.37 lässt sich \mathbf{M}_φ bestimmen:

$$\mathbf{M}_\varphi = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \left[M_\theta \frac{\cos \eta}{\cos \alpha} + \mathbf{V}_\varphi \cos \eta - \mathbf{H}_\varphi \sin \eta \right] r_1 d\eta + C_{M_\varphi} \quad . \quad (5.6)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} d\check{z} &= \sin \eta r_1 d\eta \\ d\check{r}_0 &= \cos \eta r_1 d\eta \end{aligned} \quad (5.7)$$

und da $\check{z}(\varphi = \varphi_i) = 0$ sowie $\check{r}_0(\varphi = \varphi_i) = 0$ gilt, geht Gleichung 5.6 über in

$$\mathbf{M}_\varphi = \int_{\varphi_i}^{\varphi} M_\theta \frac{\cos \eta}{\cos \alpha} r_1 d\eta - \int_0^{\check{z}(\varphi)} \mathbf{H}_\varphi d\zeta + \int_0^{\check{r}_0(\varphi)} \mathbf{V}_\varphi d\rho \quad . \quad (5.8)$$

Direktes Einsetzen von \mathbf{H}_φ und \mathbf{V}_φ in obige Gleichung würde dort zu Doppelintegralen führen. Wie in [45] gezeigt, lassen sich diese mittels partieller Integration in Faltungsintegrale umwandeln:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\check{z}} \mathbf{H}_\varphi d\varsigma &= \mathbf{H}_\varphi \varsigma \Big|_0^{\check{z}} - \int_0^{\check{z}} \varsigma \frac{d\mathbf{H}_\varphi}{d\varsigma} d\varsigma = \\
&= \mathbf{H}_\varphi \check{z} - \int_0^{\check{z}} \varsigma \frac{d\mathbf{H}_\varphi}{d\varsigma} d\varsigma = \\
&= \left(\int_0^{\check{z}} \frac{d\mathbf{H}_\varphi}{d\varsigma} d\varsigma + C_H \right) \check{z} - \int_0^{\check{z}} \varsigma \frac{d\mathbf{H}_\varphi}{d\varsigma} d\varsigma = \\
&= \int_0^{\check{z}} (\check{z} - \varsigma) \frac{d\mathbf{H}_\varphi}{d\varsigma} d\varsigma + \check{z} C_H
\end{aligned} \tag{5.9}$$

sowie analog dazu

$$\int_0^{\check{r}_0} \mathbf{V}_\varphi d\varrho = \int_0^{\check{r}_0} (\check{r}_0 - \varrho) \frac{d\mathbf{V}_\varphi}{d\varrho} d\varrho + \check{r}_0 C_V \quad . \tag{5.10}$$

\mathbf{M}_φ nimmt auf diese Weise unter Berücksichtigung der Gleichungen 4.34 und 4.36 die Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_\varphi &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} M_\theta \frac{\cos \eta}{\cos \alpha} r_1 d\eta - \\
&- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\check{z}_{(\varphi)} - \check{z}_{(\eta)}) \left[\frac{2N_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} - \mathbf{Y} \cos \eta + \mathbf{Z} \sin \eta \right] r_1 d\eta - \check{z}_{(\varphi)} C_H + \\
&- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\check{r}_{0(\varphi)} - \check{r}_{0(\eta)}) (\mathbf{Y} \sin \varphi + \mathbf{Z} \cos \varphi) r_1 d\eta + \check{r}_{0(\varphi)} C_V + \\
&+ C_{M_\varphi}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

an. Nach Einsetzen der Beziehungen 4.38 für \mathbf{Y} und \mathbf{Z} geht der Ausdruck für \mathbf{M}_φ über in

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_\varphi &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} M_\theta \frac{\cos \eta}{\cos \alpha} r_1 d\eta - \\
&- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\check{z}_{(\varphi)} - \check{z}_{(\eta)}) \left[\frac{2N_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} + b p_0 \sin \eta \right] r_1 d\eta - \check{z}_{(\varphi)} C_H + \\
&- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\check{r}_{0(\varphi)} - \check{r}_{0(\eta)}) b (g_0 + p_0 \cos \varphi) r_1 d\eta + \check{r}_{0(\varphi)} C_V + \\
&+ C_{M_\varphi} \quad .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Die Integrationskonstante C_{M_φ} ergibt sich aus der Randbedingung am Schalenumfang, wo $\varphi = \varphi_a$ und $\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_{\varphi,a}$ gilt. Ein solches Randmoment $\mathbf{M}_{\varphi,a}$ tritt dann

auf, wenn die horizontale Wirkungsebene der Umlenkkräfte infolge Vorspannung unterhalb der Ordinate $\check{z}_{(\varphi_a)}$ liegt.

Aus Gleichung 5.12 läßt sich entnehmen, dass der Einfluss von N_θ auf \mathbf{M}_φ am inneren Segmentrand bei $\varphi = \varphi_i$ linear mit der Stichhöhe der Schale zunimmt. Im ebenen Ausgangszustand liefert N_θ keinen Beitrag zu \mathbf{M}_φ .

Die Wahl der Integrationskonstanten C_H und C_{M_φ} unterliegt keiner mathematischen wohl aber einer physikalischen Beschränkung: Da die Umformung einer ebenen Struktur in ihre räumlich gekrümmte Endlage durch die Momente \mathbf{M}_φ verursacht wird, müssen diese in ihrem Wirkungssinn mit der Zielform kompatibel sein — andernfalls wäre ein Material erforderlich, welches sich entgegen seiner Beanspruchungsrichtung verkrümmt. Für die betrachteten Vieleckkuppelsegmente führt dies auf die Forderung $\mathbf{M}_\varphi \leq 0$.

Da nun zusammen mit den Beziehungen 4.41 alle Schnittgrößen vorliegen, kann die Bemessung der Segmentquerschnitte — wie in den nächsten Abschnitten gezeigt — erfolgen. Im Fall von Stahlbeton oder glasfaserbewehrtem Eis lassen sich Verfahren analog zu den in [3], [25] oder [35] präsentierten benutzen. Im Gegensatz zu diesen erfolgt die Bewehrungswahl nicht in Hinblick auf die Traglast, sondern hinsichtlich eines Verformungszustandes, der sich für die gegebenen Schnittgrößen einstellen soll. Hierbei spielt die Größe \mathbf{H}_a bzw. C_H die Rolle eines freien Parameters: Je mehr horizontale Randlast am Fußpunkt ansetzt, desto biegesteifere Querschnitte sind nötig, um die vorgegebene Verformungsfigur zu erzielen.

Die Wahl von \mathbf{H}_a hat folgenden Forderungen zu genügen:

1. Die Struktur muss unter den zu erwartenden Einwirkungen ausreichend stabil bleiben.
2. Zusatzlasten dürfen nicht unzulässig große Verformungen verursachen.
3. Zusatzlasten müssen mit ausreichender Sicherheit aufgenommen werden können.

Unter den Begriff „Zusatzlasten“ fallen hier sämtliche Einwirkungen, die erst nach dem Übergang von ebener in räumlich gekrümmte Lage auftreten.

5.4 Parameterstudien bezüglich der Schnittgrößen in Vieleckkuppelsegmenten

Mit den im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Formeln steht das mathematische Werkzeug zur Bemessung der Schalensegmente bereit. Um die Wirtschaftlichkeit unterschiedlicher Lösungen beurteilen zu können, ist es notwendig, die jeweiligen

Materialaufwände abzuschätzen. Bei Vorliegen linear elastischen Materials mit Elastizitätsmodul E ergibt sich die an jeder Stelle eines Segments notwendige Querschnittshöhe zu

$$h = \sqrt[3]{\frac{12|M_\varphi|r_1}{E}} . \quad (5.13)$$

Der Gesamtmaterialbedarf lässt sich aus der Integration von $h \cdot b$ über die Segmentlänge und anschließender Multiplikation mit der Segmentanzahl bestimmen.

Aus den Gleichungen 5.12, 5.5 und 4.35 geht hervor, dass \mathbf{M}_φ von den Parametern L , N_θ , \mathbf{H}_a , $\mathbf{M}_{\varphi,a}$, g_0 , p_0 , φ_i und φ abhängt. Wie Formel 5.13 zeigt, ist es für Bemessungszwecke praktisch, mit verteilten Schnittgrößen $M_\varphi = \mathbf{M}_\varphi/b$, $M_{\varphi,a} = \mathbf{M}_{\varphi,a}/b$ bzw. $H_a = \mathbf{H}_a/b$ zu rechnen. In diesem Fall tritt die örtliche Segmentbreite b als weitere Bestimmungsgröße auf.

Zu einer übersichtlichen Darstellung der Beziehung zwischen M_φ und den freien Parametern gelangt man durch die Benutzung dimensionsloser Größen. Mit solchen dimensionslosen Termen formulierte Zusammenhänge bieten zusätzlich den Vorteil, für geometrisch ähnliche Schalenformen beliebiger Abmessung zu gelten.

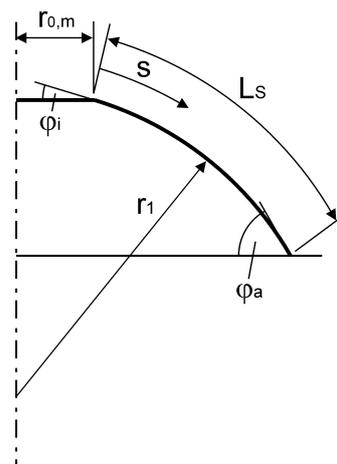


Abbildung 5.1: Schnitt entlang der Segmentmittellinie einer Vieleckkuppel

Abbildung 5.1 zeigt die geometrischen Bestimmungsmerkmale der im Folgenden behandelten Vieleckkuppeln. Zur Festlegung ihrer Form dient die Angabe der Winkel φ_i , φ_a , der Radius $r_{0,M}$ des ungeschlitzten, näherungsweise als unverformt angenommenen Mittenteils sowie des Krümmungsradius r_1 der Kuppelsegmente. Mit φ_i lässt sich die Größe eines Knicks am Übergang zwischen Kuppelsegment und -mittenteil angeben. Dieser bedingt die lokale Zerstörung des Schalenmate-

rials und sollte daher vermieden werden. Da bei den später beschriebenen Experimenten ein solcher Knick auftrat, soll er dennoch Berücksichtigung finden.

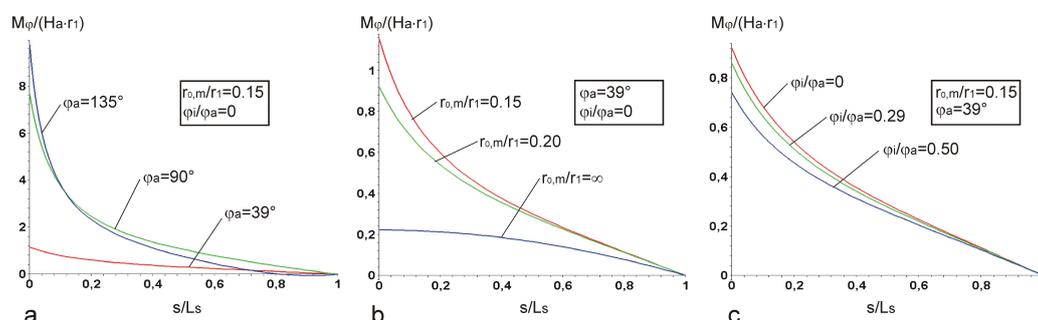


Abbildung 5.2: Zusammenhänge zwischen M_φ und horizontaler Randlast H_a

In Abbildung 5.2 finden sich die Zusammenhänge zwischen M_φ und der horizontalen Randlast H_a für neun verschiedene geometrische Konfigurationen. Teilbild *a* enthält die Angaben für Kuppeln mit Randwinkeln φ_a von 39° , 90° und 135° , einem Innenwinkel $\varphi_i = 0$ sowie einem Verhältnis von $r_{0,M}/r_1$ von 0.15. Der Winkel $\varphi_a = 39^\circ$ entspricht dem in den Schalenexperimenten verwendeten (siehe Abschnitt 6). Es zeigt sich, dass mit zunehmendem φ_a auch die Momente am Segmentinnenrand stark anwachsen. Dies rührt zu einem Teil von der Zunahme des Schalenstichs und somit des Hebelarms von H_a in Bezug auf das innere Segmentende her. Der andere maßgebende Faktor liegt im Verhältnis der Segmentbreite am Segmentanfang zu jener am Segmentende.

Dem Teilbild *b* lässt sich bei $\varphi_a = 39^\circ$ und $\varphi_i = 0$ der $M_\varphi - H_a$ Zusammenhang für unterschiedliche Verhältnisse $r_{0,M}/r_1$ entnehmen. Hierbei entspricht $r_{0,M}/r_1 = \infty$ einem Streifen mit parallelen Rändern. Dies ergibt sich aus dem Ausdruck für die Segmentbreite b . Sie beträgt für eine Vieleckkuppel

$$b = 2 \tan \frac{\pi}{n_s} (r_{0,M} + s) - b_f \quad , \quad (5.14)$$

was bei $r_{0,M} \rightarrow \infty$ $b(s) = const.$ liefert. Die entsprechende Kurve in Teilbild *b* zeigt wie erwartet einen zu den Streifenordinaten affinen Momentenverlauf. Bei den im Rahmen der Experimente untersuchten Kuppeln lag das Verhältnis von $r_{0,M}/r_1$ bei 0.20. Dies resultiert in einem überproportionalen Anstieg der verteilten Biegemomente mit geringer werdendem Abstand vom Schalenzentrum. Der Grund hierfür liegt in der Abnahme der Segmentbreiten. Teilbild *c* zeigt den Einfluss eines Knicks am inneren Segmentrand. Wie man sieht, führt ein zunehmender Knickwinkel dort zu einer geringfügigen Abminderung der radialen Momente.

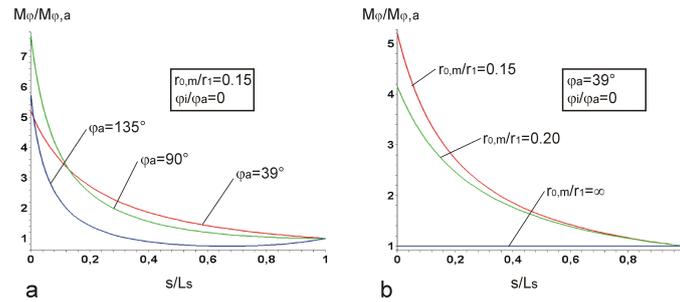


Abbildung 5.3: Einfluss eines Randmoments $M_{\varphi,a}$ auf die radialen Momente M_{φ}

Dies hat seine Ursache in der Abnahme des Schalenstichs mit wachsendem φ_i bei sonst gleichbleibenden geometrischen Bestimmungsstücken.

Wie sich ein Randmoment $M_{\varphi,a}$ auf die Verteilung von M_{φ} auswirkt, stellt Abbildung 5.3 dar. Teilbild *a* weist generell einen Anstieg der M_{φ} -Werte zur Schalenmitte hin aus. Der Grund liegt, wie schon oben erläutert, in der Abnahme der Segmentbreiten zum Schalenzentrum hin. Bemerkenswert ist der im Vergleich zu Bild 5.2 geringere Einfluss des Anfangswinkels φ_a . Da am Schalenäquator die Breite der Segmente ihren Größtwert annimmt, liefert die Kurve für $\varphi_a = 90^\circ$ am Segmentinnenrand das Maximum für das Verhältnis $M_{\varphi}/M_{\varphi,a}$. Teilbild *b* zeigt einen konstanten Momentenverlauf für den Streifen mit parallelen Rändern sowie anhand der Kurven für $r_{0,M}/r_1 = 0.15$ bzw. 0.20 den entscheidenden Einfluss des Segmentbreitenverlaufs. Bei alleiniger Wirkung von Randmomenten $M_{\varphi,a}$ verursachen Knickwinkel $\varphi_i \neq 0$ keine Änderung der Momente M_{φ} .

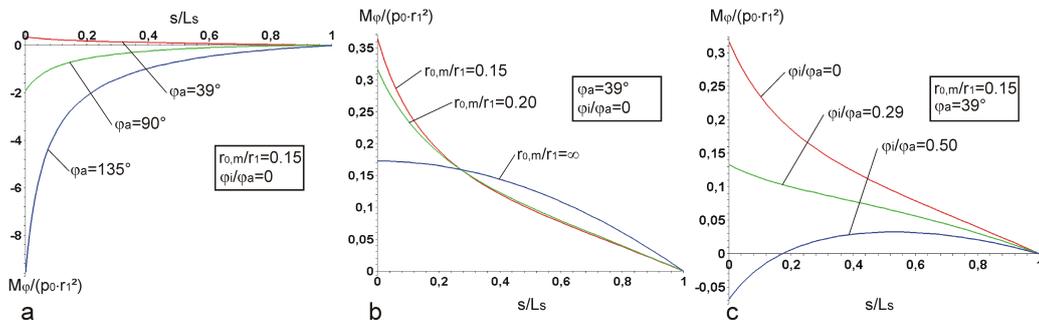


Abbildung 5.4: Einfluss konstanten Außendrucks p_0 auf die radialen Momente M_{φ}

In den Diagrammen für den Einfluss konstanten Außendrucks p_0 bzw. Eigengewichts (siehe Abbildung 5.4 bzw. 5.5) lässt sich eine starke Abhängigkeit von der geometrischen Konfiguration der Schale ablesen. Selbst der Knickwinkel

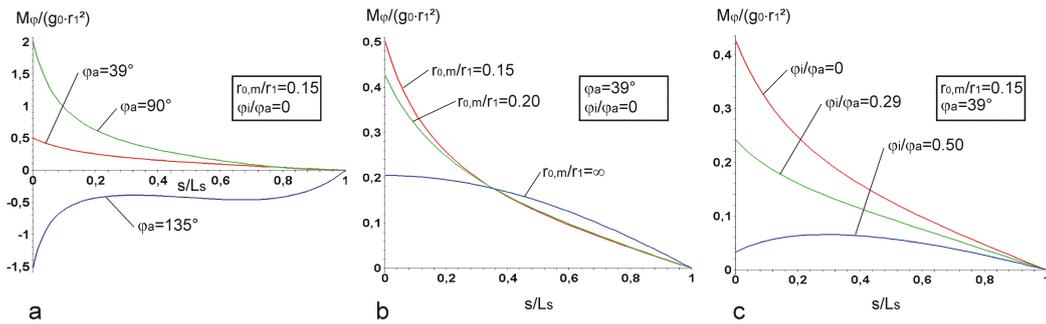


Abbildung 5.5: Zusammenhang zwischen g_0 und Verlauf der radialen Momente M_φ

φ_i hat im Gegensatz zu vorher merklichen Einfluss. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass die Wirkung von g_0 und in stärkerem Maße von p_0 durch die Schalengeometrie bestimmt wird.

Den Abbildungen 5.6 und 5.7 kann man entnehmen, wie sich tangentielle Normalkräfte N_θ bzw. eine Auflast L im Schalenmittenteil auf die Verteilung der radialen Momente M_φ auswirken. Die Teilbilder *a* zeigen bis auf den Fall $\varphi_a = 135^\circ$ qualitativ ähnliche, wenn auch vom Vorzeichen her entgegengesetzte Verläufe. Bei variierendem Radius $r_{0,M}$ des Schalenmittenteils und sonst gleichen Verhältnissen liefern beide Belastungsvarianten M_φ -Kurven, die noch ausgeprägtere Gemeinsamkeiten zeigen.

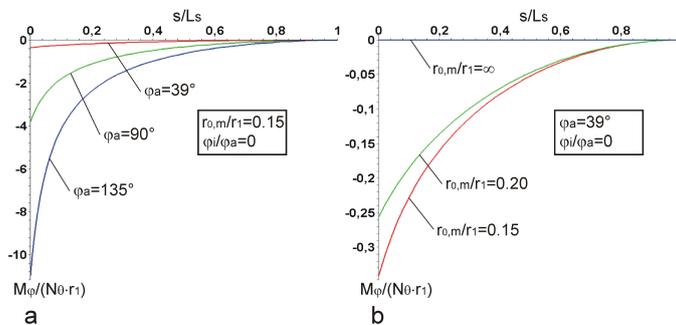


Abbildung 5.6: Einfluss konstanter radialer Normalkraft N_θ auf den Verlauf von M_φ

Im Zuge des Prozesses der Umformung vom ebenen zum räumlich gekrümmten Flächentragwerk nehmen die oben beschriebenen Einflussgrößen einen charakteristischen Wirkungssinn an: Die Parameter H_a , $M_{\varphi,a}$, p_0 und N_θ weisen nach den bisher benutzten Konventionen negatives, L und g_0 positives Vorzeichen auf. Aus

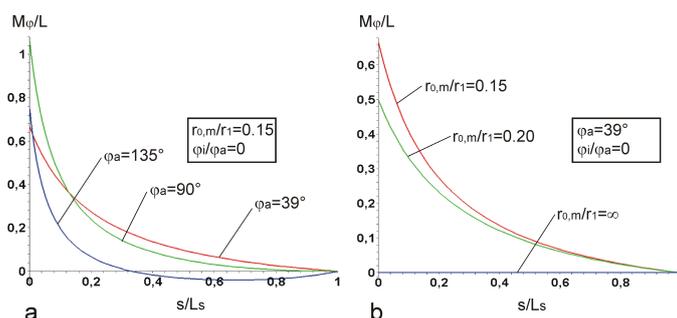


Abbildung 5.7: Einfluss einer Auflast L im Schalenmittenteil auf den Verlauf von M_φ

diesem Grund lassen sich für Schalen mit $\varphi_a = 39^\circ$ — wie sie im Zuge der Experimente untersucht wurden — diese Größen in zwei Gruppen teilen: Bei jeweils alleinigem Vorhandensein bewirken H_a , $M_{\varphi,a}$ bzw. p_0 negative, L , N_θ bzw. g_0 positive radiale Biegemomente M_φ . Geht man davon aus, dass am Ende des Umformungsprozesses der Luftdruck p_0 so eingestellt ist, dass dieser das Eigengewicht g_0 kompensiert und außerdem entlang des Umfangs $M_{\varphi,a} = 0$ gilt, bestimmen die Größen H_a , N_θ und L den Verlauf der M_φ -Kurve. Durch geeignete Abstimmung der horizontalen Randkräfte H_a mit den tangentialen Normalkräften N_θ oder der Auflast L lassen sich somit die entlang der Segmente auftretenden Biegemomente M_φ dem Betrag nach reduzieren. Dies ist gemäß Formel 5.13 gleichbedeutend mit einer Verminderung des Materialaufwands.

Zunächst soll der Fall betrachtet werden, wo L nur das Eigengewicht des Mittenteils darstellt, mit dem unter der Platte herrschenden Luftüberdruck im Gleichgewicht steht und somit außer Betracht bleiben kann. Als Grundlage der Abbildung 5.8 dient eine Vieleckkuppel mit $\varphi_a = 39^\circ$, $\varphi_i = 0$ und einem Verhältnis von $r_{0,M}/r_1 = 0.20$. Die Auswertung der dimensionslosen Größe $M_\varphi/(H_a r_1)$ erfolgt entlang eines Kuppelsegments von $s/L_s = 0$ bis 1, sowie für Verhältnisse $N_\theta/H_a = 0$ bis 3.60. Für letzteren Wert ergibt sich am Segmentinnenrand gerade $M_\varphi = 0$. Dieser Fall hat aber kaum praktische Relevanz: Am Übergang zum Schalenmittenteil gilt $M_\varphi = 0$, was gemäß Formel 5.13 auf $h = 0$ führt und somit die Anwesenheit eines Liniengelenks bedeutet.

Als nächstes soll der Fall betrachtet werden, wenn sich in den Stauchungsfugen kein Material befindet und demnach $N_\theta = 0$ gilt. Abbildung 5.9 zeigt für Schalen mit gleicher geometrischer Grundkonfiguration wie im vorherigen Beispiel und analog zu Bild 5.8 den Verlauf des radial wirkenden Moments M_φ entlang eines Kuppelsegments, diesmal in Abhängigkeit vom Verhältnis $-L/(H_a \cdot r_1)$. Bei $L/(H_a \cdot r_1) = -1.84$ gilt $M_\varphi = 0$ am Segmentinnenrand. Die in diesem Fall am

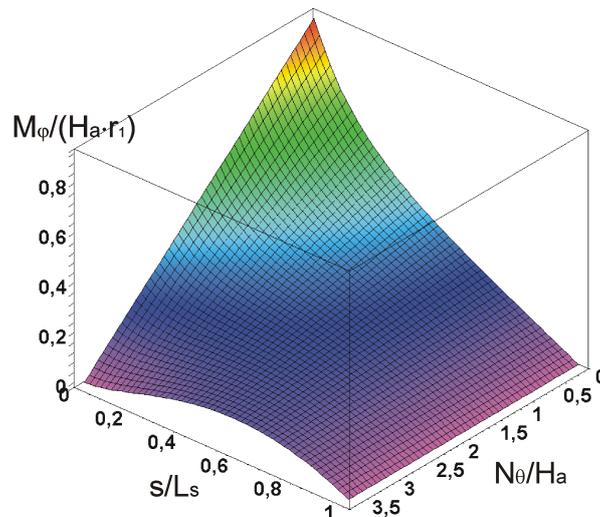


Abbildung 5.8: Radiale Biegemomente entlang eines Kuppelsegments in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen tangentialer Normalkraft N_θ und horizontaler Randkraft H_a

Innenrand auftretende Querkraft ergibt sich zu $-L/n_S$. Dies stellt einen Unterschied zu Abbildung 5.8 dar, wo aufgrund der Abwesenheit vertikal wirkender Kräfte am inneren Segmentrand keine Querkraft angreift.

5.5 Dimensionierung der Kuppelsegmente unter Zugrundelegung linear elastischen Materialverhaltens

5.5.1 Beispiele und Vergleichsrechnungen mittels FEM

Streifen mit konstanter Breite und linear elastischem Material

Ein einfaches Beispiel zur Anwendung der in Abschnitt 5.3 entwickelten Gleichungen stellt ein Streifen mit konstanter Breite $b = 1.0m$ dar. An diesen greifen weder Schnittgrößen N_θ noch M_θ an. In seiner ebenen Anfangslage soll der Streifen eine Länge von $10.4m$ aufweisen, in der Ziellage einen Stichhöhe von $f = 1.7m$ sowie einen konstanten Krümmungsradius von $r_1 = 7.65m$. Gesucht ist jener Verlauf der Querschnittshöhe h der unter der Annahme linear elastischen Materialverhaltens ($E = 30500MN/m^2$) den Streifen die gewünschte Ziellage einnehmen lässt.

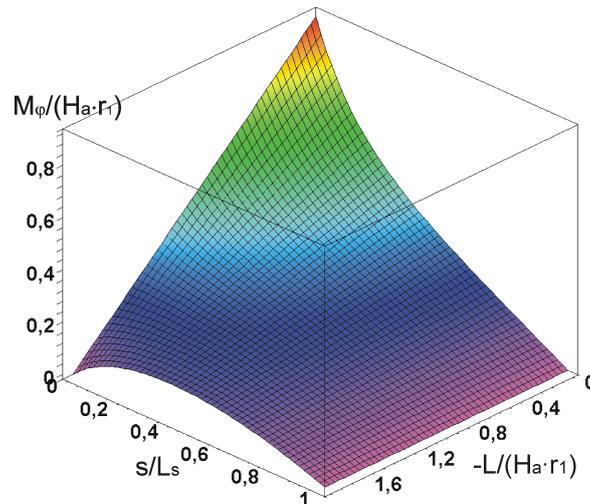


Abbildung 5.9: Radiale Biegemomente entlang eines Kuppelsegments in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen Auflast L in Schalenmitte und horizontaler Randkraft H_a sowie Hauptkrümmungsradius r_1

Als Randbedingungen seien eine horizontale Randlast $H_a = -0.001285 MN/m$ und ein Randmoment von $M_{\varphi,a} = -0.0001 MNm/m$ gegeben sowie die Querkraft in Streifenmitte zu $Q_{\varphi,i} = 0$. Wird nur eine Hälfte des Bogens betrachtet, ergeben sich die Integrationskonstanten zu $C_V = 0$, $C_H = H_a$ und $C_{M_\varphi} = H_a f + M_{\varphi,a} = -0.002285 MNm/m$. Wegen der konstanten Streifenbreite erhält man $\cos \alpha = 0$.

Abbildung 5.10 zeigt die Verläufe der Schnittgrößen N_φ und M_φ gemäß der in Abschnitt 5.3 abgeleiteten Gleichungen als durchgezogene Linien in den Teilbildern *a* und *b*. Die Darstellungen beschränken sich auf die jeweils rechte Streifenhälfte. s bezeichnet den Abstand zur Streifenmitte im unverformten Zustand.

Teilbild *d* enthält als blaue Linie den theoretisch notwendigen Verlauf der Querschnittshöhe. Dieser ergibt sich gemäß Formel 5.13. Da ein solcher sich kontinuierlich ändernder Höhenverlauf schwierig auszuführen wäre, wird jede Streifenhälfte in acht Bereiche mit jeweils konstanter Querschnittshöhe unterteilt. Die Wahl von h_i für jeden Abschnitt erfolgt so, dass bei gegebenem Momentenverlauf M_φ die vertikalen Verschiebungen an den Abschnittsenden der gewünschten Zielform entsprechen. Beginnend vom inneren Segmentrand, wo Verdrehungswinkel φ_0 und Verschiebung w_0 bekannt sind, schreitet die Bestimmung der Querschnittshöhen h_i abschnittsweise nach außen fort. Aus φ_i und w_i am Abschnittsanfang

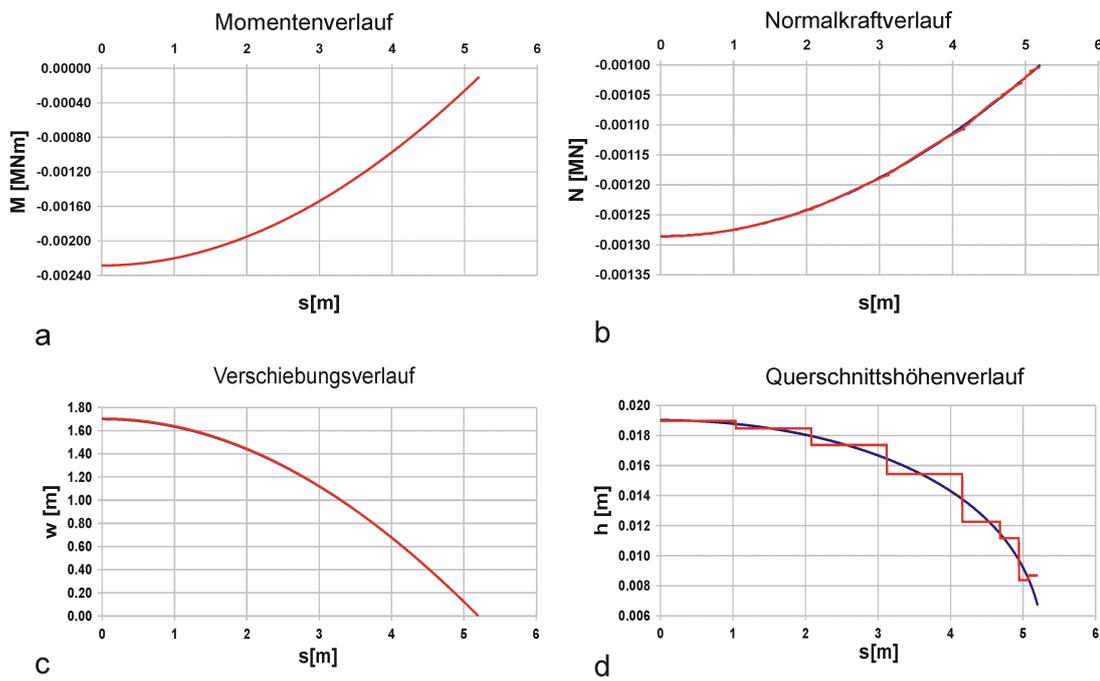


Abbildung 5.10: a) Momenten-, b) Normalkraft- und c) vertikaler Verschiebungsverlauf für einen Streifen aus linear elastischem Material; Teilbild d): theoretischer und praktisch verwendeter Verlauf der Querschnittshöhen

sowie dem Verlauf der Momente M_φ und der Biegesteifigkeit EI_i ergeben sich die Größen φ_{i+1} und w_{i+1} am Abschnittsende als

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= \varphi_i - \int_0^{l_i} \frac{M_\varphi}{EI_i} dl \\ w_{i+1} &= w_i - \int_0^{l_i} \sin \left(\varphi_i - \int_0^\lambda \frac{M_\varphi}{EI_i} d\lambda \right) dl \quad .\end{aligned}\tag{5.15}$$

Die Integration erstreckt sich hierbei über die Länge l_i des jeweiligen Abschnitts. Indem obige Formeln z.B. im Zug eines Bisektionsverfahrens für unterschiedliche Flächenträgheitsmomente ausgewertet und die resultierenden w_{i+1} mit den Zielwerten verglichen werden, lässt sich l_i und somit h_i bestimmen.

In Abbildung 5.10 zeigt Teilbild *d* den aus den Gleichungen 5.15 berechneten, abgetreppten Höhenverlauf als rote Linie. Am Segmentaußenrand, wo das radiale Moment eine steilere Tangente aufweist als im Bereich des Innenrandes, werden kleinere Abschnitte vorgesehen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der vorletzte Abschnitt am Außenrand eine kleinere Querschnittshöhe aufweist als der äußerste Abschnitt, obwohl dort kleinere Momente auftreten. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass wie Gleichung 5.15 für w_{i+1} zeigt, dieses nicht nur vom Momentenverlauf, sondern auch vom Anfangsverdrehungswinkel φ_i abhängt. Da bei der Bestimmung der Abschnittshöhen nur die Vertikalverschiebungen, nicht aber die Verdrehungen kontrolliert werden, oszillieren letztere um ihren Sollwert und verursachen so den paradox erscheinenden Querschnittshöhenverlauf.

Ungenauigkeiten resultieren bei der beschriebenen Vorgehensweise aus dem Umstand, dass die axialen Dehnungen vernachlässigt werden. Außerdem weicht die Systemmittellinie im inneren der gewählten Abschnitte geringfügig von der vorgegebenen Geometrie ab. Die dadurch hervorgerufenen zusätzlichen Biegemomente aus Theorie 2. Ordnung finden in den Formel 5.15 keine Berücksichtigung. Die genannten Ungenauigkeiten lassen sich mit wenig Mehraufwand beseitigen, führen aber zu keinem nennenswerten Genauigkeitsgewinn.

