Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

Vorwort

Vom geometrisch kinematischen Standpunkt aus betrachtet besteht eine Stewart Gough Plattform aus einem bewegten System, der Plattform, und sechs Teleskopbeinen die über Kugel-Schub-Kugel Gelenke die Plattform mit der Basis, dem ruhenden System, verbinden, wobei die Steuerung des Manipulators ausschließlich über die Längenveränderung der sechs Beine erfolgt.

Der Name Stewart Gough Plattform hat die folgenden historischen Gründe: 1965 veröffentlichte D. Stewart einen Artikel über einen Mechanismus mit sechs Freiheitsgraden, auf den er bei der Suche nach Möglichkeiten zur Simulation von Flugbedingungen gestoßen war. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von dem oben beschriebenen insoferne, dass Stewart nur drei Beine veranschlagte, um die Basis mit der Plattform über Kugel-Schub-Kardangelenke zu verbinden, wobei eine Achse des Kardangelenkes kontrollierbar war. Im allerletzten Abschnitt seiner Arbeit schlug er ein alternatives Design des Flugsimulators vor, der der heutigen allgemeinen Definition sehr nahe kommt. In einer der vielen Rückmeldungen auf diese Veröffentlichung machte V.E. Gough auf seine Maschine aufmerksam, die er zusammen mit S.G. Whitehall einige Jahre zuvor für die Automobilindustrie entworfen hatte und die mit dem heutigen Design die meisten Ähnlichkeiten aufweist. Diese Umstände waren für die Namensgebung dieses speziellen parallelen Manipulators verantwortlich. Der an der geschichtlichen Entwicklung sowie an einem Überblick der wichtigsten Veröffentlichungen in diesem Bereich interessierte Leser sei auf den Artikel von Dasgupta B. und Mruthyunjaya T.S. [4] sowie auf das Buch [22] von Merlet J-M. verwiesen.

Parallele Mechanismen wurden zeitgleich zu den seriellen Robotern entwickelt, jedoch wurde erst in jüngerer Vergangenheit durch deren vermehrten Einsatz in der Praxis als Flugsimulatoren, Fräsmaschinen oder Bewegungssimulatoren für die Unterhaltungsindustrie das Interesse an ihrer theoretischen Untersuchung geweckt. Derzeit sind die meisten Industrieroboter serielle Manipulatoren, denn die Vorteile dieser Bauweise liegen in einem relativ großen Arbeitsraum sowie in der Einfachheit des Baus. Dieser Robotertyp weist jedoch einige Nachteile wie schlechte Steifigkeit, geringe Genauigkeit und ein schlechtes Last-Gewicht-Verhältnis auf. Schon die Betrachtung der menschlichen Anatomie lehrt, dass zwei Arme die oben aufgezählten Nachteile verringern, und es daher naheliegend ist, parallele Architekturen zu betrachten. Für die Vorteile von parallelen Manipulatoren wie hohe Genauigkeit, hohe Steifigkeit, gutes Last-Gewicht-Verhältnis und hohe Operationsgeschwindigkeit muss man jedoch auch Nachteile in Kauf nehmen; die wären eine kompliziertere Bauweise, eine höhere Dichte an singulären Lagen und die starke Einschränkung des Arbeitsraumes, was man sich wiederum leicht am Beispiel der menschlichen Arme klar machen kann.

Im Gegensatz zu seriellen Robotern, bei denen die Rückwärtskinematik nicht so leicht greifbar ist, stellt bei parallelen Manipulatoren die Vorwärtskinematik eine komplexe Aufgabe dar, die erstmals M.L. Husty [8,9] im Jahre 1994 für allgemeine Stewart Gough Plattformen zu lösen vermochte. Der in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Algorithmus zur Berechnung der Vorwärtskinematik basiert auf dem von M.L. Husty veröffentlichten und unterscheidet sich darin, dass der maximale Grad der auftretenden Polynome von ursprünglich 320 auf 200 reduziert werden konnte. Dieser Wert ist auch niedriger als der maximale Grad der im Algorithmus von C. Innocenti [15] auftretenden Polynome, der bei 280 liegt. Somit handelt es sich bei dem in Kapitel 2 präsentierten Algorithmus um den mit dem niedrigsten Grad an auftretenden Polynomen unter jenen, die dem Autor bekannt sind und die ohne Berechnung der Gröbner Basis auskommen. Außerdem werden in demselben Kapitel dieser Arbeit alle denkbar möglichen Sonderfälle des Algorithmus, die durch spezielle Geometrien der Plattform bedingt werden, abgehandelt sowie die jeweilige maximale Anzahl der Lösungen für die Vorwärtskinematik dieser Manipulatoren, die jeweils auf Grund von Berechnungen mehrerer Beispiele zustande gekommen ist, angegeben. Die für das Verständnis des gegebenen Algorithmus nötigen Grundlagen der Polynomalgebra sowie die Studydarstellung der euklidischen Raumkongruenz werden im ersten Kapitel gründlich wiederholt beziehungsweise erarbeitet.

Abbildung 1: Flugsimulator

Das dritte Kapitel enthält neben einem liniengeometrischen Zugang zu den singulärer Lagen von Stewart Gough Plattformen, der es auch ermöglicht deren Einteilung nach geometrischen Gesichtspunkten vorzunehmen, eine Abhandlung über architektonisch singuläre Manipulatoren. Es wird auch eine architektonisch singuläre Stewart Gough Plattform mit nicht ebener Plattform und Basis angegeben, die in der Liste von [11] nicht enthalten ist, die aber Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Außerdem wird sich zeigen, dass sich der im zweiten Kapitel entwickelte Algorithmus auch hervorragend zur Berechnung der theoretischen Selbstbewegung dieser Manipulatoren eignet.

Den Abschluss dieser Diplomarbeit bildet ein Kapitel über redundante Stewart Gough Plattformen mit maximaler Lösung für die Vorwärtskinematik. Wir werden sehen, dass man, wenn Basis und Plattform eben sind, im allgemeinen eine einparametrige Schar von Beinen dem Manipulator hinzufügen kann, ohne dessen Lösung für die Vorwärtskinematik zu beeinflussen, wobei die möglichen Ankerpunkte der zusätzlichen Beine in Basis und Plattform auf einer Kubik liegen. Als Nebenprodukt dieser Betrachtung werden wir eine Möglichkeit erhalten, architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen mit ebener Plattform und Basis zu konstruieren.

Danksagung

Mein besonderer Dank gebührt meinem Diplomarbeitsbetreuer O.Univ.Prof. Dr. Hellmuth Stachel, der während der Entstehungszeit dieser Arbeit stets Zeit für meine Fragen und Anliegen hatte.

Außerdem möchte ich mich noch bei Univ.Prof. Dr. Manfred Husty bedanken, der mir einige seiner Arbeiten über dieses Thema zur Verfügung gestellt hat.

Bei dieser Gelegenheit will ich mich noch bei allen Angehörigen des ehemaligen Instituts für Geometrie bedanken, die maßgeblich zu einer guten Studienatmosphäre, die ich neun Semester lang sehr genoss, beigetragen haben.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem ehemaligen DG-Lehrer Herrn Georg Schilling, der durch seinen leidenschaftlich gehaltenen Unterricht meine Begeisterung für die Geometrie entfachte und ohne den ich daher nie diese Studienrichtung eingeschlagen hätte.

Der größte Dank gebührt jedoch meinen Eltern, die mich während meiner ganzen Studienzeit in allen Belangen tatkräftig unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **5**
1.1 Algebra der Polynome . . . 5
1.1.1 Resultante . . . 5
1.1.2 Ideale . . . 6
1.1.3 Das Eliminieren mit Hilfe der Resultante . . . 8
1.2 Hamiltonsche Quaternionen $\mathbb{H}$ . . . 9
1.2.1 Schiefkörper $(\mathbb{H}, +, \circ)$ . . . 9
1.2.2 Einheitsquaternionen $\mathbb{E}$ . . . 10
1.3 Duale Quaternionen . . . 12
1.3.1 Duale Zahlen $\mathbb{D}$ . . . 12
1.3.2 Duale Quaternionen $\mathbb{H}_d$ . . . 12
1.3.3 Duale Einheitsquaternionen $\mathbb{E}_d$ . . . 14
1.4 Study Darstellung der Raumkongruenzen . . . 16
1.4.1 Die Geometrie des Bildraumes . . . 16
1.5 Allgemeine Stewart Gough Plattformen . . . 18

2 Vorwärtskinematik allgemeiner Stewart Gough Plattformen **19**
2.1 Algorithmus zur Berechnung der Vorwärtskinematik . . . 25
2.1.1 Sonderfälle des Algorithmus . . . 28
2.1.2 Bemerkungen zum Algorithmus . . . 33
2.2 Die Existenz von 40 reellen Lösungen . . . 33
2.2.1 Das Beispiel von Dietmaier . . . 34

3 Singuläre Konfigurationen **36**
3.1 Liniengeometrische Grundlagen . . . 36
3.1.1 Plückerkoordinaten . . . 36
3.1.2 Das Kleinsche Modell des Geradenraumes . . . 37
3.1.3 Lineare Komplexe . . . 38
3.2 Singuläre Lagen von Stewart Gough Plattformen . . . 40
3.2.1 Lineare Mannigfaltigkeiten von linearen Komplexen . . . 41
3.2.2 Systematische Suche nach singulären Lagen . . . 43
3.2.3 Umspringen der Plattform in eine andere Position . . . 46
3.3 Architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen und deren Selbstbewegungen . . . 47
3.3.1 Architektonisch singuläre Manipulatoren mit nicht ebener Basis und Plattform . . . 47
3.3.2 Architektonisch singuläre Manipulatoren mit ebener Basis und Plattform . . . 50

4 Redundante Stewart Gough Plattformen **53**
4.1 Einleitende Gedanken . . . 53
4.2 Berechnung . . . 53
4.2.1 Manipulatoren mit ebener Plattform und Basis . . . 55

A Quellenverzeichnis **61**
A.1 Literaturverzeichnis . . . 61
A.2 Abbildungsverzeichnis . . . 63

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Algebra der Polynome

1.1.1 Resultante

Sei $\mathbb{I}$ ein Integritätsbereich, also ein kommutativer Ring mit Einselement und ohne Nullteiler. Dann bezeichnet $\mathbb{I}[X_1, ..., X_r]$ den Integritätsbereich der Polynome über $\mathbb{I}$ in den Unbekannten $X_1, ..., X_r$. Zu jedem Integritätsbereich $\mathbb{I}$ existiert ein eindeutiger Quotientenkörper $\mathbb{K} \supset \mathbb{I}$ mit

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{I} \quad \text{und} \quad b \neq 0 \right\}.$$

Der Quotientenkörper von $\mathbb{I}[X_1, ..., X_r]$ wird mit $\mathbb{I}(X_1, ..., X_r)$ bezeichnet und heißt Körper der rationalen Funktionen. Ein Polynom $\mathcal{F} \in \mathbb{I}[X_1, ..., X_r]$ heißt irredzibel genau dann, wenn aus $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}$ stets $\mathcal{G} \in \mathbb{I}$ oder $\mathcal{H} \in \mathbb{I}$ folgt, also nur triviale Zerlegungen von $\mathcal{F}$ möglich sind. Bekanntlich gilt, dass, wenn jedes Element aus $\mathbb{I}$ eine eindeutige Primfaktorenzerlegung hat, dies auch für $\mathbb{I}[X_1, ..., X_r]$ gilt.

Im folgenden sei $\mathbb{I}$ ein Integritätsbereich mit eindeutiger Primfaktorenzerlegung und $\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X) \in \mathbb{I}[X]$ mit $deg\, \mathcal{F} = m$ und $deg\, \mathcal{G} = n$, also

$$\mathcal{F}(X) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + ... + a_m \qquad \mathcal{G}(X) = b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + ... + b_n$$

wobei $a_0, b_0 \neq 0$ gelte sowie $m, n > 0$.

Satz 1.1. *$\mathcal{F}(X)$ und $\mathcal{G}(X)$ haben genau dann einen gemeinsamen Teiler $\mathcal{T}(X)$ mit $deg\, \mathcal{T} > 0$, wenn Polynome $\overline{\mathcal{F}}$, $\overline{\mathcal{G}} \in \mathbb{I}[X] \setminus \{0\}$ existieren mit $deg\, \overline{\mathcal{F}} < deg\, \mathcal{F}$, $deg\, \overline{\mathcal{G}} < deg\, \mathcal{G}$ und*

$$\mathcal{F}(X) \cdot \overline{\mathcal{G}}(X) = \mathcal{G}(X) \cdot \overline{\mathcal{F}}(X). \tag{1.1}$$

Beweis:

ad '$\Rightarrow$' Es sei nun $\mathcal{F} = \mathcal{T} \cdot \overline{\mathcal{F}}$ mit $deg\, \mathcal{F} > deg\, \overline{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{G} = \mathcal{T} \cdot \overline{\mathcal{G}}$ mit $deg\, \mathcal{G} > deg\, \overline{\mathcal{G}}$. Indem man die erste Gleichung mit $\overline{\mathcal{G}}$ und die zweite mit $\overline{\mathcal{F}}$ multipliziert und die so erhaltenen Gleichungen anschließend voneinander subtrahiert, erhält man $\mathcal{F} \cdot \overline{\mathcal{G}} - \mathcal{G} \cdot \overline{\mathcal{F}} = 0$.

ad '$\Leftarrow$' Es gelte also nun $\mathcal{F} \cdot \overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cdot \overline{\mathcal{F}}$. Jeder Primfaktor von $\mathcal{F}$ muss aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung in derselben Vielfachheit auch rechts vorkommen. Wegen $deg\, \overline{\mathcal{F}} < deg\, \mathcal{F}$ können nicht alle in $\overline{\mathcal{F}}$ enthalten sein, d.h. es existiert ein $\mathcal{T}(X)$ mit $deg\, \mathcal{T} > 0$ welches sowohl Teiler von $\mathcal{F}$ als auch von $\mathcal{G}$ ist. □

Wir setzen nun $\overline{\mathcal{F}}(X)$ und $\overline{\mathcal{G}}(X)$ mit unbekannten Koeffizienten an, also

$$\overline{\mathcal{F}}(X) = c_0 X^{m-1} + c_1 X^{m-2} + ... + c_{m-1} \qquad \overline{\mathcal{G}}(X) = d_0 X^{n-1} + d_1 X^{n-2} + ... + d_{n-1}$$

und setzen dies in die Gleichung (1.1) ein und erhalten mittels Koeffizientenvergleich $m + n$ lineare Gleichungen in den $m + n$ Unbekannten $c_0, ..., c_{m-1}, d_0, ..., d_{n-1}$.

$$
\begin{array}{lll}
X^{m+n-1}: & a_0d_0 & +b_0c_0 \quad =0 \\
X^{m+n-2}: & a_1d_0 + a_0d_1 & +b_1c_0 + b_0c_1 \quad =0 \\
X^{m+n-3}: & a_2d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 & +b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2 \quad =0 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & a_md_0 + \dots & \vdots \quad =0 \\
 & \ddots & +b_nc_0 \quad =0 \\
 & \ddots\ddots & + \ddots \\
X^1: & a_md_{n-2} + a_{m-1}d_{n-1} & + b_nc_{m-2} + b_{n-1}c_{m-1} \quad =0 \\
X^0: & a_md_{n-1} & + b_nc_{m-1} \quad =0
\end{array}
$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz der Polynome $\overline{F}, \overline{G} \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, also für eine nichttriviale Lösung ist, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null ist. Eine Erweiterung der Polynome $\overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\mathcal{G}}$ mit dem gemeinsamen Nenner des Lösungs-$(m+n)$-tupels $d_0, \dots, c_{m-1}$ liefert Polynome aus $\mathbb{I}[X]$, sodass Satz 1.1 anwendbar ist.

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ist die $(m+n) \times (m+n)$ Sylvester Matrix von $\mathcal{F}(X)$ und $\mathcal{G}(X)$ bezüglich X. Die Resultante von $\mathcal{F}(X)$ und $\mathcal{G}(X)$ bezüglich X wird nun als die Determinante der transponierten Sylvester Matrix definiert und schreibt sich, wie folgt:

$$
R_{\mathcal{FG}}(X) := det \begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & 0 & \\
 & 0 & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\
b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & 0 \\
 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ Zeilen} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ Zeilen}
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Satz 1.2. *$\mathbb{I}$ sei ein Integritätsbereich mit eindeutiger Primfaktorenzerlegung. Ist $R_{\mathcal{FG}}$ die Resultante der Polynome $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{I}[X]$ mit*

$$
\begin{aligned}
F(X) &= a_0X^m + a_1X^{m-1} + \dots + a_m\,, \\
G(X) &= b_0X^n + b_1X^{n-1} + \dots\dots + b_n\,,
\end{aligned}
$$

und $a_0b_0 \neq 0$ so gilt: $R_{FG} = 0 \iff \mathcal{F}(X)$ und $\mathcal{G}(X)$ haben einen gemeinsamen nichttrivialen Teiler $\mathcal{T}(X)$, also mit $\deg \mathcal{T} > 0$.

1.1.2 Ideale

Es bezeichne P_r den r-dimensionalen projektiven Koordinatenraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ kommutativ ist und algebraisch abgeschlossen bei $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$. Die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $\mathcal{F}(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[X_0, ..., X_r]$ mit $deg\, \mathcal{F} > 0$ heißt algebraische Hyperfläche. Um auch Teilmengen solcher Hyperflächen zu untersuchen, geben wir allgemein eine Menge

$$M := \{\mathcal{F}_1(\mathbf{X}), ..., \mathcal{F}_f(\mathbf{X})\}$$

von f homogenen Polynomen vor, deren Grade keinesfalls gleich sein müssen. Deren Nullstellenmenge

$$V(M) := \left\{\mathbf{x}\mathbb{K} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^{r+1}, \mathcal{F}_1(\mathbf{X}) = ... = \mathcal{F}_f(\mathbf{X}) = 0\right\}$$

ist wegen der Homogenität aller Polynome eine Punktmenge und heißt algebraische Varietät. Mit $\mathbf{x}\mathbb{K} \in V(M)$ ist $\mathbf{x}\mathbb{K}$ gleichzeitig auch Nullstelle aller Polynome der folgenden Menge

$$\mathcal{J} := \left\{\sum_{i=1}^{g} \mathcal{A}_i(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{F}_i(\mathbf{X}) \,|\, \mathcal{A}_i(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[X_0, ..., X_r]\right\}.$$

Definition 1.1. *Eine Teilmenge $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$ ist ein Ideal, wenn folgendes gilt:*

I. $0 \in \mathcal{I}$.

II. Wenn $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{I}$ ist, dann muss auch $\mathcal{F} + \mathcal{G} \in \mathcal{I}$ sein.

III. Wenn $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$ und $\mathcal{K} \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$ ist, dann muss $\mathcal{K} \cdot \mathcal{F}$ auch in $\mathcal{I}$ liegen.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Menge $\mathcal{J}$ ein Ideal ist, dass auch das von $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f$ erzeugte Polynomideal heißt und in Folge mit $\mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f]$ bezeichnet wird. Die Nullstellenmenge $V(M)$ ist somit gleichzeitig Nullstellenmenge $V(\mathcal{J})$ des Ideals $\mathcal{J}$. Trivialerweise gilt auch, dass der Durchschnitt zweier algebraischer Varietäten wieder eine solche ist, genauer

$$V(M) \cap V(N) = V(M \cup N).$$

$\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f$ heißt minimale Basis des Ideals $\mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f]$ genau dann, wenn $\mathcal{F}_i$ nicht Element von $\mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_{i-1}, \mathcal{F}_{i+1}, ..., \mathcal{F}_f]$ ist für alle $i = 1, ..., f$, ansonsten bloß Basis des Ideals. Die Existenz einer solchen Basis wird durch den Hilbertschen Basissatz gewährleistet, der nämlich besagt, dass jedes Ideal $\mathcal{J}$ aus dem Plynomring $\mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$ von einer endlichen Menge von Polynomen erzeugbar ist.

Bemerkung 1.1. Es gibt einige Analogien zur linearen Algebra, denn die Definition eines Ideals ist ähnlich zu der eines Unterraumes. Beide sind abgeschlossen gegenüber der Addition und der Multiplikation, mit der Ausnahme, dass wir einmal mit Skalaren und hier mit Polynomen multiplizieren. Eine weitere Parallele besteht zwischen der Definition der minimalen Basis eines Ideals und der Basis eines Unterraumes.

Satz 1.3. *Seien $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}_1$ zwei Ideale, wobei gilt $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, dann folgt daraus:* $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{J}_1)$.
Der Beweis ist trivial.

Definition 1.2. *Angenommen $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ sind Ideale aus dem Polynomring $\mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$, dann wird die Summe der Ideale $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ definiert als*

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 := \{\mathcal{F} + \mathcal{G} : \quad \mathcal{F} \in \mathcal{J}_1 \quad \mathcal{G} \in \mathcal{J}_2\}.$$

Satz 1.4. *Sind die Ideale $\mathcal{J}_1 = \mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f]$ und $\mathcal{J}_2 = \mathcal{I}[\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_g]$ aus $\mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$, dann stellt die Summe der beiden Ideale wiederum ein Ideal aus demselben Polynomring dar. Weiters ist $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ das kleinste Ideal, welches $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ umfasst und es gilt $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_g]$.*

Beweis:

Trivialerweise ist das Nullpolynom in der Summe enthalten. Für $\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta \in \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ existieren aufgrund der Definition der Summe die Polynome $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta \in \mathcal{J}_2$ mit $\mathcal{H}_i = \mathcal{F}_i + \mathcal{G}_i$, $i = \alpha, \beta$. Somit erhalten wir $\mathcal{H}_\alpha + \mathcal{H}_\beta = (\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta) + (\mathcal{G}_\alpha + \mathcal{G}_\beta)$. Nun ist aber $\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{G}_\alpha + \mathcal{G}_\beta \in \mathcal{J}_2$, woraus nun $\mathcal{H}_\alpha + \mathcal{H}_\beta \in \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ folgt. Um nun den Beweis abzuschließen, dass $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ ein Ideal ist, nehmen wir an, dass $\mathcal{H}$ aus diesem ist. Nun existieren wieder zwei Polynome $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_2$ mit $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$. Sei $\mathcal{K} \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$, dann gilt $\mathcal{K} \cdot \mathcal{H} = \mathcal{K} \cdot (\mathcal{F} + \mathcal{G}) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{F} + \mathcal{K} \cdot \mathcal{G}$. Nun ist aber $\mathcal{K} \cdot \mathcal{F} \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{K} \cdot \mathcal{G} \in \mathcal{J}_2$, woraus nun $\mathcal{K} \cdot \mathcal{H} \in \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ folgt.

Ist nun $\mathcal{J}$ ein Ideal, welches $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ umfasst, so muss $\mathcal{J}$ alle Elemente $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_2$ beinhalten. Da $\mathcal{J}$ ein Ideal ist, muss es daher auch alle $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ enthalten, woraus sofort $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}$ folgt. Somit beinhaltet jedes Ideal, das $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ enthält, automatisch auch $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$, woraus folgt, dass $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ das kleinste solche Ideal ist. Das Ideal $\mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_g]$ beinhaltet die Ideale $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$, womit $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_g]$ folgt. Trivialerweise gilt auch die umgekehrte Inklusion, womit auch die letzte Behauptung des Satzes bewiesen ist. □

Satz 1.5. *Seien $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ zwei Ideale aus $\mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$, dann gilt:* $V(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) = V(\mathcal{J}_1) \cap V(\mathcal{J}_2)$.

Beweis:

Bei $(x_1, ..., x_r) \in V(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ gilt aufgrund von $\mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ mit $i = 1, 2$ und nach Satz 1.3; $(x_1, ..., x_r) \in V(\mathcal{J}_1)$ und $(x_1, ..., x_r) \in V(\mathcal{J}_2)$. Somit liegt $(x_1, ..., x_r)$ im Durchschnitt der beiden Ideale $\mathcal{J}_i$ und wir erhalten $V(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \subset V(\mathcal{J}_1) \cap V(\mathcal{J}_2)$.

Um nun die entgegengesetzte Inklusion zu erhalten, nehmen wir an, dass $(x_1, ..., x_r) \in V(\mathcal{J}_1) \cap V(\mathcal{J}_2)$ ist und $\mathcal{H}$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$. Dann existieren wiederum Polynome $\mathcal{F} \in \mathcal{J}_1$ und $\mathcal{G} \in \mathcal{J}_2$, sodass $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ gilt. Nun ist aber $\mathcal{F}(x_1, ..., x_r) = 0$ und $\mathcal{G}(x_1, ..., x_r) = 0$, weil $(x_1, ..., x_r) \in \mathcal{J}_i$ mit $i = 1, 2$ gilt. Somit erhalten wir $\mathcal{H}(x_1, ..., x_r) = \mathcal{F}(x_1, ..., x_r) + \mathcal{G}(x_1, ..., x_r) = 0 + 0 = 0$. Da $\mathcal{H}$ beliebig war, folgt nun $(x_1, ..., x_r) \in V(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ und daraus die Relation $V(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \supset V(\mathcal{J}_1) \cap V(\mathcal{J}_2)$. □

Wir wollen in Folge eine geometrische Interpretation für das Eliminieren von Variablen aus einem System von Polynomgleichungen angeben. Dafür benötigen wir die folgende Definition:

Definition 1.3. *Gegeben sei das Ideal $\mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f] \subset \mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$. Dann heißt*

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I} \cap \mathbb{K}[X_{k+1}, ..., X_r]$$

das k-te Eliminationsideal. $\mathcal{I}_k$ ist wirklich wieder ein Ideal, denn es erfüllt alle Bedingungen in Def. 1.1.

Wir wollen nun eine Projektion einer algebraischen Varietät definieren. Stellen wir uns vor, wir haben eine Varietät $V(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f) \subset \mathbb{K}^r$ gegeben. Um die ersten k Variablen $X_1, ..., X_k$ zu eliminieren, betrachten wir die Projektion $\pi_k : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^{r-k}$ mit $(x_1, ..., x_r)\mathbb{K} \mapsto (x_{k+1}, ..., x_r)\mathbb{K}$. Wenn wir nun diese Abbildung auf $V \subset \mathbb{K}^r$ anwenden, erhalten wir $\pi_k(V) \subset \mathbb{K}^{r-k}$. Im folgenden Satz wollen wir eine Relation zwischen dem k-ten Eliminationsideal $\mathcal{I}_k$ und $\pi_k(V)$ herstellen.

Satz 1.6. *Sei nach obiger Notation $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f] \cap \mathbb{K}[X_{k+1}, ..., X_r]$ das k-te Eliminationsideal, dann gilt in $\mathbb{K}^{r-k}$*

$$\pi_k(V) \subset V(\mathcal{I}_k).$$

Beweis:

Wir betrachten ein Polynom $\mathcal{F} \in \mathcal{I}_k$. Für $(x_1, ..., x_r)\mathbb{K} \in V$ ist $\mathcal{F}(x_1, ..., x_r) = 0$ identisch erfüllt, da $\mathcal{F} \in \mathcal{I}[\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_f]$ ist. In der Berechnung von $\mathcal{F}(x_1, ..., x_r)$ sind jedoch nur die Variablen $x_{k+1}, ..., x_r$ involviert, sodass

$$\mathcal{F}(x_{k+1}, ..., x_r) = \mathcal{F}(\pi_k(x_1, ..., x_r)) = 0$$

gilt. Somit ist der Satz bewiesen, denn $\mathcal{F}$ verschwindet an allen Stellen $(x_{k+1}, ..., x_r) \in \pi_k(V)$. □

Zum Schluss dieses Themenkomplexes wollen wir noch eine Eliminationsmethode vorstellen, die bei der Lösung der Vorwärtskinematik von allgemeinen Stewart Gough Plattformen öfters gebraucht wird und daher an dieser Stelle erklärt werden sollte. Es handelt sich dabei um:

1.1.3 Das Eliminieren mit Hilfe der Resultante

Gegeben seien zwei homogene Polynome $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ aus dem Polynomring $\mathbb{K}[X_1, ..., X_r]$, mit $deg\,\mathcal{F} = m$ und $deg\,\mathcal{G} = n$. Dabei soll die Variable X_r wirklich in jedem der zwei Polynome vorkommen. Dann können wir die beiden Polynome auch auffassen als Elemente von $\mathbb{K}[X_1, ..., X_{r-1}][X_r]$. Somit können wir gemäß (1.2) die Resultante $R_{\mathcal{FG}}(X_r) = 0$ bilden, in der nun die Unbekannte X_r nicht mehr enthalten ist. $R_{\mathcal{FG}}(X_r)$ ist wieder ein homogenes Polynom, und zwar vom Grad $m \cdot n$. Angenommen wir kennen die $m \cdot n$ möglichen $r-1$ Tupel, die die Gleichung $R_{\mathcal{FG}}(X_r) = 0$ erfüllen. So bedeutet dies nun, dass, wenn wir die Werte eines $r-1$ Tupels in die Gleichungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ rückeinsetzen, diese beiden Polynome $\in \mathbb{K}[X_r]$ einen gemeinsamen Teiler besitzen müssen. Da ja $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, erhalten wir für das eine Polynom m Nullstellen und für das andere n Nullstellen, wobei jetzt die Mächtigkeit des Durchschnittes der beiden Nullstellenmengen mindestens eins betragen muss. Diese gemeinsame Nullstelle stellt nun zusammen mit dem $r-1$ Tupel eine gesuchte Lösung dar. Ist nun die Mächtigkeit größer als eins, dann muss es sich bei dem verwendeten $r-1$ Tupel um eine mehrfache Nullstelle von $R_{\mathcal{FG}}(X_r) = 0$ handeln. Es sei noch bemerkt, dass diese Eliminationsmethode nicht auf homogene Polynome beschränkt ist, wir werden sie jedoch in dieser Arbeit nur für solche anwenden.

Beispiel.

Angenommen wir haben jetzt drei quadratische homogene Polynome $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ gegeben, die drei Quadriken im dreidimensionalen Raum repräsentieren. Nach dem Satz von Bezout haben diese drei Flächen $2^3 = 8$ gemeinsame Punkte über $\mathbb{C}$. Eliminieren wir jetzt mit Hilfe der Resultantenmethode X_3, indem wir zum Beispiel $R_{\mathcal{FG}}(X_3)$ und $R_{\mathcal{FH}}(X_3)$ bilden, so stellen diese beiden Gleichungen vom Grad 4, die wir mit $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ bezeichnen wollen, die in die Ebene $X_3 = 0$ projizierten Schnittkurven der jeweils beteiligten Quadriken dar. Eliminieren wir nun nochmals mittels der Resultante die Unbekannte X_2 aus den zwei Gleichungen der Schnittkuven, so erhalten wir $R_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}(X_3)$ vom Grad 16. Dieses Polynom können wir jedoch jetzt lösen und erhalten dem Grad entsprechend 16 Lösungen. Die 8 zusätzlich erhaltenen Lösungen, die Pseudolösungen darstellen, können nun mit Hilfe von Satz 1.6 erklärt werden. Es handelt sich nämlich dabei jeweils um zwei voneinander verschiedene Punkte $\mathbf{P}_1 \in \mathcal{S}_1$ und

$\mathbf{P}_2 \in \mathcal{S}_2$, die projektionsbedingt auf denselben Punkt abgebildet werden, also auf einem Projektionsstrahl liegen.

Diese unerwünschte Begleiterscheinung kann man umgehen, indem man mehr Polynome $\in \mathbb{R}[X_0, X_1]$ als notwendig bildet und deren größten gemeinsamen Teiler betrachtet, dessen Lösungen nun nur mehr die echten Schnittpunkte liefern. In unserem konkreten Fall bedeutet dies nun, dass wir noch die dritte Schnittkurve $\mathcal{S}_3 = R_{\mathcal{G}\mathcal{H}}(X_3)$ und somit zwei weitere Polynome $R_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_3}(X_3), R_{\mathcal{S}_2\mathcal{S}_3}(X_3) \in \mathbb{R}[X_0, X_1]$ berechnen können. Der größte gemeinsame Teiler dieser drei Polynome $\in \mathbb{R}[X_0, X_1]$ müsste dann ein homogenes Polynom achten Grades ergeben. Zuletzt möchte ich noch vermerken, dass uns das zuletzt beschriebene Prinzip auch bei der Lösung des Problems der Vorwärtskinematik von großem Nutzen sein wird.

1.2 Hamiltonsche Quaternionen $\mathbb{H}$

1.2.1 Schiefkörper $(\mathbb{H}, +, \circ)$

$\mathbb{H} := \{\mathbf{Q} = q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q} \text{ mit } (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ bezeichnet die Menge der Hamiltonschen Quaternionen, wobei $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ die über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Quaternioneneinheiten bezeichnen. q_0 heißt Skalarteil und $\mathbf{q}$ Vektorteil der Quaternion $\mathbf{Q}$. Die Addition zweier Quaternionen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ ist komponentenweise, wie folgt, definiert:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k} = (p_0 + q_0) + (\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Wir sehen somit, dass $\mathbb{H}$ abgeschlossen ist gegenüber der Verknüpfung $+$. $\mathbb{H}$ stellt bezüglich der Addition sogar eine Gruppe dar, denn einerseits ist die Addition assoziativ und andererseits existiert ein neutrales Element $\mathbf{N} = 0$ und zu jedem $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}$ ein inverses Element $-\mathbf{Q} \in \mathbb{H}$.

Das Produkt zweier Quaternionen wird distributiv gebildet, wobei für die Produkte zwischen den Quaternioneneinheiten die folgenden Definitionen gelten:

$$\begin{gathered}\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = -1,\\ \mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j},\\ \mathbf{j} \circ \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \circ \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \circ \mathbf{k} = -\mathbf{j}.\end{gathered}$$

Demnach gilt für das Produkt zweier Quaternionen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} &= (p_0 + p_1\,\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\,\mathbf{k}) \circ (q_0 + q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k})\\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\,\mathbf{i} +\\ &\quad +(p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\,\mathbf{j} + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Wie man den Rechenregeln für die Quaternioneneinheiten entnehmen kann, ist diese Operation nicht kommutativ, jedoch bildet $(\mathbb{H}', \circ)$ mit $\mathbb{H}' = \mathbb{H} \setminus \{\mathbf{N}\}$ eine Gruppe, denn einerseits führt die Verknüpfung $\circ$ nicht aus der Menge $\mathbb{H}$ heraus, andererseits ist die Quaternionenmultiplikation assoziativ, was unmittelbar aus der Assoziativität der Quaternioneneinheiten bezüglich der Multiplikation hervorgeht. Außerdem existiert ein eindeutiges neutrales Element $\mathbf{I} = 1$ und, wie wir später in (1.7) sehen werden, auch zu jedem $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}$ ein eindeutiges inverses Element $\mathbf{Q}^{-1}$.

Nun wollen wir aber auf das Produkt zweier Quaternionen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ noch etwas genauer eingehen, das man auch, wie folgt, anschreiben kann

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = (p_0 + \mathbf{p}) \circ (q_0 + \mathbf{q}) = p_0 \circ q_0 + \mathbf{p} \circ q_0 + p_0 \circ \mathbf{q} + \mathbf{p} \circ \mathbf{q},$$

wobei das Quaternionenprodukt zweier reeller Zahlen beziehungsweise einer reellen Zahl mit einer vektoriellen Quaternion, dies sind Quaternionen mit verschwindendem Skalarteil, gleich dem gewöhnlichen Produkt zweier reeller Zahlen beziehungsweise gleich dem gewöhnlichen Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor ist. Nun wollen wir noch das Quaternionenprodukt zweier vektorieller Quaternionen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ genauer betrachten, um die obige Formel noch weiter zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \circ \mathbf{q} &= (p_1\,\mathbf{i} + p_2\,\mathbf{j} + p_3\,\mathbf{k}) \circ (q_1\,\mathbf{i} + q_2\,\mathbf{j} + q_3\,\mathbf{k})\\ &= -(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + (p_2q_3 - q_2p_3)\,\mathbf{i} + (p_3q_1 - q_3p_1)\,\mathbf{j} + (p_1q_2 - q_1p_2)\,\mathbf{k}\\ &= -\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\times\mathbf{q}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Somit folgt nun für das Quaternionenprodukt von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = p_0 q_0 + \mathbf{p} q_0 + p_0 \mathbf{q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \tag{1.5}$$

Aus dieser Darstellung können wir jetzt leicht einsehen, welche Bedingungen gelten müssen, sodass das Quaternionenprodukt $\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$ doch kommutativ ist. Dazu berechnen wir $\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \circ \mathbf{P}$ und erkennen, dass dieser Ausdruck nur bei $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$ verschwindet; d.h. wenn $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ linear abhängig sind.

Die Quaternion $\widetilde{\mathbf{Q}} := q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}$ heißt die zu $\mathbf{Q}$ konjugierte Quaternion. Insbesondere gilt für Quaternionen mit verschwindendem Vektorteil $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ und für vektorielle Quaternionen $\widetilde{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q}$. Außerdem ist beim Konjugieren zu beachten, dass $\widetilde{\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{Q}} \circ \widetilde{\mathbf{P}}$ gilt, eine Tatsache, die leicht durch Nachrechnen bestätigt werden kann. Für das Produkt von $\mathbf{Q}$ mit $\widetilde{\mathbf{Q}}$ folgt nach (1.5) somit:

$$\mathbf{Q} \circ \widetilde{\mathbf{Q}} = \left[q_0^2 + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\right] + \left[-q_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{q} - (\mathbf{q} \times \mathbf{q})\right] = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung $\|.\|\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{Q} \mapsto \|\mathbf{Q}\| = +\sqrt{\mathbf{Q} \circ \widetilde{\mathbf{Q}}} = +\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ heißt Norm der Quaternion $\mathbf{Q}$, für die die folgende Beziehung $\|\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}\| = \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{Q}\|$ gilt, denn:

$$\|\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}\| = \sqrt{(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}) \circ (\widetilde{\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}})} = \sqrt{\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \circ \widetilde{\mathbf{Q}} \circ \widetilde{\mathbf{P}}} = \|\mathbf{Q}\| \sqrt{\mathbf{P} \circ \widetilde{\mathbf{P}}} = \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{Q}\|. \tag{1.6}$$

Mit Hilfe der Norm und der konjugierten Quaternion kann man zu jeder Quaternion $\mathbf{Q} \neq 0$ das entsprechende inverse Element $\mathbf{Q}^{-1}$ angeben. Denn aus $\mathbf{Q} \circ \widetilde{\mathbf{Q}} = \|\mathbf{Q}\|^2$ folgt:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{Q}}}{\|\mathbf{Q}\|^2}. \tag{1.7}$$

Somit haben wir jetzt den Beweis erbracht, dass $(\mathbb{H}', \circ)$ eine Gruppe ist. Außerdem gelten, wie durch Nachrechnen bestätigt werden kann, die beiden Distributivgesetze

$$\mathbf{P} \circ (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}) + (\mathbf{P} \circ \mathbf{R}) \text{ und } (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \circ \mathbf{R} = (\mathbf{P} \circ \mathbf{R}) + (\mathbf{Q} \circ \mathbf{R})$$

womit $(\mathbb{H}, +, \circ)$ ein Schiefkörper ist.

1.2.2 Einheitsquaternionen $\mathbb{E}$

Eine Quaternion $\mathbf{E}$ heißt Einheitsquaternion genau dann, wenn deren Norm 1 ist. Jede Quaternion $\mathbf{Q} \neq 0$ lässt sich durch Division durch dessen Norm zu einer Einheitsquaternion normieren. Die Menge der Einheitsquaternionen, die in Folge mit $\mathbb{E}$ bezeichnet wird, bildet bezüglich der Quaternionenmultiplikation eine Untergruppe von $(\mathbb{H}', \circ)$, da $\mathbb{E} \neq \{\}$ ist, bezüglich der Multiplikation aufgrund von (1.6) abgeschlossen ist, und nach (1.7), und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\|\widetilde{\mathbf{E}}\| = \|\mathbf{E}\|$ gilt, zu jedem $\mathbf{E} \in \mathbb{E}$ auch dessen inverses Element in $\mathbb{E}$ liegt.

Wir wollen zeigen, dass sich die Menge der Einheitsquaternionen $\mathbb{E}$ hervorragend zur Darstellung der Gruppe der räumlichen Drehungen um einen festen Punkt, die mit SO_3 bezeichnet wird, eignet. Dazu müssen wir zuerst einen Zusammenhang zwischen dem $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{H}$ herstellen, der wie folgt aussieht. Jeder Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist als vektorielle Quaternion $x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ interpretierbar, und somit kann $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{H}$ eingebettet werden.

