

# DISSERTATION

## Membrantragflächen in instationärer Potentialströmung

*ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von*

o.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Franz G. Rammerstorfer  
E317

Institut für Leichtbau und Flugzeugbau

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenbau

von

Dipl.-Ing. Nikolaus FRIEDL

Matr.Nr.: 8626734

Scheibenbergstr.8/9

1180 Wien

Wien, im Oktober 2002

*Nikolaus Friedl*

## Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, das die Analyse von membranartigen Tragflächen in instationärer Potentialströmung ermöglicht. Einige typische Anwendungen dieser Tragflächen sind Hängegleiter, Drachen und Bootsegel. Im Falle des Hängegleiters verfügt der Flügel über eine geringe Torsionssteifigkeit. Der Anstellwinkelverlauf entlang der Spannweite wird daher sowohl vom nichtlinearen Verhalten der Membranstruktur als auch von den aerodynamischen Lasten beeinflusst. Diese hängen wiederum von der Anstellwinkelverteilung ab. Das System wird somit von der Fluid-Struktur-Koppelung dominiert.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird ein neuartiges Wirbelflächenverfahren vorgestellt, das speziell für die Membran-Fluid-Interaktion bei instationärer Potentialströmung entwickelt wurde. Durch die spezielle Wahl von Wirbelverteilungen kann das gleiche Analysenetz wie jenes für das strukturelle Problem herangezogen werden, welches mit der nichtlinearen Methode der Finiten Elemente behandelt wird. Das Verfahren liefert neben den aerodynamischen Lasten auch die aerodynamische Laststeifigkeits- und die aerodynamische Dämpfungsmatrix. Auf diese Weise kann die Fluid-Struktur-Koppelung in verschiedenen Varianten erfolgen, wobei auch eine simultane Lösung möglich ist.

Der zweite Teil behandelt strukturelle Aspekte der Modellierung von Membrantragflächen. Spezielle Elemente und Prozeduren werden dabei erörtert.

Der dritte Teil umfasst die Formulierung des gekoppelten Problems. Im stationären Fall werden drei Varianten erörtert. Die Erweiterung für instationäre Probleme erfolgt schließlich mit dem Schema, das die simultane Lösung ermöglicht.

Abschließend wird im vierten Teil die Modellierung und Analyse eines Hängegleiters gezeigt, der instationäre Flugzustände durchläuft.

## Abstract

In this work a method will be described, which allows the simulation of membrane wings in unsteady potential flow. Typical examples for membrane wings are hang-gliders, kites and sails of boats. In the case of hang-gliders the wing has very little torsional stiffness. The wing shape, i.e. the angle of attack along the wingspan, is governed by both the nonlinear membrane structure and the aerodynamic loads, which in turn depend on the geometry of the structure. Therefore this system is dominated by strong fluid-structure interaction.

The first part describes the development of a novel higher order vorticity panel procedure for solving the unsteady potential flow problem. The procedure uses the same mesh as the nonlinear Finite Element code, which has advantages with respect to the coupling schemes. Beside aerodynamic loads the fluid module also calculates the load derivatives with respect to displacements and velocities. This feature allows the simultaneous solution of the coupled unsteady problem.

The second part deals with the structural problem, introducing special Finite Elements and procedures for the simulation of membrane wings.

The third part shows different coupling schemes for the stationary problem. The simultaneous scheme is then extended to unsteady problems.

The last chapter describes the model and flight tests of an hang-glider in unsteady motion.

## Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. F. G. Rammerstorfer, Vorstand des Instituts für Leichtbau und Flugzeugbau, für die Möglichkeit danken, dieses interdisziplinäre Thema während meiner Tätigkeit am Institut zu bearbeiten. In zahlreichen Diskussionen hat er wertvolle Impulse für den Fortschritt dieser Arbeit geliefert.

Weiters gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. P. Gittler, der sich bereit erklärt hat, das Koreferat zu übernehmen.

Für die Unterstützung bei inhaltlichen- sowie programmiertechnischen Aspekten möchte ich Dr. H. J. Böhm herzlich danken.

Darüber hinaus danke ich dem gesamten ILFB-Team für das humorvolle und kameradschaftliche Arbeitsklima.

Ein besonderes Dankeschön verdient meine Frau Farah für ihre liebevolle Unterstützung und Geduld.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Membranflügel . . . . .	1
1.1.1	Mögliche Verfahren zur Strömungsanalyse . . . . .	2
1.1.2	Die Methode der Finiten Element . . . . .	5
1.1.3	Derzeitige Verfahren zur Behandlung des gekoppelten Problems . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Aerodynamisches Modell</b>	<b>8</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	8
2.2	Ausgangspunkte für ein neues Wirbelflächenverfahren . . . . .	10
2.2.1	Mehrfach-Traglinienverfahren nach <i>Horstmann</i> . . . . .	10
2.2.2	Wirbel-Panel-Methode nach <i>Mracek</i> . . . . .	11
2.3	Aufbau des neuen Tragflächenverfahrens . . . . .	13
2.4	Ergänzungen zur Diskretisierung des Flügels . . . . .	17
2.5	Die gebundene Zirkulation . . . . .	18
2.5.1	Von Wirbellinie zu Dichteverteilung . . . . .	18
2.5.2	Freiheitsgrade und Wirbellinien . . . . .	20
2.5.3	Berechnung von $\Gamma$ aus $\Gamma'$ . . . . .	21
2.5.4	Interpolation der Wirbeldichten innerhalb der Elemente . . . . .	23
2.6	Die freie Zirkulation . . . . .	33
2.6.1	Im Element freigesetzte Zirkulation $\gamma^f$ . . . . .	37

2.6.2	Durchlaufende Zirkulation . . . . .	40
2.7	Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten . . . . .	44
2.7.1	Induktion eines einzelnen Dreiecks . . . . .	44
2.8	Ablauf der Induktionsberechnung . . . . .	46
2.9	Stationäre Kutta-Bedingung . . . . .	47
2.10	Bestimmungsgleichung für die Singularitäten . . . . .	47
2.11	Aerodynamische Kräfte . . . . .	49
2.12	Induzierter Widerstand . . . . .	53
2.12.1	Die Ermittlung des induzierten Widerstands am Ort des Flügels . . . . .	53
2.12.2	Berechnung des induzierten Widerstands . . . . .	59
2.13	Aerodynamische Beiwerte . . . . .	61
2.14	Beispiele und stationäre Vergleichsrechnungen . . . . .	61
2.14.1	Konvergenzstudie . . . . .	61
2.14.2	Gerader Flügel . . . . .	62
2.14.3	Gepfeilter Flügel . . . . .	65
2.14.4	ILFB-Nurflügel: NIKWING . . . . .	66
2.15	Erweiterung auf instationäre Strömungen . . . . .	68
2.16	Unterschiede zur Formulierung des stationären Problems . . . . .	69
2.17	Kinematische Strömungsbedingung bei instationären Problemen . . . . .	69
2.18	Instationäre Kutta-Bedingung . . . . .	70
2.19	Instationärer Nachlauf . . . . .	73
2.19.1	Nachlauf für Flutteranalysen . . . . .	73
2.19.2	Nachlauf bei allgemeiner Flugbewegung . . . . .	74
2.20	Instationäre aerodynamisch Kräfte . . . . .	75
2.20.1	Grundgleichungen . . . . .	75
2.20.2	Konzept der instationären gebundenen Zirkulation . . . . .	77
2.20.3	Zeitliche Änderung des Geschwindigkeitspotentials . . . . .	79

2.20.4	Auswertung des instationären Auftriebs . . . . .	82
2.20.5	Instationärer induzierter Widerstand . . . . .	83
2.20.6	Instationäre aerodynamische Beiwerte . . . . .	84
2.21	Beispiele und instationäre Vergleichsrechnungen . . . . .	84
2.21.1	Schlagende Tragfläche, 2D . . . . .	84
2.21.2	Wagner-Problem, 2D . . . . .	86
2.21.3	Dreidimensionale Drehschwingung eines Flügels . . . . .	87
2.22	Daten für Fluid-Struktur-Interaktion . . . . .	89
2.22.1	Auslenkung einer Platte . . . . .	90
2.22.2	Aerodynamische Laststeifigkeitsmatrix . . . . .	91
2.22.3	Aerodynamische Dämpfungsmatrix . . . . .	94
2.23	Prediktor-Korrektor-Schema . . . . .	96
2.23.1	Konzept des Prediktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	97
2.23.2	Stabilität des Verfahrens . . . . .	99
2.23.3	Simulation einer Koppelung: schlagender Flügel . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Strukturanalyse</b>	<b>102</b>
3.1	Einleitung . . . . .	102
3.2	Formulierung eines Membranelementes mit Faltenbildung . . . . .	103
3.2.1	Isoparametrisches Element . . . . .	103
3.2.2	Spannungs- und Verzerrungsgrößen . . . . .	104
3.2.3	Einfaches Faltenmodell für isotrope Membranen . . . . .	106
3.2.4	Faltenmodell nach Roddeman . . . . .	114
3.2.5	Elementsteifigkeit und innere Kräfte . . . . .	121
3.2.6	Membranstabilisierung . . . . .	124
3.2.7	Overlay . . . . .	124
3.3	Formulierung eines Balkenelementes für Membranflügel . . . . .	125

3.3.1	Anforderungen an das Element . . . . .	125
3.3.2	Formulierung des Balkenelementes für große Rotationen . . . . .	126
3.3.3	Vordeformation . . . . .	135
3.4	Slider . . . . .	136
3.4.1	Einleitung . . . . .	136
3.4.2	Multi Point Constraint: SLIDER . . . . .	137
3.5	Beispiel: Bespannter Bogen . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Fluid-Struktur-Interaktion</b>	<b>142</b>
4.1	Das stationäre Problem . . . . .	142
4.1.1	Steigerung aerodynamischer Lasten . . . . .	143
4.1.2	Indirekte Koppelung . . . . .	143
4.1.3	Quasi-simultane Koppelung . . . . .	144
4.1.4	Simultane Koppelung . . . . .	144
4.1.5	Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Koppelungen . . . . .	145
4.1.6	Vergleich mit VLM- und QCC-Verfahren . . . . .	147
4.2	Das instationäre Problem . . . . .	151
4.2.1	Das Newmark-Verfahren . . . . .	151
4.2.2	Artifizielle selbsterregte Membranschwingungen . . . . .	153
4.2.3	Generalized- $\alpha$ -Method . . . . .	157
4.2.4	Strukturelle Dämpfung . . . . .	159
4.2.5	Ablauf einer instationären gekoppelten Analyse . . . . .	160
4.2.6	Numerische Aspekte . . . . .	160
<b>5</b>	<b>Flugsimulation eines Hängegleiters</b>	<b>161</b>
5.1	Motivation . . . . .	161
5.2	Modellbildung . . . . .	161
5.2.1	Aufbau des Analysemodells . . . . .	161

5.2.2	Pilot . . . . .	166
5.2.3	Controler . . . . .	166
5.2.4	1DOF-Release . . . . .	167
5.3	Flugsimulation . . . . .	167
5.3.1	Ablauf der Analyse . . . . .	167
5.3.2	Instationäre Flugversuche . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>173</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	173
6.2	Ausblick . . . . .	175

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Membranflügel

Membranartige Tragflächen werden in erster Linie im Flug- bzw. im Segelsport eingesetzt. Beispiele der fliegenden Variante sind der konventionelle Hängegleiter oder auch die Gleitschirme. Im Segel- bzw. Surfsport werden ebenfalls bis auf sehr wenige Ausnahmen Membransegel für den Antrieb eingesetzt.

Ein wesentlicher Vorteil von Membransegeln liegt in ihrer variablen Geometrie, dem geringen Gewicht und damit auch in der einfachen Transportierbarkeit. Beispielsweise können konventionelle Hängegleiter in rund zwanzig Minuten für den Transport zerlegt und auf Autodächern oder auf Schiliften befördert werden. Ähnliches gilt natürlich auch für Gleitschirme, wobei deren Handhabung am Boden wesentlich einfacher ist, jedoch die Flugleistungen nicht mit den Hängegleitern mithalten können.

Eine weitere Eigenschaft von Membrantragflächen liegt in der geringen Steifigkeit bezüglich einer Belastung normal auf die Membranfläche. Bekanntlich verfügt eine ebene Membran über keinerlei Quersteifigkeit. Erst durch eine Auslenkung in Kombination mit der Ausbildung von Membrankräften können Querkräfte wie der aerodynamische Auftrieb aufgenommen werden. Die Quersteifigkeit der Membran ist somit von ihrer momentanen Belastung und ihrer Form abhängig. Die auftretenden Verformungen sind nicht mehr direkt proportional zu den angreifenden Kräften. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer nichtlinearen Struktursteifigkeit, welche auch im Zusammenhang mit numerischen Methoden als geometrische Steifigkeit bezeichnet wird.

Wegen der oben erwähnten geringen Quersteifigkeit führen beispielsweise aerodynamische Lasten an Hängegleitertragflächen häufig zu großen Auslenkungen bzw. Verformungen, die wiederum die Auftriebskräfte wesentlich beeinflussen. Dies bedeutet, dass die Form der Membrantragfläche neben den geometrischen und mechanischen Eigenschaften auch vom Strömungszustand abhängt. Umgekehrt können keine Aussagen über die Aerodynamik der Tragfläche gemacht werden, ohne die Struktursteifigkeit des Systems zu berücksichtigen. Diese gegenseitige Abhängigkeit wird als stark gekoppeltes Problem bezeichnet.

Um solche Systeme simulieren zu können, müssen Verfahren für das Fluid- sowie das Strukturproblem gefunden und Koppelungsalgorithmen formuliert werden. Damit lässt sich das Ziel dieser Arbeit definieren. Es soll ein effizientes Verfahren zur Analyse des instationären, gekoppelten Problems der Membrantragfläche entwickelt werden.

### 1.1.1 Mögliche Verfahren zur Strömungsanalyse

#### Vereinfachungen

Die Beschreibung der dreidimensionalen Strömung kann bei den hier anzutreffenden, unten beschriebenen Voraussetzungen am einfachsten mittels Potentialtheorie erfolgen. Das Fluid wird dabei als reibungsfrei und inkompressibel angenommen. Diese Vereinfachungen reduzieren den Berechnungsaufwand erheblich, was natürlich im Fall gekoppelter Systeme ein wichtiges Argument darstellt.

Die Flugmachzahl von Membrantragflächen sind in der Regel so gering, dass die Annahme der Inkompressibilität keine praktische Einschränkung mit sich bringt.

Die Vernachlässigung der Viskosität stellt eine viel gröbere Vereinfachung dar. Andererseits ist die Berechnung der Grenzschicht eines gepfeilten Flügel endlicher Spannweite für sich gesehen eine eigene Wissenschaft und sehr aufwendig. Der effizienteste Weg ist dabei der Einsatz eines Zonenmodells, wobei die Grenzschicht über eine Integralformulierung und die Außenströmung als Potentialströmung modelliert wird. Ein derartiges Verfahren wird von *Milewski* [22] vorgestellt, wobei eine simultane Koppelung beider Bereiche implementiert wurde. Ein Problem in Hinblick auf die Fluid-Struktur-Interaktion besteht jedoch darin, dass die Grenzschichtgleichungen und auch das Membranverhalten durch nichtlineare Gleichungen beschrieben werden, was für die Konvergenzeigenschaften des gekoppelten Systems mit Sicherheit problematisch ist. Für instationäre Probleme dreidimensionaler Tragflächen existieren keine im Rahmen dieser Arbeit einsetzbare und einfach zu imple-

mentierende Verfahren zur Berechnung der Grenzschicht. Eine Berücksichtigung für die Fluid-Struktur-Interaktion macht daher aus heutiger Sicht wenig Sinn. Ein Kriterium bei der Auswahl eines Verfahrens zur Strömungsanalyse stellt jedoch die Erweiterbarkeit des Verfahrens hinsichtlich der Berücksichtigung der Grenzschicht dar.

### Verfahren zur Lösung der Potentialgleichungen

Eine detaillierte Diskussion von Verfahren zur Berechnung der dreidimensionalen Potentialströmung ist in der Arbeit von *Horstmann* in [15] zu finden. Alle Verfahren arbeiten mit Singularitätenverteilungen am Ort der Tragfläche. Dabei werden die unterschiedlichen Vorgangsweisen hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten für einfache aerodynamische Entwurfszwecke durchleuchtet. Speziell die Genauigkeit der Verfahren bzw. eventuelle systematische Fehler in der Bestimmung von Auftriebsverteilungen oder induzierten Widerständen werden diskutiert. Diese Arbeit von *Horstmann* gibt deswegen wertvolle Hinweise für die Wahl eines geeigneten Verfahrens zur Berechnung des gekoppelten Problems, weil ähnliche Eigenschaften der Verfahren, wie zum Beispiel eine hohe Genauigkeit bei möglichst kleinen Analysemodellen, gesucht werden.

Eine Auflistung wesentlicher Eigenschaften für ein Verfahren zur Berechnung des Fluidproblems sind dabei

a.) *Membranflächen analysierbar*

Das Verfahren soll mit einer Singularitätenbelegung der Flügelmittelfläche arbeiten. Damit können Tragflächen mit moderater Profildicke und echte Membranflächen untersucht werden.

b.) *Große Verformungen und nichtlineare Effekte*

Wie bereits an früherer Stelle erwähnt, kommt es bei Membrantragflächen aufgrund der aerodynamischen Lasten zu starken Auslenkungen. Beispielsweise treten bei Hängegleitern Flügelverwindungen von bis zu 20 Grad auf.

c.) *Gleiche Diskretisierung für FEM und FDA (Quads)*

Die einfachste Form der Koppelung besteht im Austausch von Druckverteilungen bzw. Verschiebungsfeldern. Für eine intensivere Koppelung ist es von Vorteil, wenn beide Modelle die gleiche Diskretisierung verwenden.

d.) *Ausreichende Genauigkeit (induzierter Widerstand, Momentenbeiwerte)*

Eine ausreichende Genauigkeit in Hinblick auf den induzierten Widerstand ist wün-

schenswert. Ferner sollen in dieser Arbeit speziell Nurflügelkonfigurationen untersucht werden. Eine möglichst genaue Kenntnis der Momentenbeiwerte und somit des Auftriebsschwerpunktes ist dabei essentiell. Verfahren, die mit einer kontinuierlichen Verteilungen operieren, sind in der Regel genauer als Verfahren die diskrete Wirbel (Wirbelleiter, Mehrfach-Traglinienverfahren) einsetzen.

e.) *Sourcecode ohne Einschränkung verfügbar,*

Die Formulierung einer gekoppelten Prozedur erfordert gewisse Eingriffe in bestehende Programme. Dazu muss wiederum der Source-Code uneingeschränkt zur Verfügung stehen.

f.) *(Viscid-Inviscid-Interaction)*

Es soll zumindest die Möglichkeit bestehen, das Verfahren zu einem späteren Zeitpunkt um viskose Effekte zu erweitern. Um die Zunahme der Grenzschichtdicke in Flügelrichtung zu simulieren, müssen entlang der gesamten Tragfläche Queldichten verteilt sein (Virtual Outblow Concept, *Milewski* [22]). Eine flächenhafte Diskretisierung ist somit erforderlich.

g.) *Instationäre Formulierung*

Ein Ziel dieser Arbeit stellt die Analyse gekoppelter instationärer Probleme dar. Das zum Einsatz kommende Verfahren sollte daher auch instationäre Strömungen beschreiben können.

Um die Frage zu beantworten, wie gängige Verfahren die einzelnen Anforderungen erfüllen, wurde eine Bewertung durchgeführt und in Tabelle 1.1 zusammengefasst. Ein ”+” bedeutet, dass der entsprechende Punkt erfüllt ist. Ein ”-” hingegen zeigt, dass dieser Anforderung nicht entsprochen wird.

Wirbelleiterverfahren werden für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme häufig herangezogen. Allerdings sind der Genauigkeit dieser Verfahren bezüglich des induzierten Widerstandes Grenzen gesetzt, wie *Horstmann* in seiner Arbeit [15] zeigt.

Panelverfahren, die mit Quell- und Dipolverteilungen arbeiten, schneiden nach der Bewertung in Tabelle 1.1 zwar am besten ab, aber ihre Anwendung wird bei sehr dünnen Profilen bzw. bei Membranflächen problematisch. Die Elemente der Proflober- und Profilunterseite und damit auch ihre Kontrollpunkte rücken dabei sehr nahe zusammen, sodass die Integrale zur Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten singular werden können.

Die Vorticity-Panel-Methode nach *Mracek* wäre ebenfalls ein interessantes Verfahren. Eine Eigenheit dieser Methode ist jedoch, dass mehr Gleichungen erfüllt werden müssen, als

Tabelle 1.1: Bewertung verschiedener Verfahren zur Berechnung von Membranflügeln

Vorhandene Verfahren	a.)	b.)	c.)	d.)	e.)	f.)	g.)
Wirbelleiterverfahren z.B. <i>Lamar/Gloss</i> [19]	+	+	+	-	+/-	-	+
Standard Panel Verfahren <i>Geissler</i> [11]	-	+	+	+/-	+/-	+	+
Tragflächenverfahren <i>Truckenbrodt</i> [34]	+	-	-	+/-	+/-	-	-
Entwurfstraglinienverf. <i>Horstmann</i> [15]	+	-	+	+/-	+/-	-	-
Vorticity Panel <i>Mracek</i> [25]	+	+	+	-	+	+/-	+

Unbekannte vorhanden sind. Die gesuchte Wirbeldichtenverteilung wird durch eine Fehlerminimierung bestimmt. Für eine exakte Berechnung des induzierten Widerstandes ist diese Vorgangsweise nicht geeignet.

Da schließlich keines der oben diskutierten Verfahren optimale Voraussetzungen für die Analyse von Membranflächen bot, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Wirbel-Panel-Verfahren entwickelt. Es wurde speziell für instationäre Fluid-Struktur-Probleme konzipiert und ist in der Lage alle zuvor genannten Anforderungen zu erfüllen. Der erste Abschnitt dieser Arbeit skizziert dieses neue Wirbelflächenverfahren, das in weiterer Folge auch mit dem Namen *P4* bezeichnet wird.

### 1.1.2 Die Methode der Finiten Element

Für die Berechnung des Strukturverhaltens bietet sich die Methode der Finiten Elemente – auch in Kurzform FEM genannt – in der nichtlinearen Formulierung an. Das FE-Programm *CARINA* [1], eine Entwicklung des Institut für Leichtbau und Flugzeugbau der Technischen Universität Wien, wurde für diese Zwecke adaptiert. Eine ausführliche Darstellung der Methode der nichtlinearen Finiten Elemente kann bei *Bathe* [5], *Rammerstorfer* [30] und *Argyris et al.* [4] gefunden werden, wobei letzteres einen eigenen Abschnitt über nichtlineare dynamische Probleme enthält.

### 1.1.3 Derzeitige Verfahren zur Behandlung des gekoppelten Problems

Über die Analyse zweidimensionaler Probleme, d.h. ebenes Strömungsproblem gibt es zahlreiche Publikationen, die teilweise bereits vor 50 Jahren entstanden. Bezüglich der Simulation des dreidimensionalen Problems einer Membrantragfläche ist allerdings sehr wenig zu finden. Zwei verschiedene Ansätze zur Behandlung des gekoppelten Problems sind dabei erwähnenswert.

In [27] beschreibt *Nickel* ein einfaches Verfahren zur Berechnung von Membrantragflächen. Mit Hilfe der Prandtl'schen Traglinientheorie und einem Membranmodell, dessen Verformung durch die Auslenkung der Hinterkante beschrieben wird, erhält Nickel eine Integro-Differential-Gleichung des gekoppelten Systems. Die Lösung erfolgt dabei numerisch. Aufgrund der stark vereinfachten theoretischen Ansätze ist der Einsatzbereich des Verfahrens limitiert.

Ein rein numerisches Verfahren zur Analyse einer dreidimensionalen Hängegleitertragfläche wurde von *Jackson* und *Christie* in [16] vorgestellt. Das Fluidproblem bzw. die Verteilung der aerodynamischen Drücke wird dabei mittels eines Wirbelleiterverfahrens ermittelt. Die Drücke werden in weiterer Folge auf ein Finite Elemente Modell der Membranfläche aufgebracht und das dazugehörige Deformationsmuster ermittelt. Um den Einfluss der gegenseitigen Koppelung zu erfassen, muss für die veränderte Flügelgeometrie erneut das Fluidproblem gelöst werden. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis ein entsprechendes Konvergenzkriterium erfüllt ist. Diese Form der Koppelung kann als iterative Koppelung bezeichnet werden und stellt die häufigste Form eines Koppelungsschemas dar. Es gibt allerdings Problemstellungen, die mit diesem Algorithmus nicht zu einer konvergenten Lösung führen. In [16] wird die Membran mit einem linear elastischen Werkstoffgesetz modelliert. Die Faltenbildung steht dabei nicht im Mittelpunkt des Interesse.

Eine Weiterentwicklung dieses Schemas ist bei *Schoop et al.* [36] zu finden. Die Koppelung erfolgt zwar nachwievor über ein iteratives Schema, die Verfahren zur Bestimmung des Strömungsverhaltens sowie die Modellierung der Membran wurden jedoch erweitert. Zur Simulation einer lokalen Faltenbildung kommt dabei eine spezielle Elementformulierung zum Einsatz, die auf *Roddeman* [33] zurück geht. Zur Bestimmung der aerodynamischen Drücke wird ein modifiziertes Wirbelleiterverfahren mit optimierter Netzgeometrie verwendet. Die diskreten Wirbelstärken werden schließlich in kontinuierliche Druckverteilungen umgerechnet und auf das Strukturmodell aufgebracht. Das Verfahren wurde für die Analy-

se von Bootsegeln entwickelt. Nachteilig erscheint bei diesem Verfahren die Tatsache, dass einerseits Wirbelleiterverfahren zu systematischen Fehlern in der Auftriebsverteilung und damit im induzierten Widerstand führen können und dass das iterative Koppelungsschema nicht immer konvergiert.

Die Verfahren von *Nickel* [27] bzw. *Jackson* [16] sind nur für stationäre Probleme formuliert worden. Die Gruppe um *Schoop* arbeitet auch an einer instationären Formulierung, die auch näherungsweise die Rollbewegung des Bootes beinhaltet.

# Kapitel 2

## Aerodynamisches Modell

### 2.1 Grundlagen

Eine drehungsfreie inkompressible Strömung kann durch die Potential- bzw. Laplace-Gleichung beschrieben werden.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Ein wesentliches Merkmal von (2.1) stellt ihre Linearität dar. Damit wird eine Superposition von Lösungen möglich, und es gilt beispielsweise

$$\phi_1(x, y, z) = \phi_2(x, y, z) + \phi_3(x, y, z). \quad (2.2)$$

Der Gradient der skalaren Potentialfunktion  $\phi$  ergibt schließlich das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{u}(x, y, z) = \text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Dieses Geschwindigkeitsfeld setzt sich im stationären Fall zusammen aus einer konstanten Anströmung  $\vec{v}_\infty$  und der von der Tragfläche induzierten Störgeschwindigkeit  $\vec{w}(x, y, z)$ :

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{v}_\infty + \vec{w}(x, y, z). \quad (2.4)$$

Ein Potentialwirbel mit der Zirkulation  $\Gamma$  erfüllt die Potentialgleichung (2.1) und kann gleichzeitig für die Modellierung auftriebserzeugender Tragflächen herangezogen werden.

Eine ausführliche Beschreibung der Singularitätenverfahren findet sich bei *Keune/Burg* [18] oder *Schneider* [35]. Beispielsweise besteht das Prandtl'sche Modell zur Berechnung der Auftriebsverteilung einer Tragfläche endlicher Spannweite aus nur einem diskreten Wirbelfaden, der entlang der  $t/4$ -Linie des Flügels verläuft.

Die in einem Aufpunkt  $P_A$  induzierte Geschwindigkeit eines Wirbelstücks  $\Gamma d\vec{s}$  lautet

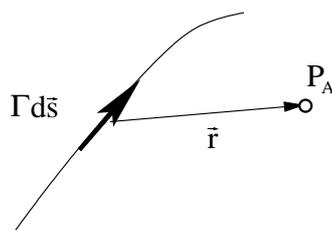


Abbildung 2.1: Induzierender Wirbel

$$w(x_A, y_A, z_A) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} \quad (2.5)$$

Der Vektor  $\vec{r}$  beschreibt dabei die relative Lage zwischen dem Aufpunkt  $P_A$  und dem induzierenden Wirbelstück, siehe dazu Abbildung 2.1.

Ein numerisches Verfahren zur Berechnung einer Tragflügelströmung kann sich somit darauf beschränken, eine geeignete Anordnung von Potentialwirbeln bzw. eine geeignete Verteilung von Wirbeldichten zu finden, die die erforderlichen Randbedingungen erfüllen. Diese lauten:

- 1.) Abklingen der Störgeschwindigkeit im Unendlichen:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} |\vec{w}| = 0 \quad (2.6)$$

- 2.) Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung an der Tragfläche (tangentielle Umströmung des Flügels):

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.7)$$

wobei  $\vec{n}$  den Normalvektor an der Tragfläche beschreibt.

## 2.2 Ausgangspunkte für ein neues Wirbelflächenverfahren

Das Mehrfach-Traglinienverfahren nach *Horstmann* [15] sowie das Wirbel-Panel-Verfahren von *Mracek* [26] dienten als Ausgangspunkte für die Formulierung eines neuen Tragflächenverfahrens. In den beiden folgenden Abschnitten werden daher beide Verfahren kurz umrissen und hinsichtlich der Formulierung eines nichtlinearen, instationären Tragflächenverfahrens bewertet.

### 2.2.1 Mehrfach-Traglinienverfahren nach *Horstmann*

Die grundlegende Idee von *Horstmann* war die Entwicklung eines Verfahrens, das mit geringem numerischen Aufwand möglichst genaue Ergebnisse für die Auftriebsverteilung und den induzierten Widerstand einer nichtplanaren Flügelanordnung liefert. Das Verfahren ist für Entwurfszwecke und Optimierungsaufgaben konzipiert worden und geht von einer linearen Theorie aus, siehe dazu *Schlichting/Truckenbrodt* [34]. Dies bedeutet, dass die abgehenden Wirbel entlang paralleler Linien abfließen und in der gleichen Ebene liegen wie die Tragflügelabschnitte in denen sie freigesetzt werden. Die Tragfläche wird somit in einem ersten Schritt durch ebene Flügelabschnitte ersetzt, deren Profilschwenkrichtung durch die oben erwähnten parallelen Linien definiert sind. In weiterer Folge wird der Tragflügel in Spalten und Reihen eingeteilt, die einerseits in Profilschwenkrichtung sowie andererseits in Spannweitenrichtung verlaufen. Die dabei entstehenden Rechtecke bzw. Parallelogramme werden als Elementarflügel bezeichnet. Auf der Viertellinie jedes Elementarflügels wird ein tragender Wirbel angeordnet, der den Auftrieb produziert. Der Verlauf seiner Wirbelstärke innerhalb eines Elementes ist durch ein Polynom zweiter Ordnung vorgegeben. Die Übergänge zu den Nachbarelementen sind stetig und stetig differenzierbar (glatt). Die Änderung der Wirbelstärke entlang des tragenden Wirbels entspricht der abgehenden freien Zirkulation, die sich vom Ort des tragenden Wirbels in den halbunendlichen Raum fortsetzt. Jeder Elementarflügel verfügt über sogenannte Kontrollpunkte  $k$ , in denen die kinematische Strömungsbedingung erfüllt wird. Der Vektor  $\vec{n}_k$  beschreibt die lokale Flächennormale. Der Summenvektor aus der Anströmung  $\vec{v}_\infty$  und der durch gebundene und freie Zirkulation induzierten Geschwindigkeit  $\vec{w}_k$  muss tangential zur Tragfläche verlaufen. Der Vektor  $\vec{n}_k$  beschreibt die lokale Flächennormale.

$$\vec{n}_k \cdot (\vec{v}_\infty + \vec{w}_k) = 0 \quad (2.8)$$

Die Flügelverwindung bzw. die lokale Profilform können durch entsprechende Anpassung des Normalenvektors erfüllt werden. Äquivalent zur Profiltheorie, siehe dazu [34], ist es ausreichend, die kinematische Strömungsbedingung in unmittelbarer Nähe der Tragfläche und nicht unbedingt exakt auf ihr zu erfüllen. Im Allgemeinen trägt jeder Elementarflügel mit einer Unbekannten und einer Bestimmungsgleichung zum System bei.