Zur Kontrolle der Ergebnisse wurde eine Berechnung mittels des FEM-Programmes ABAQUS angestellt. Hierzu diente ein der Länge nach durch 106 Schalenelemente mit quadratischem Verschiebungsansatz diskretisierter Streifen konstanter Breite. Die Wahl der Abschnitte sowie die dort vorgesehenen Querschnittshöhen entsprachen jenen aus Abbildung 5.10*d*. Zur Erzielung einer Anfangsauslenkung in Plattenmitte von 1.0cm wurde im ersten Berechnungsschritt eine verteilte, nach oben wirkende Flächenlast von 0.002kN/m^2 aufgebracht. Ohne Vorverformung würde die Lösung am Anfang des nachfolgenden Umformungsprozesses nur für sehr kleine Lastschritte konvergieren. Während des Umformungsprozesses wurde diese Flächenlast allmählich auf 0 gesenkt, gleichzeitig das Moment im Fußbereich auf -0.0001MNm sowie die dortige horizontale Verschiebung auf

0.3911m gesteigert. Dies entspricht dem bei der Umformung aus geometrischen Gründen erforderlichen Maß. Die gesamte Berechnung erfolgte geometrisch nicht-linear. Die Ergebnisse, in Abbildung 5.10a bis c als rote Linien eingezeichnet, zeigen keine sichtbaren Abweichungen von den Soll-Werten (blau) und überdecken diese großteils. Die relativen Abweichungen zwischen FEM-Berechnung und den formelmäßig ermittelten Größen beträgt auf diese bezogen in Streifenmitte für N_φ 0.010%, für M_φ 0.005% und für die vertikale Auslenkung w 0.000%.

Streifen mit linear veränderlicher Breite und linear elastischem Material

Bei Streifen mit in Längsrichtung unveränderlicher Breite ergeben sich in Schnitten senkrecht zur Mittellinie konstante Werte für die verteilten Schnittgrößen M_φ , N_φ und Q_φ . Das folgende Beispiel zeigt, dass trapezförmige Streifen ein davon abweichendes Verhalten aufweisen. Da dies nicht den Annahmen bei der Herleitung der Bemessungsformeln entspricht, sind im Vergleich zum Streifen konstanter Breite größere Abweichungen zwischen den Ergebnissen von FEM- und vereinfachter Rechnung zu erwarten.

Abbildung 5.11a zeigt den Grundriss der unteren Hälfte eines trapezförmigen Streifens. Dessen Geometrie ergibt sich aus einer in 32 Segmente aufgeteilten Kreisplatte mit einem Durchmesser von 13.46m. In der Mitte der Kreisplatte befindet sich ein ungestörter Bereich mit einem Radius von $r_{0,M} = 1.53m$. Im umgeformten Endzustand soll sich am inneren Ende der Segmente eine vertikale Verschiebung von 1.7m einstellen und über die Segmentlänge ein konstanter Krümmungsradius von $r_1 = 7.65m$. Das Verhältnis $r_{0,M}/r_1$ beträgt somit 0.20. Unter der Annahme, dass sich der ungeschwächte Platteninnenteil nur unwesentlich verformt, ergibt sich dort für die Segmentinnenränder eine horizontale Tangente. Die Form der Gesamtschale entspricht jener aus Abbildung 4.9a.

Zur Reduzierung des Aufwandes der FE-Berechnung wird nur eine Segmenthälfte untersucht und entlang der Segmentmittellinie entsprechende Symmetriestandbedingungen gesetzt. In Abbildung 5.11b bedeuten orange Pfeile Sperre der Verschiebungen in, blaue Symbole gesperrte Verdrehungen um die angezeigte Richtung. Die Lagerung des Segmentinnen- bzw. -außenrandes erfolgt mittels linienförmiger, starrer Körper — in Teilbild b als rote Geradenstücke dargestellt — deren Bewegung sich aus den Freiheitsgraden je eines Referenzpunktes (hier mit „RP-N“ bzw. „RP-S“ gekennzeichnet) bestimmt. Die vorliegenden Randbedingungen erlauben am inneren Segmentrand nur vertikale, am Außenrand nur horizontale Verschiebungen sowie Verdrehungen quer zur Segmentlängsachse.

Die Netzeinteilung (siehe 5.11c) erfolgt mit ähnlicher Feinheit wie im ersten Berechnungsbeispiel. Wieder kommen Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz zur Anwendung. In den Teilbildern a und c deuten die gelb ge-

punkteten Linien Schnittebenen an, die das Segment in Abschnitte mit jeweils konstanten Querschnittseigenschaften unterteilen.

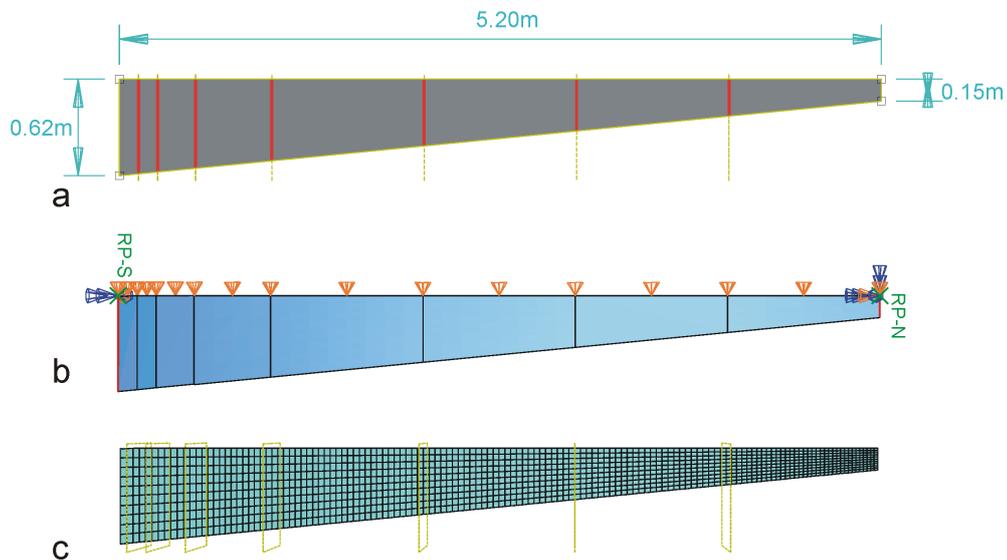


Abbildung 5.11: Grundriss, Verschiebungsrandbedingungen und Netzwahl für die untere Hälfte eines trapezförmigen Streifens

Für die dynamischen Randbedingungen H_a , $M_{\varphi,a}$ und $Q_{\varphi,i}$ sowie den E-Modul gelten die gleichen Werte wie im Beispiel für den Streifen mit konstanter Breite. Die sich daraus gemäß Gleichung 5.15 ergebenden Querschnittshöhen h listet Tabelle 5.1 auf. Die Definition der Abschnittsgrenzen erfolgt durch die Angabe ihres Abstands s vom inneren, schmalen Segmentrand

Dem Umformungsschritt, der in einer Verschiebung des äußeren Segmentrandes um $0.3911m$ sowie dem Aufbringen des Randmoments $M_{\varphi,a}$ besteht, geht wie im ersten Beispiel eine vertikale Auslenkung der Struktur infolge einer Flächenlast von $0.002kN/m^2$ voraus. Im letzten Lastschritt wird diese wieder entfernt. Es ergibt sich in Schalenmittelebene der in Abbildung 5.12a bis c dargestellte Spannungszustand in Plattenmittelebene. Teilbild a zeigt die Hauptdruck- Teilbild b die Hauptzugspannungen als Konturplot. Wie man sieht, treten die größten Unregelmäßigkeiten im Segmentaußenbereich auf. Zur besseren Veranschaulichung der dort herrschenden Spannungsverhältnisse enthält Teilbild c eine Darstellung der Hauptspannungen durch Vektoren. Die dargestellten Symbole liegen in Hauptspannungsrichtungen, Gelb bezeichnet Druck-, Rot Zugspannungen. Die Länge der Pfeilsymbole ist proportional zur örtlichen Hauptspannung. Während im Fall des zuvor untersuchten Streifens mit parallelen Rändern in der Segmentmittelebene keine Spannungen auftraten, ergeben sich nun an der geneig-

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	h [cm]
1	0.00	1.04	2.875
2	1.04	2.08	2.320
3	2.08	3.12	2.088
4	3.12	4.16	1.655
5	4.16	4.68	1.300
6	4.68	4.94	1.092
7	4.94	5.07	0.893
8	5.07	5.20	0.812

Tabelle 5.1: Mittels Bemessungsalgorithmus berechnete Querschnittshöhen eines Vieleckkuppelsegments

ten Segmentaußenkante Druckspannungen sowie im Bereich der Symmetrielinie eine Zone mit biaxialem Zug. Die größte Zugspannung in der Mittelebene beträgt $0.3MN/m^2$ die größte Druckspannung $-0.6MN/m^2$. An den oberen und unteren Querschnittsrändern treten Spannungen von $\pm 10.2MN/m^2$ auf. Dies zeigt, dass die in Abschnitt 4.4 getroffene Annahme einer über die Segmentbreite konstanten Verteilung der Spannungen nur näherungsweise zutrifft. In Schnitten parallel zur Segmentlängsachse variieren die verteilten in Längsrichtung weisenden Normalkräfte stark, wie Abbildung 5.13 zeigt. Schnitt 6–6 fällt hierbei mit der geneigten Segmentaußenkante zusammen, Schnitt 1–1 mit der Symmetrieachse. Die dazwischenliegenden Schnitte weisen gleiche Abstände voneinander auf. Nimmt man die Mittelwerte der in den sechs Schnitten auftretenden verteilten Normalkräfte — dargestellt als rote Linie — so ergibt sich nur ein geringfügiger Unterschied zu dem nach Abschnitt 4.4 berechneten Verlauf- repräsentiert durch eine blaue Linie.

Vergleicht man am inneren Segmentrand die über die dort vorliegende Breite gemittelten Ergebnisse der FE-Analyse mit jenen aus der vereinfachten Berechnung, dann ergeben sich bezogen auf diese Abweichungen von 0.54% für N_φ , von 0.48% für M_φ sowie von 0.00% für die vertikale Auslenkung.

Das Verhalten eines Vieleckkuppelsegments bei Vorhandensein von Spannungen in Breitenkreisrichtung

Bei der Herstellung einer Vieleckkuppel nach dem in Abschnitt 2.1 erläuterten Verfahren treten in Breitenkreisrichtung Normalkräfte N_θ auf. Diese wirken — im

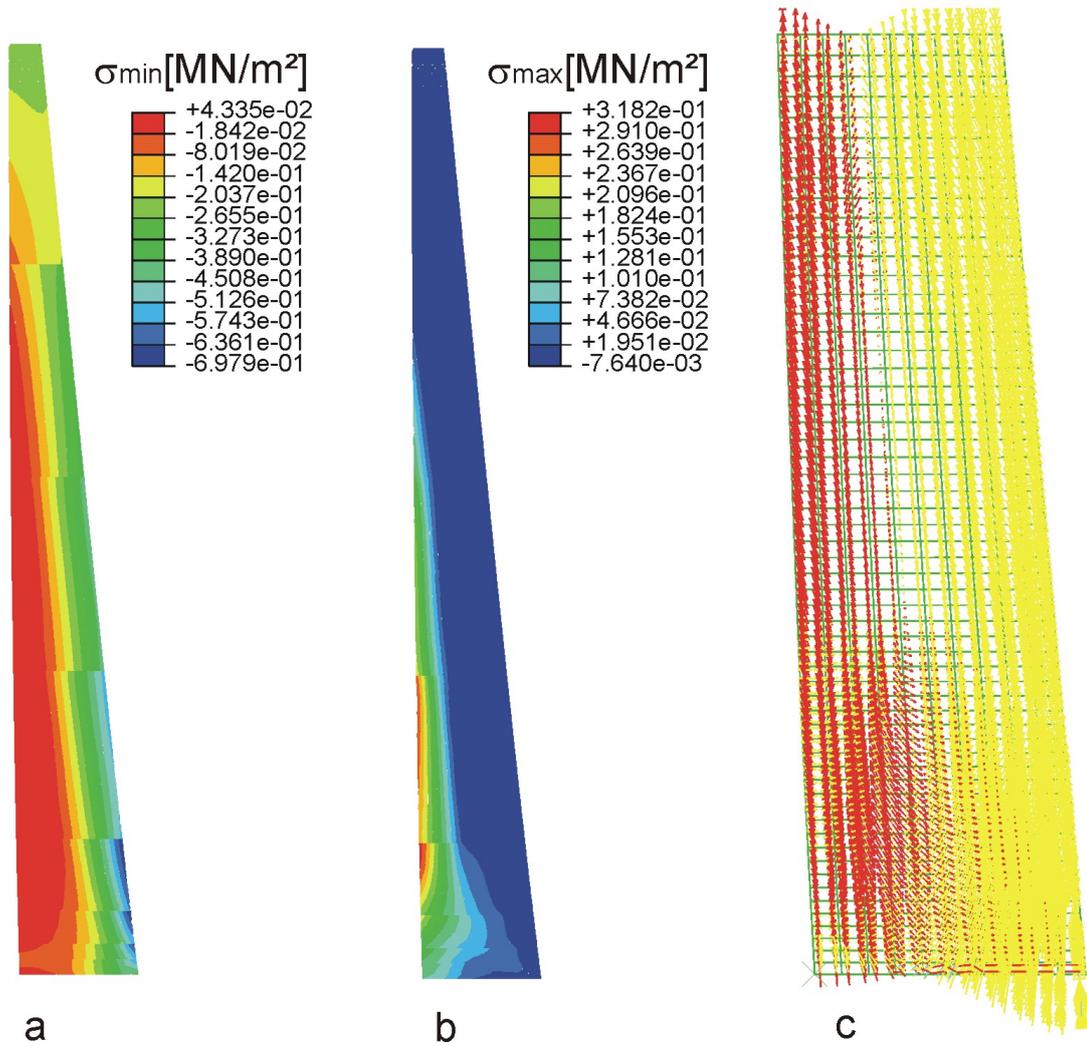


Abbildung 5.12: Spannungsverteilung in der Mittelebene des umgeformten Segments

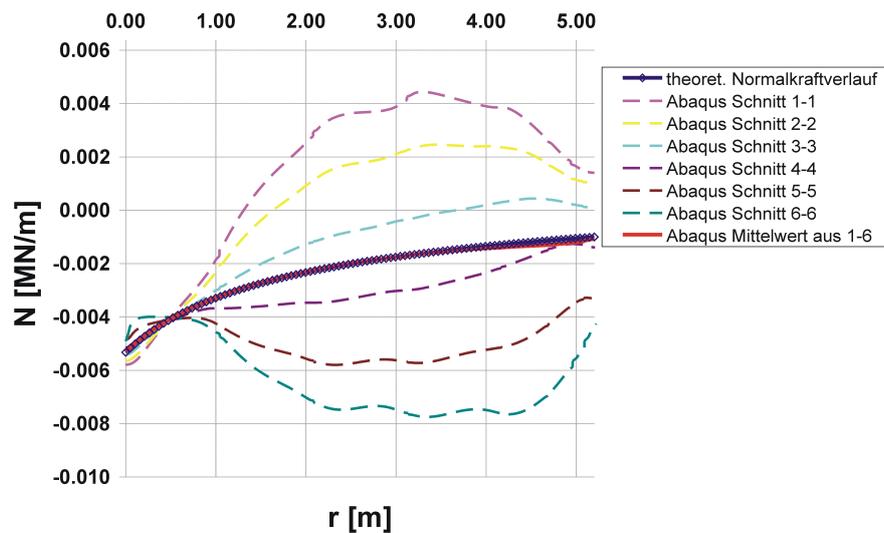


Abbildung 5.13: Verlauf der verteilten Normalkraft N_φ in Segmentlängsschnitten sowie deren Mittelwerte aus einer FEM Berechnung

Grundriss betrachtet — senkrecht auf die Kuppelgrate und sorgen in den Kuppelsegmenten für horizontale, nach außen gerichtete Umlenkkräfte (siehe Abschnitt 4.4). Dadurch ergeben sich in den Kuppelsegmenten ungleichförmige Spannungs- bzw. Dehnungsverteilungen, die durch die Idealisierung der Segmente als eindimensionale Bögen nicht erfasst werden können. Die nächsten zwei Beispiele dienen der Abschätzung der sich daraus ergebenden Ungenauigkeiten. Der folgenden Untersuchung liegen die im vorherigen Abschnitt benutzten Segmentabmessungen und -materialeigenschaften zugrunde.

Abbildung 5.14 zeigt zwei Belastungsvarianten, die im Falle der Idealisierung der Segmente als eindimensionale Strukturen identische Verformungen liefern. Aus Symmetriegründen genügt die Betrachtung jeweils einer Segmenthälfte. In Teilbild *a* sieht man senkrecht zum Segmentrand wirkende Kräfte N_θ . Bei Verwendung eines Fugenmaterials mit einer Fließspannung von $0.4MN/m^2$ (z.B. XPS) sowie einer geschätzten Querschnittshöhe von $0.04m$ ergibt sich für N_θ ein Wert von $-0.016MN/m$. Bei Annahme gerader Segmentränder lässt sich für die gegebenen Abmessungen der Winkel α zu 5.204° ermitteln. Bei 32 Kuppelsegmenten führt Formel 4.39 auf eine aus N_θ herrührende Umlenkkraft von

$$H_\theta = 2N_\theta / \cos \alpha \sin \frac{\pi}{n_S} = -0.003146MN/m \quad . \quad (5.16)$$

Diese wird zu Vergleichszwecken als zweite Belastungsvariante entlang der Segmentmittelachse aufgebracht (siehe Abbildung 5.14*b*).

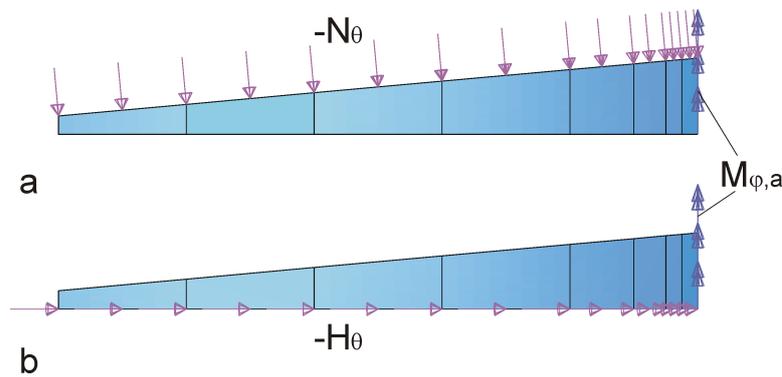


Abbildung 5.14: a) Belastung einer Segmenthälfte mit Kräften N_θ senkrecht zu den späteren Kuppelgraten; b) Ersatz der Kräfte N_θ durch horizontale Kräfte entlang der Segmentachse

Neben N_θ bzw. H_θ wirkt bei beiden Belastungsvarianten entlang der Bogenfußlinie ein verteiltes Moment von $M_{\varphi,a} = -0.0001 MNm/m$. Zusätzlich zu den im vorherigen Beispiel angesetzten kinematischen Randbedingungen erfolgt eine Sperre der Verdrehungen um die Segmentlängsachse entlang der Symmetrielinie des Berechnungsmodells.

Für eine horizontale Randkraft von $H_a = -0.005 MN/m$ liefert der Bemessungsalgorithmus für beide Belastungsvarianten die in Tabelle 5.2 aufgelisteten, erforderlichen Querschnittshöhen.

Abbildung 5.15 zeigt in Teilbild a) den Verlauf der Normalkraft N_φ , wie er aus der vereinfachten Bogenberechnung (blaue Kurve), aus der Belastung durch N_θ am Segmentrand (grüne Kurve) sowie aus H_θ entlang der Segmentachse (rote Kurve) resultiert. Die Berechnung von N_φ und M_φ erfolgte bei der FE-Rechnungen durch Mittelung über die Segmentbreite. Wie man sieht, resultiert die Belastungsvariante mit H_θ in kaum nennenswerten Abweichungen relativ zur vereinfachten Lösung. Die Einleitung von N_θ entlang des Segmentrandes führt hingegen auf Unterschiede von bis zu 8.7%. Die Hauptursache dafür liegt in dem Umstand, dass an den Segmenten sowohl am schmalen als auch am breiten Ende Verschiebungsrandbedingungen in horizontaler Richtung vorliegen. Dies führt dazu, dass in den Endbereichen ein Teil der in Segmentlängsrichtung wirkenden Komponente von N_θ direkt in die Auflager fließt.

Die in Segmentlängsrichtung auftretenden Momentenverläufe in Abbildung 5.15b zeigen qualitativ ähnliches Verhalten wie die Normalkräfte. Die maximale Abweichung zwischen Idealisierung und FE-Berechnung mit Belastung durch N_θ beträgt hier 4.5%.

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	h [cm]
1	0.00	1.04	2.274
2	1.04	2.08	2.264
3	2.08	3.12	2.422
4	3.12	4.16	2.176
5	4.16	4.68	1.886
6	4.68	4.94	1.500
7	4.94	5.07	1.317
8	5.07	5.20	0.982

Tabelle 5.2: Mittels Bemessungsalgorithmus berechnete Querschnittshöhen eines Vieleckkuppelsegments bei Vorhandensein von Spannungen in Breitenkreisrichtung

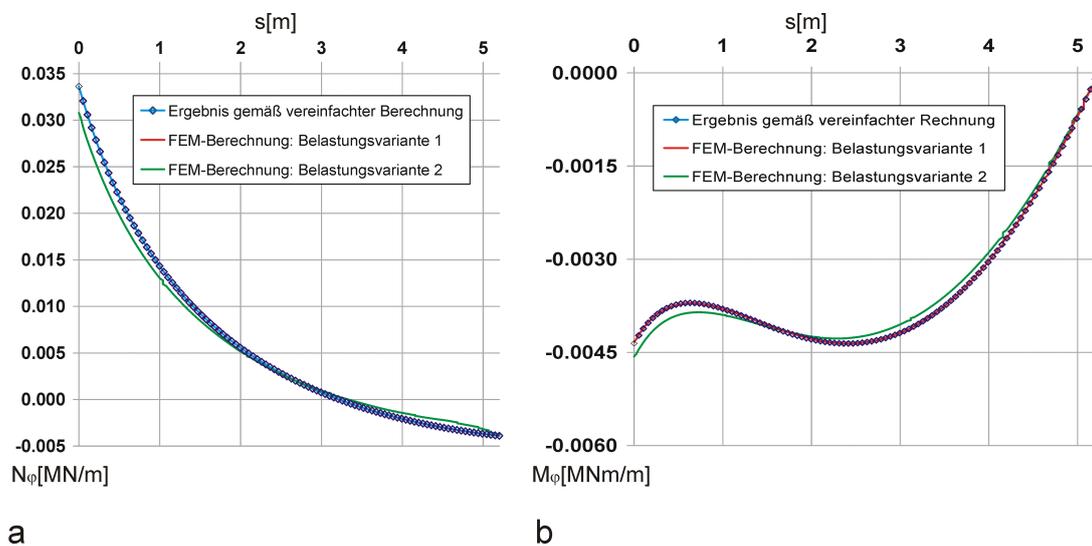


Abbildung 5.15: Ergebnisse für N_φ und M_φ gemäß vereinfachter Rechnung bzw. FE-Berechnung mit unterschiedlichen Belastungsvarianten

5.5.2 Verformungsberechnungen für Vieleckkuppelsegmente

Die bisherigen Bemessungsschritte stützten sich ausschließlich auf Schnittgrößen. Hierbei spielte die horizontale Randlast \mathbf{H}_a die Rolle eines freien Parameters. Je größer dieser Wert, desto biegesteifer das resultierende Tragwerk. Wie in Abschnitt 5.3 erwähnt, hat die Wahl von \mathbf{H}_a so zu erfolgen, dass die sich ergebende Struktur unter den zu erwartenden Einwirkungen ausreichende Gebrauchstauglichkeit und Tragsicherheit aufweist. Dazu ist es notwendig, Zusatzlasten, die erst nach erfolgter Umformung auftreten, bzw. die aus ihnen resultierenden Verformungen zu berücksichtigen. Es kann sich dabei z.B. um Wind-, Schnee- oder sonstige Lasten aus Begehung etc. handeln.

In Abschnitt 4.3 wurde die prinzipielle Vorgehensweise bei der Verformungsberechnung von Rotationsschalen beschrieben. Für den hier vorliegenden Fall von Vieleckkuppeln, die aus einer Ansammlung einfach gekrümmter, miteinander verbundener Bögen bestehen, lassen sich gegenüber der allgemeinen Schalenbiegetheorie einige Vereinfachungen erzielen. Im Folgenden dient deshalb die Biegetheorie von Bögen als Ausgangspunkt.

Berechnungsannahmen und -grundlagen

Abbildung 5.16a zeigt einen Bogen, der im unverformten Zustand einen Krümmungsradius r_1 aufweist und durch äußere Kräfte Deformationen erfährt, die in der anfänglichen Krümmungsebene liegen. Bezeichnet man den Krümmungsradius nach erfolgter Verformung als ρ , lässt sich das über die Bogenbreite integrierte Biegemoment \mathbf{M}_φ aus

$$EI \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_1} \right) = -\mathbf{M}_\varphi \quad (5.17)$$

bestimmen [43]. Hier bezeichnet EI die Biegesteifigkeit des Bogens. Das Minuszeichen auf der rechten Seite in obiger Formel bringt zum Ausdruck, dass positive Momente eine Verringerung der anfänglichen Krümmung bewirken. Betrachtet man ein infinitesimales Stabelement der Länge ds , welches im unverformten Zustand zwischen den Punkten n und m liegt (siehe Abbildung 5.16a), ergibt sich für den Kehrwert des ursprünglichen Krümmungsradius

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.18)$$

Die Krümmung im verformten Zustand kann analog dazu bestimmt werden. Das Linienelement $n - m$ geht über in $n_1 - m_1$ und es gilt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} \quad (5.19)$$

Die Größe $d\varphi + \Delta d\varphi$ bezeichnet den Winkel zwischen den als eben geblieben angenommenen Querschnitten an den Stellen n_1 und m_1 . Zur Bestimmung der aus der Belastung resultierenden, zusätzlichen Krümmung $\Delta d\varphi$ betrachtet man Abbildung 5.16b. Werden zum ursprünglichen Krümmungsmittelpunkt gerichtete Verschiebungen w positiv genommen, ergibt sich für $\Delta d\varphi$ der Ausdruck

$$\Delta d\varphi = \frac{d^2w}{ds^2} ds \quad . \quad (5.20)$$

Unter der Annahme kleiner Verschiebungen lässt sich die Länge des Linienelements $n_1 - m_1$ als

$$ds + \Delta ds = (r_1 - w) d\varphi \quad (5.21)$$

angeben. Einsetzen von ds aus Gleichung 5.18 in obige Formel liefert

$$\Delta ds = -w d\varphi = -\frac{w ds}{r_1} \quad . \quad (5.22)$$

Für die Krümmung $1/\rho$ der verformten Bogenachse erhält man mit den obigen Ausdrücken für $\Delta d\varphi$ und Δds aus Gleichung 5.19 den Zusammenhang

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi + (d^2w/ds^2) ds}{ds(1 - w/r_1)} \quad . \quad (5.23)$$

Nach Weglassen von Größen höherer Kleinheit wird

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_1} \left(1 + \frac{w}{r_1} \right) + \frac{d^2w}{ds^2} \quad (5.24)$$

[43]. Einsetzen der Ausdrücke für $1/r_1$ und $1/\rho$ in Gleichung 5.17 liefert schließlich als Differentialgleichung der Biegelinie eines Bogens die Formel

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r_1^2} = -\frac{\mathbf{M}_\varphi}{EI} \quad . \quad (5.25)$$

Diese lässt sich auch als

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = -\frac{\mathbf{M}_\varphi r_1^2}{EI} \quad (5.26)$$

anschreiben [43]. Für $r_1 = \infty$ geht Gleichung 5.25 über in die eines geraden Stabes.

In den bisherigen Überlegungen spielten Verschiebungen v in zur ursprünglichen Stabachse tangentialer Richtung keine Rolle, da solche bei Vorliegen kleiner Deformationen ausschließlich Dehnungen der Stabachse bewirken. Wie in [38] dargelegt, ist ihr Einfluss auf die Gesamtverformung im Fall dünner Bögen vernachlässigbar klein im Vergleich zu den Deformationen infolge Biegung. Bei der

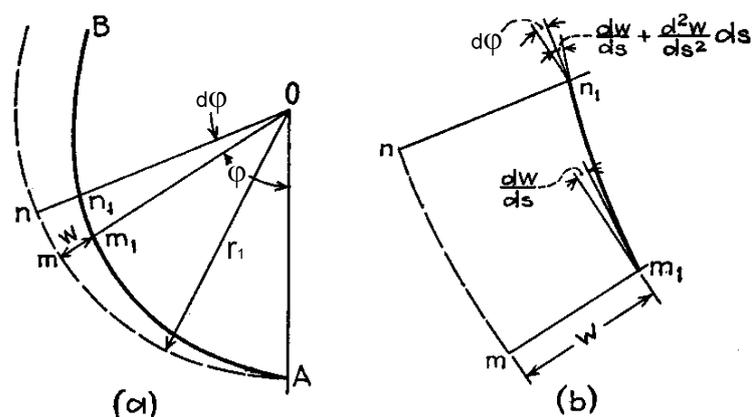


Abbildung 5.16: Verformung eines Stabes mit gekrümmter Achse [43]

Konstruktion eines Zusammenhangs zwischen radialer Verformung w und tangentialer Verformung v — diese sei positiv in Richtung zunehmender Winkel φ — kann daher vereinfachend von einer undehnbaren Stabmittellinie ausgegangen werden.

Die Dehnung der Bogenachse setzt sich aus einem Anteil infolge der tangentialen Verschiebungen von der Größe dv/ds sowie einem Anteil infolge der radialen Verschiebung von der Größe $-w/r_1$ zusammen. In Summe ergeben diese eine Stablängsdehnung von

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) \quad . \quad (5.27)$$

Für den Fall eines Bogens mit undehnbarer Mittellinie führt obige Gleichung auf den Ausdruck

$$\frac{dv}{d\varphi} - w = 0 \quad . \quad (5.28)$$

Zur eindeutigen Lösung des aus den Gleichungen 5.26 und 5.28 bestehenden Differentialgleichungssystems benötigt man drei Randbedingungen für v und w . Im Falle gelenkiger Lagerung der Fußpunkte und bezüglich des Bogenscheitels schiefsymmetrischer Verformungsfigur lauten diese

$$w(\varphi = \varphi_a) = w(\varphi = \varphi_i = 0) = v(\varphi = \varphi_a) = 0 \quad . \quad (5.29)$$

Hierbei bezeichnet φ_a den Meridianeigungswinkel am Bogenfußpunkt, φ_i jenen am Scheitel. Infolge der Undehnbarkeit der Bogenachse verschiebt sich bei schiefsymmetrischen Deformationen w der Bogenscheitel in horizontaler Richtung.

Für in Bezug auf die Bogenmitte symmetrische Verformungen gilt bei gelenkiger Lagerung der Fußpunkte $w(\varphi = \varphi_a) = v(\varphi = \varphi_a) = 0$. Zusätzlich ist sicher

zu stellen, dass bei $\varphi = \varphi_i$ weder Verdrehungen noch horizontale Verschiebungen auftreten. Dies führt dort auf $dw/ds = v = 0$. Wie man sieht, ergeben sich vier Randbedingungen, von denen allerdings nur drei durch das vorliegende Differentialgleichungssystem befriedigt werden können. Abhilfe schafft, wie im nächsten Abschnitt gezeigt, die Einführung einer weiteren Bestimmungsgleichung für \mathbf{M}_φ .

Erweiterung für den Fall statisch unbestimmter Lagerung und elastischer Bettung

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, sorgt das zwischen den einzelnen Kuppelsegmenten befindliche Fugenmaterial für einen zweidimensionalen Spannungszustand in der Struktur und hat positiven Einfluss auf die Stabilität des Tragwerks. Dieser soll im Folgenden erfasst werden.

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt wo \mathbf{M}_φ allein aufgrund von Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden konnte, soll diese Größe nun statisch bestimmte Anteile \mathbf{M}_φ^{sb} sowie statisch unbestimmte Anteile \mathbf{M}_φ^{su} beinhalten, sodass $\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_\varphi^{su} + \mathbf{M}_\varphi^{sb}$ gilt. \mathbf{M}_φ^{sb} lässt sich für äußere Einwirkungen z.B. aus Formel 5.12 bestimmen, \mathbf{M}_φ^{su} ergibt sich aus den vorhandenen Verformungsrandbedingungen und den im Weiteren abzuleitenden Differentialgleichungen. Den ersten Schritt dazu bildet die Herleitung des Zusammenhangs zwischen der Dehnung ε_θ in Umfangsrichtung und den Verschiebungen v und w entlang der Segmentlängsachse. Infolge dieser Verformungen vergrößert sich der Abstand r_0 eines durch die Neigung φ der Meridiantangente festgelegten Punktes der Segmentmittellinie von der Symmetrieachse um

$$\Delta r_0 = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{dv}{d\eta} \cos \eta d\eta - w \sin \varphi \quad . \quad (5.30)$$

Differentiation nach φ liefert

$$\frac{d\Delta r_0}{d\varphi} = \frac{dv}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{dw}{d\varphi} \sin \varphi - w \cos \varphi \quad . \quad (5.31)$$

Dies geht unter Berücksichtigung von Gleichung 5.28 über in

$$\frac{d\Delta r_0}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi} \sin \varphi \quad . \quad (5.32)$$

Bei nochmaliger Differentiation nach φ erhält man

$$\frac{d^2\Delta r_0}{d\varphi^2} = -\frac{d^2w}{d\varphi^2} \sin \varphi - \frac{dw}{d\varphi} \cos \varphi \quad . \quad (5.33)$$

Der Term $d^2w/d\varphi^2$ lässt sich mittels Gleichung 5.26 eliminieren, was schließlich auf

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Delta r_0}{d\varphi^2} &= \left[w + \frac{\mathbf{M}_\varphi r_1^2}{EI} \right] \sin \varphi - \frac{dw}{d\varphi} \cos \varphi = \\ &= \left[w + \frac{(\mathbf{M}_\varphi^{su} + \mathbf{M}_\varphi^{sb}) r_1^2}{EI} \right] \sin \varphi - \frac{dw}{d\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.34)$$

führt. Dies liefert zusammen mit den Randbedingungen $\Delta r_0(\varphi = \varphi_a) = \Delta r_0(\varphi = \varphi_i) = 0$ am äußeren bzw. inneren Segmentrand die Grundlage zur Bestimmung von Δr_0 .