Nun untersuchen wir die Abbildung $\delta_{\mathbf{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{x} \mapsto \delta_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = \mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}}$ wobei $\mathbf{E}$ eine Einheitsquaternion und $\widetilde{\mathbf{E}}$ deren konjugierte darstellt. Zuerst ist zu zeigen, dass $\delta_{\mathbf{E}}$ wirklich vektorielle Quaternionen wieder auf dergleichen abbildet. Dies gilt genau dann, wenn $\widetilde{\mathbf{x}}' = -\mathbf{x}'$ ist, was nun verifiziert wird:

$$\widetilde{\mathbf{x}}' = \widetilde{\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}}} = \mathbf{E} \circ \widetilde{\mathbf{x}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \circ (-\mathbf{x}) \circ \widetilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{x}'. \tag{1.8}$$

Außerdem ist die Abbildung $\delta_{\mathbf{E}}$ linear, d.h. für alle $k \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\delta_{\mathbf{E}}\colon\ k\mathbf{x} \mapsto k\mathbf{x}' \text{ und } \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}' + \mathbf{y}'.$$

Anschließend zeigen wir, dass unter $\delta_{\mathbf{E}}$ alle Skalarprodukte und somit insbesondere alle Beträge von Vektoren und Distanzen erhalten bleiben, es sich also bei $\delta_{\mathbf{E}}$ um eine Kongruenzabbildung handelt. Dazu

wollen wir zuerst das Skalarprodukt von zwei Vektoren durch ihr Quaternionenprodukt ausdrücken. Wir betrachten die Formel (1.4), aus der auch unmittelbar

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{p} = -\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}\times\mathbf{p} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{p}\times\mathbf{q} \tag{1.9}$$

folgt. Durch Addition der Gleichungen (1.4) und (1.9) und anschließenden Äquivalenzumformungen erhält man schließlich

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = -\frac{1}{2}(\mathbf{p}\circ\mathbf{q} + \mathbf{q}\circ\mathbf{p}). \tag{1.10}$$

Mit Hilfe der zuletzt hergeleiteten Formel zeigen wir nun $\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}' = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}' &= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}'\circ\mathbf{y}' + \mathbf{y}'\circ\mathbf{x}') = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}\circ\mathbf{E}\circ\mathbf{y}\circ\widetilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}\circ\mathbf{y}\circ\widetilde{\mathbf{E}}\circ\mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}) = \\ &= -\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{E}\circ(\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \mathbf{y}\circ\mathbf{x})\circ\widetilde{\mathbf{E}}\right] = -\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{E}\circ(-2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\circ\widetilde{\mathbf{E}}\right] = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{E}\circ\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Offen ist noch, ob $\delta_{\mathbf{E}}$ eine gleichsinnige oder gegensinnige Kongruenzabbildung ist. Um diesen Sachverhalt zu klären stellen wir uns die Frage, ob ein Rechtssystem $\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ mit $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{z}$ unter $\delta_{\mathbf{E}}$ wieder in ein solches übergeht. Um dies zu zeigen, wollen wir zuerst das Kreuzprodukt zweier Vektoren durch ihr Quaternionenprodukt ausdrücken. Durch Subtraktion der Gleichung (1.9) von (1.4) und anschließenden Äquivalenzumformungen erhält man die gewünschte Beziehung:

$$\mathbf{p}\times\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\circ\mathbf{q} - \mathbf{q}\circ\mathbf{p}). \tag{1.11}$$

Mit Hilfe von (1.11) zeigen wir nun $\mathbf{x}'\times\mathbf{y}' = \mathbf{z}'$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'\times\mathbf{y}' &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}'\circ\mathbf{y}' - \mathbf{y}'\circ\mathbf{x}') = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}\circ\mathbf{E}\circ\mathbf{y}\circ\widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}\circ\mathbf{y}\circ\widetilde{\mathbf{E}}\circ\mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{E}\circ(\mathbf{x}\circ\mathbf{y} - \mathbf{y}\circ\mathbf{x})\circ\widetilde{\mathbf{E}}\right] = \mathbf{E}\circ(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\circ\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\circ\mathbf{z}\circ\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{z}'.\end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei $\delta_{\mathbf{E}}$ um eine gleichsinnige Kongruenz, die aufgrund ihrer Linearität den Urspung $\mathbf{o}$ fix lässt; also stellt $\delta_{\mathbf{E}}$ eine Drehung dar.

Jede Einheitsquaternionen $\mathbf{E}$ lässt sich als $\mathbf{E} = \cos\alpha + \mathbf{e}\sin\alpha$ mit $\|\mathbf{e}\| = 1$ anschreiben, denn $\|\mathbf{E}\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\|\mathbf{e}\|^2 = 1$. Wir wollen nun wissen, wie der Drehwinkel beziehungsweise die Drehachse der Drehung $\delta_{\mathbf{E}}$ mit dem Winkel α und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}$ in dieser Darstellung der Einheitsquaternion zusammenhängt.

Zuerst wollen wir uns der Drehachse zuwenden, die wir als Fixpunkte der Drehung berechnen, also für die $\mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{x}$ gilt. Da für jede Einheitsquaternion aus (1.7) $\mathbf{E}^{-1} = \widetilde{\mathbf{E}}$ folgt, ist die obige Aussage äquivalent zu $\mathbf{E}\circ\mathbf{x} = \mathbf{x}\circ\mathbf{E}$. Wir wissen bereits, dass die Quaternionenmultiplikation nur dann kommutativ ist, wenn die Vektorteile linear abhängig sind. Daraus folgt, dass die Drehachse in Richtung von $\mathbf{e}$ durch den Ursprung verläuft.

Um den Drehwinkel zu berechnen wählen wir $\mathbf{x}$ orthogonal zur Drehachse, woraus folgt, dass $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e} = 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung berechnen wir $\mathbf{x}'$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}} = (\cos\alpha + \mathbf{e}\sin\alpha)\circ\mathbf{x}\circ(\cos\alpha - \mathbf{e}\sin\alpha) = (\mathbf{x}\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha)\circ(\cos\alpha - \mathbf{e}\sin\alpha) = \\ &= \mathbf{x}\cos^2\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha\cos\alpha - (\mathbf{x}\times\mathbf{e})\sin\alpha\cos\alpha - [(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\times\mathbf{e}]\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Wir ersetzten nun $(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\times\mathbf{e}$ durch den dazu äquivalente Ausdruck $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$ und erhalten:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha\cos\alpha = \mathbf{x}\cos 2\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin 2\alpha.$$

Dies stellt eine Drehung um den Winkel 2α dar.

Satz 1.7. *Die Drehung* $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}'$ *mit dem Einheitsvektor* $\mathbf{e}$ *in Achsenrichtung und mit dem Drehwinkel* 2α *lautet in Quaternionendarstellung* $\mathbf{x}' = \mathbf{E}\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}$ *mit* $\mathbf{E} := \cos\alpha + \mathbf{e}\sin\alpha$.

Da $\delta_{\mathbf{E}_1\circ\mathbf{E}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_1\circ\mathbf{E}_2\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}_1\circ\mathbf{E}_2} = \mathbf{E}_1\circ\mathbf{E}_2\circ\mathbf{x}\circ\widetilde{\mathbf{E}}_2\circ\widetilde{\mathbf{E}}_1 = \delta_{\mathbf{E}_1}(\delta_{\mathbf{E}_2}(\mathbf{x}))$ gilt, ist die Abbildung δ ein Homomorphismus von $\mathbb{E}$ in die Gruppe SO_3. Jedoch ist δ nicht bijektiv, denn $\delta_{\mathbf{E}}$ und $\delta_{-\mathbf{E}}$ stellen dieselbe Bewegung dar. Dem entspricht der Ersatz des Drehwinkels 2α durch $2\alpha + 2\pi$. Somit führen $\mathbf{E}$ und $-\mathbf{E}$

auf dieselbe Drehmatrix $\mathbf{A}$ bei $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Diese orthogonale Matrix lässt sich leicht durch Berechnung von $\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}} &= (e_0 + e_1\,\mathbf{i} + e_2\,\mathbf{j} + e_3\,\mathbf{k}) \circ (x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}) \circ (e_0 - e_1\mathbf{i} - e_2\mathbf{j} - e_3\mathbf{k}) = \\
&= \left[(e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2)x_1 + 2(e_1e_2 - e_0e_3)x_2 + 2(e_1e_3 + e_0e_2)x_3\right]\mathbf{i} + \\
&\quad \left[2(e_1e_2 + e_0e_3)x_1 + (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2)x_2 + 2(e_2e_3 - e_0e_1)x_3\right]\mathbf{j} + \\
&\quad \left[2(e_1e_3 + e_0e_2)x_1 + 2(e_2e_3 + e_0e_1)x_2 + (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2)x_3\right]\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Satz 1.8. *Setzt man die Einheitsquaternion* $\mathbf{E} = e_0 + e_1\,\mathbf{i} + e_2\,\mathbf{j} + e_3\,\mathbf{k}$*, so gilt für die Drehmatrix* $\mathbf{A}$ *in* $\mathbf{x}' = \mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$A = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 - e_0e_3) & 2(e_1e_3 + e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 + e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 - e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 - e_0e_2) & 2(e_2e_3 + e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}$$

wobei man e_0, e_1, e_2, e_3 *auch als Eulersche Drehparameter bezeichnet.*

Bemerkung 1.2. Wird die normierte Quaternion $\mathbf{E}$ in Satz 1.8 durch eine beliebige Quaternion $\mathbf{Q} \neq \mathbf{N}$ ersetzt, so ist die Matrix $\mathbf{A}$ erst nach Division durch $\|\mathbf{Q}\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 0$ orthogonal. In diesem Sinn sind die Größen $(q_0 : q_1 : q_2 : q_3)$ als homogene Bewegungsparameter anzusehen. Wir können diese als homogene Punktkoordinaten in einem dreidimensionalen projektiven Raum P_3 deuten. Somit besteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Drehungen des $\mathbb{R}^3$ um den Urspung und den reellen Punkten des P_3.

1.3 Duale Quaternionen

1.3.1 Duale Zahlen $\mathbb{D}$

$\mathbb{D} := \left\{\underline{d} := d + \varepsilon\widehat{d} \text{ mit } d, \widehat{d} \in \mathbb{R}\right\}$ bezeichnet die Menge der dualen Zahlen, wobei d Realteil und $\widehat{d}$ Dualteil heißt. Duale Zahlen mit verschwindendem Realteil bezeichnet man auch als reine duale Zahlen. Die Addition zweier dualer Zahlen $\underline{d}_1$ und $\underline{d}_2$ ist komponentenweise definiert:

$$\underline{d}_1 + \underline{d}_2 := (d_1 + \varepsilon\widehat{d}_1) + (d_2 + \varepsilon\widehat{d}_2) = (d_1 + d_2) + \varepsilon(\widehat{d}_1 + \widehat{d}_2).$$

Die Verknüpfung + führt aus der Menge $\mathbb{D}$ nicht heraus und ist auch kommutativ. $\mathbb{D}$ stellt bezüglich der Addition sogar eine abelsche Gruppe dar, denn einerseits ist die Addition assoziativ und andererseits existiert ein neutrales Element $\underline{n} = 0$ und zu jedem $\underline{d} \in \mathbb{D}$ ein inverses Element $-\underline{d} \in \mathbb{H}$.

Das Produkt zweier dualer Zahlen wird distributiv unter Beachtung von $\varepsilon^2 = 0$ gebildet:

$$\underline{d}_1\underline{d}_2 := (d_1 + \varepsilon\widehat{d}_1) + (d_2 + \varepsilon\widehat{d}_2) = d_1d_2 + \varepsilon(d_1\widehat{d}_2 + \widehat{d}_1d_2). \tag{1.12}$$

Die Multiplikation führt nicht aus $\mathbb{D}$ heraus und ist kommutativ sowie assoziativ. Außerdem gelten, wie durch Nachrechnen bestätigt werden kann, die Distributivgesetze, woraus folgt, dass $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Dieser enthält jedoch die Menge der reinen dualen Zahlen als Nullteiler, denn $(\varepsilon\widehat{d}_1)(\varepsilon\widehat{d}_2) = \varepsilon^2\widehat{d}_1\widehat{d}_2 = 0$.

Die duale Zahl $\underline{d}_\kappa = d - \varepsilon\widehat{d}$ heißt dual konjugiert bezüglich $\underline{d} = d + \varepsilon\widehat{d}$.

1.3.2 Duale Quaternionen $\mathbb{H}_d$

Wir erhalten nun die Menge der dualen Quaternionen $\mathbb{H}_d$ aus den gewöhnlichen Quaternionen $\mathbb{H}$, indem wir duale Zahlen als Koeffizienten zulassen, woraus folgt:

$$\mathbb{H}_d := \left\{\underline{\mathbf{D}} = \underline{d}_0 + \underline{d}_1\mathbf{i} + \underline{d}_2\mathbf{j} + \underline{d}_3\mathbf{k} \text{ mit } (\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3) \in \mathbb{D}^4\right\}.$$

Wir können $\underline{\mathbf{D}}$ auch, wie folgt, anschreiben:

$$\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = d_0 + d_1\,\mathbf{i} + d_2\,\mathbf{j} + d_3\,\mathbf{k} = d_0 + \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{d}_0 + \widehat{d}_1\mathbf{i} + \widehat{d}_2\mathbf{j} + \widehat{d}_3\mathbf{k} = \widehat{d}_0 + \widehat{\mathbf{d}}$$

oder als

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{d}_0 + \underline{\mathbf{d}} \quad \text{mit} \quad \underline{d}_0 = d_0 + \varepsilon\widehat{d}_0 \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \varepsilon\widehat{\mathbf{d}}.$$

Somit haben wir eine Darstellung der dualen Quaternion $\underline{\mathbf{D}} = \underline{d}_0 + \underline{\mathbf{d}}$, die analog zur Darstellung $\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}$ der gewöhnlicher Quaternionen ist, nur mit dem Unterschied, dass $\underline{d}_0 \in \mathbb{D}$ und $\underline{\mathbf{d}} \in \mathbb{D}^3$ ist. Somit erhalten wir als Summe und Produkt zweier dualer Quaternionen $\underline{\mathbf{B}}$ und $\underline{\mathbf{D}}$ das Analogon zu dem der gewöhnlichen Quaternionen, nämlich für die Summe:

$$\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{D}} = (\underline{b}_0 + \underline{d}_0) + (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{d}}).$$

$(\mathbb{D}, +)$ ist ebenfalls wie $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe, woraus sofort folgt, dass $\mathbb{H}_d$ die Gruppeneigenschaften bezüglich der Addition erfüllt mit $\underline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} = 0$ und mit dem inversen Element $-\underline{\mathbf{D}}$ bezüglich der dualen Quaternion $\underline{\mathbf{D}}$. Für das wiederum nicht kommutative Produkt erhalten wir:

$$\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}} = \underline{b}_0\underline{d}_0 + \underline{\mathbf{b}}\underline{d}_0 + \underline{b}_0\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{b}}\cdot\underline{\mathbf{d}} + \underline{\mathbf{b}}\times\underline{\mathbf{d}}. \tag{1.13}$$

Da die Multiplikation assoziativ ist und die Distributivgesetze gelten, ist $(\mathbb{H}_d, +, \circ)$ ein Ring.

Sei nun $\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}}$ eine duale Quaternion; dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\underline{\mathbf{D}}} &= \widetilde{\mathbf{D}} + \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{D}}} && \text{konjugierte duale Quaternion,}\\
\underline{\mathbf{D}}_\kappa &= \mathbf{D} - \varepsilon\widehat{\mathbf{D}} && \text{dual konjugierte duale Quaternion,}\\
\widetilde{\underline{\mathbf{D}}}_\kappa &= \widetilde{\mathbf{D}} - \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{D}}} && \text{dual konjugierte und konjugierte duale Quaternion.}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun in Folge zeigen, dass analog zu den gewöhnlichen Quaternionen $\widetilde{\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}} = \widetilde{\underline{\mathbf{D}}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}} &= \widetilde{(\mathbf{B} + \varepsilon\widehat{\mathbf{B}}) \circ (\mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}})} = (\widetilde{\mathbf{B} \circ \mathbf{D}}) + \varepsilon(\widetilde{\mathbf{B} \circ \widehat{\mathbf{D}} + \widehat{\mathbf{B}} \circ \mathbf{D}})\\
&= (\widetilde{\mathbf{B} \circ \mathbf{D}}) + \varepsilon(\widetilde{\mathbf{B} \circ \widehat{\mathbf{D}}} + \widetilde{\widehat{\mathbf{B}} \circ \mathbf{D}}) = (\widetilde{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\mathbf{B}}) + \varepsilon(\widetilde{\widehat{\mathbf{D}}} \circ \widetilde{\mathbf{B}} + \widetilde{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{B}}})\\
&= (\widetilde{\mathbf{D}} + \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{D}}}) \circ (\widetilde{\mathbf{B}} + \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{B}}}) = \widetilde{\underline{\mathbf{D}}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Für das Produkt von $\underline{\mathbf{D}} = \underline{d}_0 + \underline{\mathbf{d}}$ mit $\widetilde{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{d}_0 - \underline{\mathbf{d}}$ folgt nach (1.13) somit:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{D}}} &= \underline{d}_0^2 + \underline{\mathbf{d}}\cdot\underline{\mathbf{d}} = d_0^2 + 2d_0\widehat{d}_0\varepsilon + \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} + 2\mathbf{d}\cdot\widehat{\mathbf{d}}\varepsilon =\\
&= d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 2(d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3)\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Wir sehen somit, dass im allgemeinen $\underline{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{D}}} \in \mathbb{D}$ ist. Um in Folge die Norm einer dualen Quaternion nach derselben Vorschrift wie für gewöhnliche Quaternionen definieren zu können, wollen wir uns überlegen, wie man nun die Wurzel aus einer beliebigen dualen Zahl zieht. Sei $\underline{d} = d + \varepsilon\widehat{d} \in \mathbb{D}$ diese duale Zahl und nehmen wir an, dass $\underline{w} = w + \varepsilon\widehat{w}$ bereits die Wurzel aus $\underline{d}$ sei. Dann folgt aus $\underline{w}^2 = w^2 + 2w\widehat{w}\varepsilon$ für $w = \sqrt{d}$ und für $\widehat{w} = \frac{\widehat{d}}{2\sqrt{w}}$. Das heißt nun, dass die Wurzel nur für $d > 0$ existiert, dann aber bis auf das Vorzeichen $\pm$ eindeutig bestimmt ist. Also kann man nun die duale Wurzel einer nicht rein dualen Zahl, wie folgt, berechnen

$$\sqrt[d]{\underline{d}} = \sqrt[d]{d + \varepsilon\widehat{d}} = \sqrt{d} + \frac{\widehat{d}}{2\sqrt{d}}\varepsilon$$

wobei $\sqrt[d]{}$ die Notation für die duale Wurzelfunktion darstellen soll. Nun können wir die Norm einer nicht rein dualen Quaternion $\underline{\mathbf{D}}$ definieren:

$$\|\underline{\mathbf{D}}\| : \quad \mathbb{H}_d \to \mathbb{D} \quad mit \quad \underline{\mathbf{D}} \mapsto \|\underline{\mathbf{D}}\| = \sqrt[d]{\underline{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{D}}}} = \sqrt[d]{(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + 2(d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3)\varepsilon}$$

$$= \sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} + \frac{d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3}{\sqrt{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}}\varepsilon = \|\mathbf{D}\| + \frac{d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3}{\|\mathbf{D}\|}\varepsilon.$$

Wir wollen nun zeigen, dass auch für duale Quaternionen die Beziehung $\|\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}\| = \|\underline{\mathbf{B}}\|\|\underline{\mathbf{D}}\|$ gilt:

$$\|\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}\| = \sqrt[d]{(\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}) \circ \widetilde{(\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}})}} = \sqrt[d]{\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{D}}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}} = \|\underline{\mathbf{D}}\| \sqrt[d]{\underline{\mathbf{B}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}} = \|\underline{\mathbf{B}}\|\|\underline{\mathbf{D}}\|. \tag{1.16}$$

Für jede nicht rein duale Quaternion $\underline{\mathbf{D}}$ können wir auch ein eindeutiges inverses Element, wie folgt, als

$$\underline{\mathbf{D}}^{-1} = \frac{\widetilde{\underline{\mathbf{D}}}}{\|\underline{\mathbf{D}}\|^2} = \mathbf{D}^{-1} - \varepsilon(\mathbf{D}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{D}} \circ \mathbf{D}^{-1}) \tag{1.17}$$

angeben, denn

$$\underline{\mathbf{D}} \circ \underline{\mathbf{D}}^{-1} = (\mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}}) \circ \left[\mathbf{D}^{-1} - \varepsilon(\mathbf{D}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{D}} \circ \mathbf{D}^{-1})\right] = \mathbf{D} \circ \mathbf{D}^{-1} + \varepsilon(\widehat{\mathbf{D}} \circ \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D} \circ \mathbf{D}^{-1} \circ \widehat{\mathbf{D}} \circ \mathbf{D}^{-1}) = 1.$$

Somit könnten wir sagen, dass die Menge $\mathbb{G}_d := \left\{\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}} \text{ mit } \mathbf{D} \in \mathbb{H}_d \setminus \{\mathbf{N}\} \text{ und } \widehat{\mathbf{D}} \in \mathbb{H}_d\right\}$ der nicht rein dualen Quaternionen bezüglich der Multiplikation eine Guppe bildet, denn die Verknüpfung führt nicht aus der Menge $\mathbb{G}_d$ hinaus und ist assoziativ. Außerdem beinhaltet die Menge das neutrale Element $\underline{\mathbf{I}} = 1$ und zu jedem Element nach (1.17) auch dessen inverses.

1.3.3 Duale Einheitsquaternionen $\mathbb{E}_d$

Eine duale Quaternion $\underline{\mathbf{E}} = \underline{e}_0 + \underline{e}_1\mathbf{i} + \underline{e}_2\mathbf{j} + \underline{e}_3\mathbf{k}$ heißt duale Einheitsquaternion, wenn deren Norm 1 ist. Somit ist nach (1.15) die Menge der dualen Einheitsquaternionen, die in Folge mit $\mathbb{E}_d$ bezeichnet wird, eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{G}_d$, die durch die Gleichungen

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad \text{und} \quad e_0\widehat{e}_0 + e_1\widehat{e}_1 + e_2\widehat{e}_2 + e_3\widehat{e}_3 = 0 \tag{1.18}$$

bestimmt ist. Wir wollen die duale Quaternionen, die nur der zweiten Gleichung genügen, als gebundene duale Quaternionen bezeichnen. Die Menge der gebundenen dualen Quatenionen $\in \mathbb{G}_d$, die in Folge mit $\mathbb{F}_d$ bezeichnet wird, bildet eine Untergruppe von $(\mathbb{G}_d, \circ)$. Für den Beweis machen wir uns den Umstand zu nutze, dass die gebundenen dualen Quaternionen dadurch charakterisiert sind, dass deren Norm $\in \mathbb{R}$ ist. Somit folgt aus (1.16) sowohl, dass $\mathbb{F}_d$ abgeschlossen ist, als auch, dass zu jedem Element aus $\mathbb{F}_d$ auch dessen inverses in der Menge liegt. Die Menge der dualen Einheitsquaternionen $\mathbb{E}_d$ bildet bezüglich der Quaternionenmultiplikation eine Untergruppe von $(\mathbb{F}_d, \circ)$, da $\mathbb{E} \neq \{\}$ ist, bezüglich der Multiplikation aufgrund von (1.16) abgeschlossen ist und nach (1.17) und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\|\widetilde{\underline{\mathbf{E}}}\| = \|\underline{\mathbf{E}}\|$ ist, zu jedem $\underline{\mathbf{E}} \in \mathbb{E}_d$ auch dessen inverses Element in $\mathbb{E}_d$ liegt.

Bemerkung 1.3. Somit gilt $(\mathbb{E}_d, \circ) \subset (\mathbb{F}_d, \circ) \subset (\mathbb{G}_d, \circ)$, wobei das Symbol '$\subset$' in diesem Fall als "ist Untergruppe von" aufzufassen ist.

Wir wollen zeigen, dass sich die Menge der dualen Einheitsquaternionen $\mathbb{E}_d$ hervorragend zur Darstellung der euklidischen Bewegungsgruppe eignet. Analog zu den Quaternionen kann man eine Einbettungsabbildung angeben, die jeden Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ auf ein Element der Menge $\mathbb{T}_d := \{\underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon\mathbf{x} \text{ mit der vektoriellen Quaternion } \mathbf{x}\} \subset \mathbb{E}_d$ abbildet.

Wir untersuchen nun die Abbildung $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}: \quad \mathbb{T}_d \to \mathbb{T}_d \quad$ mit $\quad \underline{\mathbf{X}} \mapsto \beta_{\underline{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{E}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{E}}}_\kappa = \underline{\mathbf{E}} \circ (1 + \varepsilon\mathbf{x}) \circ \widetilde{\underline{\mathbf{E}}}_\kappa = 1 + \varepsilon\mathbf{x}' = \underline{\mathbf{X}}'$, wobei $\underline{\mathbf{E}}$ eine duale Einheitsquaternion darstellt. Wir wollen zuerst überprüfen, ob $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ wirklich Elemente aus $\mathbb{T}_d$ wieder auf solche abbildet:

$$\underline{\mathbf{E}} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{E}}}_\kappa = (\mathbf{E} + \varepsilon\widehat{\mathbf{E}}) \circ (1 + \varepsilon\mathbf{x}) \circ (\widetilde{\mathbf{E}} - \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}) = 1 + \varepsilon(\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}). \tag{1.19}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}$ eine vektorielle Quaternion ist, da uns $\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}}$ schon nach (1.8) als solche bekannt ist:

$$(\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}) + \widetilde{(\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}})} = \widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}} + \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}} - \widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Somit bildet $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ den Vektor $\mathbf{x}$ auf den Vektor $\mathbf{x}' = \mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}$ ab. Nach Satz 1.7 stellt $\mathbf{E} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{E}}$ eine Drehung um den Ursprung dar. Da der verbleibende Ausdruck nicht mehr von $\mathbf{x}$ abhängt,

also konstant ist, handelt es sich bei diesem um eine Translation. Also repräsentiert $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ eine Bewegung des euklidischen Raumes. Außerdem ist die Abbildung $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ linear, d.h. für alle $k \in \mathbb{R}$ und $\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}} \in \mathbb{T}_d$ gilt:

$$\beta_{\underline{\mathbf{E}}}\colon\ k\underline{\mathbf{X}} \mapsto k\underline{\mathbf{X}}' \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{Y}} \mapsto \underline{\mathbf{X}}' + \underline{\mathbf{Y}}'.$$

Da $(\underline{\mathbf{E}}_1 \circ \underline{\mathbf{E}}_2)_\kappa = \underline{\mathbf{E}}_{1\kappa} \circ \underline{\mathbf{E}}_{2\kappa}$ für alle $\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2 \in \mathbb{H}_d$ gilt, haben wir $\beta_{\underline{\mathbf{E}}_1 \circ \underline{\mathbf{E}}_2}(\underline{\mathbf{X}}) = (\underline{\mathbf{E}}_1 \circ \underline{\mathbf{E}}_2) \circ \underline{\mathbf{X}} \circ (\widetilde{\underline{\mathbf{E}}_1 \circ \underline{\mathbf{E}}_2})_\kappa = \underline{\mathbf{E}}_1 \circ \underline{\mathbf{E}}_2 \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{E}}}_{2\kappa} \circ \widetilde{\underline{\mathbf{E}}}_{1\kappa} = \beta_{\underline{\mathbf{E}}_1}(\beta_{\underline{\mathbf{E}}_2}(\underline{\mathbf{X}}))$ und somit ist die Abbildung β ein Homomorphismus der Gruppe $\mathbb{E}_d$ in die Bewegungsgruppe des euklidischen Raumes. $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ ist sogar eine surjektive Abbildung, denn jede Schiebung kann bei $\mathbf{E} = 1$, woraus $\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}} = 2\widehat{\mathbf{E}}$ folgt, durch $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ dargestellt werden. Von den Drehungen ist uns dies schon aus Satz 1.7 bekannt. Jedoch ist β nicht bijektiv, denn $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ und $\beta_{-\underline{\mathbf{E}}}$ stellen dieselbe Bewegung dar.

Satz 1.9. *Die Abbildung β ist eine $2:1$ Darstellung der Bewegungsgruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes, denn $\beta_{\underline{\mathbf{E}}}$ und $\beta_{-\underline{\mathbf{E}}}$ stellen dieselbe Bewegung dar.*

Es bleibt noch die Berechnung der Matrizendarstellung $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s}$ dieser Bewegung, wobei $\mathbf{A}$ die in Satz 1.8 bereits angegebene Drehmatrix und $\mathbf{s}$ der Schiebvektor ist. Wir müssen also noch den Schiebanteil $\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}}$ mit $\mathbf{E} = e_0 + e_1\,\mathbf{i} + e_2\,\mathbf{j} + e_3\,\mathbf{k}$ und $\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{e}_0 + \widehat{e}_1\mathbf{i} + \widehat{e}_2\mathbf{j} + \widehat{e}_3\mathbf{k}$ koordinatenmäßig, wie folgt, bestimmen:

$$\widehat{\mathbf{E}} \circ \widetilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{E}}} = 2(e_0\widehat{e}_1 - e_1\widehat{e}_0 + e_2\widehat{e}_3 - e_3\widehat{e}_2)\mathbf{i} + 2(e_0\widehat{e}_2 - e_1\widehat{e}_3 - e_2\widehat{e}_0 + e_3\widehat{e}_1)\mathbf{j} + 2(e_0\widehat{e}_3 + e_1\widehat{e}_2 - e_2\widehat{e}_1 - e_3\widehat{e}_0)\mathbf{k}.$$

Satz 1.10. *Jede duale Einheitsquaternion $\underline{\mathbf{E}}$ bestimmt gemäß Satz 1.9 eine Bewegung des euklidischen Dreiraumes. Setzt man $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \varepsilon\widehat{\mathbf{E}}$ mit $\mathbf{E} = e_0 + e_1\,\mathbf{i} + e_2\,\mathbf{j} + e_3\,\mathbf{k}$ und $\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{e}_0 + \widehat{e}_1\mathbf{i} + \widehat{e}_2\mathbf{j} + \widehat{e}_3\mathbf{k}$, so gilt nach* (1.18)

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \qquad \textit{und} \qquad e_0\widehat{e}_0 + e_1\widehat{e}_1 + e_2\widehat{e}_2 + e_3\widehat{e}_3 = 0.$$

Die zugehörige Bewegung hat die Matrizendarstellung $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s}$ mit $\mathbf{A}$ gemäß Satz 1.8 und mit

$$\mathbf{s} = 2\begin{pmatrix} e_0\widehat{e}_1 - e_1\widehat{e}_0 + e_2\widehat{e}_3 - e_3\widehat{e}_2 \\ e_0\widehat{e}_2 - e_1\widehat{e}_3 - e_2\widehat{e}_0 + e_3\widehat{e}_1 \\ e_0\widehat{e}_3 + e_1\widehat{e}_2 - e_2\widehat{e}_1 - e_3\widehat{e}_0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen dieses Ergebnis aufgrund folgender Überlegung noch etwas verallgemeinern, indem wir uns nun wieder der Gruppe $(\mathbb{F}_d, \circ)$ zuwenden, von der laut Bemerkung 1.3 $(\mathbb{E}_d, \circ)$ eine Untergruppe ist. Die Abbildung

$$\psi\colon \quad \mathbb{F}_d \to \mathbb{E}_d \quad \textit{mit} \quad \underline{\mathbf{D}} \mapsto \psi(\underline{\mathbf{D}}) = \underline{\mathbf{D}}_n = \frac{\underline{\mathbf{D}}}{\|\underline{\mathbf{D}}\|^2},$$

die der Normierung entspricht, ist ein Homomorphismus von $(\mathbb{F}_d, \circ)$ auf $(\mathbb{E}_d, \circ)$, denn mit (1.16) gilt:

$$\psi(\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}) = (\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}})_n = \frac{\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}}{\|\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}\|^2} = \frac{\underline{\mathbf{B}} \circ \underline{\mathbf{D}}}{\|\underline{\mathbf{B}}\|^2\|\underline{\mathbf{D}}\|^2} = \frac{\underline{\mathbf{B}}}{\|\underline{\mathbf{B}}\|^2} \circ \frac{\underline{\mathbf{D}}}{\|\underline{\mathbf{D}}\|^2} = \underline{\mathbf{B}}_n \circ \underline{\mathbf{D}}_n = \psi(\underline{\mathbf{B}}) \circ \psi(\underline{\mathbf{D}}).$$

Somit ist die Abbildung $\psi \circ \beta$ ein Homomorphismus der Gruppe $(\mathbb{F}_d, \circ)$ auf die Bewegungsgruppe des euklidischen Raumes. Dieses Ergebnis ist Motivation für den folgenden Satz.

Satz 1.11. *Sei $\underline{\mathbf{D}} \in \mathbb{F}_d$. Dann bestimmt die normierte duale Quaternion $\underline{\mathbf{D}}_n \in \mathbb{E}_d$ gemäß Satz 1.9 eine Bewegung des euklidischen Dreiraumes. Setzt man $\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}}$ mit $\mathbf{D} = d_0 + d_1\,\mathbf{i} + d_2\,\mathbf{j} + d_3\,\mathbf{k}$ und $\widehat{\mathbf{D}} = \widehat{d}_0 + \widehat{d}_1\mathbf{i} + \widehat{d}_2\mathbf{j} + \widehat{d}_3\mathbf{k}$ so gilt*

$$\Delta^2 := d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \neq 0 \qquad \textit{und} \qquad d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3 = 0.$$

Die zugehörige Bewegung hat die Matrizendarstellung $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{t}$ wobei $\mathbf{B} = \Delta^{-2}\mathbf{A}$ und $\mathbf{t} = \Delta^{-2}\mathbf{s}$ ist, mit $\mathbf{A}$ gemäß Satz 1.9 und $\mathbf{s}$ gemäß Satz 1.10 bei Substitution von e_i durch d_i und $\widehat{e}_i$ durch $\widehat{d}_i$ für $i = 0, .., 3$.

Stellt man $\mathbf{x}$ durch homogene Punktkoordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ dar, so lässt sich die Matrizendarstellung der Bewegung auch, wie folgt, anschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(d_0\widehat{d}_1 - d_1\widehat{d}_0 + d_2\widehat{d}_3 - d_3\widehat{d}_2) & d_0^2 + d_1^2 - d_2^2 - d_3^2 & 2(d_1d_2 - d_0d_3) & 2(d_1d_3 + d_0d_2) \\ 2(d_0\widehat{d}_2 - d_1\widehat{d}_3 - d_2\widehat{d}_0 + d_3\widehat{d}_1) & 2(d_1d_2 + d_0d_3) & d_0^2 - d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 & 2(d_2d_3 - d_0d_1) \\ 2(d_0\widehat{d}_3 + d_1\widehat{d}_2 - d_2\widehat{d}_1 - d_3\widehat{d}_0) & 2(d_1d_3 - d_0d_2) & 2(d_2d_3 + d_0d_1) & d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir berechnen unter Berücksichtigung, dass für gebundene duale Quaternionen $\|\underline{\mathbf{D}}\|^2 = \|\mathbf{D}\|^2$ gilt, $\beta_{\underline{\mathbf{D}}_n}(\underline{\mathbf{X}})$ laut (1.19)

$$\underline{\mathbf{D}}_n \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \underline{\mathbf{D}}_n = \frac{\underline{\mathbf{D}}}{\|\underline{\mathbf{D}}\|} \circ \underline{\mathbf{X}} \circ \frac{\widetilde{\underline{\mathbf{D}}}_\kappa}{\|\underline{\mathbf{D}}\|} = \frac{1}{\|\underline{\mathbf{D}}\|^2}(\mathbf{D} + \varepsilon\widehat{\mathbf{D}}) \circ (1 + \varepsilon\mathbf{x}) \circ (\widetilde{\mathbf{D}} - \varepsilon\widetilde{\widehat{\mathbf{D}}})$$

$$= \frac{\mathbf{D} \circ \widetilde{\mathbf{D}}}{\|\mathbf{D}\|^2} + \varepsilon\frac{\mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{D}} + \widehat{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{D}}}}{\|\mathbf{D}\|^2} = 1 + \varepsilon(\frac{\mathbf{D} \circ \mathbf{x} \circ \widetilde{\mathbf{D}}}{\|\mathbf{D}\|^2} + \frac{\widehat{\mathbf{D}} \circ \widetilde{\mathbf{D}} - \mathbf{D} \circ \widetilde{\widehat{\mathbf{D}}}}{\|\mathbf{D}\|^2}).$$

□

Nach Satz 1.11 sind die Größen $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3 : \widehat{d}_0 : \widehat{d}_1 : \widehat{d}_2 : \widehat{d}_3)$ als homogene Bewegungsparameter anzusehen, die der Gleichung $d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3 = 0$ genügen. Man lässt sich dadurch im Unterschied zur Darstellung in Satz 1.10 die mögliche Normierung des homogenen 8-Tupels noch offen, eine Tatsache, die uns im nächsten Abschnitt sinnvoll erscheinen wird.

1.4 Study Darstellung der Raumkongruenzen

Wir fassen nun diese homogenen Bewegungsparameter $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3 : \widehat{d}_0 : \widehat{d}_1 : \widehat{d}_2 : \widehat{d}_3)$ als homogene Punktkoordinaten des 7-dimensionalen projektiven Raums P_7 auf, der über dem 8-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{H}_d$ definiert ist. Somit stellen bei $\underline{\mathbf{D}} \in \mathbb{F}_d$ deren normierte $\underline{\mathbf{D}}_n$ und $-\underline{\mathbf{D}}_n$, die dieselbe Bewegung repräsentieren, auch denselben Punkt in P_7 dar. Die gebundenen dualen Quaternionen erfüllen definitionsgemäß die Gleichung $d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3 = 0$, und daher liegt deren Bild im P_7 auf einer Quadrik, der sogenannten Study Quadrik, die durch dieselbe Gleichung bestimmt ist. Aber nicht alle Punkte dieser Quadrik gehören zu einem Element $\in \mathbb{F}_d$, wie wir es in Satz 1.11 gefordert haben, denn auch alle Elemente der Menge der rein dualen Quaternionen erfüllen obige Bedingung und liegen somit auch in P_7 auf der Quadrik. Sie liegen in einem dreidimensionalen Unterraum, der durch die Gleichungen $d_i = 0$ $(i = 0, .., 3)$ bestimmt ist und der daher aus der Study Quadrik herausgeschnitten werden muss. Wir bezeichnen die verbleibende Punktmenge mit S_6^2 und wollen sie wiederum Study Quadrik nennen. Es sei noch bemerkt, dass E. Study einen Punkt dieser Quadrik als Soma bezeichnete und jene, die in dem herausgeschnittenen Unterraum liegen, mit Pseudosoma. Somit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 1.12. *Es gibt eine Bijektion zwischen den Punkten der Study Quadrik S_6^2 und den eigentlichen Raumkongruenzen.*

Wir wollen uns nun überlegen, dass auf S_6^2 lineare Räume von höherer Dimensionszahl als 3 nicht liegen können. Ein auf S_6^2 gelegener Punkt muss nämlich auch in seiner Polarhyperebene bezüglich S_6^2 liegen. Somit muss ein auf der Quadrik gelegener n-dimensionaler Unterraum auch in dem dazugehörigen $(6-n)$-dimensionalen Polarraum liegen. Also muss die Bedingung $n \leqq 6 - n$ gelten, woraus sofort das gewünschte Ergebnis folgt. Es sei noch bemerkt, dass S_6^2 zwei solcher Scharen von dreidimensionalen Unterräumen trägt ähnlich einem Hyperboloid im dreidimensionalen Raum. Diese Betrachtung sollte für unseren Zweck genügen, jedoch finden sich nähere Informationen zu diesem Thema bei E. Study [34] und im Buch [36] von E.A. Weiss.

1.4.1 Die Geometrie des Bildraumes

Felix Klein definierte in seinem Erlanger Programm Geometrie als Invariantentheorie einer Transformationsgruppe. Seien nun P^n ein n-dimensionaler projekiver Raum, F_0 eine reguläre oder singuläre Hyperfläche 2.Ordnung in P^n, A_0 der Spitzenraum von F_0, F_{i+1} eine Hyperfläche zweiter Ordnung im Raum A_i und A_{i+1} der Spitzenraum von F_{i+1} $(i = 1, ...)$, dann ist die Geometrie des Raumes bestimmt durch die Absolutfigur

$$F = F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k$$

und die Invariantentheorie der Gruppe aller Kollineationen in P^n, die F als Ganzes fix lassen.