Positive Aspekte die für ein erweitertes Verfahren übernommen werden können:

- + Das Verfahren erreicht mit einer geringen Anzahl an Unbekannten sehr genaue Ergebnisse. Dies wird in erster Linie durch die hohe Interpolationsordnung der tragenden Wirbel innerhalb des Elementarflügels erreicht.

Es gibt aber eine Reihe von Kriterien, die den direkten Einsatz verhindern:

- Die Linearisierung der Geometrie ist dann sinnvoll, wenn der Flügel über eine geringe Schränkung verfügt und die Profilmittellinien nicht zu sehr gekrümmt sind. Im Fall von Membransegeln können diese Voraussetzungen nicht immer erfüllt werden. Beispielsweise kann bei einem Hängegleiter die Flügelverwindung im Langsamflug bis zu 20 Grad ausmachen. Die Anordnung der Elementarflügel direkt auf der Membran ist daher vorteilhaft.
- Traglinienverfahren sind im Bezug auf die Berechnung der Nickmomentenbeiwerte weniger verlässlich als Tragflächenverfahren. Bei der Analyse von Nurflügelstrukturen sind die Nickmomente von besonderer Bedeutung für die Flugstabilität.
- Das Verfahren von *Horstmann* ist nur für stationäre Strömungen entwickelt worden.

### 2.2.2 Wirbel-Panel-Methode nach *Mracek*

Das Verfahren von *Mracek* [26] ist ein nichtlineares Tragflächenverfahren für instationäre Strömungen und wurde zur Simulation von Regelvorgängen entwickelt. Im Vergleich zum Mehrfachtraglinienverfahren ergibt sich puncto Anordnung der Wirbel ein wesentlicher Unterschied. Beim Verfahren von *Horstmann* werden die Richtungen der tragenden und der freien Zirkulation a priori festgelegt. Die freie Zirkulation ist durch Differentiation der

gebundenen Wirbel entlang ihrer Achse definiert. Damit wird es möglich die Forderung nach der Wirbelerhaltung bereits in der Formulierung des Wirbelmodells zu berücksichtigen. In weiterer Folge müssen nur mehr die kinematischen Strömungsbedingungen erfüllt werden.

Mracek unterscheidet in seinem Verfahren nicht zwischen tragender und freier Zirkulation. Das Verfahren wurde für Flügel sehr niedriger Streckung bei gleichzeitiger Wirbelablösung im Eintrittskantenbereich entwickelt. Die Anströmungsrichtung der Tragfläche weist dabei hohe Querkomponenten in Spannweitenrichtung auf und kann nicht näherungsweise als konstant betrachtet werden. Damit ist es nicht mehr möglich, von vornherein festzulegen, welche Wirbelanteile Auftrieb liefern. Die Tragfläche wird mit Panelen in Dreiecksform diskretisiert. Jeder Knoten besitzt zwei Freiheitsgrade, die die Wirbeldichte in der Tangentialebene in zwei unabhängigen Richtungen beschreiben. Jedes Element verfügt somit über zwei, orthogonal aufeinander stehende Wirbeldichteverteilungen. Die Wirbeldichten werden innerhalb des Elementes linear interpoliert.

Bei diesem Verfahren kommt pro Element neben der kinematischen Strömungsbedingung auch noch eine explizite Gleichung für die Erhaltung der Zirkulation dazu. Dies bewirkt, dass bei konventionellen Anordnungen mehr Bestimmungsgleichungen als unbekannte Wirbeldichten vorhanden sind. Die Lösung ist daher nicht exakt möglich, was wiederum bei der Ermittlung des induzierten Widerstandes bzw. der Momentenbeiwerte problematisch sein kann. Ferner ist eine Implementierung eines Integral-Boundary-Layer-Verfahrens, bei dem die Zunahme der Grenzschicht durch eine Quellbelegung der Flügeloberfläche simuliert wird, nur dann sinnvoll, wenn die kinematische Strömungsbedingung exakt erfüllt werden kann. Für den Anwendungsbereich für den das Verfahren von Mracek entwickelt wurde, sind diese Probleme jedoch ohne Bedeutung.

Interessante Aspekte für ein erweitertes Verfahren sind

- + Numerische Aspekt bei der Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten der Wirbelflächen.
- + Die instationäre Formulierung des Verfahrens.

Die wesentlichen Einschränkungen für die Verwendung bei gekoppelten Analysen sind:

- Rund doppelte Anzahl an Freiheitsgraden im direkten Vergleich mit dem Verfahren von *Horstmann*, was bei den vorhandenen vollbesetzten Matrizen den numerischen Aufwand deutlich erhöht.

- Keine exakte Lösung möglich.
- Die Kutta-Joukowski-Bedingung an der Hinterkante stellt in dieser Formulierung eine nichtlineare Gleichung dar, weil sie direkt über die Drücke formuliert werden muss. Auch dies stellt im Bezug auf die Rechendauer einen Nachteil dar.

### 2.3 Aufbau des neuen Tragflächenverfahrens

In Abbildung 2.2 ist die Struktur des neuen Tragflächenverfahrens namens  $P_4$  anhand eines konkreten Beispiels illustriert.

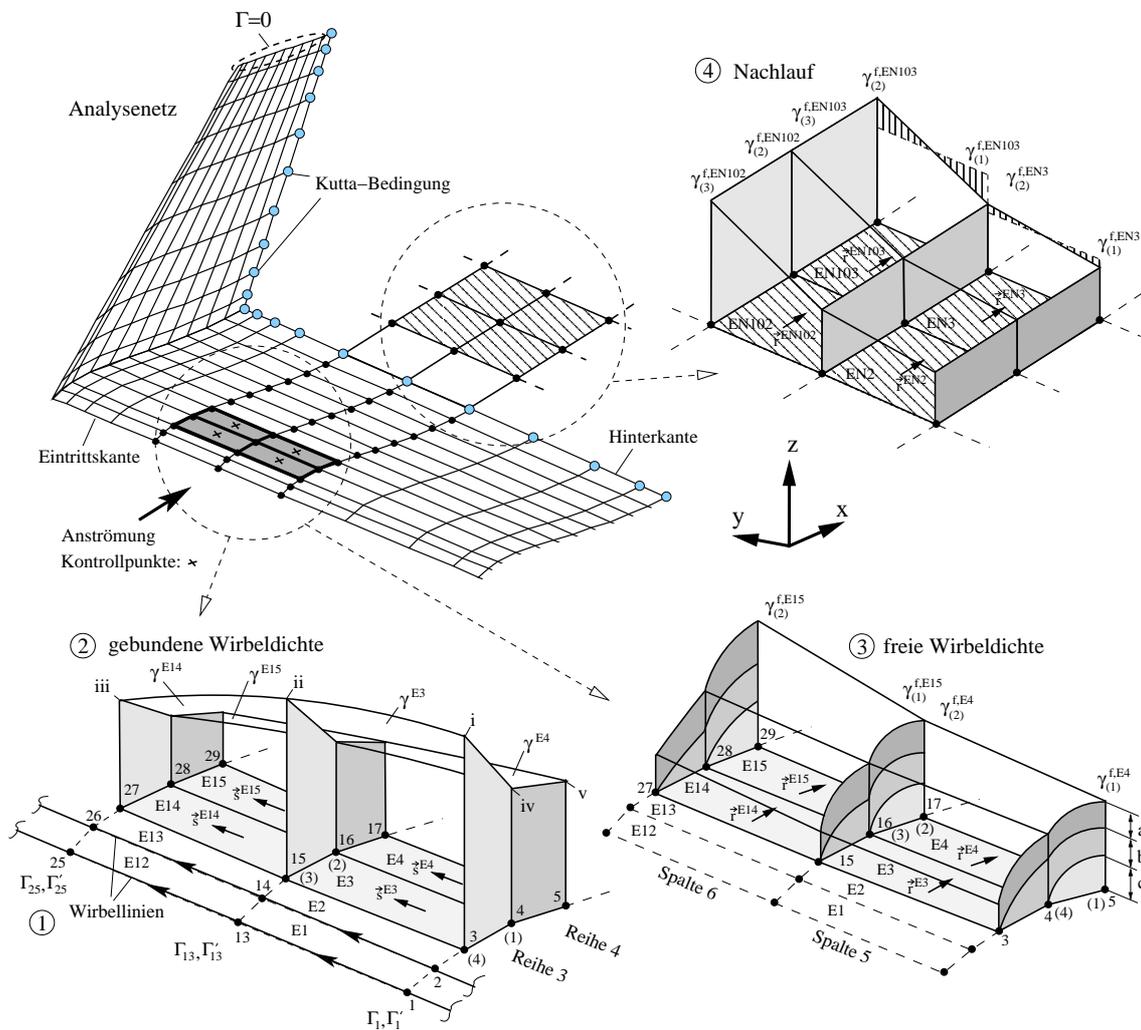


Abbildung 2.2: Aufbau des neuartigen Wirbelpanelverfahrens

Das kartesische Flugzeugkoordinatensystem wird nach folgender Konvention festgelegt: Die  $z$ -Achse zeigt nach oben, die  $x$ -Achse zeigt von der Flugzeugnase zum Flugzeugende. Die  $y$ -Achse steht normal auf  $x$  und  $z$  und weist somit, in Flugrichtung gesehen, nach rechts. In der Bildmitte ist ein Analysenetz eines Flügelendes mit Winglet dargestellt. Es handelt sich dabei um einen rückwärtsgepfeilten Flügel. Die Elementarflügel, auch Elemente oder Panele genannt, sind direkt auf der Skelettfäche der Tragfläche positioniert und dabei in  $M$  Reihen und  $N$  Spalten angeordnet. Die Reihen verlaufen in Spannweitenrichtung zwischen den beiden Flügelenden bzw. zwischen dem rechten Flügelende und der  $x$ - $z$ -Symmetrieebene ( $y \geq 0$ ). Die Spalten beginnen an der Eintrittskante, verlaufen in Anströmrichtung bis zur Hinterkante und werden dann bis ans Ende des Nachlaufs fortgeführt. Die Geometrie des Nachlaufs ist aus Gründen der Rechenzeit nicht Teil der Analyse, sondern wird entweder vom Benutzer vorgegeben oder stellt sich durch die Flugbewegung als jene Fläche ein, die von der Hinterkante überstrichen wird. Wie bei der Methode von *Horstmann*, wird auch hier die Orientierung der gebundenen bzw. freien Zirkulation a priori durch die Geometrie des Analysenetzes festgelegt. Die Richtungen der gebundenen Zirkulation ist in Abbildung 2.2 im unteren Detail *gebundene Wirbeldichte* mit den lokalen Vektoren  $\vec{s}^{E3}$ ,  $\vec{s}^{E4}$ ,  $\vec{s}^{E13}$  sowie  $\vec{s}^{E14}$  beispielhaft für vier Elemente angedeutet. Die hochgestellten Indices definieren die Elementnummer. In der selben Abbildung sind im Detail *freie Wirbeldichte* die Richtungen der freien Zirkulation mit  $\vec{r}^{E3}$ ,  $\vec{r}^{E4}$ ,  $\vec{r}^{E13}$  sowie  $\vec{r}^{E14}$  gekennzeichnet. Die Vektoren im Detail *Nachlauf* definieren ebenfalls die Richtung der freien Zirkulation:  $\vec{r}^{EN2}$ ,  $\vec{r}^{EN3}$ ,  $\vec{r}^{EN102}$  sowie  $\vec{r}^{EN103}$ .

Durch die Festlegung der Orientierungen wird der Einsatzbereich des Panelverfahrens auf mäßige Anstellwinkel ( $\alpha \leq 20$  Grad) und auf Tragflächen mit ausreichender Streckung ( $\Lambda \geq 2 \div 5$ ) beschränkt. Unter diesen Voraussetzungen sind Querströmungen auf der Tragfläche gering.

Entlang der Elementeintrittskanten  $\overline{(3)(4)}$  verlaufen in Spannweitenrichtung Wirbellinien. Die Freiheitsgrade des Systems sind die Wirbelstärken bzw. deren Ableitungen in den Knoten des Analysenetzes. Die Wirbellinien sind äquivalent zu herkömmlichen Traglinien, die jedoch bei einem Viertel der Elementtiefe verlaufen. Die Zirkulationen (Wirbelstärken), die den Knoten zugeordnet sind, werden in weiterer Folge in Wirbeldichtebelegungen in den anschließenden Elementen umgerechnet. Damit entsteht eine kontinuierliche Wirbeldichteverteilung.

Aufgrund der Wirbelerhaltungssätze, siehe z.B. *Schlichting/Truckenbrodt* [34] muss eine Änderung in der gebundenen oder tragenden Wirbel zu einer Freisetzung von Zirkulation

führen. Dadurch entsteht beim Tragflügel endlicher Spannweite die bekannte Wirbelschlepe, die sich bis weit hinter den Tragflügel erstreckt. Die Verteilung der freien Zirkulation hängt somit vom Verlauf der Wirbelstärke der gebundenen Zirkulation ab.

In Abbildung 2.2 ist anhand des Details *2 gebundene Wirbeldichte* die Verteilung der tragenden Wirbelbelegung dargestellt. Das Detail zeigt eine Gruppe von vier Elementarflügeln. Die Nummern sind für Knoten (1-29) und Elemente (E1-E15) eingezeichnet. Für das Element E3 ist ferner die elementinterne Nummerierung der Knoten durch die Zahlen in den runden Klammern angegeben (1)-(4). Diese Reihenfolge ist wesentlich, da die Ausrichtung des Elementes davon abhängt. Beispielsweise verlaufen die Kanten  $\overline{(1)(2)}$  und  $\overline{(3)(4)}$  immer in Spannweitenrichtung und beschreiben die Eintritts- bzw. Hinterkante eines Elementarflügels. In jedem der vier Elemente ist, wie bereits erwähnt, schematisch die Richtung der tragenden Wirbelbelegung mit den Vektoren  $\vec{s}^{E3}$ ,  $\vec{s}^{E4}$ ,  $\vec{s}^{E14}$  und  $\vec{s}^{E15}$ . Der Verlauf der Wirbeldichten ist als dreidimensionale Fläche dargestellt und elementweise mit den Beträgen der Wirbeldichten  $\gamma^{E3}$ ,  $\gamma^{E4}$ ,  $\gamma^{E14}$  und  $\gamma^{E15}$  gekennzeichnet. Dabei gilt beispielsweise für die Wirbeldichte des Elements E2

$$\vec{\gamma}^{E2} = \gamma^{E2} \vec{s}^{E2}. \quad (2.9)$$

Die Wirbellinien werden entlang der Elementkanten durch Polynome zweiter Ordnung beschrieben. Der gleiche Verlauf stellt sich bei Tragflächen mit konstanter Profiltiefe auch für die Verteilung der gebundenen Wirbeldichte ein und ergibt stetige und stetig differenzierbare Übergänge der Wirbeldichtebelegung zwischen benachbarten Elementen. Die Dichteverteilung beschreibt entlang der Vorderkante der Elemente E3 und E14 einen Bogen, der durch zwei Kurven zweiter Ordnung, nämlich von Punkt  $i$  nach  $ii$  und von Punkt  $ii$  nach  $iii$ , gebildet wird. In Flügeltiefenrichtung bzw. der Anströmrichtung verläuft die Wirbeldichtebelegung linear. Dies ist beispielsweise durch den Verlauf der Wirbeldichte vom Punkt  $i$  zu Punkt  $iv$  und weiter zu Punkt  $v$  erkennbar.

Eine Änderung der tragenden Wirbeldichte führt zu einer Freisetzung von Zirkulation. Diese Änderung der tragenden Wirbeldichten innerhalb des Elementes E3 kann formal geschrieben werden als

$$\gamma'^{E3} = \frac{\partial \vec{\gamma}^{E3}}{\partial \vec{s}^{E3}}. \quad (2.10)$$

Die Werte für  $\gamma'^{E3}$  ergeben einen bilinearen Verlauf innerhalb des Elementes, da die Ordnung in Spannweitenrichtung durch die Differentiation von der zweiten Ordnung auf einen linearen Verlauf reduziert wird, siehe Gleichung (2.10). Die Ableitung  $\gamma'^{E3}$  stellt jedoch noch nicht die freie Wirbeldichteverteilung dar, sondern ihre Variation. Um zur tatsächlichen Verteilung zu kommen, siehe Abbildung 2.2 Detail *3 freie Wirbeldichte*, muss die Ver-

teilung in Tiefenrichtung ( $\vec{r}$ -Richtungen) aufintegriert werden. Dabei setzt das Verfahren voraus, dass die freie Zirkulation in der vorgegebenen Richtung  $\vec{r}$  abfließt. In der Abbildung sind wiederum die vier Elementarflügel mit ihren Knoten- und Elementnummern dargestellt. Die Richtung der freien Zirkulation ist mit  $\vec{r}^{E3}, \vec{r}^{E4}, \vec{r}^{E13}$  sowie  $\vec{r}^{E14}$  gekennzeichnet. Im Knoten 5, welcher auch gleichzeitig im Element E4 die lokale Nummer (1) trägt, setzt sich die freie Wirbeldichte aus mehreren Anteilen zusammen, siehe Abbildung 2.2.

$$\gamma_{(1)}^{f,E4} = a + b + c. \quad (2.11)$$

Die Größe  $c$  ist dabei jene Wirbeldichte, die innerhalb von Element E4 freigesetzt wurde.

$$c = \int_{(4)^{E4}}^{(1)^{E4}} \gamma'^{E4} dr^{E4} \quad (2.12)$$

In gleicher Weise stellt  $b$  den Betrag von Element E3 dar, der innerhalb der Spalte 5 in Strömungsrichtung weitergereicht wird.

$$b = \int_{(4)^{E3}}^{(1)^{E3}} \gamma'^{E3} dr^{E3} \quad (2.13)$$

Der Anteil  $a$  setzt sich aus Beiträgen der Element E1 und E2 zusammen. Dabei ist die freie Wirbeldichte eines Elementes E durch den skalaren Wert  $\gamma_{(1)}^{f,E}$  und die vorgegebene Richtung  $\vec{r}^E$  definiert:

$$\vec{\gamma}_{(1)}^{f,E} = \gamma_{(1)}^{f,E} \vec{r}^E. \quad (2.14)$$

Jedes Element innerhalb einer Spalte setzt somit eigene Zirkulation frei, wird aber auch von einem Band freier Zirkulation der vorhergehenden Elemente überstrichen. Die in Strömungsrichtung bzw. spaltenweise durchgeführte Integration zur Bestimmung der freigesetzten Wirbeldichte beginnt an der Flügeleintrittskante mit dem Wert Null und endet an der Hinterkante. In Spannweitenrichtung ergibt sich ein stückweise linearer Verlauf der freien Zirkulation.

An die Hinterkante schließt der Nachlauf an. Nachlaufelemente tragen nur die freie Zirkulation, setzen aber selber keine frei. Die Zirkulation in Spaltenrichtung bleibt bei einer stationären Analyse konstant. Beispielsweise gilt, wie in Abbildung 2.2 im Detail 4 *Nachlauf* dargestellt,

$$\vec{\gamma}_{(3)}^{f,EN102} = \vec{\gamma}_{(2)}^{f,EN102}. \quad (2.15)$$

EN im hochgestellten Index deutet an, dass es sich um ein Nachlaufelement handelt.

Die Formulierung der kinematischen Strömungsbedingung, die eine Durchströmung der Tragfläche verbietet und in allen Kontrollpunkten erfüllt wird, führt auf das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannt GröÙen. Die Geschwindigkeit in einem Kontrollpunkt setzt sich zusammen aus der Anströmung  $\vec{v}_\infty$  und der induzierten Geschwindigkeit  $\vec{w}_k$  (Störgeschwindigkeit) sämtlicher Wirbeldichten des Modells. Zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten der Wirbeldichteverteilungen eines Elementes bzw. Panels  $E_j$  wird das folgende Integral ausgewertet (näheres dazu in Abschnitt 2.7).

$$\vec{w}_k^{E_j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \iint_{O^{E_j}} \frac{\vec{\gamma}^{E_j}(\vec{x})}{\|\vec{x}_k - \vec{x}\|} dO^{E_j}. \quad (2.16)$$

Der Vektor  $\vec{x}_k$  beschreibt die Koordinaten eines Kontrollpunktes  $k$  und  $\vec{x}$  beschreibt die Position des induzierenden Wirbelementes auf der Paneloberfläche. Die Summe der induzierten Geschwindigkeiten aller Elemente ergibt schließlich  $\vec{w}_k$ :

$$\vec{w}_k = \sum_{j=1}^{N_{el}} \vec{w}_k^{E_j}, \quad (2.17)$$

mit  $N_{el}$  als der Gesamtzahl aller Panels. Damit wird die kinematische Strömungsbedingung zu:

$$\vec{n}_k \cdot (\vec{v}_\infty + \vec{w}_k) = 0, \quad (2.18)$$

mit  $\vec{n}_k$  als Flächennormale im Kontrollpunkt  $k$ . Jedes Element besitzt einen Kontrollpunkt und trägt mit einer neuen Unbekannten zum Gleichungssystem bei. Die Kontrollpunkte sind in Abbildung 2.2 für vier Elemente des Analysenetzes dargestellt und im Analysenetz mit Kreuzen gekennzeichnet.

Zwei Gruppen von Knoten können bei einer Analyse keine tragende Wirbeldichte aufweisen.

- Knoten an der Hinterkante: Die Umströmung der Hinterkante kann durch Nullsetzen der tragenden Zirkulation erreicht werden.
- Knoten am Flügelende: Die Zirkulation muss am Flügelende verschwinden, da dort durch einen lokalen Druckausgleich zwischen Flügelober- und Unterseite kein Differenzdruck entstehen kann.

## 2.4 Ergänzungen zur Diskretisierung des Flügels

Die wesentlichen Merkmale eines Panels bzw. Elementarflügels sind

- Vier gerade Umrandungslinien (Quadrilateral).
- Die elementinterne Nummerierung erfolgt derart, dass die Seitenkante  $\overline{(1)(2)}$  die Hinterkante des Elementarflügels bildet und  $\overline{(3)(4)}$  die Eintrittskante darstellt. Diese beiden Linien geben die Richtung der gebundenen Zirkulation innerhalb des Elementes vor.
- Die beiden Seitenkanten  $\overline{(4)(1)}$  und  $\overline{(3)(2)}$  sollen möglichst in Richtung der Anströmung verlaufen, da sie die Orientierung der freien Zirkulation definieren.
- Der Kontrollpunkt zur Formulierung der kinematischen Strömungsbedingung liegt in der Mitte des Elementes  $\vec{x}_k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \vec{x}_i$ .
- Das Element muss nicht planar sein.

Nach diesem kurzen Einblick in den Aufbau des Tragflächenverfahrens werden in den folgenden Abschnitten die Details des Verfahrens erläutert.

## 2.5 Die gebundene Zirkulation

### 2.5.1 Von Wirbellinie zu Dichteverteilung

Im Mehrfachtraglinienverfahren nach *Horstmann* verläuft die tragende Zirkulation entlang der  $\frac{t}{4}$ -Linie des Elementarflügels und wird durch Polynome zweiter Ordnung beschrieben. Der Übergang von einem Element zum benachbarten erfolgt glatt. D.h. die Zirkulationen haben im Anschlusspunkt die gleichen Werte und auch die gleichen Ableitungen. Enthält der Flügel einen Knick, dann kann auch der Verlauf der Zirkulation an dieser Stelle einen Knick aufweisen, was durch eine spezielle Formulierung in diesem Bereich erfüllt wird.

Diese Formulierung kann für das Tragflächenverfahren teilweise übernommen werden. Die Wirbellinie, die in diesem Zusammenhang bewusst nicht als Traglinie bezeichnet wird, da sie nur eine Hilfsgröße zur Ermittlung der Wirbeldichten darstellt, verläuft entlang der Elementkanten  $\overline{(1)(2)}$  bzw.  $\overline{(4)(3)}$ . Sie wird ebenfalls elementweise durch Polynome zweiter Ordnung interpoliert. Ihr Verlauf ist stetig bzw. stetig differenzierbar.

In Abbildung 2.3 sind vier Elementarflügel dargestellt, die zwei horizontale Zeilen und zwei vertikale Spalten bilden. Die Wirbellinie erstreckt sich vom Knoten  $j - 1$  über  $j$  bis zu  $j + 1$ . Die Wirbelstärke im Knoten  $j$  beträgt  $\Gamma_j$ . Wird diese Wirbelstärke durch die

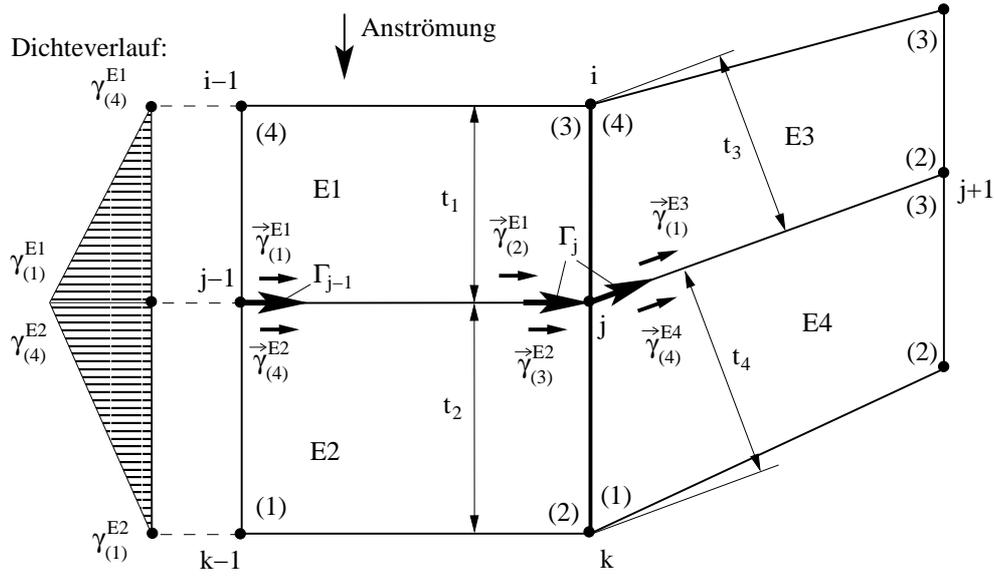


Abbildung 2.3: Bestimmung der Wirbeldichten

Elementarflügeltiefe normal auf die Wirbelrichtung dividiert, erhält man die korrespondierenden Wirbeldichtewerte in den Elementarflügeln. Die Wirbeldichteverteilung in den Elementen E1 und E2 in Tiefenrichtung (entlang  $i - 1$ ,  $j - 1$ ,  $k - 1$ ) ist auf der linken Seite in Abbildung 2.3 dargestellt.

$$\gamma_{(2)}^{E1} = \frac{2\Gamma_j}{(t_1 + t_2)} \quad (2.19)$$

$$\gamma_{(3)}^{E2} = \gamma_{(2)}^{E1} \quad (2.20)$$

$$\gamma_{(1)}^{E3} = \frac{2\Gamma_j}{(t_3 + t_4)} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{(4)}^{E4} = \gamma_{(1)}^{E3} \quad (2.22)$$

Die Wirbeldichte weist beim Übergang von E1 nach E3 bzw. E2 nach E4 einen Sprung auf, der durch die Richtungsänderung der Wirbeldichten verursacht wird. Ein Knick in der Tragfläche kann z.B. solche Sprünge hervorrufen.

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Ableitungen in Richtung der Wirbel.

$$\gamma'_{(1)}^{E1} = \frac{2\Gamma'_j}{(t_1 + t_2)} \quad (2.23)$$

$$\gamma'_{(4)}^{E2} = \gamma'_{(1)}^{E1} \quad (2.24)$$

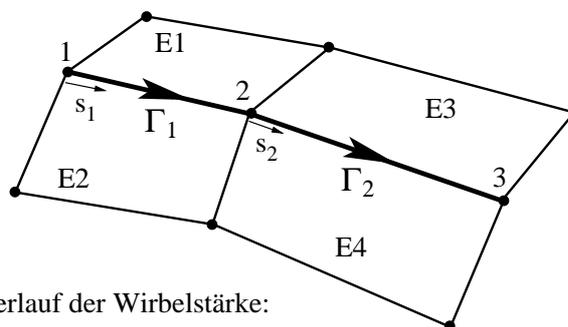
## 2.5.2 Freiheitsgrade und Wirbellinien

Wie bereits erwähnt, wird entlang der Elementarflügelkanten die Wirbellinie durch Polynome 2. Ordnung interpoliert. Die Übergänge zwischen den Nachbarelementen sind in der Regel stetig und stetig differenzierbar, wobei damit die Änderung der Wirbelstärke entlang der Wirbellinie gemeint ist. Durch eine Differentiation des stückweise quadratisch interpolierten Verlaufs erhält man einen stetigen, stückweise linearen Verlauf der ersten Ableitung. An Stellen eines Knicks weist die erste Ableitung eine Sprungstelle auf. Ist in weiterer Folge ein Wert an einer Stelle der Wirbellinie bekannt, dann kann durch einfache Integration die Wirbelstärke entlang der Linie bestimmt werden. Am Flügelende verschwindet die Zirkulation und die Stärke aller Wirbellinien ist identisch Null.

Die Freiheitsgrade des Systems sind die Ableitungen der Wirbelstärken in den Knoten entlang der Wirbellinien. Diese Werte werden entlang der Elementkanten linear interpoliert.

Die Abbildung 2.4 zeigt neben der räumlichen Anordnung auch mögliche Verläufe der Wirbelstärke  $\Gamma$  und ihrer ersten Ableitung  $\Gamma'$ .

Räumliche Anordnung:



Verlauf der Wirbelstärke:

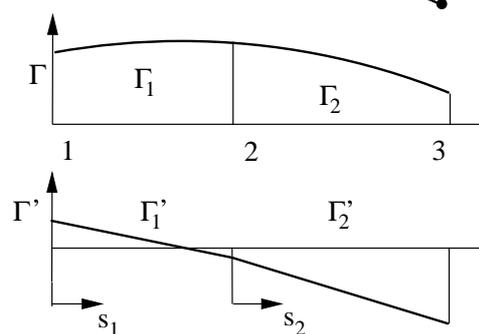


Abbildung 2.4: Wirbellinie und Freiheitsgrade

Als Beispiel sei ein Flügel mit nur einer Reihe von vier Elementarflügeln diskretisiert. Die Wirbelstärken  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_5$  in den beiden Endknoten der Eintrittskante (Knoten 1

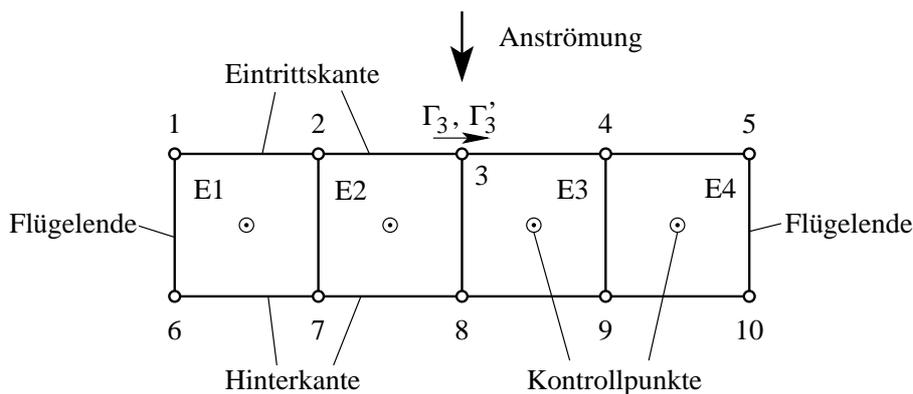


Abbildung 2.5: Tragfläche mit vier Elementen

und 5) müssen identisch Null sein. Die Wirbelstärken entlang der gesamten Hinterkante müssen aufgrund der Kutta-Bedingung ebenfalls Null gesetzt werden, da natürlich keine Umströmung der Hinterkante zulässig ist. Somit bleiben als Freiheitsgrade des Systems die Ableitungen der Wirbelstärken in den Knoten 1 bis 5. Mit dem vorgeschriebenen Start- und Endwerten für den Verlauf der Wirbellinie (nämlich  $\Gamma_1 = \Gamma_5 = 0$ ), kann  $\Gamma'_1$  als Funktion der restlichen Ableitungen  $\Gamma'_1(\Gamma'_2, \Gamma'_3, \Gamma'_4, \Gamma'_5)$  ausgedrückt werden. Den vier Unbekannten stehen auch vier Bestimmungsgleichungen aus der kinematischen Strömungsbedingung in den Kontrollpunkten gegenüber. Will man nur eine Tragflügelhälfte diskretisieren, ist nur ein Wert der Wirbeldichte am Flügelende bekannt. Die Wirbeldichte in der Symmetrie ist Teil der Lösung. In diesem Fall wird nach *Horstmann* ein schmaler Elementstreifen eingefügt, der zwar Kontrollpunkte in das System einbringt, aber keine zusätzlichen unbekanntes  $\Gamma'$ . Die Ableitungen  $\Gamma'$  im Zusatzstreifen werden dabei von Nachbarelementen übernommen und über der Breite des Streifens konstant gehalten, siehe dazu nächsten Abschnitt.