Senkrecht zu den Graten einer Vieleckkuppel mit n_S Segmenten verursachen die horizontalen Verschiebungen Δr_0 der Segmentmitten im Grundriss betrachtet Spalte von der Größe $\Delta r_0 \cdot \sin(\pi/n_S) \cdot 2$. Die über einen Breitenkreis gemittelte Dehnung senkrecht zu den Kuppelgraten nimmt deshalb die Form

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\Delta r_0 \sin(\pi/n_S) 2 n_S}{r_0 / \cos(\pi/n_S)} \\ &= \frac{\Delta r_0}{r_0} \sin(2\pi/n_S) n_S \end{aligned} \quad (5.35)$$

an. Für die Normalkraft N_θ in Breitenkreisrichtung gilt bei Vernachlässigung der Querdehnung

$$N_\theta = E_\theta h \varepsilon_\theta \quad , \quad (5.36)$$

wobei E_θ gemäß Formel 3.2 bzw. 3.3 bestimmt werden kann. Einsetzen des obigen Ausdrucks in Gleichung 4.39 liefert

$$\mathbf{H}_\varphi^\theta = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \left[\frac{2 E_\theta h \varepsilon_\theta}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} \right] r_1 d\eta + C_H \quad (5.37)$$

für die durch die Dehnung des Fugenmaterials bewirkte, horizontale Schnittkraft. Ist die untersuchte Vieleckkuppel einer Kugelkappe umschrieben gilt $r_1 = r_2 = \text{const}$ und obige Gleichung lässt sich mit Hilfe der Beziehung 5.7 als

$$\mathbf{H}_\varphi^\theta = \int_0^{\tilde{z}} \left[\frac{2 E_\theta h}{\cos \alpha \sin \varphi} \sin \frac{\pi}{n_S} \sin \frac{2\pi}{n_S} n_S \frac{\Delta r_0}{r_0} \right] d\zeta + C_H \quad (5.38)$$

anschreiben.

Zur Ermittlung der aus $\mathbf{H}_\varphi^\theta$ herrührenden Momente \mathbf{M}_φ^{su} wird Gleichung 5.8 herangezogen. Differentiation dieser Formel nach \tilde{z} ergibt unter der Annahme, dass die Momente M_θ keinen wesentlichen Beitrag zur Systemsteifigkeit beisteuern, die Beziehung

$$\frac{d^2 \mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\tilde{z}^2} = - \frac{d\mathbf{H}_\varphi^\theta}{d\tilde{z}} \quad . \quad (5.39)$$

Unter Beachtung von

$$\frac{d^2 \mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\check{z}^2} = \frac{d}{d\check{z}} \left(\frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\check{z}} \right) = \frac{d}{d\check{z}} \left(\frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\check{z}} \right) = \frac{d^2 \mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{d\check{z}} \right)^2 + \frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\check{z}^2} \quad (5.40)$$

und Gleichung 5.7 für die Beziehung zwischen φ und \check{z} erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi^2} &= \frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{d\mathbf{H}_\varphi^\theta}{d\check{z}} r_1^2 \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{1}{\tan \varphi} - r_1^2 \sin \varphi \frac{2 E_\theta h}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} \sin \frac{2\pi}{n_S} n_S \frac{\Delta r_0}{r_0} . \end{aligned} \quad (5.41)$$

Obige Differentialgleichung zeigt, dass bei alleinigem Vorhandensein tangential wirkender Normalkräfte N_θ die Querkraft — diese ist im gegebenen Fall proportional zu $d\mathbf{M}_\varphi^{su}/d\varphi$ — am inneren Segmentrand bei Vorliegen einer horizontalen Meridiantangente verschwinden muss. Wegen $\varphi = 0$ gilt dort nämlich $1/\tan \varphi = \infty$.

Zusammen mit den im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen ergibt sich für die Verformungsfigur eines in horizontaler Richtung beliebig elastisch gebetteten, gleichmäßig gekrümmten Plattenstreifens mit beliebig variabler Biegesteifigkeit und veränderlichem Biegemoment \mathbf{M}_φ^{sb} das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\varphi} &= w \\ \frac{d^2 w}{d\varphi^2} &= -w - \frac{r_1^2}{EI} [\mathbf{M}_\varphi^{su} + \mathbf{M}_\varphi^{sb}] \\ \frac{d^2 \mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi^2} &= \frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{1}{\tan \varphi} - r_1^2 \sin \varphi \frac{2 E_\theta h}{\cos \alpha} \sin \frac{\pi}{n_S} \sin \frac{2\pi}{n_S} n_S \frac{\Delta r_0}{r_0} \\ \frac{d^2 \Delta r_0}{d\varphi^2} &= \left[w + \frac{r_1^2}{EI} [\mathbf{M}_\varphi^{su} + \mathbf{M}_\varphi^{sb}] \right] \sin \varphi - \frac{dw}{d\varphi} \cos \varphi . \end{aligned} \quad (5.42)$$

Im Falle eines gelenkig gelagerten Bogens und schiefe symmetrischer Verformungsfigur gilt

$$\begin{aligned} w(\varphi = \varphi_a) &= w(\varphi = \varphi_i = 0) = v(\varphi = \varphi_a) = 0 \\ \mathbf{M}_\varphi^{su}(\varphi = \varphi_a) &= \mathbf{M}_\varphi^{su}(\varphi = \varphi_i = 0) = 0 . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Für bezüglich des Bogenscheitels symmetrische Deformationen hat man

$$\begin{aligned} w(\varphi = \varphi_a) &= w(\varphi = \varphi_i = 0) = 0 \\ v(\varphi = \varphi_a) &= v(\varphi = \varphi_i = 0) = 0 \\ \mathbf{M}_\varphi^{su}(\varphi = \varphi_a) &= 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

zu wählen.

Neben dem Moment \mathbf{M}_φ kann auch die in den Segmenten wirkende Normalkraft \mathbf{N}_φ — etwa für Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung — von Interesse sein. Diese lässt sich analog zu \mathbf{M}_φ in einen statisch bestimmten Anteil \mathbf{N}_φ^{sb} sowie einen statisch unbestimmten Anteil \mathbf{N}_φ^{su} aufspalten. Liegt bei einfach äußerlich statisch unbestimmten Systemen die Wirkungsrichtung der statisch Unbestimmten aufgrund der Verschiebungsrandbedingungen fest, kann man diese umgehend aus \mathbf{M}_φ^{su} bestimmen. Bei z.B. horizontaler Wirkungsrichtung gilt für den statisch unbestimmten Anteil der Vertikalkraft $\mathbf{V}_\varphi^{su} = 0$ und Formel 5.8 liefert bei Differentiation nach \tilde{z} und Berücksichtigung der ersten der Gleichungen 5.7 den Ausdruck

$$\mathbf{H}_\varphi^{su} = -\frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\tilde{z}} = -\frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{1}{\sin \varphi r_1} \quad . \quad (5.45)$$

Mit der Schnittgröße \mathbf{H}_φ^{su} ergibt sich aus der zweiten der Gleichungen 4.41 wegen $\mathbf{V}_\varphi^{su} = 0$ der statisch unbestimmte Anteil der Normalkraft zu

$$\mathbf{N}_\varphi^{su} = \mathbf{H}_\varphi^{su} \cos \varphi = -\frac{d\mathbf{M}_\varphi^{su}}{d\varphi} \frac{1}{\tan \varphi r_1} \quad . \quad (5.46)$$

Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung

Mittels der in den beiden vorhergehenden Abschnitten hergeleiteten Beziehungen lassen sich die Schnittgrößen \mathbf{M}_φ und \mathbf{N}_φ sowie die Deformationen von Vieleckkuppelsegmenten unter beliebigen Einwirkungen ermitteln. Zur numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems 5.42 unter den Randbedingungen 5.43 oder 5.44 wird in dieser Arbeit das Programm COLSYS ([1], [2]) verwendet. Die Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Systemantwort stellt dabei kein prinzipielles Problem dar. Ein recht intuitiver Lösungsansatz dazu findet sich in [31]: Im ersten Schritt dieser iterativen Methode werden die Schnittgrößen und Deformationen unter Vernachlässigung der Theorie 2. Ordnung berechnet — im Falle der zu untersuchenden Vieleckkuppelsegmente erhält man \mathbf{M}_φ^1 , \mathbf{N}_φ^1 , v^1 und w^1 . Die Superskripte bezeichnen die Nummer des Iterationsschritts, in welchem die Größen ermittelt wurden. Danach erfolgt die Berechnung von Zusatzmomenten $\mathbf{M}_\varphi^{II,1}$ infolge der Normalkräfte. Diese belaufen sich auf

$$\mathbf{M}_\varphi^{II,1} = -\mathbf{N}_\varphi^1 w^1 \quad . \quad (5.47)$$

Zusammen mit den statisch bestimmten Momentenanteilen $\mathbf{M}_\varphi^{sb,1}$ des aktuellen Iterationsschritts führen diese auf

$$\mathbf{M}_\varphi^{sb,2} = \mathbf{M}_\varphi^{sb,1} + \mathbf{M}_\varphi^{II,1} \quad (5.48)$$

als Eingangsgrößen für den nächsten Berechnungsgang. Die Rechnung kann beendet werden, sobald die Änderung der Schnittgrößen oder Verschiebungen zwischen zwei aufeinander folgenden Iterationsschritten hinreichend klein ist.

Numerische Ermittlung der kritischen Beullast

Zur numerischen Ermittlung der kritischen Beullast von Kuppelsegmenten kommt in dieser Arbeit die Methode der fortgesetzten Approximation zur Anwendung ([31], [43]). Dieses funktioniert ähnlich wie das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verfahren zur Ermittlung des Einflusses der Theorie 2. Ordnung. Während mittels Energiemethode und Ansatzfunktionen die Beullast prinzipiell überschätzt wird, liefert das im Folgenden beschriebene Berechnungsverfahren einen Wertebereich, in welchem die gesuchte Lösung liegt und gibt somit Auskunft über die erreichte Genauigkeit. Außerdem bietet die Methode der fortgesetzten Approximation den Vorteil einer sehr rationellen Umsetzung, wenn ein effizientes Werkzeug zur Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen — wie etwa COLSYS ([1], [2]) — zur Verfügung steht.

Als Ausgangspunkt des Verfahrens dient eine Struktur mit gegebenen Schnittgrößen. Gesucht ist der kleinste Lastfaktor λ_{cr} für die inneren Normalkräfte, der labiles Gleichgewicht bewirkt. Dem zu untersuchenden Tragwerk wird im ersten Berechnungsschritt eine Zusatzverformung w^0 , welche nahezu beliebig gewählt werden kann, eingeprägt. Aus dieser Verformung und den gegebenen Normalkräften N lässt sich — es gelten hier die in den vorherigen Abschnitten verwendeten Vorzeichenkonventionen — für jede Stelle das Zusatzmoment $M^{II,0} = -N \cdot w^0$ berechnen. Aus dieser Momentenverteilung, dem Differentialgleichungssystem für die Biegelinie sowie den bekannten Verschiebungsrandbedingungen gehen neue Verformungen w^1 hervor. Das Minimum bzw. Maximum der Verhältnisse w^0/w^1 in verschiedenen, frei wählbaren Punkten der Struktur liefert die Schranken des Wertebereichs, in welchem der gesuchte Faktor der kritischen Beullast liegt. Die Genauigkeit des Ergebnisses lässt sich beliebig verbessern, indem in wiederholten Rechengängen die jeweils erhaltenen Verschiebungen w^i als Eingangswerte für den nächsten Iterationsschritt dienen. Zur Vermeidung unhandlich großer oder kleiner Zahlenwerte für w^i empfiehlt sich zwischen den Iterationsschritten die Skalierung der Verformung mit einem geeigneten Faktor. Das Verfahren liefert neben dem Faktor λ_{cr} in w^i auch die Beulform des Systems. Im Unterschied zu dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Verfahren für die Ermittlung der Deformationen und Schnittgrößen nach Theorie 2. Ordnung werden bei der Ermittlung der kritischen Beullast die Normalkräfte im Zuge der Iteration konstant gehalten. Die physikalische Grundlage der oben beschriebenen Vorgangsweise bildet die Tatsache, dass ein System bei labilem Gleichgewicht und Aufbringung einer kleinen Verschiebung seine ausgelenkte Lage beibehält.

Bei der Wahl der im ersten Berechnungsschritt angesetzten Auslenkung w^0 ist darauf zu achten, dass diese Komponenten der maßgebenden Beulform beinhaltet. Ist dies nicht der Fall, besteht die wenn auch aufgrund unvermeidlicher Rundungsfehler unwahrscheinliche Möglichkeit, dass das Verfahren eine nicht maßgebende Form als Ergebnis liefert. Schlechte Konvergenz ist zu erwarten, wenn die Faktoren $\lambda_{cr,1}$ und $\lambda_{cr,2}$ der ersten beiden Beulformen nahe beieinander liegen. Konvergenzprobleme können außerdem auftreten, wenn eine Beulform Nullstellen innerhalb des betrachteten Problembereichs aufweist.

Die Beschreibung weiterer Fälle für die das Verfahren keine korrekten bzw. ungenaue Lösungen liefert, finden sich in [31].

5.5.3 Beispiel: Beullast eines linear elastischen Vieleckkuppelsegments

Den folgenden beiden Beispielen liegt ein Vieleckkuppelsegment mit den schon in Abschnitt 5.5.1 verwendeten Außenabmessungen zu Grunde. Die Querschnittshöhe des Segments ist konstant und beträgt 4cm , der Elastizitätsmodul des als linear elastisch angenommenen Materials $30000\text{MN}/\text{m}^2$.

Untersucht wird der Einfluss unterschiedlicher Verschiebungsrandbedingungen und Steifigkeiten E_θ in Ringrichtung. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, hängt E_θ vom Verhältnis zwischen Fugen- und Segmentbreite ab und ändert sich in radialer Richtung. Um die Interpretation der Ergebnisse zu vereinfachen, liegt den nachfolgenden Berechnungen hingegen ein entlang der Segmentränder konstanter Verlauf von E_θ zu Grunde.

Als äußere Einwirkungen sind eine Flächenlast $p_0 = 0.003\text{MN}/\text{m}^2$, die senkrecht zur Oberfläche nach innen wirkt, sowie $g_0 = 0$, $H_a = -0.01\text{MN}/\text{m}$, $M_{ra} = 0$ und $L = 0$ gegeben. Daraus erhält man den Verlauf der radialen Normalkraft, auf welchen sich im Folgenden die Faktoren der kritischen Beullast beziehen.

Schief symmetrische Beulformen eines Vieleckkuppelsegments

Die in Abschnitt 2.1 beschriebene Vieleckkuppel besteht aus einem von Fugen ungestörten Mittenteil sowie daran anschließenden, als Segmente bezeichneten Teilen. Wenn der Radius des Mittenteils im Vergleich zum Gesamtdurchmesser der Kuppel klein ist, lässt sich die Untersuchung der Stabilität einer solchen Vieleckkuppel auf eine Betrachtung der Segmente beschränken. Auf diese Weise stellt sich die Kuppel als Ansammlung einander überkreuzender, am Scheitel verbundener Bögen dar.

Für einen an beiden Enden gelenkig gelagerten Bogen ergibt sich die kleinste Beullast aus einer bezüglich des Bogenscheitels schief symmetrischen Beulfigur [43]. Bei Untersuchung nur einer Bogenhälfte, d.h. eines Segments, liegen am

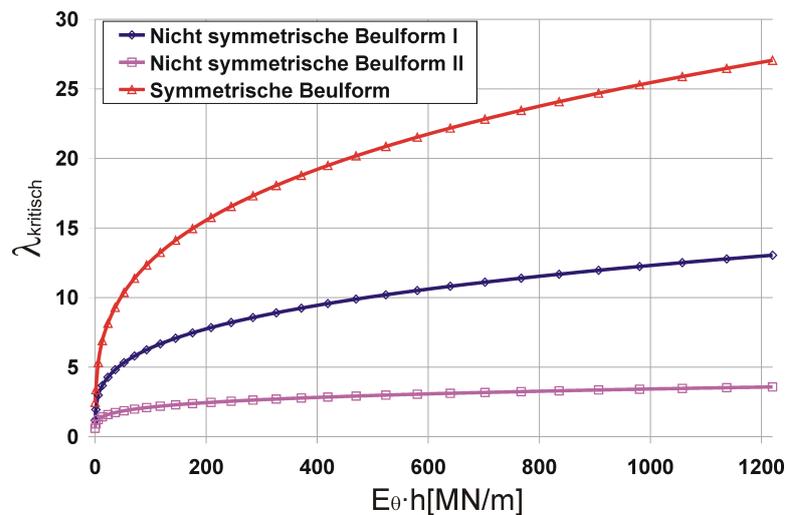


Abbildung 5.17: λ_{cr} für unterschiedliche Steifigkeiten E_θ in Umfangsrichtung und Lagerungsbedingungen

Bogenfußpunkt bzw. -scheitel die Verschiebungsrandbedingungen $w = v = \mathbf{M}_\varphi^I = 0$ bzw. $w = \mathbf{M}_\varphi^I = 0$ vor.

Bei einer schief symmetrischen Beulform treten am Bogenscheitel horizontale Verschiebungen auf. In welchem Ausmaß sich diese ausbilden können, hängt davon ab, wie sehr die um den Schalenmittenteil angeordneten Segmente diesen an Verschiebungen in horizontaler Richtung hindern.

Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass der Einfluss der Segmente auf die horizontale Verschieblichkeit des Mittenteils vernachlässigt werden kann. Abbildung 5.18 zeigt den normierten Verlauf der Verformungen w zwischen Segmentaußen- ($s = 5.2m$) und Innenrand ($s = 0m$) für unterschiedliche Steifigkeiten in Ringrichtung. Diese variieren zwischen 0 und dem maximal möglichen Wert von $E_\theta h = 30000 \cdot 0.04 = 1200MN/m$. Man sieht, dass sich mit steigender Steifigkeit E_θ die Amplitude der Beulfigur in Richtung des inneren Segmentrandes verschiebt. Dies folgt aus der Tatsache, dass die in den Segmentfugen aktivierbaren Normalkräfte N_θ um so mehr einer Verschiebung w Widerstand leisten, je besser beide in ihrer Wirkungsrichtung übereinstimmen. Der zentrumsnahe Segmentrand, wo beide Größen einen rechten Winkel einschließen, bildet in dieser Hinsicht eine Schwachstelle. In Abbildung 5.17 zeigt die blaue Kurve den Verlauf des Faktors der kritischen Beullast für den betrachteten Fall. Ohne Steifigkeit in Umfangsrichtung ergibt sich $\lambda_{cr} = 1.19$.

Bei der hier untersuchten Vieleckkuppel beträgt das Verhältnis von Radius des Mittenbereichs zu Radius der Kreisscheibe $1.53/6.73 = 0.23$. Es stellt sich die Fra-

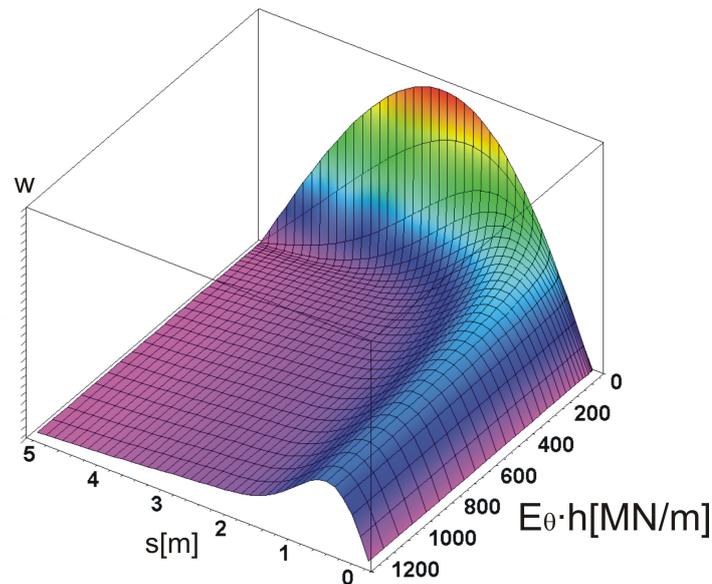


Abbildung 5.18: Schief symmetrische Beulformen eines Vieleckkuppelsegments bei unterschiedlichen Steifigkeiten E_θ in tangentialer Richtung

ge, in welcher Weise der Mittenteil der Vieleckkuppel deren Beullast beeinflusst. Bei Vernachlässigung der Torsionssteifigkeit der Kuppelsegmente sowie der Verformbarkeit des Mittenteils lässt sich dieser als starre Verbindung zwischen zwei Bogenhälften bzw. Segmenten modellieren. Da wieder eine schief symmetrische Beulform als maßgebend vorausgesetzt werden soll, ergibt sich an der Schnittstelle zwischen Segment und Mittenteil bei Vorliegen einer horizontalen Meridiantangente die Verschiebungsrandbedingung $w = dw/ds \cdot r_{0,M}$. Hierbei repräsentiert $r_{0,M}$ den Radius des Mittenteils (siehe Abbildung 5.1).

Aus Abbildung 5.19 wird ersichtlich, welchen Einfluss der Radius $r_{0,M}$ des Mittenbereichs auf den Beullastfaktor λ_{cr} eines Segments mit den oben beschriebenen Abmessungen und Lasten hat. Die Berechnung erfolgt mit $E_\theta = 0$ und liefert daher für $r_{0,M} = 0m$ den auch zuvor erhaltenen Wert von $\lambda_{cr} = 1.19$. Die Kurve fällt bei kleinen Radien $r_{0,M}$ stark ab, um schließlich einem Grenzwert, der etwa bei $\lambda_{cr} = 0.2$ liegt, zuzustreben.

Mit dem Innenradius $r_{0,M} = 1.53m$, der dem der untersuchten Vieleckkuppel entspricht, erhält man für unterschiedliche Ringsteifigkeiten E_θ den in Abbildung 5.17 als lila Kurve dargestellten Verlauf der kritischen Beullastfaktoren. Wie sich zeigt, erreichen diese nur etwa 30% der unter Vernachlässigung des Schalenmittenteils ermittelten Werte. Ein Vergleich der Beulformen, die sich ohne (siehe Abbildung 5.18) bzw. unter Berücksichtigung des Schalenmittenteils (siehe Ab-

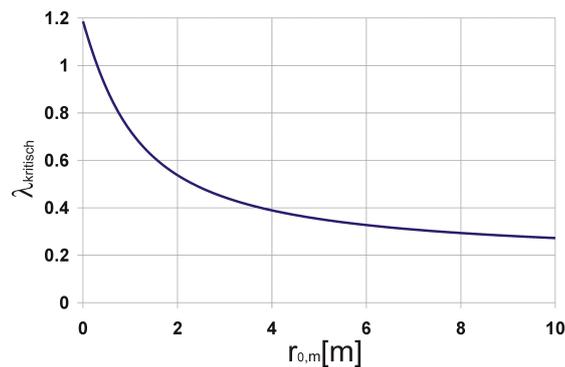


Abbildung 5.19: Abnahme des Beullastfaktors mit Zunahme des Radius des Mittenteils

bildung 5.20) ergeben, zeigt deutlich den starken Einfluss der Verschiebungsrandbedingungen am schmalen Segmentende.

In beiden Fällen kommt es zu einer starken Veränderung der Beulformen bei kleinen Werten für E_θ . Analog dazu weisen die entsprechenden λ_{cr} -Kurven der Abbildung 5.17 große Steigungen im Anfangsbereich auf. Dies zeigt, dass Fugematerialien mit kleiner Steifigkeit das Tragverhalten der Gesamtstruktur stark beeinflussen können.

Symmetrische Beulformen eines Vieleckkuppelsegments

Bei der bisherigen Betrachtung der asymmetrischen Beulformen von Vieleckkuppeln wurde der Einfluss der Torsionssteifigkeit der Kuppelsegmente sowie deren Widerstand gegen eine horizontale Verschiebung des Schalenmittenteils vernachlässigt. Dies führt zu einer Unterschätzung der tatsächlich vorhandenen Tragfähigkeit. Aus diesem Grund soll nun der Fall mit unverdrehbar und unverschieblich gehaltenem Schalenmittenteil untersucht werden. An den inneren Segmenträndern liegen somit die Verschiebungsrandbedingungen $v = dw/ds = 0$ vor. Wie der Verlauf des kritischen Beullastfaktors — in Abbildung 5.17 als rote Kurve dargestellt — zeigt, bewirken diese eine beträchtliche Steigerung der Traglast. In Abbildung 5.21 lässt sich erkennen, wie mit zunehmender Ringsteifigkeit E_θ die Anzahl der Halbwellen der Beulformen zunimmt.

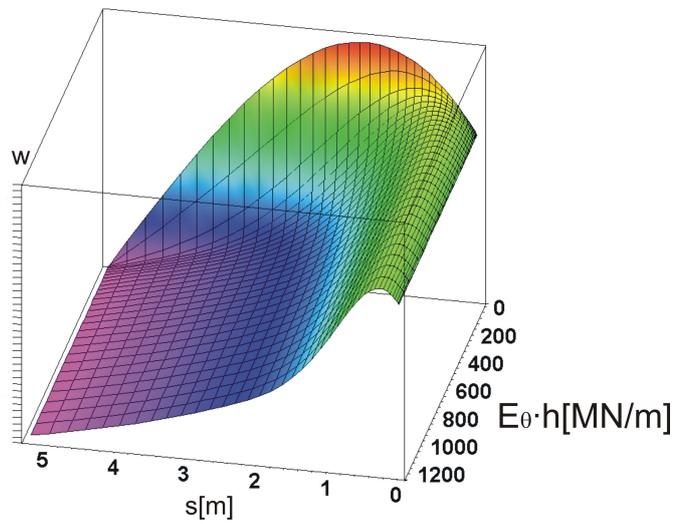


Abbildung 5.20: Schief symmetrische Beulformen eines Vieleckkuppelsegments bei unterschiedlichen Steifigkeiten E_θ in tangentialer Richtung unter Berücksichtigung des Schalenmittenteils

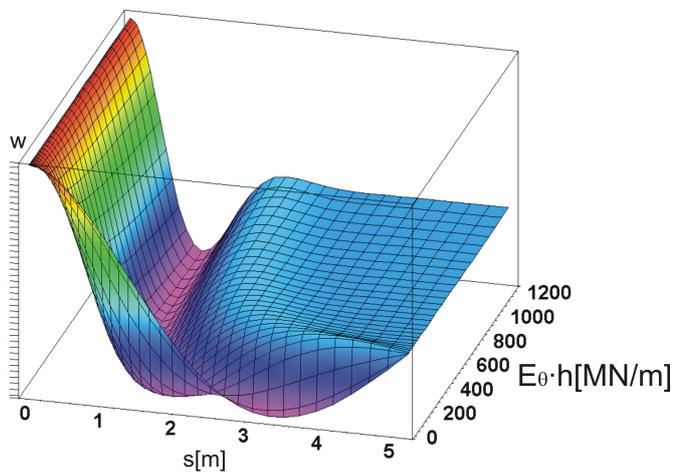


Abbildung 5.21: Symmetrische Beulformen eines Vieleckkuppelsegments bei unterschiedlichen Steifigkeiten E_θ in tangentialer Richtung

5.5.4 Querschnittsdimensionierung unter Berücksichtigung der elastischen Beullast der Schalensegmente

Wie in Abschnitt 5.5.2 erläutert, entscheidet bei der Bemessung der Vieleckkuppelsegmente die Wahl der horizontalen Randlast H_a über die Eigenschaften der Struktur in Bezug auf Gebrauchstauglichkeit und Tragsicherheit.

Bei linear elastischem Materialverhalten bilden daher die unter den Zusatzlasten auftretende maximale Verformung sowie die Beulsicherheit Kriterien zur Wahl von H_a . Im Falle physikalischer Nichtlinearität tritt als zusätzliche Bedingung die Sicherheit gegen Versagen einzelner Querschnitte auf. Als Zusatzlasten sind die nach dem Umformungsprozess zu erwartenden Einwirkungen gemäß Norm zu kombinieren und auf Gebrauchslast- bzw. Traglastniveau anzusetzen.

Im Folgenden wird der Einfachheit halber als einziges Bemessungskriterium die Sicherheit gegen Beulen herangezogen. Eine zusätzliche Berücksichtigung der Gebrauchstauglichkeit ließe sich auf ähnliche Weise bewerkstelligen. Der vorgeschlagene Algorithmus besteht aus zwei Teilen: Zunächst wird ein Bereich $H_{a,\min} - H_{a,\max}$ ermittelt, sodass dessen Randwerte die Bedingung $\lambda_{cr}(H_{a,\min}) < \lambda_{cr,Ziel} < \lambda_{cr}(H_{a,\max})$ erfüllen. Hierbei bezeichnet $\lambda_{cr,Ziel}$ den angestrebten Beullastfaktor. Anschließend erfolgt durch Anwendung der Bisektionsmethode die Verkleinerung des Lösungsintervalls bis schließlich $H_{a,\max} - H_{a,\min} = 0$ hinreichend genau zutrifft. Der Startwert für $H_{a,\min}$ ist so festzulegen, dass die resultierenden Momente M_φ ihrem Wirkungssinn nach mit der angestrebten Verkrümmung der Segmente übereinstimmen. Die Ermittlung von $H_{a,\max}$ kann durch wiederholte Verdopplung des Wertes für $H_{a,\min}$ und Berechnung des dazugehörigen Beullastfaktors erfolgen.

Bei der schrittweisen Suche nach $H_{a,\max}$ bzw. nach jeder Intervallhalbierung müssen die jeweiligen Schnittgrößen ermittelt, eine Bemessung mit den sich ergebenden Momenten M_φ durchgeführt und der kritische Beullastfaktor berechnet werden. Bei physikalisch nichtlinearen Problemen kann dies zu einem beträchtlichen Rechenaufwand führen.

Bemessung eines linear elastischen Vieleckkuppelsegments auf Beulen

Dem folgenden Beispiel liegt ein Vieleckkuppelsegment mit den in Abbildung 5.11a gegebenen Abmessungen zu Grunde. Der E-Modul des als linear elastisch angenommenen Segmentmaterials beträgt $30000MN/m^2$. Im umgeformten Grundzustand, dessen Geometrie dem in Abschnitt 5.5.1 behandelten Streifen entspricht, sei nur die gesuchte horizontale Randlast H_a vorhanden. Als Zusatzlast wirkt entlang der Segmentachse eine konstante, senkrecht zur Schalenmittelfläche gerichtete Linienlast von $0.002MN/m$, die in einer Normalkraft von $N_\varphi = -0.0153MN$ resultiert. Das Vieleckkuppelsegment soll so bemessen sein,

dass bei Vorhandensein der beiden genannten Einwirkungen Beulen auftritt. Es wird dabei zunächst vorausgesetzt, dass sich eine bezüglich der Schalenmitte symmetrische Beulform mit den in 5.44 gegebenen Verschiebungsrandbedingungen einstellt. Bei einer Unterteilung des Segments in fünf gleich lange Bereiche jeweils konstanter Querschnittshöhe liefert der im vorherigen Abschnitt beschriebene Algorithmus die in Tabelle 5.3 aufgelisteten Querschnittshöhen.

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	h [cm]
1	0.00	1.04	3.581
2	1.04	2.08	2.886
3	2.08	3.12	2.588
4	3.12	4.16	2.035
5	4.16	5.20	1.485

Tabelle 5.3: Mittels Bemessungsalgorithmus für gegebene Beullast ermittelte Querschnittshöhen eines Vieleckkuppelsegments

Zur Überprüfung der gewonnenen Resultate dient eine Vergleichsrechnung mit dem FEM-Programm ABAQUS. Abbildung 5.22a zeigt das Modell im ebenen Grundzustand. Die gelben Quadrate markieren die Schnittebenen, welche die Struktur in Abschnitte mit konstanter Querschnittshöhe unterteilen. Um den Einfluss des als starr angenommenen Mittenteils berücksichtigen zu können, werden die Hälften zweier gegenüberliegender Segmente betrachtet. Die strichpunktierte Linie markiert die Symmetrieachse des Modells. Die schmalen Innenränder (in der Abbildung rot markiert) beider Segmenthälften bilden zusammen mit dem als „RP-Mid“ bezeichneten Bezugspunkt einen Starrkörper (symbolisiert durch die rote Verbindungslinie). Teilbild *b* zeigt die verwendeten Verformungsrandbedingungen. Der Hebungsprozess wird durch die Verschiebung der Segmentaußenrändern um $0.3911m$ (hier als Pfeile symbolisiert) in Richtung Schalenzentrum bewirkt (anfänglich unterstützt von einer kleinen Flächenlast). Am Bezugsknoten für den starren Mittelteil „RP-Mid“ liegt eine Sperrung aller Verdrehungsfreiheitsgrade sowie des Verschiebungsfreiheitsgrades in horizontaler Richtung vor. In Teilbild *c* sieht man die für beide Segmente gewählte Netzteilung. Zum Einsatz kamen Finite Elemente mit linearem Verschiebungsansatz, die es ermöglichen, große Dehnungen zu berücksichtigen. Abbildung 5.22d zeigt die Zusatzlast. Es handelt sich dabei, da nur eine Segmenthälfte betrachtet wird, um eine transversale Randlast P von $0.001MN/m$.