Wir wollen uns in Folge nicht die ganze Absolutfigur, sondern nur die für die weitere Arbeit zweckmäßigen Invariaten bestimmen. Dazu wechseln wir das Koordinatensystem im Rast- sowie im Gangraum, was einer 'Rechts- bzw. Linksschiebung' entspricht. Wir indentifizieren unsere duale Quaternion $\underline{\mathbf{Q}}$ mit einem

Punkt $\mathbb{R}\underline{\mathbf{Q}}$ des P_7, der die Punktmenge des Bildraumes repräsentiert und führen zunächst einmal eine 'Linksschiebung', wie folgt, durch:

$$^{L}\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{L}} \circ \underline{\mathbf{Q}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \varepsilon\widehat{\mathbf{Q}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \varepsilon\widehat{\mathbf{L}}$$

$$\begin{pmatrix} {}^{L}q_0 \\ {}^{L}q_1 \\ {}^{L}q_2 \\ {}^{L}q_3 \\ {}^{L}\widehat{q}_0 \\ {}^{L}\widehat{q}_1 \\ {}^{L}\widehat{q}_2 \\ {}^{L}\widehat{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_0 & -l_3 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & l_0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & -l_2 & l_1 & l_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{l}_0 & -\widehat{l}_1 & -\widehat{l}_2 & -\widehat{l}_3 & l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ \widehat{l}_1 & \widehat{l}_0 & -\widehat{l}_3 & \widehat{l}_2 & l_1 & l_0 & -l_3 & l_2 \\ \widehat{l}_2 & \widehat{l}_3 & \widehat{l}_0 & -\widehat{l}_1 & l_2 & l_3 & l_0 & -l_1 \\ \widehat{l}_3 & -\widehat{l}_2 & \widehat{l}_1 & \widehat{l}_0 & l_3 & -l_2 & l_1 & l_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \widehat{q}_0 \\ \widehat{q}_1 \\ \widehat{q}_2 \\ \widehat{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Analog gehen wir für die 'Rechtsschiebung' vor und bekommen:

$$^{R}\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{Q}} \circ \underline{\mathbf{R}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \varepsilon\widehat{\mathbf{Q}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \varepsilon\widehat{\mathbf{R}}$$

$$\begin{pmatrix} {}^{R}q_0 \\ {}^{R}q_1 \\ {}^{R}q_2 \\ {}^{R}q_3 \\ {}^{R}\widehat{q}_0 \\ {}^{R}\widehat{q}_1 \\ {}^{R}\widehat{q}_2 \\ {}^{R}\widehat{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_3 & r_0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{r}_0 & -\widehat{r}_1 & -\widehat{r}_2 & -\widehat{r}_3 & r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ \widehat{r}_1 & \widehat{r}_0 & \widehat{r}_3 & -\widehat{r}_2 & r_1 & r_0 & r_3 & -r_2 \\ \widehat{r}_2 & -\widehat{r}_3 & \widehat{r}_0 & \widehat{r}_1 & r_2 & -r_3 & r_0 & r_1 \\ \widehat{r}_3 & \widehat{r}_2 & -\widehat{r}_1 & \widehat{r}_0 & r_3 & r_2 & -r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \widehat{q}_0 \\ \widehat{q}_1 \\ \widehat{q}_2 \\ \widehat{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir also nun das Produkt der beiden obigen Matrizen bilden erhalten wir die gewünschte Beziehung:

$$^{LR}\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{L}} \circ \underline{\mathbf{Q}} \circ \underline{\mathbf{R}} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} {}^{LR}q_0 \\ \vdots \\ {}^{LR}\widehat{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ \mathbf{S} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ \widehat{q}_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} l_0r_0 - l_1r_1 - l_2r_2 - l_3r_3 & -l_0r_1 - l_1r_0 + l_2r_3 - l_3r_2 & -l_0r_2 - l_1r_3 - l_2r_0 + l_3r_1 & -l_0r_3 + l_1r_2 - l_2r_1 - l_3r_0 \\ l_1r_0 + l_0r_1 - l_3r_2 + l_2r_3 & -l_1r_1 + l_0r_0 + l_3r_3 + l_2r_2 & -l_1r_2 + l_0r_3 - l_3r_0 - l_2r_1 & -l_1r_3 - l_0r_2 - l_3r_1 + l_2r_0 \\ l_2r_0 + l_3r_1 + l_0r_2 - l_1r_3 & -l_2r_1 + l_3r_0 - l_0r_3 - l_1r_2 & -l_2r_2 + l_3r_3 + l_0r_0 + l_1r_1 & -l_2r_3 - l_3r_2 + l_0r_1 - l_1r_0 \\ l_3r_0 - l_2r_1 + l_1r_2 + l_0r_3 & -l_3r_1 - l_2r_0 - l_1r_3 + l_0r_2 & -l_3r_2 - l_2r_3 + l_1r_0 - l_0r_1 & -l_3r_3 + l_2r_2 + l_1r_1 + l_0r_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \widehat{l}_0r_0 - \widehat{l}_1r_1 - \widehat{l}_2r_2 - \widehat{l}_3r_3 + l_0\widehat{r}_0 - l_1\widehat{r}_1 - l_2\widehat{r}_2 - l_3\widehat{r}_3 & -\widehat{l}_0r_1 - \widehat{l}_1r_0 + \widehat{l}_2r_3 - \widehat{l}_3r_2 - l_0\widehat{r}_1 - l_1\widehat{r}_0 + l_2\widehat{r}_3 - l_3\widehat{r}_2 \\ \widehat{l}_1r_0 + \widehat{l}_0r_1 - \widehat{l}_3r_2 + \widehat{l}_2r_3 + l_1\widehat{r}_0 + l_0\widehat{r}_1 - l_3\widehat{r}_2 + l_2\widehat{r}_3 & -\widehat{l}_1r_1 + \widehat{l}_0r_0 + \widehat{l}_3r_3 + \widehat{l}_2r_2 - l_1\widehat{r}_1 + l_0\widehat{r}_0 + l_3\widehat{r}_3 + l_2\widehat{r}_2 \\ \widehat{l}_2r_0 + \widehat{l}_3r_1 + \widehat{l}_0r_2 - \widehat{l}_1r_3 + l_2\widehat{r}_0 + l_3\widehat{r}_1 + l_0\widehat{r}_2 - l_1\widehat{r}_3 & -\widehat{l}_2r_1 + \widehat{l}_3r_0 - \widehat{l}_0r_3 - \widehat{l}_1r_2 - l_2\widehat{r}_1 + l_3\widehat{r}_0 - l_0\widehat{r}_3 - l_1\widehat{r}_2 \\ \widehat{l}_3r_0 - \widehat{l}_2r_1 + \widehat{l}_1r_2 + \widehat{l}_0r_3 + l_3\widehat{r}_0 - l_2\widehat{r}_1 + l_1\widehat{r}_2 + l_0\widehat{r}_3 & -\widehat{l}_3r_1 - \widehat{l}_2r_0 - \widehat{l}_1r_3 + \widehat{l}_0r_2 - l_3\widehat{r}_1 - l_2\widehat{r}_0 - l_1\widehat{r}_3 + l_0\widehat{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\widehat{l}_0r_2 - \widehat{l}_1r_3 - \widehat{l}_2r_0 + \widehat{l}_3r_1 - l_0\widehat{r}_2 - l_1\widehat{r}_3 - l_2\widehat{r}_0 + l_3\widehat{r}_1 & -\widehat{l}_0r_3 + \widehat{l}_1r_2 - \widehat{l}_2r_1 - \widehat{l}_3r_0 - l_0\widehat{r}_3 + l_1\widehat{r}_2 - l_2\widehat{r}_1 - l_3\widehat{r}_0 \\ -\widehat{l}_1r_2 + \widehat{l}_0r_3 - \widehat{l}_3r_0 - \widehat{l}_2r_1 - l_1\widehat{r}_2 + l_0\widehat{r}_3 - l_3\widehat{r}_0 - l_2\widehat{r}_1 & -\widehat{l}_1r_3 - \widehat{l}_0r_2 - \widehat{l}_3r_1 + \widehat{l}_2r_0 - l_1\widehat{r}_3 - l_0\widehat{r}_2 - l_3\widehat{r}_1 + l_2\widehat{r}_0 \\ -\widehat{l}_2r_2 + \widehat{l}_3r_3 + \widehat{l}_0r_0 + \widehat{l}_1r_1 - l_2\widehat{r}_2 + l_3\widehat{r}_3 + l_0\widehat{r}_0 + l_1\widehat{r}_1 & -\widehat{l}_2r_3 - \widehat{l}_3r_2 + \widehat{l}_0r_1 - \widehat{l}_1r_0 - l_2\widehat{r}_3 - l_3\widehat{r}_2 + l_0\widehat{r}_1 - l_1\widehat{r}_0 \\ -\widehat{l}_3r_2 - \widehat{l}_2r_3 + \widehat{l}_1r_0 - \widehat{l}_0r_1 - l_3\widehat{r}_2 - l_2\widehat{r}_3 + l_1\widehat{r}_0 - l_0\widehat{r}_1 & -\widehat{l}_3r_3 + \widehat{l}_2r_2 + \widehat{l}_1r_1 + \widehat{l}_0r_0 - l_3\widehat{r}_3 + l_2\widehat{r}_2 + l_1\widehat{r}_1 + l_0\widehat{r}_0 \end{vmatrix}.$$

Obwohl in der Matrix 16 Parameter vorkommen, besitzt die Gruppe aller Kollineationen ∞^{12} Elemente, da ja $\underline{\mathbf{L}}$ und $\underline{\mathbf{R}}$ gebundene duale Quaternionen sind und somit die Gleichung $l_0\widehat{l}_0 + l_1\widehat{l}_1 + l_2\widehat{l}_2 + l_3\widehat{l}_3 = 0$ bzw. $r_0\widehat{r}_0 + r_1\widehat{r}_1 + r_2\widehat{r}_2 + r_3\widehat{r}_3 = 0$ erfüllen müssen und zusätzlich noch die r_i sowie die l_i homogen sind. Nun machen wir uns auf die Suche nach Invarianten dieser Gruppe und sehen sofort, dass der dreidimensionale Unterraum $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$, also jener Raum, den wir aus der Study Quadrik herausgeschnitten haben, ein Fixraum ist. In diesem Unterraum liegt die Quadrik $\widehat{d}_0^2 + \widehat{d}_1^2 + \widehat{d}_2^2 + \widehat{d}_3^2 = 0$, die ebenfalls unter jeder Kollineation in sich übergeht, denn es gilt:

$$^{LR}\widehat{q}_0{}^2 + {}^{LR}\widehat{q}_1{}^2 + {}^{LR}\widehat{q}_2{}^2 + {}^{LR}\widehat{q}_3{}^2 = (\widehat{q}_0{}^2 + \widehat{q}_1{}^2 + \widehat{q}_2{}^2 + \widehat{q}_3{}^2)(l_0^2 + l_1^2 +_2^2 + l_3^2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2).$$

Aufgrund der Form der Abbildungsmatrix folgt daraus natürlich sofort, dass auch die Quadrik $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0$, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit Ψ bezeichnen wollen und, wie wir sehen werden,

noch eine wichtige Rolle spielen wird, ebenfalls eine Invariante ist, was durch Nachrechnen leicht bestätigt werden kann:

$$ {}^{LR}q_0{}^2 + {}^{LR}q_1{}^2 + {}^{LR}q_2{}^2 + {}^{LR}q_3{}^2 = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)(l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2). $$

Mit diesem Ergebnis wollen wir diesen Abschnitt beenden und noch aus Gründen der Vollständigkeit anmerken, dass es sich hierbei um einen quasielliptischen Raum handelt.

1.5 Allgemeine Stewart Gough Plattformen

Vom geometrisch kinematischen Standpunkt aus betrachtet, besteht eine allgemeine Stewart Gough Plattform aus dem bewegten System Σ, der sogenannten Plattform, und sechs Teleskopbeinen, die über Kugel-Schub-Kugel Gelenke die Plattform mit der Basis, dem Rastraum Σ_0, verbinden. Dabei erfolgt die Steuerung nur über den Antrieb der Schubgelenke. Die Berechnung des Freiheitsgrades dieser kinematischen Kette über die Formel von Grübler liefert den redundanten Grad 12. Dieser kommt dadurch zu Stande, dass jedes der Teleskopbeine eine Rotation um die Verbindungsgerade der Kugelgelenksmitten gestattet, ohne die relative Lage von Σ gegenüber Σ_0 zu ändern. Man kann nun die Plattform so modifizieren, dass man den redundanten Freiheitsgrad zum Verschwinden bringt, indem man alle Kugelgelenke in Σ_0 oder Σ durch Kardangelenke vom Freiheitsgrad 2 ersetzt. Für die folgenden theoretischen Überlegungen spielt der Freiheitsgrad keine weitere Rolle und wir können daher zur Vereinfachung die ursprüngliche Definition verwenden.

Die Geometrie der Plattform und Basis ist durch die Lage der sechs Montagepunkte der Beine im Gangkoordinatensystem Σ und die Lage der sechs entsprechenden Ankerpunkte im Rastkoordinatensystem Σ_0 bestimmt. Wenn die zwölf Montagepunkte des Plattformmechanismus allgemein in Gang- und Rastkoordinatensystem liegen, so sprechen wir von einer allgemeinen Stewart Gough Plattform (Abbildung 1.1). Dabei wird angenommen, dass alle sechs Beine paarweise voneinander verschieden sind und der Trivialfall, dass nämlich alle Plattform- oder Basisankerpunkte auf einer Geraden liegen, ausgeschlossen wird.

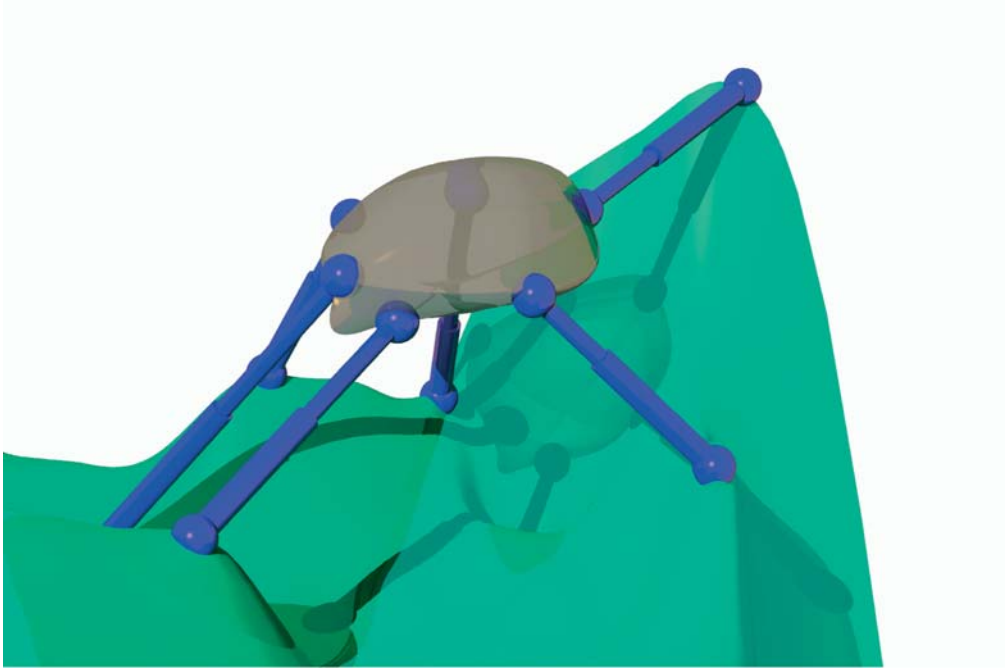

Abbildung 1.1: Allgemeine Stewart Gough Plattform

Bei diesen Plattformen ist die Rückwärtskinematik sehr simpel, denn ist die Position von Σ gegenüber Σ_0 sowie die Geometrie der Plattform und der Basis bekannt, so können die zugehörigen Stablängen einfach als Längen von Strecken mit bekannten Endpunkten berechnet werden. Im Gegensatz dazu ist die Vorwärtskinematik für Stewart Gough Plattformen nicht so leicht greifbar, und daher wollen wir diesem Problem ein eigenes Kapitel widmen.

Kapitel 2

Vorwärtskinematik allgemeiner Stewart Gough Plattformen

Wir können das Problem der Vorwärtskinematik folgendermaßen formulieren: Gegeben seien die Geometrie der Plattform und der Basis sowie alle sechs Beinlängen (Abbildung 2.1). Gesucht sind alle möglichen Lagen der Plattform zur Basis mit diesen Angabestücken.

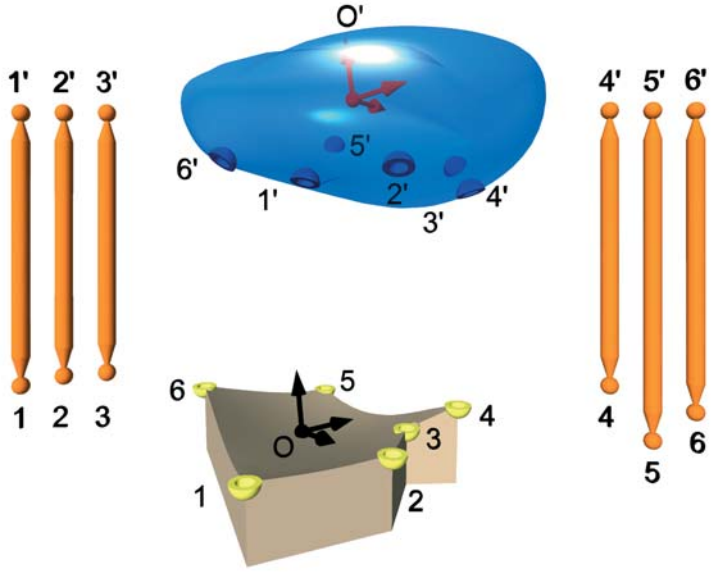

Abbildung 2.1: Angabestücke für die Vorwärtskinematik einer allgemeinen Stewart Gough Plattform

Zur Lösung dieser Frage wollen wir die im vorigen Abschnitt abgeleitete Study Darstellung der euklidischen Bewegung benutzen. Jeder Position von Σ gegenüber Σ_0 entspricht in dieser Darstellung genau einem Punkt auf S_6^2, denn es gibt genau eine Raumbewegung, die das eine Koordinatensystem in das andere überführt. Bevor wir näher auf diesen Sachverhalt eingehen, wollen wir noch folgende Vereinbarungen bezüglich der Notation treffen: Wir bezeichnen die Basispunkte bezüglich dem Rastkoordinatensystem Σ_0 mit $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3})$ und die entsprechenden Ankerpunkte bezüglich Σ mit $\mathbf{Y}_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2}, Y_{i,3})$ beziehungsweise bezüglich Σ_0 mit $\overline{\mathbf{Y}}_i = (\overline{Y}_{i,1}, \overline{Y}_{i,2}, \overline{Y}_{i,3})$ bei $i = 1, .., 6$. Die Beinlängen, die in Folge mit R_i bezeichnet werden, sind somit durch den Abstand von $\mathbf{X}_i$ zu $\mathbf{Y}_i$ gegeben.

Wir wollen vorab den Lösungsweg skizzieren: Wir suchen das kinematische Bild des Bewegungsvorganges, bei dem der Punkt $\mathbf{Y}_i$ auf einer Kugel um $\mathbf{X}_i$ geführt wird. Dazu brechen wir die Plattform so auf, dass die Plattform nur mehr am Bein $\mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i$ hängt. Somit kann das Gangsystem Bewegungen vom Freiheitsgrad fünf ausführen, da es nur einer Bedingung, nämlich einem konstanten Abstand zwischen

$\mathbf{X}_i$ und $\mathbf{Y}_i$, unterworfen ist. Die gemeinsamen Punkte der kinematischen Bilder, die man erhält, wenn man dies für alle $i = 1, .., 6$ durchführt, stellen die Lösung unseres Problems dar. Denn sie entsprechen Lagen, in denen sich die sechs Gangkoordinatensysteme decken und somit die Plattform zusammengebaut werden kann (Abbildung 2.2).

Abbildung 2.2: Eine mögliche Lösung der Vorwärtskinematik für die Angabestücke aus Abbildung 2.1

Wir wollen zunächst das kinematische Bild des beschriebenen Bewegungsvorganges berechnen. Die Bedingung, dass der Punkt $\mathbf{Y}_i$ auf einer Kugel um $\mathbf{X}_i$ geführt wird, lautet nun analytisch:

$$\sum_{j=1,2,3} (\overline{Y}_{i,j} - X_{i,j})^2 = R_i^2 \qquad \text{oder} \qquad \sum_{j=1,2,3} \overline{Y}_{i,j}^2 - 2 \sum_{j=1,2,3} \overline{Y}_{i,j} X_{i,j} + \sum_{j=1,2,3} X_{i,j}^2 - R_i^2 = 0.$$

Indem man in der zuletzt erhaltenen Gleichung für $\mathbf{Y}_i$ homogene Koordinaten einführt und den konstanten Ausdruck $\sum_{j=1,2,3} X_{i,j}^2 - R_i^2 = K_i$ setzt, erhält man:

$$\sum_{j=1,2,3} \overline{Y}_{i,j}^2 - 2\overline{Y}_{i,0} \sum_{j=1,2,3} \overline{Y}_{i,j} X_{i,j} + \overline{Y}_{i,0}^2 K_i = 0. \tag{2.1}$$

Da ja die Koordinatensysteme Σ und Σ_0 durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können, gilt nach Satz 1.11:

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_{i,0} \\ \overline{Y}_{i,1} \\ \overline{Y}_{i,2} \\ \overline{Y}_{i,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(d_0\widehat{d}_1 - d_1\widehat{d}_0 + d_2\widehat{d}_3 - d_3\widehat{d}_2) & d_0^2 + d_1^2 - d_2^2 - d_3^2 & 2(d_1d_2 - d_0d_3) & 2(d_1d_3 + d_0d_2) \\ 2(d_0\widehat{d}_2 - d_1\widehat{d}_3 - d_2\widehat{d}_0 + d_3\widehat{d}_1) & 2(d_1d_2 + d_0d_3) & d_0^2 - d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 & 2(d_2d_3 - d_0d_1) \\ 2(d_0\widehat{d}_3 + d_1\widehat{d}_2 - d_2\widehat{d}_1 - d_3\widehat{d}_0) & 2(d_1d_3 - d_0d_2) & 2(d_2d_3 + d_0d_1) & d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{i,0} \\ Y_{i,1} \\ Y_{i,2} \\ Y_{i,3} \end{pmatrix}.$$

Wir können in dieser Darstellung $Y_{i,0} = 1$ setzen, da es sich bei $\mathbf{Y}_i$ um eigentliche Punkte handelt. Setzt man nun diese Darstellung für $\overline{Y}_{i,j}$ mit $j = 0, .., 3$ ein, so erhält man eine lange Gleichung vierten Grades in den Unbekannten $d_i, \widehat{d}_i$, die wir Sphärenbedingung nennen wollen. Diese stellt im kinematischen Bildraum genau wie die Study Quadrik S_6^2, die ja durch die Gleichung

$$\Phi: \quad d_0\widehat{d}_0 + d_1\widehat{d}_1 + d_2\widehat{d}_2 + d_3\widehat{d}_3 = 0 \tag{2.2}$$

gegeben ist, eine Hyperfläche dar, jedoch interessiert uns nur deren Schnittmenge mit S_6^2, denn nur sie korrespondiert mit Raumbewegungen. Der Schnitt ist eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit, was wir eigentlich aufgrund der Tatsache, dass unser untersuchter Bewegungsvorgang den Freiheitsgrad 5 hat,

erwarten konnten. Wir wollen nun zeigen, dass sich, nach Addition von $4\Phi^2$ zur Sphärenbedingung, was nichts am Schnitt der beiden Hyperflächen ändert, der Faktor $d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2$ von der Sphärengleichung abspaltet. Wir betrachten jetzt die Gleichung (2.1) und sehen, dass jeder Term mit Ausnahme von $\sum \overline{Y}_{i,j}^2$ den Faktor $\overline{Y}_{i,0}=d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2$ beinhaltet. Somit müssen wir nur noch zeigen, dass sich der Faktor von $\sum \overline{Y}_{i,j}^2+4\Phi^2$ abspalten lässt. Mit Hilfe eines algebraischen Manipulationssystems erhält man somit für

$$\begin{aligned}\overline{Y}_{i,1}^2+\overline{Y}_{i,2}^2+\overline{Y}_{i,3}^2+4\Phi^2 \quad = \quad & [4(\widehat{d}_0^2+\widehat{d}_1^2+\widehat{d}_2^2+\widehat{d}_3^2)+(Y_{i,1}^2+Y_{i,2}^2+Y_{i,3}^2)(d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2)+\\ & +4Y_{i,1}(d_0\widehat{d}_1-d_1\widehat{d}_0+d_3\widehat{d}_2-d_2\widehat{d}_3)+4Y_{i,2}(d_0\widehat{d}_2-d_2\widehat{d}_0+d_1\widehat{d}_3-d_3\widehat{d}_1)+\\ & +4Y_{i,3}(d_0\widehat{d}_3-d_3\widehat{d}_0+d_2\widehat{d}_1-d_1\widehat{d}_2)](d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2).\end{aligned}$$

Da wir nun gezeigt haben, dass der quadratische Faktor in jedem Term enthalten ist, und weil er laut Satz 1.11 ungleich Null ist, können wir die Sphärenbedingung durch ihn dividieren und erhalten:

$$\Lambda^i: \quad \sum_{m,n=0}^{3} L^i_{d_m d_n} d_m d_n + \sum_{m\neq n\ m,n=0}^{3} L^i_{d_m \widehat{d}_n} d_m \widehat{d}_n + 4\sum_{m=0}^{3} \widehat{d}_m^2 = 0 \tag{2.3}$$

mit

$$\begin{aligned}
L^i_{d_0d_0} &= K_i+Y_{i,1}^2+Y_{i,2}^2+Y_{i,3}^2-2(X_{i,1}Y_{i,1}+X_{i,2}Y_{i,2}+X_{i,3}Y_{i,3}) = C_i-2(X_{i,1}Y_{i,1}+X_{i,2}Y_{i,2}+X_{i,3}Y_{i,3}),\\
L^i_{d_1d_1} &= K_i+Y_{i,1}^2+Y_{i,2}^2+Y_{i,3}^2-2(X_{i,1}Y_{i,1}-X_{i,2}Y_{i,2}-X_{i,3}Y_{i,3}) = C_i-2(X_{i,1}Y_{i,1}-X_{i,2}Y_{i,2}-X_{i,3}Y_{i,3}),\\
L^i_{d_2d_2} &= K_i+Y_{i,1}^2+Y_{i,2}^2+Y_{i,3}^2-2(X_{i,2}Y_{i,2}-X_{i,3}Y_{i,3}-X_{i,1}Y_{i,1}) = C_i-2(X_{i,2}Y_{i,2}-X_{i,3}Y_{i,3}-X_{i,1}Y_{i,1}),\\
L^i_{d_3d_3} &= K_i+Y_{i,1}^2+Y_{i,2}^2+Y_{i,3}^2-2(X_{i,3}Y_{i,3}-X_{i,1}Y_{i,1}-X_{i,2}Y_{i,2}) = C_i-2(X_{i,3}Y_{i,3}-X_{i,1}Y_{i,1}-X_{i,2}Y_{i,2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^i_{d_0d_1} &= L^i_{d_1d_0} = 2(X_{i,2}Y_{i,3}-X_{i,3}Y_{i,2}), & L^i_{d_0\widehat{d}_1} &= -L^i_{d_1\widehat{d}_0} = 2(Y_{i,1}-X_{i,1}),\\
L^i_{d_0d_2} &= L^i_{d_2d_0} = 2(X_{i,3}Y_{i,1}-X_{i,1}Y_{i,3}), & L^i_{d_0\widehat{d}_2} &= -L^i_{d_2\widehat{d}_0} = 2(Y_{i,2}-X_{i,2}),\\
L^i_{d_0d_3} &= L^i_{d_3d_0} = 2(X_{i,1}Y_{i,2}-X_{i,2}Y_{i,1}), & L^i_{d_0\widehat{d}_3} &= -L^i_{d_3\widehat{d}_0} = 2(Y_{i,3}-X_{i,3}),\\
L^i_{d_1d_2} &= L^i_{d_2d_1} = -2(X_{i,1}Y_{i,2}+X_{i,2}Y_{i,1}), & L^i_{d_1\widehat{d}_2} &= -L^i_{d_2\widehat{d}_1} = -2(X_{i,3}+Y_{i,3}),\\
L^i_{d_1d_3} &= L^i_{d_3d_1} = -2(X_{i,1}Y_{i,3}+X_{i,3}Y_{i,1}), & L^i_{d_1\widehat{d}_3} &= -L^i_{d_3\widehat{d}_1} = 2(X_{i,2}+Y_{i,2}),\\
L^i_{d_2d_3} &= L^i_{d_3d_2} = -2(X_{i,2}Y_{i,3}+X_{i,3}Y_{i,2}), & L^i_{d_2\widehat{d}_3} &= -L^i_{d_3\widehat{d}_2} = -2(X_{i,1}+Y_{i,1}).
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung $\Lambda^i=0$ stellt eine quadratische Hyperfläche im P_7 dar, deren Matrixdarstellung nun wiefolgt aussieht:

$$\Lambda^i: \quad (d_0\ d_1\ d_2\ d_3\ \widehat{d}_0\ \widehat{d}_1\ \widehat{d}_2\ \widehat{d}_3)\begin{pmatrix}\mathbf{V}^i & \mathbf{W}^i\\ -\mathbf{W}^i & 4\,\mathbf{E}\end{pmatrix}(d_0\ d_1\ d_2\ d_3\ \widehat{d}_0\ \widehat{d}_1\ \widehat{d}_2\ \widehat{d}_3)^T$$

wobei $\mathbf{E}$ die 4×4 Einheitsmatrix, $\mathbf{V}^i=(v^i_{mn})$ eine symmetrische 4×4 Matrix mit $v^i_{mn}=L^i_{d_md_n}$ und $\mathbf{W}^i=(w^i_{mn})$ ebenfalls eine 4×4 Matrix mit $w^i_{mn}=L^i_{d_m\widehat{d}_n}$ ist.

An diesem Punkt wollen wir die zu Ende des letzten Kapitels mit Ψ bezeichnete Quadrik wieder ins Spiel bringen. Wir wollen nämlich zeigen, dass die Hyperflächen Φ und Λ^i alle durch Ψ hindurchgehen, eine Tatsache, die uns später behilflich sein wird Polynome zu vereinfachen. Zunächst wollen wir $\Psi\subset\Phi$ verifizieren. Um dies ganz einfach einzusehen, unterwerfen wir Φ der Hauptachsentransformation, was ja nun möglich ist, weil wir wissen, dass Ψ invariant gegenüber Kollineationen ist, und erhalten die Gleichung:

$$d_0^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2-\widehat{d}_0^{\,2}-\widehat{d}_1^{\,2}-\widehat{d}_2^{\,2}-\widehat{d}_3^{\,2}=0.$$

Der Schnitt dieser Quadrik mit dem Unterraum $\widehat{d}_0=\widehat{d}_1=\widehat{d}_2=\widehat{d}_3=0$ ergibt bereits die Gleichung von Ψ. Für den Beweis, dass $\Psi\subset\Lambda^i$ gilt, möchte ich an dieser Stelle auf die Arbeit [8] beziehungsweise [9] von Husty verweisen.

Wir wissen bereits, dass die gemeinsamen Punkte der sieben Hyperquadriken $\Phi=0$ und $\Lambda^i=0$ die Lösung unseres Problems darstellen. Gesucht sind also alle 8-Tupel $(d_0:d_1:d_2:d_3:\widehat{d}_0:\widehat{d}_1:\widehat{d}_2:\widehat{d}_3)\in V(M)$

mit $M := \{\Phi, \Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3, \Lambda^4, \Lambda^5, \Lambda^6\}$. Nach dem Kapitel der Grundlagen können wir sagen, dass $V(M) = V(\mathcal{J})$ ist mit $\mathcal{J} = \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3, \Lambda^4, \Lambda^5, \Lambda^6]$. Dieses Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn Φ zusammen mit den Λ^i eine minimale Basis des Ideals $\mathcal{J}$ darstellt, denn ansonsten hätte man weniger als 7 Gleichungen zur Verfügung um 6 Variablen zu eliminieren, was zu einer ein- oder mehrparametrigen Lösung führen würde. Dies hätte zur Folge, dass die Plattform ein- oder mehrparametrige Selbstbewegungen durchführen könnte und somit nicht stabil wäre. Schließt man diesen Fall aus, so würde diese Aufgabe im allgemeinen $2^7 = 128$ Lösungen besitzen, jedoch haben F. Ronga und T. Vust [27] im Jahre 1991 erstmals bewiesen, dass die maximale Anzahl der Lösungen, egal ob komplex oder reell, 40 beträgt. Charles Wampler [35] hat dieses Ergebnis 1996 nochmals bestätigt, indem er gezeigt hat, dass genau dieses System von sieben quadratischen Gleichungen maximal 40 Lösungen besitzen kann.

Wenn wir jetzt (2.3) betrachten, sehen wir, dass die letzte Summe von keinen Designparametern $X_{i,j}, Y_{i,j}$ oder R_i abhängt. Wenn wir also die Differenz zweier Hyperquadriken Λ^i, Λ^j bilden, so fällt dieser Ausdruck weg und wir erhalten eine Gleichung, die nur mehr linear in den Unbekannten $\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \widehat{d}_2$ und $\widehat{d}_3$ ist, und wie folgt aussieht:

$$\Lambda^{i,j}: \quad \Lambda^i - \Lambda^j = A_{i,j}\widehat{d}_0 + B_{i,j}\widehat{d}_1 + C_{i,j}\widehat{d}_2 + D_{i,j}\widehat{d}_3 + E_{i,j}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= +4[d_1(X_{i,1} - X_{j,1} - Y_{i,1} + Y_{j,1}) + d_2(X_{i,2} - X_{j,2} - Y_{i,2} + Y_{j,2}) + d_3(X_{i,3} - X_{j,3} - Y_{i,3} + Y_{j,3})],\\
B_{i,j} &= -4[d_0(X_{i,1} - X_{j,1} - Y_{i,1} + Y_{j,1}) - d_2(X_{i,3} - X_{j,3} + Y_{i,3} - Y_{j,3}) + d_3(X_{i,2} - X_{j,2} + Y_{i,2} - Y_{j,2})],\\
C_{i,j} &= -4[d_0(X_{i,2} - X_{j,2} - Y_{i,2} + Y_{j,2}) + d_1(X_{i,3} - X_{j,3} + Y_{i,3} - Y_{j,3}) - d_3(X_{i,1} - X_{j,1} + Y_{i,1} - Y_{j,1})],\\
D_{i,j} &= -4[d_0(X_{i,3} - X_{j,3} - Y_{i,3} + Y_{j,3}) - d_1(X_{i,2} - X_{j,2} + Y_{i,2} - Y_{j,2}) + d_2(X_{i,1} - X_{j,1} + Y_{i,1} - Y_{j,1})],\\
E_{i,j} &= -2d_0^2(X_{i,1}Y_{i,1} + X_{i,2}Y_{i,2} + X_{i,3}Y_{i,3} - X_{j,1}Y_{j,1} - X_{j,2}Y_{j,2} - X_{j,3}Y_{j,3})\\
&\quad -2d_1^2(X_{i,1}Y_{i,1} - X_{i,2}Y_{i,2} - X_{i,3}Y_{i,3} - X_{j,1}Y_{j,1} + X_{j,2}Y_{j,2} + X_{j,3}Y_{j,3})\\
&\quad +2d_2^2(X_{i,1}Y_{i,1} - X_{i,2}Y_{i,2} + X_{i,3}Y_{i,3} - X_{j,1}Y_{j,1} + X_{j,2}Y_{j,2} - X_{j,3}Y_{j,3})\\
&\quad +2d_3^2(X_{i,1}Y_{i,1} + X_{i,2}Y_{i,2} - X_{i,3}Y_{i,3} - X_{j,1}y_{j,1} - X_{j,2}Y_{j,2} + X_{j,3}Y_{j,3})\\
&\quad -4d_0d_1(X_{i,2}Y_{i,3} - X_{j,2}Y_{j,3} - X_{i,3}Y_{i,2} + X_{j,3}Y_{j,2}) - 4d_0d_2(X_{i,1}Y_{i,3} - X_{j,1}Y_{j,3} - X_{i,3}Y_{i,1} + X_{j,3}Y_{j,1})\\
&\quad +4d_0d_3(X_{i,1}Y_{i,2} - X_{j,1}Y_{j,2} - X_{i,2}Y_{i,1} + X_{j,2}Y_{j,1}) - 4d_1d_2(X_{i,1}Y_{i,2} - X_{j,1}Y_{j,2} + X_{i,2}Y_{i,1} - X_{j,2}Y_{j,1})\\
&\quad -4d_1d_3(X_{i,1}Y_{i,3} - X_{j,1}Y_{j,3} + X_{i,3}Y_{i,1} - X_{j,3}Y_{j,1}) + 4d_2d_3(X_{i,2}Y_{i,3} - X_{j,2}Y_{j,3} + X_{i,3}Y_{i,2} - X_{j,3}Y_{j,2})\\
&\quad +(C_i - C_j)(d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2).
\end{aligned}$$

Die so erzeugten Hyperflächen $\Lambda^{i,j}$ sind Elemente von $\mathcal{J}$. Wir wollen nun eine minimale Basis des von allen $\Lambda^{i,j}$ und von Φ aufgespannten Ideals $\mathcal{J}_1$ angeben. Wie man sich leicht überlegen kann, stellt Φ, $\Lambda^{1,2}$, $\Lambda^{1,3}$, $\Lambda^{1,4}$, $\Lambda^{1,5}$ und $\Lambda^{1,6}$ eine solche minimale Basis dar. Um nun einen besseren Überblick über das Gleichungssystem zu gewinnen, wollen wir die Koeffizienten einer Gleichung $\Lambda^{1,j}$ in Vektorform schreiben:

$$\mathbf{K}_j = (A_{1,j}, B_{1,j}, C_{1,j}, D_{1,j})^T.$$

Dasselbe wollen wir auch für die Koeffizienten von Φ machen, und erhalten den Koeffizientenvektor

$$\mathbf{K}_1 = (d_0, d_1, d_2, d_3)^T.$$

Da die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems jetzt wesentlich von der Matrix $\mathcal{M} = (\mathbf{K}_1\,\mathbf{K}_2\,\mathbf{K}_3\,\mathbf{K}_4\,\mathbf{K}_5\,\mathbf{K}_6)$ abhängt, wollen wir diese etwas genauer betrachten. Dazu schreiben wir die Matrix nochmals ausführlich an:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} d_0 & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ d_1 & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} & B_{1,6} \\ d_2 & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} \\ d_3 & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} & D_{1,5} & D_{1,6} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

$\mathbf{M}$ ist eine 4×6 Matrix und hat somit maximal den Rang 4. Außerdem ist für alle $j = 2, ..., 6$ das Skalarprodukt $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_j = 0$, eine Tatsache, die leicht einzusehen ist, wenn man die Koeffizienten $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ und $D_{i,j}$, die zuvor explizit angeführt wurden, etwas näher betrachtet. Somit folgt aber jetzt, dass $\mathbf{K}_1$ auf alle anderen Vektoren orthogonal steht, und diese daher im Orthogonalraum von $\mathbf{K}_1$ liegen, der die Dimension 3 besitzt. Daraus folgt wiederum, dass jeweils vier der fünf Vektoren $\mathbf{K}_j$ $(j = 2, .., 6)$ linear abhängig sein müssen. Daher kann man sich nicht mit Hilfe der Cramerschen Regel $\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \widehat{d}_2$ und $\widehat{d}_3$ allein aus den $\Lambda^{1,j}$ berechnen. Dies bedeutet nun, dass, wenn vier linear unabhängige Vektoren unter den $\mathbf{K}_i$ $(i = 1, .., 6)$ existieren, der Vektor $\mathbf{K}_1$ auf jeden Fall einer von diesen sein muss. In Folge wollen wir uns überlegen, wann $det_{ijk} = det(\mathbf{K}_1\,\mathbf{K}_i\,\mathbf{K}_j\,\mathbf{K}_k)$ mit $1 < i < j < k$ gleich Null ist. Da in dieser Determinante die Beinlängen nicht vorkommen, müssen wir Bedingungen erhalten, die nur an die Geometrie

der Plattform und der Basis geknüpft sind. Wenn wir nun die Determinante berechnen, erhalten wir ein Polynom vom Grad 4 in den Unbekannten d_0, d_1, d_2 und d_3, das jedoch stets in $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ und einen quadratischen Ausdruck, der 1344 Terme umfasst, zerfällt. Daher werden wir durch optimale Wahl des Rast- und des Gangkoordinatensystems, jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Gleichung auf eine überschaubare Normalform bringen. Dazu wählen wir die Koordinatensysteme wiefolgt:

$$\mathbf{X}_1 = (0,0,0),\ \mathbf{X}_i = (X_{i,1},0,0),\ \mathbf{X}_j = (X_{j,1},X_{j,2},0),\ \mathbf{X}_k = (X_{k,1},X_{k,2},X_{k,3}) \quad \text{mit} \quad X_{i,1} > 0,\ X_{k,3} \geq 0$$

$$\text{und} \quad \mathbf{Y}_1 = (0,0,0),\ \mathbf{Y}_i = (Y_{i,1},0,0),\ \mathbf{Y}_j = (Y_{j,1},Y_{j,2},0),\ \mathbf{Y}_k = (Y_{k,1},Y_{k,2},Y_{k,3}) \quad \text{mit} \quad Y_{i,1} > 0,\ Y_{k,3} \geq 0.$$

Somit bekommen wir für $det_{ijk} = 0$ die folgende Gleichung:

$$det_{ijk} = \sum_{m,n=0}^{3} o_{mn} d_m d_n \qquad \text{mit} \qquad o_{mn} = o_{nm}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
o_{00} &= -64(Y_{i,1} - X_{i,1})(Y_{j,2} - X_{j,2})(Y_{k,3} - X_{k,3}), & o_{11} &= -64(Y_{i,1} - X_{i,1})(Y_{j,2} + X_{j,2})(Y_{k,3} + X_{k,3}),\\
o_{22} &= -64(Y_{i,1} + X_{i,1})(Y_{j,2} - X_{j,2})(Y_{k,3} + X_{k,3}), & o_{33} &= -64(Y_{i,1} + X_{i,1})(Y_{j,2} + X_{j,2})(Y_{k,3} - X_{k,3}),\\
o_{01} &= +64(Y_{i,1} - X_{i,1})(X_{j,2}Y_{k,2} - X_{k,2}Y_{j,2}), & o_{03} &= +64(Y_{k,3} - X_{k,3})(X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}),\\
o_{12} &= -64(Y_{k,3} + X_{k,3})(X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}), & o_{23} &= -64(Y_{i,1} + X_{i,1})(X_{j,2}Y_{k,2} - X_{k,2}Y_{j,2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o_{02} &= -64(X_{j,2} - Y_{j,2})(X_{k,1}Y_{i,1} - X_{i,1}Y_{k,1}) + (X_{k,2} - Y_{k,2})(X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}),\\
o_{13} &= +64(X_{j,2} + Y_{j,2})(X_{k,1}Y_{i,1} - X_{i,1}Y_{k,1}) + (X_{k,2} + Y_{k,2})(X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}).
\end{aligned}$$

Die Determinante det_{ijk} ist gleich Null wenn:

Fall 1 einer der beteiligten Vektoren der Nullvektor ist. $\mathbf{K}_1$ kann nicht der Nullvektor sein, denn ansonsten würde das Lösungs-8-Tupel eine rein duale Quaternion zur Folge haben, was wir aber zuvor ausgeschlossen haben. Somit kann nur mehr $\mathbf{K}_i$ der Nullvektor sein, und es müsste $A_{1,i} = 0$, $B_{1,i} = 0$, $C_{1,i} = 0$ und $D_{1,i} = 0$ sein. Diese vier Gleichungen sind nur bei $X_{i,1} = 0$ und $Y_{i,1} = 0$ erfüllt, also wenn das i-te und das erste Bein zusammenfallen, was wiederum zu Beginn ausgeschlossen wurde. Somit kann dieser Fall nicht auftreten.