### 2.5.3 Berechnung von $\Gamma$ aus $\Gamma'$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie bei einer allgemeinen Anordnung der Elementarflügel die Werte für  $\Gamma$  aus  $\Gamma'$  berechnet werden.

Abbildung 2.6 zeigt die Ableitung  $\Gamma'$  entlang einer Wirbellinie, die zwischen zwei Flügelenden verläuft. Der Abstand zwischen den Knoten  $j - 1$  und  $j$  ist  $d_{j-1}$ . An den Flügelenden muss die Zirkulation verschwinden und es gilt

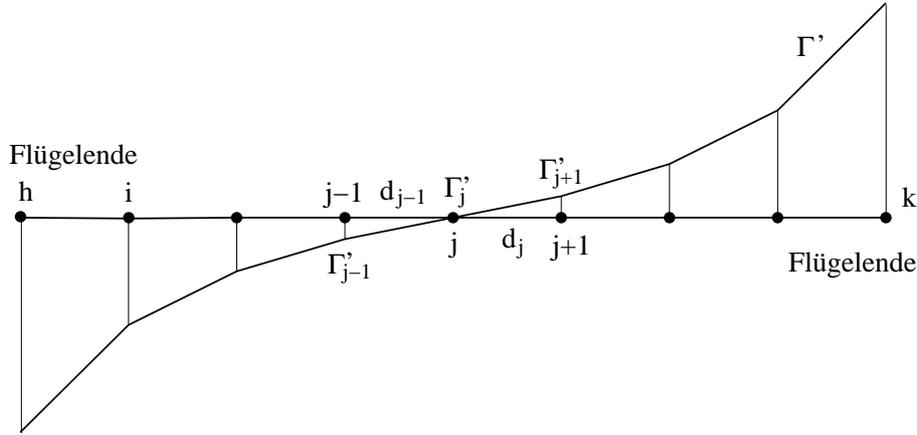


Abbildung 2.6: Typischer Verlauf von  $\Gamma'$

$$\Gamma_h = 0, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_k = 0. \quad (2.26)$$

Durch Integration kann ausgehend vom rechten Rand die Wirbelstärke entlang der Wirbellinie für einen beliebigen Knoten  $i$  berechnet werden

$$\Gamma_i = \Gamma'_i \frac{d_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{l-1} \Gamma'_j \frac{d_{j-1} + d_j}{2} + \Gamma'_l \frac{d_{l-1}}{2}. \quad (2.27)$$

Aus der Gleichung

$$\Gamma_h = 0 = \Gamma'_h \frac{d_h}{2} + \sum_{j=h+1}^{l-1} \Gamma'_j \frac{d_{j-1} + d_j}{2} + \Gamma'_l \frac{d_{l-1}}{2} \quad (2.28)$$

lässt sich  $\Gamma'_h$  als Funktion der restlichen Ableitungen formulieren:

$$\Gamma'_h = 0 = -\frac{2}{d_h} \left( \sum_{j=h+1}^{l-1} \Gamma'_j \frac{d_{j-1} + d_j}{2} + \Gamma'_l \frac{d_{l-1}}{2} \right) \quad (2.29)$$

Der Verlauf der Wirbelstärke ist damit durch die gleiche Anzahl an  $\Gamma'$ -Werten definiert, wie Elemente vorhanden sind.

In der Praxis besteht ein Analysenetz aus mehreren Reihen von Elementarflügeln und besitzt somit auch mehrere Wirbellinien. Unter Anwendung obiger Gleichungen erhält man für das gesamte Analysenetz in Matrixschreibweise

$$\underline{\Gamma} = \mathbf{L}\underline{\Gamma}' \quad (2.30)$$

Dabei sind die Werte aller Wirbelstärken bzw. aller Ableitungen in Vektorform  $\underline{\Gamma}$  und  $\underline{\Gamma}'$  zusammengefasst. Die Matrix  $\mathbf{L}$  stellt eine Integral-Operatormatrix dar.

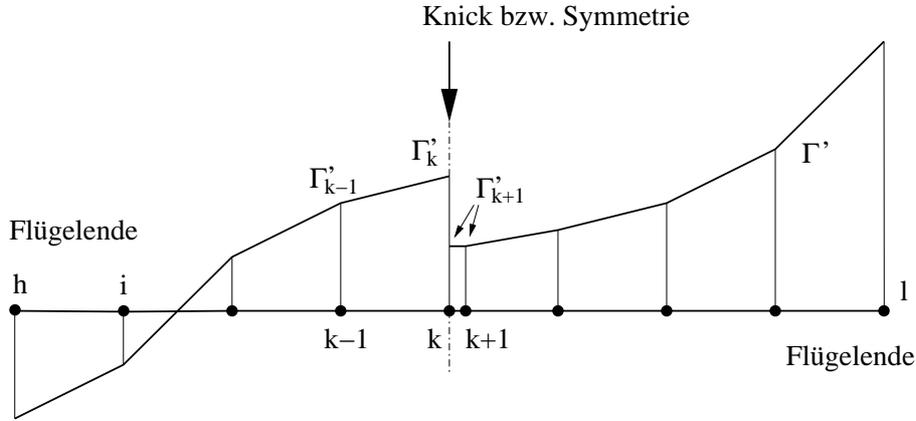


Abbildung 2.7: Unstetigkeit im  $\Gamma'$ -Verlauf

Im Fall eines Knicks bzw. einer Symmetriebedingung an der Stelle  $k$  (siehe Abbildung 2.7) wird ein kurzes Wirbellinienstück mit konstanter Ableitung eingefügt. Der Wert der Ableitung wird vom rechts davon liegenden Nachbarknoten übernommen.

Der Knoten  $k$  weist damit zwei unterschiedliche Ableitungen auf. Die Wirbelstärke für einen Knoten links von der Knickstelle wird wiederum durch die Integration entlang der Wirbellinie gewonnen:

$$\Gamma_i = \Gamma'_i \frac{d_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \Gamma'_j \frac{d_{j-1} + d_j}{2} + \Gamma'_k \frac{d_{k-1}}{2} + \sum_{j=k+1}^{l-1} \Gamma'_j \frac{d_{j-1} + d_j}{2} + \Gamma'_{k+1} \frac{d_k}{2} + \Gamma'_l \frac{d_{l-1}}{2}. \quad (2.31)$$

### 2.5.4 Interpolation der Wirbeldichten innerhalb der Elemente

In den vorhergehenden Abschnitten wurde das Konzept der Wirbellinien erläutert und die Umrechnung der Wirbelstärken in den Knoten auf Wirbeldichtewerte in den Elementen

behandelt. Das Ziel dieses Abschnittes ist die mathematische Formulierung der Wirbeldichtevertellung innerhalb eines Elementarflügels. Dabei muss spezielles Augenmerk auf die Integration zur Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten gelegt werden. Folgende Aspekte sind dabei hervorzuheben:

- Die Interpolationsordnung in Spannweitenrichtung:  
Für die in dieser Arbeit eingesetzten Interpolationsfunktionen zweiter Ordnung existieren keine analytischen Lösungen zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten. Die Induktionen können nur näherungsweise berechnet werden.
- Nichtplanare Elemente:  
Die Elementarflügel sind nicht planar, was die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten zusätzlich erschwert,
- Orientierung der Wirbeldichten:  
Unterschiedliche Orientierung der Wirbeldichten innerhalb des Elementarflügels, wenn beispielsweise die Kanten  $\overline{(1)(2)}$  und  $\overline{(3)(4)}$  nicht parallel sind.
- Eigeninduktion:  
Bei der Induktion eines Elementes im eigenen Kontrollpunkt werden die Integranden singulär, was bei reiner numerischer Integration zu Schwierigkeiten führen kann.

Das Verfahren von Mracek [26] verwendet lineare Interpolationen der Wirbeldichten, die auch in dreieckigen und somit planaren Bereichen integriert werden. Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten erfolgt bei Mracek analytisch. Dieses Integrationschema wird in der vorliegenden Arbeit herangezogen, um die Verteilungen höherer Ordnung näherungsweise zu integrieren. Dies erfolgt unter Zuhilfenahme der Simpson-Regel für die Integration von Kurven zweiter Ordnung. Vergleiche mit anderen Verfahren zeigen in den späteren Abschnitten dieser Arbeit, dass diese Vorgangsweise gute Ergebnisse liefert. Die näherungsweise Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten erfolgt dabei in drei Schritten und kann wie folgt zusammengefasst werden.

- 1.) Ersetzen der Dichtevertellung, die in Spannweitenrichtung einem Polynom 2. Ordnung folgt und in Tiefenrichtung linear verläuft, durch eine bilineare Verteilung gleichen Wirbelinhaltes,
- 2.) Annäherung der Ersatzverteilung durch bereichsweise planare Teilbereiche,

## 3.) Analytische Integration entlang der planaren Teilbereiche.

Die einzelnen Schritte werden in diesem Abschnitt ausführlich behandelt. Zunächst sind grundlegende Überlegungen bezüglich der Integration einer Kurve zweiter Ordnung hilfreich. In Abbildung 2.8 ist eine Kurve 2. Ordnung dargestellt, die die beiden Punkte  $(\eta_1, \gamma_1)$  und  $(\eta_2, \gamma_2)$  verbindet. Die Fläche  $F$  unterhalb der Kurve ist

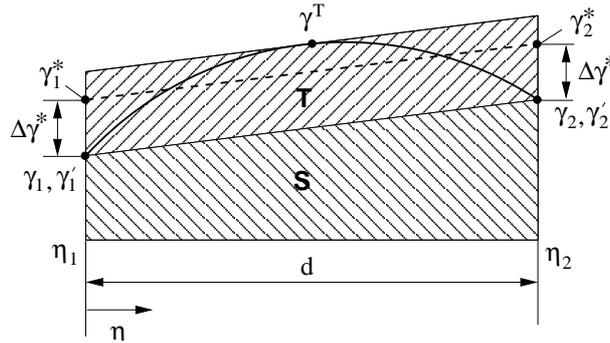


Abbildung 2.8: Integration einer Kurve 2. Ordnung

$$F = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \gamma(\eta) d\eta. \quad (2.32)$$

Für eine Kurve zweiter Ordnung kann diese Integration auch exakt über die Simpson-Formel berechnet werden

$$F = \frac{2T + S}{3}. \quad (2.33)$$

Wobei  $S$  jene Fläche darstellt, die zwischen Sekante und Abszisse eingeschlossen wird, und  $T$  jene, die zwischen der Tangente in  $\gamma^T$  und der Sekante liegt.

$$\gamma^T = \gamma_1 + \gamma_1' d \frac{3}{8} + \gamma_2' d \frac{1}{8} \quad (2.34)$$

$$S = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)d}{2} \quad (2.35)$$

$$T = \gamma^T d \quad (2.36)$$

$$(2.37)$$

Daraus lässt sich ein Offsetwert  $\Delta\gamma^*$  definieren, mit dem gilt

$$F = d \frac{(\gamma_1 + \Delta\gamma^*) + (\gamma_2 + \Delta\gamma^*)}{2} = \quad (2.38)$$

$$= d \frac{\gamma_1^* + \gamma_2^*}{2} \quad (2.39)$$

$$\Delta\gamma^* = \frac{\gamma_1}{3} - \frac{\gamma_2}{3} + \gamma_1' \frac{d}{4} + \gamma_2' \frac{d}{12} \quad (2.40)$$

Diese Zusammenhänge können direkt für die Elementarflügel genutzt werden. Dabei werden zunächst für das induzierende Element die Wirbelstärken in der Mitte der beiden Kanten  $\overline{(1)(2)}$  und  $\overline{(4)(3)}$  bestimmt.

$$\Gamma_{(12)} = \Gamma_{(1)} + \frac{3}{8}d_{(12)}\Gamma'_{(1)} + \frac{1}{8}d_{(12)}\Gamma'_{(2)} \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{(43)} = \Gamma_{(4)} + \frac{3}{8}d_{(43)}\Gamma'_{(4)} + \frac{1}{8}d_{(34)}\Gamma'_{(3)} \quad (2.42)$$

Die Längen  $d_{(12)}$  und  $d_{(43)}$  entsprechen den Abständen der lokalen Elementknoten und sind somit

$$d_{(12)} = \|\overline{(1)(2)}\|; \quad d_{(34)} = \|\overline{(3)(4)}\| \quad (2.43)$$

Die Umrechnung auf Wirbeldichtewerte ergibt

$$\gamma_{(1)} = \frac{2\Gamma_{(1)}}{t_1} \quad (2.44)$$

$$\gamma_{(12)} = \frac{2\Gamma_{(12)}}{t_{12}} \quad (2.45)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{2\Gamma_{(2)}}{t_2} \quad (2.46)$$

$$\gamma_{(3)} = \frac{2\Gamma_{(3)}}{t_3} \quad (2.47)$$

$$\gamma_{(43)} = \frac{2\Gamma_{(43)}}{t_{43}} \quad (2.48)$$

$$\gamma_{(4)} = \frac{2\Gamma_{(4)}}{t_4}, \quad (2.49)$$

wobei die Werte  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_{12}$  und  $t_{43}$  in Abbildung 2.9 für das Element E2 (grau hinterlegt) dargestellt sind. Die strichlierte Linie kennzeichnet die Mittellinie der Elemente.

Die beiden Offsetwert  $\Delta\gamma_{12}^*$  und  $\Delta\gamma_{43}^*$  lauten

$$\Delta\gamma_{12}^* = \frac{2}{3}\gamma_{(12)} - \frac{1}{3}\gamma_{(1)} - \frac{1}{3}\gamma_{(2)} \quad (2.50)$$

$$\Delta\gamma_{43}^* = \frac{2}{3}\gamma_{(43)} - \frac{1}{3}\gamma_{(4)} - \frac{1}{3}\gamma_{(3)} \quad (2.51)$$

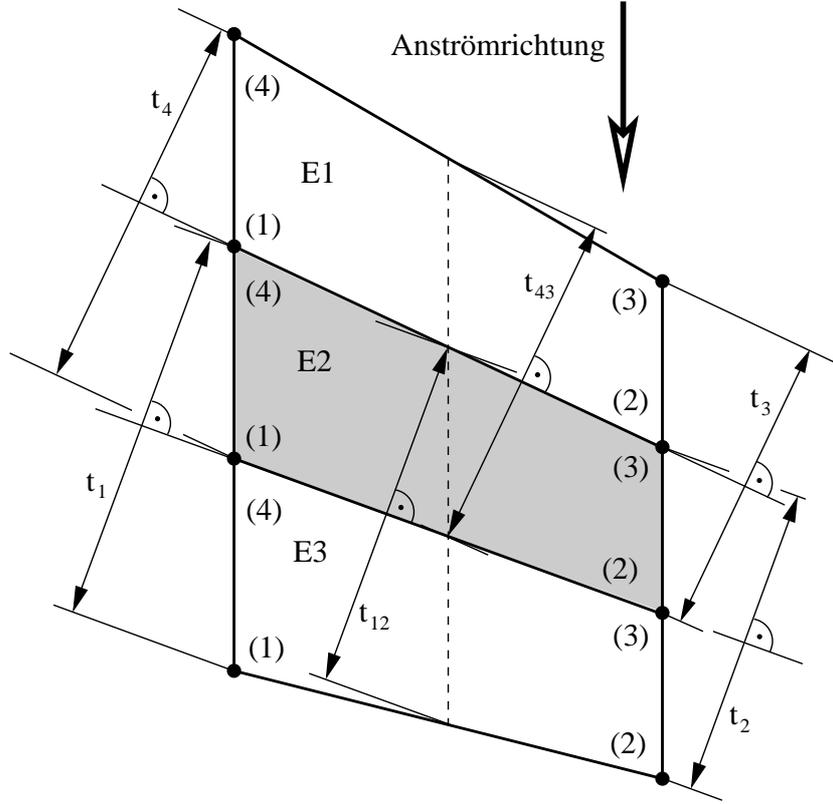


Abbildung 2.9: Flügeltiefen zur Bestimmung der Wirbeldichten

Mit den Gleichungen (2.41) bis (2.51) können die Wirbeldichtewerte in der Ersatz-Sekanten-Verteilung für die vier Elementknoten angegeben werden

$$\gamma_{(1)}^* = \gamma_{(1)} + \Delta\gamma_{12}^* \quad (2.52)$$

$$\gamma_{(2)}^* = \gamma_{(2)} + \Delta\gamma_{12}^* \quad (2.53)$$

$$\gamma_{(3)}^* = \gamma_{(3)} + \Delta\gamma_{43}^* \quad (2.54)$$

$$\gamma_{(4)}^* = \gamma_{(4)} + \Delta\gamma_{43}^* \quad (2.55)$$

beziehungsweise mittels der globalen Systemgrößen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  ausgedrückt

$$\gamma_{(1)}^* = \Gamma_{(1)} \left( \frac{4}{3t_{12}} + \frac{4}{3t_1} \right) + \Gamma'_{(1)} \frac{d_{12}}{2t_{12}} - \Gamma_{(2)} \frac{2}{3t_2} + \Gamma'_{(2)} \frac{d_{12}}{6t_{12}} \quad (2.56)$$

$$\gamma_{(2)}^* = \Gamma_{(1)} \left( \frac{4}{3t_{12}} - \frac{2}{3t_1} \right) + \Gamma'_{(1)} \frac{d_{12}}{2t_{12}} + \Gamma_{(2)} \frac{4}{3t_2} + \Gamma'_{(2)} \frac{d_{12}}{6t_{12}} \quad (2.57)$$

$$\gamma_{(3)}^* = \Gamma_{(4)} \left( \frac{4}{3t_{43}} - \frac{2}{3t_4} \right) + \Gamma'_{(4)} \frac{d_{43}}{2t_{43}} + \Gamma_{(3)} \frac{4}{3t_3} + \Gamma'_{(3)} \frac{d_{43}}{6t_{43}} \quad (2.58)$$

$$\gamma_{(4)}^* = \Gamma_{(4)} \left( \frac{4}{3t_{43}} + \frac{4}{3t_4} \right) + \Gamma'_{(4)} \frac{d_{43}}{2t_{43}} - \Gamma_{(3)} \frac{2}{3t_3} + \Gamma'_{(3)} \frac{d_{43}}{6t_{43}} \quad (2.59)$$

Die bilineare Ersatzverteilung, die theoretisch einfacher zu integrieren ist, enthält bei Tragflächen mit konstanter Profiltiefe ( $t_1 = t_{12} = t_2$  bzw.  $t_4 = t_{43} = t_3$ ) exakt die gleiche Wirbelmenge wie die Verteilung zweiter Ordnung. Im Fall veränderlicher Flügeltiefe (Zuspitzung) folgt zwar die Wirbellinie nachwievor einer stückweise quadratischen Verteilung, der Verlauf der Wirbeldichte innerhalb des Elementes entspricht jedoch entlang der Kanten nicht mehr exakt einem Polynom zweiter Ordnung. Der quadratische Verlauf in der Spannweitenrichtung wird somit durch einen bilinearen Verlauf angenähert. Der dabei entstehende Fehler hängt von der Netzfeinheit ab. Kritisch scheint zunächst jener Fall zu sein, bei dem ein Element Geschwindigkeiten in seinem eigenen Kontrollpunkt induziert, da ja dort die Abweichung zwischen dem tatsächlichen Verlauf und der Ersatzverteilung groß wird.

In Abbildung 2.10 ist dieser Fall anhand eines Schnittes durch die Elementmitte skizziert. Der Elementarflügel, projizierend dargestellt, verfügt in Tiefenrichtung über eine linear

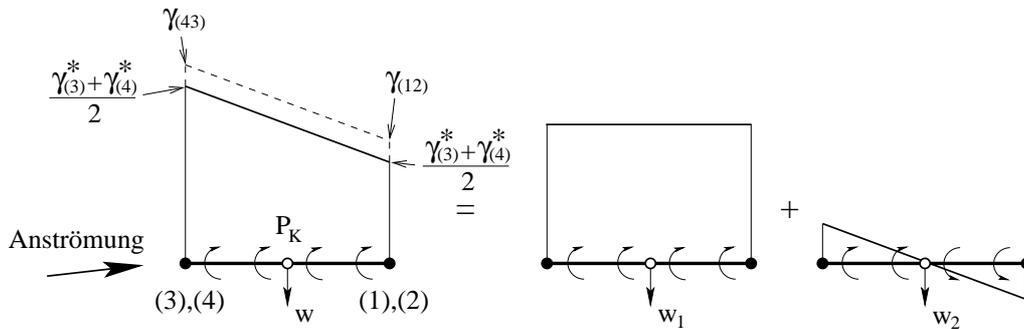


Abbildung 2.10: Eigeninduktion, Schnitt durch ein Element

verteilte Wirbeldichtenbelegung, die im Punkt  $P_K$  die Geschwindigkeit  $w$  induziert. Die ursprüngliche Verteilung verläuft zwischen den Werten  $\gamma_{(43)}$  bis  $\gamma_{(12)}$  und ist in Abbildung 2.10 strichliert dargestellt. Die Ersatzverteilung verfügt in der Elementmitte über etwas kleinere Werte, nämlich  $(\gamma_{(3)}^* + \gamma_{(4)}^*)/2$  sowie  $(\gamma_{(1)}^* + \gamma_{(2)}^*)/2$ . Die Ersatzwirbelverteilung kann in einen konstanten Anteil und einen bezüglich der Elementmitte asymmetrischen Anteil aufgeteilt werden. Aus dem konstanten Anteil resultiert jedoch keine induzierte Geschwindigkeit ( $w_1 = 0$ ). Der Beitrag der asymmetrischen Verteilung  $w_2$  ergibt die gesamte induzierte Geschwindigkeit  $w$ . Somit ist für die Eigeninduktion in erster Linie der Gradient der Wirbeldichtenverteilung in Elementtiefenrichtung ausschlaggebend und nicht das absolute Niveau der Wirbeldichtenbelegung. Dieser Gradient wird durch die Ersatzverteilung gut erfasst.

Die bilineare Ersatzverteilung ist nachwievor auf dem nichtplanaren Element definiert. Für die Auswertung der Gleichung (2.16) wird das Element in planare Teilbereiche zerlegt. Eine

mögliche Konfiguration, die im Rahmen dieser Arbeit gefunden wurde, ist in Abbildung 2.11 zu sehen. Der Elementarflügel wird durch zwei Subgeometrien ersetzt, die durch die

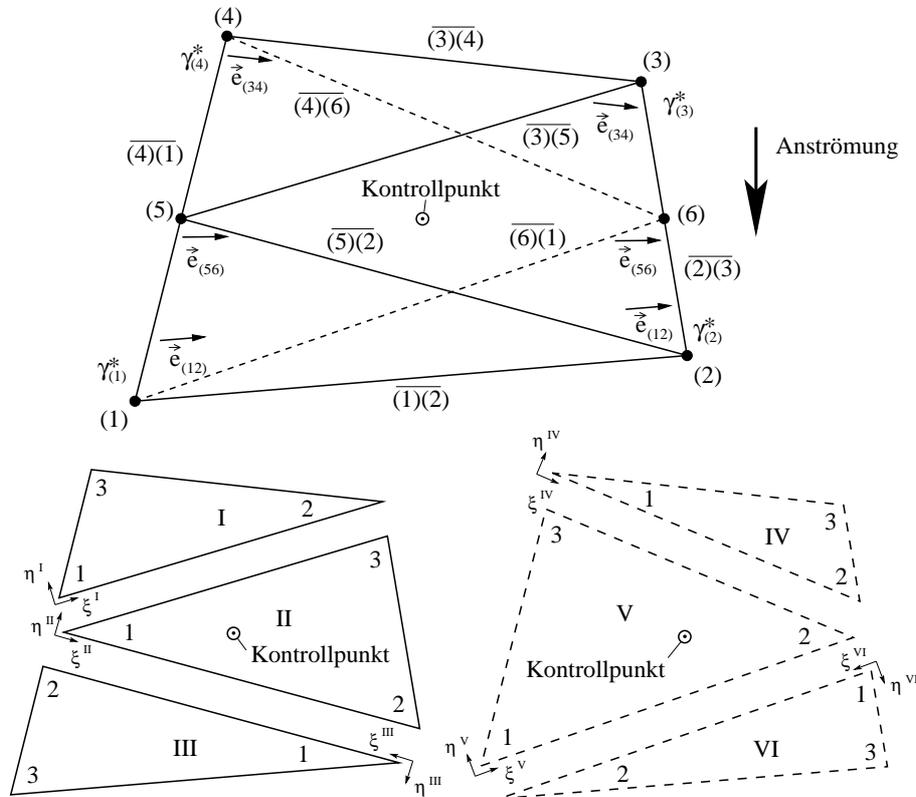


Abbildung 2.11: Teilbereiche zur Integration der Induktionen

durchgezogenen bzw. strichlierten Linien gekennzeichnet sind. Ferner werden zwei zusätzliche elementinterne Hilfsknoten generiert, die in der Mitte der beiden Kanten  $\overline{(4)(1)}$  und  $\overline{(3)(2)}$  liegen. Die beiden Subgeometrien überdecken sich gegenseitig. Je Subgeometrie werden 50% der vorhandenen Wirbeldichten integriert.

Diese im ersten Moment willkürlich anmutende Anordnung verfügt über einige wesentliche Eigenschaften:

- Mit dieser Anordnung können sowohl die gebundenen als auch die freien Wirbeldichten näherungsweise integriert werden.
- Innerhalb der sechs planaren Bereiche (Abbildung 2.11, I bis VI) werden die Wirbeldichteverteilungen durch planare Verläufe angenähert und analytisch integriert, siehe nachfolgende Ausführungen.

- Der Kontrollpunkt liegt im Inneren der beiden größeren Dreiecke (II und V) und stellt somit für die Integration kein Problem dar. Läge der Kontrollpunkt am Rand eines Dreiecks, dann hätte dies singuläre Geschwindigkeiten zur Folge, die zwar theoretisch durch das angrenzende Nachbarelement wieder kompensiert werden, aber numerisch zu unüberwindbaren Problemen führen.
- Es erfolgt eine quasi automatische Anpassung der Dichten bei verzerrten Elementen.
- Durch die überdeckende Anordnung der Subgeometrien können Geometrieinflüsse dieses Ersatzmodells weitgehend vermieden werden.

Die Orientierungen der Wirbeldichten ist im oberen Teil der Abbildung dargestellt. Bei jedem der vier plus zwei Elementknoten zeigt ein Einheitsvektor ( $\vec{e}^{(43)}$ ,  $\vec{e}^{(56)}$  oder  $\vec{e}^{(12)}$ ) die Orientierung der Wirbeldichte an.

Jedes der sechs Dreiecke verfügt über eine eigene lokale Nummerierung der Eckknoten von 1 bis 3. Im Knoten 1 jedes Dreiecks ist ein lokales Koordinatensystem  $\xi\eta$  eingezeichnet. Diese Koordinatensysteme werden für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten benötigt.

Die Abbildung 2.12 zeigt die Annäherung der bilinearen Ersatzverteilung durch bereichsweise planare Flächen. Dabei ist jener Fall dargestellt, bei dem die Wirbeldichte nur in einem Eckpunkt des Elementes  $E_j$  ungleich Null ist ( $\gamma_{(4)}^* \neq 0$ ). Es kommt dabei zu einer

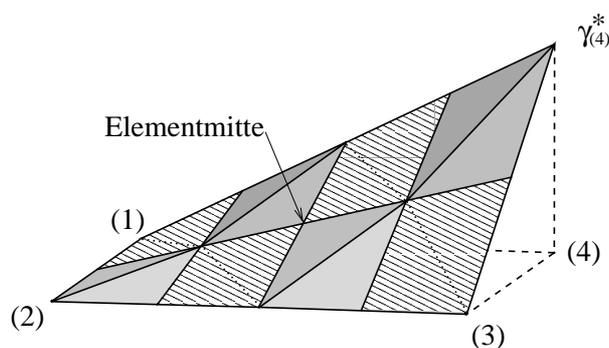


Abbildung 2.12: Annäherung durch planare Teilbereiche

Durchdringung der beiden Oberflächen. Die sichtbaren Stellen der bilinearen Ersatzfläche sind schraffiert dargestellt. Die punktierten Linien zeigen die verdeckten Bereichsgrenzen der planaren Teilbereiche. Das von den Flächen eingeschlossene Volumen ist identisch. Ferner liegt in der Elementmitte ein rautenförmiger planarer Bereich, der mit der Tangential-

ebene der bilinearen Ersatzverteilung übereinstimmt und damit auch die Tangentialebene der ursprünglichen Dichteverteilung höherer Ordnung sehr gut annähert.

Betrachtet man den Fall, dass die Wirbeldichten in den Knoten (1), (2) und (3) gleich Null sind und die Wirbeldichte in Knoten (4) ungleich Null ist, ergeben sich folgende Wirbeldichten in den einzelnen Dreiecken I bis VI:

$$\gamma_1^{I,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{4} \quad (2.60)$$

$$\gamma_2^{I,(4)*} = 0 \quad (2.61)$$

$$\gamma_3^{I,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{2} \quad (2.62)$$

Für Dreieck II:

$$\gamma_1^{II,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{4} \quad (2.63)$$

$$\gamma_2^{II,(4)*} = 0 \quad (2.64)$$

$$\gamma_3^{II,(4)*} = 0 \quad (2.65)$$

Für Dreieck III:

$$\gamma_1^{III,(4)*} = 0 \quad (2.66)$$

$$\gamma_2^{III,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{4} \quad (2.67)$$

$$\gamma_3^{III,(4)*} = 0 \quad (2.68)$$

Für Dreieck IV:

$$\gamma_1^{IV,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{2} \quad (2.69)$$

$$\gamma_2^{IV,(4)*} = 0 \quad (2.70)$$

$$\gamma_3^{IV,(4)*} = 0 \quad (2.71)$$

Für Dreieck V:

$$\gamma_1^{V,(4)*} = 0 \quad (2.72)$$

$$\gamma_2^{V,(4)*} = 0 \quad (2.73)$$

$$\gamma_3^{V,(4)*} = \frac{\gamma_{(4)}^*}{2} \quad (2.74)$$

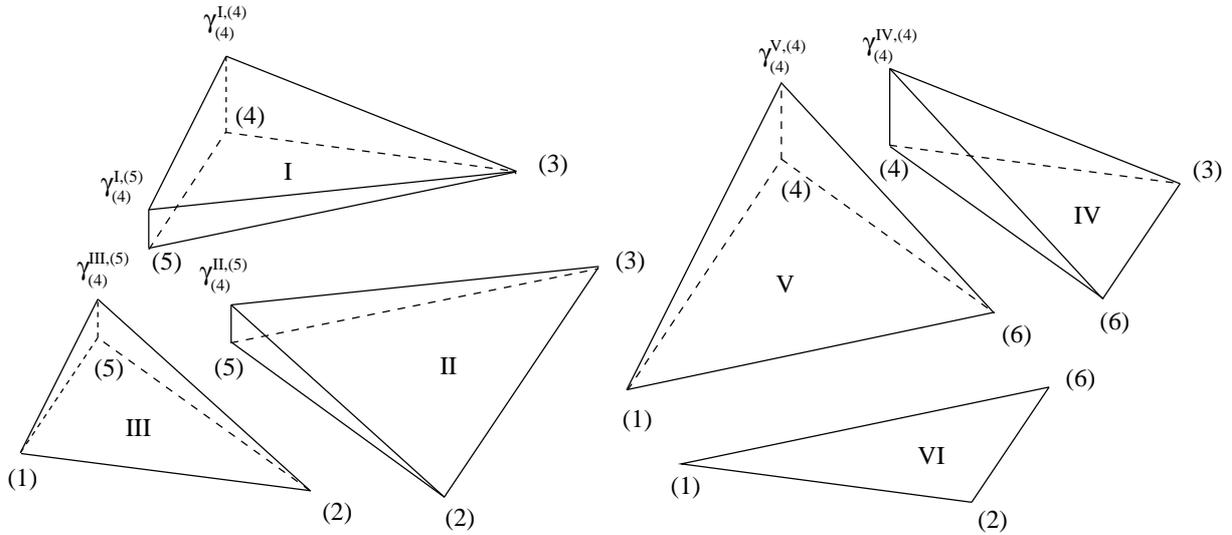


Abbildung 2.13: Wirbeldichten in den planaren Subgeometrien

Für Dreieck VI:

$$\gamma_1^{VI,(4)*} = 0 \tag{2.75}$$

$$\gamma_2^{VI,(4)*} = 0 \tag{2.76}$$

$$\gamma_3^{VI,(4)*} = 0 \tag{2.77}$$

In Abbildung 2.13 sind die Verteilungen nach (2.60) bis (2.77) dargestellt.