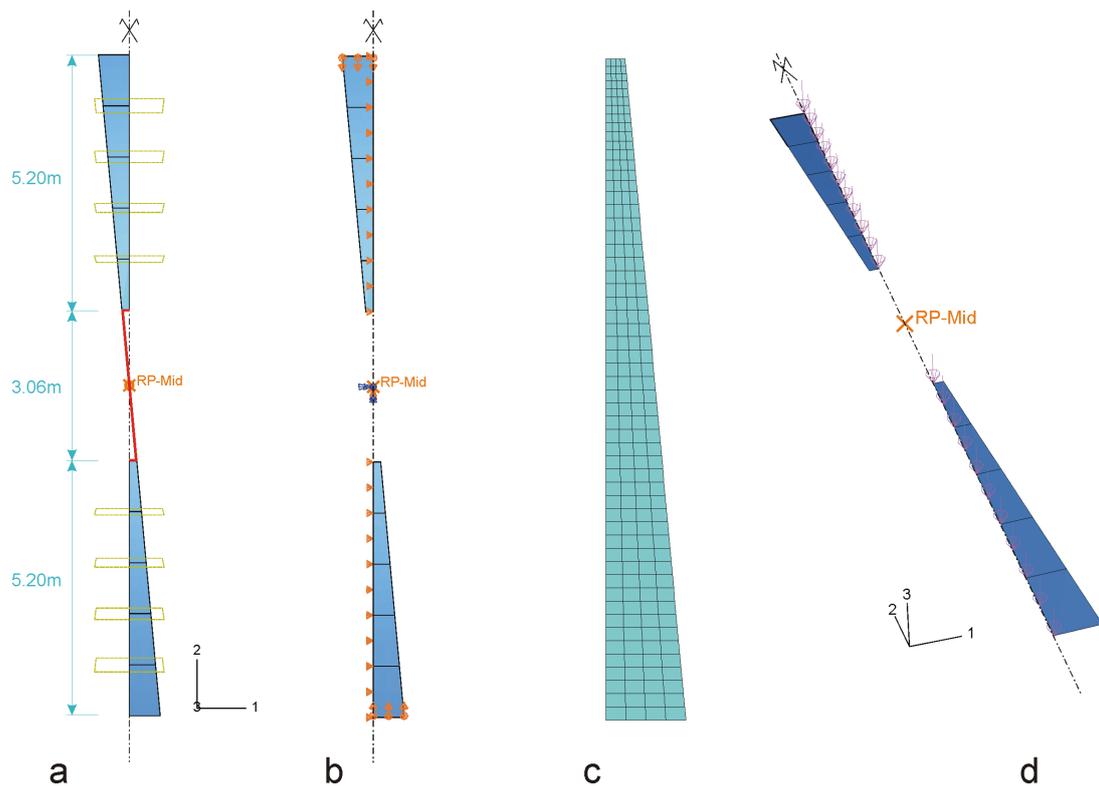


Abbildung 5.22: Gegenüberliegende Segmenthälften einer Vieleckkuppel im ebenen Anfangszustand. *a)* Darstellung der Abmessungen, *b)* Verschiebungsrandbedingungen, *c)* Netzteilung und *d)* Zusatzlast

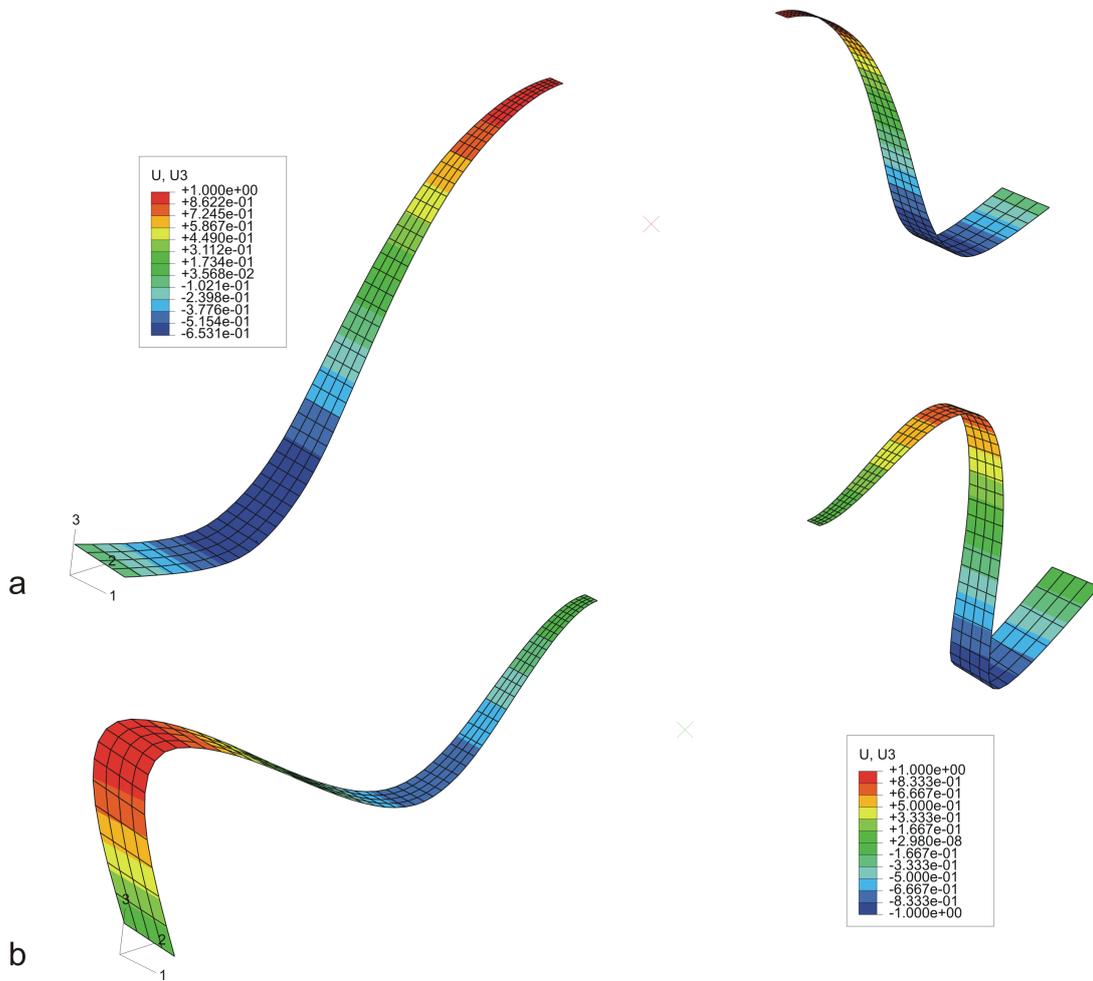


Abbildung 5.23: a) Erste und b) zweite Eigenform der gekoppelten Segmenthälften im umgeformten Zustand und unter der Wirkung konstanter Normalkraft

Den ersten Schritt der Berechnung bildet die Umformung der ebenen, gekoppelten Segmenthälften in ihre gekrümmte Zielform. Danach erfolgt unter Berücksichtigung der transversalen Last P die Berechnung der ersten beiden Eigenformen. Abbildung 5.23 zeigt die erste und zweite Beulform. Die Farbverläufe geben Auskunft über die Verschiebung in vertikaler Richtung. ABAQUS liefert als Beullastfaktor für P die zu den ersten beiden Eigenformen gehörigen Werte 1.0068 und 2.4396. Der kritische, erste Beullastfaktor stimmt sehr genau mit dem erwarteten Resultat von 1.0 überein. Die Tatsache, dass die ersten beiden Beullastfaktoren stark unterschiedlich ausfallen, deutet auf imperfektionsinsensitives Strukturverhalten hin [4]. Die anschließende, tatsächliche Aufbringung von P mittels Bogenlängenverfahren ergibt den in Abbildung 5.24 ablesbaren Zusammenhang zwischen Lastfaktor für P und Verformungsweg der Gesamtstruktur. Ab 80% des Zielwertes von P zeigen sich Verformungen, deren Ursache in der Abweichung zwischen umgeformter Struktur und Kreisbogenform liegt. Als maximalen Lastfaktor erhält man $\lambda = 0.9924$. Nach Überschreiten des Maximums fällt λ stetig ab. Es liegt also der Fall instabiler Nachbeulverhaltens vor.

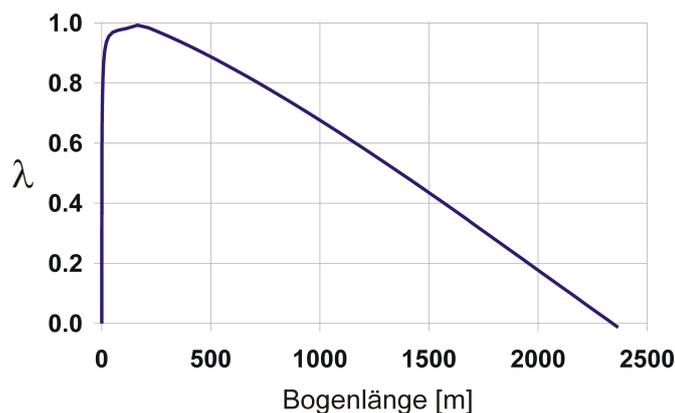


Abbildung 5.24: Abhängigkeit zwischen Lastfaktor und Gesamtverformung des Systems

Im nächsten Schritt soll untersucht werden, ob die Annahme einer symmetrischen ersten Eigenform auch dann noch zutrifft, wenn man die Torsionssteifigkeit der an den Mittenteil anbindenden Schalensegmente vernachlässigt. Um diesen Fall zu simulieren, wird die Sperre des Verdrehungsfreiheitsgrades des Mittenteils bzw. des Bezugspunktes „RP-Mid“ um die Achse quer zur Segmentlängsrichtung aufgehoben. Die Sperrung der horizontalen Verschiebung im Punkt „RP-Mid“ bleibt allerdings aufrecht. Als kritische Lastfaktoren in Bezug auf die Einwirkung P für die ersten beiden Eigenformen liefert ABAQUS die Ergebnisse $\lambda_1 = 1.0068$ wie zuvor bzw. $\lambda_2 = 1.3476$. Wie Abbildung 5.25 zeigt, bewirkt die Lösung der

Verdrehungssperre des Mittenteils keine Änderung der ersten Eigenform. Es verkleinert sich jedoch die Differenz der ersten beiden Eigenwerte, was sich ungünstig auf die Imperfektionsempfindlichkeit der Struktur auswirkt.

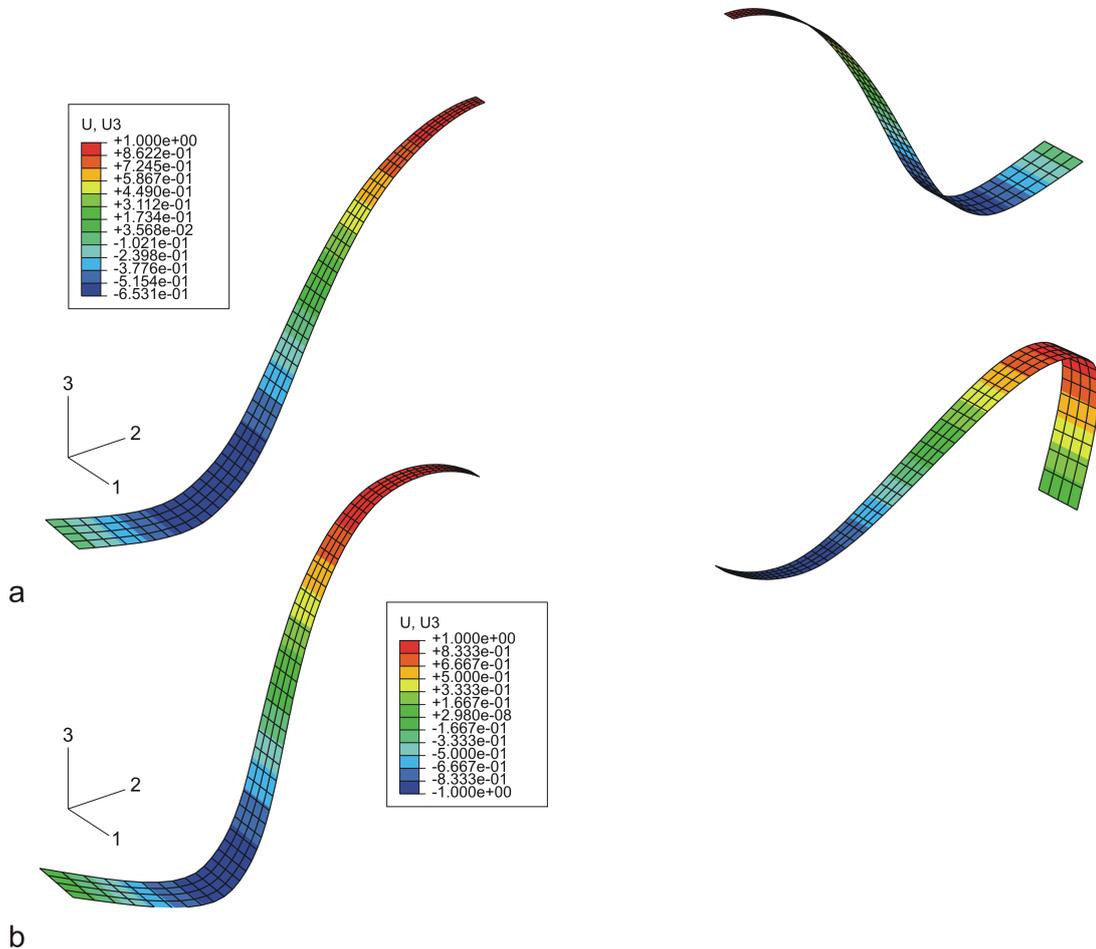


Abbildung 5.25: a) Erste und b) zweite Eigenform der gekoppelten Segmenthälften im umgeformten Zustand und unter der Wirkung konstanter Normalkraft

5.6 Dimensionierung der Kuppelsegmente unter Zugrundelegung nichtlinearen Materialverhaltens

Materialien wie Stahlbeton oder glasfaserbewehrtes Eis zeigen schon ab relativ geringen Beanspruchungen deutliche Abweichungen von dem in den vorausgegangen Abschnitten angenommenen linearen Materialverhalten. Für die Bemessung der Vieleckkuppelsegmente ist es in diesen Fällen erforderlich, physikalisch nichtlineare Berechnungen durchzuführen. Die Grundlage dazu stellt ein geeignetes Materialmodell dar, welches die wesentlichen nichtlinearen Effekte erfasst. In Finite Elemente Programmen wie z.B. ABAQUS steht eine reichhaltige Palette solcher Modelle, die zum Teil speziell auf die Eigenschaften von Stahlbeton zugeschnitten sind, zur Auswahl. Aufgrund ihrer Komplexität bzw. Fähigkeit bestimmte physikalische Sachverhalte abzubilden, lassen sich solche Materialmodelle grob in folgende drei Klassen einteilen:

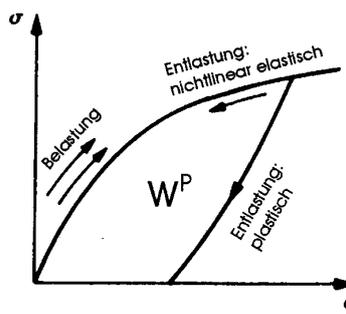


Abbildung 5.26: Gegenüberstellung von nichtlinear elastischem und plastischem Materialverhalten [46]

1. Nichtlinear elastische Modelle: Diese standen am Beginn der Entwicklung nichtlinearer Materialmodelle. Mit ihrer Hilfe lässt sich das Verhalten von Werkstoffen mit beliebiger Arbeitslinie simulieren. Be- und anschließende Entlastung erfolgen, wie in Abbildung 5.26 dargestellt, entlang des selben Spannungs-Dehnungs-Pfades. Dies steht im Widerspruch zum Verhalten von z.B. Beton, wo durch Druckbeanspruchung plastische Verformungen entstehen, die sich nach völliger Entlastung als bleibende Dehnungen bemerkbar machen. Aus diesem Grund eignen sich nichtlinear elastische Modelle für plastische Materialien nur dann, wenn davon ausgegangen werden kann, dass es im Zuge der Berechnung zu keiner Belastungsumkehr kommt.

2. Elasto-plastische Modelle: Mit ihrer Hilfe lassen sich plastische Dehnungen berücksichtigen und unterschiedliche Verhaltensweisen bei Be- und Entlastung vorgeben. Die Entlastung erfolgt bei Plastizitätsmodellen entlang einer Geraden, deren Steigung dem Anfangs-E-Modul E_0 entspricht. Für druckbeanspruchten Beton stimmt dies nicht exakt mit der Wirklichkeit überein. In Experimenten zeigt sich ein Entlastungspfad mit im Vergleich zum Anfangs-E-Modul geringerer Steigung (siehe Abbildung 5.27a). Die Ursache dafür liegt in der Schädigung des Materials. Die Teilbilder 5.27b und c zeigen in abstrahierter Form eine Gegenüberstellung der Mechanismen bei elastisch-plastischem Materialverhalten mit und ohne Schädigung. Gravierende Abweichungen von experimentellen Befunden liefern reine Plastizitätsmodelle bei sich schließenden Rissen: Sie überschätzen die Steifigkeit senkrecht zur Rissrichtung, da bei Entlastung — gleichbedeutend mit kleiner werdender Rissöffnungsbreite — sofort der Anfangs-E-Modul in Ansatz kommt. In dieser Situation liefern nichtlinear-elastische Modelle realitätsnähere Lösungen.
3. Elastisch-plastische Modelle mit Schadensakkumulation: Solche Modelle erlauben die Berücksichtigung der Steifigkeitsabnahme bei Entlastung infolge Materialschädigung. Die derzeit dafür zur Verfügung stehenden Algorithmen weisen jedoch bei Vorliegen von mehraxialen Beanspruchungszuständen im Vergleich mit den ersten beiden Modelltypen den Nachteil schlechter Konvergenz und somit erhöhten numerischen Aufwands auf.

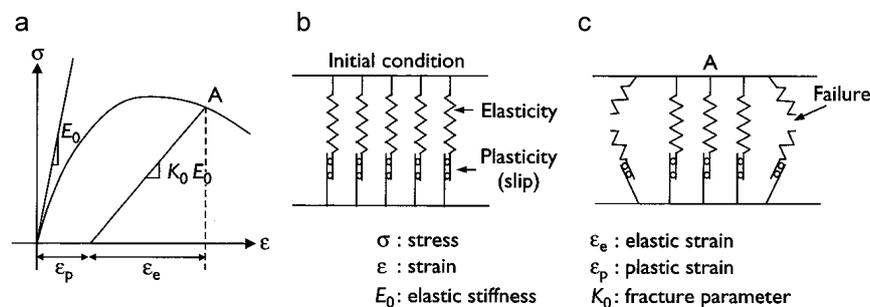


Abbildung 5.27: a) Idealisierte Arbeitslinie von Beton bei einaxialer Druckbeanspruchung mit Entlastung; symbolische Darstellung elastisch plastischen Verhaltens b) ohne bzw. c) mit Berücksichtigung von Schädigungsprozessen [29]

Bei der Auswahl des zu verwendenden Materialmodells gilt es, einen Kompromiss zwischen Wirklichkeitsnähe und Komplexität zu finden. Da komplizierte

Modelle eine Vielzahl an Materialkennwerten benötigen, die meistens nicht oder nur mit mangelhafter Genauigkeit zur Verfügung stehen, liefern einfachere Modelle oft Aussagen von gleicher Güte.

Im Rahmen der FE-Berechnungen mittels ABAQUS wird in dieser Arbeit für Beton bzw. Eis ein elastisch-plastisches Materialmodell verwendet, das sich zur Erfassung zweidimensionaler Beanspruchungszustände eignet. Detaillierte Ausführungen finden sich zu diesem als „smeared crack concrete model“ bezeichneten Algorithmus in [21]. Zur Simulation des Verhaltens eindimensionaler Strukturelemente, wie etwa der Baustahlbewehrung, kommt ebenfalls ein Plastizitätsmodell zur Anwendung. Nähere Informationen dazu finden sich in [21] im Abschnitt „classical metal plasticity model“.

Zur Erfassung der Variation der Materialzustände über die Querschnittshöhe verwendet ABAQUS geschichtete Finite Schalenelemente. Diese bestehen aus parallel zur Mittelfläche angeordneten Lagen, deren jeweiliger Dehnungszustand sich aus ihrer Entfernung von der Schalenmittelfläche sowie den Weggrößen an den Elementknotenpunkten ergibt [35]. Mit Hilfe dieser Dehnungen und dem einer Schicht zugewiesenen Materialmodell, bei dem es sich im Falle von z.B. Stahlbeton entweder um ein Beton- oder Stahlmodell handelt, lässt sich der jeweilige Spannungszustand in einer Elementlage ermitteln. Integration über die Elementhöhe liefert schließlich das Verhalten des Gesamtquerschnitts.

Um die Berechnungen möglichst einfach zu halten, finden bei den in dieser Arbeit angestellten physikalisch nichtlinearen Untersuchungen nur Kurzzeitphänomene Berücksichtigung. Zeitabhängige Effekte wie z.B. Kriechen werden nicht erfasst, ließen sich allerdings näherungsweise über den Weg modifizierter Materialarbeitslinien inkludieren. Eine weitere Vereinfachung stellt der Ausschluss entfestigenden Materialverhaltens dar. Der Grund dafür liegt im großen numerischen Aufwand, den die korrekte Erfassung solcher Beanspruchungssituationen bedingt. Besonders bei spröden Materialien wie Beton und Eis führt der abrupte Spannungsabfall nach der Zugfestigkeit f_t im Rahmen nichtlinearer Berechnungen oft zu Konvergenzproblemen. Dieser Schwierigkeit wird aus dem Weg gegangen, indem in den folgenden Berechnungen für die Zugfestigkeit $f_t \approx 0$ angesetzt wird.

5.6.1 Bemessung von Kuppelsegmenten unter Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens

Die Bemessung eines Kuppelsegments bei Vorliegen nichtlinearen Materialverhaltens kann analog zu der in Abschnitt 5.5.1 benutzten Vorgangsweise erfolgen. Den Ausgangspunkt bilden die Schnittgrößen M_φ und N_φ , welche vorab ermittelt werden können. Als Parameter zur Beschreibung der Struktur dienen Querschnittshöhe, Lage der Bewehrung sowie deren Orientierung relativ zur Seg-

mentlängsachse. Zusätzlich lässt sich die Unterteilung der Segmente in Bereiche konstanter Bewehrung vorsehen. Die abschnittsweise Berechnung der erforderlichen Bewehrungsmenge erfolgt mittels Bisektionsverfahren so, dass die vertikalen Verschiebungen an den Bewehrungsabschnittsgrenzen mit jenen der Zielform übereinstimmen.

Da am Segmentinnenrand — am Übergang zum Schalenmittenteil — die Neigung der Meridiantangente näherungsweise zu $\varphi_i = 0$ angenommen werden kann und die Vertikalverschiebung als bekannt vorliegt, erfolgt von dort ausgehend und nach außen fortschreitend die Bestimmung der Bewehrungsmenge bzw. Verformungen entlang des Vieleckkuppelsegments. Bei Unterteilung des Segments in mehrere Abschnitte gilt folgende, zu den Gleichungen 5.15 analoge Beziehung zwischen den Weggrößen w_i und φ_i bzw. w_{i+1} und φ_{i+1} am Abschnittsanfang bzw. -ende:

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= \varphi_i - \int_0^{l_i} \varkappa_{(M_\varphi, N_\varphi)} dl \\ w_{i+1} &= w_i - \int_0^{l_i} \sin \left(\varphi_i - \int_0^l \varkappa_{(M_\varphi, N_\varphi)} d\lambda \right) dl \quad .\end{aligned}\tag{5.49}$$

Bei bekannten Krümmungen $\varkappa_{(M_\varphi, N_\varphi)}$ lässt sich obige Gleichung mittels numerischer Integration leicht lösen. Infolge des nichtlinearen Materialverhaltens ergibt sich allerdings die Krümmung $\varkappa_{(M_\varphi, N_\varphi)}$ im Gegensatz zum linear elastischen Fall als nicht in expliziter Form darstellbare Funktion der Schnittgrößen M_φ und N_φ . Zur Ermittlung von Querschnittsdehnung ε_0 und Krümmung \varkappa kommt daher das Newton-Iterationsverfahren in der unten beschriebenen Form zur Anwendung.

Um jenen Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_0 \quad \varkappa]^T$ zu finden, für welchen Gleichgewicht zwischen inneren Schnittgrößen $\mathbf{S}_I = [\mathbf{N}_I \quad \mathbf{M}_I]^T$ und äußeren Schnittgrößen $\mathbf{S}_A = [\mathbf{N}_\varphi \quad \mathbf{M}_\varphi]^T$ vorliegt, sind folgende Rechenschritte wiederholt auszuführen:

1. Ermittlung der Ungleichgewichtskräfte für den aktuellen Iterationsschritt:

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_I^j \quad .\tag{5.50}$$

Hier bezeichnet der Superskript j den Berechnungsschritt in dem die jeweilige Größe ermittelt wurde. Im ersten Rechenschritt gilt $\mathbf{S}_I^1 = [0 \quad 0]^T$. In späteren Iterationsschritten dient der Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}^{j-1}$ zur Ermittlung von \mathbf{S}_I^j .

Aufgrund der Idealisierung der Schalensegmente als gekrümmte Stabzüge beschränkt sich die Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität auf ein-axiales Materialverhalten. Die Dehnung ε einer Schicht in beliebigem Ab-

stand z vom Querschnittsschwerpunkt ergibt sich wie aus Abbildung 5.28 ersichtlich zu

$$\varepsilon(z, \boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_0 - \varkappa z \quad . \quad (5.51)$$

Bei Annahme nichtlinear elastischen Materialverhaltens lässt sich bei gegebener Arbeitslinie die Spannung $\sigma(z, \boldsymbol{\varepsilon})$ sofort aus $\varepsilon(z, \boldsymbol{\varepsilon})$ bestimmen. Die inneren Schnittgrößen M_i und N_i erhält man durch Integration über die Querschnittshöhe aus

$$\mathbf{S}_I^j = \begin{bmatrix} N_I^j \\ M_I^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(z, \varepsilon^{j-1}) dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma(z, \varepsilon^{j-1}) z] dz \end{bmatrix} \quad . \quad (5.52)$$

Unterschreitet der Betrag von \mathbf{R}^j eine vorher festzusetzende Genauigkeitschranke, bricht die Iterationsschleife an dieser Stelle ab und $\boldsymbol{\varepsilon}^{j-1}$ repräsentiert den gesuchten Verzerrungszustand.

Für den Fall, dass die äußeren Einwirkungen \mathbf{S}_A die Tragfähigkeit des gegebenen Querschnitts überschreiten, existiert keine Lösung. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, die maximale Anzahl der Iterationen zu begrenzen. Ein Überschreiten dieser Anzahl von Durchläufen entspricht somit einem Querschnittsversagen.

2. Berechnung eines Verzerrungsinkrements zur Verkleinerung des Kräfte-
residuums \mathbf{R}^j : Es gilt

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j = (\mathbf{K}^j)^{-1} \mathbf{R}^j \quad , \quad (5.53)$$

wobei \mathbf{K}^j die Steifigkeitsmatrix im aktuellen Iterationsschritt darstellt. Diese lässt sich mit Hilfe der Gleichungen 5.52 aus

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^j &= \begin{bmatrix} dN_i/d\varepsilon_0 & dN_i/d\varkappa \\ dM_i/d\varepsilon_0 & dM_i/d\varkappa \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_0} dz & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varkappa} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_0} z \right] dz & \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varkappa} z \right] dz \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.54)$$

ermitteln. Der in obiger Formel vorkommende Differentialquotient $d\sigma/d\varepsilon$ ergibt sich als Funktion von z und $\boldsymbol{\varepsilon}^{j-1}$ aus der Steigung der gegebenen Arbeitslinie des nichtlinear elastischen Materials, die Ausdrücke $d\varepsilon/d\varepsilon_0$ bzw. $d\varepsilon/d\varkappa$ aus Formel 5.51. Zusätzlich zum Kräfte-
residuum \mathbf{R}^j ließe sich der Betrag des Verzerrungsinkrements $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j$ als Konvergenzkriterium heranziehen.

3. Berechnung der neuen Gesamtverzerrungen: Mit

$$\epsilon^j = \epsilon^{j-1} + \Delta\epsilon^j \quad (5.55)$$

erhält man die aktuellen Querschnittsverzerrungen, welche als Eingangswerte für den nächsten Iterationsschritt dienen.

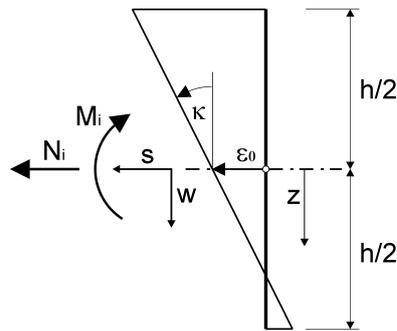


Abbildung 5.28: Verzerrungen ϵ und Krümmung κ in einem Balkenelement

In der Nähe der Lösung konvergiert das beschriebene Iterationsverfahren quadratisch. Bei Vorliegen entfestigenden Materialverhaltens empfiehlt es sich, um Konvergenzproblemen vorzubeugen, die Aufbringung der Einwirkungen \mathbf{S}_A in mehrere Lastschritte aufzuteilen.

Wie im Fall linear elastischen Materialverhaltens lässt sich durch die Wahl der am Segmentfuß angesetzten horizontalen Kraft H_a das Tragverhalten der Struktur unter später auftretenden Zusatzlasten steuern. Die Bestimmung von Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit gestaltet sich nun auf Grund der physikalischen Nichtlinearität schwieriger. Zur Berechnung der Eigenfrequenzen kann die Steifigkeitsmatrix der umgeformten Struktur herangezogen werden. Da sich die Steifigkeit in einem Punkt der Struktur in Abhängigkeit davon ob eine Be- oder Entlastungssituation vorliegt, stark ändern kann, liefert die Betrachtung der augenblicklichen Struktursteifigkeit manchmal irreführende Ergebnisse.

Ein Problem, das sich im Zusammenhang mit physikalisch nichtlinearen Strukturen auftut, betrifft die Verformungskapazität. Da die Kuppelsegmente beim Übergang von ebener Anfangs- zu gekrümmter Endlage erhebliche Verformungen erleiden, muss sichergestellt werden, dass beim späteren Auftreten von Zusatzlasten noch ausreichende Verformungskapazitäten bereit stehen, damit kein unangekündigter Bruch auftreten kann. Im Rahmen eines Bemessungsalgorithmus lässt sich dies durch die Vorgabe von Dehnungsbegrenzungen für die Randstauchungen der Querschnitte sicherstellen. Die Steuerung der Stauchung am gedrückten Querschnittsrand kann erforderlichenfalls über die Zugabe von Druckbewehrung

erfolgen. Zur Bestimmung der notwendigen Menge an Druckbewehrung, die am Druckrand auf die geforderte Grenzstauchung führt, lässt sich wiederum das Bisektionsverfahren heranziehen.

5.6.2 Bemessung eines Plattenstreifens für reine Biegung

Die Umsetzung des im vorherigen Abschnitt erläuterten Bemessungsalgorithmus erfolgte mit der Programmiersprache Fortran. Anhand eines Plattenstreifens von $1m$ Breite und $10.4m$ Länge sowie in Längsrichtung konstanter Bewehrung soll nun die Funktionstüchtigkeit des Algorithmus demonstriert werden. Zur Überprüfung der Ergebnisse wird eine Berechnung mittels FEM angestellt.

Als Randlast, welche die Umformung von ebener Anfangs- in gekrümmte Endlage bewirkt, dient ein an beiden Streifenenden angreifendes Moment von $0.002MNm/m$. Sonstige Einwirkungen wie z.B. Eigengewicht werden vernachlässigt. Der Streifen soll sich unter der Wirkung der Randmomente in einen Kreisbogenabschnitt mit Krümmungsradius $7.65m$ und einer Stichhöhe von $1.7m$ umformen. Die Höhe des Betonquerschnitts wird einheitlich mit $5cm$ festgelegt. Der Abstand zwischen Bewehrungsschwerpunkt und gedrücktem Rand beträgt $4.5cm$.

Bei spröden Materialien übertrifft die Rissbildung unter Zugbeanspruchung den Einfluss sämtlicher anderer physikalisch nichtlinearer Effekte. Aus diesem Grund wird für den Beton eine stark vereinfachte Arbeitslinie verwendet: Für $\varepsilon \geq 0$ gilt $\sigma = -f_c/100$. Dies entspricht dem gerissenen Zustand. Aus numerischen Gründen empfiehlt es sich bei Verwendung von ABAQUS als kleinsten Wert für die Betonzugfestigkeit etwa ein Prozent des Betrags der Druckfestigkeit vorzugeben. Für das Modell bedeutet dies eine Zugfestigkeit von $0.3MN/m^2$, die, um Konvergenzprobleme zu vermeiden, auch nach Erreichen der Rissdehnung beibehalten wird.

Im Druckbereich folgt eine Gerade mit Steigung $E_0 = 30000MN/m^2$, an die ab $\sigma = -30MN/m^2$ ein Bereich mit ideal plastischem Verhalten anschließt. Die Modellierung der Bewehrung erfolgt in der üblichen Weise mittels bilinearer Arbeitskurve. Der Anfangs E-Modul des Bewehrungsstahls beträgt $200000MN/m^2$, die Fließspannung $550MN/m^2$. Im Fließbereich weist die $\sigma - \varepsilon$ -Kurve eine Steigung von $E_h = 2000MN/m^2$ auf.

Aus den gegebenen Problemparametern bestimmt das Bemessungsprogramm eine erforderliche Bewehrungsmenge von $0.69cm^2/m$. Bei der Vergleichsrechnung mittels ABAQUS erfolgte die Modellierung des Plattenstreifens durch Schalenelemente mit linearem Verschiebungsansatz unter Berücksichtigung großer Dehnungen. Aus Symmetriegründen beschränkt sich das Modell auf eine Bogenhälfte. Unter Benutzung des Bogenlängenverfahrens wird das Randmoment so lange gesteigert, bis der Bogenscheitel die geplante Höhe von $1.7m$ erreicht. Auf diese Wei-

se erhält man bei einem Lastfaktor von 0.997 in Bezug auf das Randmoment eine vertikale Scheitelpunktverschiebung von 1.703m. Abbildung 5.29 zeigt als blaue Kurve den Zusammenhang zwischen Querschnittskrümmung und Moment. Aus der Zugfestigkeit von $-f_c/100$ erklärt sich in Abbildung 5.29 der steile Anstieg am Anfang der blauen $\lambda - \varkappa$ -Kurve. Dieser entspricht im Ursprung der Biegesteifigkeit bei linear elastischem Materialverhalten, repräsentiert durch die strichlierte, hellblaue Linie. Die rote Linie in Abbildung 5.29 gibt Auskunft über den Beanspruchungszustand der Biegebewehrung: Sie zeigt den Zusammenhang zwischen Querschnittskrümmung und der auf die Fließspannung f_y bezogenen Stahlspannung σ_s . Wie Bild 5.29 zeigt, fällt die Biegesteifigkeit des Stahlbetonquerschnitts nach Erreichen der Fließgrenze in der Bewehrung stark ab. Kleine Variationen von äußerer Beanspruchung oder Bewehrungsgehalt führen dann zu starken Veränderungen des Krümmungs- und somit Verformungszustandes. Möchte man die damit einhergehende Imperfektionsempfindlichkeit vermeiden, braucht es Zusatzmaßnahmen zur Stabilisierung der Schalensegmente. Im Fall einer Vieleckkuppel stützen sich die einzelnen Segmente gegenseitig: Im gekrümmten Zustand ergeben sich Ringdruckkräfte senkrecht zu den im Zielzustand fast geschlossenen, radial verlaufenden Fugen.