Fall 2 zwei der vier Vektoren linear abhängig sind. Unter diesen zwei Vektoren kann wiederum nicht $\mathbf{K}_1$ sein, da er auf alle anderen normal steht. Somit kann nur $\mathbf{K}_i = \lambda \mathbf{K}_j$ gelten. Führt man den Koeffizientenvergleich der vier Gleichungen $A_{1,i} = \lambda A_{1,j}$, $B_{1,i} = \lambda B_{1,j}$, $C_{1,i} = \lambda C_{1,j}$ und $D_{1,i} = \lambda D_{1,j}$ durch, so sieht man, dass dieser Fall nur auftreten kann, wenn

Fall 2a $X_{j,2} = 0$, $Y_{j,2} = 0$, $X_{i,1} = \lambda X_{j,1}$ und $Y_{i,1} = \lambda Y_{j,1}$ ist, also wenn bei $\lambda \neq 0,1$ die Basisankerpunkte $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$ und die dazugehörigen Plattformankerpunkte $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_j$ jeweils kollinear liegen und die zwei Punktreihen ähnlich zueinander sind. Der Fall $\lambda = 1$ ist auszuschließen, da ansonsten das i-te und das j-te Bein zusammenfallen würden.

Fall 2b oder wenn $X_{j,2} = 0$, $Y_{j,2} = 0$, $Y_{i,1} = 0$, $Y_{j,1} = 0$ ist bzw. wenn $Y_{j,2} = 0$, $X_{j,2} = 0$, $X_{i,1} = 0$, $X_{j,1} = 0$ gilt, also Basis und Plattform die Rollen tauschen. In diesem Fall sind die Basis- bzw. Plattformpunkte kollinear und die entsprechenden Plattform- bzw. Basispunkte fallen zusammen. Sobald jedoch diese Konfiguration auftritt, ist der Manipulator architektonisch singulär [1] und somit auszuschließen.

Fall 3 drei der vier Vektoren linear abhängig sind. Aus demselben Grund wie in Fall 2 kann $\mathbf{K}_1$ nicht zu diesen drei Vektoren gehören. Hierzu betrachten wir nun die oben angeführten Koeffizienten o_{mn}, die alle verschwinden müssen. Wir können $Y_{i,1} + X_{i,1} > 0$ fordern, da dadurch vermieden wird, dass das erste und das i-te Bein zusammenfallen.

[1] Der Leser sei für die genauere Erklärung des Begriffs 'architektonisch singulär' auf das nächste Kapitel vertröstet. Es sei an dieser Stelle nur soviel gesagt, dass es sich hierbei um solche Stewart Gough Plattformen handelt, die bloß aufgrund ihrer Geometrie in jeder Lage singulär sind.

Fall 3.1 Wenn wir die vier Basisankerpunkte und die vier Plattformankerpunkte als kollinear voraussetzen, reicht diese Bedingung bereits aus, dass alle Koeffizienten verschwinden. Jedoch sei ausgeschlossen, dass die zwei Punktreihen noch ähnlich zueinander sind, da es sich ansonsten um einen architektonisch singulären Manipulator handelt.

Fall 3.2 Nun wollen wir fordern, dass mindestens drei Punkte in Plattform und Basis existieren, die nicht auf einer Geraden liegen. Seien dies in der Plattform die Punkte $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_i$ und $\mathbf{X}_j$. Dann gilt $Y_{j,2} \neq 0$, denn ansonsten würden die drei zuvor genannten Punkte auf der x-Achse liegen. Nun folgt aus $o_{23} = 0$ die Bedingung $X_{j,2}Y_{k,2} = X_{k,2}Y_{j,2}$, woraus wir $X_{k,2} = \frac{X_{j,2}Y_{k,2}}{Y_{j,2}}$ erhalten. Nun sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 3.2a Die Basis ist nicht eben, womit $X_{k,3} > 0$ gilt und woraus $Y_{k,3} + X_{k,3} \geq 0$ folgt. Aus $o_{22} = 0$ ergibt sich jetzt $X_{j,2} = Y_{j,2}$ und weiters $\mathrm{X}_{k,2} = Y_{k,2}$. Nun ergibt sich aus $o_{33} = 0$ die Bedingung $X_{k,3} = Y_{k,3}$ und weiters aus der Gleichung $o_{11} = 0$ die Aussage $X_{i,1} = Y_{i,1}$, woraus auch $Y_{i,1} \neq 0$ folgt. Aus $o_{12} = 0$ bekommen wir $X_{j,1} = Y_{j,1}$, und aus $o_{13} = 0$ folgt schließlich $X_{k,1} = Y_{k,1}$. Dies bedeutet nun, dass die Fundamentalfiguren $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$, $\mathbf{X}_k$ und $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_j$, $\mathbf{Y}_k$ kongruent sind.

Fall 3.2b Basis oder Plattform ist eben, dann folgt sofort aus $o_{22} = 0$ und $o_{33} = 0$, dass beide eben sein müssen, also $X_{k,3} = Y_{k,3} = 0$. Somit sind bis auf die Gleichung $o_{02} = 0$ und $o_{13} = 0$ bereits alle Gleichungen erfüllt, die uns aber nur noch die folgende Bedingung liefern:

$$Y_{j,2}(X_{i,1}Y_{k,1} - X_{k,1}Y_{i,1}) - Y_{k,2}(X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}) = 0.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Aussage, dass eine Affinität existiert, die die Basispunkte auf die zugehörigen Plattformpunkte oder umgekehrt abbildet, da eine singuläre Abbildungsmatrix nicht invertierbar ist. In Folge wollen wir jetzt die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ der Affinität anschreiben, die durch die Abbildung der Punkte $\mathbf{X}_1$ auf $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{X}_i$ auf $\mathbf{Y}_i$ und $\mathbf{X}_j$ auf $\mathbf{Y}_j$ eindeutig festgelegt ist.

$$\begin{pmatrix} \frac{Y_{i,1}}{X_{i,1}} & \frac{X_{i,1}Y_{j,1} - X_{j,1}Y_{i,1}}{X_{i,1}X_{j,2}} \\ 0 & \frac{Y_{j,2}}{X_{j,2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{u,1} \\ X_{u,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{u,1} \\ Y_{u,2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad u = 1, i, j, k$$

Hier sind nun einige Sonderfälle zu berücksichtigen:

<u>Sonderfall 1</u> Die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ ist die Nullmatrix. Somit werden alle vier Basispunkte auf einen einzigen Plattformankerpunkt abgebildet. Dieser Fall ist wiederum auszuschließen, da es sich hierbei um einen architektonisch singulären Manipulator handelt. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass es sich ebenfalls um einen architektonisch singulären Manipulator handelt, wenn die vier Basispunkte nicht koplanar liegen.

<u>Sonderfall 2</u> Angenommen es seien $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_i$ und $\mathbf{X}_k$ kollinear und die Affinität regulär, so erhalten wir Fall 2a. Ist jedoch $Y_{i,1} = 0$ und somit der $rang\mathbf{A} = 1$ so erhalten wir Fall 2b.

<u>Sonderfall 3</u> Angenommen es seien $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$ und $\mathbf{X}_k$ kollinear, also $X_{k,2} = 0$, und die Affinität regulär, so sind die dazugehörigen Plattformankerpunkte wieder kollinear und die beiden Punktreihen zueinander ähnlich.

Zusammenfassend wollen wir jetzt die drei entscheidenden Konfigurationen nochmals aufzählen: Wir wollen voraussetzen, dass, wenn unter den vier Basisankerpunkten drei kollineare existieren und deren entsprechenden drei Plattformankerpunkte ebenfalls auf einer Geraden liegen und die zwei Punktreihen ähnlich sind, man die Punkte so umnummeriert, dass $\mathbf{X}_1$ nicht zu diesem Tripel zählt. So kann man den Fall 2a, der eine Sonderstellung einnimmt, da er der einzige Fall ist, in dem bereits zwei Vektoren linear abhängig sind, eliminieren. Somit sind die drei Konfigurationen die Fälle 3.1, 3.2a und 3.2b. In diesen Fällen spannen je zwei Vektoren eine Ebene auf, in der der dritte Vektor enthalten ist.

Wir wollen nun die vier sinnvollen Determinanten betrachten, die aus den fünf Vektoren $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_i$, $\mathbf{K}_j$, $\mathbf{K}_k$ und $\mathbf{K}_l$ gebildet werden können und $det_{ijk} = 0$ voraussetzen. Ist nun eine weitere der verbleibenden drei Determinanten gleich Null, so sind es automatisch alle vier. Ist die det_{ijk} auf Grund von Fall 3.1 gleich Null, so müssen alle fünf Basispunkte und Plattformpunkte kollinear liegen, was zur Folge hat, dass der Manipulator architektonisch singulär ist. Ist jedoch die det_{ijk} auf Grund von Fall 3.2a bzw. Fall 3.2b gleich Null, so müssen die Figuren $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$, $\mathbf{X}_k$, $\mathbf{X}_l$ und $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_j$, $\mathbf{Y}_k$, $\mathbf{Y}_l$ kongruent bzw. wenn sie beide eben sind, affin äquivalent sein.

Betrachten wir nun alle sechs Vektoren $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, $\mathbf{K}_4, \mathbf{K}_5$ und $\mathbf{K}_6$, so können nur dann alle zehn Determinanten $det_{ijk} = det(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j\mathbf{K}_k)$ mit $1 < i < j < k$ gleich Null sein, wenn die Basis und die Plattform kongruent sind oder affin äquivalent im ebenen Fall. Der in Folge beschriebene Algorithmus funktioniert mit Ausnahme dieser zwei Sonderfälle. Wir wollen voraussetzen, dass keine vier Basisankerpunkte und die korrespondierenden Plattformankerpunkt in einer speziellen Konfiguration liegen, sodass die Determinante verschwindet, wenn einer der beteiligten Punkte als 1 beschriftet wird. Auf allfällige Sonderfälle, wo einige Determinanten verschwinden, wird im Anschluss Bezug genommen. Im folgenden angeführten Algorithmus handelt es sich um eine Modifikation des von M.L. Husty im Jahre 1994 publizierten Algorithmus, mit dem es erstmals möglich war, das Problem der Vorwärtskinematik für allgemeine Stewart Gough Plattformen zu lösen. Die Algorithmen unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass der maximale Grad vorkommender Polynome von 320 auf 200 reduziert werden konnte.

2.1 Algorithmus zur Berechnung der Vorwärtskinematik

Nach diesen Vereinbarungen können wir das Problem folgendermaßen formulieren. Da ja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{I}[\Lambda^1]$ gilt, können wir aufgrund von Satz 1.4 und Satz 1.5 auch schreiben:

$$\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{6} \mathcal{J}_j \quad \text{und} \quad V(\mathcal{J}) = \bigcap_{j=1}^{6} V(\mathcal{J}_j) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}], & \mathcal{J}_2 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^{1}],\\
\mathcal{J}_3 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^{1}], & \mathcal{J}_4 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^{1}],\\
\mathcal{J}_5 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^{1}], & \mathcal{J}_6 &= \mathcal{I}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1}].
\end{aligned}$$

Das Ideal $\mathcal{J}_1$: Die Varietät $V(\mathcal{J}_1)$ resultiert aus dem Schnitt von sechs Hyperflächen, ist also eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Da jedes Basiselement von $\mathcal{J}_1$ auch in $\mathcal{J}$ liegt, ist $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ und $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{J}_1)$. Wir betrachten nun das vierte Eliminationsideal von $\mathcal{J}_1$, für das nach Def. 1.3 und Satz 1.6 gilt:

$$\mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}] = \mathcal{J}_1 \cap \mathbb{R}[d_0, d_1, d_2, d_3] \quad \text{und} \quad \pi_{\widehat{d}}(V(\mathcal{J}_1)) \subset V(\mathcal{I}_{\widehat{d}}).$$

Wir wollen uns in Folge überlegen, wie wir uns Polynome $\in \mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}]$ berechnen können. Dazu erhöhen wir nun die Vektoren $\mathbf{K}_j$ um eine Dimension, indem wir die absoluten Glieder hinzufügen, und erhalten somit die Vektoren $\mathbf{G}_j$:

$$\mathbf{G}_1 = (d_0, d_1, d_2, d_3, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_j = (A_{1,j}, B_{1,j}, C_{1,j}, D_{1,j}, E_{1,j})^T \quad \text{mit} \quad j = 2, ..., 6.$$

Nun können wir fünf Systeme bestehend aus je fünf linear unabhängigen Gleichungen definieren, deren erweiterte Koeffizientenmatrix, wie folgt, aussieht:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2 &= (\mathbf{G}_1\, \mathbf{G}_3\, \mathbf{G}_4\, \mathbf{G}_5\, \mathbf{G}_6), & \mathbf{N}_3 &= (\mathbf{G}_1\, \mathbf{G}_2\, \mathbf{G}_4\, \mathbf{G}_5\, \mathbf{G}_6),\\
\mathbf{N}_4 &= (\mathbf{G}_1\, \mathbf{G}_2\, \mathbf{G}_3\, \mathbf{G}_5\, \mathbf{G}_6), & \mathbf{N}_5 &= (\mathbf{G}_1\, \mathbf{G}_2\, \mathbf{G}_3\, \mathbf{G}_4\, \mathbf{G}_6),\\
\mathbf{N}_6 &= (\mathbf{G}_1\, \mathbf{G}_2\, \mathbf{G}_3\, \mathbf{G}_4\, \mathbf{G}_5).
\end{aligned}$$

Damit jedes dieser Gleichungssysteme eine nichttriviale Lösung besitzt, müssen die Determinanten von den $\mathbf{N}_j$ gleich Null sein. Wenn wir nun diese Determinanten Null setzen, erhalten wir fünf Gleichungen $\mathcal{P}_j^6$ vom Grad 6. Da jede der fünf Hyperflächen auch durch $\Psi = d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ hindurchgeht, lässt sich dieser Faktor von allen $\mathcal{P}_j^6$ abspalten, und wir erhalten fünf Gleichungen 4. Grades, die in Folge mit $\mathcal{S}_j^4$ beschriftet werden:

$$\mathcal{P}_j^6(d_0, d_1, d_2, d_3) = (d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\mathcal{S}_j^4(d_0, d_1, d_2, d_3).$$

Somit gilt, da wir nicht wissen, ob die $\mathcal{P}_j^6$ eine Basis des Eliminationsideals sind:

$$\mathcal{I}[\mathcal{P}_2^6, \mathcal{P}_3^6, \mathcal{P}_4^6, \mathcal{P}_5^6, \mathcal{P}_6^6] \subset \mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}], \qquad V(\mathcal{I}_{\widehat{d}}) \subset V(\Psi) \cup V(\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4).$$

Die $\mathcal{S}_j^4(d_0, d_1, d_2, d_3)$ stellen fünf Flächen im dreidimensionalen projektiven Unterraum der d_0, d_1, d_2, d_3 dar, die eine gemeinsame Schnittkurve besitzen müssen, da ja $V(\mathcal{J}_1)$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist. Nun betrachten wir das erste Eliminationsideal von $\mathcal{I}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4]$:

$$\mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4] = \mathcal{I}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4] \cap \mathbb{R}[d_0, d_1, d_2].$$

Wir wollen uns wiederum Elemente dieses Eliminationsideals berechnen, indem wir die Unbekannte d_3 mit Hilfe der Resultante eliminieren. Somit erhalten wir zehn Gleichungen $R_{\mathcal{S}_i^4\mathcal{S}_j^4}(d_3) = 0$ vom Grad sechzehn, und es gilt:

$$\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_i^4\mathcal{S}_j^4}(d_3)] \subset \mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4], \qquad V(\mathcal{I}_{d_3}) \subset V(\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_i^4\mathcal{S}_j^4}(d_3)]).$$

Wir wollen nun die Varietät der Resultanten vereinfachen, indem wir den größten gemeinsamen Teiler dieser berechnen. Wir erhalten ein homogenes Polynom $\mathcal{H}_1^{10}$ vom Grad 10, das die auf die projektive Ebene (d_0, d_1, d_2) projizierte gemeinsame Schnittkurve der $\mathcal{S}_i^4$ darstellt:

$$V(\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_i^4\mathcal{S}_j^4}(d_3)]) = V(\mathcal{H}_1^{10}).$$

Wir können jetzt zusammenfassend die folgende Relation angeben:

$$\pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(\mathcal{J}) \setminus \{\Psi\})] \subset \pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(\mathcal{J}_1) \setminus \{\Psi\})] \subset \pi_{d_3}[V(\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4)] \subset$$
$$\subset V(\mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4] \subset V(\mathcal{H}_1^{10}).$$

Das Ideal $\mathcal{J}_2$: Die Varietät $V(\mathcal{J}_2)$ resultiert aus dem Schnitt von sechs Hyperflächen, ist also eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Da jedes Basiselement von $\mathcal{J}_2$ auch in $\mathcal{J}$ liegt, ist $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}$ und $V(\mathcal{J}) \subset V(\mathcal{J}_2)$. Wir betrachten nun das vierte Eliminationsideal von $\mathcal{J}_2$, für das nach Def. 1.3 und Satz 1.6 gilt:

$$\mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^1] = \mathcal{J}_2 \cap \mathbb{R}[d_0, d_1, d_2, d_3] \quad \text{und} \quad \pi_{\widehat{d}}(V(J_2)) \subset V(\mathcal{I}_{\widehat{d}}).$$

Wir wollen uns in Folge überlegen, wie wir uns Erzeugende von $\mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^i]$ berechnen können. Da wie zuvor vereinbart alle 10 Determinanten ungleich 0 sind, sind auch det_{345}, det_{346}, det_{356} und det_{456} von Null verschieden. Dies bedeutet nun, dass wir $\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \widehat{d}_2$ und $\widehat{d}_3$ auf vier verschiedene Arten eindeutig mit Hilfe der Cramerschen Regel berechnen können. Wir haben also nun das inhomogene lineare Gleichungssystem der Form $(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) \cdot (\widehat{d}_0\ \widehat{d}_1\ \widehat{d}_2\ \widehat{d}_3) = \mathbf{E}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (d_0, A_{1,i}, A_{1,j}, A_{1,k})^T, & \mathbf{C} &= (d_2, C_{1,i}, C_{1,j}, C_{1,k})^T, & \mathbf{E} &= (0, -E_{1,i}, -E_{1,j}, -E_{1,k})^T, \\ \mathbf{B} &= (d_1, B_{1,i}, B_{1,j}, B_{1,k})^T, & \mathbf{D} &= (d_3, D_{1,i}, D_{1,j}, D_{1,k})^T \end{aligned}$$

und $i < j < k$ mit $i, j, k \in \{3, 4, 5, 6\}$. Dann lautet die eindeutige Lösung:

$$\widehat{d}_0^{ijk} = \frac{det(\mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}, \quad \widehat{d}_1^{ijk} = \frac{det(\mathbf{A}\ \mathbf{E}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}, \quad \widehat{d}_2^{ijk} = \frac{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{E}\ \mathbf{D})}{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}, \quad \widehat{d}_3^{ijk} = \frac{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{E})}{det(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D})}.$$

Wir sehen, dass die zuvor angeführten Koeffizienten $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ und $D_{i,j}$ lineare Funktionen von d_0, d_1, d_2 und d_3 sind und $E_{i,j}$ quadratisch in diesen Unbekannten ist. Daraus folgt, dass die Determinanten im Zähler homogene Polynome 5. Grades liefern und die Determinante der Koeffizientenmatrix im Nenner ein homogenes Polynom 4. Grades ergibt. Setzt man nun die für $\widehat{d}_0^{ijk}, \widehat{d}_1^{ijk}, \widehat{d}_2^{ijk}$ und $\widehat{d}_3^{ijk}$ erhaltenen Ausdrücke in das noch unbeteiligte Basiselement Λ^1 ein so erhalten wir eine algebraische Gleichung $\mathcal{P}_{ijk}^{10}$ vom Grad 10. Da jede der fünf an der Elimination beteiligten Hyperflächen auch durch $\Psi = d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ hindurchgeht, lässt sich dieser Faktor von $\mathcal{P}_{ijk}^{10}$ abspalten, und wir erhalten eine Gleichung 8. Grades, die in Folge mit $\mathcal{S}_{ijk}^8$ beschriftet wird:

$$\mathcal{P}_{ijk}^{10}(d_0, d_1, d_2, d_3) = (d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\mathcal{S}_{ijk}^8(d_0, d_1, d_2, d_3).$$

Neben diesen vier Flächen vom Grad 8 können wir außerdem das Gleichungssystem $\mathbf{N}_2$ bilden und wiederum dessen Determinante gleich Null setzen, was ja die Gleichung $\mathcal{P}_2^6$ ergibt. Somit ergeben sich, da wir nicht wissen, ob die $\mathcal{P}_{ijk}^{10}$ zusammen mit $\mathcal{P}_2^6$ eine Basis des vierten Eliminationsideals darstellen, folgende zwei Relationen:

$$\mathcal{I}[\mathcal{P}_2^6, \mathcal{P}_{345}^{10}, \mathcal{P}_{346}^{10}, \mathcal{P}_{356}^{10}, \mathcal{P}_{456}^{10}] \subset \mathcal{I}_{\widehat{d}}[\Phi, \Lambda^{1,3}, \Lambda^{1,4}, \Lambda^{1,5}, \Lambda^{1,6}, \Lambda^1],$$

$$V(\mathcal{I}_{\widehat{d}}) \subset V(\Psi) \cup V(\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8).$$

Die $\mathcal{S}_{ijk}^8$ stellen zusammen mit $\mathcal{S}_2^4$ fünf Flächen im dreidimensionalen projektiven Unterraum der d_0, d_1, d_2, d_3 dar, die eine gemeinsame Schnittkurve besitzen müssen, da ja $V(\mathcal{J}_2)$ eine eindimensionale

Mannigfaltigkeit ist. Nun wollen wir das erste Eliminationsideal von $\mathcal{I}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8]$ betrachten:

$$\mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8] = \mathcal{I}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}] \cap \mathbb{R}[d_0, d_1, d_2].$$

Wir wollen uns vier Elemente dieses Eliminationsideals berechnen, indem wir die Unbekannte d_3 mit Hilfe der Resultante eliminieren. Somit erhalten wir die vier Gleichungen $R_{\mathcal{S}_2^4 \mathcal{S}_{ijk}^8}(d_3) = 0$ vom Grad 32 und es gilt:

$$\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_2^4 \mathcal{S}_{ijk}^8}(d_3)] \subset \mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8], \qquad V(\mathcal{I}_{d_3}) \subset V(\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_2^4 \mathcal{S}_{ijk}^8}(d_3)]).$$

Wir wollen nun die Varietät der Resultanten wiederum vereinfachen, indem wir den größten gemeinsamen Teiler dieser berechnen. Wir erhalten ein homogenes Polynom $\mathcal{H}_2^{20}$ vom Grad 20, das die auf die projektive Ebene (d_0, d_1, d_2) projizierte gemeinsame Schnittkurve der fünf Hyperflächen darstellt:

$$V(\mathcal{I}[R_{\mathcal{S}_2^4 \mathcal{S}_{ijk}^8}(d_3)]) = V(\mathcal{H}_2^{20}).$$

Wir können jetzt zusammenfassend die folgende Relation angeben:

$$\pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(J) \setminus \{\Psi\})] \subset \pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(J_2) \setminus \{\Psi\})] \subset \pi_{d_3}[V(\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8)] \subset$$

$$\subset V(\mathcal{I}_{d_3}[\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{345}^8, \mathcal{S}_{346}^8, \mathcal{S}_{356}^8, \mathcal{S}_{456}^8] \subset V(\mathcal{H}_2^{20}).$$

Für die Ideale $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4, \mathcal{J}_5$ und $\mathcal{J}_6$ ist die Vorgangsweise analog und wir erhalten die Gleichungen $\mathcal{H}_3^{20}, \mathcal{H}_4^{20}, \mathcal{H}_5^{20}$ und $\mathcal{H}_6^{20}$.

Bemerkung 2.1. Wir wollen nun eine Interpretation der so erhaltenen Gleichungen $\mathcal{H}_i^{20}$ für $i = 2, ..., 6$ angeben. In jedem dieser Systeme fehlt die Information Λ^i, was nun bedeutet, dass wir eigentlich die Stewart Gough Plattform betrachtet hatten, bei der das i-te Bein weggelassen worden ist, die also nur fünf Beine besitzt. So eine Plattform hat somit eine einparametrige Selbstbewegung, die durch das Polynom $\mathcal{H}_i^{20}$ repräsentiert wird. Man muss jedoch beachten, dass es sich hierbei um die auf die projektive Ebene (d_0, d_1, d_2) projizierte Schnittkurve handelt und deshalb der Grad der dazugehörigen Raumkurve nicht zwangsweise gleich 20 sein muss. Denn durch die Projektion kann ein Gradverlust auftreten, was man leicht einsieht, wenn man einen kubischen Kreis in Richtung der Asymptote auf eine Ebene projiziert. Wir haben also nun die Kurve $\mathcal{H}_i^{20}$ vom Grad 20 im Parameterraum, welche die Selbstbewegung repräsentiert. Rückeinsetzen in die 4×4 Transformationsmatrix, welche die Koordinatensysteme Σ und Σ_0 ineinander überführt, liefert das Ergebnis, dass sich nämlich die Punkte der Plattform auf Kurven vom Grad 40 bewegen. Dieses Resultat bestätigt die mit 40 angegebene obere Schranke der Vorwärtskinematik für allgemeine Stewart Gough Plattformen, und somit repräsentiert $\mathcal{H}_i^{20}$ eine einparametrige Selbstbewegung vom höchst möglichen Grad.

Im System $\mathcal{J}_1$ fehlt ebenfalls eine Information, jedoch hat das Polynom $\mathcal{H}_1^{10}$, das die in die Ebene projizierte Schnittkurve darstellt, nur den Grad 10, was den folgenden Grund hat. Es ist nämlich möglich, das Polynom $\mathcal{H}_1^{10}$ im Gegensatz zu den $\mathcal{H}_i^{20}$ auch ohne Information von S_6^2 zu berechnen. Da ja die Vektoren $\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j, \mathbf{K}_k$ und $\mathbf{K}_l$ immer linear abhängig sind, existieren stets Faktoren α, β und γ, sodass gilt:

$$\alpha \cdot \mathbf{K}_i + \beta \cdot \mathbf{K}_j + \gamma \cdot \mathbf{K}_k - \mathbf{K}_l = 0.$$

Wenn man nun

$$\alpha \cdot \Lambda^{1,i} + \beta \cdot \Lambda^{1,j} + \gamma \cdot \Lambda^{1,k} - \Lambda^{1,l} = \alpha \cdot E_{1,i} + \beta \cdot E_{1,j} + \gamma \cdot E_{1,k} - E_{1,l} = 0$$

berechnet, erhält man im Zähler das Polynom $\mathcal{S}_m^4$ für i, j, k, l, m paarweise verschieden und $i, j, k, l, m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Aus den so erhaltenen $\mathcal{S}_m^4$ kann man sich dann, wie zuvor beschrieben, $\mathcal{H}_1^{10}$ berechnen. Da der Schnitt von fünf Hyperquadriken $\Lambda^{1,i}, \Lambda^{1,j}, \Lambda^{1,k}, \Lambda^{1,l}$ und $\Lambda^{1,m}$ dimensionsmäßig eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ergeben muss, repräsentiert nun das so erhaltene Polynom $\mathcal{H}_1^{10}$ keine Kurve sondern eine Fläche, die jedoch eliminationsbedingt projizierend ist.

Weitere Vorgangsweise: Zusammenfassend haben wir jetzt also sechs Kurven, durch die jeweils fünf Flächen hindurchgehen, und umgekehrt liegen auf jeder der 15 Flächen $(\mathcal{S}_j^4, \mathcal{S}_{ijk}^8)$ zwei dieser Kurven. Wir wollen nun in Folge wieder Elemente aus dem ersten Eliminationsideals von $\mathcal{I}[\mathcal{H}_1^{10}, \mathcal{H}_2^{20}, \mathcal{H}_3^{20}, \mathcal{H}_4^{20}, \mathcal{H}_5^{20}, \mathcal{H}_6^{20}]$ berechnen. Wenn wir mit Hilfe der Resultante d_2 eliminieren, erhalten wir ein in den verbleibenden Unbekannten homogenes Polynom $\mathcal{T}_j^{200} := R_{\mathcal{H}_1^{10} \mathcal{H}_j^{20}}(d_2)$ vom Grad 200, wobei

diese Gleichung die auf die Gerade projizierten Schnittpunkte der beiden beteiligten ebenen algebraischen Kurven darstellt. Wir können nun wieder eine Relation anschreiben:

$$\pi_{d_2}[\pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(\mathcal{J}) \setminus \{\Phi\})]] \subset \bigcap_{j=2}^{6} V(\mathcal{I}_{d_2}[\mathcal{H}_1^{20}, \mathcal{H}_j^{20}]) \subset \bigcap_{j=2}^{6} V(\mathcal{I}[\mathcal{T}_j^{200}]) = V(\mathcal{T}_2^{200}, \mathcal{T}_3^{200}, \mathcal{T}_4^{200}, \mathcal{T}_5^{200}, \mathcal{T}_6^{200}).$$

Wir erhalten wieder die gemeinsamen Punkte der $\mathcal{T}_j^{200}$, indem wir wiederum den größten gemeinsamen Teiler dieser fünf homogenen Gleichungen berechnen. Dieser ist ein in den Unbekannten d_0, d_1 homogenes Polynom $\mathcal{L}^{40}$ vom Grad 40. Somit ergibt sich schlussendlich die finale Relation:

$$\pi_{d_2}[\pi_{d_3}[\pi_{\widehat{d}}(V(\mathcal{J}) \setminus \{\Phi\})]] \subset V(\mathcal{I}[\mathcal{L}^{40}]) = V(\mathcal{L}^{40}).$$

Aufgrund des Ergebnisses von F. Ronga und T. Vust beziehungsweise aufgrund der Arbeit von C. Wampler können wir in dieser Relation das '$\subset$' Symbol ersetzen durch das Gleichheitszeichen.

Wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d_0 = 1$ setzen und d_1 aus $\mathcal{L}^{40}$ numerisch berechnen. Die Berechnung von d_2 erfolgt nun, indem man d_0 und d_1 in die Gleichungen $\mathcal{H}_1^{10}, \mathcal{H}_2^{20}, \mathcal{H}_3^{20}, \mathcal{H}_4^{20}, \mathcal{H}_5^{20}$ und $\mathcal{H}_6^{20}$ einsetzt. Je zwei von diesen müssten nun ein und dieselbe Lösung gemeinsam haben. Wir verwenden deshalb sechs anstelle der nötigen zwei Gleichungen zur Berechnung von d_2, um numerische Fehler zu reduzieren. Analog gehen wir für die Berechnung von d_3 vor, indem wir die gewonnenen Werte für d_0, d_1 und d_2 in die Gleichungen $\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4$ und $\mathcal{S}_6^4$ einsetzen und die gemeinsame Lösung herausfiltern. Nun können wir das Quadrupel $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3)$ normieren, sodass $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ gilt, und anschließend auch $\widehat{d}_0, \widehat{d}_1, \widehat{d}_2$ und $\widehat{d}_3$ berechnen.

Für allgemeine Stewart Gough Plattformen erhält man so stets das Polynom $\mathcal{L}^{40}$ vom Grad 40, jedoch kann der Grad des Lösungspolynoms für Plattformen mit spezieller Geometrie niedriger ausfallen, wie wir es anschließend in der Diskussion der Sonderfälle sehen werden. Es sei noch bemerkt, dass es bei allen auf diese Weise bisher gerechneten Beispielen allgemeiner Stewart Gough Manipulatoren ausgereicht hat den größten gemeinsamen Teiler zweier $\mathcal{T}_i^{200}$ zu berechnen, um das gewünschte Polynom zu erhalten. Wir können uns sogar überlegen, dass es im allgemeinen Fall so sein muss. Angenommen der größte gemeinsame Teiler von $\mathcal{T}_i^{200}$ und $\mathcal{T}_j^{200}$ hätte einen Grad höher als 40. Dann würde dies jedoch zur Folge haben, dass die beiden fünfbeinigen Manipulatoren, die entstehen, wenn man einmal das i-te Bein bzw. das j-te Bein weglässt, mehr als 40 gemeinsame Positionen besitzen, was jedoch schon zu einem Widerspruch mit der maximalen Lösungsanzahl von 40 führt.

2.1.1 Sonderfälle des Algorithmus

Nun wollen wir jene Fälle betrachten, wo aufgrund der Geometrie der Plattform und nach allfälliger Umnummerierung soviele Determinanten wie möglich verschwinden. Durch diese Umnummerieung und der damit verbundenen speziellen Wahl des Punktes 1 kann man den Grad einiger Polynome, die im Algorithmus vorkommen, reduzieren. Wir wollen die Betrachtung der Sonderfälle nach dem Gesichtspunkt gliedern, ob es keine drei Basis- und entsprechende Plattformpunkte gibt, die kollinear liegen und die ähnliche Punktreihen bestimmen (Teil I), oder ob es drei solche gibt (Teil II), oder ob gar zwei solche Tripel existieren (Teil III). Es sei noch vorab bemerkt, dass die maximalen Lösungsanzahlen aufgrund der Berechnung dutzender Beispiele, die für den jeweiligen Fall stets dieselbe in Folge angegebene Mächtigkeit der Lösungsmenge lieferten, zustande gekommen und daher sehr wahrscheinlich sind. Mit einem ähnlichen Problem sahen sich auch Faugere J.C. und Lazard D. in [6] konfrontiert, und widmeten diesem daher einen eigenen Abschnitt, mit der Überschrift "What is a proof?", der dem interessierten Leser nicht verborgen bleiben sollte.

TEIL I

Fall 1 Eine Determinante, nämlich det_{234}, ist gleich Null. Nun gibt es drei verschiedene Konfigurationen, die dies verursachen:

Fall 1a $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ liegen kollinear. In diesem Fall zerfallen $\mathcal{S}_5^4$ und $\mathcal{S}_6^4$ in je zwei Polynome zweiten Grades, wobei eines ident ist. Dieses Polynom $\mathcal{E}^2$ erhält man, da ja die Vektoren $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ und $\mathbf{K}_4$ linear abhängig sind, durch folgende Linearkombination:

$$\mathcal{E}^2 = \alpha \cdot \Lambda^{1,2} + \beta \cdot \Lambda^{1,3} - \Lambda^{1,4} = \alpha \cdot E_{1,2} + \beta \cdot E_{1,3} - E_{1,4}$$

mit

$$\alpha = -\frac{X_{3,1}Y_{4,1} - X_{4,1}Y_{3,1}}{X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1}}, \qquad \beta = \frac{X_{2,1}Y_{4,1} - X_{4,1}Y_{2,1}}{X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1}}.$$

Somit geht $\mathcal{H}_1$ aus dem Schnitt der vier Flächen $\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4$ und $\mathcal{E}^2$ hervor und hat nur Grad 8. Bei der Berechnung der $\mathcal{H}_i^{20}$ für $i = 2, 3, 4$ ändert sich nichts, jedoch liegt $\mathcal{E}_2$ auch in den Idealen $\mathcal{J}_5$ und $\mathcal{J}_6$. Somit entsteht $\mathcal{H}_5$ und $\mathcal{H}_6$ durch den Schnitt der jeweils vier Flächen, $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{S}_{ijk}^8$ von denen nur drei existieren, da eine Determinante gleich Null ist. $\mathcal{H}_5$ und $\mathcal{H}_6$, die nun vom Grad 16 sind, zerfallen jeweils in ein Polynom vom Grad 8 und den Ausdruck $(d_0^2 + d_1^2)^4$. Diese Gleichung kann keine reellen Lösungen haben und kann somit bei der restlichen Berechnung vernachlässigt werden. Somit erhalten wir $\mathcal{T}_2^{160}, \mathcal{T}_3^{160}, \mathcal{T}_4^{160}, \mathcal{T}_5^{64}$ und $\mathcal{T}_6^{64}$, die ein Polynom vom Grad 16 gemeinsam haben, was bedeutet, dass es in diesem Fall nur 16 Lösungen gibt.

Fall 1b Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ sind kongruent und nicht eben. Hier zerfallen wiederum $\mathcal{S}_5^4$ und $\mathcal{S}_6^4$, und zwar in einen linearen und einen kubischen Ausdruck $\mathcal{E}^3$, wobei letzterer wieder für beide gleich ist und der, wie folgt, aus den Gleichungen $\Lambda^{1,2}, \Lambda^{1,3}$ und $\Lambda^{1,4}$ zu gewinnen ist:

$$\mathcal{E}^3 = \alpha \cdot \Lambda^{1,2} + \beta \cdot \Lambda^{1,3} - \Lambda^{1,4} = \alpha \cdot E_{1,2} + \beta \cdot E_{1,3} - E_{1,4}$$

mit

$$\alpha = \frac{Y_{3,2}Y_{4,1}d_3 - Y_{3,2}Y_{4,3}d_1 - Y_{3,1}Y_{4,2}d_3 + Y_{3,1}Y_{4,3}d_2}{Y_{2,1}Y_{3,2}d_3}, \qquad \beta = \frac{Y_{4,2}d_3 - Y_{4,3}d_2}{Y_{3,2}d_3}.$$

Die gemeinsame Schnittkurve der vier Flächen $\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4$ und $\mathcal{E}^3$ ergibt dann das Polynom $\mathcal{H}_1$, das nun vom Grad 9 ist. Unterschiede zum beschriebenen Algorithmus treten nur wieder für die Berechnung von $\mathcal{H}_5$ und $\mathcal{H}_6$ auf, die nun wiederum die gemeinsamen Schnittkurven von den jeweils vier Flächen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{S}_{ijk}^8$ darstellen und Grad 18 haben. Somit erhalten wir $\mathcal{T}_2^{180}, \mathcal{T}_3^{180}, \mathcal{T}_4^{180}, \mathcal{T}_5^{162}$ und $\mathcal{T}_6^{162}$, die ein Polynom vom Grad 40 gemeinsam haben, was bedeutet, dass diese Spezialisation der Plattform keine Auswirkungen auf die Lösungsanzahl hat.

Fall 1c Die ebenen Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ sind affin äquivalent. Wie im Fall 1a zerfallen $\mathcal{S}_5^4$ und $\mathcal{S}_6^4$ in zwei quadratische Ausdrücke, wobei das Polynom $\mathcal{E}^2$, das sie gemeinsam haben, wieder aus einer Linearkombination resultiert:

$$\mathcal{E}^2 = \alpha \cdot \Lambda^{1,2} + \beta \cdot \Lambda^{1,3} - \Lambda^{1,4} = \alpha \cdot E_{1,2} + \beta \cdot E_{1,3} - E_{1,4}$$

mit

$$\alpha = -\frac{X_{3,1}X_{4,2} - X_{3,2}X_{4,1}}{X_{2,1}X_{3,2}}, \qquad \beta = \frac{X_{4,2}}{X_{3,2}}.$$

$\mathcal{H}_1$ hat nun wieder Grad 8 und resultiert aus dem Schnitt der vier Flächen $\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4$ und $\mathcal{E}^2$. Ebenfalls die gemeinsame Schnittkurve von je vier Flächen ($\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{S}_{ijk}^8$) stellen die Polynome $\mathcal{H}_5$ und $\mathcal{H}_6$ dar, die wiederum von Grad 16 sind. Somit erhalten wir $\mathcal{T}_2^{160}, \mathcal{T}_3^{160}, \mathcal{T}_4^{160}, \mathcal{T}_5^{128}$ und $\mathcal{T}_6^{128}$, die ein Polynom vom Grad 40 gemeinsam haben, was wiederum bedeutet, dass diese Spezialisation der Plattform keine Auswirkungen auf die Lösungsanzahl hat.