Die oben angegebenen Verteilungen geben zunächst nur die den Wert der Wirbeldichte an. Die Richtung ist für die einzelnen Elementknoten definiert und in Abbildung 2.11 dargestellt. Für die Berechnung der Induktion muss diese Wirbelorientierung, das sind  $\vec{e}_{(43)}$ ,  $\vec{e}_{(56)}$  oder  $\vec{e}_{(12)}$ , ins lokale Koordinatensystem  $\xi\eta$  des jeweiligen Dreiecks transferiert werden, siehe Abbildung 2.11. Damit erhält man für jeden Eckpunkt eines Dreiecks eine in  $\xi$ - bzw  $\eta$ -Richtung orientierte Wirbeldichte. Werden die Verteilungen für alle Werte ( $\gamma_{(1)}^*$  bis  $\gamma_{(4)}^*$ ) bestimmt und die Gleichungen (2.56) bis (2.59) eingesetzt und nach globalen

Variablen sortiert, erhält man für ein Element  $E_j$  folgende Form.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^\xi \\ \gamma_1^\eta \\ \gamma_2^\xi \\ \gamma_2^\eta \\ \gamma_3^\xi \\ \gamma_3^\eta \end{pmatrix}^I = \mathbf{p}^I \begin{pmatrix} \Gamma^{(1)} \\ \Gamma^{(2)} \\ \Gamma^{(3)} \\ \Gamma^{(4)} \\ \Gamma'_{(1)} \\ \Gamma'_{(2)} \\ \Gamma'_{(3)} \\ \Gamma'_{(4)} \end{pmatrix}^{E_j} \quad (2.78)$$

$$\gamma^I = \mathbf{p}^I \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

$$\gamma^{II} = \mathbf{p}^{II} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

$$\gamma^{III} = \mathbf{p}^{III} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$\gamma^{IV} = \mathbf{p}^{IV} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

$$\gamma^V = \mathbf{p}^V \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

$$\gamma^{VI} = \mathbf{p}^{VI} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^{E_j} \\ \tilde{\Gamma}'^{E_j} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Mit diesen Werten für die Eckpunkte der Dreiecke können die Integrale für die induzierten Geschwindigkeiten berechnet werden. Die eigentliche Integration innerhalb der sechs Dreiecke wird im Abschnitt 2.7 behandelt.

## 2.6 Die freie Zirkulation

Im Abschnitt 2.3 wurde der Unterschied zwischen gebundener und freier Zirkulation bereits erläutert. In diesem Abschnitt wird die Modellierung der freien Zirkulation behandelt.

Die Änderung der Wirbelstärke entlang der Wirbellinie ( $\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \Gamma'$ ) entspricht der pro Längeneinheit freigesetzten Zirkulation und stellt eine Wirbeldichte dar. Man kann sich dabei vorstellen, dass die Orientierung der freien Zirkulation normal auf die Wirbellinie steht. An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass in dieser Arbeit für die nähere Bezeichnung der Wirbelstärken zwei gleichwertige Methoden verwendet werden. Existiert nur ein tiefgestellter Index, dann bezeichnet dieser jenen Knoten, an dem die Wirbelstärke vorliegt. Steht der Index in Klammern, dann verweist dies auf eine lokale Knotennummer innerhalb des Elementes, dessen Nummer dann im hochgestellten angeführt wird. In Abbildung 2.14

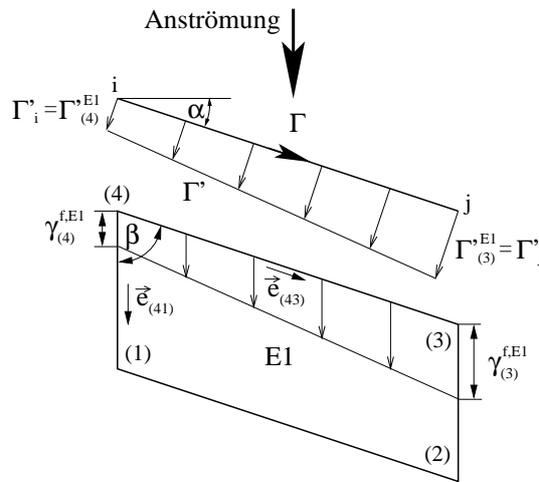


Abbildung 2.14: Freie Wirbeldichten

ist dieser Zusammenhang anhand eines mit dem Winkel  $\alpha$  schiebenden Elementarflügels skizziert. Wie bereits an früherer Stelle erwähnt, wird im vorliegenden Verfahren die Richtung der freien Zirkulation durch die Anordnung der Panele vorgegeben. Im vorliegenden Fall der Abbildung 2.14 muss die Orientierung somit parallel zu den Kanten  $\overline{(4)(1)}$  oder  $\overline{(3)(2)}$  bzw.  $\vec{e}_{(41)}$  ausgerichtet sein (Anströmrichtung). Wird somit die mit  $\Gamma'$  bezeichnete Wirbeldichte in Anströmrichtung fortgesetzt, muss die Wirbeldichte verändert werden, um die Forderung nach einer Wirbelerhaltung zu erfüllen. Diese Umrechnung von  $\Gamma'$  auf  $\gamma^f$  lautet

$$\gamma_{(4)}^{f,E1} = \Gamma_{(4)}^{E1} \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (2.85)$$

$$\gamma_{(3)}^{f,E1} = \Gamma_{(3)}^{E1} \frac{1}{\cos \alpha} \quad (2.86)$$

bzw.

$$\gamma_{(4)}^{f,E1} = \Gamma_{(4)}^{E1} \frac{1}{\sin \beta} = \Gamma_{(4)}^{E1} \frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(43)}\|}, \quad (2.87)$$

$$\gamma_{(3)}^{f,E1} = \Gamma_{(3)}^{E1} \frac{1}{\sin \beta} = \Gamma_{(3)}^{E1} \frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(43)}\|} \quad (2.88)$$

mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_{(41)}$  und  $\vec{e}_{(43)}$ .

In weiterer Folge werden für einen Elementarflügel zwei Typen von freier Zirkulation unterschieden, nämlich einem Anteil, der vom Element freigesetzt wird  $\gamma^f$ , und einem Anteil der von Elementen freigesetzt wird, die vor dem betrachteten Elementarflügel liegen,  $\gamma^d$ .

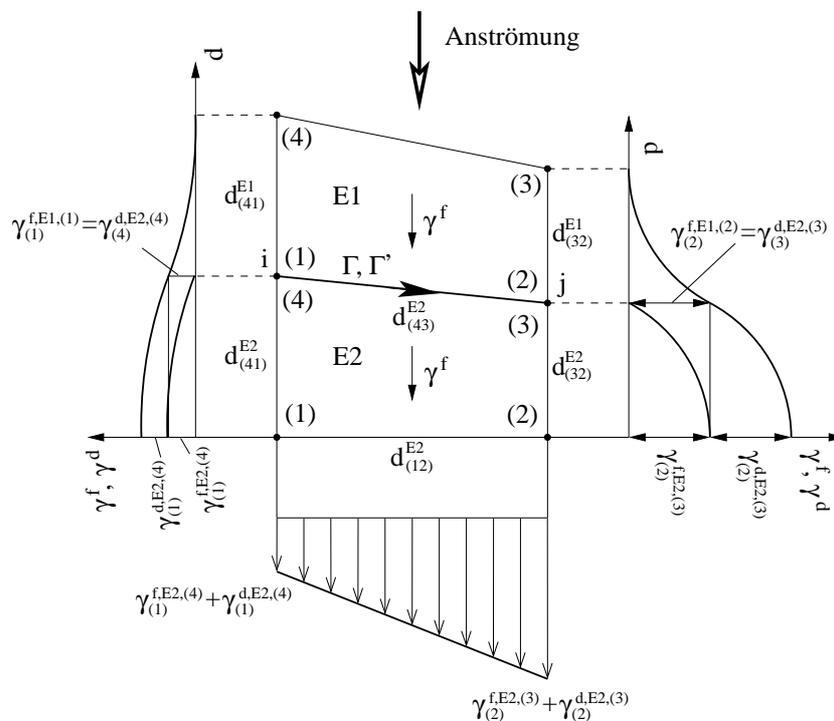


Abbildung 2.15: Freigesetzte und durchlaufende Zirkulation

In Abbildung 2.15 sind zwei Elementarflügel und die dazwischen liegende Wirbellinie skizziert, die beide Elementarflügel mit Wirbeldichtewerten versorgt. Durch die Variation der Werte der Wirbelstärken entlang der Wirbellinie stellt sich eine lineare Wirbeldichteverteilung der freien Zirkulation ein. Die freie Wirbeldichte, die die Anordnung normal auf die

Kante  $\overline{(1)(2)}$  des Elementes E2 verlässt, lautet:

$$\gamma_{(1)}^{f,E2,(4)} + \gamma_{(1)}^{d,E2,(4)} = \Gamma_{(4)}^{f,E2} \frac{d_{(43)}^{E2}}{d_{(12)}^{E2}} = \Gamma'_i \frac{d_{(43)}^{E2}}{d_{(12)}^{E2}} \quad (2.89)$$

$$\gamma_{(2)}^{f,E2,(3)} + \gamma_{(2)}^{d,E2,(3)} = \Gamma_{(3)}^{f,E2} \frac{d_{(43)}^{E2}}{d_{(12)}^{E2}} = \Gamma'_j \frac{d_{(43)}^{E2}}{d_{(12)}^{E2}}. \quad (2.90)$$

Zur Bezeichnung der Wirbeldichten, wie zum Beispiel  $\gamma_{(1)}^{f,E2,(4)}$ , sei hier angemerkt, dass der tiefgestellte Index (1) die elementinterne Knotennummer ((1)-(4)) beschreibt. Die im hochgestellten Index enthaltene Information ist wie folgt zu deuten: f...im Element freigesetzte Wirbeldichte, E2...Bezeichnung des Elementes, (4)...die Freisetzung der Wirbeldichte erfolgt aufgrund einer Wirbelstärkenvariation im Elementknoten (4) des selben Elementes E2. Weiters würde z.B. eine Variation der Wirbelstärke im Elementknoten (1) ebenfalls im Knoten (1) zu einer Freisetzung von Wirbeldichte führen:  $\gamma_{(1)}^{f,E2,(1)}$ .

Der Verlauf der freien Wirbeldichte  $\gamma^f$  entlang der Elementseitenkanten ist links und rechts von den Elementarflügeln dargestellt. Die Kurven ergeben sich aus der Integration der beiden bilinearen Verläufe für die Ableitung der gebundenen Wirbeldichten. Die Werte der freien Wirbeldichte  $\gamma^f$  beginnen an der Vorderkante des Elementes E1 mit dem Wert Null und einer horizontalen Tangente. Folgen dann einem Polynom zweiter Ordnung bis hin zur Wirbellinie. Die vom Element E1 freigesetzte Zirkulation erstreckt sich über das Element E2 und überlagert sich als  $\gamma^d$  mit der dort freigesetzten Wirbeldichte. Die Steigung von  $\gamma^{f,E1}$  an der Hinterkante von E1 ist identisch mit der Steigung von  $\gamma^{f,E2}$  an der Vorderkante von E2. Innerhalb von E2 folgt der Verlauf für  $\gamma^{f,E2}$  wieder einem Polynom zweiter Ordnung und endet mit einer horizontalen Tangente an der Hinterkante von E2. In den beiden Diagrammen für  $\gamma_{(1)}^f$  und  $\gamma_{(2)}^f$  in Abbildung 2.15 sind mittels der Bezeichnung  $\gamma^{f,E1}$  und  $\gamma^{f,E2}$  jene Anteile der  $\gamma^f$  gekennzeichnet, die von den jeweiligen Elementen freigesetzt werden. Das Verhältnis der beiden Größen  $\gamma^{f,E1}$  und  $\gamma^{f,E2}$  ist proportional der Länge der Seitenkanten.

$$\frac{\gamma_{(1)}^{f,E1}}{\gamma_{(1)}^{f,E2}} = \frac{d_{(41)}^{E1}}{d_{(41)}^{E2}} \quad (2.91)$$

$$\frac{\gamma_{(2)}^{f,E1}}{\gamma_{(2)}^{f,E2}} = \frac{d_{(32)}^{E1}}{d_{(32)}^{E2}} \quad (2.92)$$

### 2.6.1 Im Element freigesetzte Zirkulation $\gamma^f$

Beispielhaft wird an dieser Stelle die für die Integration herangezogene Dichteverteilung für den Fall  $\Gamma'_i \neq 0$  und  $\Gamma'_j = 0$  für das Element E1 angegeben (siehe Abbildung 2.15).

Der Anteil von  $\Gamma'_i$ , der die freigesetzte Wirbeldichte im Element E1 beschreibt, lautet

$$\Gamma_i^{\text{E1}} = \Gamma'_i \frac{d_{(41)}^{\text{E1}}}{d_{(41)}^{\text{E1}} + d_{(41)}^{\text{E2}}} \quad (2.93)$$

$$\Gamma_j^{\text{E1}} = 0 \quad (2.94)$$

Die entsprechende Wirbeldichteverteilung wird wiederum durch planare Teilbereiche angenähert.

Die Bezeichnung der Wirbeldichten ist wie folgt zu verstehen:

- hochgestellter Index, erster Eintrag: I bis VI Nummer des Dreiecks,
- hochgestellter Index, zweiter Eintrag: f...freigesetzt,
- hochgestellter Index, dritter Eintrag: (1) bis (4) elementinterner Knoten, in dem der Wert  $\Gamma'$  vorliegt,
- tiefgestellter Index: 1 bis 3 lokale Position innerhalb des Dreiecks,

Dreieck I:

$$\gamma_1^{\text{I,f,(1)}} = 0 \quad (2.95)$$

$$\gamma_2^{\text{I,f,(1)}} = 0 \quad (2.96)$$

$$\gamma_3^{\text{I,f,(1)}} = 0 \quad (2.97)$$

Dreieck II:

$$\gamma_1^{\text{II,f,(1)}} = 0 \quad (2.98)$$

$$\gamma_2^{\text{II,f,(1)}} = 0 \quad (2.99)$$

$$\gamma_3^{\text{II,f,(1)}} = 0 \quad (2.100)$$

Dreieck III:

$$\gamma_1^{\text{III,f,(1)}} = 0 \quad (2.101)$$

$$\gamma_2^{\text{III,f,(1)}} = 0 \quad (2.102)$$

$$\gamma_3^{\text{III,f,(1)}} = \frac{1}{2} \Gamma'_i \frac{d_{(41)}^{\text{E1}}}{d_{(41)}^{\text{E1}} + d_{(41)}^{\text{E2}}} \frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(12)}\|} \quad (2.103)$$

Dreieck *IV*:

$$\gamma_1^{\text{IV},f,(1)} = 0 \quad (2.104)$$

$$\gamma_2^{\text{IV},f,(1)} = 0 \quad (2.105)$$

$$\gamma_3^{\text{IV},f,(1)} = 0 \quad (2.106)$$

Dreieck *V*:

$$\gamma_1^{\text{V},f,(1)} = \frac{1}{2} \Gamma'_i \frac{d_{(41)}^{\text{E1}}}{d_{(41)}^{\text{E1}} + d_{(41)}^{\text{E2}}} \frac{1}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(12)}\|} \frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(61)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(61)}\|} \quad (2.107)$$

$$\gamma_2^{\text{V},f,(1)} = 0 \quad (2.108)$$

$$\gamma_3^{\text{V},f,(1)} = 0 \quad (2.109)$$

Dreieck *VI*:

$$\gamma_1^{\text{VI},f,(1)} = 0 \quad (2.110)$$

$$\gamma_2^{\text{VI},f,(1)} = \frac{1}{2} \Gamma'_i \frac{d_{(41)}^{\text{E1}}}{d_{(41)}^{\text{E1}} + d_{(41)}^{\text{E2}}} \frac{1}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(12)}\|} \quad (2.111)$$

$$\gamma_3^{\text{VI},f,(1)} = 0 \quad (2.112)$$

Die Vektoren  $\vec{e}_{(kl)}$  zeigen vom elementinternen Knoten (*k*) in Richtung des Knoten (*l*), wobei ihre Länge auf Eins normiert wurde. Aus Abbildung 2.11 sind die Positionen der lokalen Knoten ersichtlich.

In Abbildung 2.16 zeigt den angenäherten Verlauf der im Element E1 freigesetzten Wirbeldichte zufolge  $\Gamma'_i$ . Die Orientierung der Wirbeldichten ist für jedes Dreieck durch einen Einheitsvektor  $\vec{e}_{(ij)}$  angegeben. Der Terme  $\frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(12)}\|}$  und  $\frac{1}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(12)}\|}$  dienen zur Anpassung der Wirbeldichten beim Eintritt in das Element entlang der Kante  $\overline{(1)(2)}$ . Der Term  $\frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(61)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(61)}\|}$  berücksichtigt einen eventuellen Dichtesprung der Wirbelbelegung aufgrund einer Richtungsänderung beim Übergang zwischen den Dreiecken *VI* und *V*.

Werden wiederum die Verteilungen für alle Werte ( $\Gamma_{(1)}^{\text{E1}}$  bis  $\Gamma_{(4)}^{\text{E1}}$ ) bestimmt und nach glo-

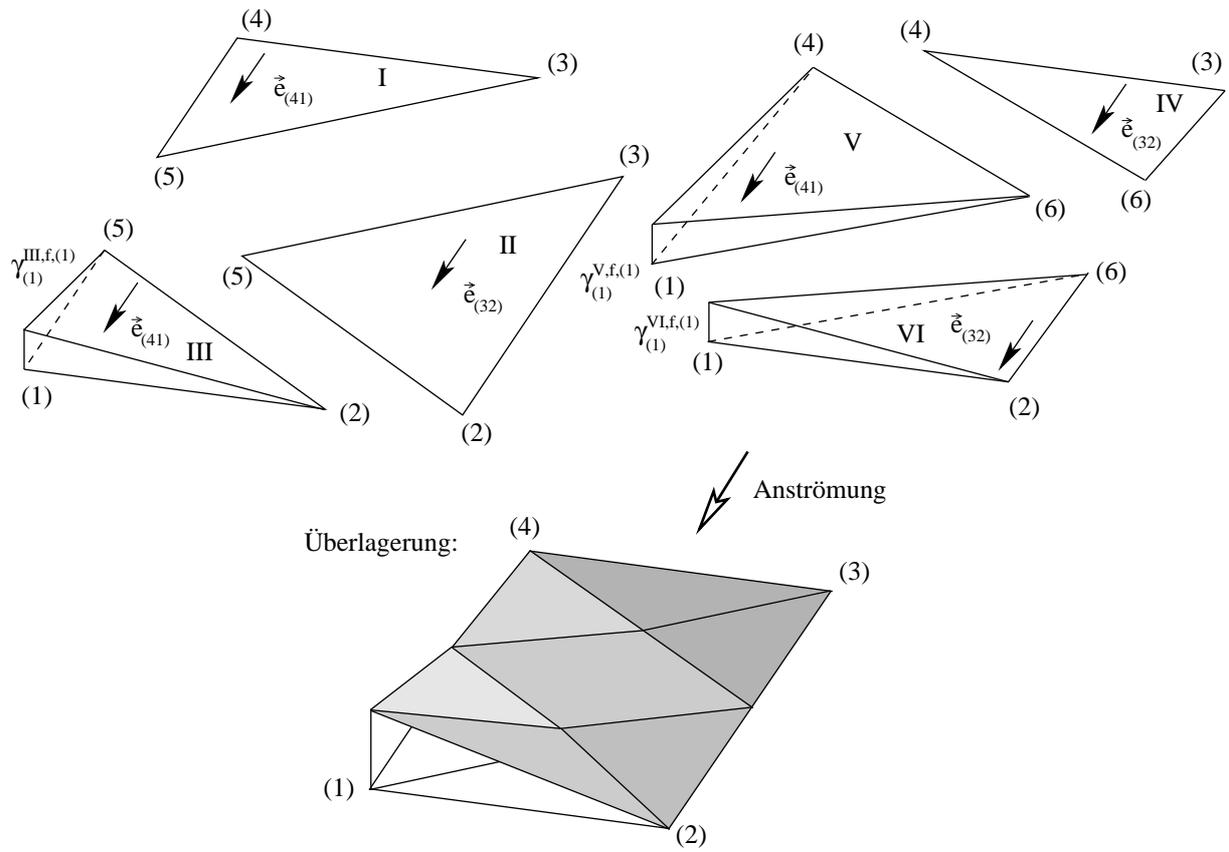


Abbildung 2.16: Freigesetzte Wirbeldichten in den planaren Subbereichen

balen Variablen sortiert, erhält man folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^\xi \\ \gamma_1^\eta \\ \gamma_2^\xi \\ \gamma_2^\eta \\ \gamma_3^\xi \\ \gamma_3^\eta \end{pmatrix}^{I,f} = \mathbf{p}^{I,f} \begin{pmatrix} \Gamma'_{(1)} \\ \Gamma'_{(2)} \\ \Gamma'_{(3)} \\ \Gamma'_{(4)} \end{pmatrix}^E \quad (2.113)$$

$$\gamma^{I,f} = \mathbf{p}^{I,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.114)$$

$$\gamma^{II,f} = \mathbf{p}^{II,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.115)$$

$$\gamma^{III,f} = \mathbf{p}^{III,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.116)$$

$$\gamma^{IV,f} = \mathbf{p}^{IV,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.117)$$

$$\gamma^{V,f} = \mathbf{p}^{V,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.118)$$

$$\gamma^{VI,f} = \mathbf{p}^{VI,f} \tilde{\Gamma}'^E \quad (2.119)$$

### 2.6.2 Durchlaufende Zirkulation

Die Elementarflügel sind in Reihen und Spalten angeordnet. Die Spaltenrichtung stimmt mit der Anströmrichtung weitgehend überein. Sämtliche Elemente innerhalb der Spalte setzen Zirkulation frei, die dann als Wirbelband über die in Strömungsrichtung nachfolgenden Elemente strömt. Dieser Typ von Wirbelbandbelegung wird in der Folge als *durchlaufende Wirbelbande*  $\gamma^d$  bezeichnet (neben der *gebundenen*  $\gamma$  und der *freien Wirbelbande*  $\gamma^f$ ).

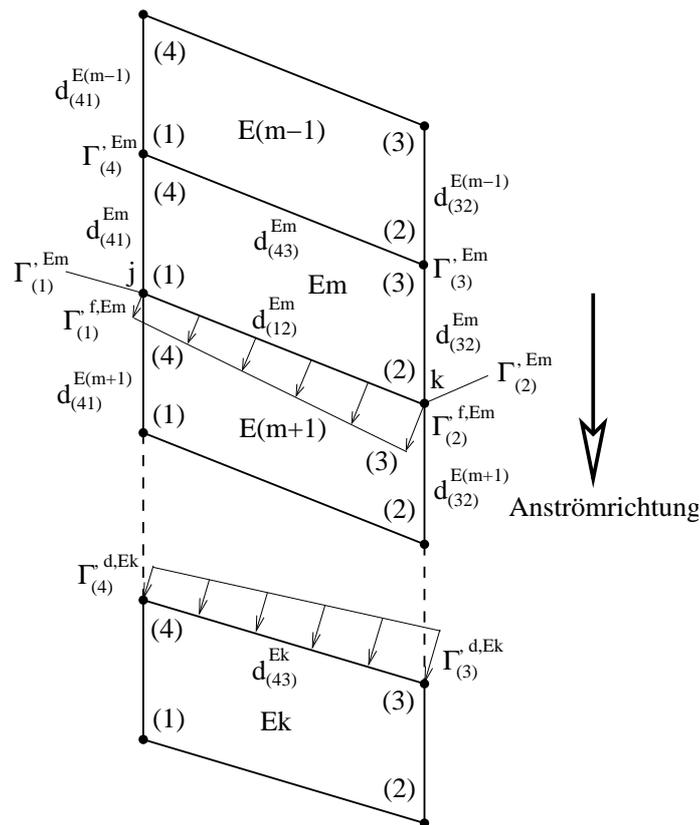


Abbildung 2.17: Wirbelband durchlaufender Zirkulation

Die Abbildung 2.17 zeigt eine Spalte des Analysenetzes mit mehreren Elementarflügeln. Die vom Element  $E_m$  freigesetzte, d.h. entlang der Hinterkante abgegebene Zirkulation soll nun angegeben werden. Die freigesetzte Zirkulation, in globalen Größen definiert (normal

auf die Hinterkante  $\overline{(1)(2)}$  von  $E_m$ ), lautet (siehe auch Abbildung 2.17):

$$\Gamma_{(1)}^{f,Em} = \Gamma_{(1)}^{Em} \frac{d_{(41)}^{Em}}{(d_{(41)}^{Em} + d_{(41)}^{E(m+1)})} + \Gamma_{(4)}^{Em} \frac{d_{(41)}^{Em}}{(d_{(41)}^{Em} + d_{(41)}^{E(m-1)})} \frac{d_{(43)}^{Em}}{d_{(12)}^{Em}} \quad (2.120)$$

$$\Gamma_{(2)}^{f,Em} = \Gamma_{(2)}^{Em} \frac{d_{(32)}^{Em}}{(d_{(32)}^{Em} + d_{(32)}^{E(m+1)})} + \Gamma_{(3)}^{Em} \frac{d_{(32)}^{Em}}{(d_{(32)}^{Em} + d_{(32)}^{E(m-1)})} \frac{d_{(43)}^{Em}}{d_{(12)}^{Em}} \quad (2.121)$$

Zur näheren Bezeichnung des globalen Freiheitsgrades  $\Gamma'$  wird dabei als tiefgestellter Index entweder die globale Knotennummer  $j, k$  oder die lokale Elementknotennummer (1) - (4) in Kombination mit der Elementnummer angegeben. Beispielsweise gilt

$$\Gamma_{(1)}^{Em} = \Gamma'_j. \quad (2.122)$$

Mit der Kenntnis von  $\Gamma_{(1)}^{f,Em}$ ,  $\Gamma_{(2)}^{f,Em}$  und  $d_{(12)}^{Em}$  kann für jedes nachfolgende Element  $E_k$  die Wirbeldichtebelegung  $\gamma^d$  angegeben werden. Nimmt man an dieser Stelle an, dass die von einem stromaufwärts liegenden Element freigesetzte Wirbeldichte senkrecht auf die Eintrittskante  $\overline{(4)(3)}$  des Elementes  $E_k$  trifft, dann erhält man folgendes Zwischenresultat für die durchlaufende Wirbeldichte:

$$\Gamma_{(4)}^{d,Ek} = \Gamma_{(1)}^{f,Em} \frac{d_{(12)}^{Em}}{d_{(43)}^{Ek}}, \quad (2.123)$$

$$\Gamma_{(3)}^{d,Ek} = \Gamma_{(2)}^{f,Em} \frac{d_{(12)}^{Em}}{d_{(43)}^{Ek}}. \quad (2.124)$$

Wieder wird die Verteilung der durchlaufenden Zirkulation durch planare Bereiche beschrieben und man erhält als Dichtewerte für die einzelnen Dreiecke, wobei die Bezeichnung  $E_m$  im hochgestellten Index jenes Element bezeichnet, von dem das durchlaufende Wirbelband abstammt:

Dreieck *I*:

$$\gamma_1^{\text{I,d,Em}} = \left( \frac{1}{2} \Gamma^{Em} \frac{d_{(41)}^{\text{Em}}}{(d_{(41)}^{\text{Em}} + d_{(41)}^{\text{E(m+1)})}} + \right. \quad (2.125)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Gamma^{Em} \frac{d_{(41)}^{\text{Em}}}{(d_{(41)}^{\text{Em}} + d_{(41)}^{\text{E(m-1)})}} \frac{d_{(43)}^{\text{Em}}}{d_{(12)}^{\text{Em}}} \frac{d_{(12)}^{\text{Em}}}{d_{(43)}^{\text{Ek}}} \frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(43)}\|} \right) \quad (2.126)$$

$$\gamma_2^{\text{I,d,Em}} = \left( \frac{1}{2} \Gamma^{Em} \frac{d_{(32)}^{\text{Em}}}{(d_{(32)}^{\text{Em}} + d_{(32)}^{\text{E(m+1)})}} + \right. \quad (2.127)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Gamma^{Em} \frac{d_{(32)}^{\text{Em}}}{(d_{(32)}^{\text{Em}} + d_{(32)}^{\text{E(m-1)})}} \frac{d_{(43)}^{\text{Em}}}{d_{(12)}^{\text{Em}}} \frac{d_{(12)}^{\text{Em}}}{d_{(43)}^{\text{Ek}}} \frac{1}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(43)}\|} \right) \quad (2.128)$$

$$\gamma_3^{\text{I,d,Em}} = \gamma_1^{\text{I,d,Em}} \quad (2.129)$$

Dreieck *II*:

$$\gamma_1^{\text{II,d,Em}} = \gamma_3^{\text{I,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(35)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(35)}\|} \quad (2.130)$$

$$\gamma_2^{\text{II,d,Em}} = \gamma_2^{\text{I,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(35)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(35)}\|} \quad (2.131)$$

$$\gamma_3^{\text{II,d,Em}} = \gamma_2^{\text{II,d,Em}} \quad (2.132)$$

Dreieck *III*:

$$\gamma_1^{\text{III,d,Em}} = \gamma_2^{\text{I,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(35)}\| \|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(52)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(35)}\| \|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(52)}\|} \quad (2.133)$$

$$\gamma_2^{\text{III,d,Em}} = \gamma_3^{\text{I,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(35)}\| \|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(52)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(35)}\| \|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(52)}\|} \quad (2.134)$$

$$\gamma_3^{\text{III,d,Em}} = \gamma_2^{\text{III,d,Em}} \quad (2.135)$$

$$(2.136)$$

Dreieck IV:

$$\gamma_1^{\text{IV,d,Em}} = \left( \frac{1}{2} \Gamma_{(1)}^{\text{Em}} \frac{d_{(41)}^{\text{Em}}}{(d_{(41)}^{\text{Em}} + d_{(41)}^{\text{E(m+1)})}} + \right. \quad (2.137)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Gamma_{(4)}^{\text{Em}} \frac{d_{(41)}^{\text{Em}}}{(d_{(41)}^{\text{Em}} + d_{(41)}^{\text{E(m-1)})}} \frac{d_{(43)}^{\text{Em}}}{d_{(12)}^{\text{Em}}} \frac{d_{(12)}^{\text{Em}}}{(d_{(43)}^{\text{Ek}} \|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(43)}\|)} \right) \quad (2.138)$$

$$\gamma_2^{\text{IV,d,Em}} = \left( \frac{1}{2} \Gamma_{(2)}^{\text{Em}} \frac{d_{(32)}^{\text{Em}}}{(d_{(32)}^{\text{Em}} + d_{(32)}^{\text{E(m+1)})}} + \right. \quad (2.139)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Gamma_{(3)}^{\text{Em}} \frac{d_{(32)}^{\text{Em}}}{(d_{(32)}^{\text{Em}} + d_{(32)}^{\text{E(m-1)})}} \frac{d_{(43)}^{\text{Em}}}{d_{(12)}^{\text{Em}}} \frac{d_{(12)}^{\text{Em}}}{(d_{(43)}^{\text{Ek}} \|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(43)}\|)} \right) \quad (2.140)$$

$$\gamma_3^{\text{IV,d,Em}} = \gamma_2^{\text{IV,d,Em}} \quad (2.141)$$

Dreieck V:

$$\gamma_1^{\text{V,d,Em}} = \gamma_1^{\text{IV,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(46)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(46)}\|} \quad (2.142)$$

$$\gamma_2^{\text{V,d,Em}} = \gamma_3^{\text{IV,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(46)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(46)}\|} \quad (2.143)$$

$$\gamma_3^{\text{V,d,Em}} = \gamma_1^{\text{V,d,Em}} \quad (2.144)$$

Dreieck VI:

$$\gamma_1^{\text{VI,d,Em}} = \gamma_3^{\text{IV,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(46)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(46)}\|} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(61)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(61)}\|} \quad (2.145)$$

$$\gamma_2^{\text{VI,d,Em}} = \gamma_1^{\text{IV,d,Em}} \frac{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(46)}\|}{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(46)}\|} \frac{\|\vec{e}_{(41)} \times \vec{e}_{(61)}\|}{\|\vec{e}_{(32)} \times \vec{e}_{(61)}\|} \quad (2.146)$$

$$\gamma_3^{\text{VI,d,Em}} = \gamma_1^{\text{VI,d,Em}} \quad (2.147)$$

Wie in den vorhergehenden Abschnitten werden die Verteilungen auch hier zusammenge-

fasst und es gilt:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^\xi \\ \gamma_1^\eta \\ \gamma_2^\xi \\ \gamma_2^\eta \\ \gamma_3^\xi \\ \gamma_3^\eta \end{pmatrix}^{\text{I,d}} = \mathbf{p}^{\text{I,d,Em}} \begin{pmatrix} \Gamma'_{(1)} \\ \Gamma'_{(2)} \\ \Gamma'_{(3)} \\ \Gamma'_{(4)} \end{pmatrix}^{\text{Em}} \quad (2.148)$$

$$\gamma^{\text{I,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{I,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.149)$$

$$\gamma^{\text{II,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{II,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.150)$$

$$\gamma^{\text{III,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{III,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.151)$$

$$\gamma^{\text{IV,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{IV,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.152)$$

$$\gamma^{\text{V,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{V,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.153)$$

$$\gamma^{\text{VI,d,Em}} = \mathbf{p}^{\text{VI,d}} \tilde{\Gamma}'^{\text{Em}} \quad (2.154)$$

Die Bezeichnung Em im hochgestellten Index deutet an, dass die  $\Gamma'$ -Werte von einem stromauf liegend Element Em der gleichen Spalte stammen.