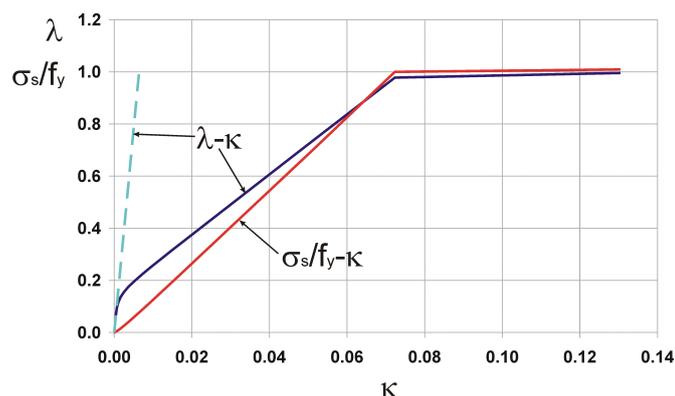


Abbildung 5.29: Zusammenhang zwischen Lastfaktor λ und Krümmung \varkappa bzw. bezogener Stahlspannung σ_s/f_y in der Längsbewehrung und \varkappa für einen Plattenstreifen unter reiner Biegung

5.6.3 Bemessung eines Plattenstreifens für veränderliches Moment

Um zu demonstrieren, welche Auswirkung ein über die Streifenlänge variierendes Moment auf die erforderliche Bewehrungsmenge bzw. die Verformungsfigur

im Endzustand hat, soll der im vorherigen Abschnitt untersuchte Plattenstreifen geänderten äußeren Einwirkungen ausgesetzt werden. Anstatt der Randmomente bewirken nun Verschiebungen der Bogenfußbereiche die Umformung der anfangs ebenen Platte. Der Hebungsprozess wird durch eine senkrecht zur Streifenmittelfläche gerichtete Flächenlast, die eine kleine Anfangsauslenkung bewirkt, eingeleitet. Im Endzustand soll sich an den Bogenfußpunkten eine horizontale, nach innen gerichtete Reaktionskraft von $H_a = 0.00129MN/m$ einstellen. Die entlang der Bogenachse auftretenden Momente M_φ verlaufen affin zur vertikalen Verschiebung und ergeben sich aus Multiplikation von Verformungsordinate und Randlast H_a .

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	$a_{s,erf.}$ [cm ² /m]
1	0.00	1.04	0.749
2	1.04	2.08	0.684
3	2.08	3.12	0.558
4	3.12	4.16	0.368
5	4.16	5.20	0.123

Tabelle 5.4: Mittels Bemessungsalgorithmus ermittelte Bewehrungsflächen eines Plattenstreifens

Das Bemessungsprogramm liefert bei Unterteilung des Streifens in fünf Bewehrungsbereiche die in Tabelle 5.4 ersichtlichen Bewehrungsmengen. Hierbei bezeichnet s den Abstand vom Bogenscheitel im unverformten Zustand. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ergibt sich im Zielzustand ein entlang der einzelnen Abschnitte variierender Krümmungsverlauf: Da die größere Biegebeanspruchung jedes Bewehrungsabschnitts am bogenscheitelnahen Ende auftritt, ergibt sich dort jeweils ein Krümmungsmaximum. Dies veranschaulicht Tabelle 5.5 mit den für die Endpunkte jedes Bewehrungsabschnitts berechneten Krümmungen. Vor allem in Abschnitt fünf, der die größte Momentenvariation aufweist, kommt es mit $\varkappa = 1.591$ zu einer starken Lokalisierung der Krümmungen und damit einhergehend zu großen Dehnungen.

Eine mit den Ergebnissen des Bemessungsprogramms durchgeführte Vergleichsrechnung mittels ABAQUS liefert den in Abbildung 5.30 als blaue Kurve dargestellten Krümmungsverlauf entlang des Plattenstreifens. Es lässt sich eine Lokalisierung der Krümmungen in den Endbereichen der Bewehrungsabschnitte feststellen: je ungleichmäßiger der Momentenverlauf im jeweiligen Abschnitt, desto

Abschnitt	bei s [m]	\varkappa_i	bei s [m]	\varkappa_k
1	0.00	0.152	1.04	0.072
2	1.04	0.303	2.08	0.066
3	2.08	0.458	3.12	0.056
4	3.12	0.718	4.16	0.034
5	4.16	1.591	5.20	0.000

Tabelle 5.5: Krümmungen im umgeformten Zustand an den Bewehrungsabschnittsgrenzen eines Plattenstreifens

ausgeprägter die Krümmungsspitze. Da die Momentenlinie sich affin zu den vertikalen Verformungen ausbildet, liegt im ersten Abschnitt eine relativ homogene Krümmungsverteilung vor, während in Abschnitt fünf die größte Krümmungsspitze auftritt. Dort ergibt sich die Dehnung der Bewehrung zu 8.7%, einem Wert, bei dem der Bewehrungsstahl in Wirklichkeit schon längst versagt hätte. Die FEM-Berechnung liefert im umgeformten Endzustand eine Stichhöhe von $1.755m$ was einem relativen Fehler von 3.2% entspricht.

Zur Beurteilung der Stabilität der Struktur im umgeformten Zustand, kann ähnlich wie im linear elastischen Fall jene zusätzlich Flächenlast ermittelt werden, die zu instabilem Gleichgewicht führt. Für das vorliegende Rechenmodell weist ABAQUS eine nach innen gerichtete Druckspannung von $p = 7.21kN/m^2$ als kritische Beullast aus.

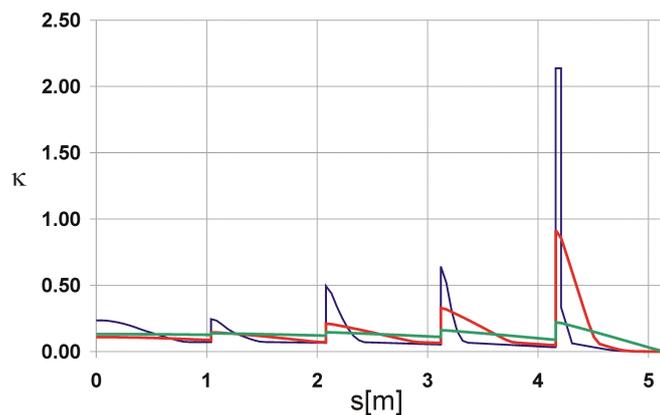


Abbildung 5.30: Krümmungen entlang der Bogenachse

Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Bewehrungsarbeitslinien

Die für den Bewehrungsstahl verwendete bilineare Arbeitslinie stellt eine Vereinfachung der tatsächlichen Verhältnisse dar. Abbildung 5.31 zeigt Arbeitslinien wie sie für warmgewalzten (Teilbild *a*) bzw. kaltgezogenen Bewehrungsstahl (Teilbild *b*) typisch sind. Der in den obigen Beispielen verwendete Verfestigungsmodul $E_h = 2000MN/m^2$ entspricht etwa den in [37] angeführten Werten. Diese ergeben sich aus den charakteristischen Festigkeiten der Bewehrungsstähle. Für den Mittelwert des Verfestigungsmoduls lassen sich daher etwas größere Werte ansetzen.

Um den Einfluss unterschiedlicher Verfestigungsmodule E_h auf die aus dem Bemessungsalgorithmus resultierende Bewehrungsmenge, bzw. die Verformungsfigur zu studieren, wurde für E_h ein Wert von $20000MN/m^2$ gewählt. Dies führt unter ansonst gleichen Verhältnissen wie im vorhergehenden Rechenbeispiel auf die in Tabelle 5.6 aufgelisteten Bewehrungsmengen.

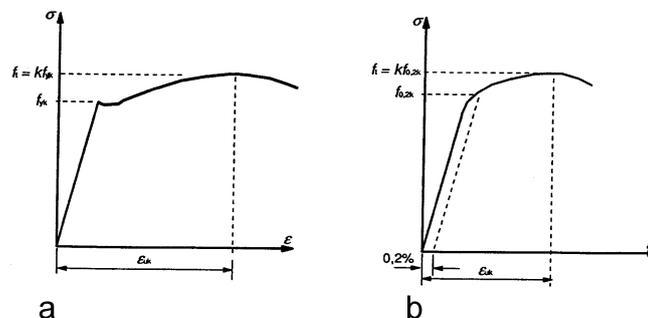


Abbildung 5.31: Arbeitslinien für typischen *a*) warmgewalzten bzw. *b*) kaltgezogenen Bewehrungsstahl [37]

Die FE-Vergleichsrechnung liefert den in Abbildung 5.30 als rote Kurve eingezeichneten Krümmungsverlauf entlang der Streifenachse. Wie man sieht, zieht die Vergrößerung des Verfestigungsmoduls E_h eine im Vergleich zum obigen Beispiel gleichmäßigere Krümmungsverteilung nach sich. Allerdings liegt die größte, in der Bewehrung auftretende Dehnung bei 3.8%, was eine deutliche Überschreitung der laut [37] zulässigen Werte bedeutet. Als kritische Beullast ergibt sich ein Wert von $p = 3.59kN/m^2$, welcher um 50% unter jenem aus der vorhergehenden FE-Rechnung liegt.

Ein genauer Vergleich der Ergebnisse zeigt identische Krümmungen im Außenbereich von Abschnitt fünf: Der Grund liegt in der für den Beton angesetzten Zugfestigkeit von $0.3MN/m^2$. Diese verhindert im Bogenfußbereich, wo nur kleine Momente M_φ auftreten, das Reißen des Betons und somit ein Wirksamwerden der Bewehrung.

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	$a_{s,erf.}$ [cm ² /m]
1	0.00	1.04	0.694
2	1.04	2.08	0.623
3	2.08	3.12	0.487
4	3.12	4.16	0.301
5	4.16	5.20	0.080

Tabelle 5.6: Mittels Bemessungsalgorithmus berechnete Bewehrungsflächen eines Plattenstreifens

In einem weiteren Beispiel soll nun untersucht werden, wie sich glasfaserbewehrtes Eis bei der Umformung von ebener Anfangs- in gekrümmte Endlage verhält. Als Druckfestigkeit für Eis kommt der in [33] angeführte Wert von $f_c = -3.5MN/m^2$ in Ansatz. Wie in [23] erläutert, hängt die Eisdruckfestigkeit stark von der Eistemperatur ab. Dieser Einfluss soll hier vernachlässigt werden. Als Anhaltswert der Eiszugfestigkeit findet man in [33] $f_t = 1.5MN/m^2$. Eis verhält sich unter Zugbeanspruchung spröde. Dies äußert sich in einem abrupten Spannungsabfall nach Erreichen der Zugfestigkeit. Um numerische Probleme zu vermeiden, wird analog zu der zuvor verwendeten Betonarbeitslinie im Zugbereich ab Erreichen einer Zugfestigkeit von $f_t = -f_c/100$ ideal plastisches Verhalten angenommen. Gleiches gilt im Druckbereich nach Überschreiten der Druckfestigkeit. Dazwischen wird ein elastischer Bereich mit $E = 1000MN/m^2$ (siehe [33]) vorgeesehen.

Glasfasern, wie sie hier in Form von Matten als Bewehrung zum Einsatz kommen, weisen im Zugbereich bis nahe zum Reißen linear elastisches Verhalten auf. Einen Eindruck davon vermitteln die in Abbildung 5.32 dargestellten Arbeitslinien. Aus diesen 20 Linien ergeben sich die Mittelwerte für Zugfestigkeit und E-Modul zu $f_t = 1209.46MN/m^2$ bzw. $E = 67590MN/m^2$ [22]. Im Rahmen der numerischen Modellierung wird die Glasfaserbewehrung als linear elastisch behandelt.

Mit den gleichen Streifenabmessungen sowie Bewehrungsabschnittsteilungen wie in den beiden obigen Beispielen und einer auf $H_a = 0.0009MN/m$ verringerten horizontalen Bogenfußkraft erfolgt die Bemessung der erforderlichen Bewehrungsfläche. Die im Vergleich zu Beton geringere Druckfestigkeit von Eis zwingt, da die Querschnittshöhe mit $5cm$ unverändert bleiben soll, zur Reduktion von H_a . Der Bewehrungsalgorithmus liefert die in Tabelle 5.7 enthaltenen Ergebnisse.

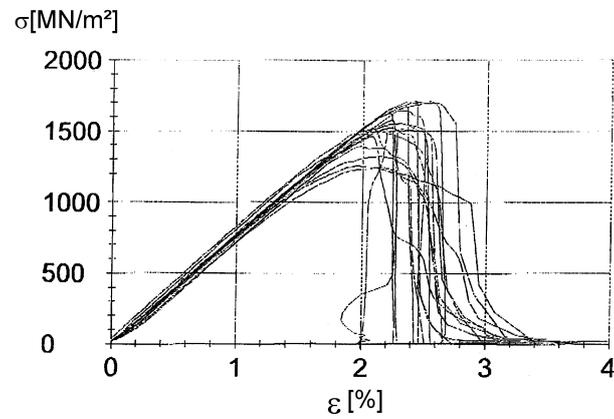


Abbildung 5.32: Spannungs-Dehnungsdiagramme aus mehreren Zugversuchen an Glasfasergelegen [22]

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	$a_{s,erf.}$ [cm ² /m]
1	0.00	1.04	2.344
2	1.04	2.08	2.001
3	2.08	3.12	1.430
4	3.12	4.16	0.792
5	4.16	5.20	0.230

Tabelle 5.7: Mittels Bemessungsalgorithmus ermittelte Bewehrungsflächen eines Plattenstreifens aus glasfaserbewehrtem Eis

Eine Kontrollrechnung mittels FE-Programm führt auf den in Abbildung 5.30 als grüne Kurve eingezeichneten Krümmungsverlauf. Wie man sieht, schwanken die Krümmungen wenig um den theoretisch erforderlichen Wert von $\varkappa = 1/7.65 = 0.131/m$, und es kommt nur zu geringfügigen Krümmungskonzentrationen an den Bewehrungsabschnittsgrenzen. Die größte in der Glasfaserbewehrung auftretende Dehnung beläuft sich auf 0.74% und liegt somit ausreichend weit von der Bruchdehnung entfernt. Im gekrümmten Endzustand erreicht der Bogenscheitel eine Höhe von $1.705m$, was einem relativen Fehler von 0.29% entspricht. Die kritische Beullast ergibt sich zu $p = 2.16kN/m^2$ und liegt somit größenordnungsmäßig im Bereich der oben untersuchten Betonbögen.

5.6.4 Bemessung eines Vieleckkuppelsegments unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität

Die Bemessung von Trapezstreifen birgt im Vergleich zu jener von Rechteckstreifen kein prinzipiell neues Problem. Abbildung 5.33 zeigt die untere Hälfte eines Trapezstreifens. Die gewählten Außenabmessungen sowie sämtliche Angaben in Bezug auf Ablauf des Transformationsprozesses und Zielform entsprechen jenen aus dem Berechnungsbeispiel in Abschnitt 5.5.1. Anders als dort wird die Streifenhälfte in fünf Abschnitte mit konstanten Querschnittseigenschaften unterteilt. Die in Abbildung 5.33 erkennbaren rot punktierten Linien bilden die Abschnittsgrenzen.

Um zu überprüfen, ob sich während des Umformungsprozesses die einzelnen Vieleckkuppelsegmente an ihren Rändern berühren und wenn ja, wie diese sich gegenseitig beeinflussen, erfolgt die Berechnung mittels ABAQUS unter Benutzung so genannter Connector-Elemente [21]. Diese ermöglichen es, zwischen zwei Punkten bzw. einem Punkt und der Erdscheibe kinematische Zwangsbedingungen einzuführen. Mit ihrer Hilfe lässt sich die gegenseitige Verformungsbehinderung der Kuppelsegmente — wenn auch nur in diskreten Punkten — simulieren, die eintritt, wenn sich die Stauchungsfugen geschlossen haben und somit Kontakt zwischen den Rändern benachbarter Segmente besteht. Im vorliegenden Fall werden die in Abbildung 5.33 rot markierten Abschnittsgrenzen als linienförmige, starre Körper modelliert, deren horizontale Verschiebung zum schmalen Rand hin in Streifenlängsrichtung durch Connector-Elemente (symbolisiert als rote Pfeile) beschränkt ist. Die horizontalen Verschiebungsbegrenzungen ergeben sich aus der angestrebten Zielgeometrie der Segmente.

Zunächst soll ein Stahlbetonsegment mit einer Querschnittshöhe von $5cm$ betrachtet werden. Für die Modellierung von Beton und Stahl gelten die in Abschnitt 5.6.2 gemachten Angaben (für den Bewehrungsstahl $E_h = 2000MN/m^2$). Zur Sicherstellung ausreichender Verformungsreserven nach Abschluss der Um-

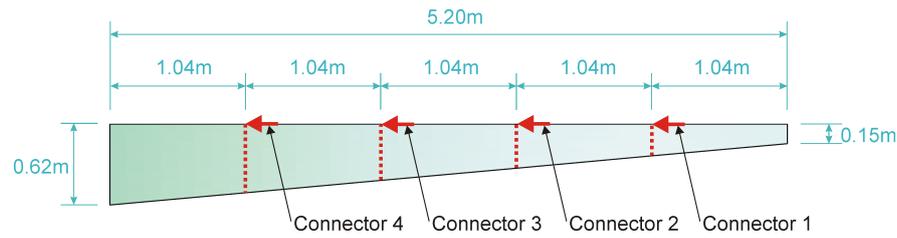


Abbildung 5.33: In fünf Abschnitte geteilte Hälfte eines Trapezstreifens

formung dient die Begrenzung der zulässigen Stauchung am Druckrand mit 2%. Die Zugbewehrung befindet sich 2cm über, die Druckbewehrung 2.5cm unter dem Querschnittsschwerpunkt. Letztere liegt auf Höhe der Segmentunterseite und eignet sich aufgrund fehlender Betonüberdeckung nicht zur praktischen Ausführung. Im Rahmen der folgenden Berechnungen sei von diesem Umstand abgesehen. Der Bewehrungsalgorithmus liefert mit einer horizontalen Randlast von $H_a = -0.001MN/m$ als einzige äußere Einwirkung die in Tabelle 5.8 enthaltenen Angaben für Zug- und Druckbewehrung.

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	$a_{s,Zug,erf.}$ [cm^2/m]	$a_{s,Druck,erf.}$ [cm^2/m]
1	0.00	1.04	2.537	1.953
2	1.04	2.08	1.394	0.859
3	2.08	3.12	0.827	0.078
4	3.12	4.16	0.414	0.000
5	4.16	5.20	0.098	0.000

Tabelle 5.8: Mittels Bemessungsalgorithmus ermittelte Bewehrungsflächen für Zug- und Druckbewehrung eines Plattenstreifens

Die Simulation des Umformungsprozesses mittels ABAQUS führt auf eine vertikale Verschiebung des schmalen Trapezstreifenendes von 1.752m was in Bezug auf die angestrebte Höhe von 1.7m einen relativen Fehler von 3.1% bedeutet. In Abbildung 5.35a gibt die blaue Kurve den Krümmungsverlauf in Längsrichtung des Stahlbetonsegments wieder. Ähnlich wie im vorherigen Beispiel treten starke Krümmungskonzentrationen an den Rändern der Abschnitte mit konstanten Querschnittseigenschaften auf. Der in Teilbild b als blaue Kurve dargestellte Verlauf der Stauchungen in Segmentlängsrichtung am unteren Querschnittsrand

zeigt, dass die Stauchungsbegrenzung von 2‰ kaum unterschritten wird. Der Grund für die leichte Abweichung zwischen angestrebtem und in der ABAQUS-Berechnung erhaltenen Ergebnis liegt wohl darin, dass im Rahmen des Bemessungsalgorithmus nur das einaxiale Materialverhalten Berücksichtigung findet, während der FE-Berechnung Materialmodelle für biaxiale Beanspruchungszustände zu Grunde liegen.

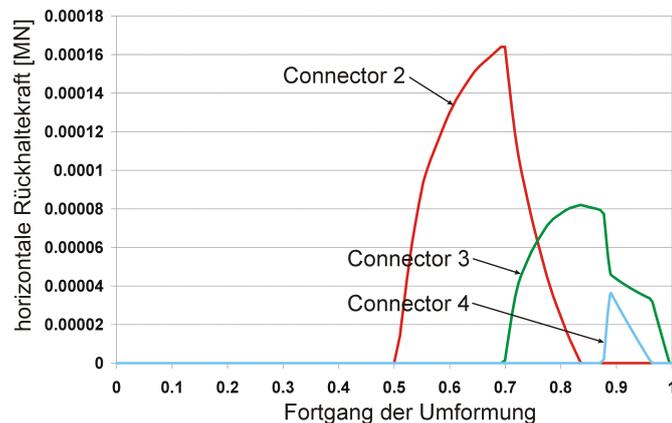


Abbildung 5.34: Rückhaltekräfte in horizontaler Richtung infolge der Connector-Elemente in Abhängigkeit vom Umformungsfortschritt

Abbildung 5.34 zeigt, wie sich die horizontalen Rückhaltekräfte, die an den Segmentabschnitten wirken, im Verlauf des Umformungsprozesses verändern. Der Abszissenwert gibt wieder, wie viel der bis zum Zielzustand erforderlichen Fußpunktverschiebung jeweils vorliegt. „0“ entspricht dabei dem Zustand der Schale nach Aufbringung der Flächenlast zur Erzielung der Anfangsauslenkung, der Abszissenwert „1“ dem Umformungsende. Die Position der einzelnen Connector-Elemente lässt sich der Abbildung 5.33 entnehmen. Wie man sieht, spricht das Connector-Element „1“ überhaupt nicht an. Dies bedeutet, dass dort die horizontale Verschiebung zur Schalenmitte hin zu keinem Zeitpunkt ausreicht, um Kontakt zwischen benachbarten Kuppelsegmenten herbeizuführen. Erst bei 50% der horizontalen Fußpunktverschiebung, was am schmalen Segmentende einer vertikalen Verformung von $1.37m$ entspricht, aktiviert sich das Connector-Element „2“, später folgen die Elemente „3“ und „4“. Kurz vor Ende der Umformung fällt in allen Connector-Elementen die Rückhaltekraft auf null ab. Dies entspricht der bei der Bemessung getroffenen Annahme, dass im Zielzustand als einzige äußere Last die horizontale Randlast H_a angreift.

Als nächstes soll untersucht werden, wie sich Trapezstreifen mit Eis-Glasfaserverbund-Querschnitt verhalten. Dabei dienen für Bemessung und FE-Berechnung das im vorherigen Abschnitt geschilderte idealisierte Materialverhalten sowie die

dort angegebenen Materialparameter für Eis und Glasfaserbewehrung als Grundlage. Für die Erreichung der Ziellage bei Vorliegen einer horizontalen Randlast von $H_a = -0.0003MN/m$ liefert der Bemessungsalgorithmus die in Tabelle 5.9 aufgelisteten, erforderlichen Bewehrungsflächen.

Abschnitt	von s [m]	bis s [m]	$a_{s,erf.}$ [cm ² /m]
1	0.00	1.04	3.202
2	1.04	2.08	1.004
3	2.08	3.12	0.626
4	3.12	4.16	0.231
5	4.16	5.20	0.060

Tabelle 5.9: Mittels Bemessungsalgorithmus berechnete Bewehrungsflächen eines Kuppelsegments aus glasfaserbewehrtem Eis

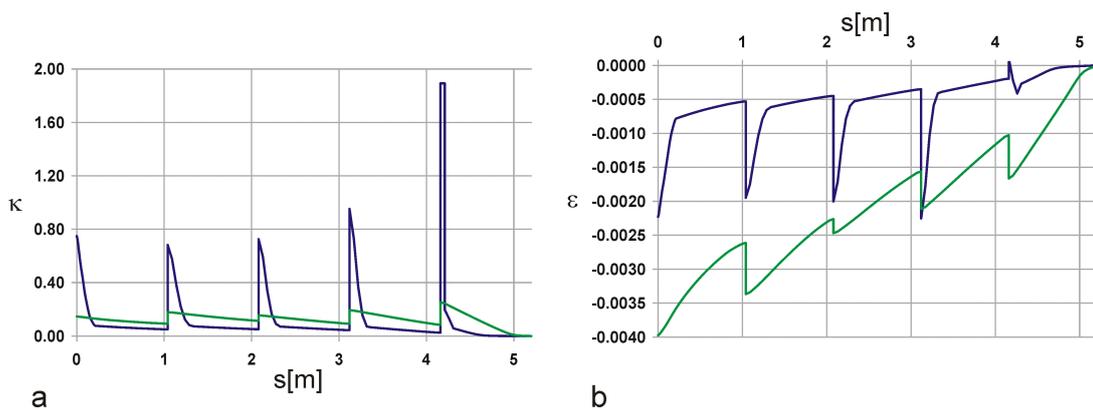


Abbildung 5.35: a) Krümmungsverlauf in Längsrichtung für Betonsegment (blaue Kurve) und Eissegment (grüne Kurve); b) Wahre Stauchungen am gedrückten Rand für Betonsegment (blaue Kurve) und Eissegment (grüne Kurve)

Im Gegensatz zum Stahlbetonquerschnitt wird auf die Beschränkung der Stauchungen am gedrückten Rand und somit auf die Anordnung von Druckbewehrung verzichtet. Die Modellierung der Struktur mittels ABAQUS liefert im Endzustand eine Scheitelhöhe von $1.704m$, was einem relativen Fehler von 0.2% entspricht. Wie die grüne Kurve in Abbildung 5.35a zeigt, kommt es im Vergleich zum Stahlbetonquerschnitt zu einer gleichmäßigeren Verteilung der Krümmungen aufgrund

der Tatsache, dass die Glasfaserbewehrung nicht fließt. Anhand des Verlaufs der Dehnungen in Segmentlängsrichtung am gedrückten Querschnittsrand sieht man (Abbildung 5.35b, grüne Kurve), dass diese jene des Stahlbetonquerschnitts überschreiten. Im Fall von Eis ließen sich die Stauchungsmaxima durch Wahl einer größeren Querschnittshöhe reduzieren. Anders als beim Stahlbetonquerschnitt lieferte einzig das Connector-Element „1“ eine Rückhaltekraft in horizontaler Richtung. Dieses zeigt ab 90% des Endverschiebungsweges des Segmentfußbereichs eine linear ansteigende Rückhaltekraft, die am Ende des Umformungsprozesses einen Wert von $0.3kN$ annimmt. Die Ursache für diesen Widerspruch zwischen Bemessungsannahme und FE-Ergebnis liegt in den jeweils verwendeten, unterschiedlichen Materialmodellen.

Kapitel 6

Experimentelle Untersuchungen

Zur Erprobung des in dieser Arbeit behandelten Bauverfahrens wurden im Rahmen mehrerer Diplomarbeiten ([18], [23], [11] und [28]) Vieleckkuppeln aus Stahlbeton und glasfaserbewehrtem Eis errichtet. Beim ersten Versuchsmodell handelte es sich um eine Stahlbetonschale mit einem Durchmesser von $5.2m$ im ebenen Anfangszustand sowie einer Querschnittshöhe von $2.0cm$ [18]. Nachdem dieses Experiment zufriedenstellende Ergebnisse geliefert hatte, konzentrierten sich die weiteren Versuche auf Modelle aus glasfaserbewehrtem Eis ([23], [11]). Bei den Schalen dieser Versuchsreihe betrug der Anfangsdurchmesser wiederum etwa $5m$. Aufgrund der im Vergleich zu Beton geringeren Steifigkeit von Eis kam eine Querschnittshöhe von anfangs $3cm$ später $4cm$ zur Anwendung.

Es zeigte sich, dass die Schalen aus Glasfasereis im Zuge der Umformung sehr empfindlich auf Bauungenauigkeiten bzw. ungewollt eingebrachte Kräfte — z.B. infolge Haftung am Untergrund — reagierten. Dies resultierte in einigen Fehlschlägen aber auch Verbesserungen hinsichtlich des Ablaufs des Formgebungsprozesses und der Ausführung der ebenen Anfangsform. Als wesentliche Faktoren erwiesen sich

1. die Lagegenauigkeit des am Umfang angeordneten Spannglieds,
2. eine sorgfältige Ausbildung der Stauchungsfugen und
3. die Art der Vorrichtung zur Erzielung der Anfangsauslenkung bzw. Unterstützung des Formgebungsprozesses.

Was die Lagegenauigkeit des Spannglieds anbelangte, ergaben sich insbesondere im Bereich der Spannstelle Probleme: Ungleichmäßige Spanngliedkrümmungen und daraus resultierend ungleichmäßige Umlenkkräfte führten bei einigen Versuchen zum ungewollten Ausknicken bzw. zur Zerstörung einzelner Vieleckkuppelsegmente. Veränderungen an der Spannstelle schafften Abhilfe.

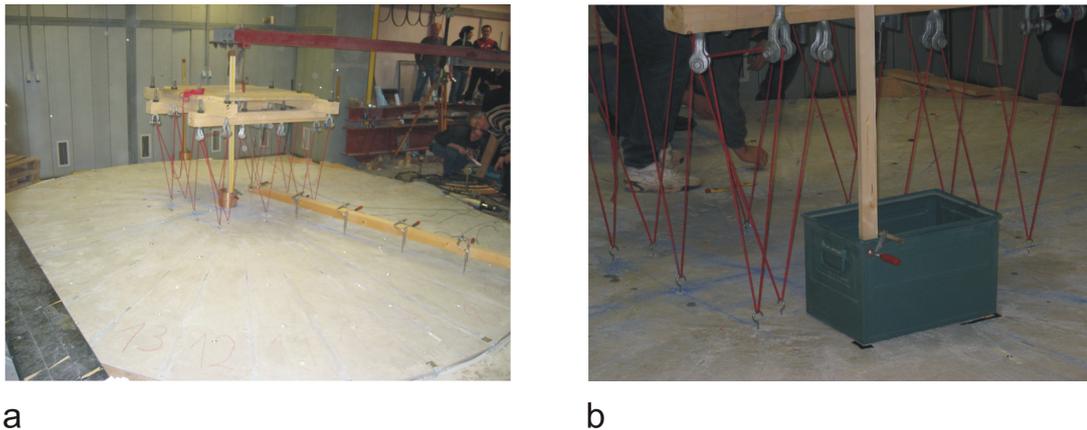


Abbildung 6.1: a) Vorrichtung zur Erzeugung der Anfangsauslenkung [18]; b) Verbindung zwischen Aufhängevorrichtung und Stahlbetonschale mittels Dübel

Die Hauptursache dafür, dass der erste Eisschalenversuch nicht zur gewünschten Zielform führte, lag an dem Umstand, dass durch unbeabsichtigtes Überdecken der Stauchungskeile mit einer Eisschicht von bis zu 8.5mm die Stauchungsfugen teilweise blockiert waren [23]. Dies ließ sich bei den nachfolgenden Versuchen einfach durch eine im Vergleich zu den Schalensegmenten größere Querschnittshöhe der Polystyrolkeile vermeiden. Als schwieriger erwies es sich, das Eindringen von Wasser unter die Keile, was ebenfalls zur Bildung von Eisstegen zwischen den Segmenten und somit zur Blockierung der Stauchungsfugen führt, zu verhindern. Durch sorgfältiges Verkleben der Aufstandsflächen der EPS-Keile mit dem Schalboden konnte auch dieses Problem gelöst werden.

Ein weiterer Punkt, der sich im Verlauf der Versuchsreihe als wichtig erwies, betrifft die Methode zur Erzeugung der Anfangsauslenkung. Im Fall der Stahlbetonschale kam eine Aufhängevorrichtung zum Einsatz, welche über im Beton verankerte Dübel mit dem Schalenmittenteil verbunden war (siehe Abbildung 6.1). Da sich ein solches, auf der zugfesten Verankerung von Dübeln im Schalenmaterial basierendes System nicht für Schalen aus Eis eignet, musste nach einer Alternative gesucht werden. Diese fand sich in Form eines unter der Schale angeordneten Ballons. Durch Aufpumpen des Ballons lässt sich die vertikale Anfangsverformung der Kreisplatte steuern sowie der Umformungsprozess zusätzlich zur Wirkung der Vorspannkraft unterstützen. Zunächst handelte es sich bei dem eingesetzten Ballon um einen pneumatischen Wagenheber mit einem Durchmesser von etwa 50cm [23] der im Schalenzentrum angeordnet war (siehe Abbildung 6.2a). Mit diesem Hebesystem ließen sich zufriedenstellende Ergebnisse erzielen. Es zeigte sich jedoch in manchen Fällen, dass die Schale wie in Abbildung 6.2 b

dargestellt im Randbereich am Untergrund haften blieb. Die Lösung für dieses Problem bestand in der Verwendung zweier unter der Schale angeordneter, luftundurchlässiger Folien, die sich über den gesamten Schalenbereich erstrecken und zwischen welche Luft eingeblasen werden kann [11] (siehe Abbildung 6.2c). Auf diese Weise konnte eine gleichmäßige Unterstützung der gesamten Schale erreicht werden.

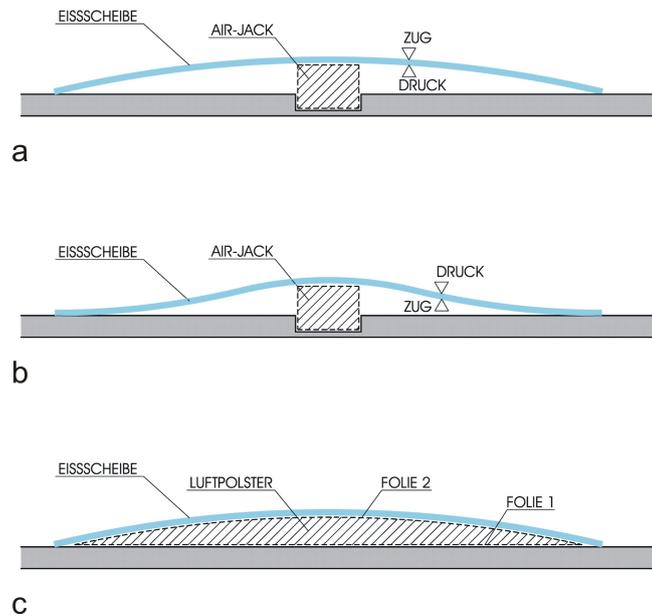


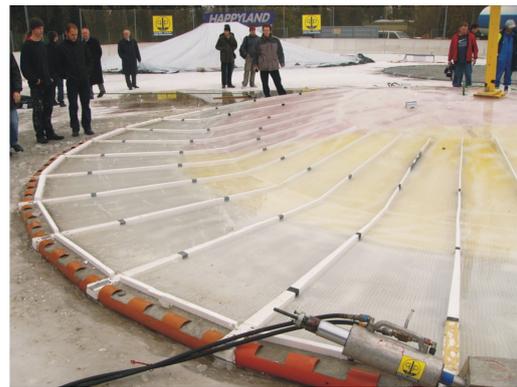
Abbildung 6.2: Hebemechanismen zur Herstellung der Anfangsauslenkung bzw. Unterstützung der Umformung der Schale [11]

Nach Abschluss der Experimente im Labor folgten Versuche an größeren Schalen unter freiem Himmel [28]. Es wurde untersucht, welche witterungsbedingten Schwierigkeiten sich bei der Herstellung der Schalenausgangsformen ergeben. In einer Bauzeit von etwas mehr als einem Monat entstand neben den ebenen Ausgangsformen für zwei Schalen aus glasfaserbewehrtem Eis mit 10.4m bzw. 15.6m Durchmesser auch die Ausgangsform für eine Schale aus Leichtbeton mit 10.4m Durchmesser. Als Bauplatz diente ein Eislaufplatz, dessen Kühlsystem zur Herstellung der Eisplatten herangezogen wurde. Die Erzeugung der Anfangsauslenkung bzw. Unterstützung der Formgebung erfolgte mittels aufblasbarer Ballone, im Weiteren als Pneus oder Luftkissen bezeichnet, mit Durchmessern von 7.20m bzw. 10.80m. Da dünne Kunststofffolien zur Realisierung einer Hebevorrichtung wie in Abbildung 6.2c als zu wenig baustellentauglich befunden wurden, kamen als Material für die Pneus PVC beschichtete Gewebbahnen zur Anwen-

dung. Aus Kostengründen erstreckten sich die Luftkissen nicht über die gesamte Grundrissfläche der Ausgangsformen. Da die Versuche vor Saisonöffnung des Eislaufplatzes abgeschlossen sein mussten, erfolgten sämtliche Arbeiten unter extremem Zeitdruck. Dies zog bei der Schale aus Leichtbeton Ausführungsmängel nach sich: Zu geringe Übergreifungslänge beim Anschluss der in den Kuppelsegmenten verlegten Längsbewehrung an jene im Schalenmittelenbereich führte am Beginn des Umformungsversuchs zum Versagen eines Teils der Übergreifungsstöße und in weiterer Folge zu lokalem Ausknicken der Kuppelsegmente (Abbildung 6.3a).



a



b

Abbildung 6.3: a) lokales Beulen der Leichtbetonschale am Anfang des Umformungsvorgangs; b) Delle in der Eisschale mit Anfangsdurchmesser $10.4m$

Was die Eisschalen betraf, zeigte sich, dass bei den zum damaligen Zeitpunkt vorliegenden Temperaturverhältnissen — die Arbeiten fanden zwischen Ende September und Anfang November statt — die Leistung der Eislaufplatzkühlung nicht ausreichte, um die Eisplatten mit den geplanten Dicken von $10cm$ bzw. $15cm$ in der erforderlichen Qualität herzustellen. Im Zuge der Umformung der Eisschalen kam es in beiden Fällen zu ungleichmäßigen Deformationen. Wie Abbildung 6.3b zeigt, blieben bei der Eisschale mit Durchmesser $10.4m$ in weiten Bereichen die äußeren Segmentabschnitte am Untergrund haften, sodass der Versuch vorzeitig beendet werden musste. Die Schale mit Anfangsdurchmesser $15.6m$ verhielt sich ähnlich.