Fall 2 Hier werden die fünf möglichen Fälle behandelt, wo zwei Determinanten, nämlich det_{234} und det_{256}, gleich Null sind. Alle diese Fälle können nur durch Kombination der vorherigen drei zustande kommen. Die Determinante det_{234} muss verschwinden aufgrund einer der drei obigen Konfigurationen, und nun gilt dasselbe für $\mathcal{S}_5^4, \mathcal{S}_6^4, \mathcal{H}_5$ und $\mathcal{H}_6$ wie im dazugehörigen Fall beschrieben. Dasselbe gilt für die Konfiguration, die det_{256} verschwinden lässt, mit der Ausnahme, dass im dazugehörigen oben beschriebenen Fall nur die Indizes geändert gehören; also für $\mathcal{S}_3^4, \mathcal{S}_4^4, \mathcal{H}_3$ und $\mathcal{H}_4$. Der einzige Unterschied zum Fall 1 liegt nun in der Berechnung des Polynoms $\mathcal{H}_1$, das nun nur mehr aus dem Schnitt dreier Flächen $\mathcal{S}_2^4$ und den zwei Flächen, die durch die möglichen Linearkombinationen gebildet werden können, resultiert.

Fall 2a Kombination aus 1a und 1b. Hier ist der Grad von $\mathcal{H}_1$ gleich sechs, woraus $\mathcal{T}_2^{120}, \mathcal{T}_3^{108}, \mathcal{T}_4^{108}, \mathcal{T}_5^{48}$ und $\mathcal{T}_6^{48}$ folgt. Es existieren wie im Fall 1a wiederum 16 Lösungen.

Fall 2b Kombination aus 1a und 1c. Hier ist der Grad von $\mathcal{H}_1$ gleich vier, woraus $\mathcal{T}_2^{80}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}, \mathcal{T}_5^{32}$ und $\mathcal{T}_6^{32}$ folgt. Es existieren wie im Fall 1a wiederum 16 Lösungen.

Fall 2c Kombination aus 1b und 1b. Hier ist der Grad von $\mathcal{H}_1$ wie im Fall 1b gleich 9, woraus $\mathcal{T}_2^{180}, \mathcal{T}_3^{162}, \mathcal{T}_4^{162}, \mathcal{T}_5^{162}$ und $\mathcal{T}_6^{162}$ folgt. Es existieren wieder 40 Lösungen.

Fall 2d Kombination aus 1b und 1c. Hier ist der Grad von $\mathcal{H}_1$ gleich 6, woraus $\mathcal{T}_2^{120}, \mathcal{T}_3^{96}, \mathcal{T}_4^{96}, \mathcal{T}_5^{108}$ und $\mathcal{T}_6^{108}$ folgt. In diesem Fall existieren nur 36 Lösungen. Für die Anzahl der Lösungen spielt es keine Rolle ob fünf Punkte komplanar sind oder nicht.

Fall 2e Kombination aus 1c und 1c. Hier ist der Grad von $\mathcal{H}_1$ gleich 4, woraus $\mathcal{T}_2^{80}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}, \mathcal{T}_5^{64}$ und $\mathcal{T}_6^{64}$ folgt. Die Anzahl der Lösungen reduziert sich auf 32, jedoch spielt es keine Rolle, ob die Basis- oder die Plattformankerpunkte komplanar sind oder nicht, was sich, wie folgt, erklären lässt. In diesem Fall sind nämlich Basis und Plattform räumlich affin äquivalent, und diese Bedingung reicht bereits aus, dass sich die Mächtigkeit der Lösungsmenge auf 32 verringert. Dies lässt vermuten, dass genau für diese zwei Fälle, die durch den Algorithmus nicht erfaßt werden, die maximale Lösungsanzahl kleiner oder gleich 32 ist.

Fall 3 Hier werden die zwei möglichen Fälle besprochen, wo vier Determinanten gleich Null sind.

Fall 3a Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ sind kongruent. Mit Ausnahme von $\mathcal{S}_6$, das zum Nullpolynom wird, zerfallen alle anderen $\mathcal{S}_i^4$ für $i = 2, .., 5$ in einen linearen Ausdruck, der für alle derselbe ist, und einen kubischen Faktor $\mathcal{E}_i^3$, den man jeweils wieder aus den entsprechenden Linearkombinationen erhalten kann. $\mathcal{H}_1$ ist somit die gemeinsame Schnittkurve dieser vier Flächen $\mathcal{E}_i^3$ und hat den Grad 6. Im weiteren Verlaufe des Algorithmus berechnet man sich die $\mathcal{H}_i^{18}$ wiederum aus dem Schnitt von $\mathcal{E}_i^3$ und den drei existierenden Flächen $\mathcal{S}_{jkl}^8$. In diesem Fall kann man $\mathcal{H}_6$ nicht berechnen und somit erhalten wir $\mathcal{T}_2^{108}, \mathcal{T}_3^{108}, \mathcal{T}_4^{108}$ und $\mathcal{T}_5^{108}$. Als größten gemeinsamen Teiler dieser Polynome erhalten wir ein Polynom vom Grad 36.

Fall 3b Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ sind affin äquivalent. Wiederum mit Ausnahme, dass $\mathcal{S}_6$ das Nullpolynom ist, zerfallen alle anderen $\mathcal{S}_i^4$ für $i = 2, .., 5$ in zwei quadratische Faktoren; einer ist für alle derselbe und der zweite ist $\mathcal{E}_i^2$, den man jeweils wieder aus den entsprechenden Linearkombinationen erhalten kann. $\mathcal{H}_1$ ist somit die gemeinsame Schnittkurve dieser vier Flächen $\mathcal{E}_i^2$ und hat den Grad 4. Die $\mathcal{H}_i^{16}$ ergeben sich wieder aus dem Schnitt der vier Flächen $\mathcal{E}_i^3$ und $\mathcal{S}_{jkl}^8$ und haben den Grad 16. Somit erhalten wir nun, weil wir $\mathcal{H}_6$ wieder nicht berechnen können, $\mathcal{T}_2^{64}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}$ und $\mathcal{T}_5^{64}$. Da in diesem Fall Plattform und Basis wiederum räumlich affin zueinander sind, verwundert es nicht, dass es 32 Lösungen gibt.

<u>TEIL II</u>

Nun nehmen wir den Fall an, dass $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ jeweils kollinear liegen und die Punktreihen ähnlich zueinander sind.

Fall 1 Außer der zuvor genannten Bedingung existiert keine weitere, somit sind die drei Determinanten det_{23i} mit $i = 4, 5, 6$ gleich Null. In diesem Fall zerfallen $\mathcal{S}_4^4, \mathcal{S}_5^4$ und $\mathcal{S}_6^4$ wiederum in zwei quadratische Faktoren, einer davon haben alle gemein; wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{E}^2$. Dieser resultiert aus der folgenden Linearkombination:

$$\mathcal{E}^2 = \alpha \cdot \Lambda^{1,2} - \Lambda^{1,3} = \alpha \cdot E_{1,2} - E_{1,3} \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}}.$$

Somit erhalten wir das Polynom $\mathcal{H}_1$, das nun den Grad 8 hat, aus dem Schnitt der drei Flächen $\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_3^4$ und $\mathcal{E}^2$. Da $\mathcal{E}^2$ auch in den Idealen $\mathcal{J}_i$ mit $i = 4, 5, 6$ liegt, reduziert sich der Grad der Schnittkurven $\mathcal{H}_i$, die durch den Schnitt der drei Flächen $\mathcal{E}^2$ und den zwei existierenden $\mathcal{S}_{jkl}^8$ entsteht, auf 16. Somit erhalten wir nun $\mathcal{T}_2^{160}, \mathcal{T}_3^{160}, \mathcal{T}_4^{128}, \mathcal{T}_5^{128}$ und $\mathcal{T}_6^{128}$, die ein Polynom vom Grad 40 gemeinsam haben, was wiederum bedeutet, dass diese Spezialisation der Plattform keine Auswirkungen auf die Lösungsanzahl hat.

Fall 2 Nun fügen wir noch eine Bedingung hinzu, nämlich dass auch $det_{456} = 0$ ist. Hier sind wiederum 3 Fälle zu unterscheiden, je nachdem welche Konfiguration das Verschwinden dieser Determinante verursacht.

Fall 2a $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5, \mathbf{Y}_6$ liegen kollinear. Nun ist $\mathcal{S}_2^4 = \mathcal{S}_3^4$ und $\mathcal{S}_4^4 = \mathcal{S}_5^4 = \mathcal{S}_6^4$, womit man nur mehr zwei Gleichungen zur Verfügung hat, die jeweils wieder in zwei quadratische Polynome zerfallen, wobei eines ein gemeinsamer Faktor ist. Man erhält die zwei anderen Polynome $\mathcal{E}_{23}^2$ und $\mathcal{E}_{456}^2$, deren Schnitt $\mathcal{H}_1$ vom Grad 4 ergibt, wiederum durch entsprechende Linearkombinationen. Somit erhalten wir nun $\mathcal{T}_2^{32}, \mathcal{T}_3^{32}, \mathcal{T}_4^{64}, \mathcal{T}_5^{64}$ und $\mathcal{T}_6^{64}$, die ein Polynom vom Grad 16 gemeinsam haben.

Fall 2b Die ebenen Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5, \mathbf{Y}_6$ sind affin äquivalent. Es gilt genau dasselbe wie für den Fall 2a, nur mit dem Unterschied, dass wir schlussendlich $\mathcal{T}_2^{64}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}, \mathcal{T}_5^{64}$ und $\mathcal{T}_6^{64}$ und 32 Lösungen erhalten, was wieder nicht verwunderlich ist, da Basis und Plattform räumlich affin äquivalent sind.

Fall 2c Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5, \mathbf{Y}_6$ sind kongruent und nicht eben. Nun ist $\mathcal{S}_2^4$ und $\mathcal{S}_3^4$ wiederum ident, und das Polynom zerfällt in einen linearen und einen kubischen Ausdruck $\mathcal{E}_{23}^3$, wobei man letzteren wieder durch geeignete Linearkombination gewinnen kann. $\mathcal{S}_i^4$ für $i = 4, 5, 6$ zerfallen je in zwei lineare Ausdrücke und einen gemeinsamen quadratischen Ausdruck $\mathcal{E}_{456}^2$, der auch aus der Linearkombination hervorgeht. Übrigens enthalten alle fünf $\mathcal{S}_j^4$ denselben linearen Faktor. Somit ergibt sich $\mathcal{H}_1$ als die Schnittkurve der Flächen $\mathcal{E}_{456}^2$ und $\mathcal{E}_{23}^3$, welche den Grad 6 besitzt. Konsequenterweise ergeben sich nun die Polynome $\mathcal{T}_2^{108}, \mathcal{T}_3^{108}, \mathcal{T}_4^{96}, \mathcal{T}_5^{96}$ und $\mathcal{T}_6^{96}$, deren größter gemeinsamer Teiler den Grad 36 besitzt.

Fall 3 Hier betrachten wir nun die zwei einzigen Fälle, in denen fünf Determinanten verschwinden.

Fall 3a Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ sind kongruent. In diesem Fall ist $\mathcal{S}_6^4$ wiederum das Nullpolynom, und $\mathcal{S}_2^4$ und $\mathcal{S}_3^4$ zerfallen in einen gemeinsamen linearen Ausdruck, der auch in den $\mathcal{S}_4^4$ und $\mathcal{S}_5^4$ enthalten ist und in kubische Faktoren $\mathcal{E}_2^3$ und $\mathcal{E}_3^3$, die durch geeignete Linearkombinationen zustande kommen. Von den $\mathcal{S}_4^4$ und $\mathcal{S}_5^4$ spaltet sich auch ein Polynom $\mathcal{E}_{45}^2$ vom Grad 2 ab, das man wiederum durch eine geeignete Linearkombination erhalten kann. $\mathcal{H}_1$ ist nun die gemeinsame Schnittkurve der drei Flächen $\mathcal{E}_2^3, \mathcal{E}_3^3$ und $\mathcal{E}_{45}^2$ und hat den Grad 4. Da man nun $\mathcal{H}_6$ wiederum nicht berechnen kann, da alle Determinanten im Ideal $\mathcal{J}_6$ gleich Null sind, erhalten wir $\mathcal{T}_2^{108}, \mathcal{T}_3^{108}, \mathcal{T}_4^{96}$ und $\mathcal{T}_5^{96}$, deren größter gemeinsamer Teiler den Grad 36 hat.

Fall 3b Die Figuren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ sind eben und affin äquivalent. In diesem Fall ist $\mathcal{S}_6^4$ wiederum das Nullpolynom und $\mathcal{S}_4^4 = \mathcal{S}_5^4$, dessen Gleichung in zwei quadratische Faktoren zerfällt, wobei einer auch in $\mathcal{S}_2^4$ und $\mathcal{S}_3^4$ enthalten und der andere Ausdruck $\mathcal{E}_{45}^2$ wiederum als Linearkombination zu gewinnen ist. Der jeweilige Restfaktor von $\mathcal{S}_2^4$ und $\mathcal{S}_3^4$, den wir wiederum mit $\mathcal{E}_2^2$ und $\mathcal{E}_3^2$ bezeichnen wollen, kann durch eine geeignete Linearkombination erhalten werden. Somit ergibt sich das Polynom $\mathcal{H}_1$, welches nun Grad 4 besitzt, aus den drei Flächen $\mathcal{E}_2^2, \mathcal{E}_3^2$ und $\mathcal{E}_{45}^2$, womit wir $\mathcal{T}_2^{64}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}$ und $\mathcal{T}_5^{64}$ erhalten. Da hier Basis und Plattform räumlich affin äquivalent sind, existieren wiederum 32 Lösungen.

TEIL III

Fall 1 Die Punkte $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ sind kollinear und die Punktreihen sind ähnlich, was auch für die Punkte $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ gilt. In diesem Fall sind sechs Determinanten gleich Null, was zur Folge hat, dass $\mathcal{S}_6^4$ wiederum das Nullpolynom ist, sowie dass $\mathcal{S}_2^4 = \mathcal{S}_3^4$ und $\mathcal{S}_4^4 = \mathcal{S}_5^4$ gilt. Diese zwei verbleibenden Polynome zerfallen je in zwei quadratische Faktoren, wobei einer wieder in beiden vorkommt. Die beiden Restfaktoren $\mathcal{E}_{23}^2$ und $\mathcal{E}_{45}^2$, aus deren Schnitt sich $\mathcal{H}_1$ vom Grad 4 ergibt, kann man wiederum aus den dazugehörigen Linearkombinationen gewinnen. Somit erhalten wir $\mathcal{T}_2^{64}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}$ und $\mathcal{T}_5^{64}$, die das Lösungspolynom vom Grad 32 gemein haben. Die Mächtigkeit der Lösung überrascht nicht, da Basis und Plattform wiederum räumlich affin äquivalent sind.

Fall 2 Die Punkte $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ sind kollinear und die Punktreihen sind ähnlich, was auch für die Punkte $\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ und $\mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5, \mathbf{Y}_6$ gilt. In diesem Fall sind 4 Determinanten gleich Null, was zur Folge hat, dass $\mathcal{S}_2^4 = \mathcal{S}_3^4$ und $\mathcal{S}_4^4 = \mathcal{S}_5^4 = \mathcal{S}_6^4$ gilt. Diese zwei verbleibenden Polynome zerfallen je in zwei quadratische Faktoren, wobei einer wieder in beiden vorkommt. Die beiden Restfaktoren $\mathcal{E}_{23}^2$ und $\mathcal{E}_{456}^2$, aus deren Schnitt sich $\mathcal{H}_1$ vom Grad 4 ergibt, kann man wiederum aus den dazugehörigen Linearkombinationen gewinnen. Somit erhalten wir die Polynome $\mathcal{T}_2^{64}, \mathcal{T}_3^{64}, \mathcal{T}_4^{64}, \mathcal{T}_5^{64}$ und $\mathcal{T}_5^{64}$, deren größter gemeinsamer Teiler den Grad 32 hat. Jedoch zerfällt das Lösungspolynom in ein Polynom vom Grad 16 und den Ausdruck $(d_0^2 + d_1^2)^8$, der wieder vernachlässigbar ist, da er keine reellen Lösungen besitzt. Somit reduziert sich in diesem Fall die Anzahl der Lösungen von den erwarteten 32 auf nur 16.

Somit wurden alle möglichen Fälle abgehandelt. Offen ist jetzt noch die Frage, wie man bei den zwei Sonderfällen vorgeht, die mit Hilfe dieses Algorithmus nicht berechnet werden können. In Folge der vorherigen Falldiskussion hatten wir die maximale Lösung dieser zwei Sonderfälle schon auf kleiner oder gleich 32 reduzieren können.

Basis und Plattform sind kongruent

In diesem Fall kann das Problem folgendermaßen umformuliert werden. Gesucht sind alle Schraubungen σ, die die Basis so abbilden, dass die folgenden sechs Beziehungen gelten:

$$\overline{\sigma(\mathbf{X}_i)\mathbf{X}_i} = R_i \qquad \text{für} \qquad i = 1, ..., 6.$$

Dieses System ist eindeutig lösbar, da ja eine Schraubung 6 Freiheitsgrade besitzt. Innocenti [16] gab erstmals 1998 eine Methode an, wie dieses Problem in polynomialer Form zu lösen ist, indem er mit Hilfe einfacher geometrischer Eigenschaften und geschickter Elimination die Lösung für die Vorwärtskinematik auf ein Polynom vom Grad 6 und zwei Polynome vom Grad 2 reduzierte. Die Lösungen des Polynoms sechsten Grades liefern nach linearer Rückeinsetzung die sechs möglichen Schraubachsen. Wenn man nun diese Information in die zwei verbleibenden quadratischen Gleichungen substituiert, so erhält man für jede Schraubachse einerseits zwei Drehwinkel, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, und andererseits zwei sich wieder nur durch das Vorzeichen unterscheidende Schieblängen. Somit erhalten wir insgesamt 24 Schraubungen, die eine Lösung unseres Problems darstellen. Innocenti gab sogar in seinem Artikel ein Beispiel mit 24 reellen Lösungen an. Im selben Jahr wie Innocenti veröffentlichte auch C. Mavroidis [20] einen ähnlichen aber etwas umständlicheren Lösungsweg und zeigte zusätzlich, dass sich die Anzahl der Schraubachsen auf vier reduziert und somit die maximale Lösungsanzahl 16 beträgt, wenn Basis und Plattform außerdem noch eben sind. Somit können wir jetzt die maximale Anzahl der Lösungen für den Fall, dass Plattform und Basis eben und affin äquivalent sind, einschränken auf das abgeschlossene Intervall $[16, 32]$.

Basis und Plattform sind eben und affin äquivalent

J. Yang und Z.J. Geng lieferten 1998 in [37] eine bemerkenswerte Lösung dieses Problems. Sie gaben in ihrer Arbeit nicht nur einen Algorithmus an, der 16 mögliche Lösungen über $\mathbb{C}$ liefert, was sich mit unseren Erwartungen deckt, sondern sie konnten auch zeigen, dass stets acht dieser Lösungen komplex sind. Dieses Ergebnis hat nun auch zur Folge, dass in dem zuvor besprochenen Fall, wo Basis und Plattform kongruent und eben sind, stets zwei der vier Schraubachsen komplex sein müssen. Ich finde es bemerkenswert, dass wenn Basis und Plattform kongruent und nicht eben sind, die maximale Lösungsanzahl über $\mathbb{C}$ mit der über $\mathbb{R}$ übereinstimmt, jedoch wenn sie eben sind, dies nicht der Fall ist.

Notiz: Vielleicht gibt es Analogien zum räumlich affinen Fall. Die aus der Berechnung dutzender Beispiele erhaltene maximale Lösungsanzahl ist 32. Der Fall, wo Basis und Plattform kongruent und nicht eben sind, ist ein Sonderfall und hat, wie Innocenti gezeigt hat, 24 reelle Lösungen. Da sich im ebenen Fall die Anzahl der maximalen reellen Lösungen zwischen kongruenten und affin äquivalenten Plattformen auch nicht unterscheidet, könnte man daraus schließen, dass dies auch bei den räumlich äquivalenten und kongruenten Plattformen so ist. Dies müsste bedeuten, dass man zeigen könnte, dass die vermutete maximale Lösungsanzahl von 32 auch stets 8 komplexe Lösungen besitzt. Dem Autor ist keine Literatur, die auf die zuvor formulierte Vermutung eingeht, bekannt und auch kein Gegenbeispiel, sprich eine allgemeine Stewart Gough Plattform mit räumlich affiner Plattform und Basis, die mehr als 24 reelle Lösungen für die Vorwärtskinematik besitzt. Diese Vermutung muss also entweder noch falsifiziert oder bewiesen werden.

2.1.2 Bemerkungen zum Algorithmus

Natürlich reduziert sich die Anzahl der maximalen Lösungen auch bei anderen Plattformtypen mit spezieller Geometrie, und oft gibt es dafür spezielle Algorithmen, die diese Eigenschaften ausnutzen, um die Berechnung der Lösungen zu vereinfachen. Man könnte sich zum Beispiel auch die Frage stellen, wieviele Lösungen maximal existieren, wenn einige der Plattformankerpunkte und Basisankerpunkte zusammenfallen. Jedoch müssen bei dieser Betrachtung die Fälle ausgeschlossen werden, für die es trivialerweise unendlich viele Lösungen gibt, die also offensichtlich architektonisch singulär sind. Es dürfen keine zwei Beine zusammenfallen, es müssen mindestens drei Ankerpunkte in Basis und Plattform existieren und keine vier Beine dürfen einen gemeinsamen Ankerpunkt besitzen. Eine vollständige Aufzählung all dieser verbleibenden kombinatorischen Klassen, von denen es 60 gibt, jedoch diese Anzahl auf 35 reduziert werden kann, indem man zwei Klassen identifiziert, wenn sie nach Tausch von Plattform und Basis gleich sind, findet sich in der Arbeit [6] von J.C. Faugre und D. Lazard.

Eine vollständige Aufzählung der Auswirkungen dieser Fälle auf den Algorithmus würde hier zu weit führen, jedoch wollen wir eine Teilmenge dieser Fälle in Betracht ziehen. Wir beschränken uns darauf, wie vier Beine zueinander liegen können. Die einzige Gleichung des Algorithmus, in die nur die Lage von vier Beinen eingeht, ist bei der Berechnung von $\mathcal{P}^{10}_{ijk}$. Dieses Polynom erhält man ja, indem man $\widehat{d}_0^{\,ijk}, \widehat{d}_1^{\,ijk}, \widehat{d}_2^{\,ijk}$ und $\widehat{d}_3^{\,ijk}$ in Λ^1 einsetzt. Der Nenner der $\widehat{d}_l^{\,ijk}$ zerfällt stets in ein Polynom zweiten Grades und in $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. In den folgenden zwei Fällen zerfällt auch das Polynom im Zähler in ein Polynom dritten Grades und wiederum in $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. Somit kann man kürzen, und der Grad des Polynom $\mathcal{P}^8_{ijk}$ reduziert sich auf acht, und somit hat $\mathcal{S}^6_{ijk}$ nur Grad 6. Dies tritt nun ein, wenn drei der vier Beine denselben Ankerpunkt haben oder wenn zwei Beine denselben Basisankerpunkt und die verbleibenden zwei anderen Beine denselben Plattformankerpunkt besitzen.

Wenn nun die Beine 1 bis 5 in einer Konfiguration liegen, wobei je vier von diesen einen der beiden zuvor genannten Fälle erfüllt, dann folgt zusätzlich daraus, dass sich von $\mathcal{P}^6_6$ der Faktor $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ quadratisch abspalten lässt und man $\mathcal{S}^2_6$ vom Grad 2 erhält. Es existiert genau eine solche Konfiguration, nämlich wenn drei Beine denselben Basis- bzw. Plattformankerpunkt und die restlichen zwei Beine denselben Plattform- bzw. Basisankerpunkt besitzen.

Damit dies für alle $\mathcal{P}^6_i$ gilt, müssten alle sechs Beine in einer solchen Konfiguration liegen, von der wiederum nur eine existiert, nämlich, dass drei Beine denselben Basisankerpunkt besitzen und die restlichen drei Beine denselben Plattformankerpunkt gemein haben. Dieser Konfiguration werden wir im nächsten Kapitel wieder begegnen, da es sich hierbei um eine architektonisch singuläre Stewart Gough Plattform handelt.

2.2 Die Existenz von 40 reellen Lösungen

Es war lange Zeit eine unbeantwortete Frage, ob es ein Beispiel gibt, wo wirklich alle 40 Lösungen reell sind. Es war nur klar, dass, wenn ein solches existiert, es aus den folgenden Gründen sehr speziell sein muss. Wir betrachten einen starren Körper in verschiedenen Raumpositionen. Nun lässt sich die Frage stellen, wieviele Punkte des Körpers in allen Positionen auf einer fixen Kugel liegen, wobei jeder Punkt auf einer eigenen liegen soll. Roth B. zeigte in [29], dass für sieben verschiedene Raumpositionen ein Maximum von 20 solchen Punkten existiert. Weiters demonstrierte er in seiner Arbeit, dass es im Allgemeinen für acht verschiedene Positionen keinen solchen Punkt mehr gibt. Umgelegt auf unser Problem bedeutet dies, dass wir für 40 Positionen nach 6 solchen Punkten suchen.

Tatsächlich gelang es P. Dietmaier [5] im Jahre 1998, ein solches Beispiel wie folgt zu konstruieren. Man beginnt mit einer beliebigen Geometrie des parallelen Manipulators und berechnet die Lösungen, wobei einige davon reell sind und die restlichen konjugiert komplex. Mit Hilfe einer iterativen Methode verändert er die Basis- und Plattformankerpunkte sowie die Beinlängen so, dass die reellen Lösungen reell bleiben, der Imaginärteil einer der komplexen Lösungen jedoch kleiner wird. Nach ein paar Iterationsschritten verschwindet der Imaginärteil und man erhält eine reelle Doppellösung, die sich wiederum nach einigen Iterationsschritten in zwei reelle Lösungen aufspaltet. Diesen Vorgang wiederholt man nun für jede komplexe Lösung, bis man schlussendlich 40 reelle Lösungen erhält. In Folge werden wir das von P. Dietmaier konstruierte Beispiel angeben.

2.2.1 Das Beispiel von Dietmaier

Wenn man also die Angabeelemente wie folgt wählt, dann erhält man 40 reelle Lösungen, die in Folge auch in Abbildung 2.3 und 2.4 graphisch dargestellt sind. Es ist zu bemerken, dass die Kameraposition bei allen Bildern dieselbe ist und dass ähnliche Lösungen nebeneinander abgebildet sind, um die oft minimalen Unterschiede besser erkennen zu können.

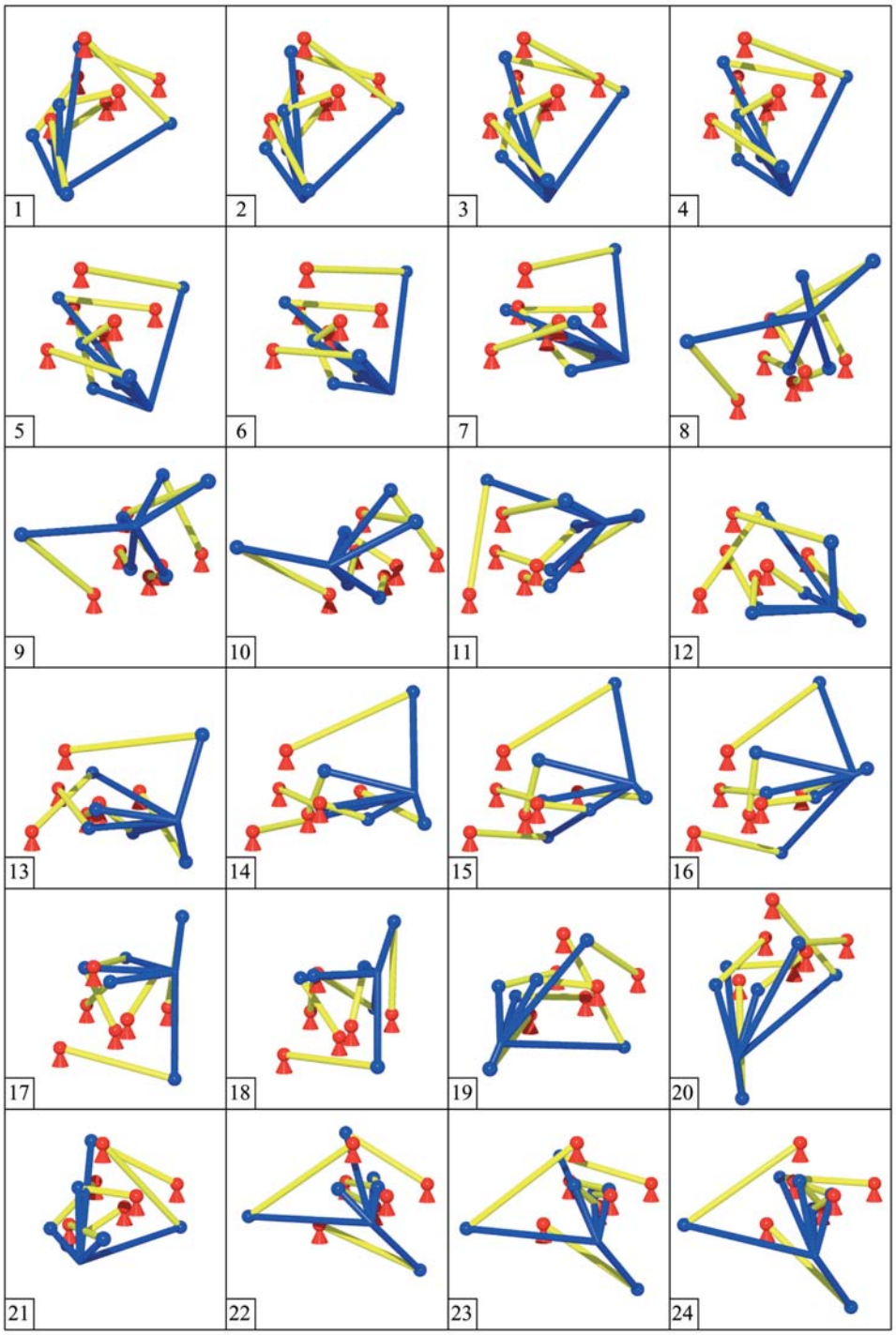

Abbildung 2.3: Graphische Darstellung von 24 der 40 reellen Lösungen

Eingabeparameter:

$X_{1,1} = 0$	$X_{2,1} = 1107915$	$X_{3,1} = 549094$	$X_{4,1} = 735077$	$X_{5,1} = 514188$	$X_{6,1} = 590473$
$X_{1,2} = 0$	$X_{2,2} = 0$	$X_{3,2} = 756063$	$X_{4,2} = -223935$	$X_{5,2} = -526063$	$X_{6,2} = 94733$
$X_{1,3} = 0$	$X_{2,3} = 0$	$X_{3,3} = 0$	$X_{4,3} = 525991$	$X_{5,3} = -368418$	$X_{6,3} = -205018$
$Y_{1,1} = 0$	$Y_{2,1} = 542805$	$Y_{3,1} = 956919$	$Y_{4,1} = 665885$	$Y_{5,1} = 478359$	$Y_{6,1} = -137087$
$Y_{1,2} = 0$	$Y_{2,2} = 0$	$Y_{3,2} = -528915$	$Y_{4,2} = -353482$	$Y_{5,2} = 1158742$	$Y_{6,2} = -235121$
$Y_{1,3} = 0$	$Y_{2,3} = 0$	$Y_{3,3} = 0$	$Y_{4,3} = 1402538$	$Y_{5,3} = 107672$	$Y_{6,3} = 353913$
$R_1 = 1000000$	$R_2 = 645275$	$R_3 = 1086284$	$R_4 = 1503439$	$R_5 = 1281933$	$R_6 = 771071$

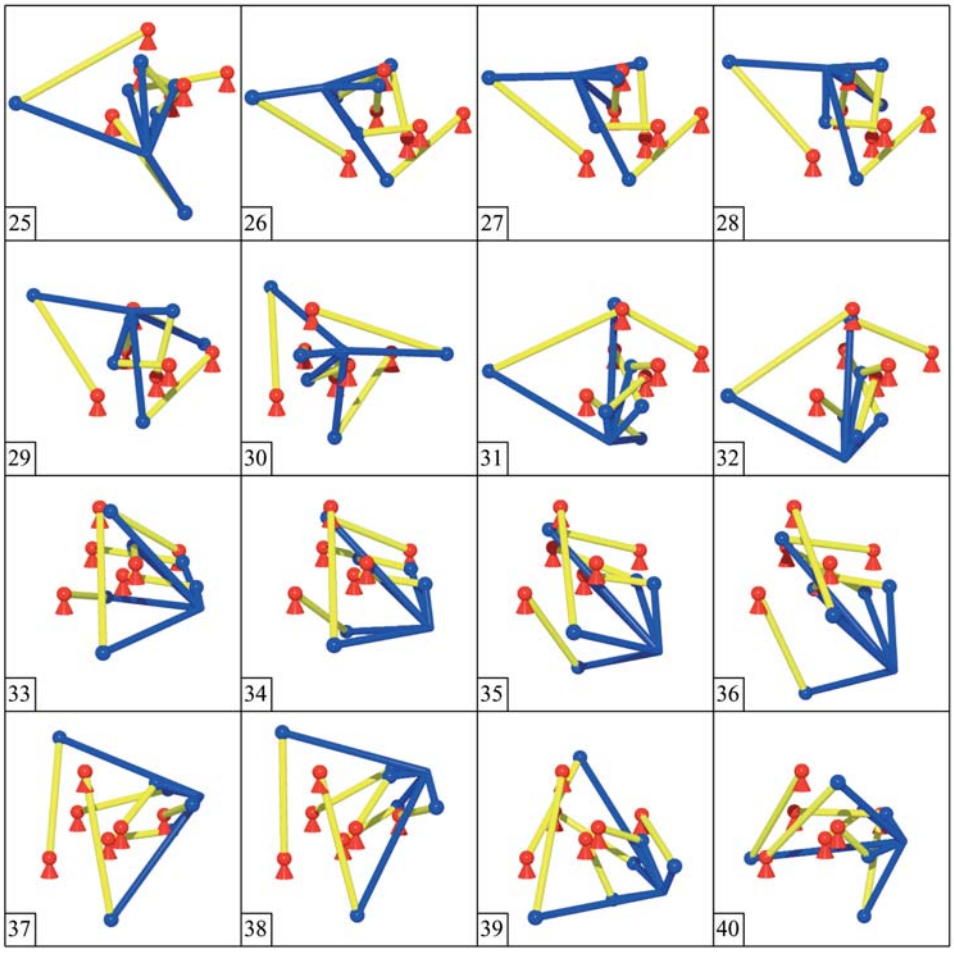

Abbildung 2.4: Graphische Darstellung der verbleibenden 16 reellen Lösungen

Kapitel 3

Singuläre Konfigurationen

3.1 Liniengeometrische Grundlagen

Um die singulären Lagen von parallelen Manipulatoren einfach kennzeichnen zu können, wollen wir zuerst die dazu benötigten liniengeometrischen Grundlagen kurz wiederholen beziehungsweise erarbeiten.

3.1.1 Plückerkoordinaten

Wir betrachten den projektiven dreidimensionalen Raum P^3. Eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ ist eindeutig durch zwei Punkte $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ festgelegt, wobei $\mathcal{L}$ die Geradenmenge des P^3 bezeichnet. Wenn wir jetzt das Grassmannprodukt $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ bilden, so erhalten wir die sechs homogenen Geradenkoordinaten $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ mit

$$l_{ij} := x_i y_j - x_j y_i, \tag{3.1}$$

wobei man dieses 6-Tupel auch als die Plückerkoordinaten der Geraden L bezeichnet. Aus den Eigenschaften des Grassmannproduktes (bilinear und antikommutativ) folgt nun, dass die Darstellung der Geraden unabhängig von der Wahl der Punkte auf dieser ist, denn:

$$\mathbf{x} \wedge (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

Da die Geradenmenge $\mathcal{L}$ eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist, kann nicht jedes homogene 6-Tupel eine Gerade beschreiben. Die einschränkende Bedingung ergibt sich nun aus der folgenden Überlegung. Dazu berechnen wir die Determinante der folgenden 4×4 Matrix, die den Rang zwei hat und daher eine verschwindende Determinante.

$$det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \ldots = 2(l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12}) = 0 \tag{3.2}$$

Satz 3.1. *Jedes homogene nichttriviale 6-Tupel $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$, das die sogenannte Plückerbedingung $l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12} = 0$ erfüllt, stellt genau eine Gerade $L \in P^3$ dar.*

Beweis:

Zuerst wollen wir die Existenz einer solchen Geraden zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $l_{01} \neq 0$ voraus; im gegenteiligen Fall verläuft der Beweis analog, aber mit anderer Indizierung. Aus den vorgegebenen Koordinaten l_{ij} bilden wir die zwei Punkte $\mathbf{s}_0 = (0 : l_{01} : l_{02} : l_{03})$ und $\mathbf{s}_1 = (-l_{01} : 0 : l_{12} : -l_{31})$. Wegen $l_{01} \neq 0$ gilt $\mathbf{s}_0 \neq \mathbf{s}_1$, sodass die Verbindungsgerade L existiert. Berechnet man nun die Plückerkoordinaten von L als $\mathbf{s}_0 \wedge \mathbf{s}_1$, so erhält man

$$\mathbf{s}_0 \wedge \mathbf{s}_1 = l_{01}^2 : l_{01}l_{02} : l_{01}l_{03} : -l_{02}l_{31} - l_{12}l_{03} : l_{01}l_{31} : l_{01}l_{12},$$

woraus unter Berücksichtigung der Plückerbedingung und der Tatsache, dass es sich um homogene Geradenkoordinaten handelt, das gewünschte Ergebnis folgt. Um die Eindeutigkeit der Geraden L nachzuweisen, reicht es aus sich zu überlegen, dass die verwendeten Punkte s_0 und s_1 die Schnittpunkte von L mit den Koordinatenebenen $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ darstellen. Da diese ja eindeutig bestimmt und verschieden sind, ist auch L als dessen Verbindungsgerade eindeutig. □

3.1.2 Das Kleinsche Modell des Geradenraumes

Analog zur Study Darstellung der Raumkongruenzen können wir nun die Plückerkoordinaten einer Geraden als die homogenen Koordinaten eines Punktes des fünfdimensionalen projektiven Raumes P^5 auffassen, der konsequenterweise die Basis $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ hat, wenn $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die Basis von P^3 darstellt. Diese Überlegung führt uns direkt zu der folgenden Definition der Kleinschen Abbildung.

Definition 3.1. *Die Kleinsche Abbildung $\gamma : \mathcal{L} \to P^5$ ordnet jeder Geraden $L \in P^5$ den Punkt $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ in P^5 zu, wobei $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ die Plückerkoordinaten von L sind.*

Da alle Geraden $\in \mathcal{L}$ der Plückerbedingung genügen, existiert eine Bijektion zwischen den Geraden des projektiven Dreiraumes und den Punkten der Quadrik Ω, der Nullstellenmenge der Gleichung (3.2). Wir wollen diese Quadrik in Folge als die Kleinsche Quadrik bezeichnen und mit M_4^2 bezeichnen. Die Koordinatenmatrix der Kleinschen Quadrik bezüglich der Basis von P^5 ist regulär, denn

$$det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \neq 0.$$

Eindimensionale Unterräume von M_4^2

Sei L eine Gerade des P^3 und $\mathbf{a}\mathbb{R}$ ein nichtinzidenter Punkt, dann definieren L und $\mathbf{a}\mathbb{R}$ ein Geradenbüschel, welches aus allen Geraden besteht, die durch $\mathbf{a}\mathbb{R}$ hindurchgehen und L im projektiven Sinn schneiden. Seien nun $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ zwei verschiedene Punkte auf L, so lauten die Plückerkoordinaten des Geradenbüschels

$$(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) = \lambda X + \mu Y,$$

wenn X bzw. Y die Verbindungsgerade des Punktes $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{y}\mathbb{R}$ mit dem Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R}$ bezeichnet. Daraus folgt nun, dass das Kleinsche Bild eines Geradenbüschels eine Gerade ist, welche in M_4^2 enthalten ist, und dass diese Abbildung projektiv ist. Es sei nur bemerkt, dass man umgekehrt auch zeigen könnte, dass die zu zwei Punkten der Kleinschen Quadrik korrespondierenden Geraden nur dann einander schneiden, wenn deren Verbindungsgerade ein Unterraum von M_4^2 ist.

Zweidimensionale Unterräume von M_4^2

Es sei nun eine Ebene, die durch die drei Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}, \mathbf{y}\mathbb{R}$ und $\mathbf{z}\mathbb{R}$ aufgespannt wird, und ein mit dieser Ebene nichtinzidenter Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R} \in P^3$ gegeben. Dann lässt sich das Geradenbündel, welches aus allen durch $\mathbf{a}$ gehenden Geraden besteht, in Plückerkoordinaten als

$$(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}) \wedge \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{z} \wedge \mathbf{a}) = \lambda X + \mu Y + \nu Z$$

schreiben, wenn X bzw. Y bzw. Z die Verbindungsgerade des Punktes $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{y}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{z}\mathbb{R}$ mit dem Punkt $\mathbf{a}\mathbb{R}$ bezeichnet. Somit bildet die Kleinsche Abbildung ein Geradenbündel projektiv auf eine Ebene $\subset M_4^2$ ab.