## 2.7 Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten

### 2.7.1 Induktion eines einzelnen Dreiecks

Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten eines Dreiecks mit linearer Wirbeldichteverteilung wird in der Arbeit von *Mracek* ausführlich behandelt. Die Integration der Wirbeldichten kann dabei auf folgende Form gebracht werden, siehe[26].

$$\vec{w}(\vec{x}_k, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \iint_{\text{O}} \frac{\vec{\gamma}(\vec{x}, t)}{\|\vec{x}_k - \vec{x}\|} d\text{O} \quad (2.155)$$

Dabei beschreibt  $\vec{x}$  die Position der induzierenden Wirbeldichte auf der Panelfläche und  $\vec{x}_k$  den Punkt, in dem die Geschwindigkeit berechnet werden soll (Kontrollpunkt).  $\vec{w}$  ist die durch Singularitätenbelegungen induzierte Geschwindigkeit. Die detaillierte Vorgangsweise zur analytischen Berechnung von (2.155) wird ebenfalls von *Mracek* in [26] dargestellt, umfasst rund siebzig Seiten und wird daher nicht näher erläutert.

Jedes der sechs Dreiecke verfügt über ein lokales Koordinatensystem, das in Abbildung 2.11 gezeigt wird und mit  $\xi$  bzw.  $\eta$  bezeichnet wurde. Die Wirbeldichten der gebundenen, freien und durchlaufenden Zirkulation liegen bereits in diesen lokalen Systemen vor, vergleiche z.B. Gleichung (2.78).

Soll jene Geschwindigkeit bestimmt werden, die ein Element in einem Kontrollpunkt  $P_k$  induziert, dann wird in zwei Schritten vorgegangen.

- 1.) Berechnung der Induktionen für allgemeine Wirbeldichteverteilungen entlang der sechs Dreiecke I bis VI,
- 2.) Gewichtung und Summation aller Beiträge aus gebundener und freier Wirbeldichte.

Nach Durchführung der Integrationen für das Dreieck  $I$  lässt sich die induzierte Geschwindigkeit in einem Kontrollpunkt schreiben als

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}^I = \mathbf{w}^I \begin{pmatrix} \gamma_1^\xi \\ \gamma_1^\eta \\ \gamma_2^\xi \\ \gamma_2^\eta \\ \gamma_3^\xi \\ \gamma_3^\eta \end{pmatrix}^I. \quad (2.156)$$

Für die einzelnen Dreiecke gilt somit

$$\vec{w}^I = \mathbf{w}^I \tilde{\gamma}^I \quad (2.157)$$

$$\vec{w}^{II} = \mathbf{w}^{II} \tilde{\gamma}^{II} \quad (2.158)$$

$$\vec{w}^{III} = \mathbf{w}^{III} \tilde{\gamma}^{III} \quad (2.159)$$

$$\vec{w}^{IV} = \mathbf{w}^{IV} \tilde{\gamma}^{IV} \quad (2.160)$$

$$\vec{w}^V = \mathbf{w}^V \tilde{\gamma}^V \quad (2.161)$$

$$\vec{w}^{VI} = \mathbf{w}^{VI} \tilde{\gamma}^{VI}. \quad (2.162)$$

Mit der Verwendung der Gleichungen (2.78) bis (2.84), (2.113) bis (2.119) und (2.148) bis (2.154) erhält man schließlich die Störgeschwindigkeit in einem Kontrollpunkt  $k$  zufolge

der Induktionen eines Elementes  $E$  als Funktion der globalen Werte  $\Gamma$  und  $\Gamma'$ .

$$\vec{w}_k^I = \mathbf{w}_k^{I,E}(\mathbf{p}^I \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{I,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{I,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.163)$$

$$\vec{w}_k^{II} = \mathbf{w}_k^{II,E}(\mathbf{p}^{II} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{II,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{II,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.164)$$

$$\vec{w}_k^{III} = \mathbf{w}_k^{III,E}(\mathbf{p}^{III} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{III,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{III,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.165)$$

$$\vec{w}_k^{IV} = \mathbf{w}_k^{IV,E}(\mathbf{p}^{IV} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{IV,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{IV,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.166)$$

$$\vec{w}_k^V = \mathbf{w}_k^{V,E}(\mathbf{p}^V \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{V,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{V,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.167)$$

$$\vec{w}_k^{VI} = \mathbf{w}_k^{VI,E}(\mathbf{p}^{VI} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^E \\ \tilde{\Gamma}'^E \end{pmatrix}) + \mathbf{p}^{VI,f} \tilde{\Gamma}^E + \sum \mathbf{p}^{VI,d,Em} \tilde{\Gamma}'^{Em} \quad (2.168)$$

Die Summen sind über jene Elemente  $Em$  zu bilden, die in der gleichen Elementarflügelspalte in Strömungsrichtung gesehen vor dem induzierenden Element liegen.

Der Zusammenhang zwischen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  wird durch die Gleichung (2.30) definiert.

## 2.8 Ablauf der Induktionsberechnung

Jedes Element, das Teil des Tragflügels ist, verfügt über einen Kontrollpunkt, in dem die kinematische Strömungsbedingung erfüllt werden muss. Alle Elemente des Analysenetzes leisten in diesem Kontrollpunkt einen Beitrag zur Störgeschwindigkeit. Vom numerischen Aspekt stellt die Berechnung der Induktionen den größten Aufwand dar, der mit der Anzahl der Elementarflügel quadratisch anwächst.

Die Berechnung wird jeweils für eine Elementspalte durchgeführt und erstreckt sich von der Flügeleintrittskante bis in den Nachlauf. Die Richtung der Abarbeitung einzelner Elemente folgt somit der globalen Strömungsrichtung. Die freie Wirbeldichte, die davorliegende Elemente freisetzen (durchlaufende Wirbeldichten), muss ebenfalls berücksichtigt werden. Sobald die induzierten Geschwindigkeiten der Elemente einer Spalte für alle Kontrollpunkt-

te ermittelt wurden, wird eine neue Spalte, wiederum beginnend an der Eintrittskante, abgearbeitet.

Um den Aufwand der Modellbildung und die Rechenzeiten zu reduzieren, können auch Halbmodelle verwendet werden. Trotz Symmetrie müssen die Induktionen der zweiten, fiktiven Hälfte erfasst werden. D.h. es induzieren gleich viele Elemente wie beim Vollmodell, aber die Anzahl der Kontrollpunkte ist nur halb so groß. Bei der Ausnutzung der Symmetrie kann somit die CPU-Zeit zur Berechnung der Induktion um die Hälfte reduziert werden. Die vollbesetzten Gleichungssysteme können mit den verwendeten Verfahren in einem Viertel der Zeit gelöst werden.

Die Induktionsanteile der fiktiven Hälfte werden so berechnet, dass die Kontrollpunkte durch Spiegelung an der Symmetrieebene verdoppelt und die durch die modellierte Flügelhälfte induzierten Geschwindigkeiten in diesen zusätzlichen Knoten bestimmt werden. Diese so berechneten Geschwindigkeitsvektoren werden dann durch Spiegelung wieder in die reale Hälfte rücktransformiert und sind identisch mit den gesuchten Induktionen des fiktiven Flügels. Auch der Bodeneffekt kann auf ähnliche Weise berücksichtigt werden.

## 2.9 Stationäre Kutta-Bedingung

Wie bereits in den einleitenden Kapiteln angedeutet, wird die Kutta-Bedingung, d.h. keine Umströmung der Flügelhinterkante, durch das Wirbelmodell implizit erfüllt. Die Wirbellinie entlang der Hinterkante ist identisch Null. Damit wird die Wirbeldichtebelegung an der Hinterkante ebenfalls gleich Null und es kann keine Umströmung stattfinden.

## 2.10 Bestimmungsgleichung für die Singularitäten

Die Strömungsgeschwindigkeit in einem Kontrollpunkt  $k$  setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit des freien Luftstroms  $\vec{v}_\infty$  und der Störgeschwindigkeit, die durch die Singularitätenbelegung induziert wird.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_\infty + \vec{w}_k \quad (2.169)$$

Mit dem im Punkt  $k$  normal auf die Oberfläche stehenden Vektor  $\vec{n}_k$  lässt sich die kinematische Strömungsbedingung schreiben als

$$(\vec{v}_\infty + \vec{w}_k) \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (2.170)$$

bzw.

$$\vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_k. \quad (2.171)$$

Das gesamte Gleichungssystem sieht wie folgt aus

$$\mathbf{W}_n \Gamma' = \begin{pmatrix} -\vec{v}_\infty \vec{n}_1 \\ -\vec{v}_\infty \vec{n}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -\vec{v}_\infty \vec{n}_{N_K} \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}, \quad (2.172)$$

mit  $N_K$  als der Gesamtanzahl an Kontrollpunkten. Die Einflussmatrix  $\mathbf{W}_n$  beinhaltet somit die in den einzelnen Kontrollpunkten induzierten Geschwindigkeiten normal auf die Oberfläche. In jedem Kontrollpunkt werden noch zwei weitere Richtungen definiert:

1.  $\vec{r}$ : ist in Richtung der globalen Anströmung orientiert und steht normal auf  $\vec{n}$ ,
2.  $\vec{s}$ : bildet mit  $\vec{r}$  und  $\vec{n}$  ein orthogonales System.

Mittels dieser Richtungen werden noch zwei weitere Einflussmatrizen abgespeichert:  $\mathbf{W}_r$ ,  $\mathbf{W}_s$ . Diese werden benötigt um nichtlineare Einflüsse durch Induktionen in Anströmrichtung bei der Auftriebsberechnung zu berücksichtigen.

Für die spätere Analyse des induzierten Widerstandes werden zusätzlich drei Matrizen abgespeichert, die nur die Induktion der freien bzw. durchlaufenden Zirkulationen enthalten:  $\mathbf{W}_r^i$ ,  $\mathbf{W}_s^i$  und  $\mathbf{W}_n^i$

Für die Bestimmung weiterer wichtiger Einflussmatrizen wird je Elementarflügel die gebundene Zirkulation in einem diskreten Wirbel entlang der Mittellinie des Elementes zusammengefasst und die Induktionen berechnet (siehe Abschnitt 2.12):  $\mathbf{W}_r^{d,i}$ ,  $\mathbf{W}_s^{d,i}$ ,  $\mathbf{W}_n^{d,i}$

Angesichts der großen Anzahl der Matrizen stellt sich die berechtigte Frage nach dem Speicherplatzbedarf des Verfahrens. Der Platzbedarf ist größer als bei den beiden Verfahren, die als Ausgangspunkt dienten (Mehrfach/Traglinienverfahren nach *Horstmann* bzw. Wirbelpanelverfahren nach *Mracek*). Allerdings soll dieses Verfahren für die Struktur-Fluid-Interaktion herangezogen werden. Das Tragflächenverfahren hat pro Knoten einen Freiheitsgrad, während ein Knoten des Strukturmodells mindestens drei Freiheitsgrade aufweist. Durch die simultane Koppelung geht die Bandstruktur verloren und es muss mit vollbesetzten Matrizen gerechnet werden. Damit liegt der Speicherplatzbedarf des Fluid-Programms in der gleichen Größenordnung wie der der FE-Analyse. Ferner verfügen in der heutigen Zeit schon einfache PC's über ausreichenden Arbeitsspeicher.

Durch die der Gleichung (2.172) werden die unbekanntenen Größen  $\Gamma'$  bestimmt.

$$\tilde{\Gamma}' = \mathbf{W}_n^{-1} \tilde{B} \quad (2.173)$$

In der numerischen Umsetzung erfolgt keine Invertierung, sondern eine Dreieckszerlegung von  $\mathbf{W}_n$ . Die Implementierung erfolgt dabei nach *Press et al.* [29]. Durch rückwärts Einsetzen werden dann die Unbekannten bestimmt. Mit der Gleichung (2.30) erhält man die Werte für  $\Gamma$ , womit die Singularitätenbelegung bestimmt ist:

$$\tilde{\Gamma} = \mathbf{L} \tilde{\Gamma}'. \quad (2.174)$$

## 2.11 Aerodynamische Kräfte

Für die Fluid-Struktur-Interaktion sind nicht nur Gesamtauftrieb und induzierter Widerstand von Interesse, sondern die Lasten aufgrund der Druckverteilungen.

Zunächst wird die in den Kontrollpunkten induzierte Geschwindigkeit berechnet:

$$\tilde{w}_r = \mathbf{W}_r \tilde{\Gamma}' \quad (2.175)$$

$$\tilde{w}_s = \mathbf{W}_s \tilde{\Gamma}' \quad (2.176)$$

$$\tilde{w}_n = \mathbf{W}_t \tilde{\Gamma}' \quad (2.177)$$

Dabei stellen die Vektoren der rechten Seite die r,s,n-Komponenten der Kontrollpunktgeschwindigkeiten dar. Nach einer Transformation auf das globale Koordinatensystem und der Addition mit  $\vec{v}_\infty$  ist für jeden Kontrollpunkt die Strömungsgeschwindigkeit in globalen Koordinaten bestimmt.

$$w_x = r_x w_r + s_x w_s + n_x w_n \quad (2.178)$$

$$w_y = r_y w_r + s_y w_s + n_y w_n \quad (2.179)$$

$$w_z = r_z w_r + s_z w_s + n_z w_n \quad (2.180)$$

Durch Mittelung aus den angrenzenden Elementen wird für jeden Knoten des Analyse-netzes eine Geschwindigkeit  $\vec{v}_j$  – bzw. in gleichwertiger Schreibweise  $\vec{v}_{(i)}^{\text{Ek}}$  – berechnet. Für einen Elementarflügel sind somit neben der Wirbeldichtebelegung auch die Strömungsgeschwindigkeiten in den vier Eckpunkten bestimmt. Unter Berücksichtigung der Dichte des

Fluids  $\rho$  können die lokalen Auftriebskraftdichten berechnet werden, hier zum Beispiel für das Element  $E_k$ :

$$\vec{f}_{(1)}^{Ek} = \rho \vec{v}_{(1)}^{Ek} \times \vec{\gamma}_{(1)}^{*Ek}, \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}_{*(1)}^{Ek} = \vec{e}_{(12)} \gamma_{(1)}^{*Ek} \quad (2.181)$$

$$\vec{f}_{(2)}^{Ek} = \rho \vec{v}_{(2)}^{Ek} \times \vec{\gamma}_{(2)}^{*Ek}, \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}_{*(2)}^{Ek} = \vec{e}_{(12)} \gamma_{(2)}^{*Ek} \quad (2.182)$$

$$\vec{f}_{(3)}^{Ek} = \rho \vec{v}_{(3)}^{Ek} \times \vec{\gamma}_{(3)}^{*Ek}, \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}_{*(3)}^{Ek} = \vec{e}_{(43)} \gamma_{(3)}^{*Ek} \quad (2.183)$$

$$\vec{f}_{(4)}^{Ek} = \rho \vec{v}_{(4)}^{Ek} \times \vec{\gamma}_{(4)}^{*Ek}, \quad \text{mit} \quad \vec{\gamma}_{*(4)}^{Ek} = \vec{e}_{(43)} \gamma_{(4)}^{*Ek} \quad (2.184)$$

Die verteilte Last an einer beliebigen Stelle  $r, s$  im Element ergibt sich durch Überlagerung der vier einzelnen Verteilungen.

$$\vec{f}(r, s) = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_{(i)}^{Ek} \varphi_{(i)}(r, s) \quad (2.185)$$

Die Anteile  $\varphi_{(i)}(r, s)$  stellen dabei bilineare Interpolationsfunktionen dar, wie sie beispielsweise bei isoparametrischen Finiten Elementen verwendet werden, um sowohl die Geometrie als auch die Verschiebungen zu interpolieren. Der Einfachheit halber wird davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeiten innerhalb des Elementes nur geringfügig variieren und somit die Auftriebskraftdichteverteilung, wie auch die Wirbeldichtebelegung, ebenfalls bilinear interpoliert werden kann. Die Gleichungen (2.181) bis (2.184) liefern die entsprechenden Werte in jedem der vier Elementknoten (1) bis (4).

In Hinblick auf die Koppelung des Verfahrens mit der Methode der Finiten Elemente werden in weiterer Folge konsistente Knotenkräfte berechnet, denen wie bereits erwähnt eine bilineare Interpolation der Verschiebungen innerhalb des Elementes zu Grunde liegt. Unter konsistenten Knotenlasten ist dabei zu verstehen, dass die resultierenden diskreten Lasten die gleiche virtuelle Arbeit leisten wie die verteilten Lasten, siehe *Rammerstorfer* [32], *Bathe* [5].

$$\underline{\tilde{F}}^E \cdot \delta \underline{U}^E = \int_O \vec{f} \cdot \delta \vec{u}_O dO, \quad (2.186)$$

mit den Knotenlasten

$$\underline{\tilde{F}}^E = \begin{pmatrix} F_{x(1)} \\ F_{y(1)} \\ F_{z(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{x(4)} \\ F_{y(4)} \\ F_{z(4)} \end{pmatrix}^E, \quad (2.187)$$

den Verschiebungen

$$\underline{U}^E = \begin{pmatrix} U_{x(1)} \\ U_{y(1)} \\ U_{z(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{x(4)} \\ U_{y(4)} \\ U_{z(4)} \end{pmatrix}^E \quad (2.188)$$

und der Verschiebung innerhalb des Elementes

$$\vec{u}_O(r, s) = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}_{(i)} \varphi_{(i)}(r, s). \quad (2.189)$$

Mittels Gleichung (2.186) erhält man somit die Element-Knotenkräfte  $\underline{F}^E$ , die aufgrund der Druckdifferenz zwischen Flügelober- und Unterseite entsteht.

Wird zum Beispiel ein planarer Flügel in einer zweidimensionalen Strömung analysiert, dann führt diese Integration der Druckverteilung auf eine Auftriebskraft  $\vec{N}$ , die normal auf die Flügelebene steht (siehe Abbildung 2.18).

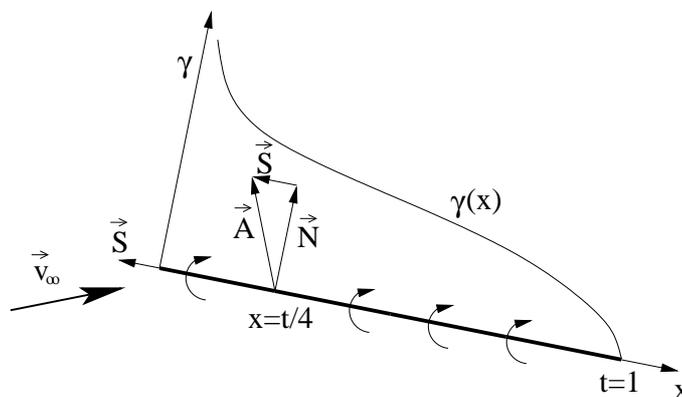


Abbildung 2.18: Normalkraft einer angestellten Platte

Würde nur die Kraft  $\vec{N}$  wirken, dann hätte der Flügel selbst bei einer Potentialströmung einen Widerstand. Bekanntlich steht jedoch bei einer zweidimensionalen Strömung der Auftrieb senkrecht auf die Anströmung  $\vec{v}_\infty$  und es gilt für einen Flügel mit der Breite  $B$ :

$$A = \rho B v_\infty \int_{x=0}^{x=t} \gamma(x) dx = \rho B v_\infty \Gamma. \quad (2.190)$$

Die Differenz zwischen  $\vec{N}$  und  $\vec{A}$  wird als Saugkraft  $S$  bezeichnet, siehe dazu [34].

$$\vec{A} = \vec{N} + \vec{S}. \tag{2.191}$$

Bei dem oben gezeigten Beispiel des unendlich dünnen, planaren Flügels existiert an der Profilnase bekanntlich eine Singularität in der Wirbeldichte der Form  $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$  [34] die die Saugkraft hervorruft. Es handelt sich dabei um eine Umströmung der Vorderkante mit unendlich hoher Geschwindigkeit. Die Saugkraft ist dabei in Richtung der Profilsehne orientiert. Die direkte Berechnung der Saugkraft aus dem durch das Tragflächenverfahren ermittelten Verlauf für  $\gamma$  ist nicht möglich, weil die Eintrittskantensingularität nicht korrekt erfasst wird und nur endliche Werte für die Belegungsdichten errechnet werden. Im Vergleich dazu ermöglicht das VLC-QCC nach *Schoop et al.* [36] eine direkte Berechnung. Der Nachteil dieses Verfahrens wurde an früherer Stelle besprochen. Das Verfahren von *Horstmann* ist wie bereits mehrfach erwähnt ein lineares Verfahren. Der Auftrieb wird dabei direkt aus der Anströmung und den Traglinien berechnet.

Im Falle einer dreidimensionalen Potentialströmung ist die Ermittlung der Saugkraft schwieriger, weil neben dem Auftrieb auch noch der induzierte Widerstand eine Rolle spielt, siehe Abbildung 2.19. Wiederum steht der Auftrieb normal auf  $\vec{v}_\infty$ . Der induzierte Widerstand

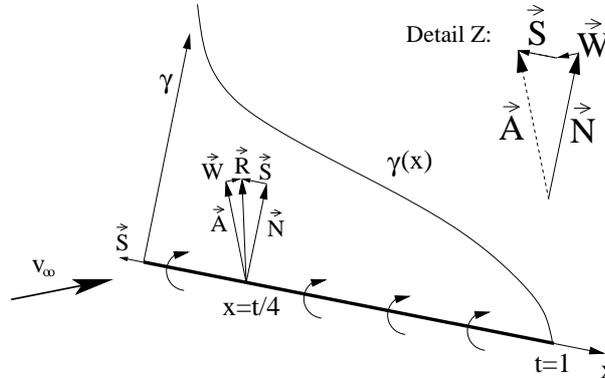


Abbildung 2.19: Resultierende Kräfte an einer ebenen Tragfläche

wirkt in Anströmrichtung. Beide Vektoren bilden die resultierende Luftkraft  $\vec{R}$ . Die Normalkraft  $\vec{N}$  sowie die Saugkraft  $\vec{S}$  ergeben zusammen ebenfalls  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{W} = \vec{N} + \vec{S}. \tag{2.192}$$

Die Bestimmung von  $\vec{S}$  ist in Abbildung 2.19 im Detail Z skizziert. Dabei werden die beiden Vektoren  $\vec{N}$  und  $\vec{W}$  durch Oberflächenintegrale direkt bestimmt. Von  $\vec{A}$  und  $\vec{S}$  sind

die Richtungen bekannt und durch die Bestimmung des Schnittpunktes sind die Vektoren vollständig bestimmt.

Der Nachteil dieser Vorgangsweise ist, dass sie in dieser Form nur für planare Flügel anwendbar ist, weil nur in diesem Fall die Richtung der Saugkraft a priori bekannt ist. Generell kann man zwar davon ausgehen, dass die Saugkraft in Richtung der Profilsehne wirkt, die Definition der Sehne ist jedoch speziell bei Tragflächen mit Klappen physikalisch nicht eindeutig bzw variiert je nach Klappenausschlag.

Die Methode, die in diesem Tragflächenverfahren angewendet wird, behandelt jeden Elementarflügel als Einzelfläche und bestimmt dadurch eine fiktive Saugkraft bzw. Tangentialkraft in den Elementknoten (3) und (4), die die Gleichung (2.192) erfüllt. Innerhalb einer Elementspalte werden dann alle Tangentialkräfte der Knoten (3) und (4) addiert und auf die beiden Knoten der Eintrittskante aufgebracht. Bei dieser Vorgangsweise muss zwischen einfachem bzw. mit Klappen versehenem Flügel nicht speziell unterschieden werden.

Zusammenfassend gilt:

- Knoten, die nicht auf der Eintrittskante liegen, haben eine aerodynamische Last, die normal auf die Fläche steht,
- Knoten entlang der Eintrittskante werden zusätzlich für die Aufbringung der Saugkraft herangezogen.

## 2.12 Induzierter Widerstand

### 2.12.1 Die Ermittlung des induzierten Widerstands am Ort des Flügels

Der wesentliche Unterschied zum Verfahren von *Horstmann* besteht darin, dass der induzierte Widerstand direkt am Ort des Flügels berechnet wird und nicht in der sogenannten Trefftz-Ebene, weit hinter dem Flügel. Durch die Einschränkung auf kleine Anstellwinkel und die Anordnung der freien Wirbelschichten parallel zur X-Achse des Flügelkoordinatensystems lässt sich der Munk'sche Verschiebungssatz anwenden. Der Verschiebungssatz (siehe z.B. [34]) besagt im Wesentlichen, dass die Position der tragenden Wirbeldichten in Anströmrichtung gesehen keinen Einfluss hat auf den gesamten induzierten Widerstand. Damit kann der Tragflügel in eine auf die Anströmrichtung normal stehende Ebene (Trefftz-

zebene) projiziert werden. Ein weiterer Grund für ein Ausweichen auf die Trefftz-Ebene besteht in numerischen Schwierigkeiten, die bei gepfeilten Flügeln auftreten. Bekanntlich induzieren die bei einem schiebenden Flügel von einer Traglinie abgehenden freien Wirbelschichten am Ort der Traglinie unendlich hohe Geschwindigkeiten, siehe dazu auch *Horstmann*. Damit ist die direkte Berechnung des induzierten Widerstandes am Ort der Traglinien nicht möglich.

Eine Verwendung der Trefftz-Ebene ist für das Tragflächenverfahren nicht sinnvoll, da es zu starken Einschränkungen führen würde. Diese sind die Beschränkung auf kleine Anstellwinkel und stationäre Strömungen.

Ein interessanter Aspekt der flächenhaften Wirbelbelegung liegt in der Tatsache, dass bei diesem Verfahren durch die freien Wirbelschichten  $\gamma^f$  bzw.  $\gamma^d$  nur endliche Geschwindigkeiten am Ort des Flügels induziert werden. Die freien Wirbelschichten beginnen nämlich an der Vorderkante mit dem Wert Null und nehmen erst in Strömungsrichtung, d.h. in Spaltenrichtung, sukzessive zu. Damit kann für den gesamten Tragflügel das durch die freigesetzte Zirkulation induzierte Abwindfeld berechnet werden. Die entsprechenden Einflussmatrizen, die die Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten im Kontrollpunkt ergeben, wurden im Abschnitt 2.10 angeführt.

Eine weitere Besonderheit besteht darin, dass durch die Art des Wirbelmodells die gebundene Zirkulation ebenfalls Geschwindigkeiten induzieren kann, die in weiterer Folge induzierten Widerstand verursachen. Dies ist bei gepfeilten Flügeln der Fall bzw. auch bei einem Knick in der Tragfläche.

In Abbildung 2.20 ist zunächst der Fall dargestellt, bei dem zwei Wirbelelemente die gleiche Orientierung aufweisen. Die in Strömungsrichtung verlaufenden Wirbelteile (strichlierte Linien), die zusammen mit dem gebundenen Anteil ein differentielles Hufeisenwirbelelement ergeben, sind in der Folge nicht berücksichtigt. Es soll an dieser Stelle nur die Interaktion der tragenden Wirbel betrachtet werden. Es gilt für den aus der gebundenen Zirkulation resultierenden induzierten Widerstand  $d^2W_i$

$$d^2W_i = d^2W_{12} + d^2W_{21} = -d\Gamma_1 dw_{21}\rho - d\Gamma_2 dw_{12}\rho \quad (2.193)$$

$$d\Gamma_1 = \gamma_1 dx \quad (2.194)$$

$$d\Gamma_2 = \gamma_2 dx \quad (2.195)$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.196)$$

$$a = x_2 - x_1 \quad (2.197)$$

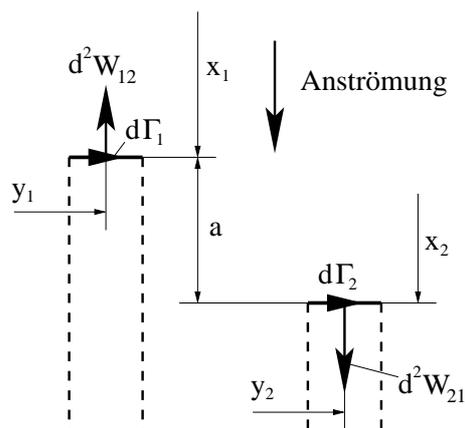


Abbildung 2.20: Induzierter Widerstand gebundener, gleich orientierter Wirbeldichte

Dabei sind  $dw_{12}$  und  $dw_{21}$  die von  $d\Gamma_1$  und  $d\Gamma_2$  induzierten Geschwindigkeiten:

$$dw_{12} = -\frac{d\Gamma_1}{4\pi} \frac{a}{r^3}, \tag{2.198}$$

$$dw_{21} = \frac{d\Gamma_2}{4\pi} \frac{a}{r^3}. \tag{2.199}$$

Schließlich erhält man unter Verwendung von Gleichung (2.193) bis (2.199) folgende Beziehung

$$d^2W_i = d\Gamma_1 \frac{d\Gamma_2}{4\pi} \frac{a}{r^3} \rho - d\Gamma_2 \frac{d\Gamma_1}{4\pi} \frac{a}{r^3} \rho = 0 \tag{2.200}$$

Aus Gleichung (2.200) ist erkennbar, dass gebundene Wirbeldichten untereinander keinen induzierten Widerstand erzeugen, sofern sie gleich orientiert sind.

In Abbildung 2.21 sind die beiden Wirbelelemente  $d\Gamma_1$  und  $d\Gamma_2$  nicht gleich orientiert.