Keine der drei Schalen erreichte somit die geplante Zielform. Trotz dieser Tatsache lieferten die Großversuche wertvolle Erfahrungen für weitere Experimente [28]. Nähere Informationen in Bezug auf die durchgeführten Großversuche finden sich in [28]. Eine vollständige Beschreibung der dort dargelegten Erkenntnisse,

die im Bereich der praktischen Bauausführung bzw. konstruktiven Durchbildung liegen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Kapitel 7

Laborversuche mit Beton- und Eisschalen

7.1 Stahlbetonschale mit Durchmesser $5.2m$

7.1.1 Beschreibung der ebenen Ausgangsform

Bei der Stahlbetonschale mit Anfangsdurchmesser $5.2m$ handelte es sich um die erste, im Labor des Instituts für Tragkonstruktionen errichtete Versuchsschale. Im umgeformten Zustand sollte sich eine Kugelkappe mit einem Stich von $0.88m$ und einem Durchmesser von $4.8m$ einstellen.

Mittels der in Abschnitt 2.3 abgeleiteten Zusammenhänge ergeben sich die Abmessungen der in Abbildung 7.1 im Grundriss dargestellten, verebneten Anfangsform. Die mit der Umformung einhergehenden Stauchungen in tangentialer Richtung betragen am Außenrand 7.7% . Dies bedeutet eine Umfangsverkürzung um $1.25m$, die von den 32 in radialer Richtung angeordneten XPS-Zwickeln aufgenommen werden muss. Auf jeden dieser Zwickel entfällt demnach am Außenrand eine Breitenminderung von $3.9cm$. Die maximale Stauchung der XPS-Körper wurde mit 70% festgelegt. Dies sollte verhindern, dass das extrudierte Polystyrol der Stauchungszwickel den nahezu ideal plastischen Bereich seiner Arbeitslinie verlässt, sich wiederverfestigt und in tangentialer Richtung ungünstig große Kräfte verursacht. Aus der Stauchungsbegrenzung und dem aufzunehmenden Stauchungsweg ergibt sich am Kreisplattenumfang die erforderliche XPS-Keildicke zu $3.9/0.7 = 5.5cm$. Mit der in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Beziehung für den Verlauf der Fugenbreite in radialer Richtung erhält man bei einem Randabstand von $1.8m$ eine erforderliche Zwickelbreite von $0.17cm$. Da dies in Hinblick auf Zuschnitt, Verlegung und Betoneinbringung die kleinste ausführbare Dicke darstellte, wurde die Polystyrolzwickellänge auf dieses Maß beschränkt. Dadurch ergab sich im Plattenzentrum ein ungeschlitzter Bereich von $1.6m$ Durchmesser. Als

Material für die Füllung der Stauchungsfugen kam XPS mit einer Fließspannung von $0.4MN/m^2$ am Fließbeginn bzw. $0.6MN/m^2$ bei 70% Nennstauchung zur Anwendung.

Was die Bewehrung betraf, fiel die Wahl auf Stäbe bzw. Matten der Güte *BSt550* mit Durchmesser $5mm$. Dies deshalb, weil es sich hierbei um den dünnsten im Handel erhältlichen Bewehrungsstahl handelt. Wie Abbildung 7.1 zeigt, enthielt jedes der 32 Segmente plangemäß drei in radialer Richtung durchlaufende Bewehrungsstäbe sowie Querstäbe im Abstand von $10cm$. Letztere lagen unterhalb der radial gerichteten Stäbe, die einen plangemäßen Schwerpunktsabstand zur Schalenunterseite von $1.5cm$ aufwiesen. Die Festlegung der Bewehrungsmenge bzw. -anordnung in den Segmenten erfolgte, da zu diesem Zeitpunkt noch kein Bemessungskonzept vorlag, in Hinblick auf deren risseverteilende Wirkung. Im nicht durch Stauchungsfugen durchzogenen Mittenbereich befand sich eine passend zu rechtgeschnittene Bewehrungsmatte, die via Übergreifungsstößen mit den radial verlegten Bewehrungsstäben verbunden war. Abbildung 7.2 zeigt die Anordnung der Bewehrung kurz nach Beginn der Betonierarbeiten.

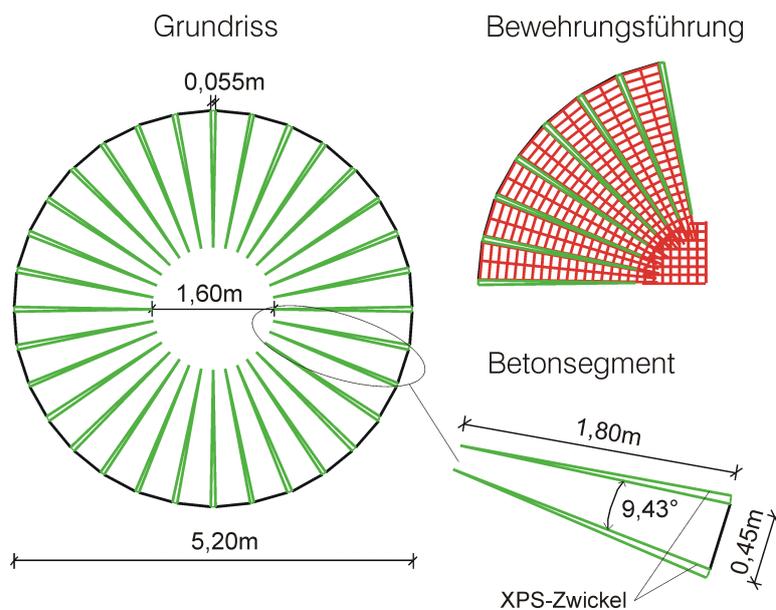


Abbildung 7.1: Aus der Verebnung einer Kugelkalotte hervorgegangene Anfangsform mit 32 Segmenten, Bewehrungsführung sowie Detail eines einzelnen Betonsegments [34]

In Bild 7.2 lassen sich außerdem die Bretter der Randabschalung erkennen, welche die Kreisform in 32 geraden Abschnitten annähern. Eine gekrümmte Ausführung der äußeren Segmentränder hätte erhöhten Schalungsaufwand bedeutet

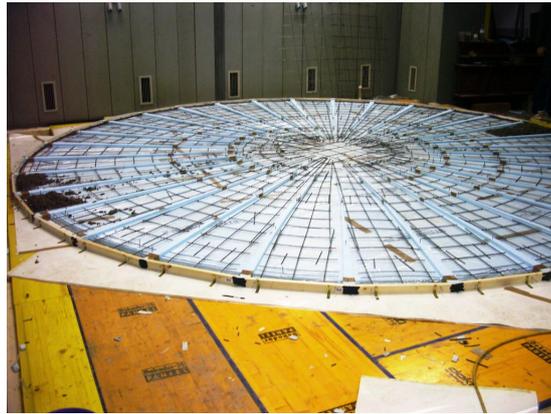


Abbildung 7.2: Bewehrungsanordnung in der Stahlbetonschale mit 5.2m Anfangsdurchmesser [18]

und dazu geführt, dass im Zuge der Umformung infolge der Drehung der Segmentaußenränder diese jeweils nur in einem Punkt mit dem Untergrund in Kontakt stehen. Um die Drehbewegung der Schalenränder nicht zu behindern, wurden diese wie in Abbildung 7.3a dargestellt abgerundet ausgeführt. Die PVC-Folie, welche zur Herstellung jener Abrundung diente (siehe Teilbild 7.3b), sollte gleichzeitig die Reibung zwischen Untergrund und Schalenrand verringern.

Bei dem am Umfang eingelegten Spannglied handelte es sich um eine VSL Monolitze ST 1570/1770 Litze 0.62" mit PE-Ummantelung und Korrosionsschutzfett, wie sie gewöhnlich zur verbundlosen Vorspannung zum Einsatz kommt. Mit PE-Ummantelung weist diese Litze einen Außendurchmesser von 2cm auf. Aus diesem Grund musste der Schalenrand wie in Teilbild 7.3a dargestellt verdickt ausgeführt werden. Die Ausbildung des am Übergang zum Regelbereich notwendigen Höhen-sprungs erfolgte durch 2cm starke XPS-Platten. Wie eine Untersuchung mittels Stabwerksmodell in [18] zeigte, kann auf eine Umbügelung des Spannglieds verzichtet werden. Die zur anfänglichen Schalenmittelebene exzentrische Lage des Spannglieds sollte im Schalenrandbereich negative, das Abheben vom Schalboden begünstigende Momente M_φ hervorrufen.

Abbildung 7.4 zeigt im Teilbild a die Schalung der Spannstelle, das Spannglied sowie die Ankerplatten mit Wendelbewehrung. Die Spannstelle ragte über den Rand der Arbeitsfläche hinaus, reichte 5cm unter die Oberkante des Schalbodens und hakte sich auf diese Weise am Schalbodenrand ein (siehe Abbildung 7.6b). Somit blieb sie während der Umformungsprozedur ortsfest und bildete einen Fixpunkt, zu dem sich alle anderen Schalenpunkte hinbewegten. Dies brachte Erleichterungen bei der messtechnischen Erfassung der Deformationen sowie bei der Ausbildung der Spannstelle mit sich. Wie aus Teilbild 7.4b ersichtlich, erfolg-

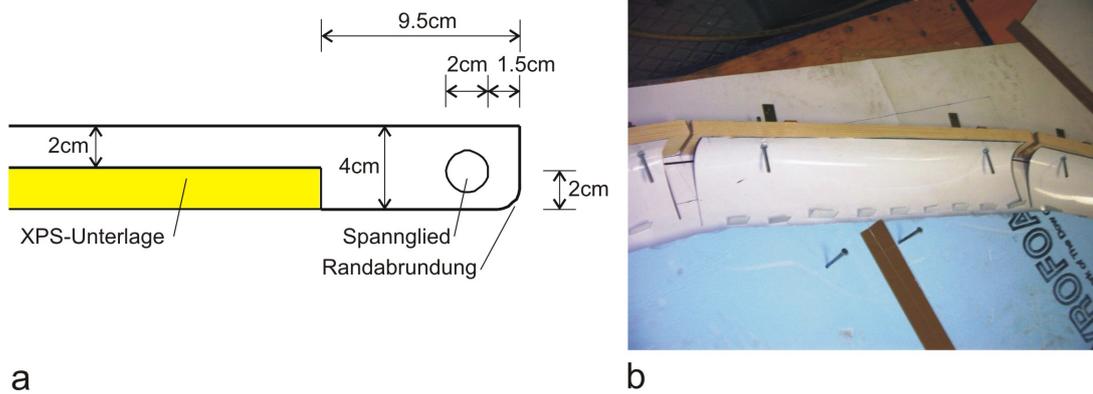


Abbildung 7.3: a) Randdetail; b) Randschalung mit Folien zur Herstellung der Randabrundung und Reibungsverminderung zwischen Untergrund und Schale

te das Vorspannen mit zwei Pressen, durch welche die Spannkraft abwechselnd in Schritten von 10kN erhöht wurde. Dies sollte die in tangentialer Richtung wirkenden Kräfte infolge Spanngliedreibung, der Reibbeiwert der benutzten Litze lag bei $\mu = 0.05/\text{rad}$, gleichmäßig über den Umfang verteilen und so ungünstige Biegebeanspruchungen an den inneren Segmentenden herabsetzen [18].

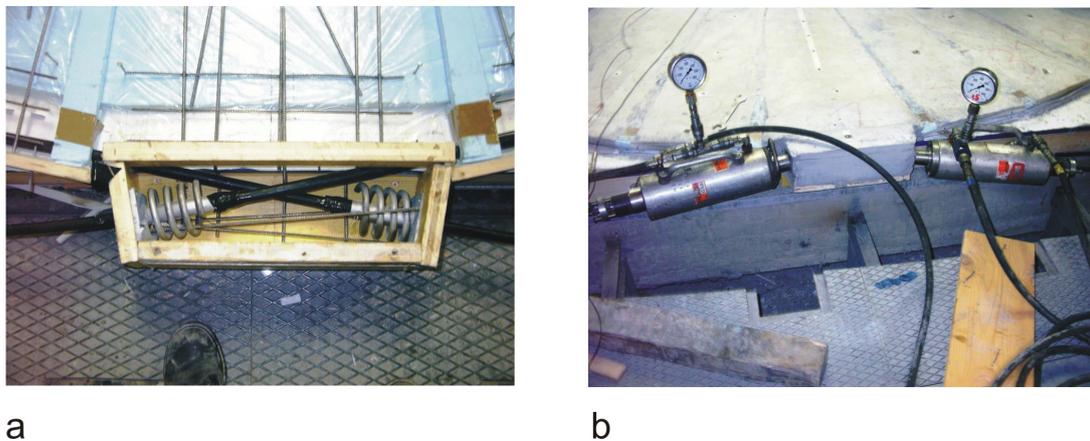


Abbildung 7.4: a) Schalung der Spannstelle [18]; b) Spannstelle im ausgeschalteten Zustand mit angesetzten Spannpressen

Den Betoniervorgang bzw. die fertige ebene Ausgangsform zeigt Abbildung 7.5. Beim verwendeten Beton handelte es sich um C25/30 XC1 GK4 F52 CEM II 42.5R VA6. An 42 Tage alten Probezylindern durchgeführte Druckversuche lieferten für die eingebaute Betonmischung eine mittlere Druckfestigkeit von $55.90\text{MN}/\text{m}^2$

[18]. Probleme beim Betonieren ergaben sich aus dem kleinen Durchmesser der verwendeten Bewehrungsstäbe, da diese durch unachtsames Betreten teilweise verbogen wurden und sich aus ihrer plangemäßen Lage entfernten. Als schwierig erwies es sich auch, die geplante Plattendicke von 2cm überall einzuhalten. Messungen beim Abbruch der Schale lieferten tatsächlich vorhandene Querschnittshöhen von 2.5cm bis 3.0cm . Da die Polystyrolkeile mit 2cm Höhe genau bis zur plangemäßen Plattenoberseite reichten, wurden diese teilweise von Zementschlämme überdeckt. Diese Schicht musste nach dem Betonieren mühsam entfernt werden, um eine dadurch verursachte Stauchungsbehinderung zu vermeiden. Geringfügig größere Querschnittshöhen der XPS-Keile hätten hier Abhilfe geschaffen.

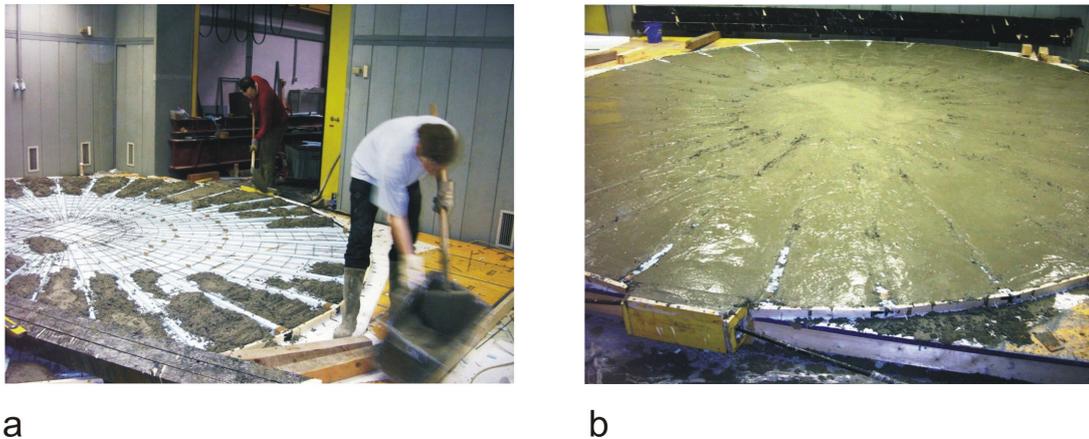


Abbildung 7.5: Betoniervorgang

Zur Herstellung der am Anfang der Umformung notwendigen Mittenauslenkung diente wie in Kapitel 6 beschrieben die in Abbildung 6.1 dargestellte Aufhängevorrichtung.

7.1.2 Umformung von ebener Ausgangs- in gekrümmte Ziellage

Die Umformung der Stahlbetonplatte zur Vieleckkuppel erfolgte bei einem Betonalter von 25 Tagen. Den ersten Schritt des Transformationsprozesses bildete die Aufbringung einer Zugkraft von 4kN in Plattenmitte durch die zu diesem Zweck vorgesehene Hebevorrichtung. Dies resultierte in einer Hebung des Kreisplattenmittelpunkts um 0.38cm . Darauf folgte in Schritten von 10kN die Steigerung der Zugkraft im Spannglied. Bei einer Spannkraft von 67kN und 1.03cm Auslenkung in Plattenmitte kam es innerhalb weniger Sekunden zu einer starken

Verformungszunahme. Die danach gemessene vertikale Verschiebung des Plattenzentrums betrug 15cm . Gleichzeitig sank die im Spannglied wirkende Zugkraft auf 30kN . Die abrupte Formänderung der Struktur deutet auf anfangs vorhandene Haftspannungen zwischen Stahlbetonplatte und Untergrund hin.

Nach völliger Entlastung der Hebevorrichtung erfolgte die weitere Umformung ausschließlich unter Verwendung der Spannpressen. Im Spannglied sank mit fortschreitendem Höhengewinn in Schalenmitte die Spannkraft auf etwa 20kN . Kurz vor Erreichen einer Scheitelendhöhe von 89.5cm konnten erneut leicht steigende Pressenkräfte festgestellt werden. Abbildung 7.6a zeigt die Schale im Endzustand.

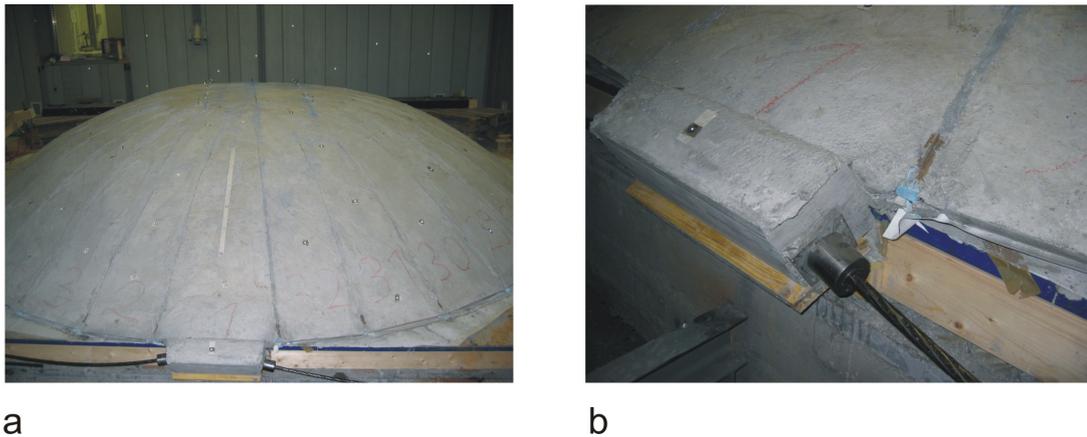


Abbildung 7.6: a) gekrümmte Schale im Endzustand; b) am Schalbodenrand eingehakte und infolge der Umformung verdrehte Spannstelle mit verankertem Spannglied

Zwecks Erfassung der im Zuge der Umformung auftretenden Deformationen erfolgten Messungen mittels Photogrammetrie und Laserscanning [34]. Die dabei erreichbare σ -Genauigkeit liegt bei $\pm 0.5\text{mm}$ für die photogrammetrisch erfassten Daten und bei $\pm 2\text{mm}$ für die Ergebnisse der Laserscans. Hierbei bedeutet eine σ -Genauigkeit von z.B. $\pm 0.5\text{mm}$, dass sich wahrer und gemessener Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% um nicht mehr als $\pm 0.5\text{mm}$ unterscheiden. Mittels Photogrammetrie wurde die Verschiebung einzelner, zuvor mittels Messmarken auf der Schale markierter Punkte erfasst. Im Gegensatz dazu ermöglichte der Einsatz von Laserscanning die nahezu flächige Erfassung der Deformationen — im Falle der Betonschale mit einem Punktabstand von kleiner 5mm . Während des Formgebungsprozesses erfolgten sieben Messdurchgänge — im Folgenden auch als Epochen eins bis sieben bezeichnet — sowie eine Nullmessung (Epoche null) vor Umformungsbeginn. Tabelle 7.1 gibt Auskunft über den Zeitpunkt der Messungen.

Epoche	Zeit	bestanschl. Kugel: Radius [m]	bestanschl. Kugel: Kalottenhöhe [m]	Anmerkung
0	17.3.2004 10:25			vor Formgebung
1	10:40			Anhebung
2	11:20	23.602	0.124	Ausbeulen
3	11:35	13.243	0.223	
4	11:55	7.995	0.369	
5	12:15	6.572	0.458	
6	12:38	4.691	0.659	
7	13:08	3.540	0.895	Versuchsende

Tabelle 7.1: Radien und Kalottenhöhen der bestanschließenden Kugeln für alle Messdurchgänge

Abbildung 7.7 zeigt links die Verformungen, die in den rechts als Quer- bzw. Längsprofil bezeichneten Schnitten auftraten. Da die Spannstelle, die in Abbildung 7.7 rechts durch ein schwarzes Quadrat symbolisiert wird, ortsfest blieb, verschob sich das Querprofil zwischen Epoche null und sieben zur Spannstelle hin. Aus den Längsschnitten geht hervor, dass der ungeschlitzte Schalenmittenbereich kaum verformt wurde.

Abbildung 7.8 zeigt einen Vergleich zwischen gemessenen, als rote Kurven eingetragenen Verformungsfiguren und in grün eingezeichneten, bestanschließenden Kugeln. Deren Ermittlung erfolgte so, dass möglichst viele Punkte der Schale möglichst nahe an der jeweiligen Kugel liegen. Um das Ergebnis nicht zu verfälschen wurde der offensichtlich flach gebliebene Schalenmittenteil für die Berechnung der bestanschließenden Kugel nicht berücksichtigt. Als Grundlage dienten jeweils 90 Punkte aus den mittels Laserscanner gemessenen Daten der Epochen zwei und sieben. 68% der verwendeten Punkte wiesen einen Abstand kleiner 1cm von den eingerechneten Kugelflächen auf. In Tabelle 7.1 finden sich die für die Epochen nach dem Ausbeulen der Platte berechneten Radien bzw. Kalottenhöhen der jeweils bestanschließenden Kugeln. Es zeigt sich, dass unmittelbar nach dem Ausbeulen die bestanschließende Kugel im Mittenbereich unterhalb des gemessenen Verformungsverlaufs liegt. Dies resultiert aus der anfangs kegelstumpfförmigen Deformationsfigur und zeigt, dass die in den gestauchten Polystyrolkeilen vor-

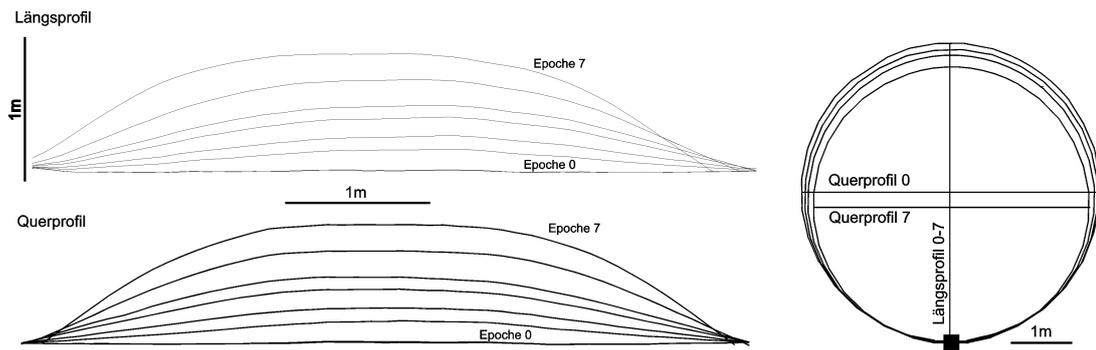


Abbildung 7.7: Links: Verformungsverläufe zu acht Zeitpunkten in zwei repräsentativen Querschnitten basierend auf Laserscandaten; Rechts: Veränderung des Schalenfußkreises im Zuge der Umformung basierend auf photogrammetrischen Daten [34]

handenen, tangentialen Druckspannungen zu diesem Zeitpunkt noch zu gering waren, um entlang der Segmente nennenswerte Krümmungen hervorzurufen.

Am Übergang von den Segmenten zum ungeschlitzten Mittenbereich entstanden Risse, die im Endzustand eine Breite von bis zu 2mm aufwiesen. Der Grund dafür liegt im Ebenbleiben des ungeschlitzten Schalenmittenteils. Die Abplattung des Mittenbereichs macht aus geometrischen Gründen einen Knickwinkel von etwa 12° notwendig, der sich in der schmalen Endzone der Segmente über kurze Distanz ausbildete.

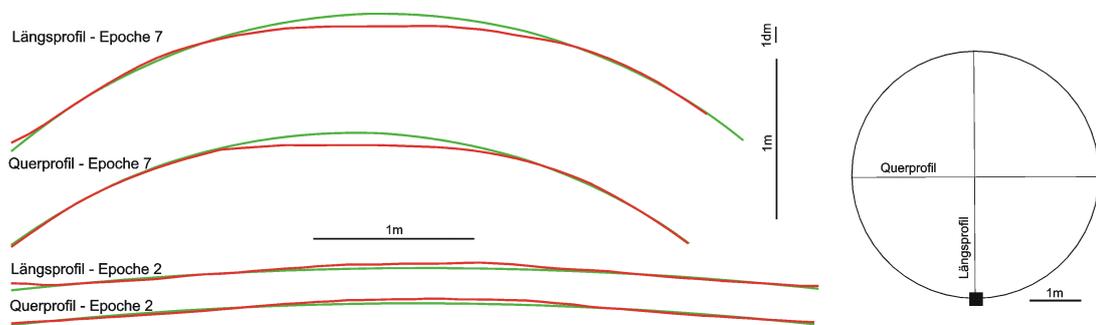


Abbildung 7.8: Vergleich zwischen gemessenen Verformungen (rot) und bestanschließenden Kugelabschnitten (grün) basierend auf photogrammetrisch gemessenen Daten [34]

Abbildung 7.9 zeigt die Höhendifferenzen zwischen der mittels Laserscanning gemessenen Verformungsfigur und der entsprechenden bestanschließenden Kugel.

Blaue Zonen weisen dabei solche Bereiche aus, in welchen die Punkte der umgeformten Struktur unterhalb der bestanschließenden Kugel liegen. Da die Aufnahmen des Laserscanners aufgrund der beschränkten Platzverhältnisse nur von einer Stelle aus erfolgen konnten, ergaben sich durch die Aufhängevorrichtung bzw. durch das Aufwölben der Schale abgeschattete Bereiche, für welche keine Messdaten vorliegen. Trotzdem lässt sich erkennen, wie anfangs der Mittenbereich über, später hingegen unter der bestanschließenden Kugel liegt. Außerdem vermitteln die Bilder einen Eindruck davon, in welchem Grad die angestrebte Rotationssymmetrie der Zielform erreicht wurde.

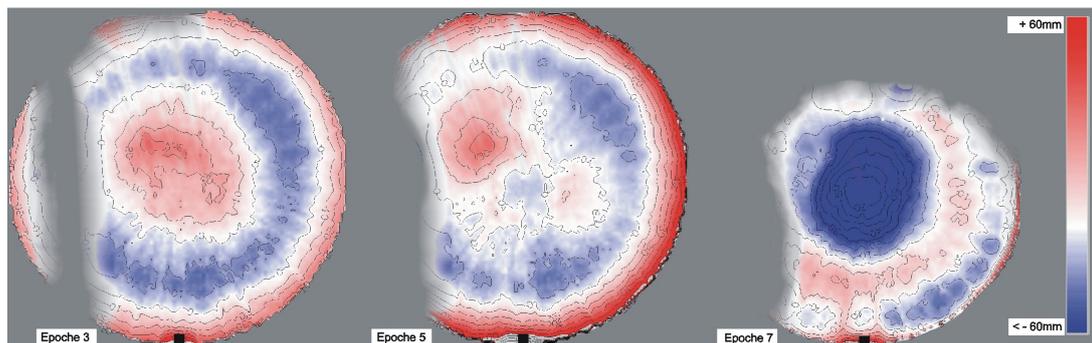


Abbildung 7.9: Farbgekodierte Höhendifferenz zwischen mittels Laserscanning gemessenen Verformungen und bestanschließender Kugel für drei Messepochen [34]

Zur Abschätzung der statischen Wirksamkeit der XPS-Keile kann der Quotient N_θ/H_a herangezogen werden. Aus der Vorspannkraft von im Endzustand $20kN$ resultiert bei einem Radius des Kuppelfußkreises von etwa $2.4m$ und unter Vernachlässigung der zwischen Schale und Untergrund auftretenden Reibungskraft eine am Schalenfußring wirksame, horizontale Umlenkraft von $H_a = -\frac{20}{2.4} = -8.33kN/m$. Bei einer Fließspannung des Fugenmaterials von $0.6MN/m^2$ und einer Segmentquerschnittshöhe von $2.0cm$ beläuft sich die in tangentialer Richtung vorhandene, längenbezogene Kraft auf $N_\theta = -0.6 \cdot 0.02 = -0.012MN/m$. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass es im extrudierten Polystyrol zu keiner Wiederverfestigung kommt. Für das Verhältnis N_θ/H_a ergibt sich so ein Wert von 1.44. Unter Zuhilfenahme von Abbildung 5.8 zeigt sich, dass die Wirkung der Polystyroleinlagen in einer Reduzierung des Maximums von M_φ um 40% im Vergleich zum Zustand ohne XPS-Keile besteht.

Nach Abschluss der Spannarbeiten durchgeführte Breitenmessungen an den XPS-Keilen zeigten im Schalenfußbereich Restzwickelbreiten zwischen $1.1cm$ und $2.4cm$. Die kleinsten Zwickelbreiten ergaben sich im Nahbereich der Spannstelle, wo die Kräfte infolge Spanngliedreibung am größten waren. Im der Verankerungsstelle gegenüberliegenden Schalenfußbereich, wo die geringsten Reibungskräfte zu

erwarten waren, ließen sich Restkeilbreiten von 2.0cm bis 2.4cm feststellen [18]. Eine Restbreite von 1.1cm am Schalenumfang bedeutet eine Nenndehnung von -80% bzw. wahre Dehnung von -1.65 . Wie aus Abbildung 2.3 hervorgeht, liegt diese am Anfang des Verfestigungsbereichs.

7.1.3 Durchführung und Ergebnisse des Traglastversuchs

Zur Ermittlung des Tragverhaltens der oben beschriebenen Vieleckkuppel erfolgte ein Belastungsversuch bis zum Bruch. Bei der aufgebrachten Last handelte es sich um Gewichte, die im ungeschlitzten Schalenumfang möglichst gleichmäßig aufgeschichtet wurden. Abbildung 7.10a zeigt das Gerüst, von welchem aus das Auflegen der Lastkörper vor sich ging. Die im Bild erkennbaren, weißen Schuttsäcke verhinderten das Abrutschen der Lasten vom Schalenscheitel. Zur Erfassung der auftretenden Deformationen dienten induktive Wegaufnehmer (siehe Abbildung 7.10b), sowie photogrammetrische Messungen. Die Position der Wegaufnehmer lässt sich den Abbildungen 7.10b bzw. 7.12 entnehmen.



a



b

Abbildung 7.10: a) Aufbringen der Lasten im Schalenumfang [34]; b) Anordnung der Wegaufnehmer zur Messung der auftretenden Deformationen [18]

Das Aufbringen der Gewichte beanspruchte einen Zeitraum von etwa zwei Stunden. Wie Abbildung 7.11 zeigt, konnten bis zu einer Laststufe von 1600kg nur an den Wegaufnehmern zwei und vier nennenswerte Verformungen gemessen werden. Ab diesem Grad der Belastung ließen sich in weiten Schalenumfangsbereichen klaffende Spalte zwischen den XPS-Keilen und den Stahlbetonsegmenten beobachten. Erstere waren somit nicht mehr überdrückt und lieferten demnach keinen Beitrag mehr zur Systemsteifigkeit der Vieleckkuppel. Dies erklärt auch die ab dieser Laststufe überproportional zunehmenden Verformungen. Wie Abbildung

7.12 erkennen lässt, senkte sich der Schalenmittenbereich, während die untere Hälfte der Kuppelsegmente nach außen gebogen wurde. Die Messungen zeigen an, dass sich die Vieleckkuppel nicht gleichmäßig verformte. Die Ursache dafür lag vermutlich in Bauungenauigkeiten bzw. unvermeidbarer Asymmetrie bei der Aufbringung der Lasten.