Dual zum Geradenbündel ist ein Geradenfeld, also die Menge aller Geraden, die in einer Ebene liegen. Durch Anwendung des Dualitätsprinzipes folgt daraus sofort, dass das Kleinsche Bild eines Geradenfeldes ebenfalls ein zweidimensionaler Unterraum von M_4^2 ist. Somit trägt die Kleinsche Quadrik zwei 3-parametrige Scharen von Ebenen, welche einerseits mit Geradenbündel und andererseits mit Geradenfeldern korrespondieren. Es folgt unmittelbar, dass sich zwei Ebenen derselben Schar genau in einem Punkt schneiden und dass der Durchschnitt zweier Ebenen verschiedener Scharen entweder leer oder eine Gerade ist. Durch analoge Überlegung wie bei der Study Quadrik lässt sich leicht zeigen, dass M_4^2 keine dreidimensionalen Unterräume besitzen kann.

Bemerkung 3.1. Dem Leser ist sicherlich nicht entgangen, dass es Analogien zwischen der Study Quadrik und der Kleinschen Quadrik gibt, nur mit dem wesentlichen Unterschied, dass das Linienkontinuum abgeschlossen ist und zu einer lückenlosen Abbildung der Geraden $\in P^3$ auf die Punkte der M_4^2 führt. Im

Gegensatz dazu steht die Study Darstellung der Raumkongruenzen bei der aus S_6^2 ein dreidimensionaler Unterraum herausgeschnitten werden muss. Aber so würde es auch in der Liniengeometrie sein, wenn die uneigentlichen Geraden noch nicht 'erfunden' wären. Denn dann müßte man aus der Kleinschen Quadrik auch die Ebene $l_{01} = l_{02} = l_{03} = 0$ entfernen. Somit stellen die von Study eingeführten Pseudosomen das Analogon zu den uneigentlichen Geraden dar und haben somit eine Existenzberechtigung.

3.1.3 Lineare Komplexe

Zuerst wollen wir uns eine Bedingung erarbeiten, die die Nullgeradenmenge $\mathcal{N}$ einer Nullpolarität κ charakterisiert. Dazu seien zuvor nochmals kurz die Eigenschaften einer Nullpolarität wiederholt. Eine Nullpolarität ist eine selbstadjungierte projektive Korrelation, wobei jeder Punkt selbstkonjugiert ist. Außerdem sollte die Tatsache bekannt sein, dass die Abbildungsmatrix $\mathbf{C}$ der Nullpolarität schiefsymmetrisch ist. Eine detaillierte Diskussion dieses Sachverhalts findet sich in [26] sowie in [31].

Satz 3.2. *Seien P und Q zwei zueinander konjugierte Punkte bezüglich der Nullpolarität κ mit $P \neq Q$, dann gilt $P \vee Q = (P \vee Q)\kappa$, was bedeutet, dass $P \vee Q$ eine Nullgerade ist, und umgekehrt gilt, dass man eine Nullgerade dadurch charakterisieren kann, dass auf ihr lauter Paare konjugierter Punkte liegen.*

Beweis:

Da es sich bei κ um eine Nullpolarität handelt gilt, $P \in P\kappa$ und $Q \in Q\kappa$. Außerdem sind P und Q zueinander konjugiert, woraus $P \in Q\kappa$ und $Q \in P\kappa$ folgt, und für jede Korrelation gilt, dass die Verbindungsgerade zweier Punkte P und Q in die Schnittgerade der Ebenen $P\kappa$ und $Q\kappa$ übergeht. Daraus folgt nun

$$(P \vee Q)\kappa = P\kappa \cap Q\kappa = P \vee Q.$$

Betrachten wir nun umgekehrt eine Nullgerade $L = L\kappa$ und darauf zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte P und Q. Dann folgt daraus $L \subset P\kappa$ und $L \subset Q\kappa$, womit schon gezeigt ist, dass P und Q konjugiert sind. □

Nun wollen wir mit Hilfe dieses Satzes eine analytische Bedingung herleiten, dass die Gerade L, auf der die beiden Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ liegen, eine Nullgerade ist. Nach Satz 3.2 müssen die beiden Punkte konjugiert sein, was nun heißt, dass der Punkt $\mathbf{y}\mathbb{R}$ in der Nullebene von $\mathbf{x}\mathbb{R}$ bezüglich κ liegen muss und umgekehrt, was analytisch folgendes bedeutet:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y_j = \sum_{i<j} (c_{ij} x_i y_j + c_{ji} x_j y_i) = \sum_{i<j} c_{ij} (x_i y_j - x_j y_i) = 0.$$

Bezeichnen wir jetzt analog zu (3.1) den Ausdruck $x_i y_j - x_j y_i$ mit l_{ij}, so folgt daraus:

$$\sum_{i<j} c_{ij} l_{ij} = c_{01}l_{01} + c_{02}l_{02} + c_{03}l_{03} + c_{23}l_{23} + c_{13}l_{13} + c_{12}l_{12} = c_{01}l_{01} + c_{02}l_{02} + c_{03}l_{03} + c_{23}l_{23} + c_{31}l_{31} + c_{12}l_{12} = 0.$$

Bevor wir jetzt dieses Ergebnis im Satz 3.3 formulieren, wollen wir noch die folgenden Vereinbarungen bezüglich der Notation treffen, mit deren Hilfe sich kommende Sachverhalte übersichtlicher anschreiben lassen:

$$(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) = (\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{l} = (l_{01}, l_{02}, l_{03}) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{l}} = (l_{23}, l_{31}, l_{12}).$$

Satz 3.3. *Gegeben sei eine Nullpolarität κ durch deren Abbildungsmatix $\mathbf{C}$ mit $c_{ij} = -c_{ji}$ und sei $\mathbf{c}$ und $\bar{\mathbf{c}}$ wie folgt definiert:*

$$\bar{\mathbf{c}} = (c_{01}, c_{02}, c_{03}), \qquad \mathbf{c} = (c_{23}, c_{31}, c_{12}).$$

Dann ist die Gerade L mit den Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})\mathbb{R}$ genau dann eine Nullgerade der Nullpolarität κ, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0.$$

Wir haben nun gezeigt, dass die Nullgeraden, dargestellt in Plückerkoordinaten, durch eine lineare Gleichung charakterisiert sind. Wir wollen nun allgemein solche Geradenmengen, wie folgt, bezeichnen:

Definition 3.2. *Eine Menge $\mathcal{C}$ von Geraden, deren Plückerkoordinaten eine homogene lineare Gleichung erfüllen, heißt ein linearer Geradenkomplex oder kurz ein linearer Komplex, wobei die Gleichung immer in der Form $\overline{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{l}}=0$ geschrieben werden kann. Falls $(\mathbf{c},\overline{\mathbf{c}})$ eine Gerade darstellt, also $\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{c}}=0$ gilt, wollen wir den linearen Komplex als singulär bezeichnen, ansonsten heißt er regulär.*

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, wollen wir uns noch überlegen, wann sich die Gerade L, die durch die Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$ und $\mathbf{y}\mathbb{R}$ aufgespannt wird, und die Gerade G, auf der die Punkte $\mathbf{u}\mathbb{R}$ und $\mathbf{v}\mathbb{R}$ liegen, einander schneiden. Die beiden Geraden schneiden einander genau dann, wenn die genannten vier Punkte in einer Ebene liegen, was nun analytisch bedeutet, dass

$$det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \ldots = l_{01}g_{23}+l_{02}g_{31}+l_{03}g_{12}+l_{23}g_{01}+l_{31}g_{02}+l_{12}g_{03} = \mathbf{l}\cdot\overline{\mathbf{g}}+\overline{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{g}=0$$

ist. Somit sind schneidende Geraden L und G durch $\mathbf{l}\cdot\overline{\mathbf{g}}+\overline{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{g}=0$, die Schnittbedingung von Sommerville, gekennzeichnet.

Satz 3.4. *Ein singulärer linearer Komplex $\mathcal{C}$ besteht aus allen Geraden, die die fixe Gerade $(\mathbf{c},\overline{\mathbf{c}})$, die auch Achse des singulären Komplexes genannt wird, schneiden. Jeder reguläre lineare Komplex ist die Menge der Nullgeraden einer Nullpolarität κ.*

Beweis:

Wenn nun $(\mathbf{c},\overline{\mathbf{c}})$ eine Gerade repräsentiert, dann folgt die erste Behauptung direkt aus der zuvor hergeleiteten Schnittbedingung von Sommerville.

Nun sei $\mathcal{C}$ ein regulärer linearer Komplex mit $\overline{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{l}}=0$, $\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{c}}\neq 0$, und mit $\overline{\mathbf{c}}=(c_{01},c_{02},c_{03})$, $\mathbf{c}=(c_{23},c_{31},c_{12})$. Die c_{ij} bestimmen nun eine schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{C}=(c_{ij})$, deren Determinante gleich $(c_{01}c_{23}+c_{02}c_{31}+c_{03}c_{12})^2=(\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{c}})^2\neq 0$ ist. Somit ist $\mathbf{C}$ regulär und beschreibt eine Nullpolarität κ, deren Nullgeradenmenge nach Satz 3.3 die Gleichung $\overline{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{l}}=0$ erfüllt. □

Satz 3.5. *Alle regulären linearen Komplexe $\mathcal{C}$ in P^3 sind projektiv äquivalent.*

Beweis:

Der Beweis verläuft nun so, dass wir ein geeignetes projektives Koordinatensystem angeben wollen, sodass jeder lineare Komplex $\mathcal{C}$ durch die Gleichung $l_{03}+l_{12}=0$ bestimmt ist und somit alle diese Komplexe projektiv äquivalent sind.

Dazu betrachten wir nun die mit $\mathcal{C}$ verbundene Nullpolarität κ und eine Gerade G, die keine Nullgerade sein soll, und die Punkte $\mathbf{b}_0\mathbb{R},\mathbf{b}_3\mathbb{R}\in G$. Da G keine Nullgerade ist, müssen G und $G\kappa$ windschief zueinander sein, denn würden sie einander schneiden, dann wäre der Schnittpunkt der Nullpunkt, der durch die beiden Geraden aufgespannten Ebene und somit G und $G\kappa$ Nullgeraden, was zu einem Widerspruch führt. Somit können wir auf $G\kappa$ die Punkte $\mathbf{b}_1\mathbb{R}$ und $\mathbf{b}_2\mathbb{R}$ wählen, und den Einheitspunkt beliebig vorgeben. Da aus Satz 3.2 unmittelbar folgt, dass das hyperbolische Netz der Treffgeraden von G und $G\kappa$ aus lauter Nullgeraden besteht, sind die Geraden $\mathbf{b}_0\mathbb{R}\wedge\mathbf{b}_1\mathbb{R}$, $\mathbf{b}_0\mathbb{R}\wedge\mathbf{b}_2\mathbb{R}$, $\mathbf{b}_3\mathbb{R}\wedge\mathbf{b}_1\mathbb{R}$ und $\mathbf{b}_3\mathbb{R}\wedge\mathbf{b}_2\mathbb{R}$ ebenfalls solche. Die Plückerkoordinaten dieser vier Geraden müssen somit die Gleichung $\overline{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{c}\cdot\overline{\mathbf{l}}=0$ erfüllen, woraus unmittelbar $c_{01}=c_{02}=c_{31}=c_{23}=0$ folgt. Somit erhalten wir die Bedingung $c_{03}l_{03}+c_{12}l_{12}=0$, in der wir $p=\frac{c_{03}}{c_{12}}$ setzen und somit $p\cdot l_{03}+l_{12}=0$ bekommen. Der Faktor p verschwindet nun, wenn wir den Einheitspunkt speziell als $(p:1:1:1)$ wählen, was durch Nachrechnen leicht bestätigt werden kann und woraus das gewünschte Ergebnis folgt. □

Um nun die singulären Lagen von Stewart Gough Plattformen leicht geometrisch charakterisieren zu können, fehlt uns nur noch der folgende Satz.

Satz 3.6. *Die Menge der Bahnnormalen einer Schraubung ist gleich der Menge der eigentlichen Geraden eines regulären linearen Komplexes und umgekehrt.*

Beweis:

Dazu wollen wir zuerst die Schraubung σ um die z-Achse mit Schraubparameter p und reellen Parameter t anschreiben:

$$\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\p\cdot t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Es sei bemerkt, dass $p \neq 0$ ist, da es sich ansonsten um keine Schraubung, sondern um eine reine Drehung um die z-Achse handelt. Wir wollen nun das Geschwindigkeitsvektorfeld der Schraubung berechnen, indem wir $\dot{\mathbf{x}}(t)$ bilden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{v}. \tag{3.4}$$

Es sei nur bemerkt, dass das so erhaltene Geschwindigkeitsvektorfeld zeitunabhängig ist. Nun wollen wir die Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$ einer Bahnnormalen berechnen, die aufgespannt wird durch $(1, \mathbf{x})$ und den Fernpunkt $(0, \mathbf{n})$, wobei $\mathbf{n}$ auf $\mathbf{v}$ normal steht. Somit erhalten wir für $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) = (\mathbf{n}, \mathbf{x} \times \mathbf{n})$, und weiters muss gelten, dass die Bahnnormalen auf $\mathbf{v}$ orthogonal stehen, woraus die Bedingung $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = -yl_{01} + xl_{02} + pl_{03} = 0$ folgt, da $\mathbf{l}$ den Richtungsvektor der Bahnnormalen darstellt. Wir wollen nun noch eine Bedingung formulieren, die angibt, wann der Punkt $\mathbf{x}$ auf der Bahnnormalen $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$ liegt. Dazu wollen wir zuerst eine Gerade durch $\mathbf{x}$ bestimmen, die parallel zu der Bahnnormalen ist, also als $(1, \mathbf{x}) \vee (0, \mathbf{l}) = (\mathbf{l}, \mathbf{x} \times \mathbf{l})$ berechnet werden kann. Daraus folgt nun die Inzidenzbedingung $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}$, woraus man sich $l_{12} = -yl_{01} + xl_{02}$ ausdrücken kann. Somit erfüllen alle Bahnnormalen die Gleichung $pl_{03} + l_{12} = 0$ und liegen somit in einem linearen Komplex.

Nun wollen wir noch den Beweis in die umgekehrte Richtung führen. Sei nun κ die mit dem linearen Komplex assoziierte Nullpolarität in P^3 mit A_u als Nullpunkt der Fernebene ω. Diejenige Gerade L durch A_u, deren Nullpolare $L\kappa$ die absolute Polare von A_u ist, heißt die Gewindeachse des Nullgeradengewindes von κ. Nun wählen wir ein projektives Koordinatensystem so, dass der Ursprung auf der Geraden L liegt, die zugleich die z-Achse darstellen soll. Wenn wir das Koordinatensystem analog zu Satz 3.5 mit $\mathbf{b}_0\mathbb{R}, \mathbf{b}_3\mathbb{R} \in L$ und $\mathbf{b}_1\mathbb{R}, \mathbf{b}_2\mathbb{R} \in L\kappa$ wählen, folgt daraus sofort, dass der Geradenkomplex in diesem neuen Koordinatensystem die Gleichung $pl_{03} + l_{12} = 0$ erfüllt. Somit hat die Abbildungsmatrix $\mathbf{C}$ der Nullpolarität die folgende Gestalt:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt für die Ebenenkoordinaten der Nullebene $P\kappa$ des eigentlichen Punktes $P = (1 : \xi : \eta : \zeta)$ folgendes: $P\kappa = (-\zeta p : -\eta : \xi : p)$. Die Nullebene $P\kappa$ genügt also der kartesischen Gleichung $-\zeta p - \eta x + \xi y + pz = 0$, womit $(-\eta, \xi, p)$, den Normalvektor auf diese Ebene darstellt. Das ist aber laut (3.4) ein Tangentenvektor von P an die durch P gehende Schraublinie mit dem Schraubparameter p. □

Wir wollen nun noch die zwei in diesem Satz nicht berücksichtigten Grenzfälle der Schraubung betrachten, nämlich wenn einerseits $p = 0$ bzw. $p = \infty$ ist. Im ersten Fall handelt es sich, wie schon zuvor erwähnt, um eine reine Drehung um die z-Achse, woraus sofort folgt, dass alle Bahnnormalen diese schneiden und somit in einem singulären linearen Komplex mit eigentlicher Achse liegen. Im anderen Fall handelt es sich um eine reine Schiebung entlang der Schraubachse, wodurch alle Bahnnormalen die Ferngerade der xy-Ebene schneiden und somit auch einen singulären linearen Komplex bilden, jedoch jetzt mit uneigentlicher Komplexachse.

3.2 Singuläre Lagen von Stewart Gough Plattformen

Mit Hilfe dieses kinematischen und liniengeometrischen Wissens können wir die singulären Lagen von Stewart Gough Plattformen, wie folgt, elegant charakterisieren. Singuläre Lagen sind nämlich dadurch gekennzeichnet, dass der parallele Manipulator in diesen Positionen infinitesimal beweglich ist. Wenn nun ein Plattformpunkt bei fixen Beinlängen eine Bewegung ausführen kann, dann muss er den Abstand zu seinem Basisankerpunkt beibehalten. Somit steht jede mögliche Bahntangente auf das dazugehörige Bein normal, woraus folgt, dass alle sechs Beine dem Bahnnormalenkomplex der Momentanschraubung angehören müssen und somit in einem linearen Komplex liegen. In solchen singulären Lagen existieren also n unkontrollierbare Freiheitsgrade, was dazu führt, dass der Manipulator in solchen Lagen nur $6 - n$ Freiheitsgrade besitzt. Nun können wir ohne weiteren Beweis den folgenden entscheidenden Satz formulieren.

Satz 3.7. *Eine Stewart Gough Plattform ist genau dann in einer singulären Lage, wenn die sechs Beine einem linearen Geradenkomplex angehören.*

Wir wollen nun diesen Sachverhalt auch durch eine Gleichung kennzeichnen und greifen aus diesem Zweck auf die Studyparametrisierung aus Satz 11.1 zurück. Wenn wir die gleiche Notation für die Basisankerpunkte und Plattformankerpunkte, wie im Kapitel 2 veranschlagt, beibehalten, dann lässt sich das i-te Bein, das wir ja als Gerade auffassen können, in Plückerkoordinaten, wie folgt, anschreiben:

$$(l_i, \bar{l}_i) = \mathbf{X}_i \vee \overline{\mathbf{Y}}_i = (1, X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3}) \wedge (\overline{Y}_{i,0}, \overline{Y}_{i,1}, \overline{Y}_{i,2}, \overline{Y}_{i,3}) = (l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12})$$

mit

$$\begin{aligned} l_{01} &= \overline{Y}_{i,1} - X_{i,1}\overline{Y}_{i,0}, & l_{23} &= X_{i,2}\overline{Y}_{i,3} - X_{i,3}\overline{Y}_{i,2}, \\ l_{02} &= \overline{Y}_{i,2} - X_{i,2}\overline{Y}_{i,0}, & l_{31} &= X_{i,3}\overline{Y}_{i,1} - X_{i,1}\overline{Y}_{i,3}, \\ l_{03} &= \overline{Y}_{i,3} - X_{i,3}\overline{Y}_{i,0}, & l_{12} &= X_{i,1}\overline{Y}_{i,2} - X_{i,2}\overline{Y}_{i,1}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun $\overline{Y}_{i,j}$ mit $j = 0, .., 3$ durch

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}_{i,0} \\ \overline{Y}_{i,1} \\ \overline{Y}_{i,2} \\ \overline{Y}_{i,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(d_0\widehat{d}_1 - d_1\widehat{d}_0 + d_2\widehat{d}_3 - d_3\widehat{d}_2) & d_0^2 + d_1^2 - d_2^2 - d_3^2 & 2(d_1d_2 - d_0d_3) & 2(d_1d_3 + d_0d_2) \\ 2(d_0\widehat{d}_2 - d_1\widehat{d}_3 - d_2\widehat{d}_0 + d_3\widehat{d}_1) & 2(d_1d_2 + d_0d_3) & d_0^2 - d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 & 2(d_2d_3 - d_0d_1) \\ 2(d_0\widehat{d}_3 + d_1\widehat{d}_2 - d_2\widehat{d}_1 - d_3\widehat{d}_0) & 2(d_1d_3 - d_0d_2) & 2(d_2d_3 + d_0d_1) & d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{i,1} \\ Y_{i,2} \\ Y_{i,3} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir die gewünschte Darstellung des i-ten Beines, die nun nicht mehr explizit angeschrieben wird, sondern mit $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)\mathbb{R}$ notiert wird. Die sechs Geraden $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)\mathbb{R}$ mit $i = 1, .., 6$ liegen nun in einem linearen Komplex, wenn sie die Gleichung $\overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l}_i + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}}_i = 0$ erfüllen, also deren Kleinschen Bilder in einer Hyperebene liegen. Dies hat als Konsequenz, dass der Rang der Matrix, in dessen Spalten die Plückerkoordinaten $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)$ der sechs Beine stehen, kleiner als 6 sein muss. Nun können wir das analytische Kriterium für die singulären Lagen von Stewart Gough Plattformen, wie folgt, formulieren.

Satz 3.8. *Die Stewart Gough Plattform ist dann und nur dann in einer singulären Lage, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\mathbf{J} := det\left((\mathbf{l}_1, \bar{\mathbf{l}}_1)^T \ (\mathbf{l}_2, \bar{\mathbf{l}}_2)^T \ (\mathbf{l}_3, \bar{\mathbf{l}}_3)^T \ (\mathbf{l}_4, \bar{\mathbf{l}}_4)^T \ (\mathbf{l}_5, \bar{\mathbf{l}}_5)^T \ (\mathbf{l}_6, \bar{\mathbf{l}}_6)^T\right) = 0. \tag{3.5}$$

$\mathbf{J} = 0$ ist eine homogene Gleichung vom Grad 12 in den Unbekannten $d_i, \widehat{d}_i$ mit $i = 0, .., 3$, jedoch hätte es wenig Sinn diese Gleichung explizit anzuschreiben, da sie weit über 100 000 Terme besitzt. $\mathbf{J}$ kann jedoch als Hyperfläche des P^7 aufgefasst werden, deren Schnitt mit der Study Quadrik eine fünfdimensionale Mannifgaltigkeit vom Grad 24 ist und die die Lösung unseres Problems darstellt. Um einen besseren Überblick über die Mannigfaltigkeit der singulären Lagen zu erhalten, wollen wir diese in verschiedene Klassen einteilen, was uns auch ermöglichen wird, systematisch nach singulären Lagen von Stewart Gough Plattformen zu suchen. Jedoch sind dafür im nächsten Abschnitt noch Vorbereitungsarbeiten zu leisten.

3.2.1 Lineare Mannigfaltigkeiten von linearen Komplexen

Wir wollen uns noch einmal an die Kleinsche Abbildung γ erinnern, die ja das Linienkontinuum auf die Kleinsche Quadrik in P^5 abbildet. Bislang fehlt uns jedoch eine geometrische Interpretation jener Punkte des P^5, die nicht auf M_4^2 liegen. Das Kleinsche Bild der Geraden eines linearen Komplexes $\mathcal{C}$ erfüllen ja die homogene lineare Gleichung $\overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$, was nun bedeutet, dass diese Geraden im Durchschnitt der durch diese Gleichung festgelegten vierdimensionalen Hyperebene mit der Kleinschen Quadrik liegen. Diese Gleichung ist auch zu entnehmen, dass der Punkt $(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{c}})\mathbb{R}$ mit jedem Punkt der Hyperebene bezüglich der Polarität an M_4^2 konjugiert ist, also der Pol der Hyperebene ist. Somit haben wir eine geometrische Interpretation dieser Punkte geliefert und können nun eine erweiterte Kleinsche Abbildung $\widehat{\gamma}$ definieren.

Definition 3.3. *Die erweiterte Kleinsche Abbildung $\widehat{\gamma}$ bildet einen linearen Komplex, der durch die Gleichung $\overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$ bestimmt ist, ab auf den Punkt $(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{c}})\mathbb{R}$ des P^5.*

Es sei nun bemerkt, dass diese erweiterte Kleinsche Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der linearen Komplexe des P^3 und den Punkten des P^5 darstellt, wobei genau den Punkten auf der Plückerquadrik singuläre Geradenkomplexe entsprechen.

Büschel linearer Komplexe

Eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit von linearen Komplexen heißt ein Büschel von linearen Komplexen. Das Bild eines solchen Büschels unter der erweiterten Kleinschen Abbildung ist eine Gerade G in P^5. In Folge sind jetzt vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob diese Gerade Teilmenge, Sekante, Tangente oder Passante von M_4^2 ist.

Teilmenge Nun besteht das Büschel aus lauter singulären linearen Komplexen. Die zugehörigen Achsen liegen in P^3 in einem Büschel um den Punkt B. Die Geradenmenge, die nun all diesen singulären Komplexen angehört, besteht aus allen Geraden der Ebene, die durch die Achsen der linearen Komplexe aufgespannt wird, und einem Geradenbündel durch den Punkt B. Das Kleinsche Bild dieser Geradenmenge, das nun im dreidimensionalen Polarraum von G bezüglich M_4^2 liegen muss, entspricht zwei Ebenen von M_4^2, die unterschiedlichen Scharen angehören und sich entlang einer Geraden schneiden.

Sekante In diesem Fall beinhaltet die Gerade G genau zwei singuläre Komplexe, und man bezeichnet daher dieses Büschel auch als hyperbolisch. Die Geradenmenge, die nun allen linearen Komplexen des Büschels angehört, ist somit gleich der Treffgeradenmenge der beiden Achsen der singulären linearen Komplexe und heißt hyperbolisches Netz. Die Achsen sind stets windschief, da ja die Verbindungsgerade der den Achsen entsprechenden Punkte im Bildraum keine Teilmenge von M_4^2 ist. Das Kleinsche Bild der Treffgeradenmenge der beiden Achsen, das nun wiederum im dreidimensionalen Polarraum von G bezüglich M_4^2 liegen muss, ist nun ein Hyperboloid. Dies muss so sein, denn nehmen wir an, X sei ein Punkt auf einer Achse des Netzes, dann spannt dieser mit der anderen Achse eine Ebene auf, in der das Geradenbüschel um X liegt, welches der Netzgeradenmenge angehört. Da nun alle diese Geradenbüschel auf der einen Achse keine Netzgerade gemeinsam haben können, müssen deren Kleinschen Bilder alle zueinander windschief sein. Dasselbe gilt für die Geradenbüschel um Punkte auf der anderen Achse, die Teilmengen des hyperbolischen Netzes darstellen, womit wir zwei Scharen von windschiefen Geraden $\in P_5$ erhalten. Nun haben aber ein beliebiges Geradenbüschel der einen Achse und eines der anderen Achse stets eine gemeinsame Gerade. Dies bedeutet nun, dass jede Gerade der einen Schar mit jeder Gerade der anderen Schar genau einen Schnittpunkt besitzt, was nun beweist, dass es sich bei der Mannigfaltigkeit, die durch den Schnitt des dreidimensionalen Polarraum mit M_4^2 entstand ist, wirklich um ein Hyperboloid handelt.

Passante Die Gerade G trägt keine singulären Komplexe, und daher wird das Büschel auch als elliptisch bezeichnet. Jedoch existieren zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte von G mit M_4^2 über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Diese Punkte entsprechen zwei konjugiert komplexen Geraden K und $\overline{K}$ in der komplexen Erweiterung von P^3, die aus demselben Grund wie zuvor windschief zueinander liegen müssen, also hochimaginär sind. Somit besteht die Geradenmenge, die nun allen linearen Komplexen des elliptischen Büschels angehört und die wir als elliptisches Netz bezeichnen, aus den reellen Treffgeraden der konjugiert komplexen hochimaginären Geraden K und $\overline{K}$. Um diese abstrakte Aussage etwas anschaulicher zu gestalten, wollen wir uns nun überlegen, dass durch jeden reellen Punkt X des P^3 genau eine Netzgerade des elliptischen Netzes geht. Die Treffgerade T läßt sich nun als $(X \vee K) \cap (X \vee \overline{K})$ anschreiben. Bilden wir nun das Konjugium, so erhalten wir:

$$\overline{T} = \overline{(X \vee K) \cap (X \vee \overline{K})} = (\overline{X} \vee \overline{K}) \cap (\overline{X} \vee K) = (X \vee \overline{K}) \cap (X \vee K) = T \implies T \text{ ist reell.}$$

Wenn wir nun das Kleinsche Bild der Treffgeradenmenge der zwei konjugiert komplexen hochimaginären Geraden bestimmen wollen, könnten wir genauso argumentieren wie im Fall des hyperbolischen Netzes, nur mit dem Unterschied, dass wir uns jetzt über dem Körper der komplexen Zahlen befinden. Wir erhalten somit einmal eine Schar von komplexen Geraden im Bildraum, die alle paarweise windschief sind. Die andere Schar besteht nun aus allen Geraden, die zu jenen der ersten Schar konjugiert sind, da die Netzachsen konjugiert komplex sind. Eine Gerade der ersten Schar und dessen konjugierte aus der zweiten Schar haben nun genau einen reellen Schnittpunkt, der der gemeinsamen Geraden der den beiden konjugiert komplexen Geraden entsprechenden Geradenbüschel entspricht. Diese Gerade ist reell, da sie unter dem Kunjugium in sich übergeht. Somit beinhalten die beiden Scharen lauter niederimaginäre Geraden, womit es sich um eine ovale Quadrik handelt.

Tangente Nun enthält G genau einen singulären linearen Komplex, und man nennt das Büschel parabolisch. Das Büschel wird nun aufgespannt durch eben diesen linearen Komplex sowie durch einen beliebigen regulären Komplex $\in G$. Die Achse des singulären Komplexes gehört nun jedem beliebigen regulären Komplex von G an, da das Kleinsche Bild der Achse, das mit dem Berührpunkt von G mit M_4^2 übereinstimmt, stets in der Polarhyperebene eines regulären Komplexes $\in G$ bezüglich M_4^2 liegt, weil ja G eine Tangente der Kleinschen Quadrik ist. Somit besteht die gemeinsame Geradenmenge aller linearen Komplexe des parabolischen Büschels, die nun konsequenterweise als parabolisches Netz bezeichnet wird, aus allen Nullgeraden der durch einer der regulären linearen Komplexes $\in G$ induzierten Nullpolarität κ, die die Achse A des singulären Komplexes, die eine Nullgerade von κ ist, schneiden. Wiederum geht durch jeden Punkt X des P^3 genau eine Netzgerade des parabolischen Netzes, denn X spannt mit A eine Ebene auf, deren Nullpunkt N bezüglich κ nun ein Punkt auf A sein muss. Die Verbindungsgerade von X mit N ist nun eine Nullgerade, da X in der Nullebene von N liegt und somit X und N konjugiert sind. Das Kleinsche Bild der parabolischen Netzgeradenmenge ist nun ein quadratischer Kegel, was, wie folgt, zu begründen ist. Das parabolische Netz besteht ja aus lauter Geradenbüschel, die eine Gerade und zwar A gemein haben. Die Kleinschen Bilder dieser Geradenbüschel sind nun lauter Geraden, die durch einen Punkt gehen, der mit der Geraden A korrespondiert. Da es sich um eine quadratische Mannigfaltigkeit handeln muss, ist nun das Kleinsche Bild der Netzgeraden ein Kegel.

Bündel linearer Komplexe

Eine zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit von linearen Komplexen heißt ein Bündel von linearen Komplexen. Das Bild eines solchen Bündels unter der erweiterten Kleinschen Abbildung ist eine Ebene ε in P^5. Nun sind wiederum einige Fallunterscheidungen notwendig je nachdem, wie die Ebene zu M_4^2 liegt, jedoch wollen wir nur die für unseren Zweck entscheidenden zwei Fälle untersuchen. Der Schnitt aus ε mit M_4^2 besteht aus:

2 reellen Geraden E und F. Nun enthält $\varepsilon \cap M_4^2$ lauter singuläre Komplexe, deren Achsen auf zwei Geradenbüschel verteilt sind, je nachdem, ob das $\widehat{\gamma}$-Bild des singulären Komplexes auf E oder F liegt. Diese zwei Geradenbüschel haben genau eine Gerade gemein, nämlich jene, deren Kleinsches Bild gleich dem Schnittpunkt von E und F ist. Außerdem sei noch bemerkt, dass die Geradenbüschel auch stets in zwei voneinander verschiedenen Ebenen liegen müssen, da ansonsten ε eine Teilmenge von M_4^2 sein müsste, was einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung darstellen würde. Die Geradenmenge, die nun all diesen singulären Komplexen angehört, verteilt sich wiederum auf zwei von einander verschiedene Geradenbüschel. Jedes dieser Büschel hat denselben Büschelscheitel wie ein Geradenbüschel der Achsen, jedoch liegt es in der Ebene, die durch das andere Achsenbüschel aufgespannt wird.

1 reellen Kegelschnitt. Je drei paarweise verschiedene Punkte dieses Kegelschnittes, die mit singulären Geradenkomplexen korrespondieren, spannen nun die Ebene ε auf. Die Achsen dieser singulären Komplexe liegen zueinander paarweise windschief, denn würden sich zwei der Achsen schneiden, so müsste die Verbindungsgerade der Kleinschen Bilder der Achsen eine Teilmenge von M_4^2 sein, woraus sofort folgen würde, dass der Kegelschnitt zerfallen müsste, was einen Widerspruch zu unserer Annahme darstellt. Die Geradenmenge, die nun allen singulären Komplexen von ε angehört, ist somit äquivalent mit der Treffgeradenmenge der zuvor genannten drei paarweise wiedschiefen Achsen der Komplexe. Wie dem Leser bekannt sein müsste, ist dies ein Regulus. Mit diesem Ergebnis wollen wir nun die Vorarbeit für den kommenden Abschnitt abschließen.

3.2.2 Systematische Suche nach singulären Lagen

Nun wollen wir eine Einteilung der singulären Lagen nach geometrischen Gesichtspunkten vornehmen. Die Grundüberlegung lautet nun so, dass die Stewart Gough Plattform singulär beweglich ist, wenn das Kleinsche Bild von $n+1$ Beinen einen n-dimensionale Unterraum aufspannen, was nun die folgende Fallunterscheidung nach sich zieht. Zuvor wollen wir jedoch noch eine Vereinbarung bezüglich der Notation treffen, nämlich, dass wir das Kleinsche Bild der Geraden $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)\mathbb{R}$ mit L_i bezeichnen wollen.

1.Fall: n=1

Wir wollen alle Lagen des Manipulators ausfindig machen, in denen $L_i = L_j$ gilt mit $i < j$ und $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, was bedeutet, dass zwei Beine auf einer Geraden liegen. Hier sind $\binom{6}{2} = 15$ Unterfälle zu beachten, wobei wir die Vereinigungsmenge über die zugehörigen 15 Lösungsmannigfaltigkeiten mit N_1 bezeichnen wollen. Die fünfzehn Lösungsmannigfaltigkeiten müssen nicht disjunkt sein, denn es könnte auch passieren, dass k Beine in einer Position des Manipulators zusammenfallen. Jedoch müssen dann die k Basisankerpunkte sowie deren entsprechenden k Plattformankerpunkte kollinear liegen. In diesem Fall wäre der momentane Freiheitsgrad der Plattform gleich $6 - k + 1$.

2.Fall: n=2

Wir wollen von vornherein alle Lagen des Manipulators ausschließen, die bereits im ersten Fall enthalten sind. Dies bedeutet nun, dass wir alle Lagen finden wollen, in denen L_i, L_j und L_k mit $i < j < k$ und $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kollinear liegen, was nun, wie wir uns bereits überlegt haben, bedeutet, dass das i-te, j-te und k-te Bein in einem Geradenbüschel liegen. Es existieren somit $\binom{6}{3} = 24$ Unterfälle. Es sei bemerkt, dass die Lösungsmannigfaltigkeiten dieser 24 Fälle nicht disjunkt sein müssen, denn es könnte zum Beispiel der Fall sein, dass es Positionen des Manipulators gibt, in denen vier oder mehr Geraden in einem Geradenbüschel liegen. Somit entspechen Punkten, die im Durchschnitt zweier oder mehrerer dieser 24 Lösungsmengen liegen, Positionen der Plattform, die momentan einen Freiheitsgrad kleiner als 5 aber größer als 2 besitzen. Wir wollen jetzt noch die Vereinigungsmenge der 24 Lösungsmengen mit N_2 bezeichnen.

3.Fall: n=3

Dem entsprechen nun alle Lagen, in denen L_i, L_j, L_k und L_l mit $i < j < k < l$ und $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in einer Ebene ε liegen. Wobei jene Lagen ausgeschlossen werden sollen, in denen zwei Geraden zusammenfallen oder drei der vier genannten Geraden in einem Geradenbüschel liegen, also bereits in den $N_1 \cup N_2$ enthalten sind. Hier ist eine weitere Fallunterscheidung nötig, denn wir haben im bisherigen Verlauf der Arbeit bereits vier Konfigurationen von vier Geraden kennengelernt, deren Kleinschen Bilder in einer Ebene liegen.

Geradenfeld Die Ebene ε gehört der Schar der Ebenen von M_4^2 an, die mit Geradenfeldern korrespondieren. In diesem Fall existieren $\binom{6}{4} = 15$ Unterfälle, und wir wollen die Vereinigungsmenge der 15 Lösungsmengen mit N_{3a} bezeichnen.

Geradenbündel Nun gehört ε der anderen Schar von Ebenen an, die M_4^2 trägt, was nun bedeutet, dass die vier Beine in einem Geradenbündel liegen. Wie zuvor existieren wiederum 15 Unterfälle, wobei wir die Vereinigungsmenge der zugehörigen Lösungsmengen mit N_{3b} bezeichnen wollen.

Regulus In diesem Fall schneidet ε die Kleinsche Quadrik in einem Kegelschnitt, was nun bedeutet, dass die vier Geraden in einem Regulus liegen. Wiederum existieren 15 Unterfälle, wobei wir diesmal die Vereinigungsmenge der zugehörigen Lösungsmengen mit N_{3c} bezeichnen wollen.

Sonderfall Jetzt schneidet ε aus M_4^2 zwei reelle Gerade heraus, womit die vier Beine im Raum, wie folgt, liegen müssen. Zwei Beine schneiden einander und ebenso die restlichen zwei. Außerdem müssen die zwei dadurch aufgespannten Ebenen verschieden voneinander sein, und die zwei so entstandenen Schnittpunkte müssen auf der Schnittgerade der beiden Ebenen liegen. In diesem Fall existieren $3 \cdot 15 = 45$ Unterfälle, da es für je 4 Geraden wiederum drei Möglichkeiten gibt. Konsequenterweise wollen wir die Vereinigung der 45 Lösungsmengen mit N_{3d} bezeichnen.

Bemerkung 3.2. Die Mengen, deren jeweilige Vereinigung N_{3i} mit $i \in \{a, b, c, d\}$ ergeben, müssen wiederum nicht disjunkt sein, jedoch kann man sich leicht überlegen, dass folgende Aussagen gelten:

$$N_{3c} \cap N_{3a} = \{\}\,, \qquad N_{3c} \cap N_{3b} = \{\}\,.$$

Daraus folgt auch sofort, dass der Durchschnitt über allen N_{3i} die leere Menge ist und dass der einzige Durchschnitt über drei Mengen, der ungleich $\varnothing$ sein kann, der über N_{3a}, N_{3b} und N_{3d} ist. Lösungen aus

diesem Durchschnitt korrespondieren dann mit Lagen des Manipulators, in der dieser einen momentanen Freiheitsgrad von 3 hat.

4.Fall: n=4

Dem entsprechen nun alle Lagen, in denen L_i, L_j, L_k, L_l und L_m mit $i < j < k < l < m$ und $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ einen dreidimensionalen Raum aufspannen. Wobei von vornherein jene Lagen ausgeschlossen werden sollen, die bereits in den Fällen 1, 2 und 3 beinhaltet sind. Hier sind wiederum 4 uns schon bekannte Fälle zu unterscheiden:

Hyperbolisches Netz In diesem Fall spannen die 5 Geraden einen dreidimensionalen Unterraum auf, der aus der Kleinschen Quadrik ein Hyperboloid herausschneidet. Es sind hier wiederum $\binom{6}{1} = 6$ Unterfälle zu unterscheiden, wobei wir die Vereinigungsmenge der sechs entsprechenden Lösungsmannigfaltigkeiten mit N_{4a} bezeichnen wollen.

Elliptisches Netz Nun schneidet der durch die 5 Geraden aufgespannte Unterraum die Kleinsche Quadrik nach einer ovalen Quadrik. Es existieren wiederum $\binom{6}{1} = 6$ Unterfälle, wobei wir die Vereinigungsmenge der sechs zugehörigen Lösungsmengen mit N_{4b} bezeichnen wollen.

Parabolisches Netz Hier schneidet der dreidimensionale Unterraum, in denen L_i, L_j, L_k, L_l und L_m liegen, M_4^2 nach einem quadratischen Kegel. Man unterscheidet nun wieder $\binom{6}{1} = 6$ Unterfälle, wobei wir die Vereinigungsmenge der zugehörigen Lösungsmannigfaltigkeiten mit N_{4c} anschreiben wollen.

Sonderfall In diesem Fall gibt es nun zwei mögliche Konfigurationen. Entweder gehören drei der fünf Geraden einem Ebenenfeld an und die verbleibenden zwei schneiden einander in einem Punkt dieser Ebene oder nur zwei Geraden liegen in einem Ebenenfeld und die anderen drei besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt in dieser. Dadurch ergeben sich $\binom{6}{1} \cdot [\binom{5}{2} + \binom{5}{3}] = 120$ Unterfälle, wobei wir die Vereinigungsmenge der diesen Fällen entsprechenden Lösungsmengen mit N_{4d} bezeichnen wollen.