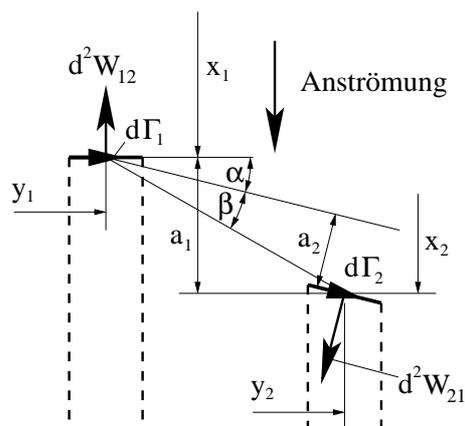


Abbildung 2.21: Induzierter Widerstand gebundener, ungleich orientierter Wirbeldichte

$$d^2W_i = d^2W_{12} + d^2W_{21} \cos \alpha = -d\Gamma_1 dw_{21} \rho - d\Gamma_2 dw_{12} \rho \cos \alpha \quad (2.201)$$

$$d\Gamma_1 = \gamma_1 dx \quad (2.202)$$

$$d\Gamma_2 = \gamma_2 dx \quad (2.203)$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.204)$$

$$a_1 = x_2 - x_1 = r \sin(\alpha + \beta) \quad (2.205)$$

$$a_2 = r \sin \beta \quad (2.206)$$

Dabei sind  $dw_{12}$  und  $dw_{21}$  die von  $d\Gamma_1$  und  $d\Gamma_2$  induzierten Geschwindigkeiten:

$$dw_{12} = -\frac{d\Gamma_1 a_1}{4\pi r^3}, \quad (2.207)$$

$$dw_{21} = \frac{d\Gamma_2 a_2}{4\pi r^3}. \quad (2.208)$$

Die Abstände  $a_1$  und  $a_2$  sind in Abbildung 2.21 dargestellt. Schließlich erhält man unter Verwendung von Gleichung (2.201) bis (2.208) folgende Beziehung für den Widerstand in Anströmrichtung

$$d^2W_i = d\Gamma_1 \frac{d\Gamma_2 r \sin(\alpha + \beta)}{4\pi r^3} \rho - d\Gamma_2 \frac{d\Gamma_1 r \sin \beta}{4\pi r^3} \rho \cos \alpha \neq 0. \quad (2.209)$$

Aus Gleichung (2.209) ist ersichtlich, dass der Widerstand im Allgemeinen bei ungleich-orientierten Wirbeldichten nicht verschwindet. Genau dieser Fall tritt bei gepfeilten Tragflächen oder bei Knicken in der Tragfläche auf. Abbildung 2.22 zeigt eine Flügelanordnung mit Pfeilung. In beiden Hälften ist je ein Elementarflügel mit den Wirbeldichten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  dargestellt. In diesem Fall würde die gebundene Zirkulation alleine schon zu induzierten Widerständen führen.

Die genau Berechnung dieses Anteils führt allerdings auf numerische Schwierigkeiten, da sie deutlich aufwendiger wäre und mehr CPU-Zeit erfordern würde als die Bestimmung der Kontrollpunktgeschwindigkeiten. Es müsste nämlich nicht nur die induzierte Geschwindigkeit in einem Punkt des Elementes (Kontrollpunkt) bestimmt, sondern der gesamte Verlauf innerhalb des Elementes ermittelt werden. Der in dieser Arbeit eingeschlagene Weg stellt eine Näherung dar und geht davon aus, dass die Wirbeldichten innerhalb eines Elementarflügels weitgehend in einer Richtung orientiert sind. Damit produziert die gebundene Zirkulation alleine betrachtet für ein einzelnes Element keinen induzierten Widerstand. Diese Annahme führt beispielsweise bei Flügeln mit einer Zuspitzung zu einer Näherung, die allerdings mit steigender Elementanzahl in Spaltenrichtung verbessert wird. In weiterer Folge muss jedoch der Einfluss der gebundenen Zirkulation zwischen verschiedenen

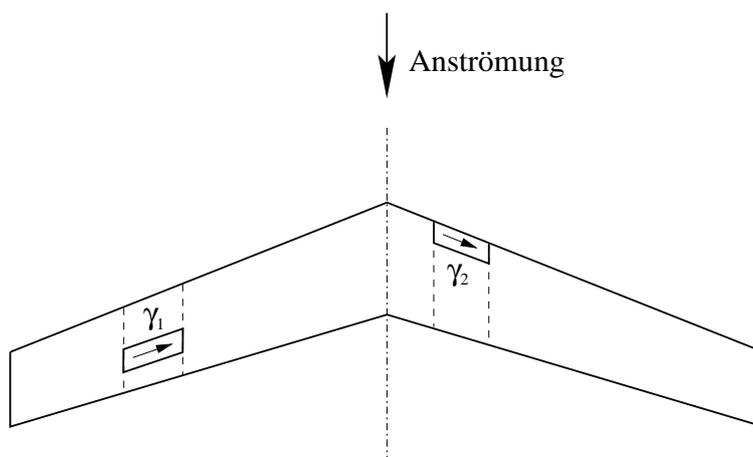


Abbildung 2.22: Wirbeldichten am gepfeilten Flügel

Elementarflügeln erfasst werden. Dabei wäre es naheliegend auf die bereits berechneten Geschwindigkeiten zurückzugreifen, die die gebundenen Wirbeldichten induzieren und für jeden Kontrollpunkt vorliegen. Diese Vorgangsweise würde aber zu einem unbefriedigenden Ergebnis führen, nämlich dass selbst bei rechteckigen Flügeln ein Widerstand entsteht. In Abbildung 2.23 ist wieder die ebene Platte in einer zweidimensionalen Strömung dargestellt. Die Geschwindigkeit, die das Element E1 im Element E2 an der Stelle  $x = \xi_2$

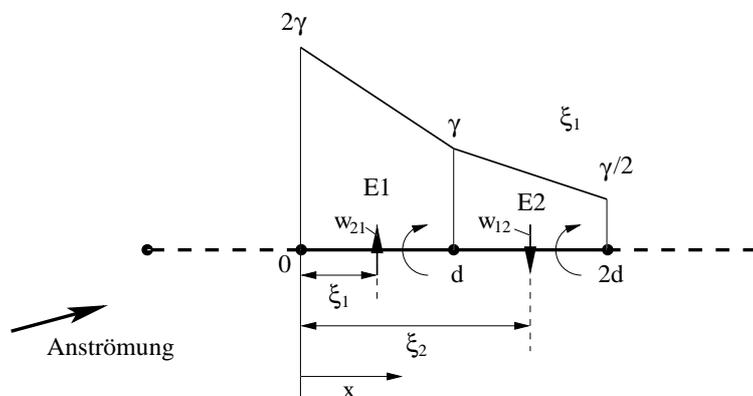


Abbildung 2.23: Gegenseitige Induktion bei Wirbeldichteverteilungen

induziert, beträgt

$$w_{12} = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_0^d \frac{2 - \frac{x}{d}}{\xi_2 - x} dx. \tag{2.210}$$

Die von E2 an der Stelle  $x = \xi_1$  induzierte Geschwindigkeit beträgt

$$w_{21} = \frac{\gamma}{2\pi} \int_d^{2d} \frac{\frac{3}{2} - \frac{x}{2d}}{x - \xi_1} dx. \tag{2.211}$$

Will man den induzierten Widerstand mit diesen Geschwindigkeiten ermitteln, indem die Wirbeldichten des Elementes mit den Kontrollpunktsgeschwindigkeiten multipliziert werden, dann erhält man

$$W_i = -w_{21} \frac{3\gamma d}{2} - w_{12} \frac{3\gamma d}{4} \neq 0. \quad (2.212)$$

Das bedeutet, diese Vorgangsweise würde sogar bei einer zweidimensionalen Strömung zu Widerstandswerten führt.

Um dieses Problem zu umgehen, wird die Wirbeldichte innerhalb eines Elementes in der Mittellinie zu einem diskreten Wirbel zusammengefasst und sowohl die induzierten Geschwindigkeiten als auch die Ermittlung des Widerstandes mit diesen Wirbeln durchgeführt. In Abbildung 2.24 sind die diskreten Wirbel  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  abgebildet. Mit

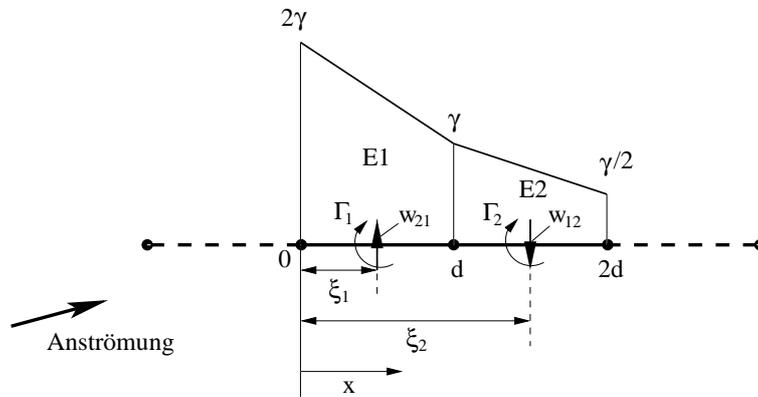


Abbildung 2.24: Gegenseitige Induktion diskreter Wirbel

$$\Gamma_1 = \frac{3\gamma d}{2} \quad (2.213)$$

$$\Gamma_2 = \frac{3\gamma d}{4} \quad (2.214)$$

ergeben sich die induzierten Geschwindigkeiten zu

$$w_{12} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi(\xi_2 - \xi_1)}, \quad (2.215)$$

$$w_{21} = \frac{\Gamma_2}{2\pi(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (2.216)$$

Damit erhält man für den durch gebundene Zirkulation verursachten induzierten Widerstand

$$W_i = -\frac{\Gamma_2}{2\pi(\xi_2 - \xi_1)}\Gamma_1 + \frac{\Gamma_1}{2\pi(\xi_2 - \xi_1)}\Gamma_2 = 0, \quad (2.217)$$

der natürlich bei zweidimensionalen Problemen verschwinden muss.

Die Anwendung beim dreidimensionalen Tragflächenverfahren lässt sich somit zusammenfassen:

- ein einzelner Elementarflügel kann durch seine gebundene Wirbeldichte alleine keinen induzierten Widerstand erzeugen,
- die gebundene Wirbeldichte wird entlang der Elementarflügel-Mittellinie (Spannweitenrichtung) zu einem diskreten Wirbel zusammengezogen,
- mittels dieser Wirbel werden induzierte Geschwindigkeiten berechnet,
- diese Geschwindigkeiten wirken wiederum nur auf die diskreten Wirbel anderer Elementarflügel und können so einen induzierten Widerstand verursachen.

### 2.12.2 Berechnung des induzierten Widerstands

Mittels der im Abschnitt 2.10 eingeführten Einflussmatrizen werden für jeden Kontrollpunkt zwei Geschwindigkeitsvektoren bestimmt.

1. jene Geschwindigkeit  $\vec{w}^i$ , die durch die freien Wirbelschichten  $\gamma^f$  und  $\gamma^d$  induziert wird,
2. jene Geschwindigkeit  $\vec{w}^{d,i}$ , die durch die diskreten Wirbellinien induziert werden.

Die unter Punkt 1.) angeführten Kontrollpunktgeschwindigkeiten werden durch Mittelung aus umliegenden Elementarflügeln in Werte für die Knotenpunkte  $\vec{v}_{(i)}^{i,Ek}$  übergeführt. Mit diesen Werten wird schließlich der induzierte Widerstand eines Elementarflügels ermittelt.

Für die Kraftdichte in Flugrichtung zufolge  $\gamma^f$  und  $\gamma^d$  ergibt sich

$$f_{(i)}^{wi,Ek} = \rho \frac{\vec{v}_\infty}{|\vec{v}_\infty|} (\vec{v}_{(i)}^{i,Ek} \times \vec{\gamma}_{(i)}^{*,Ek}). \quad (2.218)$$

Diese Verteilung wird wiederum bilinear interpoliert und integriert (siehe frühere Abschnitte) und liefert pro Knoten (1) bis (4) einen Widerstandswert  $F_{(1)}^{wi,Ek}$  bis  $F_{(4)}^{wi,Ek}$ .

Die Berechnung des induzierten Widerstandes zufolge der zu diskreten Wirbeln konzentrierten gebundenen Wirbeldichten erfolgt in ähnlicher Weise. Die induzierte Geschwindigkeit

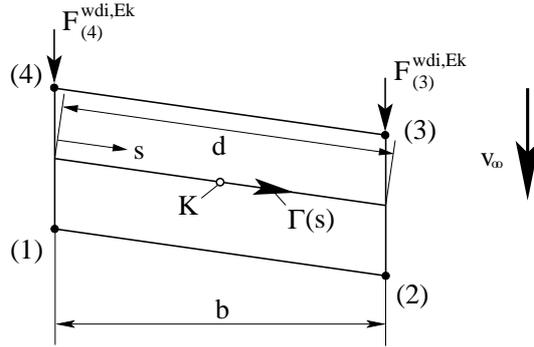


Abbildung 2.25: Induzierter Widerstand des diskreten Wirbels

liegt im Kontrollpunkt  $K$  vor und wird für das gesamte Element als konstant angenommen. Mittels der Beziehungen (siehe dazu auch Abbildung 2.25)

$$\Gamma(s) = a + bs + cs^2, \quad (2.219)$$

$$F^{\text{w,di,Ek}} = \rho \frac{\vec{v}_\infty}{|\vec{v}_\infty|} \int_0^d \vec{w}^{\text{d,i}} \times \vec{\Gamma}(s) ds, \quad (2.220)$$

$$M^{\text{w,di,Ek}} = \rho \frac{\vec{v}_\infty}{|\vec{v}_\infty|} \int_0^d \vec{w}^{\text{d,i}} \times \vec{\Gamma}(s) s ds, \quad (2.221)$$

$$s^{\text{wi}} = \frac{M^{\text{w,di,Ek}}}{F^{\text{w,di,Ek}}}, \quad (2.222)$$

$$F_{(3)}^{\text{w,di,Ek}} = F^{\text{w,di}} \frac{s^{\text{wi}}}{d}, \quad (2.223)$$

$$F_{(4)}^{\text{w,di,Ek}} = F^{\text{w,di}} - F_{(3)}^{\text{w,di,Ek}}. \quad (2.224)$$

Der Verlauf von  $\Gamma$  folgt der gleichen Ordnung wie die der Wirbellinien und ist durch ein quadratisches Polynom gegeben. Der Wert  $F^{\text{w,di,Ek}}$  ist der gesamte Widerstand in Richtung von  $\frac{\vec{v}_\infty}{|\vec{v}_\infty|}$ . Für die Aufteilung des Widerstandes zwischen den Knoten (3) und (4) wird noch das Moment  $M^{\text{w,di,Ek}}$  und die Wirkungslinie  $s^{\text{wi}}$  der resultierenden Einzelkraft ermittelt. Nach dem Hebelgesetz ergeben sich dann die Werte für  $F_{(3)}^{\text{w,di,Ek}}$  und  $F_{(4)}^{\text{w,di,Ek}}$ .

Mit den Werten  $F_{(1)}^{\text{wi,Ek}}$  bis  $F_{(4)}^{\text{wi,Ek}}$  und  $F_{(3)}^{\text{w,di,Ek}}$  sowie  $F_{(4)}^{\text{w,di,Ek}}$  lassen sich dann für ein Element  $E_k$  die Saug- bzw. Tangentialkräfte bestimmen. Diese Werte werden anschließend innerhalb jeder Spalte aufsummiert und auf die Knoten der Flügelseintrittskante aufgebracht.

## 2.13 Aerodynamische Beiwerte

Zwischen zwei Elementspalten verläuft eine Knotenspalte, die in Strömungsrichtung ausgerichtet ist. Die aerodynamischen Beiwerte werden für jede Knotenspalte (Flügelposition  $j$ ) ermittelt und auf die globale Anströmung bezogen:

$$q = \frac{|\vec{v}_\infty|^2 \rho}{2}, \quad (2.225)$$

$$c_{aj} = \frac{|\vec{A}_j|}{qt_j b_j}, \quad (2.226)$$

$$c_{nj} = \frac{|\vec{N}_j|}{qt_j b_j}, \quad (2.227)$$

$$c_{wij} = \frac{|\vec{W}_{ij}|}{qt_j b_j}. \quad (2.228)$$

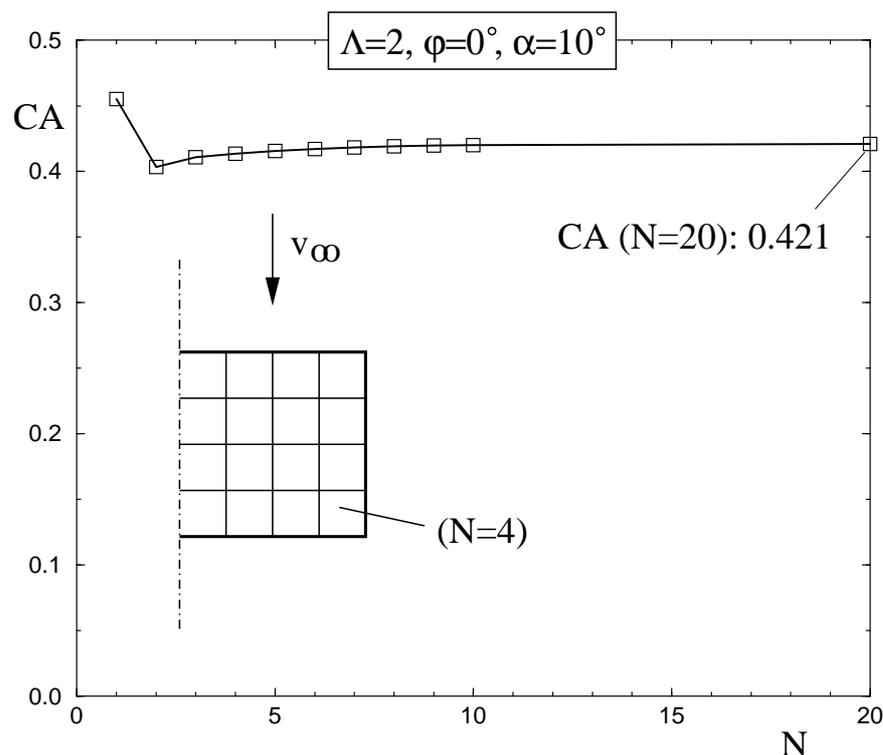
Dabei stellt  $q$  den Staudruck dar und  $c_{aj}$ ,  $c_{nj}$ ,  $c_{wij}$  die dimensionslosen Größen für Auftrieb, Normalkraft und Widerstand. Die lokale Flügeltiefe in Anströmrichtung beträgt  $t_j$ . Die anteilige Flügelspannweite  $b_j$  ergibt sich aus dem Mittelwert der beiden Elementspaltenbreiten  $b$  (siehe Abbildung 2.25), die sich auf beiden Seiten der Knotenreihe befinden.

## 2.14 Beispiele und stationäre Vergleichsrechnungen

In diesem Abschnitt werden Vergleiche mit Ergebnissen anderer Verfahren zur Ermittlung von Auftriebsverteilungen angeführt. Ferner wird ein Projekt vorgestellt, in dem das oben beschriebene Verfahren erfolgreich für eine aerodynamische Auslegung herangezogen wurde.

### 2.14.1 Konvergenzstudie

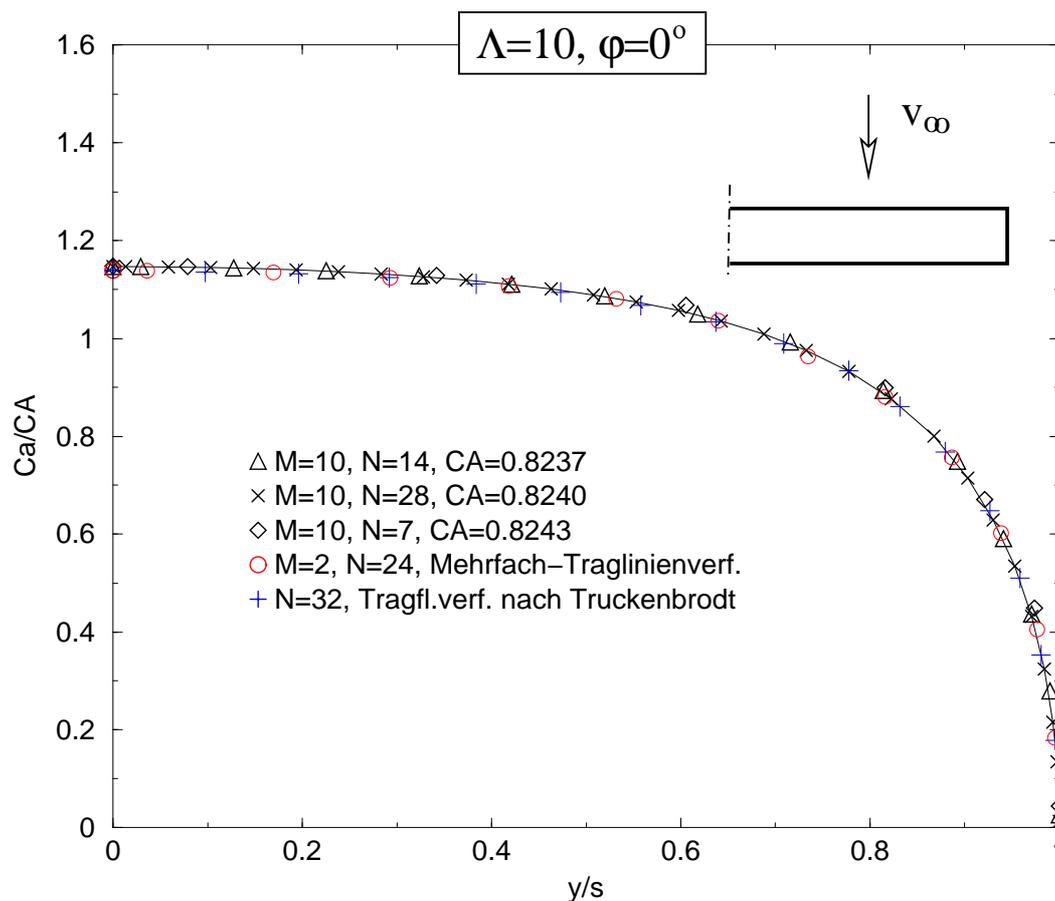
Um die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens zu demonstrieren wurde ein ungepfeilter Flügel mit der geringen Streckung von  $\Lambda = 2$  und einem Anstellwinkel von 10 Grad bei unterschiedlicher Netzfeinheit analysiert. Aufgrund der symmetrischen Anordnung wird nur eine Hälfte des Flügels betrachtet. Als Ergebnis ist dabei der Gesamtauftriebsbeiwert  $c_A$  angeführt, der über der Netzfeinheit  $N$  aufgetragen wird. Der Wert  $N$  stellt dabei die Anzahl der Elemente in Tiefen- bzw. in Spannweitenrichtung dar. Die in Abbildung 2.26 gezeigte Anordnung weist ein  $N$  von vier auf. Bei nur einem Element pro Halbflügel liegt

Abbildung 2.26: Einfluss der Diskretisierung auf den  $c_A$ -Beiwert

der Wert um rund 10% über dem exakten Wert, der sich bei rund 20 mal 20 Elementen mit  $c_A = 0.421$  einstellt und auch bei *Schlichting/Truckenbrodt* [34] gefunden werden kann. Bei  $N = 2$  (4 Elementen) beträgt der Fehler nur noch wenige Prozent. Bei einer 10 mal 10 Diskretisierung liegt der Fehler unter einem Prozent.

### 2.14.2 Gerader Flügel

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse unterschiedlicher Diskretisierungen und Verfahren verglichen. Es handelt sich dabei um einen Rechteckflügel mit der Streckung  $\Lambda = 10$ . In Abbildung 2.27 werden normierte Auftriebsbeiwerte  $\frac{c_a}{c_A}$  über der ebenfalls normierten Halbspannweite  $\frac{y}{s}$  dargestellt. Die drei mit dem Wirbelflächenverfahren  $P_4$  berechneten Verteilungen wurden mit unterschiedlicher Netzfeinheit in Spannweitenrichtung (7, 14 und 28) berechnet. Die durchgezogene Linie verbindet dabei die Werte der 10 mal 28 Diskretisierung, welche durch ein kleines x gekennzeichnet wird. In Flügeltiefenrichtung weisen alle drei Netze 10 Elemente auf. Die Unterschiede im Verlauf der Auftriebsverteilung sind sehr gering. Im äußeren Flügelbereich weist das Ergebnis für das grobe Netz etwas höhere

Abbildung 2.27: Vergleich der Auftriebsverteilungen am Rechteckflügel ( $\Lambda = 10$ )

Werte auf. Die Gesamtauftriebsbeiwert  $c_A$  unterscheidet sich jedoch erst im Bereich von Hundertstelprozent.

Zum Vergleich sind noch die Ergebnisse zweier anderer Verfahren dargestellt, nämlich des Mehrfach-Traglinienverfahren nach *Horstmann* [15] sowie des klassischen Tragflächenverfahren nach *Truckenbrodt* [34]. Die Verläufe der Auftriebsverteilung zeigen für alle Verfahren eine sehr gute Übereinstimmung.

Die Abbildung 2.28 zeigt eine Vergleichsrechnung für den induzierten Widerstand gerader Flügel. Wieder werden drei unterschiedliche Verfahren verglichen. Dargestellt wird dabei ein normierter Widerstandsbeiwert. Der Normierungsfaktor ist jener induzierte Widerstandsbeiwert, den eine elliptische Verteilung bei gleichem Auftrieb erzeugen würde. Entlang der horizontalen Achse ist die Diskretisierung  $N$  in Spannweitenrichtung dargestellt. Drei verschiedene Werte der Flügelstreckung sind dabei analysiert worden, ( $\Lambda = 2, 8$  und

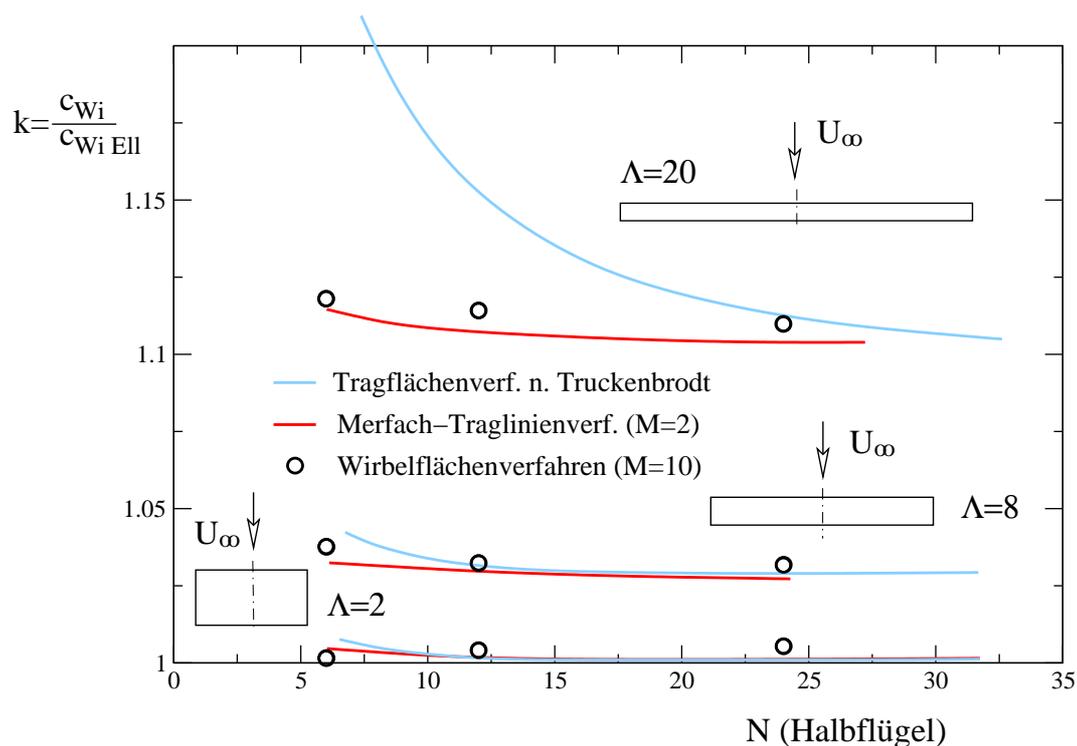


Abbildung 2.28: Induzierter Widerstand von Rechteckflügeln

20). Die blaue Kurve gibt die Ergebnisse des Tragflächenverfahrens nach *Truckenbrodt* [34] wider. Die rote Kurve wurde mit dem Mehrfach-Traglinienverfahren von *Horstmann* berechnet. Dabei ist zu erkennen, dass das Tragflächenverfahren nach *Truckenbrodt* in Spannweitenrichtung eine deutlich feinere Diskretisierung als [15] benötigt, um eine Konvergenz der Widerstandswerte zu erzielen. Die Konvergenzeigenschaften des Wirbelflächenverfahrens  $P_4$  ist dem Verfahren nach *Horstmann* sehr ähnlich. Die geringfügigen Unterschiede ergeben sich aus der Art der Berechnung des Widerstandes. Während das Verfahren von *Horstmann* den induzierten Widerstand in der sogenannten Trefftz-Ebene berechnet, wird im Wirbelflächenverfahren der induzierte Widerstand näherungsweise direkt an der Flügelfläche bestimmt. Die Ermittlung des induzierten Widerstandes in der Trefftz-Ebene ist nur für stationäre Probleme und linearer Theorie zulässig, während das in  $P_4$  implementierte Verfahren diesen Einschränkungen nicht unterliegt.

### 2.14.3 Gepfeilter Flügel

Weitere Vergleichsrechnungen wurden auch für eine gepfeilte Flügelkonfiguration durchgeführt. Wiederum werden Ergebnisse, die mit unterschiedlichen Verfahren bestimmt wurden, gegenübergestellt. Auf der vertikalen Achse ist die Änderung des lokalen Auftriebsbeiwertes  $c_a$  mit dem Anstellwinkel  $\alpha$  abgebildet. Auf der horizontalen Achse ist wiederum die normierte Halbspannweite aufgetragen. Der Flügel weist eine Streckung von  $\Lambda = 6$  auf

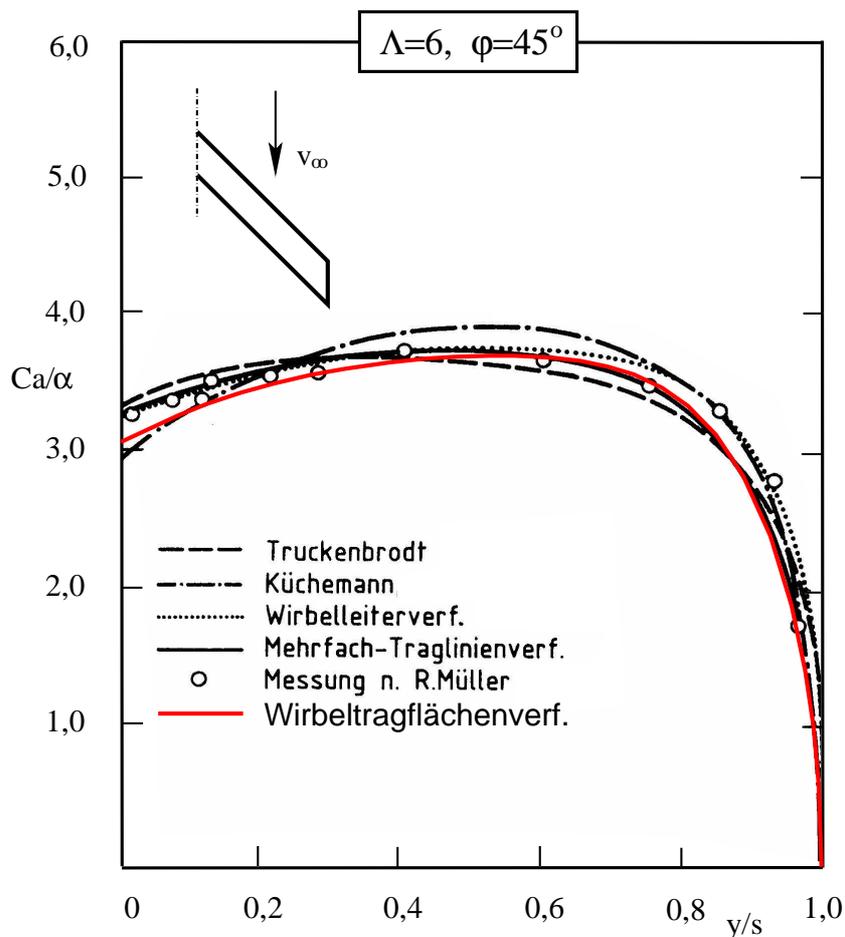


Abbildung 2.29: Vergleich von Auftriebsverteilungen am gepfeilten Flügel

und der Pfeilwinkel beträgt 45 Grad. Je nach Verfahren treten geringfügige Unterschiede auf. Das der vorliegenden Arbeit präsentierte Verfahren liefert Resultate, die im äußeren Flügelabschnitt mit den Ergebnissen nach *Horstmann* weitgehend übereinstimmen. Im Bereich der Flügelmitte ist jedoch der Auftriebseinbruch (Mitteneffekt gepfeilter Flügel) beim Wirbelflächenverfahren größer. Weiters ist aus der Abbildung zu erkennen, dass das Wirbelleitervfahren am Flügelende höhere Werte liefert als das Mehrfach-Traglinien- bzw.

das Wirbelflächenverfahren. Wie bereits im einleitenden Kapitel dieser Arbeit erläutert, kommt es bei Wirbelleiterverfahren zu systematischen Fehlern in der Berechnung der Auftriebsverteilung und somit auch des induzierten Widerstandes. Für eine aerodynamische Auslegung oder Optimierung sind diese Verfahren daher weniger geeignet.