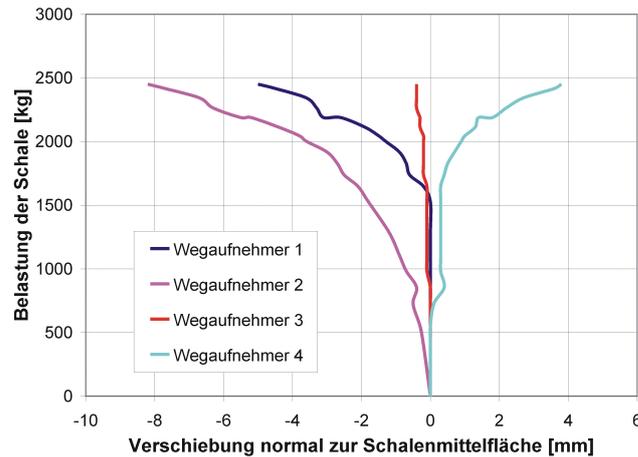


Abbildung 7.11: Ergebnisse der Verformungsmessungen mittels induktiver Wegaufnehmer [34]

Bei einer Belastung von 2480 kg sank die Struktur nach einer ungefähr 30 Sekunden andauernden Zeitspanne anschwellender Knackgeräusche in sich zusammen. Abbildung 7.13a bzw. b zeigt den resultierenden Bruchkegel. Wie man sieht, versagten die Kuppelsegmente in ihren oberen Drittelpunkten bzw. teilweise in Segmentmitte (Abbildung 7.13b rechts), während die Lage der Fußpunkte infolge des intakt gebliebenen Spannglieds unverändert blieb.

Zur überschlagsmäßigen rechnerischen Überprüfung der Traglast der Stahlbetonschale lässt sich das in Abbildung 7.14 dargestellte statische System heranziehen. Dieses zeigt einen Schnitt entlang einer Segmentachse. Am Übergang von Kuppelsegment zu Mittenteil wird vereinfachend ein plastisches Gelenk angenommen, welches vom Umformungsprozess herrührt. Die Tatsache, dass es im Zuge des Traglastversuchs an dieser Stelle zu einer Beanspruchungsumkehr und somit Reduzierung des dort wirkenden Biegemoments kommt, bleibt dabei unberücksichtigt. Dies führt zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Traglast. Bei Vernachlässigung des Eigengewichts tritt unter den Einwirkungen $M_{pl,i}$ und R die größte Biegebeanspruchung etwas oberhalb der Segmentmitte auf. Vereinfachend wird das, sich im Zuge des Traglastversuchs bildende Fließgelenk in Segmentmitte angesetzt, was zu einer Überschätzung der tatsächlichen Tragreserven führt.

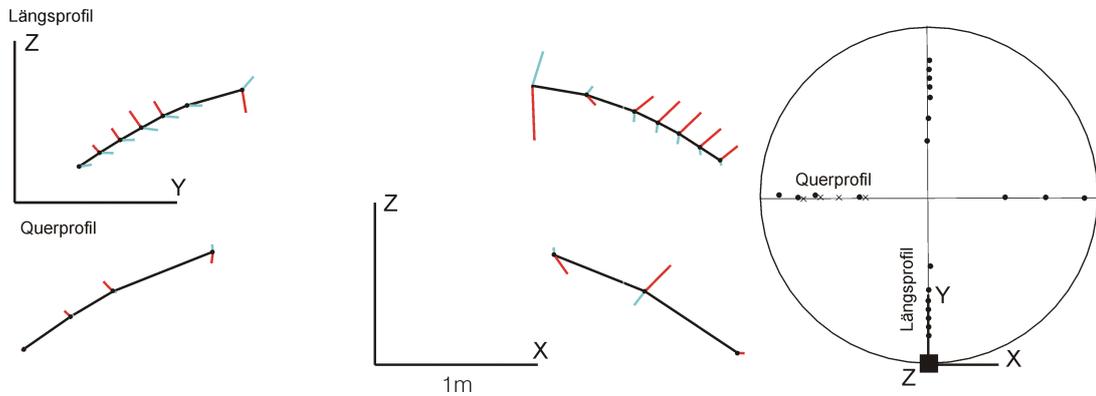


Abbildung 7.12: Links: Mittels photogrammetrischer Messung ermittelte, 30fach vergrößerte Deformationen von unbelastetem Zustand (blau) über Laststufe 1600kg (schwarz) zu Laststufe 2300kg (rot); Rechts: Position der zugehörigen Messmarken (Punkte) sowie der induktiven Wegaufnehmer (Kreuze) auf der Schale [34]



a



b

Abbildung 7.13: a) Bruchbild unmittelbar nach dem Versagen der Struktur [34]; b) Kraterförmige Versagensform nach dem Entfernen der Belastungskörper

Kalottenhöhe $f = 0.895m$ sowie Krümmungsradius $r_1 = 3.540m$ entsprechen den Werten der bestanschließenden Kugel nach Abschluss der Formgebung (siehe Tabelle 7.1). Aus den Abmessungen $L_i = 0.8m$ bzw. $L_s = 1.8m$ gemäß Abbildung 7.1 und dem Krümmungsradius r_1 ergeben sich die Winkel $\varphi_i = 12.9^\circ$ und $\varphi_a = 42.1^\circ$ sowie die weiteren geometrischen Bestimmungsstücke $f_s = 0.82m$, $r_{0,s} = 1.58m$ und $\beta = 27.51^\circ$. Der Größtwert der Exzentrizität der Resultierenden R relativ zur Stabachse ergibt sich in Segmentmitte zu $e_0 = 0.114m$.

Die Abschätzung des Einflusses der Theorie 2. Ordnung auf die Traglast erfolgt auf Basis der Deformationen kurz vor dem Kollaps der Struktur. Die Verformungsverläufe in Abbildung 7.11 liefern eine größte Verschiebung in Segmentmitte von $8mm$. Aus der Darstellung der Deformationen in Abbildung 7.12 geht hervor, dass die Messungen mittels induktiver Wegaufnehmer gerade an jenem Segment erfolgten, welches die kleinsten Verformungen aufwies. Für die Laststufe $2300kg$ ergibt sich in der rechten Hälfte des Querprofils ein im Vergleich zur linken Hälfte um den Faktor 8.5 mal größerer, nach außen gerichteter Verformungsweg. Als Schätzwert für die nach Theorie 2. Ordnung anzusetzende Verschiebung der Segmentmitte bei Erreichen der Traglast wird daher $e^{II} = 0.8 \cdot 8.5 = 3.2cm$ angenommen. Dies führt auf eine Gesamtexzentrizität von R in Bezug auf die Bewehrungslage von $e_{ges} = e_0 + e^{II} + d - h/2 = 0.151m$.

Die Berechnung der plastischen Momente $M_{pl,i}$ und $M_{pl,m}$ erfolgt mittels Blockdiagramm. Aus den drei Bewehrungsstäben je Segment mit Durchmesser $5mm$ resultiert in Längsrichtung eine Stahlfläche von $0.59cm^2$. Bei einer mittleren Stahlfließspannung von $f_y = 550MN/m^2$ führt dies im Grenzzustand der Tragfähigkeit auf eine Stahlzugkraft von $32.3kN$. Als Betondruckfestigkeit kommt der aus Versuchen an Probekörpern erhaltene Mittelwert von $55.9MN/m^2$ in Ansatz. Mit den Breiten $b_{s,i} = 0.14m$ und $b_{s,m} = 0.29m$ am inneren Segmentende bzw. in Segmentmitte sowie unter Vernachlässigung des Einflusses von R auf die Druckzonenhöhe ergibt sich $M_{pl,i} = 0.418kNm$ bzw. $M_{pl,m} = 0.454kNm$.

Anhand von Abbildung 7.14 lässt sich

$$R = \frac{2 M_{pl,m} - M_{pl,i}}{2 e_{ges}} = 1.62kN \quad (7.1)$$

ermitteln. Wie man sieht, reduziert $M_{pl,i}$ die Traglast beträchtlich. Bei $n_s = 32$ Segmenten beläuft sich die aufnehmbare Gesamtlast auf

$$L = n_s R \sin \beta = 23.98kN \quad . \quad (7.2)$$

Dies stimmt gut mit dem im Rahmen des Traglastversuchs ermittelten Wert von $L = 2480 \cdot 9.81/1000 = 24.33kN$ überein.

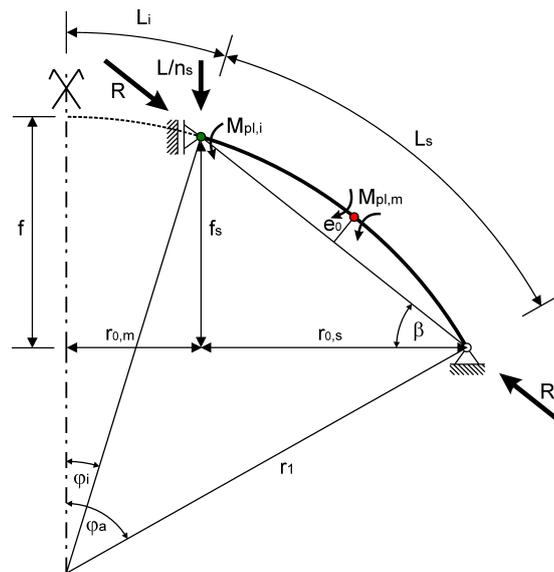


Abbildung 7.14: Vereinfachtes statisches System zur Abschätzung der Traglast der Stahlbetonkuppel

7.2 Versuche mit Eisschalen

7.2.1 Überblick

Die im Folgenden beschriebene Versuchsserie mit fünf Schalen aus glasfaserbewehrtem Eis fand im Labor des Instituts für Tragkonstruktionen statt. In dem zur Verfügung stehenden, improvisierten Kühlraum konnten Tiefsttemperaturen zwischen -1°C und -10°C erzeugt und über längere Zeit gehalten werden. Als Kühlaggregat diente eine Klimateinheit, wie sie gewöhnlich bei Kühlwagen Verwendung findet. Da die Versuche im Sommer erfolgten und die Leistung des Kühlaggregats gerade noch für das zu kühlende Raumvolumen ausreichte, schwankten die erreichten Tiefsttemperaturen in Abhängigkeit von den herrschenden Außenklimaverhältnissen. Aus Platzgründen beschränkten sich die Durchmesser der ebenen Ausgangsformen auf 5.0m bis 5.2m .

Im grundlegenden Aufbau bzw. in den zur Herstellung erforderlichen Arbeitsschritten glichen sich die fünf Versuchsschalen weitgehend. Wie bei der Schale aus Stahlbeton dienten gerade Bretter — eines je Plattensegment — als Randschalung (siehe Abbildung 7.15a). Im Zentrum der späteren Kreisplatte befand sich, wie ebenfalls aus Abbildung 7.15a ersichtlich, die im Schalboden versenkte, pneumatische Hebevorrichtung. Diese bestand aus einem Ballonwagenheber, wel-

cher im aufgeblasenen Zustand einen annähernd zylinderförmigen Pneu mit einer kreisförmigen Druckfläche von $0.5m$ Durchmesser darstellte.

Die Eisschalen wiesen Querschnittshöhen von $3cm$ bis $4cm$ auf. Zur Gewährleistung einer ausreichenden Überdeckungshöhe für das am Umfang angeordnete Spannglied war es erforderlich, einen Randstreifen von $12cm$ Breite mit einer im Vergleich zur sonstigen Plattendicke größeren Querschnittshöhe auszuführen. Die Ausbildung der dazu erforderlichen Stufe im Schalboden erfolgte mittels einer $3cm$ starken Schicht aus XPS-Platten bzw. Trittschalldämmung, welche wie aus Abbildung 7.15b hervorgeht, im Plattenregelbereich aufgelegt wurde.

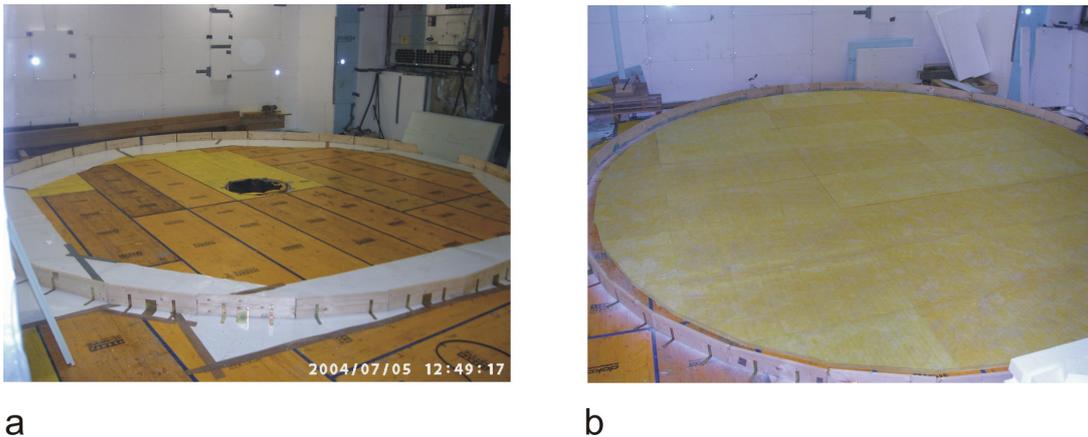


Abbildung 7.15: a) Randabschalung aus Brettern sowie im Schalboden versenkte pneumatische Hebevorrichtung in Kreismitte; b) Zusatzschicht zur Herstellung eines Höhensprungs am Plattenumfang [11]

Zur Abdichtung der Schalform diente, wie Abbildung 7.16a zeigt, eine Kunststoffolie auf welcher die in radialer Richtung verlegten Stauchungskeile fixiert wurden (siehe Teilbild b). Im Gegensatz zur oben beschriebenen Betonschale kam nicht extrudiertes, sondern expandiertes Polystyrol als Keilmaterial zur Anwendung. Der Grund hierfür lag in der im Vergleich zu XPS um etwa 80% geringeren Fließspannung von EPS, welche besser zum relativ weichen Material Eis zu passen schien. Nach Würfeldruckversuchen an mehreren EPS-Probekörpern (siehe [23]) fiel die Wahl auf EPS mit der Produktbezeichnung Austrotherm *EPS – W20*.

Die Ermittlung der Keilgeometrie erfolgte wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Als angestrebte Fugenstauchung im umgeformten Endzustand wurde eine Nenndehnung von -0.7 bzw. -0.85 gewählt. Bei diesen Stauchungen ergaben sich im Rahmen der Druckversuche für EPS des Typs Austrotherm *EPS – W20* Spannungen von $-0.2MN/m^2$ und $-0.3MN/m^2$.

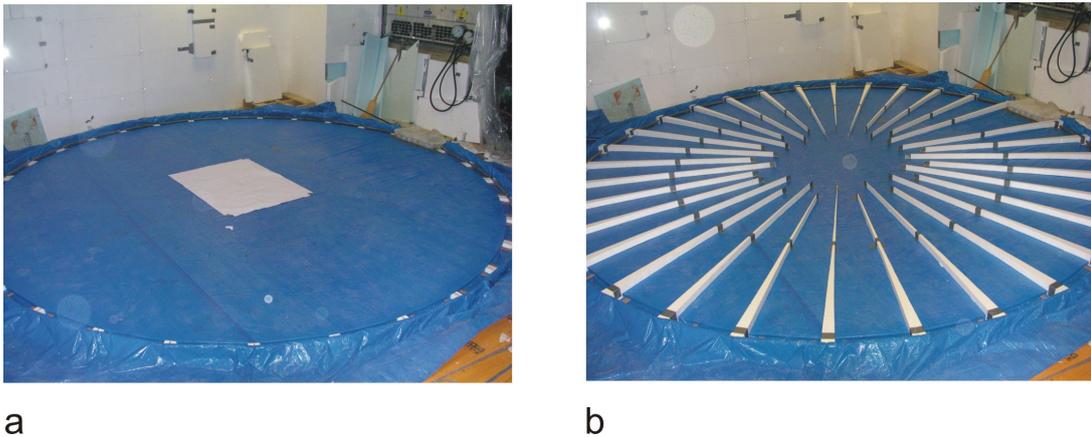


Abbildung 7.16: a) Mittels Folie abgedichtete Schalform [11]; b) radial angeordnete Styroporkeile als spätere Stauchungsfugen [11]

Abbildung 7.17 zeigt die typische Ausbildung des Schalenrandbereichs. Die Lage des Spannglieds, bei dem es sich um eine VSL Monolitze ST 1570/1770 Litze 0.62" mit PE-Ummantelung und Korrosionsschutzfett handelte, wurde so festgelegt, dass dessen Querschnittsschwerpunkt in Höhe der Plattenunterseite lag. Auf diese Weise sollten die Umlenkkräfte infolge Spannkraft Randmomente erzeugen, die das Abheben der Schale unterstützen. Damit es zu keiner lokalen Überbeanspruchung des Eises an der Spanngliedinnenseite infolge Umlenkkräften kommt, wurde die zur Verfügung stehende Anpressfläche, die sich aus dem Spanngliedaußendurchmesser von 2cm ergibt, erhöht. Dies geschah, indem auf das Spannglied Schlauchstücke von der Länge je einer Segmentbreite mit Durchmesser 2.5cm aufgefädelt wurden (siehe Abbildung 7.17). Zur Aufnahme von im Bereich des Spannglieds auftretenden Zugspannungen wurden überdies, wie Abbildung 7.17 zeigt, Glasfasermattenstreifen um das Spannglied herum geführt.

Die Eisherstellung erfolgte in dünnen Schichten von jeweils etwa 5mm Dicke. Diese Vorgehensweise lieferte hinsichtlich der Eisqualität die besten Ergebnisse [23]. Bei Erreichen einer entsprechenden Eisdicke wurde die aus Glasfasermatten bestehende Bewehrungsschicht aufgelegt und so gut als möglich straff gezogen. Dabei erwies es sich als hilfreich, die Matten leicht anzufeuchten, was deren anfängliche Haftung am Eisuntergrund verbesserte.

Bei den zum Einsatz gekommenen Glasfasermatten handelte es sich hauptsächlich um Gewebe mit einer Maschenweite von 5mm, dessen Fäden eine Dichte von $2.74g/cm^3$ sowie eine Feinheit von 640tex aufwiesen. Letzteres bedeutet ein Fadengewicht von 640g je 1000m Länge [32], was zusammen mit der gegebenen Dichte auf eine Querschnittsfläche von $0.233mm^2$ pro Faden führt. Die Festig-

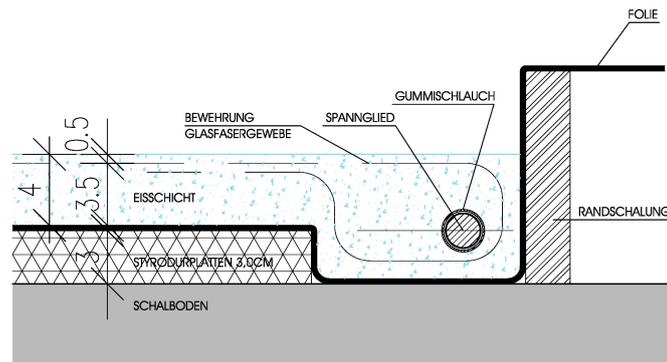


Abbildung 7.17: Typisches Randdetail einer Eisschale [11]

keit der Filamentgarne betrug $1593.28\text{N}/\text{mm}^2$ bei einer Dehnung von 2.31%, die Dehnsteifigkeit im linear elastischen Bereich $78460\text{N}/\text{mm}^2$. Zur Ermittlung der mechanischen Kenndaten, die am Institut für Textil- und Bekleidungstechnik der TU Dresden nach *ISO 3341* erfolgte, wurden Mittelwerte aus 20 Zugversuchen gebildet. Neben dem oben beschriebenen, von der TU-Dresden bezogenen Material kam bei zwei Versuchen handelsübliches Glasfasergewebe, welches gewöhnlich zur Bewehrung von Putzschichten dient, zur Anwendung. Von diesem liegen allerdings keine detaillierten mechanischen Kennwerte vor.

Abbildung 7.18 zeigt das typische Verlegemuster der Bewehrung für ein Segment sowie den Schalenmittenbereich. Die am Segmentrand angeordneten Streifen, deren Längsfäden parallel zum jeweiligen Segmentrand liefen, reichten bis in den ungeschlitzten Schalenmittenbereich. Dort wurden sie mittels eines Übergreifungsstoßes von etwa 20cm Länge mit der im Mittenbereich befindlichen Bewehrung, die aus zwei um 45° zueinander verdrehten Mattenstücken bestand, verbunden [23]. Bei den Bewehrungsstreifen in Segmentmitte war dies nicht der Fall. Sie endeten, wie Abbildung 7.18 zeigt, vor dem Übergang zum Schalenmittenbereich und dienten zur Abdeckung des durch die beiden Randstreifen freigelassenen Segmentbereichs.

Die Anordnung der Bewehrung erfolgte hauptsächlich in Hinblick auf ihre risseverteilende Wirkung. Nur für die Bewehrung am Übergang zum verdickten Plattenrandbereich wurde überprüft, ob diese zur Aufnahme des aus der exzentrischen Lage des Spannglieds herrührenden Randmoments ausreicht [23]. Die sonstige Bewehrungsanordnung basierte, da noch kein Bemessungsalgorithmus zur Verfügung stand, auf Ingenieurgefühl.

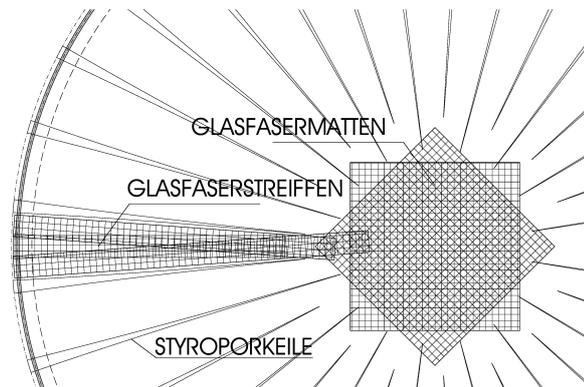


Abbildung 7.18: Typische Anordnung der Glasfaserbewehrung [11]

7.2.2 Erster Eisschalenversuch

Konstruktive Durchbildung

Bei der ersten Versuchsschale aus Eis entsprach der Grundriss der ebenen Ausgangsform exakt dem schon im Falle der Stahlbetonschale verwendeten. Lediglich die Regeldicke der Schale wurde von 2cm auf 3cm , Querschnittshöhe bzw. Breite des Verstärkungsringes am Umfang auf 6cm bzw. 12.5cm erhöht. Als Spannstelle kam, wie Abbildung 7.19a zeigt, jene aus dem Stahlbetonschalenversuch zur Anwendung.

Der Abstand zwischen Glasfaserbewehrung und Schalboden betrug 2.5cm . Abbildung 7.19b zeigt die fertig ausgelegte Bewehrung, die je Segment aus zwei randparallelen Streifen von je 16cm Breite, sowie aus einem dreiecksförmigen Zwickel in Segmentmitte bestand. Nachträglich stellte sich die zu geringe Höhe der EPS-Keile als Problem heraus. Da diese nur bis zur planmäßigen Plattenoberseite reichten, kam es zu einer unbeabsichtigten Überdeckung der Keile mit einer Eisschicht von bis zu 8.5mm Dicke [23]. Aufgrund der Transparenz des Eises wurde dieser Mangel erst nach dem Umformungsversuch entdeckt.

Verlauf des Umformungsprozesses

Die Transformation der ebenen Ausgangsform zur Vieleckkuppel erfolgte analog zur Stahlbetonschale. Den ersten Schritt bildete das Anheben der Kreisplattenmitte um 1.4cm mittels pneumatischer Hebevorrichtung. Der dazu erforderliche Luftdruck betrug 0.10bar , welcher später bis zum Eintritt einer Mittenhebung von etwa 20cm beibehalten wurde. Danach folgte in Schritten von 5kN die Steigerung

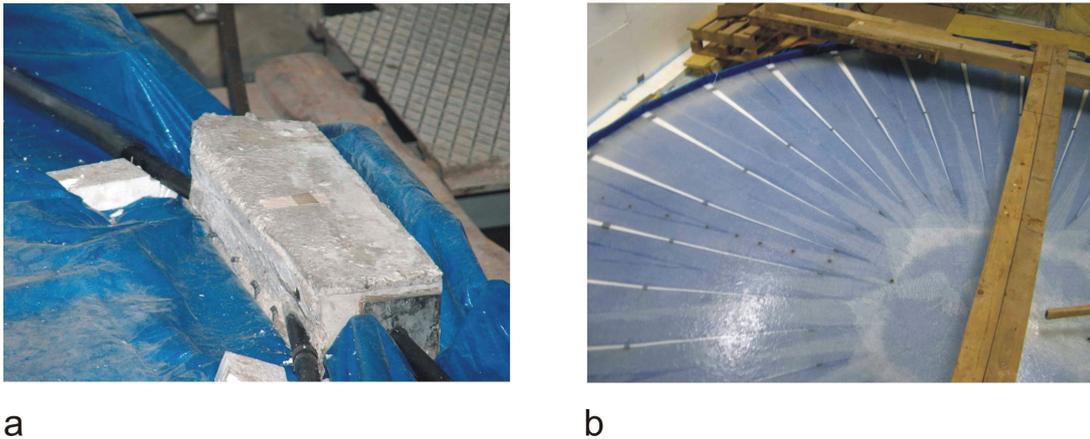
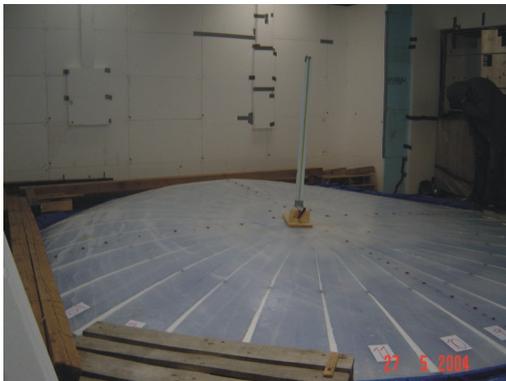


Abbildung 7.19: a) Wiederverwertung der Spannstelle aus dem Stahlbetonschalensversuch [23]; b) glasfaserbewehrte Eisscheibe im ebenen Ausgangszustand [23]

der Kraft im Spannglied mittels zweier, abwechselnd betätigter Pressen. Bei einer Spannkraft von etwa 35kN nahm die Verformung in Plattenmitte schlagartig auf einen Wert von 5.4cm zu. Wie Abbildung 7.20a zeigt, beulte die Gesamtstruktur unsymmetrisch aus. Gleichzeitig fiel die in den Pressen gemessene Spannkraft auf 25kN bzw. 17kN ab. Mit Fortschreiten der Spannarbeiten verstärkte sich die Asymmetrie der Schalenform. Abhilfe schaffte erst das Aufbringen von Gegengewicht am ausgebeulten Schalenteil mit dem die dort auftretenden Biegemomente infolge Umlenkraft vermindert werden konnten. Abbildung 7.20b zeigt, wie sich das beim Versuch anwesende Publikum dankenswerter Weise als Gegengewicht betätigte. Trotz allem ließ sich, wie man der Abbildung 7.21a entnehmen kann, das angestrebte Verformungsziel nicht erreichen. Die fertige Schale wies eine Höhe von 52cm anstatt der geplanten 88cm auf. Außerdem beschränkte sich der gekrümmte Bereich der Schalensegmente auf einen Randstreifen von etwa 1m Breite, während der Rest der Schale eben blieb. In Abbildung 7.21b lässt sich allerdings erkennen, dass die Glasfaserbewehrung zu einem Rissabstand im Eis von 5cm bis 10cm führte und somit ihren beabsichtigten Zweck erfüllte.

Wie nachfolgende Versuche zeigten, lag die Hauptursache für den unerwarteten Versuchsausgang in der Blockierung der Stauchungsfugen durch die über den EPS-Keilen befindliche Eisschicht.



a



b

Abbildung 7.20: *a)* unsymmetrisch ausgebeulte Schalenform [23]; *b)* behelfsmäßiges Geraderichten der Schale durch Auflast am ausgebeulten Schalenbereich unter tatkräftiger Mithilfe des anwesenden Publikums



a



b

Abbildung 7.21: *a)* Erste Versuchsschale im umgeformten Endzustand; *b)* Rissbild in den gekrümmten Segmentbereichen [23]

7.2.3 Zweiter Eisschalenversuch

Konstruktive Änderungen im Vergleich zur ersten Versuchsschale

Im Vergleich zur ersten Versuchsschale kam es zu folgenden Änderungen hinsichtlich der konstruktiven Durchbildung der ebenen Ausgangsform:

- Die Querschnittshöhe der EPS-Keile, welche die Stauchungsfugen bildeten, wurde auf 6cm erhöht. Nach Fertigstellung der Eisplatte ließen sich über die Plattenoberseite hinausragenden Keilteile problemlos entfernen.
- Zur Erhöhung der Biegesteifigkeit der Schalensegmente wurde deren Regeldicke von 3cm auf 4cm erhöht. Der planmäßige Abstand zwischen Bewehrung und Plattenunterseite betrug nun 3.5cm .
- Anstatt dreiecksförmig zugeschnittener Glasfasermattenstreifen wurden entlang der Kuppelsegmentachsen Mattenstreifen angeordnet, die wie auch jene an den Segmenträndern eine konstante Breite von 16cm aufwiesen. Somit ergab sie das in Abbildung 7.18 dargestellte Verlegemuster.
- Um den Durchmesser des ungeschlitzten Schalenmittenteils, der im Falle der Umformung annähernd eben bleibt, zu verkleinern, wurde jeder zweite der EPS-Keile um 20cm zur Plattenmitte hin verlängert (siehe Abbildung 7.18). Die damit im Platteninnenbereich erzielte Verdopplung des Fugenabstands in tangentialer Richtung führt für die verlängerten Keile auf größere Keilbreiten. Dadurch ließen sich diese unter Beibehaltung einer kleinsten ausführbaren Breite von etwa 2mm näher an das Plattenzentrum heranzuführen

Verlauf des Umformungsprozesses

Die erste Phase des Umformungsprozesses zur Schale bildete das Anheben der Plattenmitte um diesmal 1.2cm unter Verwendung des Ballonwagenhebers. Anschließend erfolgte die Steigerung der Kraft im Spannglied in Schritten von 5kN mittels abwechselnder Betätigung der beiden Spannpressen. Bis zu einer Spannkraft von 50kN stieg die vertikale Mittenverformung nur auf 2.4cm an. Danach beulte die Platte aus, wodurch sich eine vertikale Verschiebung in Plattenmitte von 24.7cm einstellte. Gleichzeitig fielen die an den beiden Spannpressen gemessenen Kräfte im Zugglied auf 17kN bzw. 13kN ab. Auf die pneumatische Hebevorrichtung, die bis zu diesem Zeitpunkt den Umformungsprozess bei konstant gehaltenem Innendruck unterstützte, konnte nun verzichtet werden. Die weitere Transformation zur Schale geschah ausschließlich mittels des Spannglieds wobei

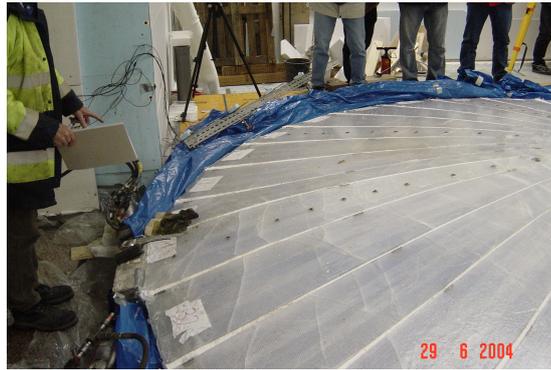


Abbildung 7.22: Beginn der Ausbildung einer Delle im Nahbereich der Spannstelle

sich die an den Pressen ablesbaren Spannkkräfte bei $12kN$ bis $17kN$ einpendelten [23].

Ab einer Stichhöhe von $53.8m$ begann sich das Kuppelsegment vor der Spann-
stelle im Vergleich mit dem links davon gelegenen Segment Nummer zwei (siehe
Abbildung 7.24 links) übermäßig zu verkrümmen. Abbildung 7.22 zeigt den Be-
ginn dieser Entwicklung, die in einer Tordierung von Segment Nummer zwei re-
sultierte. Durch die in tangentialer Richtung wirkenden Druckkräfte bildete sich
im weiteren Verlauf der Spannarbeiten eine Delle aus. Dennoch konnte mit $0.86m$
die angestrebte Scheitelhöhe fast erreicht werden (siehe Abbildung 7.23a). Teilbild
7.23b zeigt die von innen beleuchtete Eisschale.



a



b

Abbildung 7.23: a) Zweite Versuchsschale im umgeformten Endzustand mit Delle
im Bereich der Spannstelle; b) Von innen beleuchtet [23]

Bei Vernachlässigung der Reibung zwischen Schalenrand und Untergrund führen die am Ende der Formgebung gemessenen Spannkkräfte von $12kN$ bzw. $17kN$ (siehe [23]) bei einem Radius des Schalenfußkreises von $2.4m$ auf in horizontaler Richtung wirkende Umlenkkräfte von $H_a = -5.00kN/m$ bzw. $-7.08kN/m$. Unter der Annahme, dass in den Stauchungsfugen die geplante Nennstauchung von 70% eintrat, ergibt sich in den EPS-Keilen eine konstante Spannung von $-0.2MN/m^2$ in Umfangsrichtung. Bei einer Querschnittshöhe von $4cm$ führt dies auf eine verteilte Normalkraft von $N_\theta = -0.04 \cdot 0.2 = -0.008MN/m$. Somit liefert der dimensionslose Quotient N_θ/H_a Werte zwischen 1.6 und 1.13 . Im Vergleich zu einer Schale ohne EPS-Einlagen in den Stauchungsfugen bedeutet ein Wert von $N_\theta/H_a = 1.6$ (siehe Abbildung 5.8) bei Vernachlässigung des Schaleneigenweights ein um 44% vermindertes Moment M_φ am Übergang von Segment zu Schalenmittbereich. $N_\theta/H_a = 1.13$ lässt auf eine Verminderung von M_φ um 31% schließen.