Bemerkung 3.3. Der Durchschnitt über die Lösungsmannigfaltigkeiten, deren Vereinigung die Menge N_{4i} mit $i = a, b, c$ ergeben hat, muss nicht die leere Menge sein. Denn Punkte dieses Durchschnitts würden Lagen des Manipulators entsprechen, in denen alle Beine einem Netz angehören, und die Plattform somit zwei momentan unkontrollierbare Freiheitsgrade besitzen würde. Jedoch können wir mit Gewissheit sagen, dass der Durchschnitt über die 120 Lösungsmengen, deren Vereinigung gleich N_{4d} ist, die leere Menge ist. Außerdem gilt stets, dass die Mengen $N_{4,a}, N_{4,b}, N_{4,c}$ und $N_{4,d}$ paarweise disjunkt sind, was sich leicht, wie folgt, überlegt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \in N_{4i}$ und $L_1, L_2, L_3, L_4, L_6 \in N_{4j}$ gilt mit $i \neq j$. Da wir zu Beginn ausgeschlossen haben, dass keine 4 Punkte in einer Ebene liegen, müssen je vier Punkte bereits den Raum aufspannen, in dem alle fünf Punkte liegen. Da die beiden Mengen 4 gleiche Punkte besitzen, spannen sie denselben Raum auf, was $i = j$ zur Folge hat und somit einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung darstellt, womit die Aussage bewiesen ist.

5.Fall: n=5

Diesem Fall entsprechen Lagen des Manipulators, in denen L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 und L_6 in einer Hyperebene liegen, wobei wir von vornherein wieder jene Lagen ausschließen wollen, die bereits in den Fällen 1, 2, 3 und 4 beinhaltet sind. Dies bedeutet nun, dass das Kleinsche Bild von je 5 Beinen eine Hyperebene aufspannen muss. Hier sind nur mehr die folgenden zwei Fälle zu unterscheiden.

Regulärer Komplex In diesem Fall liegt der Pol der durch die sechs Punkte aufgespannten Hyperebene bezüglich M_4^2 nicht auf der Kleinschen Quadrik. Wir wollen die dazugehörige Lösungsmenge mit N_{5a} bezeichnen.

Singulärer Komplex In diesem Fall liegt der Pol der durch die sechs Punkte aufgespannten Hyperebene bezüglich M_4^2 auf der Kleinschen Quadrik. Wir wollen die dazugehörige Lösungsmenge mit N_{5b} notieren.

Bemerkung 3.4. Trivialerweise sind die Mengen N_{5a} und N_{5b} disjunkt.

Alle möglichen Fälle wurden somit abgehandelt, jedoch könnte man innerhalb der einzelnen Mengen N_i noch eine Unterscheidung bezüglich des momentanen Freiheitsgradse treffen, wobei gilt, dass eine Lösung aus N_i mindestens i kontrollierbare Freiheitsgrade besitzen muss. Es sei bemerkt, dass man bei der Berechnung der singulären Lagen in der Praxis noch Bedingungen hinzufügen müsste, die den Arbeitsraum des Manipulators charakterisieren. Dieser wird nämlich beschränkt durch die mechanischen Limits der Kugel- oder Kardangelenke, durch die Länge der Beine und dadurch, dass die Stäbe während einer Bewegung sich gegenseitig behindern können. Außerdem sind Positionen der Plattform zu vermeiden, die nahe solchen singulären Lagen sind, weil sie dann an Stabilität verlieren, was sogar dazu führen kann, dass die Plattform in eine andere Position umspringt. Dieses Phänomen wollen wir in Folge etwas näher betrachten.

3.2.3 Umspringen der Plattform in eine andere Position

Wir wollen nun von der Schraubung σ in (3.3) ausgehen und zeigen, dass für ein fix gewähltes t der folgende Satz gilt:

Satz 3.9. *Alle Geraden, die normal auf* $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}$ *stehen mit* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$*, und durch den Punkt* $\mathbf{m}_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}(t))$ *hindurchgehen, gehören einem linearen Komplex an.*

Beweis:

Wir wollen diesen Sachverhalt beweisen, indem wir zeigen, dass die Abbildung vom Punkt $\mathbf{m}_t(\mathbf{x})$ auf die Normalebene ε bezüglich $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}$ durch $\mathbf{m}_t(\mathbf{x})$ eine Nullpolarität ist. Wenn wir mit homogenen Koordinaten rechnen, dann erhalten wir

$$\mathbf{m}_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ x(\cos t + 1) - y \sin t \\ y(\cos t + 1) + x \sin t \\ 2z + p \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun aus dieser Gleichung x, y und z ausdrücken über ξ, η und ζ und in $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}$ einsetzen, so erhalten wir

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \frac{\cos t - 1}{\sin t} \\ \xi \frac{1 - \cos t}{\sin t} \\ p \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

In der Ebenengleichung für ε: $\xi \cdot u_1 + \eta \cdot u_2 + \zeta \cdot u_3 + u_0 = 0$ müssen wir nur noch den konstanten Faktor u_0 bestimmen, indem wir die Koordinaten von $\mathbf{m}_t(\mathbf{x})$ einsetzen. Wenn wir dies tun, erhalten wir: $u_0 = -\zeta\, p\, t$. Somit können wir jetzt die Abbildungsmatrix angeben, die den Punkt $\mathbf{m}_t(\mathbf{x})$ auf die Ebene ε abbildet:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p \cdot t \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ p \cdot t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad c = \frac{\cos t - 1}{\sin t}.$$

Da nun die Abbildungsmatrix schiefsymmetrisch ist, handelt es sich um eine Nullpolarität, wodurch die obige Behauptung schon bewiesen ist. □

Dieses Ergebnis hat nun folgende Konsequenz. Angenommen, wir haben die Geometrie der Stewart Gough Plattform sowie alle sechs Beinlängen vorgegeben, dann existieren im allgemeinen 40 Positionen, in denen die Plattform zusammengebaut werden kann. Nun kann es sein, dass zwei Lösungen der Vorwärtskinematik relativ ähnlich sind, wie dies zum Beispiel in den ersten zwei Positionen in Abbildung 2.3 der Fall ist. Natürlich existiert jetzt eine Schraubung σ, die die Plattform von der einen Position in die andere überführt, womit wir Satz 3.9 anwenden können. Daraus folgt nun, dass, je kleiner der Abstand zwischen den entsprechenden Plattformankerpunkten der zwei Lagen ist, desto näher befindet sich der Manipulator, in diesen zwei Positionen, einer singulären Lage. Nun ist es auch klar, dass, wenn die Stewart Gough Plattform sich in der Nähe einer singulären Lage befindet, es in der Praxis zum Umspringen der Plattform in eine andere Lage kommen kann, ohne dass die Beinlängen verändert werden.

Dies alles soll zeigen, wie schwierig es ist, den tatsächlichen Arbeitsbereich einer allgemeinen Stewart Gough Plattform ausfindig zu machen, und daher wundert es nicht, dass gerade dieser Themenkomplex ein Teil der aktuellen Forschung ist. Wir wollen deshalb nicht mehr näher auf die lokalen singulären Lagen eines Manipulators eingehen, sondern uns nun mit den architektonisch singulären Stewart Gough Plattformen, die bereits öfters im zweiten Kapitel erwähnt wurden, auseinandersetzen.

3.3 Architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen und deren Selbstbewegungen

Definition 3.4. *Eine Stewart Gough Plattform nennt man genau dann architektonisch singulär, wenn sie in jeder beliebigen Konfiguration singulär ist.*

Das heißt nun, dass $\mathbf{J}$ aus Satz 3.8 unabhängig von den Unbekannten $d_i, \widehat{d_i}$ mit $i = 0, .., 3$ verschwinden muss und man daher nur Bedingungen an die Geometrie des Manipulators stellen kann, womit sich auch die Bezeichnung architektonisch singulär erklärt. Wir wollen wiederum den Trivialfall, dass alle Basisankerpunkte oder Plattformankerpunkte auf einer Geraden liegen und somit die Beine stets einem singulären Komplex angehören, von allen folgenden Überlegungen ausschließen.

Wir wollen nun bei der Betrachtung dieser speziellen Plattformen zwei Fälle unterscheiden, nämlich, ob alle Basisankerpunkte und Plattformankerpunkte in einer Ebene liegen oder nicht. Wir wollen zuerst den letzteren Fall behandeln.

3.3.1 Architektonisch singuläre Manipulatoren mit nicht ebener Basis und Plattform

Aufgrund unserer liniengeometrischen Betrachtungsweise können wir, ohne jegliche Berechnung, sofort sechs Fälle angeben. Eine Stewart Gough Plattform ist architektonisch singulär, wenn nach allfälliger Umnummerierung oder Vertauschen von Basis und Plattform einer der folgenden Fälle eintritt.

1.Fall Es sei $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3$, und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ seien kollinear. Somit gehören diese drei Geraden stets einem Geradenbüschel an, wodurch der Manipulator in jeder Lage singulär ist. Angenommen, wir geben jetzt die Längen des ersten und des zweiten Beines beliebig vor, dann kann sich $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2$ nur mehr auf einer Kreisbahn bewegen. Da ja $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3$ gilt, kann die Länge des dritten Beines somit nicht mehr beliebig gewählt werden. Daher schränkt dieses Bein die Beweglichkeit der Stewart Gough Plattform nicht ein und könnte somit weggelassen werden. Wir können deshalb nur den fünfbeinigen Manipulator betrachten, der entsteht, wenn wir das dritte Bein entfernen. Somit können wir die Selbstbewegung durch das Polynom $\mathcal{H}_3$ beschreiben, was uns in diesem Fall, wie erwartet, auf eine Gleichung vom Grad 20 führt.

Es existiert jedoch noch jener denkbare Unterfall, dass $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_4$ gilt und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{X}_4$ kollinear sind. Dann können das dritte und das vierte Bein weggelassen werden, womit die Plattform in jeder Lage nur vier kontrollierbare Freiheitsgrade besitzt. Die Selbstbewegung ist nun zweiparametrig und wird im Raum der Studyparameter durch das Polynom $\mathcal{S}_{256}$ vom Grad 8 repräsentiert.

2.Fall Es seien $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_4$. In diesem Fall gehören die vier zugehörigen Beine stets einem Geradenbündel an, was ja ein Kriterium für singuläre Lagen ist, wie wir uns im vorigen Abschnitt überlegt haben. Nun können wir analog wie zuvor argumentieren. Wenn wir jetzt die Längen der ersten drei Beine vorgeben, so existieren genau zwei Positionen für $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_3$. Nun kann wiederum die Länge des vierten Beines nicht beliebig gewählt werden, und wir können wie zuvor nur den fünfbeinigen Manipulator betrachten, der entsteht, wenn man das vierte Bein weglässt. Nach dem Kapitel 'Bemerkungen zum Algorithmus' erhalten wir für $\mathcal{S}_{235}$ und $\mathcal{S}_{235}$ Polynome vom Grad 6, von denen sich wiederum der Faktor $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ abspalten lässt. Eliminieren wir nun d_3 aus den verbleibenden Ausdrücken, indem wir die Resultanten mit $\mathcal{S}_4^4$ bilden, erhalten wir zwei Gleichungen vom Grad 16, deren größter gemeinsamer Teiler uns bereits das gesuchte Polynom vom Grad 8 liefert. Dieses Ergebnis korrespondiert mit der maximalen Lösungsanzahl der Vorwärtskinematik für Stewart Gough Plattformen, bei denen drei Plattformankerpunkte zusammenfallen, die von Faugere und Lazard in [6] mit 16 angegeben wurde.

3.Fall Es seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ jeweils kollinear, und die Punktreihen sind ähnlich zueinander. Nun liegen die vier zugehörigen Geraden stets in einem Regulus, womit die Plattform architektonisch singulär ist. Wenn man nun die Länge der ersten drei Beine beliebig vorgibt, so ist damit schon der Regulus eindeutig bestimmt. Damit ist es klar, dass die Länge des vierten Beines nicht beliebig gewählt werden kann. Dadurch kann das vierte Bein wiederum weggelassen werden, da es nicht die Bewegung des Manipulators beeinflusst. Die Selbstbewegung wird nun durch das Polynom $\mathcal{H}_4$ vom Grad 16 repräsentiert, was direkt aus einem Ergebnis im Kapitel 'Sonderfälle des Algorithmus, Teil II, Fall 1' folgt.

Hier besteht wiederum der denkbare Unterfall, dass auch das fünfte Bein dem Regulus angehört und es sich somit um einen architektonisch singulären Manipulator mit ebener Plattform und Basis handelt. Wir wollen jedoch diesen Fall aus gegebenem Anlass gleich an dieser Stelle betrachten. Da wir nun wiederum zwei Beine, und zwar das vierte und das fünfte, weglassen können, hat diese Plattform wiederum eine zweiparametrige Selbstbewegung, die im Raum der Studyparameter durch das Polynom $\mathcal{S}_{236}$ vom Grad 8 repräsentiert wird.

4.Fall Es seien $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$, $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5$, und die Punkte $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ liegen kollinear. Da keine Bedingungen an die Ankerpunkte des sechsten Beines gestellt wurden, müssen die ersten fünf Beine in einem dreidimensionalen Unterraum von P^5 liegen. Dies ist auch der Fall, denn der Schnittpunkt $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$, der ersten drei Beine liegt stets in der Ebene, die durch das vierte und fünfte Bein aufgespannt wird, was ein Kriterium für singuläre Lagen ist wie wir uns im vorigen Abschnitt 3.2.2 überlegt haben. Wir können uns nun wiederum überlegen, dass die Länge des fünften Beines nicht beliebig gewählt werden kann, wenn man dies schon für die ersten vier Beinlängen gemacht hat. Zuerst wollen wir die ersten drei Beinlängen vorgeben, woraus folgt, dass es zwei mögliche Positionen von $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$ gibt. Wir nehmen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine dieser Lagen an. Nun liegt der Punkt $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5$ auf einer Kugel um $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$. Wenn wir jetzt noch den Basisankerpunkt und die Länge des vierten Beines beliebig vorgeben, dann kann $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5$ nur mehr auf einer Kreisbahn liegen. Damit nun das fünfte Bein keine Einschränkung dieser Mannigfaltigkeit bedingt, muss nun der fünfte Basisankerpunkt, wie gefordert, auf der Verbindungsgeraden von $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{X}_4$ liegen, und zusätzlich muss das Bein nun, damit der Manipulator zusammengebaut werden kann, eine ganz bestimmte Länge haben. Somit ist wiederum klar, dass wir auch das fünfte Bein weglassen und nur den dadurch entstehenden Manipulator berücksichtigen können, der nun ident ist mit jenem aus dem zweiten Fall. Daraus folgt sofort, dass man durch analoge Rechnung wie im angesprochenen Fall nun das Polynom $\mathcal{H}_5$ vom Grad 8 erhält.

5.Fall Es seien $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5 = \mathbf{Y}_6$. Nun ist die Begründung trivial, warum es sich hier um einen architektonisch singulären Manipulator handelt, denn die sechs Beine schneiden stets die Verbindungsgerade von $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5 = \mathbf{Y}_6$, woraus folgt, dass sie in einem singulären Komplex liegen. Nun kann man sich in analoger Weise wie im vorigen Fall wiederum überlegen, dass die Länge des sechsten Beines nicht frei gewählt werden kann. Der Gedankengang verläuft bis zu dem Punkt, wo wir das fünfte Bein ins Spiel bringen, gleich. Nun können der Basisankerpunkt und die Länge des fünften Punktes beliebig gewählt werden, woraus folgt, dass es nur noch zwei mögliche Lagen für $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_5 = \mathbf{Y}_6$ gibt. Damit wiederum die Stewart Gough Plattform überhaupt in einer dieser zwei Positionen zusammengebaut werden kann, muss die Länge des sechsten Stabes, dessen Basisankerpunkt ja beliebig gewählt werden kann, ganz speziell gewählt werden. Somit können wir wiederum nur den Manipulator ohne das sechste Bein betrachten und uns dessen Selbstbewegung, die ja mit der der ursprünglichen Stewart Gough Plattform ident ist, berechnen. Nach dem Kapitel 'Bemerkungen zum Algorithmus' erhalten wir für $\mathcal{S}_{234}, \mathcal{S}_{235}, \mathcal{S}_{245}$ und $\mathcal{S}_{345}$ Polynome vom Grad 6 und für $\mathcal{S}_6$ ein Polynom vom Grad 4, von denen sich jeweils der Faktor $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ abspalten lässt. Berechnen wir nun, wie im Algorithmus in Kapitel 2 beschrieben, $\mathcal{H}_6$, so erhalten wir ein Polynom vom Grad 4, das nun die Selbstbewegung repräsentiert. Dieses Ergebnis korrespondiert wiederum mit der Lösungsanzahl der Vorwärtskinematik für Stewart Gough Plattformen, bei denen drei Basisankerpunkte und zwei Plattformankerpunkte zusammenfallen, die von Faugere und Lazard in [6] mit 8 angegeben wurde.

6.Fall Nun seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und $\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6$ jeweils kollinear, und zusätzlich gelte $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2$ und $\mathbf{Y}_5 = \mathbf{Y}_6$. Wir wollen uns überlegen, dass die sechs Beine stets in einem regulären linearen Komplex liegen, also die Kleinschen Bilder der Beine einen vierdimensionalen Raum aufspannen. Dazu

betrachten wir das Geradenbündel durch $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4$, dessen γ-Bild eine Ebene $\varepsilon \in M_4^2$ darstellt. Die zwei Geradenbüschel, die vom ersten und zweiten Bein beziehungsweise vom dritten und vierten Bein aufgespannt werden, entsprechen im Bildraum zwei Geraden E und F. Da nun die zwei Geradenbüschel mit dem Bündel um $\mathbf{X}_5 = \mathbf{X}_6$ jeweils eine Gerade gemein haben, müssen E und F die Ebene ε schneiden woraus folgt, dass sie in einem vierdimensionalen Raum liegen.

Nun kann man sich nicht auf so elementare Weise ,wie in den vorherigen Fällen, überlegen, dass die Varietät des Ideals, das aufgespannt wird durch die Gleichungen Φ und Λ^i mit $i = 1, .., 6$, eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist. Wir wollen nun, wie folgt, argumentieren. Da nun der Manipulator in jeder Lage singulär ist, bedeutet dies nun, dass er in jeder Position mindestens einen unkontrollierbaren Freiheitsgrad besitzt und somit eine theoretische Selbstbewegung existieren muss. Im Raum der Studyparameter bedeutet dies, dass die Varietät der sieben Hyperquadriken Φ und Λ^i mit $i = 1, ..., 6$ nicht mehr eine diskrete Punktmenge ist, sondern mindestens eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Gestützt auf diese Überlegung und dem Ergebnis von Husty und Karger, die dieses Gleichungssystem in [11] für redundant befunden haben, wollen wir uns die einparametrige Selbstbewegung der Plattform, wie folgt, berechnen. Diese stimmt überein mit der Selbstbewegung des fünfbeinigen Manipulators, der entsteht wenn man das sechste Bein weglässt. Nach dem Kapitel 'Bemerkungen zum Algorithmus' erhalten wir für $\mathcal{S}_{234}$ ein Polynom vom Grad 6, von dem sich $d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ abspalten lässt. Berechnet man nun weiters $\mathcal{H}_6$, wie im angegebenen Algorithmus beschrieben, so erhält man ein Polynom vom Grad 12, von dem sich der Faktor $(d_0^2 + d_1^2)^2$, der jedoch nicht als Lösung in Frage kommt, abspalten lässt. Dieses Resultat steht auch im Einklag mit der von Faugere und Lazard in [6] mit 16 angegebenen maximalen Lösungsanzahl für die Vorwärtskinematik von Stewart Gough Plattformen, bei denen das erste und das zweite Bein sowie das fünfte und das sechste Bein jeweils einen gemeinsamen Plattformankerpunkt und das dritte und das vierte Bein einen gemeinsamen Basisankerpunkt besitzen.

Die Aufzählung aller architektonisch singulären Stewart Gough Plattformen mit nicht ebener Basis und Plattform ist jedoch mit diesen sechs Fällen noch nicht komplett, denn laut Husty und Karger [11] existiert genau noch eine Konfiguration, die nicht so leicht greifbar ist. Sie haben diesen in Folge angeführten Fall durch eine aufwendige und mühsame Analyse der Gleichung $\mathbf{J}$ gefunden, und schreiben in dem zitierten Artikel das folgende:

"In this contribution we present the complete list of all non-planar architecture singular six-legged platforms..."

7.Fall Es seien $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ kollinear und $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ liegen in einer Ebene. Dann liegen die fünf Beine immer in einem parabolischen Netz, wenn bei der folgenden Wahl des Koordinatensystems

$$\mathbf{X}_1 = (0,0,0) \quad \mathbf{X}_2 = (X_{2,1}, 0, 0) \quad X_{i,3} = 0 \quad \text{für} \quad i = 3,4,5$$

$$\mathbf{Y}_1 = (0,0,0) \quad Y_{j,2} = Y_{j,3} = 0 \quad \text{für} \quad j = 2,3,4,5$$

die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned}
X_{5,1} &= X_{2,1}Y_{5,1}(X_{3,2}X_{4,1}Y_{5,1}Y_{4,1} + Y_{4,1}X_{4,2}Y_{3,1}X_{3,1} - X_{4,2}X_{3,1}Y_{5,1}Y_{3,1} + Y_{2,1}X_{4,2}X_{3,1}Y_{5,1} \\
&\quad + Y_{2,1}X_{4,1}Y_{3,1}X_{3,2} - Y_{2,1}X_{3,2}X_{4,1}Y_{5,1} - Y_{2,1}X_{3,1}Y_{4,1}X_{4,2} - Y_{4,1}X_{4,1}Y_{3,1}X_{3,2}) \cdot F^{-1} \\
X_{5,2} &= X_{2,1}X_{3,2}X_{4,2}Y_{5,1}(Y_{5,1} - Y_{2,1}) \cdot (Y_{4,1} - Y_{3,1}) \cdot F^{-1} \qquad \text{mit} \\
F &= Y_{4,1}X_{3,2}X_{2,1}Y_{2,1}Y_{3,1} - Y_{4,1}X_{3,2}X_{2,1}Y_{5,1}Y_{3,1} - Y_{4,1}Y_{2,1}X_{4,1}Y_{3,1}X_{3,2} + Y_{5,1}^2Y_{2,1}X_{4,2}X_{3,1} \\
&\quad + Y_{4,1}X_{3,2}X_{2,1}Y_{5,1}^2 + Y_{2,1}X_{3,2}X_{4,1}Y_{5,1}Y_{4,1} - Y_{3,1}X_{4,2}X_{2,1}Y_{2,1}Y_{4,1} - Y_{2,1}X_{4,2}X_{3,1}Y_{5,1}Y_{3,1} \\
&\quad - X_{2,1}Y_{5,1}^2Y_{3,1}X_{4,2} - Y_{2,1}X_{4,2}X_{3,1}Y_{5,1}Y_{4,1} + Y_{4,1}Y_{2,1}X_{4,2}Y_{3,1}X_{3,1} + Y_{3,1}X_{4,2}X_{2,1}Y_{5,1}Y_{4,1} \\
&\quad - X_{3,2}Y_{5,1}^2Y_{2,1}X_{4,1} - Y_{4,1}X_{3,2}X_{2,1}Y_{2,1}Y_{5,1} + Y_{2,1}X_{3,2}X_{4,1}Y_{5,1}Y_{3,1} + X_{2,1}Y_{2,1}Y_{3,1}X_{4,2}Y_{5,1}
\end{aligned}$$

erfüllt sind. Wir können nun leicht überprüfen, ob es sich tatsächlich um einen architektonisch singulären Manipulator handelt, indem wir diese Ausdrücke für $X_{5,1}$ und $X_{5,2}$ in $\mathbf{J}$ einsetzen. Es zeigt sich, dass die Gleichung tatsächlich erfüllt ist. Da die ersten fünf Beine stets die Trägergerade von $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ und $\mathbf{Y}_5$ schneiden, müssen sie daher nun stets einem parabolischen Netz angehören.

Wir wollen nun eine geometrische Interpretation für diesen Fall angeben. Wir können $Y_{5,1} = t$ als Parameter der Trägergeraden der fünf Plattformankerpunkte ansehen. Die zwei Bedingungen ordnen nun jedem Parameterwert einen eindeutigen Punkt $\mathbf{X}(t) = (F : F \cdot X_{5,1} : F \cdot X_{5,2} : 0) = (X_0(t) : X_1(t) : X_2(t) : 0)$ zu. $\mathbf{X}(t)$ ist nun aber die Parameterdarstellung eines Kegelschnitts, woraus nun zusammenfassend gilt, dass jeder eigentliche Punkt der Trägergeraden eindeutig auf einen Punkt dieses Kegelschnitts abgebildet

wird. Da die Abbildung, die durch die zwei Bedingungen vermittelt wird, auch stetig ist, gehören nun alle Geraden $(1 : Y_{5,1} : 0 : 0) \vee (X_0(t) : X_1(t) : X_2(t) : 0)$ einer Regelfläche an. Aus dem im nächsten Abschnitt bewiesenen Satz 3.11 folgt, dass $\Lambda^5 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \cdot \Lambda^i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt, was nun bedeutet, dass man alle Geraden der Regelfläche als Beine dem Manipulator hinzufügen kann, ohne die Selbstbewegung zu stören. Löst man $F = 0$ nach $Y_{5,1}$, so erhält man die Punkte der Trägergeraden, die auf die Fernpunkte des Kegelschnitts, falls sie existieren, abgebildet werden. In der Praxis kommen diese Punkte nicht als Plattformankerpunkte des fünften Beines in Frage.

Somit können wir für die Berechnung der Selbstbewegung die Gleichung Λ^5 weglassen, was nun dem Entfernen des fünften Beines der Stewart Gough Plattform gleichkommt. Wenn wir nun, wie im Algorithmus beschrieben, $\mathcal{H}_5$ berechnen, erhalten wir ein Polynom vom Grad 20, von dem sich der Faktor $(d_0^2 + d_1^2)^2$ abspalten lässt.

Wir wollen nun zeigen, dass die von Husty und Karger in [11] angeführte Liste nicht komplett ist, indem wir einen weiteren Fall angeben. Dieser wirft natürlich die Frage auf, ob bei der Analyse der Gleichung **J** von Husty und Karger noch mehr Fälle übersehen worden sind, was leicht möglich ist, da diese, wie schon zuvor einmal erwähnt, weit über 100 000 Terme besitzt. Es wird daher vielleicht noch einmal nötig sein, **J** zu analysieren oder andere Zugänge für die Lösung dieses Problems zu finden, um Gewissheit zu erhalten, dass es sich bei dem folgenden Fall um den einzigen handelt, der übersehen worden ist.

8.Fall Es seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ jeweils kollinear und außerdem sei $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ und $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_4$. Dann liegt der Schnittpunkt der ersten zwei Beine stets in der Ebene, die durch das dritte und vierte Bein aufgespannt wird, und umgekehrt. Wenn die beiden Ebenen ident sind, also wenn die Trägergeraden der Basis- und Plattformpunkte einander schneiden, dann liegen diese vier Beine in einem Geradenfeld. Sind jedoch die beiden Ebenen voneinander verschieden, so liegen $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ und $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{Y}_4$ auf der Schnittgeraden dieser, was ein Kriterium für singuläre Lagen ist, wie wir uns im vorigen Abschnitt überlegt haben. Aus dem im nächsten Abschnitt bewiesenen Satz 3.11 folgt, dass $\Lambda^4 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot \Lambda^i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt, was nun bedeutet, dass man für die Berechnung der Selbstbewegung wiederum das vierte Bein weglassen kann. Somit repräsentiert $\mathcal{H}_4$ die einparametrige Selbstbewegung des architektonisch singulären Manipulators. Wenn wir nun, wie im Algorithmus beschrieben, $\mathcal{H}_4^{20}$ berechnen, erhalten wir ein Polynom vom Grad 20, und somit vollführt dieser Manipulator genauso wie der im Fall 1 eine Selbstbewegung von maximalen Grad.

Hier besteht wiederum der denkbare Unterfall, dass das fünfte Bein stets dem Geradenbüschel angehört, das durch das erste und zweite Bein bzw. durch das dritte und vierte Bein aufgespannt wird, und es sich somit um einen architektonisch singulären Manipulator mit ebener Plattform und Basis handelt. Wir wollen jedoch diesen Fall aus gegebenem Anlass gleich an dieser Stelle betrachten. Da wir nun wiederum zwei Beine, und zwar das vierte und das fünfte, weglassen können, hat diese Plattform wiederum eine zweiparametrige Selbstbewegung, die im Raum der Studyparameter durch das Polynom $\mathcal{S}_{236}$ vom Grad 8 repräsentiert wird.

Bemerkung 3.5. Wir wollen für die restliche Diplomarbeit davon ausgehen, dass der zuletzt angeführte Fall die Liste aller architektonisch singulären Manipulatoren mit nicht ebener Plattform und Basis wirklich komplettiert.

3.3.2 Architektonisch singuläre Manipulatoren mit ebener Basis und Plattform

Natürlich ist die Stewart Gough Plattform auch in den vorigen 8 Fälle architektonisch singulär, wenn alle Plattformankerpunkte und Basisankerpunkte in einer Ebene liegen. Wir wollen noch eine weitere Stewart Gough Plattform mit ebener Plattform und Basis nennen, die trivialerweise architektonisch singulär ist.

• Angenommen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ und $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5$ liegen jeweils kollinear. Dann ist es klar, dass die ersten fünf Beine stets einem hyperbolischen Netz angehören, da sie stets die Trägergeraden ihrer Basis- bzw. Plattformankerpunkte schneiden. Durch die Vorgabe der ersten vier Beinlängen ist die Lage der Trägergeraden der Plattformankerpunkt gegenüber jener der Basisankerpunkte bis auf eine Drehung um diese bereits bestimmt. Somit kann die Länge des fünften Beines nicht mehr beliebig gewählt werden, da ansonsten der Manipulator nicht zusammengebaut werden kann. Deshalb können wir für die Berechnung der Selbstbewegung wiederum den fünfbeinigen Manipulator, der durch die Wegnahme des fünften Beines entsteht, betrachten. Das Ergebnis für die Selbstbewegung haben wir schon indirekt in

dem Kapitel 'Sonderfälle des Algorithmus, Teil I, Fall 1a' angegeben. Es handelt sich bei $\mathcal{H}_5$ um ein Polynom vom Grad 8, das nun unsere Selbstbewegung repräsentiert.

Bemerkung 3.6.

Husty und Karger liefern in [11] für diesen Fall sowie für die Fälle 1, 2, 5 und 7 dieselben Grade für die Mannigfaltigkeiten im Raum der Studyparameter, die die jeweiligen Selbstbewegungen repräsentieren, ohne jedoch eine allgemeine Vorgangsweise für deren Berechnung, wie es in dieser Arbeit geschehen ist, anzugeben. In den restlichen Fällen wird in [11] überhaupt keine Aussage über den Grad dieser Mannigfaltigkeiten getätigt. Dies alles zeigt auch, wie gut sich der in dieser Diplomarbeit beschriebene Algorithmus für die Berechnung der Selbstbewegungen eignet.

Es existieren jedoch neben diesem trivialen Fall noch eine Reihe von architektonisch singulären Stewart Gough Plattformen mit ebener Plattform und Basis. Jedoch können diese Plattformen nur noch architektonisch singulär sein, indem alle sechs Geraden einem linearen Komplex angehören, ohne dass bereits fünf Geraden in einem Netz liegen, woraus folgt, dass diese Manipulatoren nur mehr einen unkontrollierbaren Freiheitsgrad und somit eine einparametrige Selbstbewegung besitzen können. Denn würde es noch einen weiteren solchen Fall geben, der in unserer Aufzählung nicht erfasst wurde, so würde daraus folgen, dass man die Liste in 3.3.1 um einen neunten Fall erweitern könnte. Wir gehen jedoch davon aus, dass diese Aufzählung vollständig ist. Mick und Röschel gaben in [23] und [28] ein geometrisches Kriterium für ebene architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen an, das hier aus Gründen der Vollständigkeit genannt werden sollte:

Satz 3.10. *Eine Stewart Gough Plattform mit ebener Plattform und Basis ist genau dann und nur dann architektonisch singulär, wenn die Punktepaare* $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}$ *vierfach konjugiert sind bezüglich einer dreidimensionalen Mannigaltigkeit von Korrelationen.*

Wir wollen den von Mick und Röschel in [23] und [28] gegebenen Beweis hier nicht nachvollziehen, da er dem dieser Diplomarbeit angedachten Rahmen sprengen würde. Es sei nur bemerkt, dass der Beweis auf dem Faktum basiert, dass reguläre lineare Komplexe unter nicht singulären Kollineationen wiederum auf reguläre lineare Komplexe abgebildet werden. Dieses Ergebnis folgt direkt aus dem im Laufe dieser Arbeit bewiesenen Satz 3.5.

Satz 3.11. *Die Aussage aus Satz 3.10 ist äquivalent mit der folgenden. Eine Stewart Gough Plattform mit ebener Plattform und Basis ist genau dann und nur dann architektonisch singulär, wenn im Raum der Studyparameter die nachstehende Bedingung erfüllt ist:*

$$\Lambda^6 = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \cdot \Lambda^i \qquad \textit{mit} \qquad \Lambda^i \ \textit{laut (2.3) und} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir jetzt auch die einparametrige Selbstbewegung von jenen architektonisch singulären Manipulatoren berechnen, die Satz 3.10 genügen und die wir bislang in der Arbeit noch nicht explizit angeführt haben. Da das Gleichungssystem der Λ^i mit $i = 1, .., 6$ redundant ist, die Gleichungen sind sogar linear abhängig, können wir wiederum nur den entsprechenden fünfbeinigen Manipulator betrachten und dessen Selbstbewegung untersuchen. Wie bereits bekannt ist, wird diese im allgemeinen durch eine Kurve vom Grad 20 im Raum der Studyparameter repräsentiert. Es sei zu allen bisherigen Fällen noch bemerkt, dass die Kurven im P^7, die die Selbstbewegungen darstellen, nur endlich viele reelle Lösungen besitzen können und deshalb oft nur eine theoretische Selbstbewegung existiert.

Beweis:

Wir wollen zuerst einmal das von Mick und Röschel in Satz 3.10 gegebene Kriterium analytisch fassen. Dazu schreiben wir nun allgemein eine Korrelation an, die die Plattformankerpunkte $(1 : X_{i,1} : X_{i,2})$ auf Geraden $(u_{i,0} : u_{i,1} : u_{i,2})$ in der Plattform abbildet:

$$\begin{pmatrix} u_{i,0} \\ u_{i,1} \\ u_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X_{i,1} \\ X_{i,2} \end{pmatrix}.$$

Da ja die Plattformankerpunkte $(1 : Y_{i,1} : Y_{i,2})$ auf der Geraden $(u_{i,0} : u_{i,1} : u_{i,2})$ liegen müssen, ergeben sich die folgenden sechs Bedingungen für die neuen Einträge in der Koordinatenmatrix:

$$u_{i,0} + u_{i,1}Y_{i,1} + u_{i,2}Y_{i,2} = 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., 6.$$

Im allgemeinen sind diese sechs linearen Gleichungen in den a_{mn} linear unabhängig, womit durch diese sechs Bedingungen auch sechs Einträge der Matrix bestimmt sind. Da wir mit homogenen Koordinaten rechnen, sind von den verbleibenden drei Einträgen nur mehr zwei wesentlich, woraus folgt, dass die Punktepaare $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}$ stets dreifach konjugiert sind bezüglich einer zweidimensionalen Mannigaltigkeit von Korrelationen. Nun ist es aber klar, was das analytische Kriterium für architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen mit ebener Plattform und Basis sein muss, nämlich, dass die sechs Bedingungen linear abhängig sind. Wählen wir die Koordinatensysteme in Plattform und Basis mit

$$\mathbf{X}_1 = (1:0:0) \quad \mathbf{X}_2 = (1:X_{2,1}:0) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Y}_1 = (1:0:0) \quad \mathbf{Y}_2 = (1:Y_{2,1}:0)$$

so können wir die analytische Bedingung auch, wie folgt, formulieren:

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X_{2,1} & 0 & Y_{2,1} & X_{2,1}Y_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X_{3,1} & X_{3,2} & Y_{3,1} & X_{3,1}Y_{3,1} & X_{3,2}Y_{3,1} & Y_{3,2} & X_{3,1}Y_{3,2} & X_{3,2}Y_{3,2} \\ 1 & X_{4,1} & X_{4,2} & Y_{4,1} & X_{4,1}Y_{4,1} & X_{4,2}Y_{4,1} & Y_{4,2} & X_{4,1}Y_{4,2} & X_{4,2}Y_{4,2} \\ 1 & X_{5,1} & X_{5,2} & Y_{5,1} & X_{5,1}Y_{5,1} & X_{5,2}Y_{5,1} & Y_{5,2} & X_{5,1}Y_{5,2} & X_{5,2}Y_{5,2} \\ 1 & X_{6,1} & X_{6,2} & Y_{6,1} & X_{6,1}Y_{6,1} & X_{6,2}Y_{6,1} & Y_{6,2} & X_{6,1}Y_{6,2} & X_{6,2}Y_{6,2} \end{pmatrix} < 6. \tag{3.6}$$

Diese Matrix wird die Schlüsselrolle in unserer Argumentation spielen, jedoch sei der Leser für den endgültigen Beweis auf das nächste Kapitel vertröstet, in dem wir das gewünschte Ergebnis nebenbei erhalten werden.

Kapitel 4

Redundante Stewart Gough Plattformen

4.1 Einleitende Gedanken

Um die singulären Lagen zu vermeiden, die einen unkontrollierbaren Freiheitsgrad der Plattform nach sich ziehen, kann man zu der ursprünglichen Stewart Gough Plattform ein siebentes Bein hinzufügen. Im Allgemeinen hat die so entstandene Plattform bei beliebiger Wahl der sieben Beinlängen keine Lösung für die Vorwärtskinematik. Somit muss die Länge des siebenten Beines bestimmten Bedingungen genügen, damit die Plattform überhaupt zusammengebaut werden kann und eine Lösung für die Vorwärtskinematik existiert. Natürlich ist in der Praxis die Steuerung eines siebenbeinigen Manipulators schwieriger, da die Beinlänge eines Beines immer von den Längen der anderen sechs abhängig ist. Das Prinzip kann man sich so vorstellen, dass man das Schubgelenk des siebenten Beines locker lässt und die Plattform wie üblich über die Veränderung der Beinlängen der ersten sechs Beine steuert. Kommt man nun jedoch in die Nähe einer Position, in der sich die ersten sechs Beine in einer singulären Lage mit einem unkontrollierbaren Freiheitsgrad befinden, so übertaucht man diese gefährliche Stelle, indem man nun die Plattform zum Beispiel über die Längenveränderung des $1., 2., 3., 4., 5.$ und $7.$ Beines steuert und das Schubgelenk des sechsten Beines lockert. Dies hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn die ersten fünf Beine nicht in einem Netz liegen, ansonsten sind einfach sechs andere Beine zu wählen. Um die richtigen sechs Beine für die Steuerung des Manipulators auszuwählen, wäre es notwendig, die in Kapitel 3 angesprochenen Klassen von singulären Lagen zu kennen.

Jedoch kann es passieren, dass man den Basisankerpunkt und den Plattformankerpunkt des siebenten Beines so unglücklich wählt, dass, wenn immer die ersten sechs Beine in einem linearen Komplex liegen, auch automatisch das siebente Bein diesem angehört. Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn die Vorwärtskinematik des siebenbeinigen Manipulators stets mit der des ursprünglichen Manipulators übereinstimmt. Das bedeutet nun umgelegt auf den Raum der Studyparameter, dass Λ^7 im Ideal der anderen sechs Quadriken Λ^i mit $i = 1, .., 6$ liegen muss, woraus

$$\Lambda^7 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \cdot \Lambda^i \tag{4.1}$$

folgt. Da die Λ^7 wiederum eine Quadrik sein muss, kann λ_i nur aus $\mathbb{R}$ sein oder man könnte auch anders argumentieren und sagen, dass λ_i nicht von den $d_j, \widehat{d}_j$ abhängig sein kann, da die Vorwärtskinematik des siebenbeinigen Manipulators stets mit der der ursprünglichen Stewart Gough Plattform übereinstimmen soll. Wir wollen uns in Folge mit Hilfe dieser Gleichung die nicht brauchbaren Ankerpunkte des siebenten Beines berechnen.

4.2 Berechnung

Wir wollen für die weiter Arbeit den Basisankerpunkt des siebenten Beines bezüglich des Rastkoordinatensystems mit $\mathbf{X}_7 = (X_{7,1}, X_{7,2}, X_{7,3})$ bezeichnen, den zugehörigen Plattformankerpunkt bezüglich desselben Systems mit $\mathbf{Y}_7 = (Y_{7,1}, Y_{7,2}, Y_{7,3})$, und die Länge des siebenten Beines mit R_7 ansetzen.