#### 2.14.4 ILFB-Nurflügel: NIKWING

Das Projekt NIKWING wurde 1998 am Institut für Leichtbau und Flugzeugbau der Technischen Universität Wien ins Leben gerufen. Als primäres Ziel galt die Entwicklung eines fußstartfähigen ultraleichten Nurflügels, der zudem noch für Transportzwecke zerlegbar sein sollte. Ein weiterer Aspekt dieses Projektes bestand darin, dass den Studenten die Möglichkeit eröffnet wurde innerhalb unterschiedlicher Lehrveranstaltungen des Instituts an der Weiterentwicklung des Nurflügels zu arbeiten. In Abbildung 2.30 ist der Segler mit seinen wesentlichen Daten dargestellt.

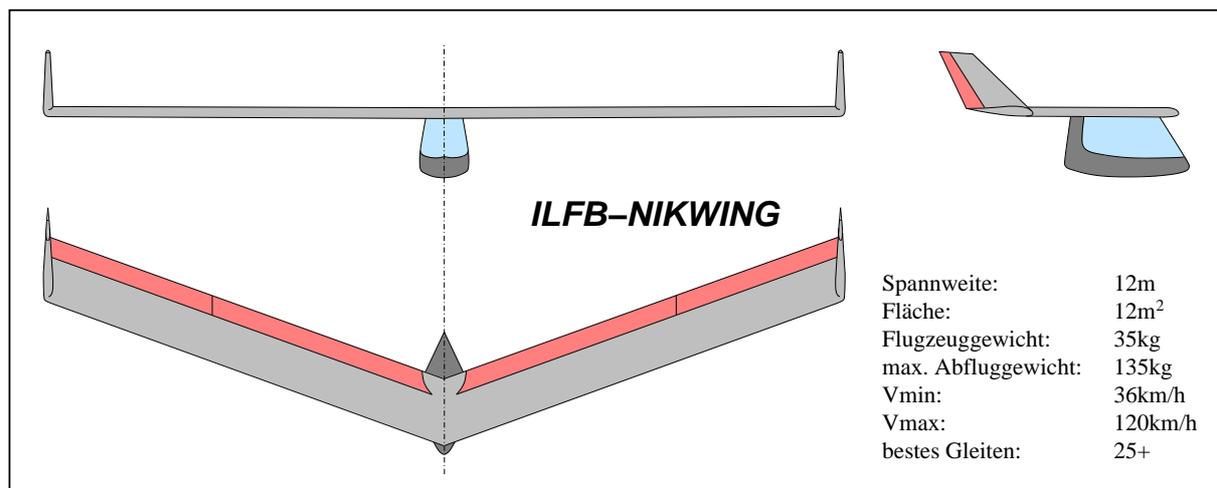


Abbildung 2.30: Geometrie des Nurflügel ILFB-NIKWING

Die aerodynamische Auslegung des Nurflügels erfolgte mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Wirbelflächenverfahren  $P_4$ . Der Nurflügel wird aerodynamisch gesteuert, wobei die kombinierten Höhen/Querruder im Flügelaußenbereich liegen. Die Winglets sind ebenfalls mit Klappen versehen, um die Gierbewegung steuern zu können. Innerhalb der Höhen/Querruder befinden sich die Landeklappen, die im Langsamflug für zusätzlichen Auftrieb sorgen. Sie erstrecken sich über rund 60% der Spannweite. Die Auslegung der Landeklappengröße ist hinsichtlich der Nickmomente kritisch. Wertvolle Hinweise dazu finden sich in dem Buch von *Nickel* und *Wohlfahrt* [28] sowie in den Büchern von *Horten*

[14] bzw. *Lippisch* [21]. Einerseits erzeugt ein Klappenausschlag starke negative Momente (Vorwärtsskippen), andererseits entsteht zusätzlicher Auftrieb vor dem Schwerpunkt, was wiederum zu einem positiven Nickmoment führt. Üblicherweise lässt sich eine Klappenkonfiguration finden, die hinsichtlich ihrer Nickmomente ausgeglichen ist. Für den NIKWING wurde eine Konfiguration gewählt, die ein leicht negatives Moment erzeugt. Damit soll gewährleistet werden, dass die örtliche  $c_a$ -Belastung des Flügels im Höhenruderbereich im Langsamflug konstant bleibt oder sogar etwas abnimmt. Diese Vorgangsweise soll verhindern, dass es während des Laufstarts zu Strömungsabrissen in den äußeren Flügelbereichen kommt. Speziell in der Startphase kann der Flügel aufgrund von Bodenturbulenzen starken Schwankungen der lokalen Anstellwinkel ausgesetzt sein. Ein Strömungsabriss im Außenbereich würde dabei gleichzeitig einer Beeinträchtigung der Steuerbarkeit gleichkommen.

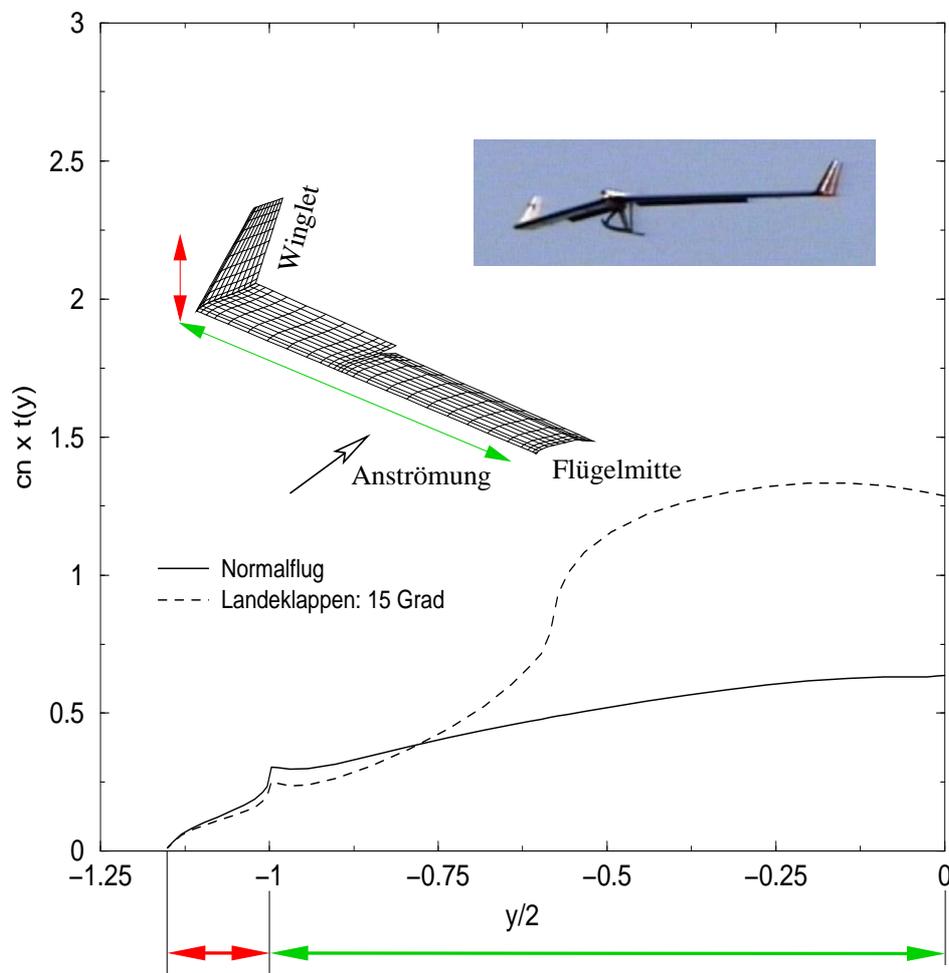


Abbildung 2.31: Auftriebsverteilungen am Nurflügel ILFB-NIKWING

In der Abbildung 2.31 sind Normalkraftverteilungen über der normierten Halbspannweite für zwei Landeklappenstellungen dargestellt. Der mit dem grünen Pfeil gekennzeichnete Bereich kennzeichnet den Beitrag der Tragfläche, während der Anteil des Winglets mit Rot markiert wurde. Bei der Verteilung "Normalflug" sind alle Klappen in der Ausgangsstellung von null Grad. Diese Konfiguration entspricht einem Gleitflug bei einer Geschwindigkeit von rund 20m/s und wurde hinsichtlich ihres induzierten Widerstands optimiert. Es ist gut erkennbar, wie sich die Normalkraftverteilung noch im Winglet fortsetzt. Durch den Einsatz der Winglets wird der induzierte Widerstand des Flügels reduziert und gleichzeitig die Windfahnenstabilität deutlich erhöht. Ein Vergleichsflügel mit elliptischer Auftriebsverteilung, gleichem Auftrieb und gleicher Spannweite (12m), jedoch ohne Winglets, hätte einen um rund sechs Prozent höheren induzierten Widerstand. Die NIKWING-Konfiguration liegt somit trotz der Tatsache, dass es sich um einen Nurflügel handelt, sehr nahe am theoretischen Minimum des induzierten Widerstandes. Die Verteilung, die in 2.31 strichliert dargestellt wird, entspricht einem Landeklappenausschlag von 15 Grad. Im mittleren Flügelbereich ist der Auftriebsbeiwert deutlich angestiegen. Im äußeren Flügelbereich wurde der örtliche Auftrieb und somit die Gefahr eines Strömungsabrisses wie bereits zuvor erwähnt etwas reduziert. In der Abbildung sind ferner noch das Analysemodell und ein Foto aus der Flugprobung zu sehen. Um die aerodynamische Auslegung auch durch Flugversuche abzusichern, wurde ein ferngesteuertes Modell im Maßstab 1:3 (mit vier Metern Spannweite) gebaut. Die mittels  $P_4$  ermittelte Schwerpunktlage sowie die Funktionsweise der Landeklappen wurden durch die Flugversuche bestätigt. Es waren keine nachträglichen Änderungen notwendig.

## 2.15 Erweiterung auf instationäre Strömungen

Eine umfassende Darstellung der Verfahren in der instationären Aerodynamik findet sich bei *Geissler* [11]. Auch im Falle der instationären, reibungsfreien und inkompressiblen Strömung führt eine Vereinfachung der Ausgangsgleichungen (Kontinuitätsgleichung, Impulsgleichung und Energiegleichung) auf die Potentialgleichung [11]:

$$\Delta\phi = 0. \quad (2.229)$$

$\phi(x, y, z)$  stellt dabei eine skalare Funktion dar, deren Gradienten das Geschwindigkeitsfeld der Strömung beschreiben

$$\vec{w} = \text{grad}\phi. \quad (2.230)$$

Wieder kann eine Lösung des Strömungsproblems mittels Singularitätenbelegungen erfolgen. Die grundlegende Vorgangsweise bleibt dabei auch im instationären Fall erhalten. Einige Erweiterungen sind allerdings notwendig.

## 2.16 Unterschiede zur Formulierung des stationären Problems

Die wesentlichen Erweiterungen zur Behandlung von instationären Problemen lassen sich in vier Punkte gliedern:

- 1.) kinematische Strömungsbedingung,
- 2.) Kutta-Bedingung,
- 3.) Nachlauf,
- 4.) Druckverteilung bzw. aerodynamische Lasten.

Sie werden in den anschließenden Abschnitten näher erläutert.

## 2.17 Kinematische Strömungsbedingung bei instationären Problemen

Beim stationären Problemen wird in dieser Arbeit die Vorstellung eines Windkanals realisiert. D.h. das Flugzeugkoordinatensystem ist auch gleichzeitig das Inertialsystem. In diesem Fall setzt sich die Strömungsgeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt aus einer konstanten Anströmung  $\vec{v}_\infty$  und einer Störgeschwindigkeit  $\vec{w}$  zusammen. Die Störgeschwindigkeit ist jener Anteil, der von den Singularitäten induziert wird. Im instationären Fall kann das Flugzeug beliebige Bewegungen in einem Inertialsystem durchführen. Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes in diesem Inertialsystem ist  $\vec{v}_{\text{kin}}$ . Die Anströmung ist in diesem Fall identisch mit dem umgekehrten Bewegungsvektor  $\vec{v}_{\text{kin}}$  und die Summe der Geschwindigkeiten in einem Kontrollpunkt wird zu

$$\vec{w}_{\text{rel}} = -\vec{v}_{\text{kin}} + \vec{w}. \quad (2.231)$$

Der Anteil  $\vec{w}$  ist dabei wiederum die von den Singularitäten induzierte Geschwindigkeit im Inertialsystem. Die kinematische Strömungsbedingung, die eine tangentielle Strömung an die Flügelfläche vorschreibt, wird zu

$$\vec{w}_{\text{rel}}^T \vec{n} = 0 \quad (2.232)$$

und muss in den Kontrollpunkten erfüllt werden. Die Flächennormale wird durch den Normalvektor  $\vec{n}$  definiert.

## 2.18 Instationäre Kutta-Bedingung

Die Kutta-Bedingung ist für den Auftrieb bei einer reibungsfreien Strömung von zentraler Bedeutung. Sie bewirkt ein tangentielles Abfließen an der Profilhinterkante und in weiterer Folge die Entstehung von Zirkulation. Die Forderung nach tangentiellm Abfließen ist äquivalent mit der Forderung nach einer verschwindenden Druckdifferenz an der Hinterkante. Beim stationären Wirbel-Tragflächenverfahren ist der Wert für  $\Delta c_p$  direkt proportional zur lokalen gebundenen Wirbeldichte. Verschwindet diese an der Hinterkante, dann ist auch die Kuttabedingung erfüllt.

Im Gegensatz dazu muss bei einer instationären Strömung die Wirbeldichte an der Hinterkante nicht verschwinden. Dies lässt sich am besten am Falle einer zweidimensionalen Strömung erläutern. Ein Flügel befinde sich zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe, ebenso wie das umgebende Fluid, (siehe Abbildung 2.32, obere Hälfte).

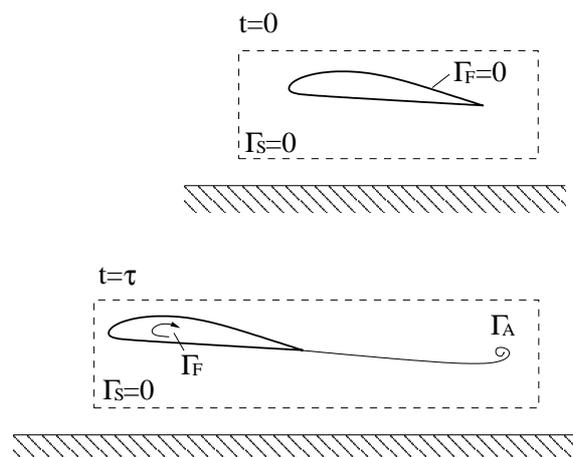


Abbildung 2.32: Anfahrwirbel

Die Zirkulation innerhalb der Systemgrenzen (strichliert) ist gleich Null. Als Nächstes wird der Flügel in kurzer Zeit auf die Geschwindigkeit  $v$  beschleunigt und weist eine Zirkulation  $\Gamma_F$  auf. Aufgrund der Sätze der Wirbelerhaltung muss jedoch nachwievor innerhalb der Systemgrenzen die Gesamtzirkulation gleich Null sein ( $\Gamma_S = 0$ ). Da der Flügel über eine positive Zirkulation  $\Gamma_F$  verfügt, muss es innerhalb der Systemgrenzen die gleich Menge an negativer Zirkulation geben, die sich in Form des Anfahrwirbels  $\Gamma_A$  ausbildet ( $\Gamma_S = \Gamma_F + \Gamma_A = 0$ ). Generell kann gesagt werden, dass jede Änderung der Zirkulation zu einer Freisetzung von Wirbelschichten führt. Für die Wirbeldichte an der Hinterkante bedeutet dies

$$\frac{d\Gamma_F}{dt} = -\gamma_{HK}v, \tag{2.233}$$

wobei  $\gamma_{HK}$  die Wirbeldichte an der Hinterkante darstellt. Im Abschnitt 2.20 wird schließlich gezeigt, dass genau diese Wirbeldichte an der Hinterkante vorhanden sein muss, um die Druckdifferenz zum verschwinden zu bringen. Für die Verfahren mit Wirbelbelegung kann die instationäre Kutta-Bedingung somit auf (2.233) reduziert werden.

Das Tragflächenverfahren arbeitet mit diskreten Zeitschritten und einer zeitlich linearen Änderung der Zirkulation. In Abbildung 2.33 ist eine zweidimensionale Diskretisierung

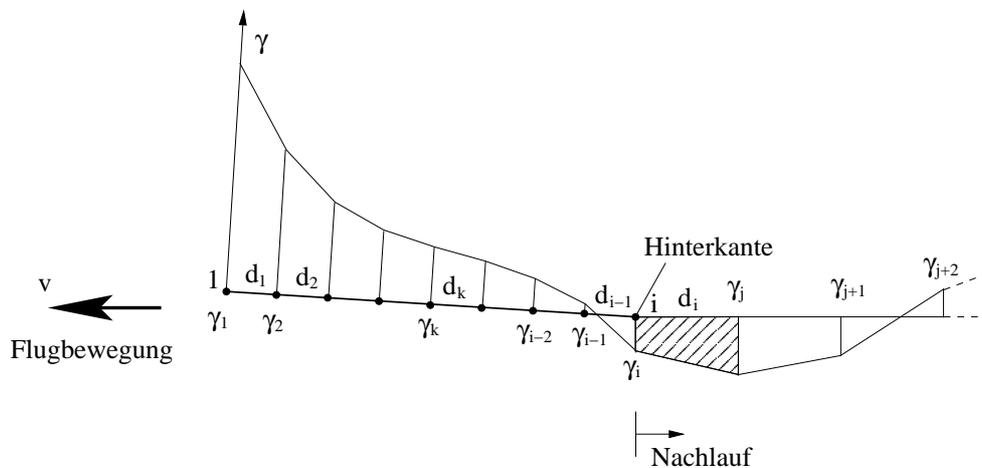


Abbildung 2.33: Wirbeldichteverteilung im Nachlauf (2D)

mit Elementarflügeln dargestellt, die mit einer in Flügeltiefenrichtung stückweise linearen Wirbeldichtebelegung versehen sind. Der Flügel verläuft von Knoten 1 bis  $i$ . An der Hinterkante beträgt die Zirkulation  $\gamma_i$ . Zusätzlich ist die Wirbelverteilung des Nachlaufs dargestellt. Der Nachlauf folgt in dieser Abbildung näherungsweise einer geraden Linie. Die Abbildung 2.33 zeigt den Flügel zum Zeitpunkt  $t$ . Zwischen dem vorhergehenden Zeitpunkt  $t - \Delta t$  und  $t$  hat sich der Flügel um die Distanz  $s_i = v\Delta t$  nach links verschoben. Die

Zirkulationen zu beiden Zeitpunkten lauten  $\Gamma^{t-\Delta t}$  und  $\Gamma^t$ . Die Differenz der Zirkulationen zwischen beiden Zeitpunkten muss gleich der negativen freigesetzten Zirkulation sein, die in der Abbildung als schraffierte Fläche eingezeichnet ist

$$\Gamma^t - \Gamma^{t-\Delta t} = -\frac{\gamma_i + \gamma_j}{2} s_i, \quad (2.234)$$

bzw. mit  $s_i = v\Delta t$  gilt

$$\frac{\Gamma^t - \Gamma^{t-\Delta t}}{\Delta t} = -\frac{\gamma_i + \gamma_j}{2} v. \quad (2.235)$$

Im stationären Fall gibt es gleich viele Unbekannte wie Kontrollpunkte. Im instationären Fall kommen die unbekanntes Wirbeldichten in den Knoten auf der Hinterkante dazu. Die Kutta-Bedingung muss daher in jedem dieser Knoten explizit erfüllt werden. Bei der Formulierung der Gleichungen zur Bestimmung der Singularitäten zum Zeitpunkt  $t$  sind die Wirbeldichten im Nachlauf  $\gamma_j, \gamma_{j+1}$  usw. sowie die Zirkulation  $\Gamma^{t-\Delta t}$  bekannt. Die Kutta-Bedingung wird für eine Knotenreihe in Spaltenrichtung definiert als:

$$\gamma_1 \frac{d_1}{2} + \sum_{k=2}^{i-1} \gamma_k \frac{d_k + d_{k-1}}{2} + \gamma_i \frac{d_{i-1}}{2} - \Gamma^{t-\Delta t} = -\frac{\gamma_i + \gamma_j}{2} d_i, \quad (2.236)$$

$$\gamma_1 \frac{d_1}{2} + \sum_{k=2}^{i-1} \gamma_k \frac{d_k + d_{k-1}}{2} + \gamma_i \frac{d_{i-1}}{2} + \frac{\gamma_i}{2} d_i = \Gamma^{t-\Delta t} - \frac{\gamma_j}{2} d_i. \quad (2.237)$$

Schließlich wird die (2.237) noch in den globalen Größen  $\Gamma_k$ , den Werten der Wirbellinien, ausgedrückt. Mit

$$\gamma_i = \frac{2\Gamma_i}{d_{i-1}} \quad (2.238)$$

und

$$\Gamma^t = \sum_{k=1}^i \Gamma_k^t \quad (2.239)$$

wird (2.237) zu

$$\sum_{k=1}^i \Gamma_k + \frac{\Gamma_i d_i}{d_{i-1}} = \Gamma^{t-\Delta t} - \frac{\gamma_j}{2} d_i. \quad (2.240)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (2.240) stehen nur bekannte Größen.

Das dreidimensionale Tragflächenverfahren arbeitete mit  $\Gamma'_k$ -Werten als Systemfreiheitsgrade. Mittels Gleichung (2.30) ( $\tilde{\Gamma} = \mathbf{L}\tilde{\Gamma}'$ ) wird der Zusammenhang zwischen  $\Gamma_k$  und  $\Gamma'_k$  hergestellt. Die Gleichung (2.240) wurde für zweidimensionale Strömungen hergeleitet, wobei der Flügel ungepfeilt war und eine konstante Flügeltiefe aufweist. Doch auch bei allgemeinen Anordnungen, zum Beispiel bei gepfeilten Tragflächen, gilt die Gleichung (2.240).

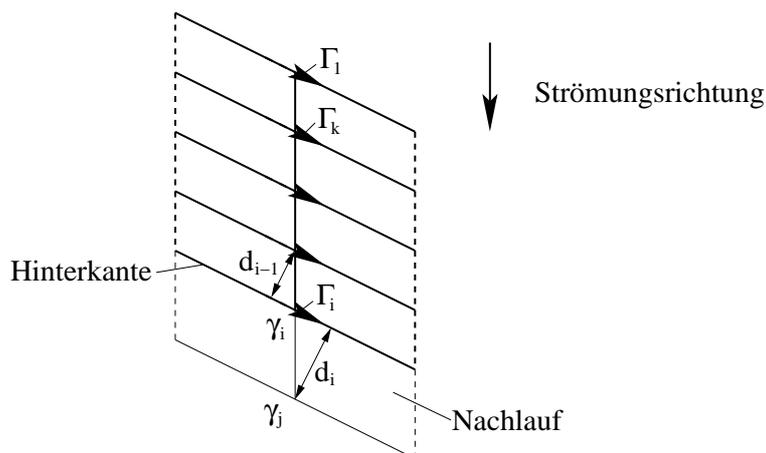


Abbildung 2.34: Wirbellinien am Pfeilflügel

Die Abbildung 2.34 zeigt eine derartige Anordnung im Grundriss. Die Dimensionen  $d$  sind im rechten Winkel auf die Orientierung der Wirbellinien zu nehmen. Die Gleichung (2.239) gilt dabei auch für gepfeilte Tragflächen.

## 2.19 Instationärer Nachlauf

Die Form des Nachlaufs ist streng genommen nicht bekannt und müsste sowohl beim stationären als auch beim instationären Problem neben der Singularitätenbelegung des Flügels berechnet werden. Der numerische Aufwand steigt dadurch erheblich, weil die induzierten Geschwindigkeiten im gesamten Nachlauf berechnet werden müssen und zur Modellierung des Nachlaufs auch wesentlich mehr Elemente benötigt werden als für die eigentliche Tragfläche.

In diesem Tragflächenverfahren wird daher die Form des Nachlaufs vorgegeben.

### 2.19.1 Nachlauf für Flutteranalysen

In diesem Fall bewegt sich das Flugzeug mit konstanter translatorischer Geschwindigkeit. Dieser Geschwindigkeit können Flatterschwingungen überlagert sein, die jedoch nur zu kleinen Abweichungen von der translatorisch durchlaufenen Bahn führen. Die Form des gesamten Nachlaufs wird unter der Annahme einer konstanten Zeitschrittweite a priori festgelegt. Im zweidimensionalen Fall ist dies ein geradliniger Nachlauf in Richtung der

Anströmung  $-\vec{v}_{kin}$  mit der konstanten Teilung  $d = \Delta t V_{kin}$ . Im Dreidimensionalen entsteht die Nachlaufgeometrie durch ein Verschieben der Flügelhinterkante in Richtung von  $-\vec{v}_{kin}$ . In Abbildung 2.35 ist das Nachlaufmodell anhand eines zweidimensionalen Problems dar-

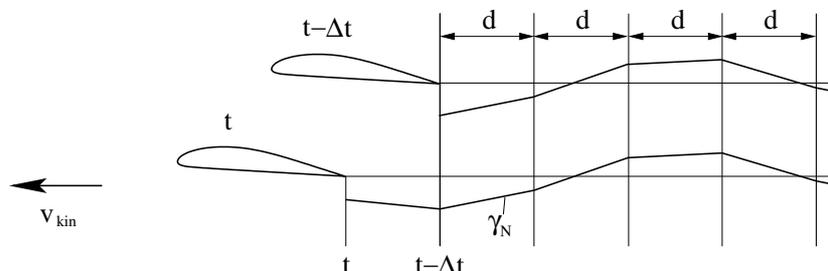


Abbildung 2.35: Nachlauf für Flutteranalysen

gestellt. Vom Zeitpunkt  $t - \Delta t$  bis  $t$  rückt der Flügel um die Distanz  $d$  weiter. Gleichzeitig wird Wirbeldichte  $\gamma_N$  in den Nachlauf abgegeben. Die Berechnung dieser Wirbeldichte wurde bereits im Abschnitt 2.18 besprochen. Die Singularitätenbelegung der Tragfläche wird für diskrete Zeitpunkte ermittelt. Die jeweilige Wirbeldichte an der Hinterkante entspricht gleichzeitig der Dichte, die zu dem Zeitpunkt in den Nachlauf abgegeben wird. Zwischen den diskreten Zeitpunkten wird ein linearer Verlauf der Wirbeldichte angenommen. Da die an der Hinterkante vorhandene Wirbeldichte der zeitlichen Änderung der Flügelzirkulation entspricht (siehe Gleichung (2.233)), wird mit diesem Verfahren ein quadratischer Zeitverlauf der Auftriebskräfte beschrieben (Verfahren zweiter Ordnung).

Der Vorteil dieser vorgegebenen Geometrie liegt darin, dass auch für den gesamten Nachlauf eine Einflussmatrix für die induzierten Geschwindigkeiten nur einmal zu Beginn der Analyse berechnet wird und für alle weiteren Zeitschritte herangezogen werden kann. Weitere Details werden im Abschnitt: Ablauf von instationären Analysen behandelt. Soll das Flugzeug aber beliebige Bewegungen im Raum durchführen, dann ist eine aufwendigere Modellierung des Nachlaufs notwendig.

### 2.19.2 Nachlauf bei allgemeiner Flugbewegung

Bei einer allgemeinen Flugbewegung gibt es keine einheitliche Schrittweite und die Flugbahn kann starken Schwankungen unterworfen sein. In diesem Fall wird als Nachlaufgeometrie jene Fläche angenommen, die während des Fluges durch die Hinterkante überstrichen wird. In Abbildung 2.36 sind die Positionen eines 2D-Flügels zu den Zeitpunkten  $t - \Delta t$  und  $t$  dargestellt. Wieder wird Wirbeldichte  $\gamma_N$  in den Nachlauf abgegeben (siehe oben).

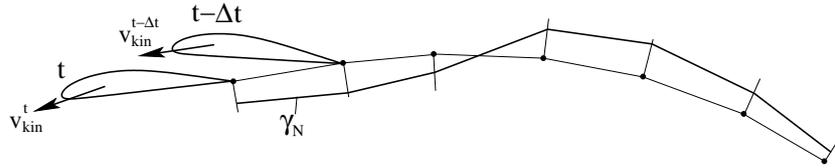


Abbildung 2.36: Allgemeine Nachlaufmodellierung

In beiden Fällen der Modellierung wird der Nachlauf nach einer vom Benutzer definierten Länge abgeschnitten. Dies ist notwendig um Rechenzeit und Speicherplatzbedarf zu limitieren.

## 2.20 Instationäre aerodynamisch Kräfte

### 2.20.1 Grundgleichungen

Den nachfolgenden Herleitungen liegt die Vorstellung zugrunde, dass das Flugzeug sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{kin}}$  durch die ruhende Luft bzw. das Inertialsystem bewegt. Ausgehend von den Eulergleichungen

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0 \quad (2.241)$$

wird unter Verwendung von (2.230) durch Integration folgende Form gefunden:

$$\int \frac{\partial(\text{grad}\phi)}{\partial t} + \int \vec{w} \text{grad} \vec{w} + \int \frac{\text{grad} p}{\rho} = 0 \quad (2.242)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{w} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (2.243)$$

Dabei wurde die substantielle Ableitung ersetzt durch

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\text{raumfest}} + \vec{w} \text{grad}. \quad (2.244)$$

Die Gleichung (2.243) kann mittels (2.244) auch geschrieben werden als

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{w} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (2.245)$$

Die Gleichungen (2.243) bzw. (2.245) werden als Bernoulli-Gleichungen bezeichnet.