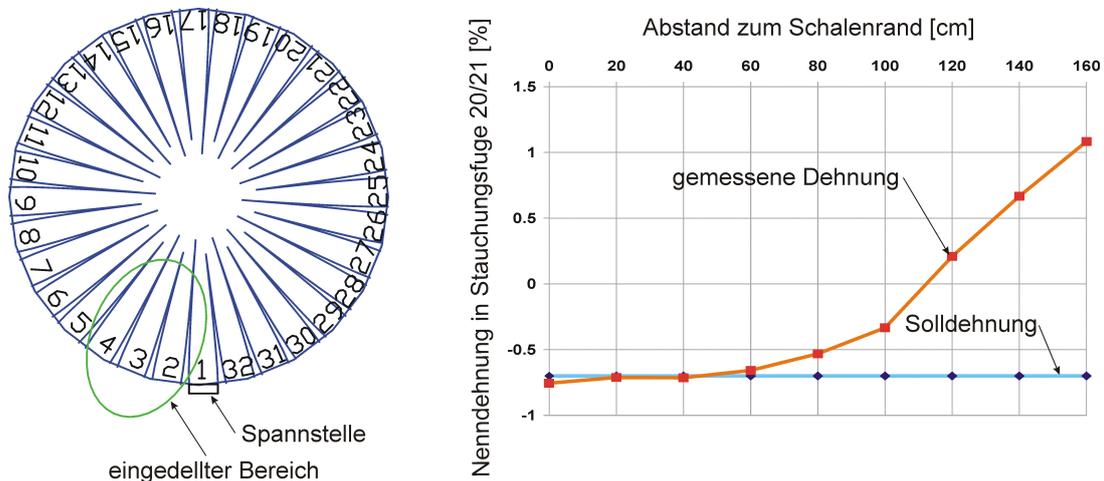


Abbildung 7.24: Links: Nummerierung der Segmente und Kennzeichnung des eingedellten Bereichs [23]; Rechts: Dehnungsverlauf an der Schalenoberseite im Keil zwischen den Segmenten 20 und 21

Wie sich nach Abschluss des Formgebungsprozesses zeigte, kam es in den Stauchungsfugen nicht zu jener gleichmäßigen Nennstauchung von 70% die der obigen Abschätzung der statischen Wirksamkeit der EPS-Fugen zugrunde liegt. Messungen der Fugenrestbreiten außen am Schalenfuß ergaben dort regellos verteilte Nennstauchungen zwischen 48% und 79% . Für die zwischen den Segmenten 20 und 21 gelegene Stauchungsfuge wurden außerdem die Restbreiten in Abständen von $20cm$ mittels Maßband an der Schalenaußenseite ermittelt [23]. Abbildung

7.24 rechts zeigt den daraus berechneten Verlauf der Nenndehnungen. Wie man sieht, kam es ab einem Randabstand von etwa 110cm zu einem Öffnen der Fuge.

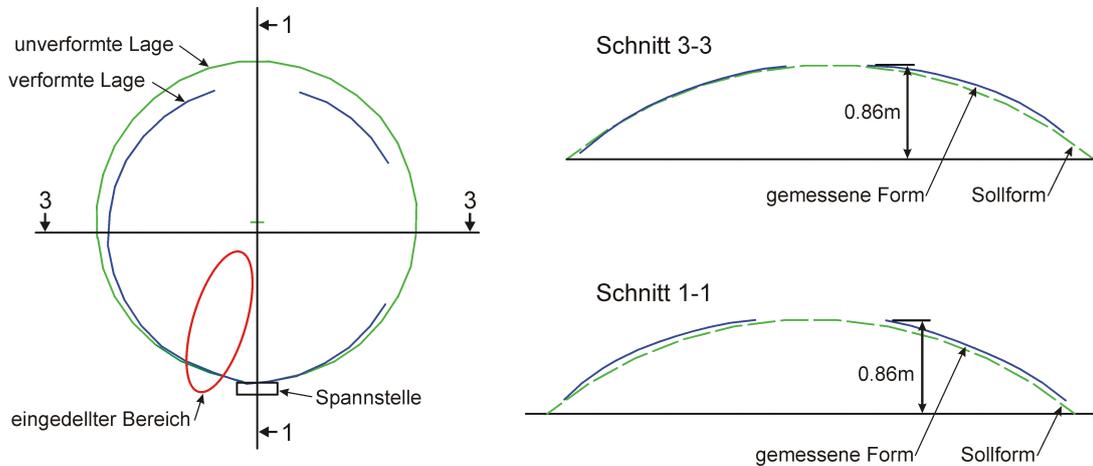


Abbildung 7.25: Links: Grundriss der Eisschale in Anfangs- sowie Endzustand; Rechts: Schnitte durch die Schale in ihrer Endlage und Vergleich mit der Sollform [23]

Die punktweise Erfassung des Verformungszustandes einzelner Segmente erfolgte mittels im Eis eingelassener Messmarken (siehe Abbildung 7.23a) auf photogrammetrischem Weg. Abbildung 7.25 zeigt im rechten Teilbild die im Endzustand gemessene Verformungsfigur für zwei Schnitte als blaue Kurven. Anhand der jeweils als grün strichlierte Kurve eingetragenen Sollform lässt sich erkennen, dass erzielte und geplante Schalenendform qualitativ gut übereinstimmen.

Eine nachträgliche Untersuchung der Schale legte die Vermutung nahe, dass die Delle im Nahbereich der Spannstelle durch eine lokal begrenzte Lageungenauigkeit des Spannglieds verursacht worden war. Dieses verlief nach Austritt aus der Spannstelle auf einer Länge von 1m um etwa 1cm über dem plangemäßen Niveau, was zu einem im Vergleich mit den Nachbarbereichen kleineren Randbiegemoment führte. Da die verwendete Spannstelle noch aus dem ersten, mit Stahlbeton durchgeführten Versuch stammte, und dort andere Querschnittshöhen als im Falle der Eisschalen vorlagen, war es schwierig, die Spannstelle so in die Randabschalung der Eisschale zu integrieren, dass Krümmung und vor allem Höhenlage des Spannglieds keine Unregelmäßigkeiten aufwiesen.

7.2.4 Dritter Eisschalenversuch

Beim Bau der ebenen Ausgangsform für den dritten Eisschalenversuch kam es im Vergleich zu den Vorgängermodellen hinsichtlich der angestrebten Zielhöhe zu

einer Änderung. Anstatt der bisher vorgesehenen 85cm sollten sich im Endzustand 111cm Stichhöhe einstellen. Die entsprechende Änderung der Geometrie der EPS-Keile erfolgte unter Zugrundelegung einer maximalen Nennstauchung von 85% .

Besondere Sorgfalt wurde auf die exakte Festlegung der Höhenlage des Spannlieds im Bereich der Spannstelle verwendet. Die erneute Wiederverwendung der Spannstelle aus dem Stahlbetonschalenversuch schien vertretbar.

Da die konstruktiven Probleme als großteils gelöst angesehen wurden, standen bei diesem Versuch die Gestaltungsmöglichkeiten der fertigen Schale im Vordergrund. Zur Erzielung besonderer Beleuchtungseffekte wurden deshalb Glasfaserlichtleiter in Höhe der Plattenmittelebene im Eis verlegt.



a



b

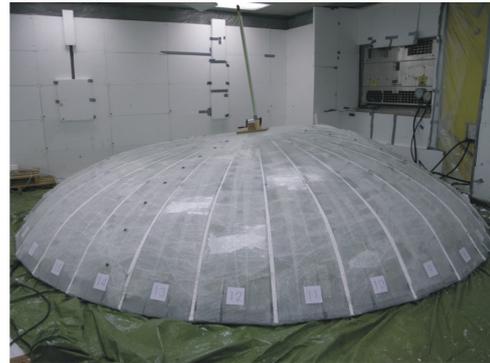
Abbildung 7.26: a) Rettungsversuch mittels Auflast; b) Eingedellter Bereich

Der Formgebungsprozess verlief gleich wie im Fall des zweiten Versuchs. Wieder krümmte sich das vor der Spannstelle gelegene Segment übermäßig, was in weiterer Folge zu einer Delle führte. Die Aufbringung von Auflast an den Rändern der ausbeulenden Segmente (siehe Abbildung 7.26a) verhinderte nicht das Einknicken dreier, der Spannstelle benachbarter Segmente (siehe Teilbild b). Wie man Abbildung 7.27a entnehmen kann, kam es auch zu Zerstörungen an der Schnittstelle zwischen Eisschale und Spannstelle, da sich letztere nicht wie geplant mit dem vorgelagerten Segment mitdrehte. Der Versuch musste vorzeitig abgebrochen werden. Abbildung 7.27b zeigt die erreichte Endform.

Trotz der Probleme im Rahmen des Transformationsprozesses zur Schale ließen sich, wie in den Abbildungen 7.28a und b dargestellt, mit den eingeleg-



a



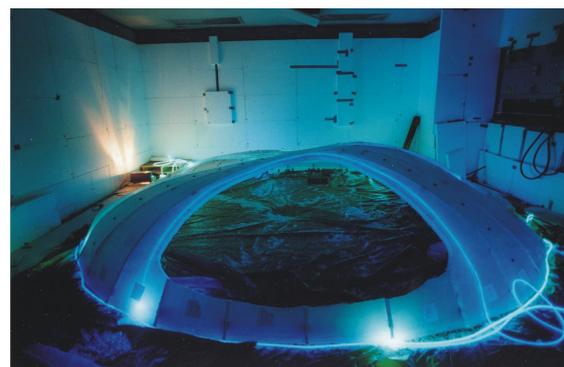
b

Abbildung 7.27: a) Zerstörung des Eissegments vor der Spannstelle; b) Erzielte Endform

ten Lichtleitern und durch nachträgliches Ausschneiden einzelner Schalenbereiche recht ansprechende visuelle Effekte erzielen.



a



b

Abbildung 7.28: a) Innenansicht der mit nachträglich ausgeschnittenen Öffnungen und Lichtleitern versehenen Eisschale [11]; b) Außenansicht der „Lichtleiterschale“ [11]

7.2.5 Vierter Eisschalenversuch

Konstruktive Änderungen im Vergleich zur zweiten Versuchsschale

Trotz aller Sorgfalt in Bezug auf die Lagegenauigkeit des Spannglieds führte im dritten Eisschalenversuch der gleiche Mechanismus zur Dellenbildung wie in den beiden vorangegangenen. Dies legte die Vermutung nahe, dass dessen Ursache in der Geometrie bzw. Spanngliedführung der verwendeten Spannstelle zu suchen sei, die zu einer ungleichmäßigen Belastung des vorgelagerten Segments führte. Bei genauer Betrachtung von Abbildung 7.19a erkennt man z.B., dass die Spanngliedenden nicht symmetrisch in Bezug auf die Ankerkörpermitte in den Betonkörper einmünden.

Um die wahrscheinliche Quelle der Probleme auszuschalten, wurde eine neue Spannstelle entworfen. Abbildung 7.29a zeigt einen Blick in die Schalung mit Bewehrung und Spanngliedführung. Im Vergleich zum zuvor verwendeten Ansatzkörper für die Spannpressen kam es zu folgenden konstruktiven Änderungen:

1. Die Breite der Spannstelle wurde von 45cm auf 70cm erhöht. Gleiches geschah für das davor befindliche Plattensegment bei gleichzeitiger Verschmälerung sämtlicher anderer 31 Segmente. Dies erleichterte das Herausführen der Spanngliedenden aus dem Ankerkörper, da in Folge der größeren, zur Verfügung stehenden Länge bei gleichen Umlenk winkeln den Spanngliedenden kleinere Krümmungen aufgezwungen werden mussten.
2. Die Tiefe der Spannstelle wurde so vergrößert, dass diese erst am Beginn des Regelplattenbereichs endete. Dadurch mündeten, wie Abbildung 7.29a zeigt, die Spannglieder unmittelbar am Segmentrand in die Spannstelle ein, womit eine genaue Führung des Spannglieds erreicht werden sollte.
3. Zur Schaffung einer biegesteifen Verbindung zwischen Ankerkörper und Eissegment sollte Glasfasergewebe, welches in den Ankerkörper eingegossen wurde, beitragen (siehe Abbildung 7.29b).
4. Zur Aufnahme von Schubspannungen, die sich im Zuge der Umformung in Folge unterschiedlicher Pressenkräfte zwischen Ankerkörper und vorgelagertem Eissegment ergeben, sollten dreiecksförmige Ausnehmungen in der Spannstelle dienen. Abbildung 7.29a zeigt die zur Herstellung dieser Ausnehmungen vorgesehenen Kompensationskörper aus Styropor.

Als Material für die Glasfaserbewehrung kam diesmal handelsübliches, gewöhnlich zur Armierung von Putzschichten benutztes Glasfasergewebe zur Anwendung. Dieses unterschied sich von dem von der TU-Dresden bezogenen Material dadurch, dass die Filamente, aus denen sich die als Rovings bezeichneten

Fäden des Mattengeleges zusammensetzten, in eine Kunststoffmatrix eingebettet waren. Es resultiert daraus eine gleichmäßigere Aktivierung der Filamente und somit bessere Wirksamkeit der Gewebefäden. Der Nachteil liegt im veränderten Verbundverhalten: Die Umhüllung mit Kunststoff vermindert die spezifische Oberfläche der Rovings. Wegen einfacher Verfügbarkeit der handelsüblichen Glasfasermatten und aus Kostengründen wurde dies in Kauf genommen.

Durch Zugabe von Lebensmittelfarbe im Bereich der obersten 5mm der Eisplatte erhielt die ebene Ausgangsform eine bläuliche Färbung (siehe Abbildung 7.30a). Dies sollte der späteren Schale besonderen optischen Reiz verleihen [11].



a



b

Abbildung 7.29: a) Schalung und Bewehrung der neuen Spannstelle [11]; b) Fertige Spannstelle mit Glasfasergewebe [11]

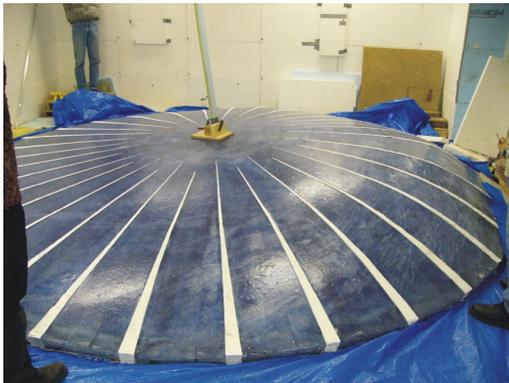
Bei der Herstellung der Eisfläche ergab sich das Problem, dass infolge der hohen Außentemperaturen die Leistung des Kühlaggregats kaum ausreichte, den Klimaraum auf unter 0° Celsius zu kühlen. Dies führte zu einem langsamen Fortschritt bei der Eiserzeugung [11].

Verlauf des Umformungsprozesses

Nach dem Heben der Plattenmitte unter Verwendung des Ballonwagenhebers und anschließender Aktivierung der Spannpressen stellte sich bald die in Abbildung 7.30a dargestellte, unsymmetrische Verformungsfigur ein. Im Bereich der Spannstelle verkrümmten sich die Segmente übermäßig, während die gegenüberliegenden Plattensegmente annähernd gerade blieben. Mit Fortschreiten der Spannarbeiten verstärkte sich die Asymmetrie der Schale. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Experimenten kam es jedoch zu keinem ungleichmäßigen Ausbeulen einzelner Segmente im Bereich der Spannstelle. Außerdem drehte sich diese, an-

ders als früher, wie beabsichtigt mit dem ihr vorgelagerten Kuppelsegment, sodass Zerstörungen an der Schnittstelle zwischen Eissegment und Spannstelle ausblieben.

Der Versuch, mittels Auflast in Form hilfsbereiter Zuseherinnen und Zuseher eine Korrektur herbeizuführen, scheiterte: Die belasteten Segmente knickten unter dem aufgebrachtten Gewicht ins Schaleninnere. Das danach fortgesetzte Anziehen des Spannglieds resultierte nur mehr in der Zerstörung weiterer Segmente am Übergang zum Schalenmittelnbereich (siehe Abbildung 7.30b). Dies war wohl Folge der großteils nicht mehr vorhandenen Druckkräfte in Umfangsrichtung. Die erreichte Kuppelhöhe lag bei 40cm.



a



b

Abbildung 7.30: a) Unsymmetrisch verformte Schale; b) Endzustand nach der versuchten Formkorrektur mittels Auflast [11]

Im Anschluss an das Umformungsexperiment durchgeführte Dreipunkt-Biegeversuche an Teilen der unbeschädigt gebliebenen Eissegmente zeigten, dass das verwendete kunststoffbeschichtete Glasfasergewebe nicht die Ursache für das Scheitern des Transformationsprozesses darstellte. Wie man der Abbildung 7.31, die einen gebrochenen Probekörper zeigt, entnehmen kann, bewirkte das kunststoffbeschichtete Glasfasergewebe Rissabstände von etwa 3cm. Bei sämtlichen Versuchen versagte die Biegedruckzone.

Nachträgliche Untersuchungen an den Resten der Eisschale förderten zwei mögliche Ursachen für das Scheitern des Umformungsversuchs zu Tage:

1. Im eben gebliebenen Bereich der Schale fanden sich unter den EPS-Keilen Eisschichten mit Dicken zwischen 2mm und 4mm. Infolge der langen Dauer des Eisherstellungsprozesses hatten sich die Styroporkeile von ihrer Unterlage gelöst und waren teilweise aufgeschwommen. Beim Umformungspro-

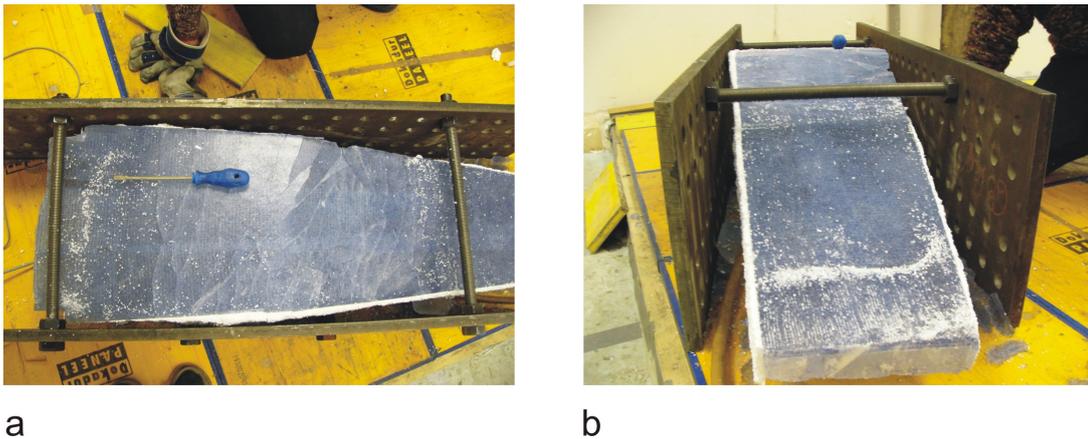


Abbildung 7.31: a) und b): Probekörper nach Durchführung eines Dreipunkt-Biegeversuchs

zess blockierten diese Eisschichten die Stauchungsfugen in unterschiedlichem Maß, was zur unregelmäßigen Schalenform führte.

2. Die unter der Eisschale befindlichen XPS-Platten, welche zur Herstellung des Höhensprungs zwischen Schalenregel- und verdicktem Schalenaußenbereich dienen, beeinflussten den Transformationsprozess zur Schale in negativer Weise. Wie aus Abbildung 7.30b ersichtlich, verkeilten sich einzelne XPS-Unterlagsplatten ineinander und drückten von unten gegen die Eissegmente.

7.2.6 Fünfter Eisschalenversuch

Konstruktive Änderungen im Vergleich zur vierten Versuchsschale

Zur Ausschaltung der im vorherigen Abschnitt genannten, möglichen Fehlerquellen wurden bei der Herstellung der fünften Eisschale im Vergleich zu ihrer Vorgängerin folgende Maßnahmen getroffen:

1. Um die Bildung von Eisbrücken unter den XPS-Keilen zu unterbinden, erfolgte die Verbindung zwischen Keilen und Untergrund durch vollflächige Verklebung mittels Silikon.
2. Anstatt der XPS-Unterlagsplatten kamen vergleichsweise viel weichere Trittschalldämmplatten (TDPT 30/30) zur Anwendung.

Die oben beschriebenen Dreipunkt-Biegeversuche lieferten keine Anhaltspunkte für negative Auswirkungen der kunststoffbeschichteten Glasfasermatten hinsichtlich Tragverhalten oder Verformungsvermögen. Trotzdem griff man bei der Bewehrung des Eisschale so weit als möglich auf das von der TU Dresden bezogene Glasfasergewebe zurück. Wegen Materialmangels bestand jedoch ein Drittel der eingesetzten Bewehrungsmatten wieder aus dem kunststoffbeschichteten Glasfasermaterial.

Als Spannstelle kam der für den vorhergehenden Schalenversuch hergestellte Betonkörper zum Einsatz. Die in den Ankerkörper eingelassene, beim Umformungsversuch beschädigte Glasfaserbewehrung musste durch neue ersetzt werden. Die Verbindung zwischen Bewehrung und Betonkörper erfolgte durch Verkleben mittels Kunstharz [11].

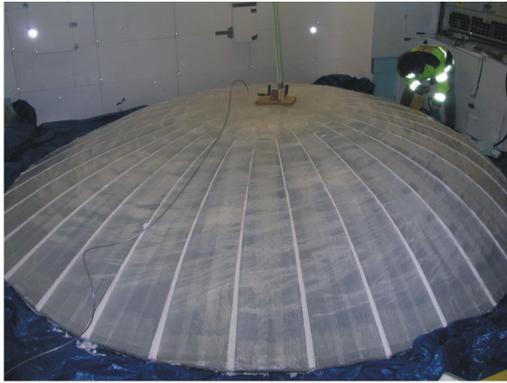
Anstatt des im Plattenmittelpunkt angeordneten Ballonwagenhebers, kam bei dieser Schale eine neue Methode zur Erzielung der Anfangsauslenkung zum Einsatz: Zwei unter der Eisplatte befindliche, entlang deren Rand luftdicht miteinander verklebte Kunststofffolien sollten eine gleichmäßige, vollflächige Unterstützung der Eisschale im kritischen Anfangsstadium der Umformung gewährleisten (siehe Abbildung 6.2c). Durch Einblasen von Luft zwischen die Folien ließ sich ebenso wie im Fall des Ballonwagenhebers die Mittenauslenkung der Schale exakt steuern. Der Vorteil gegenüber der bisher benutzten Methode bestand in der vollflächigen Unterstützung der Struktur, die den Einfluss von Bauungenauigkeiten herabsetzte bzw. ungewollte Haftung zwischen Schale und Untergrund ausschloss. Dafür, dass die Schale unter der Wirkung des Luftdrucks nicht als ganzes von ihrer Unterlage abhob, sorgte der im Vergleich zur Regelschale verdickt ausgeführte und somit schwerere Schalenrand.

Verlauf des Umformungsprozesses

Am Beginn des Transformationsprozesses stand die Aufbringung einer Vorspannkraft von $30kN$ auf das am Umfang angeordnete Spannglied. Danach erfolgte das Einblasen von Luft zwischen die zuvor beschriebenen Folien bis die Schale eine Scheitelhöhe von $2.5cm$ erreichte. Während der danach wieder aufgenommenen Spannarbeiten stiegen die an den Pressen gemessenen Spanngliedkräfte zunächst auf etwa $50kN$. Später fielen sie wie in den vorhergegangenen Versuchen mit Ansteigen der Mittenauslenkung ab. Abbildung 7.32a zeigt die Schale während der Umformung. Im Bereich der Spannstelle lässt sich im Vergleich zur entgegengesetzten Schalenseite eine größere Krümmung der Segmente feststellen. Nach Abschluss des Transformationsprozesses (Abbildung 7.32b) ergibt sich hingegen eine relativ symmetrische Schalenform. Auf Grund übermäßiger Krümmungen im Bereich der Drittelpunkte der Kuppelsegmente weicht die erzielte Form von der angestrebten Kugelkalotte ab. Die Scheitelhöhe der fertigen Schale lag bei $92cm$.

Breitenmessungen an den Stauchungsfugen am Schalenfuß lieferten Restbreiten von 12mm bis 30mm , was bei einer Anfangsbreite von 77.5mm auf Nennstauchungen von 84.5% bis 61.3% führt.

Welche Gestaltungsmöglichkeiten sich aus der nachträglichen Entfernung von Schalenteilen ergeben, zeigen exemplarisch die Darstellungen 7.33a und b.



a



b

Abbildung 7.32: a) leicht asymmetrische Form während der Formgebung; b) Schale im Endzustand



a



b

Abbildung 7.33: a) Entfernung einiger Kuppelsegmenten [11]; b) Übergang zum Bogentragwerk

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit weist gemäß ihrem Titel „Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Umformung ebener in doppelt gekrümmte Flächentragwerke“ zwei Schwerpunkte auf.

Zunächst erfolgt eine Untersuchung von Kreisplatten, die aus der Verebnung von Kugelkalotten resultieren. Die dabei gewählte, ebene Ausgangsform besteht aus radialen Segmenten mit dazwischenliegenden Fugen, welche sich beim Übergang in die gekrümmte Zielform ganz oder großteils schließen. Auf diese Weise stützen sich im Endzustand benachbarte Segmente gegenseitig und verleihen der Gesamtstruktur größere Steifigkeit. Als Fugenfüllung kann ein Material dienen, das während des Umformungsvorgangs in der Struktur Druckkräfte in Umfangsrichtung verursacht und gleichzeitig große Stauchungen ohne Spannungsabfall erträgt. Auf diese Weise lässt sich der Beanspruchungszustand der radialen Segmente positiv beeinflussen.

Am Beginn des Umformungsprozesses, solange noch im Vergleich zu Querschnittshöhe kleine Deformationen vorliegen, kann zur Beschreibung des Verhaltens der Gesamtstruktur die Plattenbiegetheorie bzw. die Biegetheorie flacher Schalen herangezogen werden. Die radial verlaufenden Stauchungsfugen wirken sich dahingehend auf das Verhalten der Kreisplatte aus, dass zu dessen mathematischer Behandlung ein polar orthotropes Materialmodell herangezogen werden muss.

Mit Zunahme der Verformungen tritt der Einfluss der Biegesteifigkeit der umzuformenden Kreisplatte hinter jenen der Stauchung der Mittelfläche zurück. Aus diesem Grund muss zur Behandlung der Schale in fortgeschritteneren Stadien der Umformung die Schalenbiegetheorie zum Einsatz kommen.

Die Ermittlung der Schalendeformationen für beliebige Einwirkungen erweist sich als aufwendig, wenn dafür das aus der Schalenbiegetheorie hervorgehende Differentialgleichungssystem direkt herangezogen wird. In solchen Fällen eignet sich die Finite Elemente Methode besser zur Ermittlung einer Lösung. Für die Be-

messung der ebenen Ausgangsform lässt sich jedoch von der Tatsache Gebrauch machen, dass die Lage der Struktur am Anfang sowie am Ende des Umformungsprozesses als gegeben vorliegt. Die Verschiebungen erhält man demnach als Differenz zwischen diesen beiden Konfigurationen. Aus den konstitutiven und kinematischen Beziehungen lassen sich ausreichend viele Schnittgrößen ermitteln, welche es gestatten, die Gleichgewichtsgleichungen nach den noch fehlenden Größen aufzulösen. Ein auf dieser Basis funktionierender Bemessungsalgorithmus wird vorgestellt und an Hand mehrerer Beispiele erprobt. Diese umfassen Strukturen mit linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten. Als Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit der Bemessungsergebnisse dienen Kontrollrechnungen mittels Finiter Elemente Methode.

Den zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit bilden Experimente an Versuchsschalen aus Stahlbeton und glasfaserbewehrtem Eis. Zunächst erfolgt ein Überblick über die im Zusammenhang mit dieser Arbeit durchgeführten Versuche. Diese umfassen sowohl Experimente an Modellschalen unter Labor- als auch Großversuche unter Baustellenbedingungen. Daran schließt eine detaillierte Beschreibung der Laborversuche an Schalen mit Anfangsdurchmessern von etwa $5.0m$ an. Insgesamt entstanden sechs Modellschalen im Labor des Instituts für Tragkonstruktionen, von welchen die erste in Stahlbeton, die restlichen fünf in Eis-Glasfaserverbund ausgeführt wurden. Die Tatsache, dass sich im Falle der Eisschalen nicht sofort die gewünschten Resultate einstellten, führte im Zuge des Versuchsprogramms immer wieder zu Änderungen an der Konstruktion der ebenen Ausgangsform bzw. am Versuchsablauf. Eine wichtige Frage, die sich im Zusammenhang mit der Anordnung von extrudiertem oder expandiertem Polystyrol in den Stauchungsfugen der ebenen Ausgangsform stellt, ist jene nach der statischen Wirksamkeit. Für den umgeformten Endzustand wird versucht, diese Frage anhand der in den Experimenten gewonnenen Messergebnisse zu klären.

Literaturverzeichnis

- [1] U. Ascher, J. Christiansen, R.D. Russell, *Algorithm 569, COLSYS: Collocation software for boundary-value ODEs [D2]*., ACM Trans. Math. Software, 7(2), 223-229, 1981.
- [2] U. Ascher, J. Christiansen, R.D. Russell, *Collocation software for boundary-value ODEs*, ACM Trans. Math. Software, 7(2), 20, 1981.
- [3] T. Baumann, *Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton*, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 217, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1972.
- [4] Z.P. Bazant, L. Cedolin, *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Dover Publications, Mineola New York, 2003.
- [5] W. Becker, *Die Entwicklung eines Werkstoffverbunds und einer Betonschalung zur Herstellung räumlich gekrümmter Flächentragwerke*, Dissertation, TU-Wien, Institut für Baustofflehre, Bauphysik und Brandschutz, Wien, 2002.
- [6] K. Binder, *Kunststoffe im Bauwesen*, Studienskriptum, TU-Wien, Institut für Hochbau und Technologie, Wien, 2005.
- [7] D. Bini, *Extreme Architectural Engineering: Construction Automation by Dante N Bini*, Internet: <http://www.binisystems.com>, 2005.
- [8] E. Bölcskey, *Baustoffe im Leichtbau*, Studienskriptum, TU-Wien, Institut für Hochbau und Technologie, Wien, 2005.
- [9] S. Bronstein, *Taschenbuch der Mathematik*, 25. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1991.
- [10] P. Csonka, *Theory and Practice of Membrane Shells*, Akadémiai Kiadó, Ungarn und VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, Budapest, 1987.

- [11] T. Drexler, C. Schwarz, *Temporäre Eventarchitektur mit vorgespannten Schalen aus Eis-Glasfasergewebeverbund*, Diplomarbeit, TU-Wien, Institut für Tragkonstruktionen, Wien, 2004.
- [12] P.E. Ellen, *The Development of Membrane Structures 20 Year Progress Report*, in 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, 30 Anniversary of IASS, Volume 3, Madrid, 1989.
- [13] P.E. Ellen, *Method of Making a Curved Roof*, United States Patent, Appl. No.: 611.510, 1975.
- [14] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1962.
- [15] F. Otto, *Pneu und Knochen*, in IL35: Mitteilungen des Instituts für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1995.
- [16] K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 6. Auflage, Springer Verlag, Wien, 1963.
- [17] A.M. Haas, *Entwurf und Konstruktion dünner Betonschalen*, 1. Auflage, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1969.
- [18] J. Harrer, *Verfahren zur Herstellung zweifach gekrümmter Stahlbetonschalen*, Diplomarbeit, TU-Wien, Institut für Tragkonstruktionen, Wien, 2004.
- [19] E. Heinle, J. Schlaich, *Kuppeln aller Zeiten — aller Kulturen*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996.
- [20] J.G. Helmcke, K. Bach, *Radiolarien*, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1990.
- [21] Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc., *ABAQUS User's Manual, Version 6.3*, Pawtucket, USA, 2002.
- [22] Karisch, *Prüfprotokolle für Glasfilamentgarn*, Institut für Textil- und Bekleidungstechnik, TU Dresden, Dresden, 2003.
- [23] M. Kaulfus, *Verfahren zur Herstellung von zweifach gekrümmten Schalen aus Eis*, Diplomarbeit, TU-Wien, Institut für Tragkonstruktionen, Wien, 2004.
- [24] U. Kokawa, O. Itoh, T. Watanabe, *Re-Challenge To 20m Span Ice Dome*, Internet: http://www.htokai.ac.jp/DA/kkw/iceshell/20m/is20m_2000_e.html, 2005.
- [25] J. Kollegger, *Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerkelementen unter Normal- und Momentenbeanspruchung*, Beton- und Stahlbetonbau, Heft 2, S.114-119, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1991.

- [26] J. Kollegger, C.F. Preisinger, *Verfahren zur Herstellung von zweifach gekrümmten Schalen*, österr. Patent, eingereicht am 14.01.2004.
- [27] J. Kollegger, C.F. Preisinger, *Method for the production of double-bent shells*, intern. Patent, eingereicht am 28.07.2005.
- [28] A.F. Kratochvill, *Experimentelle Untersuchungen zur Transformation ebener in räumlich gekrümmte Flächentragwerke*, Diplomarbeit, TU-Wien, Institut für Tragkonstruktionen, Wien, 2005.
- [29] K. Maekawa, A. Pimanmas, H. Okamura, *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spon Press, London and New York, 2003.
- [30] H. Mang, G. Hofstetter, *Festigkeitslehre*, Springer-Verlag, Wien, 2000.
- [31] N.M. Newmark, *Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads*, Trans. ASCE, vol. 108, p. 1161, 1943.
- [32] P. Offermann, T. Engler, T. Gries, A. Roye, *Technische Textilien zur Bewehrung von Betonteilen*, Beton- und Stahlbetonbau, Heft 6, S.437-443, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2004.
- [33] E.R. Pounder, *The Physics of Ice*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [34] C.F. Preisinger, J. Harrer, C. Ressler, J. Kollegger, *Stahlbetonschalen ohne Schalung - ein neuer Weg im Schalenbau*, Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1, S.31ff, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2005.
- [35] C.F. Preisinger *Konzepte zur nichtlinearen Berechnung und Bemessung von Stahlbetonplatten*, Diplomarbeit TU-Wien, Institut für Stahlbeton- und Massivbau, 2002.
- [36] C.F. Preisinger, *Statische Untersuchung eines neuartigen Schalungssystems für Stahlbetonschalen*, Großer Entwurf, TU-Wien, Institut für Stahlbeton- und Massivbau, Wien, 2001.
- [37] prEN 1992-1-1, *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*, Europäische Normungskommission, 1992.
- [38] J.W. Rayleigh, *Theory of Sound*, 2. Auflage, 1894.
- [39] H. Rühle, E. Kühn, K. Weißbach, D. Zeidler, *Räumliche Dachtragwerke Konstruktion und Ausführung*, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller, Köln-Braunsfeld, 1969.

- [40] M. Sheplak, J. Dugundji, *Large Deflections of Clamped Circular Plates under Initial Tension and Transitions to Membrane Behaviour*, J. Appl. Mech. 65, S.107-115, 1998.
- [41] H. Schmidt, *Von der Steinkuppel zur Zeiss-Dywidag-Schalenbauweise*, Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1, S.79ff, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2005.
- [42] S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, International Edition, 1959.
- [43] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, International Edition, 1963.
- [44] G. Valentin, G. Kidery, *Stahlbetonbau*, 10. Auflage, Manz Verlag Schulbuch, Wien, 2001.
- [45] F. Ziegler, *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien, NewYork, 1992.
- [46] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4. Auflage, McGraw-Hill, International Edition, 1989.