Wir können nun durch Koeffizientenvergleich aus der Gleichung (4.1) und unter Berücksichtigung von (2.3) die folgenden 17 Gleichungen gewinnen:

$$\Gamma_{\widehat{d}_0^2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i - 1 = 0 \tag{4.2}$$

$$\Gamma_{d_0^2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (C_i - 2X_{i,1}Y_{i,1} - 2X_{i,2}Y_{i,2} - 2X_{i,3}Y_{i,3}) - C_7 + 2X_{7,1}Y_{7,1} + 2X_{7,2}Y_{7,2} + 2X_{7,3}Y_{7,3} \tag{4.3}$$

$$\Gamma_{d_1^2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (C_i - 2X_{i,1}Y_{i,1} + 2X_{i,2}Y_{i,2} + 2X_{i,3}Y_{i,3}) - C_7 + 2X_{7,1}Y_{7,1} - 2X_{7,2}Y_{7,2} - 2X_{7,3}Y_{7,3} \tag{4.4}$$

$$\Gamma_{d_2^2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (C_i + 2X_{i,1}Y_{i,1} - 2X_{i,2}Y_{i,2} + 2X_{i,3}Y_{i,3}) - C_7 - 2X_{7,1}Y_{7,1} + 2X_{7,2}Y_{7,2} - 2X_{7,3}Y_{7,3} \tag{4.5}$$

$$\Gamma_{d_3^2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (C_i + 2X_{i,1}Y_{i,1} + 2X_{i,2}Y_{i,2} - 2X_{i,3}Y_{i,3}) - C_7 - 2X_{7,1}Y_{7,1} - 2X_{7,2}Y_{7,2} + 2X_{7,3}Y_{7,3} \tag{4.6}$$

$$\Gamma_{d_0 d_1} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,2}Y_{i,3} - X_{i,3}Y_{i,2}) + X_{7,3}Y_{7,2} - X_{7,2}Y_{7,3} \tag{4.7}$$

$$\Gamma_{d_0 d_2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,3}Y_{i,1} - X_{i,1}Y_{i,3}) - X_{7,3}Y_{7,1} + X_{7,1}Y_{7,3} \tag{4.8}$$

$$\Gamma_{d_0 d_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,1}Y_{i,2} - X_{i,2}Y_{i,1}) + X_{7,2}Y_{7,1} - X_{7,1}Y_{7,2} \tag{4.9}$$

$$\Gamma_{d_1 d_2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,1}Y_{i,2} + X_{i,2}Y_{i,1}) - X_{7,2}Y_{7,1} - X_{7,1}Y_{7,2} \tag{4.10}$$

$$\Gamma_{d_1 d_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,3}Y_{i,1} + X_{i,1}Y_{i,3}) - X_{7,3}Y_{7,1} - X_{7,1}Y_{7,3} \tag{4.11}$$

$$\Gamma_{d_2 d_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,2}Y_{i,3} + X_{i,3}Y_{i,2}) - X_{7,3}Y_{7,2} - X_{7,2}Y_{7,3} \tag{4.12}$$

$$\Gamma_{d_0 \widehat{d}_1} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,1} - Y_{i,1}) - X_{i,1} + Y_{i,1} \tag{4.13}$$

$$\Gamma_{d_0 \widehat{d}_2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,2} - Y_{i,2}) - X_{i,2} + Y_{i,2} \tag{4.14}$$

$$\Gamma_{d_0 \widehat{d}_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,3} - Y_{i,3}) - X_{i,3} + Y_{i,3} \tag{4.15}$$

$$\Gamma_{d_1 \widehat{d}_2} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,3} + Y_{i,3}) - X_{i,3} - Y_{i,3} \tag{4.16}$$

$$\Gamma_{d_1 \widehat{d}_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,2} + Y_{i,2}) - X_{i,2} - Y_{i,2} \tag{4.17}$$

$$\Gamma_{d_2 \widehat{d}_3} : \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (X_{i,1} + Y_{i,1}) - X_{i,1} - Y_{i,1} \tag{4.18}$$

mit $C_i = X_{i,1}^2 + X_{i,2}^2 + X_{i,3}^2 + Y_{i,1}^2 + Y_{i,2}^2 + Y_{i,3}^2 - R_i^2$. Somit haben wir 17 Gleichungen in den 13 Unbekannten $\lambda_1, .., \lambda_6, X_{7,1}, .., Y_{7,3}, R_7$, woraus folgt, dass es im allgemeinen Fall keine Lösung für das Problem gibt. Daher können wir sagen, dass für allgemeine Stewart Gough Plattformen keine solchen gefährlichen Ankerpunkte für das siebente Bein existieren. Anders verhält es sich jedoch bei jenen Manipulatoren, bei denen die Plattform sowie die Basis eben sind und die wir daher in Folge näher untersuchen wollen.

4.2.1 Manipulatoren mit ebener Plattform und Basis

Für die genauere Analyse dieses Falles wollen wir nun die folgende Notation veranschlagen:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Gamma_{d_0d_2} + \Gamma_{d_1d_3}, & D_1 &= \Gamma_{d_0d_2} - \Gamma_{d_1d_3}, & S_4 &= \Gamma_{d_2\widehat{d}_3} + \Gamma_{d_0\widehat{d}_1}, & D_4 &= \Gamma_{d_2\widehat{d}_3} - \Gamma_{d_0\widehat{d}_1},\\
S_2 &= \Gamma_{d_0d_1} + \Gamma_{d_2d_3}, & D_2 &= \Gamma_{d_0d_1} - \Gamma_{d_2d_3}, & S_5 &= \Gamma_{d_1\widehat{d}_3} + \Gamma_{d_0\widehat{d}_2}, & D_5 &= \Gamma_{d_1\widehat{d}_3} - \Gamma_{d_0\widehat{d}_2},\\
S_3 &= \Gamma_{d_1d_2} + \Gamma_{d_0d_3}, & D_3 &= \Gamma_{d_1d_2} - \Gamma_{d_0d_3}, & S_6 &= \Gamma_{d_1\widehat{d}_2} + \Gamma_{d_0\widehat{d}_3}, & D_6 &= \Gamma_{d_1\widehat{d}_2} - \Gamma_{d_0\widehat{d}_3}.
\end{aligned}$$

Da ja alle Plattformankerpunkte beziehungsweise Basisankerpunkte je in einer Ebene liegen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X_{i,3} = Y_{i,3} = 0$ mit $i = 1, .., 6$ voraussetzen. Aus den Gleichungen S_1, S_2, D_1 und D_2 erkennen wir, dass diese bereits durch die spezielle Wahl der Koordinatensysteme erfüllt sind. Für die Gleichungen S_6 und D_6 erhalten wir nun

$$S_6 = -2X_{7,3} = 0 \qquad \text{und} \qquad D_6 = -2Y_{7,3} = 0,$$

woraus $X_{7,3} = Y_{7,3} = 0$ folgt. Somit haben wir nur noch 11 Gleichungen in 9 Unbekannten zu lösen. Außerdem gilt die Beziehung

$$\Gamma_{d_3^2} = \Gamma_{d_2^2} + \Gamma_{d_1^2} - \Gamma_{d_0^2},$$

womit wir die Gleichung $\Gamma_{d_3^2}$ nicht mehr berücksichtigen müssen. Da wir ja die Basisankerpunkte und die Plattformankerpunkte des siebenten Beines so bestimmen wollen, dass die Vorwärtskinematik des siebenbeinigen Manipulators stets mit der des ursprünglichen Manipulators übereinstimmt, dürfen wir nur Bedingungen an die Geometrie des Manipulators stellen. Im nächsten Schritt eliminieren wir daher die Beinlängen, die ja nur mehr in den Gleichungen $\Gamma_{d_0^2}, \Gamma_{d_1^2}$ und $\Gamma_{d_2^2}$ vorkommen, wie folgt. Wir berechnen uns die Unbekannte R_7 aus $\Gamma_{d_0^2}$ und setzen den erhaltenen Ausdruck für R_7 in die verbleibenden zwei Gleichungen ein. Diese sind somit nicht mehr von den R_i abhängig, und wir erhalten schlussendlich ein System aus 9 Gleichungen $(S_3, .., S_5, S_3, .., S_5, \Gamma_{\widehat{d}_0^2}, \Gamma_{d_1^2}, \Gamma_{d_2^2})$ in den 10 Unbekannten $\lambda_1, .., \lambda_6, X_{7,1}, X_{7,2}, Y_{7,1}, Y_{7,2}$. Wenn wir jetzt noch das Gang- bzw. das Rastkoordinatensystem so wählen, dass

$$\mathbf{X}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{X}_2 = (X_{2,1}, 0, 0) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Y}_1 = (0,0,0), \qquad \mathbf{Y}_2 = (X_{2,1}, 0, 0)$$

gilt, dann können wir das Gleichungssystem, wie folgt, anschreiben:

$$\begin{array}{c}
\Gamma_{\widehat{d}_0^2} \rightarrow \\
S_4 \rightarrow \\
S_5 \rightarrow \\
D_4 \rightarrow \\
\Gamma_{d_2^2} \rightarrow \\
S_3 \rightarrow \\
D_5 \rightarrow \\
D_3 \rightarrow \\
\Gamma_{d_1^2} \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & X_{2,1} & X_{3,1} & X_{4,1} & X_{5,1} & X_{6,1} \\
0 & 0 & X_{3,2} & X_{4,2} & X_{5,2} & X_{6,2} \\
0 & Y_{2,1} & Y_{3,1} & Y_{4,1} & Y_{5,1} & Y_{6,1} \\
0 & X_{2,1}Y_{2,1} & X_{3,1}Y_{3,1} & X_{4,1}Y_{4,1} & X_{5,1}Y_{5,1} & X_{6,1}Y_{6,1} \\
0 & 0 & X_{3,2}Y_{3,1} & X_{4,2}Y_{4,1} & X_{5,2}Y_{5,1} & X_{6,2}Y_{6,1} \\
0 & 0 & Y_{3,2} & Y_{4,2} & Y_{5,2} & Y_{6,2} \\
0 & 0 & X_{3,1}Y_{3,2} & X_{4,1}Y_{4,2} & X_{5,1}Y_{5,2} & X_{6,1}Y_{6,2} \\
0 & 0 & X_{3,2}Y_{3,2} & X_{4,2}Y_{4,2} & X_{5,2}Y_{5,2} & X_{6,2}Y_{6,2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\ X_{7,1} \\ X_{7,2} \\ Y_{7,1} \\ X_{7,1}Y_{7,1} \\ X_{7,2}Y_{7,1} \\ Y_{7,2} \\ X_{7,1}Y_{7,2} \\ X_{7,2}Y_{7,2}
\end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

An dieser Stelle wollen wir jetzt den Beweis von Satz 3.11 vollenden. Wenn wir nun nicht von der Gleichung (4.1), sondern von $\Lambda^6 = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \cdot \Lambda^i$ ausgegangen und analog wie zuvor beschrieben vorgegangen wären, dann hätten wir konsequenterweise das folgende Gleichungssystem erhalten:

$$\begin{array}{c}
\Gamma_{\widehat{d}_0^2} \rightarrow \\
S_4 \rightarrow \\
S_5 \rightarrow \\
D_4 \rightarrow \\
\Gamma_{d_2^2} \rightarrow \\
S_3 \rightarrow \\
D_5 \rightarrow \\
D_3 \rightarrow \\
\Gamma_{d_1^2} \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & X_{2,1} & X_{3,1} & X_{4,1} & X_{5,1} \\
0 & 0 & X_{3,2} & X_{4,2} & X_{5,2} \\
0 & Y_{2,1} & Y_{3,1} & Y_{4,1} & Y_{5,1} \\
0 & X_{2,1}Y_{2,1} & X_{3,1}Y_{3,1} & X_{4,1}Y_{4,1} & X_{5,1}Y_{5,1} \\
0 & 0 & X_{3,2}Y_{3,1} & X_{4,2}Y_{4,1} & X_{5,2}Y_{5,1} \\
0 & 0 & Y_{3,2} & Y_{4,2} & Y_{5,2} \\
0 & 0 & X_{3,1}Y_{3,2} & X_{4,1}Y_{4,2} & X_{5,1}Y_{5,2} \\
0 & 0 & X_{3,2}Y_{3,2} & X_{4,2}Y_{4,2} & X_{5,2}Y_{5,2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\ X_{6,1} \\ X_{6,2} \\ Y_{6,1} \\ X_{6,1}Y_{6,1} \\ X_{6,2}Y_{6,1} \\ Y_{6,2} \\ X_{6,1}Y_{6,2} \\ X_{6,2}Y_{6,2}
\end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Angenommen der Rang der Koeffizientenmatrix ist maximal, also gleich fünf, dann ist das Gleichungsystem nur dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ebenfalls fünf ist. Wenn nun

aber der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als fünf ist, dann gilt bereits $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i \cdot \Lambda^i = 0$, womit nach entsprechender Umnummerierung auch die Bedingung aus Satz 3.11 erfüllt ist. Somit kann man sagen, dass die Bedingung aus Satz 3.11 genau dann und nur dann erfüllt ist, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix kleiner als sechs ist. Dies entspricht aber genau der analytischen Bedingung, dass die Punktepaare $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_1\}$ vierfach konjugiert sind bezüglich einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit an Korrelationen, weil die erweiterte Koeffizientenmatrix mit der transponierten Matrix aus (3.6) übereinstimmt. □

Konstruktion architektonisch singulärer Manipulatoren mit ebener Plattform und Basis

Mit Hilfe des Gleichungssystems (4.20) ist es uns jetzt auch leicht möglich, architektonisch singuläre Stewart Gough Plattformen mit ebener Plattform und Basis, wie folgt, zu konstruieren. Wir können von einem fünfbeinigen Manipulator ausgehen und die Ankerpunkte des sechsten Beines so bestimmen, dass die Vorwärtskinematik des fünfbeinigen Manipulators mit der des sechsbeinigen übereinstimmt. Somit haben wir im Gleichungssystem (4.20) neun Unbekannte $(\lambda_1, .., \lambda_5, X_{6,1}, .., Y_{6,2})$. Wenn nun keine fünf linear unabhängigen Gleichungen existieren, dann bedeutet dies, dass die Λ^i mit $i = 1, ..5$ bereits linear abhängig sind und somit der Manipulator unabhängig von der Wahl des sechsten Beines architektonisch singulär ist. Dies kann nur dann passieren, wenn man die Ankerpunkte der ersten fünf Beine so wählt, dass sie die Bedingungen, eines dafür in Frage kommenden, explziet angefühten Falls aus Abschnitt 3.3 erfüllen. Deshalb können wir voraussetzen, dass fünf linear unabhängige Gleichungen existieren, aus denen wir uns λ_i mit $i = 1, .., 5$ berechnen können. Diese setzen wir anschließend in die verbleibenden vier Gleichungen ein und erhalten das folgende System:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{6,1} \\ Y_{6,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

wobei die a_{ij} und b_i mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 1, 2$ Funktionen in den Unbekannten $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ sind. Im Allgemeinen sind diese vier Gleichungen linear unabhängig. Nun hängen aber die a_{ij} von $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ ab, woraus folgt, dass wir jene Basisankerpunkte von vornherein als Lösung ausschließen müssen, die die sechs Gleichungen

$$det \begin{pmatrix} a_{u1} & a_{u2} \\ a_{v1} & a_{v2} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{mit} \qquad u < v \quad u, v \in \{1, 2, 3, 4\}$$

erfüllen. Denn für jeden Ankerpunkt dieser Menge, die wir in Folge mit $\mathcal{W}$ bezeichnen wollen, kann der entsprechende Plattformankerpunkt nicht berechnet werden. Da wir ja die vier Gleichungen als linear unabhängig angenommen hatten, können wir somit aus den ersten zwei Gleichungen $Y_{6,1}$ und $Y_{6,2}$ in Abhängigkeit von $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ berechnen. Setzen wir nun die soeben erhaltenen Ausdrücke in die verbleibenden zwei Gleichungen ein, so erhalten wir zwei kubische Polynome in den Unbekannten $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$. Diese zwei Gleichungen korrespondieren mit zwei ebenen Kubiken in der Basisebene. Die Lösung unseres Problems stellen somit die gemeinsamen Punkte dieser zwei Kubiken dar, von denen bekanntlich neun über $\mathbb{C}$ existieren. Da natürlich auch der Manipulator architektonisch singulär ist, wenn das sechste Bein mit einem der anderen fünf zusammenfällt, gehen beide Kubiken durch die Basisankerpunkte der fünf Beine. Somit kann es maximal nur noch vier reelle Schnittpunkte der beiden Kubiken geben, die als Lösung unseres Problems in Frage kommen. Bevor wir die entsprechenden Plattformankerpunkte durch Rückeinsetzen berechnen, ist noch zu überprüfen, ob erhaltene Lösungen in $\mathcal{W}$ enthalten sind und somit ausgeschlossen werden müssen. Wir wollen uns in Folge überlegen, dass von den vier verbleibenden Lösungen stets drei in $\mathcal{W}$ liegen. Mielczarek, Husty und Hiller schreiben in [24] sinngemäß das folgende: "Wenn die Koeffiientenmatrix aus (4.19) einen kleineren Rang als 6 hat, dann sind die Λ^i mit $i = 1, .., 6$ linear abhängig und das bedeutet, dass die Plattform eine Selbstbewegung hat. In diesem Fall ist es möglich, dass es eine diskrete Anzahl von Lösungen gibt oder eine einparametrige Mannigfaltigkeit." Nach Satz 3.10 und Satz 3.11 folgt jedoch, dass der Manipulator nicht nur eine Selbstbewegung hat, sondern es sich dabei um eine architektonisch singuläre Plattform handeln muss. Somit können wir auf ein Ergebnis von Röschel und Mick [28] zurückgreifen, das wie folgt lautet:"...*In generel there exist exactly six pairs of four fold conjugate points* $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i$ *mit* $i = 1, ..6$." Die Autoren begründen diese Aussage auf die folgende Art: Seien $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ vier linear unabhängige Korrelationen von der Basis auf die Plattform

oder umgekehrt. Dann liegen die dreifach konjugierten Punkte bezüglich $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ und $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4$ je auf einer Kubik. Es existieren über $\mathbb{C}$ neun Schnittpunkte, wobei stets drei dieser gemeinsamen Punkte die singlären Punkte der quadratischen Verwandtschaft, der bezüglich κ_1 und κ_2 konjugierten Punkte, sind.

Es besteht noch die Möglichkeit, dass die quadratische Verwandtschaft zu einer Kollineation ausartet. Wir wollen uns für diesen Fall auch die Mächtigkeit der Lösungsmenge, wie folgt, überlegen. Die Punkte $\mathbf{X} = (X_0 : X_1 : X_2)$ und $\mathbf{Y} = (Y_0 : Y_1 : Y_2)$ sind ganau dann konjugiert bezüglich κ_α, wenn

$$\sum_{i,k} a_{ik}^{\alpha} X_i Y_k = 0 \qquad \text{mit} \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

gilt. Nun existiert genau dann eine Lösung für $\mathbf{Y} = (Y_0 : Y_1 : Y_2)$, wenn die

$$det \begin{pmatrix} a_{ik}^1 X_i \\ a_{ik}^2 X_i \\ a_{ik}^3 X_i \end{pmatrix} = 0$$

ist. Diese Bedingung führt nun auf eine kubische Gleichung für X_i. Wenn wir nun die zwei Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} (\sum_i a_{i0}^1 X_i) Y_0 + (\sum_i a_{i1}^1 X_i) Y_1 + (\sum_i a_{i2}^1 X_i) Y_2 & = & 0 \quad \text{und} \\ (\sum_i a_{i0}^2 X_i) Y_0 + (\sum_i a_{i1}^2 X_i) Y_1 + (\sum_i a_{i2}^2 X_i) Y_2 & = & 0 \end{array}$$

betrachten, dann erhalten wir nach der Cramerschen Regel die Lösungen für Y_0, Y_1 und Y_2 als die folgenden Unterdeterminanten:

$$\begin{array}{rcl} Y_0 & = & (\sum_i a_{i1}^1 X_i)(\sum_j a_{j2}^2 X_j) - (\sum_i a_{i2}^1 X_i)(\sum_j a_{j1}^2 X_j), \\ Y_1 & = & (\sum_i a_{i0}^1 X_i)(\sum_j a_{j2}^2 X_j) - (\sum_i a_{i2}^1 X_i)(\sum_j a_{j0}^2 X_j), \\ Y_2 & = & (\sum_i a_{i0}^1 X_i)(\sum_j a_{j1}^2 X_j) - (\sum_i a_{i1}^1 X_i)(\sum_j a_{j0}^2 X_j). \end{array}$$

Falls sich ein gemeinsamer Linearfaktor aus Y_0, Y_1 und Y_2 herauskürzen lässt, erhält man eine Kollineation und es bleibt

$$Y_i = \sum_j k_{ij} X_j.$$

Ein Beispiel dafür wäre die Polarität an zwei Kegelschnitten, die einander in zwei Punkten berühren. Die dreifach konjugierten Punkte bezüglich κ_1, κ_2 und κ_3 liegen nun nicht auf einer Kubik sondern auf einem Kegelschnitt, da

$$\sum_{i,k} a_{ik}^3 X_i (\sum_j k_{ij} X_j) = 0 \qquad \text{quadratisch in } X_i \text{ ist.}$$

Diesen Kegelschnitt müssen wir jetzt noch mit der Kubik schneiden, auf der zum Beispiel die dreifach konjugierten Punkte bezüglich κ_2, κ_3 und κ_4 liegen. Wir erhalten somit $2 \cdot 3 = 6$ Lösungen.

Aus den gesammelten Ergebnissen folgt nun für die oben vorgeführte Konstruktion von architektonisch singulären Manipulatoren, dass von den vier verbleibenden Lösungen stets drei in $\mathcal{W}$ liegen müssen und somit die Behauptung in [24], dass es nämlich eine diskrete Anzahl von Lösungen geben kann, falsch ist.

Es könnte auch der Fall eintreten, dass das Gleichungssystem aus (4.21) redundant ist. Angenommen das System reduziert sich auf die ersten drei Gleichungen in (4.21), dann können wir uns wiederum $Y_{6,1}$ und $Y_{6,2}$ in Abhängigkeit von $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ berechnen und in die verbleibende Gleichung einsetzten. Somit können wir eine einparametrige Menge von Beinen zu dem fünfbeinigen Manipulator addieren, ohne die Vowärtskinematik zu verändern. Die möglichen Basisankerpunkte liegen nun nicht auf einer Kubik sondern höchstens auf einem Kegelschnitt. Aufgrund von Satz 3.11 können wir nun wiederum auf das Ergebnis von Mick und Röschel zurückgreifen und uns den Sachverhalt, wie folgt, überlegen. Wir gehen wieder von vier linear unabhängigen Korrelationen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ aus. Wir betrachten nun die dreifach konjugierten Punkte bezüglich $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ und $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4$, die ja jeweils auf einer Kubik liegen müssen. Nun können aber die Kubiken nicht ident sein, da ansonsten κ_3 und κ_4 linear abhängig wären. Somit kann es im bestmöglichen Fall passieren, dass die zwei Kubiken je in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen, und die zwei Kegelschnitte ident sind, wobei die Geraden voneinander verschieden sein müssen.

Wir wollen nun als Beispiel dazu von einem fünfbeinigen Manipulator ausgehen, dessen Basis und Plattform affin äquivalent sind, denn dies sind die einzigen Manipulatoren, für die wir mit Hilfe des gegebenen Algorithmus die Selbstbewegung nicht berechnen können.

Beispiel. Die fünf Basisankerpunkte sind nun mit den sechs Plattformankerpunkten, wie folgt, gekoppelt:

$$\begin{pmatrix} Y_{i,1} \\ Y_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i,1} \\ X_{i,2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad i = 1, .., 5. \tag{4.22}$$

Wenn wir nun, wie beschrieben, die Matrix aus (4.20) berechnen, sehen wir, dass diese im allgemeinen Fall den Rang 5 hat. Wir wählen nun die fünf linear unabhängigen Gleichungen $S_4, S_5, D_3, \Gamma_{\widehat{d_0^2}}$ und $\Gamma_{d_2^2}$ aus und berechnen uns $\lambda_1, .., \lambda_5$. Setzen wir nun die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen D_4 und D_5 ein, so erhalten wir

$$Y_{6,1} = a_1 X_{6,1} + a_2 X_{6,2} \qquad \text{und} \qquad Y_{6,2} = a_3 X_{6,2},$$

woraus folgt, dass die Zuordnung zwischen Basisankerpunkt des möglichen sechsten Beines und dessen Plattformankerpunkt auch der Affinität unterliegt. Setzt man nun alle erhaltenen Informationen in die verbleibenden zwei Gleichungen ein, so erhält man nur noch zwei quadratische Gleichungen in den Unbekannten $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$, mit der folgenden Gestalt:

$$\Gamma_{d_1^2} : \; a_1 a_3 \mathcal{Q} = 0 \qquad S_3 : \; a_1 a_2 a_3 \mathcal{Q} = 0$$

wobei $\mathcal{Q}$ unabhängig von den a_i mit $i = 1, 2, 3$ ist. Der Kegelschnitt, der durch $\mathcal{Q}$ repräsentiert wird, muss auch durch die Basisankerpunkte der übrigen fünf Beine hindurchgehen und somit ist dieser schon eindeutig bestimmt. Somit können wir zusammenfassend feststellen, dass ein ebener Manipulator, dessen Basis und Plattform durch eine reguläre Affinität aufeinander bezogen sind, genau dann und nur dann architektonisch singulär ist, wenn die sechs Basisankerpunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Wenn nun die Affinität singulär ist, dann liegen bereits alle fünf Plattformankerunkte auf einer Geraden, und man kann trivialerweise jedes Bein, dessen Plattformankerpunkt auch auf dieser liegt, hinzufügen. Dieses Ergebnis liefern auch Kong und Gosselin in der Arbeit [18], in der auch ein Algorithmus für die Berechnung der Selbstbewegung im regulären Fall angegeben wird, auf den ich an dieser Stelle verweisen möchte.

Rückkehr zum ursprünglichen Problem:

Nachdem wir nun die Erzeugung architektonisch singulärer Manipulatoren abgeschlossen haben, wollen wir uns nun an die Lösung des Gleichungssystems (4.19) machen. Wir wollen nun jenen Fall betrachten, in dem die Koeffizientenmatrix maximalen Rang hat, denn wenn dies nicht der Fall ist, dann handelt es sich laut Satz 3.10 um eine architektonisch singuläre Stewart Gough Plattform und diese wurden bereits abgehandelt. Somit existieren jetzt sechs linear unabhängige Gleichungen, die wir nach $\lambda_1, .., \lambda_6$ auflösen. Die so erhaltenen Ausdrücke setzen wir in die verbleibenden drei Gleichungen ein, woraus das folgende Gleichungssystem resultiert;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{6,1} \\ Y_{6,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

wobei die a_{ij} und b_i mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 1, 2$ wiederum Funktionen in den Unbekannten $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ sind. Daher müssen wir wieder jene Basisankerpunkte von vornherein als Lösung ausschließen, die allen drei quadratischen Gleichungen

$$det \begin{pmatrix} a_{u1} & a_{u2} \\ a_{v1} & a_{v2} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{mit} \qquad u < v \quad u, v \in \{1, 2, 3\} \tag{4.24}$$

genügen. Denn für jeden Ankerpunkt dieser Menge, die wir in Folge wieder mit $\mathcal{W}$ bezeichnen wollen, kann der entsprechende Plattformankerpunkt nicht berechnet werden. Im allgemeinen sind die drei erhaltenen Gleichungen linear unabhängig, und man kann sich wiederum aus zweien $Y_{6,1}$ und $Y_{6,2}$ in Abhängigkeit von $X_{6,1}$ und $X_{6,2}$ berechnen und in die verbleibende Gleichung einsetzen. Man erhält ein Polynom vom Grad 3, das wieder eine Kubik in der Basisebene repräsentiert. Nun kommt jeder Punkt der Kubik mit Ausnahme der Punkte, die auch in $\mathcal{W}$ liegen, als Basisankerpunkt des siebenten Beines in Frage. Da die Abbildung, die den Basisankerpunkten die zugehörigen Plattformankerpunkte zuordnet, laut (4.23) linear ist, müssen daher diese ebenfalls auf einer Kubik zum Liegen kommen. Wir wollen in Folge ein Beispiel für diesen Fall angeben.

Beispiel. Wählt man die Koordinaten der Montagepunkte in Basis und Plattform, wie folgt,

$$\begin{array}{llllll} X_{1,1}=0 & X_{2,1}=2 & X_{3,1}=-1 & X_{4,1}=3 & X_{5,1}=1 & X_{6,1}=2 \\ X_{1,2}=0 & X_{2,2}=0 & X_{3,2}=0 & X_{4,2}=3 & X_{5,2}=4 & X_{6,2}=1 \\ Y_{1,1}=0 & Y_{2,1}=3 & Y_{3,1}=-3 & Y_{4,1}=2 & Y_{5,1}=5 & Y_{6,1}=6 \\ Y_{1,2}=0 & Y_{2,2}=0 & Y_{3,2}=7 & Y_{4,2}=3 & Y_{5,2}=4 & Y_{6,2}=-1 \end{array}$$

und geht man dann, wie beschrieben vor, so erhält man die Kubik in Abbildung 3.1.2, deren Punkte als mögliche Basisankerpunkte des siebenten Beines in Frage kommen. In dieser Graphik sind außerdem die drei Punkte $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{W}$ eingezeichnet, die eine Ausnahme darstellen, weil sie allen drei Gleichungen aus (4.24), die hier als Kegelschnitte dargestellt sind, genügen.

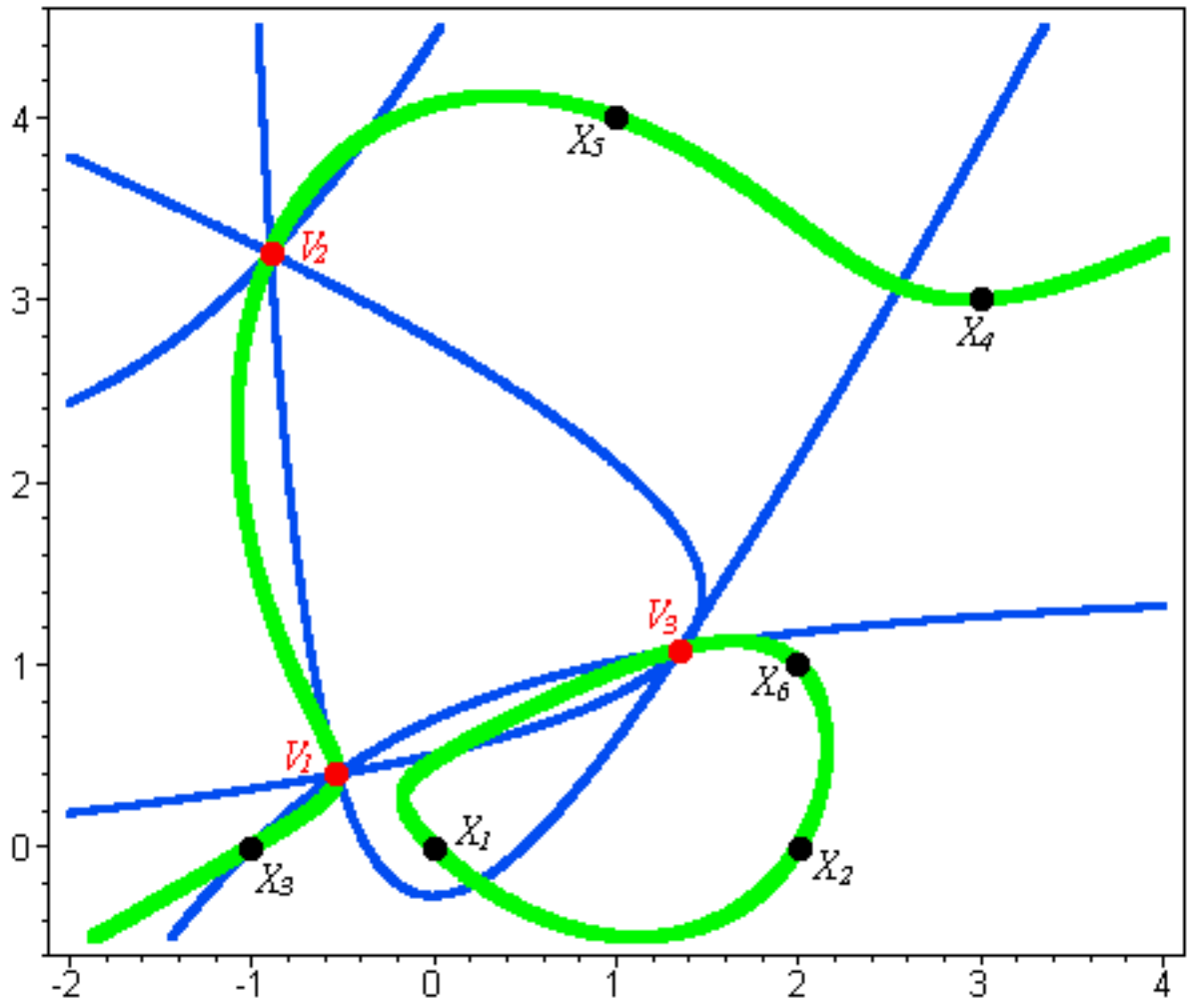

Abbildung 4.1: Ort der möglichen Basisankerpunkte des siebenten Beines

Es könnte jedoch wiederum der Fall eintreten, dass man beim Einseten von $Y_{6,1}$ und $Y_{6,2}$ in die verbleibende Gleichung auf Identitäten kommt. Somit ist das Gleichungssystem redundant und jeder Punkt der Basis, der nicht in $\mathcal{W}$ enthalten ist, kommt als Ankerpunkt des siebenten Beines in Frage. Wir erhalten also eine zweidimensionale Lösungsmannigfaltigkeit. Wir wollen zum Abschluss noch jene Manipulatoren betrachten, deren Basis und Plattform affin äquivalent sind, denn es wird sich zeigen, dass jedes Element dieser Klasse von Stewart Gough Plattformen ein Beispiel für den zuletzt angeführten Fall darstellt.

Beispiel. Angenommen, die sechs Basisankerpunkte sind nun mit den sechs Plattformankerpunkten durch die Affinität in (4.22) gekoppelt, dann sind die sechs Gleichungen $S_3, D_3, S_4, S_5, \Gamma_{\widehat{d_0^2}}$ und $\Gamma_{d_2^2}$ linear unabhängig. Berechnet man sich aus diesen nun die λ_i mit $i = 1, .., 6$ und setzt man die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen D_4 und D_5 ein, so erhält man

$$Y_{7,1} = a_1 X_{7,1} + a_2 X_{7,2} \qquad \text{und} \qquad Y_{7,2} = a_3 X_{7,2},$$

woraus folgt, dass die Zuordnung zwischen dem Basisankerpunkt des möglichen siebenten Beines und dessen Plattformankerpunkt auch der Affinität unterliegt. Wenn wir nun in die verbleibende Gleichung einsetzen, sehen wir, dass diese erfüllt ist. Außerdem ist $\mathcal{W}$ stets die leere Menge, womit wir nun der Stewart Gough Plattform eine zweiparametrige Menge von Beinen hinzufügen können, ohne dessen Vorwärtskinematik zu verändern.

Anhang A

Quellenverzeichnis

A.1 Literaturverzeichnis

[1] Blaschke W. Kinematik und Quaternionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

[2] Bottema O. and Roth B. Theoretical Kinematics. Dover Publications, 1990, ISBN 0-486-66346-9.

[3] Cox D., Little J. and O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. Springer Verlag, 1992, ISBN 0-387-97847-X.

[4] Dasgupta B. and Mruthyunjaya T.S. The Stewart platform manipulator: a review. In Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp. 15-40, 2000.

[5] Dietmaier P. The Stewart-Gough platform of general geometry can have 40 real postures. In Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, pp. 7-16, J. Lenarcic and M.L. Husty (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, ISBN 0-7923-5169-X.

[6] Faugere J.C. and Lazard D. Combinatorial classes of parallel manipulators. In Mechanism and Machine Theory, Vol. 30, No. 6, pp. 765-776, 1995.

[7] Hunt K.H. and Primrose E.J.F. Assembly configurations of some in-parallel-actuated manipulators. In Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, No. 1, pp. 31-42, 1993.

[8] Husty M.L. An algorithm for solving the direct kinematic of Stewart-Gough-type platforms. Research Report TR-CIM-94-7, Universite McGill, Montreal 1994.

[9] Husty M.L. An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms. In Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, No. 4, pp. 365-380, 1996.

[10] Husty M.L., Karger A., Sachs H. and Steinhilper W. Kinematik und Robotik. Springer Verlag, 1997, ISBN 3-540-63181-X.

[11] Husty M.L. and Karger A. Architecture Singular Parallel Manipulators and their self-motions. In Advances in Robot Kinematics, pp. 355-364, J. Lenarcic and M.M. Stanisic (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2000, ISBN 0-7923-6426-0.

[12] Husty M.L. and Karger A. Architecturally Singular Planar Stewart-Gough Platforms. Proceedings of the 10th workshop RAAD, Vienna 2001, 6 pages (CD-Proceedings).

[13] Husty M.L. and Karger A. Self Motions of Stewart-Gough-Platforms (An overview). Proceedings of the workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City 2002 (October 3-4), editor: C.M. Gosselin and I. Ebert-Uphoff.

[14] Husty M.L., Mielczarek S. and Hiller M. Redundant spatial Stewart-Gough platforms with maximal Forward kinematics solution set. In Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications, pp. 147-154, J. Lenarcic, F. Thomas (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2002, ISSBN 1-4020-0696-9.

[15] Innocenti C. Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform. Proceedings of DETC98, ASME Design Engineering Technical Conference, Atlanta 1998 (September 13-16).

[16] Innocenti C. Forward kinematics of a 6-6 fully-parallel manipulator with congruent base and platform. In Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, pp. 137-146, J. Lenarcic and M.L. Husty (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, ISBN 0-7923-5169-X.

[17] Karger A. and Husty M.L. Self-motion of Griffis-Duffy Type parallel manipulators. Proceedings of IEEE International Conference on robotics and Automation, Vol. 2, pp. 7-12, 2002.

[18] Kong X. and Gosselin C.M. Generation of Architecturally Singular 6-SPS Parallel Manipulators with Linearly Related Planar Platforms. In Computational Kinematics, pp. 67-75, F.C. Park and C.C. Iurascu (eds.), 2001.

[19] Ma O. and Angeles J. Architecture Singularities of parallel manipulators. International Journal of Robotics and Automation, Vol. 7, No. 1, 1992.

[20] Mavroidis C. Completely Specified Displacements of a Rigid Body and their Application in the Direct Kinematics of In-Parallel Mechanisms. In ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta 1998 (13-16 September).

[21] Merlet J-M. Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry. In the International Journal of Robotics Research, Vol. 8, No. 5, pp. 45-56, October 1989.

[22] Merlet J-M. Parallel Robots. Kluwer Academic Publishers, 1999, ISBN 1-4020-0385-4.

[23] Mick S. and Röschel O. Geometry & architecturally shaky platforms. In Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, pp. 455-464, J. Lenarcic and M.L. Husty (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, ISBN 0-7923-5169-X.

[24] Mielczarek S., Husty M.L. and Hiller M. Designing a redundant Stewart-Gough platform with a maximal forward kinematics solution set. private communication.

[25] Pernkopf F. Workspace analysis of Stewart-Gough platforms. Doctoral Thesis, Institute of Engineering Mathematics, Geometry and Computer Sciences, University of Innsbruck, September 2003.

[26] Pottmann H. and Wallner J. Computational Line Geometry. Springer Verlag, 2001, ISBN 3-540-42058-4.

[27] Ronga F. and Vust T. Stewart platforms without computers? In Real Analytic and Algebraic Geometry, Proceedings of the International Conference, Trento 1992, pp. 196-212, Walter de Grayter 1995.

[28] Röschel O. and Mick S. Characterisation of architecturally shaky platforms. In Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, pp. 465-474, J. Lenarcic and M.L. Husty (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, ISBN 0-7923-5169-X.

[29] Roth B. The kinematics of motion through finitely separated positions. ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 591-597, September 1967.

[30] Sommese A.J., Verschelde J. and Wampler C.W. Advances in Polynomial Continuation for Solving Problems in Kinematics. In ASME Design Engineering Technical Conferences, Paper DETC2002/ MECH34254 (CD-Proceedings), Montreal 2002 (29 September - 2 October).

[31] Stachel H. Skriptum zur Vorlesung Projektive Geometrie. 1999-2001, TU Wien, Institut für Geometrie.

[32] Stachel H. Skriptum zur Vorlesung Algebraische Kurven. 2001, TU Wien, Institut für Geometrie.

[33] Stachel H. Skriptum zur Vorlesung Höhere Kinematik. 2001-2002, TU Wien, Institut für Geometrie.

[34] Study E. Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsbericht der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 104. Sitzung, 21. Dezember 1912, 36-60.

[35] Wampler C.W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using soma coordinates. In Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, No. 3, pp. 331-337, 1996.

[36] Weiss E.A. Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. Teubner Verlag, Leipzig 1935.

[37] Yang J. and Geng Z.J. Closed Form Forward Kinematics Solution to a Class of Hexapod Robots. In IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 14, No. 3, pp. 503-508, 1998.

A.2 Abbildungsverzeichnis

Die Abbildungen 1.2, 2.1 und 2.2 wurden der Doktorarbeit [25] von Pernkopf F. entnommen und die Abbildungen 2.3 und 2.4 stammen aus der Arbeit [5] von P. Dietmaier. Die Abbildung 4.1 wurde vom Verfasser selbst mit Hilfe von Maple generiert.