Für die Formulierung des instationären Tragflächenverfahrens müssen die Größen im bewegten Bezugssystem (Flugzeug) definiert werden. Befindet man sich in diesem Bezugssystem, dann beobachtet man Strömungsgeschwindigkeiten  $\vec{w}_{\text{rel}}$  relativ zum bewegten System und es gilt:

$$\vec{w}_{\text{rel}} = \vec{w} - \vec{v}_{\text{kin}}, \quad (2.246)$$

wobei  $\vec{v}_{\text{kin}}$  die Bewegung des Flugzeuges im Inertialsystem beschreibt. Die substantielle Ableitung im bewegten System wird damit zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\text{raumfest}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}_{\text{kin}}\right)_{\text{körperfest}}, \quad (2.247)$$

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}} + \vec{w}_{\text{rel}}\text{grad}. \quad (2.248)$$

Mit Hilfe der substantiellen Zeitableitung im bewegten Flugzeugsystem wird die Bernoulli-Gleichung (2.245) zu

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}} + \vec{w}_{\text{rel}}\text{grad}\phi - \frac{1}{2}\vec{w} \cdot \vec{w} = - \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (2.249)$$

Mit  $\vec{w} = \vec{w}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{kin}}$  und der Beziehung für inkompressible Strömungen

$$- \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_\infty - p}{\rho_\infty} \quad (2.250)$$

wird (2.249)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}} + \frac{\vec{w}_{\text{rel}} \cdot \vec{w}_{\text{rel}}}{2} - \frac{\vec{v}_{\text{kin}} \cdot \vec{v}_{\text{kin}}}{2} = \frac{p_\infty - p}{\rho_\infty}. \quad (2.251)$$

Der Druckbeiwert ist ferner definiert als

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}}, \quad (2.252)$$

wobei  $U_\infty$  eine Bezugsgeschwindigkeit darstellt und beispielsweise die momentane Schwerpunktsgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{kin,SWP}}$  des Flugzeuges im Inertialsystem sein kann. Zusammen mit (2.251) erhält man

$$c_p = -\frac{2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}} + \frac{\vec{v}_{\text{kin}} \cdot \vec{v}_{\text{kin}}}{U_\infty^2} - \frac{\vec{w}_{\text{rel}} \cdot \vec{w}_{\text{rel}}}{U_\infty^2}. \quad (2.253)$$

Für das Tragflächenverfahren wird der Druckdifferenzbeiwert  $\Delta c_p$  benötigt, der die Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite angibt

$$\Delta c_p = c_{p_u} - c_{p_o}. \quad (2.254)$$

Dabei gilt

$$c_{p_o} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial t} \right)_{\text{körperfest}} + \frac{\vec{v}_{\text{kin}} \cdot \vec{v}_{\text{kin}}}{U_\infty^2} - \frac{\vec{w}_{\text{rel,o}} \cdot \vec{w}_{\text{rel,o}}}{U_\infty^2} \quad (2.255)$$

$$c_{p_u} = -\frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi_u}{\partial t} \right)_{\text{körperfest}} + \frac{\vec{v}_{\text{kin}} \cdot \vec{v}_{\text{kin}}}{U_\infty^2} - \frac{\vec{w}_{\text{rel,u}} \cdot \vec{w}_{\text{rel,u}}}{U_\infty^2}. \quad (2.256)$$

Die relativen Geschwindigkeiten auf der Tragflächenober bzw. -unterseite sind definiert als

$$\vec{w}_{\text{rel,o}} = \vec{w}_m + \frac{1}{2} \vec{\gamma} \times \vec{n} - \vec{v}_{\text{kin}}, \quad (2.257)$$

$$\vec{w}_{\text{rel,u}} = \vec{w}_m - \frac{1}{2} \vec{\gamma} \times \vec{n} - \vec{v}_{\text{kin}}, \quad (2.258)$$

mit dem zwischen Unter- und Oberseite gemittelten Wert der induzierten Geschwindigkeiten  $\vec{w}_{\text{oben}}$  und  $\vec{w}_{\text{unten}}$ :

$$\vec{w}_m = \frac{\vec{w}_{\text{oben}} + \vec{w}_{\text{unten}}}{2} \quad (2.259)$$

Setzt man die beiden Gleichungen (2.257) und (2.258) in (2.255) bzw. (2.256) ein und bildet die Differenz, dann erhält man:

$$\Delta c_p = \frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \phi_u}{\partial t} \right)_{\text{körperfest}} + \frac{2(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{n})}{U_\infty^2}. \quad (2.260)$$

Für eine stationäre Analyse gilt

$$\Delta c_p = \frac{2(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{n})}{U_\infty^2}, \quad (2.261)$$

wobei die Geschwindigkeit  $(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})$  einfach den Mittelwert aus  $\vec{w}_{\text{rel,o}}$  und  $\vec{w}_{\text{rel,u}}$  darstellt. Die konstante Anströmung  $\vec{v}_\infty$  ist dabei durch  $-\vec{v}_{\text{kin}}$  ersetzt worden. Die Auftriebskraftdichte im stationären Fall wäre dann

$$\vec{f}_{(i)}^{\text{Ek}} = \rho(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})_{(i)}^{\text{Ek}} \times \vec{\gamma}_{(i)}^{\text{Ek}} = \rho \vec{v}_{(i)}^{\text{Ek}} \times \vec{\gamma}_{(i)}^{\text{Ek}}, \quad (2.262)$$

wobei die Geschwindigkeiten  $(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})_{(i)}^{\text{Ek}}$  für die Elementknoten durch eine Mittelung aus den angrenzenden Elementen bestimmt werden.

## 2.20.2 Konzept der instationären gebundenen Zirkulation

Im Fall der stationären Analyse wurden drei unterschiedliche Wirbeldichten unterschieden:

- 1.)  $\gamma$ ...die gebundene Wirbeldichte, deren Orientierung im wesentlichen den Seitenkanten  $\overline{(1)(2)}$  bzw.  $\overline{(4)(3)}$  folgt,

- 2.)  $\gamma^f$ ...die im Elementarflügel freigesetzte Wirbeldichte, und  
 3.)  $\gamma^d$ ...die entlang der Elementarflügelspalten durchlaufende frei Wirbelschicht.

Bei einer instationären Analyse besteht  $\gamma$  aus zwei Anteilen, nämlich einem tatsächlich gebundenen Anteil und einem freien Anteil, der zuvor gebunden war und bei einer Auftriebsänderungen freigesetzt wurde. In weiterer Folge werden diese Dichteanteile mit  $\gamma^g$  (gebunden) und  $\gamma^{gf}$  (erst gebunden, dann frei) bezeichnet und es gilt

$$\gamma = \gamma^g + \gamma^{gf}. \quad (2.263)$$

Die Dichtebelegung  $\gamma$  ist, wie bereits erwähnt, eine Funktion der globalen Variable  $\Gamma'$ . Beispielsweise ist der Anfahrwirbel beim Startvorgang ein in Spannweitenrichtung verlaufender freier Wirbel.

Mit der Kenntnis der gebundenen Zirkulation können sämtliche Konzepte zur Ermittlung der aerodynamischen Kräfte bei stationärer Strömung auch im instationären Fall beibehalten werden (z.B. instationärer induzierter Widerstand).

Die Lösung der Systemgleichung (2.172) liefert wiederum  $\Gamma'$ , woraus dann die Dichtebelegung bestimmt werden kann. Die Aufteilung in  $\gamma^g$  und  $\gamma^{gf}$  muss gesondert behandelt werden. Mit der Hilfe von (2.260) kann zwischen den gebundenen und freien Anteilen unterschieden werden. Der Druckbeiwert kann nur durch die gebundenen Anteile entstehen, da die freien Wirbeldichten mit  $(\vec{w}_m - \vec{v}_{kin})$  abtransportiert werden. Die Gleichung (2.260) kann daher umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \Delta c_p &= \frac{2}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \phi_u}{\partial t} \right)_{körperfest} + \frac{2(\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{n})}{U_\infty^2} = \\ &= \frac{2(\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{\gamma}^g \times \vec{n})}{U_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.264)$$

und daraus resultiert eine Gleichung für die gebundene Zirkulation

$$\left( \frac{\partial \phi_{o-u}}{\partial t} \right)_{körperfest} + (\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{n}) = (\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{\gamma}^g \times \vec{n}), \quad (2.265)$$

wobei

$$\left( \frac{\partial \phi_{o-u}}{\partial t} \right)_{körperfest} = \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \phi_u}{\partial t} \right)_{körperfest} \quad (2.266)$$

zusätzlich verwendet wurde.

Die Orientierung von  $\gamma$  sowie  $\gamma^g$  ist durch das Wirbelmodell fixiert und kann durch einen Einheitsvektor  $\vec{e}_\gamma$  beschrieben werden. Damit gilt  $\vec{\gamma} = \gamma \vec{e}_\gamma$  und Gleichung (2.265) wird zu:

$$\gamma^g = \frac{\left( \frac{\partial \phi_{o-u}}{\partial t} \right)_{körperfest}}{(\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{e}_\gamma \times \vec{n})} + \gamma. \quad (2.267)$$

Mit

$$\gamma^g = \gamma - \gamma^{gf} \quad (2.268)$$

gilt schließlich

$$\gamma^{gf} = -\frac{\left(\frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}}}{(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{e}_\gamma \times \vec{n})} \quad (2.269)$$

Die Änderung der Wirbeldichte in Richtung der Orientierung  $s$  wird ebenfalls bestimmt. Dabei stellt sich jedoch das Problem, das auch die Geschwindigkeiten  $(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})$  in Spannweitenrichtung variieren:

$$\gamma^{gf'} = -\frac{\left(\frac{\partial^2\phi_{o-u}}{\partial t\partial s}\right)((\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{e}_\gamma \times \vec{n})) - \left(\frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t}\right)\frac{\partial((\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{e}_\gamma \times \vec{n}))}{\partial s}}{\|((\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}}) \cdot (\vec{e}_\gamma \times \vec{n}))\|^2}. \quad (2.270)$$

Für die numerische Umsetzung stehen für die Ableitungen der Geschwindigkeiten Differenzenquotienten zur Verfügung.

### 2.20.3 Zeitliche Änderung des Geschwindigkeitspotentials

Gleichung (2.267) ermöglicht die Aufteilung der Wirbeldichten in einen gebundenen Anteil  $\gamma^g$  und einen Anteil freigesetzter, zu einem früheren Zeitpunkt gebundener Wirbeldichte  $\gamma^{gf}$ . Allerdings muss dazu noch die zeitliche Änderung der Differenz der Geschwindigkeitspotentiale  $\left(\frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}}$  bestimmt werden. Die Definition körperfest bedeutet dabei, dass die zeitliche Änderung des Potentials für einen bestimmten Punkt auf der Flügeloberfläche gesucht wird. In einem ersten Schritt wird das Geschwindigkeitspotential zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt und anschließend die zeitliche Änderung im verwendeten Zeitschrittverfahren diskutiert.

Das Geschwindigkeitspotential ist nach *Geissler* [11] nicht eindeutig und wird daher durch ein Wegintegral bestimmt

$$\phi(\zeta, t) = \oint_{\zeta_0}^{\zeta} \vec{w} \cdot d\vec{\zeta}. \quad (2.271)$$

Der Trick dabei besteht darin den Integrationspfad so zu wählen, dass der numerische Aufwand minimiert wird. Üblicherweise beginnt die Integration im Nachlauf auf der Unterseite und führt bis zur Flügelhinterkante. Von der Flügelhinterkante kann dann jeder beliebige Punkt  $P$  der Profilkontur erreicht werden. Im oberen Abschnitt der Abbildung 2.37 ist der Integrationsweg für ein Profil endlicher Dicke dargestellt. Mit  $\zeta$  ist dabei die Länge des Weges von der Hinterkante bis zum Punkt  $P$  bezeichnet. Für die Integration gilt

$$\phi(\zeta, t) = \oint_{\zeta_0}^{\zeta_{HK}} \vec{w} \cdot d\vec{\zeta} + \oint_{\zeta_{HK}}^{\zeta} \vec{w} \cdot d\vec{\zeta}. \quad (2.272)$$

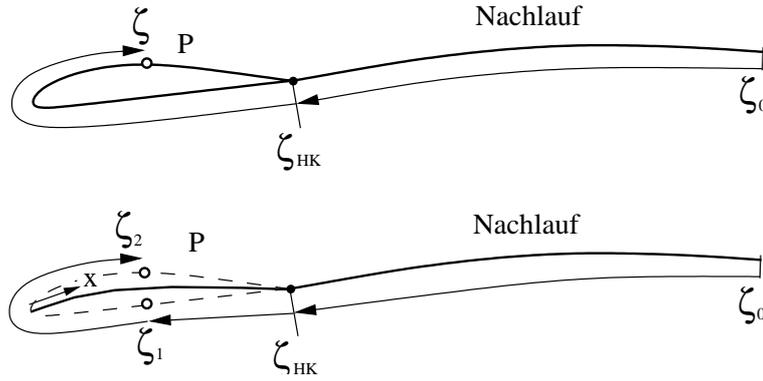


Abbildung 2.37: Wegintegral zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials

Im unteren Teil von Abbildung 2.37 ist das Schema eines Tragflächenverfahrens skizziert, bei dem der Flügel durch seine Skelettlfläche ersetzt wird. Bei diesen *unendlich dünnen* Tragflächen interessieren weniger die Drücke auf Ober- und Unterseite, als vielmehr die Druckdifferenz, bzw. die Differenz der Geschwindigkeitspotentiale:

$$\left(\frac{\partial\phi_o}{\partial t} - \frac{\partial\phi_u}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}} = \left(\frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t}\right)_{\text{körperfest}}. \quad (2.273)$$

Bildet man in diesem Fall beide Wegintegrale für die Ober- bzw. Unterseite und bestimmt die Differenz, dann bleibt nur noch ein Wegintegral von der Unter- zur Oberseite über:

$$\phi_{o-u} = \phi_o - \phi_u = \oint_{\zeta_1}^{\zeta_2} \vec{w} \cdot d\vec{\zeta}. \quad (2.274)$$

Ein weitere Vereinfachung wird dadurch möglich, dass das Wegintegral um die Wirbelfläche identisch ist mit der eingeschlossenen Zirkulation und es gilt

$$\phi_{o-u} = \int_0^L \gamma(x) dx, \quad (2.275)$$

wobei mit  $x$  entlang der Skelettlinie integriert wird (siehe Abbildung 2.37). Damit kann problemlos für einen Zeitpunkt  $t$  bei bekannter Wirbeldichteverteilung die Potentialdifferenz  $\phi_{o-u}^t$  an einer Tragflächenposition angegeben werden. Für die Hinterkante der Tragfläche umfasst das Wegintegral den gesamten Flügelquerschnitt und Gleichung (2.274) wird zu

$$\phi_{o-u} = \Gamma_F, \quad (2.276)$$

mit  $\Gamma_F$  als der Flügelzirkulation. Zur Bestimmung der zeitlichen Änderung des Potentials zum Zeitpunkt  $t$  könnte als einfachste Näherung der Differenzenquotient herangezogen werden

$$\frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t} \approx \frac{\phi_{o-u}^t - \phi_{o-u}^{t-\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Gamma^t - \Gamma^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad (2.277)$$

was jedoch zu ungenauen Ergebnissen bei der Berechnung der Druckverteilung führen würde. Für die exakte Auswertung von Gleichung (2.267) wird die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitspotentials zum Zeitpunkt  $t$  benötigt. Betrachtet man beispielsweise die Flügelhinterkante, dann gilt mit Gleichung (2.233)

$$\frac{d\Gamma_F}{dt} = \frac{\partial\phi_{o-u}}{\partial t} = -(\vec{w}_m - \vec{v}_{kin}) \cdot (\vec{\gamma}_{HK} \times \vec{n}). \quad (2.278)$$

Wird dieses Ergebnis in Gleichung (2.267) eingesetzt, dann erhält man für gebundene Zirkulation an der Flügelhinterkante

$$\gamma_{HK}^g = -\gamma_{HK} + \gamma_{HK} = 0, \quad (2.279)$$

womit der Druckbeiwert verschwindet und die Kutta-Bedingung tatsächlich erfüllt ist. Würde man anstelle von Gleichung (2.278) jedoch (2.277) in Gleichung (2.267) einsetzen, dann wäre  $\gamma_{HK}^g \neq 0$ . Daraus folgt, dass in Verbindung mit der oben formulierten Kutta-Bedingung für die zeitliche Ableitung eine bessere Näherung gefunden werden muss als (2.277).

Zur Berechnung der zeitlichen Ableitung der Potentialdifferenz wird daher ein Verfahren zweiter Ordnung eingesetzt. Zur Berechnung der Ableitung zum Zeitpunkt  $t$  werden daher die Werte der Potentialdifferenz zu den Zeitpunkten  $t$ ,  $t - \Delta t$  und  $t - 2\Delta t$  herangezogen. Durch die drei Punkte wird eine Kurve zweiter Ordnung gelegt und die Steigung im Endpunkt bestimmt. Für eine konstante Zeitschrittweite  $\Delta t$  liefert diese Vorgangsweise

$$\frac{\partial\phi_{o-u}^t}{\partial t} \approx \frac{3\phi_{o-u}^t - 4\phi_{o-u}^{t-\Delta t} + \phi_{o-u}^{t-2\Delta t}}{2\Delta t}. \quad (2.280)$$

In Abbildung 2.38 ist der Fall mit variabler Schrittweite skizziert. Die Ableitung zum

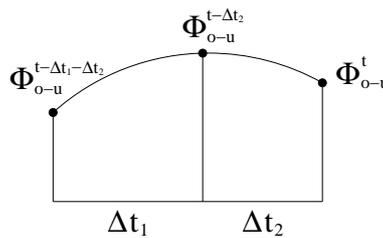


Abbildung 2.38: Zeitlicher Verlauf des Geschwindigkeitspotentials

Zeitpunkt  $t$  beträgt dann

$$\frac{\partial\phi_{o-u}^t}{\partial t} \approx \frac{\phi_{o-u}^t - \phi_{o-u}^{t-\Delta t_2}}{\Delta t_2} + \left( \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \right) \left( \frac{\phi_{o-u}^t - \phi_{o-u}^{t-\Delta t_2}}{\Delta t_2} - \frac{\phi_{o-u}^{t-\Delta t_2} - \phi_{o-u}^{t-\Delta t_1-\Delta t_2}}{\Delta t_2} \right). \quad (2.281)$$

Mit den Beziehungen (2.267) und (2.281) kann die Wirbeldichte  $\gamma_i^g$  in jedem Knoten  $i$  bestimmt werden. An dieser Stelle muss betont werden, dass die Genauigkeit des Verfahrens natürlich von der Zeitschrittweite abhängt und der Benutzer für eine sinnvolle Anwendung des Programms die Periodendauern der maßgeblichen instationären Luftkräfte kennen sollte.

## 2.20.4 Auswertung des instationären Auftriebs

An den Elementeckknoten sind Wirbeldichten und deren Ableitung bekannt. Daraus lässt sich entlang der Kanten  $\overline{(1)(2)}$  und  $\overline{(4)(3)}$  ein  $\gamma^{\text{gf}}$ -Verlauf dritter Ordnung konstruieren. Der Verlauf wird in weiterer Folge durch ein Polynom zweiter Ordnung angenähert und integriert. Dazu muss für das Element die Wirbeldichte in der Mitte der beiden Kanten  $\overline{(1)(2)}$  und  $\overline{(4)(3)}$  ermittelt werden.

In den Kantenmitten erhält man dann  $\gamma_{(12)}^{\text{gf}}$  bzw.  $\gamma_{(43)}^{\text{gf}}$ . Wie in den Gleichungen (2.282) und (2.283) lassen sich Offsetwerte zur Bestimmung der leichter zu integrierenden Ersatzverteilung ermitteln

$$\Delta\gamma_{12}^{*\text{gf}} = \frac{2}{3}\gamma_{(12)}^{\text{gf}} - \frac{1}{3}\gamma_{(1)}^{\text{gf}} - \frac{1}{3}\gamma_{(2)}^{\text{gf}} \quad (2.282)$$

$$\Delta\gamma_{43}^{*\text{gf}} = \frac{2}{3}\gamma_{(43)}^{\text{gf}} - \frac{1}{3}\gamma_{(4)}^{\text{gf}} - \frac{1}{3}\gamma_{(3)}^{\text{gf}} \quad (2.283)$$

und es gilt

$$\gamma_{(1)}^{*\text{gf}} = \gamma_{(1)}^{\text{gf}} + \Delta\gamma_{12}^{*\text{gf}}, \quad (2.284)$$

$$\gamma_{(2)}^{*\text{gf}} = \gamma_{(2)}^{\text{gf}} + \Delta\gamma_{12}^{*\text{gf}}, \quad (2.285)$$

$$\gamma_{(3)}^{*\text{gf}} = \gamma_{(3)}^{\text{gf}} + \Delta\gamma_{43}^{*\text{gf}}, \quad (2.286)$$

$$\gamma_{(4)}^{*\text{gf}} = \gamma_{(4)}^{\text{gf}} + \Delta\gamma_{43}^{*\text{gf}}. \quad (2.287)$$

Die instationären Auftriebskraftdichten in den Eckpunkten werden schließlich

$$\vec{f}_{(i)}^{\text{Ek}} = \rho(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})_{(i)}^{\text{Ek}} \times (\vec{\gamma}_{(i)}^{*\text{Ek}} - \vec{\gamma}_{(i)}^{*\text{gf,Ek}}), \quad (2.288)$$

wobei die Geschwindigkeiten  $(\vec{w}_m - \vec{v}_{\text{kin}})_{(i)}^{\text{Ek}}$  für die Elementknoten wiederum durch eine Mittelung aus den angrenzenden Elementen bestimmt werden. Die Berechnung der konsistenten Knotenkräfte erfolgt in gleicher Weise wie in Abschnitt 2.11. Für die Berechnung der Saugkraft an der Profilnase wird wieder der induzierte Widerstand benötigt.

### 2.20.5 Instationärer induzierter Widerstand

Im stationären Fall wird zwischen verschiedenen Arten von Wirbeldichten unterschieden. Die freie Zirkulation besteht aus einem Anteil  $\gamma^f$  und einem Anteil  $\gamma^d$ . Die gebundene Wirbeldichte wurde mit  $\gamma$  bezeichnet. Im instationären Fall kommt es zu einer Aufteilung von  $\gamma$  zu  $\gamma^g$  und  $\gamma^{gf}$ , wobei der Anteil  $\gamma^{gf}$  der freien Wirbeldichte zuzuordnen ist. Die Vorgangsweise zur Bestimmung des Widerstandes ist in weiterer Folge völlig analog zum Abschnitt 2.12.2.

Mittels der im Abschnitt 2.10 eingeführten Einflussmatrizen werden für jeden Kontrollpunkt zwei Geschwindigkeitsvektoren bestimmt.

1. jene Geschwindigkeit  $\vec{w}^i$ , die durch die freien Wirbelschichten  $\gamma^f$ ,  $\gamma^d$  und  $\gamma^{fg}$  induziert wird,
2. jene Geschwindigkeit  $\vec{w}^{d,i}$ , die durch die zu diskreten Wirbellinien zusammengefasste Wirbeldichte  $\gamma^g$  induziert wird.

Die unter Punkt 1.) angeführten Kontrollpunktsgeschwindigkeiten werden durch Mittelung aus umliegenden Elementarflügeln in Werte für die Knotenpunkte  $\vec{v}_{i,Ek}^{(i)}$  übergeführt. Mit diesen Werten wird schließlich der erste Teil des induzierten instationären Widerstandes eines Elementarflügels ermittelt. Die Widerstandsdichte, bereits als Kraftkomponente in Richtung der Schwerpunktsbewegung  $\frac{-\vec{v}_{kin,SWP}}{|\vec{v}_{kin,SWP}|}$  des Flugzeuges ausgedrückt, lautet:

$$f_{(i)}^{wi,Ek} = \rho \frac{-\vec{v}_{kin,SWP}}{|\vec{v}_{kin,SWP}|} (\vec{v}_{i,Ek}^{(i)} \times \vec{e}_{\gamma,(i)} (\vec{\gamma}_{(i)}^{*,Ek} - \vec{\gamma}_{(i)}^{*gf,Ek})). \quad (2.289)$$

Die Integration über die Elementarflügelfläche liefert Knotenkräfte, die in den Knoten (3) und (4) zusammengefasst werden.

Der Anteil der diskreten Wirbel wird entsprechend der Gleichungen (2.219) bis (2.224) berechnet. Dabei wird allerdings die stationäre Anströmrichtung  $\frac{\vec{v}_{\infty}}{|\vec{v}_{\infty}|}$  durch die umgekehrte Bewegungsrichtung des Flugzeugschwerpunktes  $\frac{-\vec{v}_{kin,SWP}}{|\vec{v}_{kin,SWP}|}$  ersetzt.

Mit den bekannten Widerständen der einzelnen Elementarflügel lassen sich die fiktiven Tangentialkräfte bestimmen, die wiederum für die Auffindung der Saugkraft an der Eintrittskante erforderlich sind.

### 2.20.6 Instationäre aerodynamische Beiwerte

Die Ermittlung erfolgt analog zum Abschnitt 2.13. Als Bezugsgeschwindigkeit wird allerdings die Schwerpunktschwindigkeit im Inertialsystem herangezogen:

$$q = \frac{|\vec{v}_{\text{kin,SWP}}|^2 \rho}{2}, \quad (2.290)$$

$$c_{a_j} = \frac{|\vec{A}_j|}{qt_j b_j}, \quad (2.291)$$

$$c_{n_j} = \frac{|\vec{N}_j|}{qt_j b_j}, \quad (2.292)$$

$$c_{w_{ij}} = \frac{|\vec{W}_{ij}|}{qt_j b_j}. \quad (2.293)$$

## 2.21 Beispiele und instationäre Vergleichsrechnungen

### 2.21.1 Schlagende Tragfläche, 2D

Zunächst werden Ergebnisse von  $P_4$  mit der klassischen Lösung von Theodorsen für einen schlagenden Tragflügel verglichen. Diese analytische Lösung kann beispielsweise bei *Foerschling* [10] gefunden werden.

In Abbildung 2.39 ist in der rechten oberen Hälfte das Modell dargestellt. Es handelt sich um eine ebene Platte, die eine harmonische vertikale Translationsschwingung vollführt und dabei horizontal von links angeströmt wird. Dabei wird eine zweidimensionale Strömung angenommen. Die für aeroelastische Analysen wichtige reduzierte Frequenz

$$\omega^* = \frac{\omega c}{U_\infty} \quad (2.294)$$

ist im vorliegenden Fall gleich Eins, wobei  $c$  die halbe Flügeltiefe darstellt.

Das obere linke Diagramm in Abbildung 2.39 beschreibt einerseits die Schlagbewegung des Flügels und andererseits die am Flügel auftretende instationäre Luftkraft. Das numerische Verfahren arbeitet im Zeitbereich. Es ist somit ein gewisser Einschwingvorgang nötig, bis sich tatsächlich eine harmonische Schwingung einstellt. Nach rund vier Perioden ist der Einschwingvorgang beendet. Das Diagramm zeigt eine deutliche Phasenverschiebung zwischen der Schwingbewegung und der Luftkraft. In der instationären Aerodynamik ist es bei schwingenden Tragflächen üblich, das Ergebnis (z.B. Druckbeiwerte) in einen Real- und

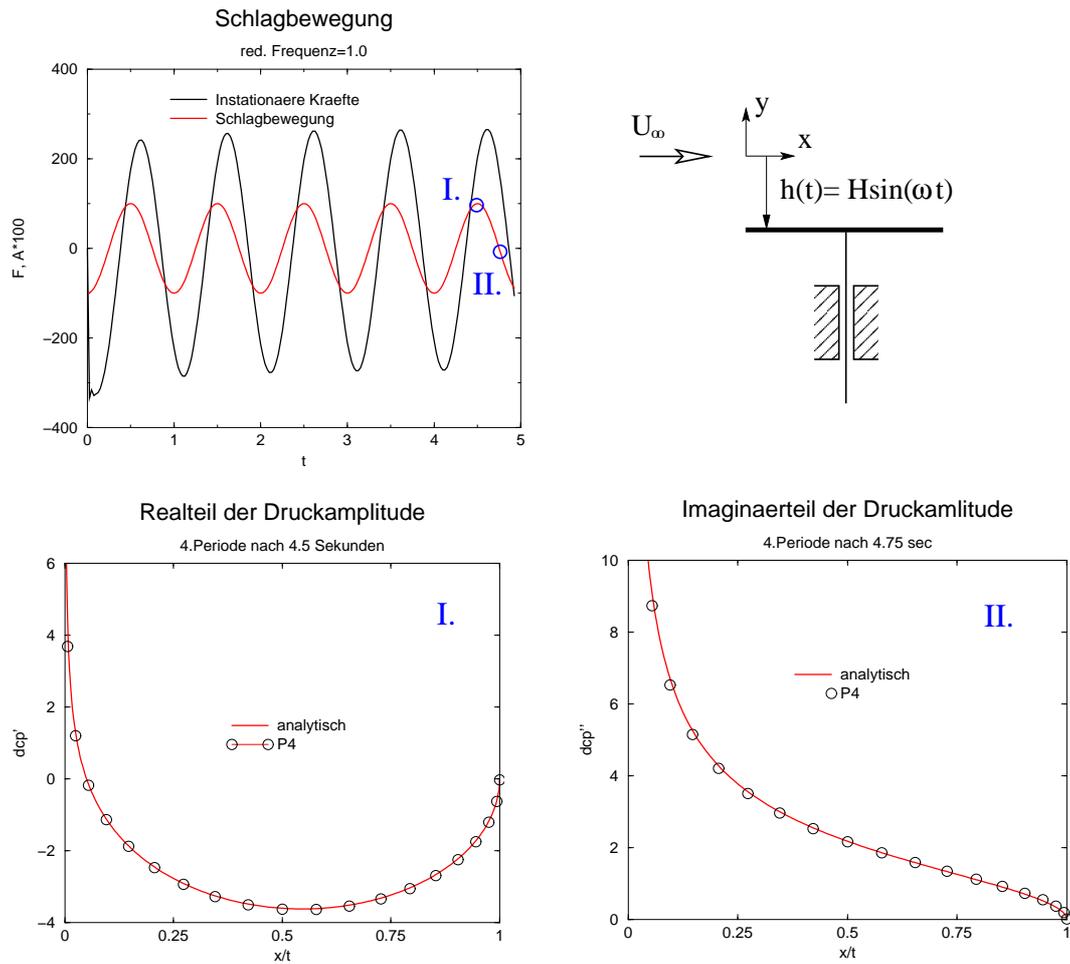


Abbildung 2.39: Instationäre Druckamplituden am harmonisch schwingenden Tragflügel

einen Imaginärteil zu zerlegen. Der Realteil beschreibt dabei den Anteil, der phasengleich mit der Auslenkung auftritt, während der Imaginärteil in Phase mit der Schlaggeschwindigkeit auftritt und somit um 90 Grad vor- bzw. nachhinkt. Die beiden Anteile können zu verschiedenen Zeitpunkten direkt auf der Tragfläche ermittelt werden und sind im Diagramm der Schlagbewegung mit I. und II. bezeichnet. Es gilt dabei

$$dc_p = dc'_p + idc''_p. \tag{2.295}$$

In den beiden unteren Diagrammen der Abbildung 2.39 sind schließlich der Realteil- sowie der Imaginärteil der Druckamplitude dargestellt. Die durchgezogenen Linien entsprechen der klassischen analytischen Lösung nach Theodorsen, die Kreise kennzeichnen das Ergebnis von P4. Die Lösungen stimmen sehr gut überein.

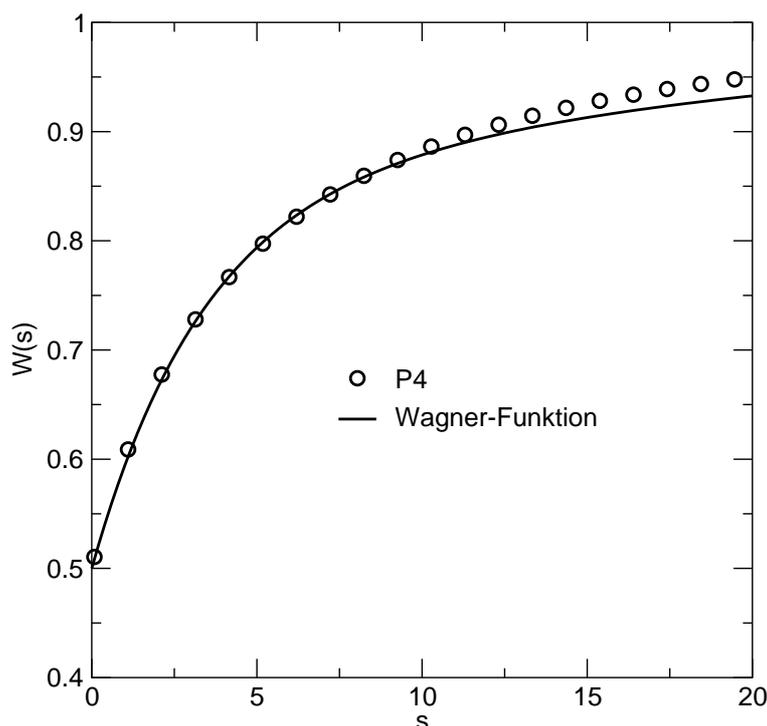


Abbildung 2.40: Wagner-Funktion

### 2.21.2 Wagner-Problem, 2D

Ein weiteres klassisches Ergebnis der instationären Aerodynamik stellt das sogenannte Wagner Problem dar. Es geht dabei um die Frage, wie sich die Auftriebswerte einer Tragfläche bei einem instantanen Anstellwinkelsprung verändern. Eine Auswertung der exakten analytischen Lösung (Wagnerfunktion) ist schwierig, weshalb üblicherweise eine Näherungsformel verwendet wird. Die Wagnerfunktion gibt den Verlauf des Auftriebsbeiwertes bezogen auf den stationären Endwert nach dem Sprung wieder.

$$W(s) = 1 - 0,165e^{-0,0455s} - 0,335e^{-0,3s}. \quad (2.296)$$

Die Größe  $s$  beschreibt eine reduzierte Zeit, die sich aus

$$s = \frac{tU_\infty}{c} \quad (2.297)$$

mit  $c$  als der Flügeltiefe ergibt. Diese Formel kann beispielsweise bei *Dowell* [9] oder auch bei *Foersching* [10] gefunden werden und ist in Abbildung 2.40 dargestellt. Unmittelbar nach dem Anstellwinkelsprung wirken bereits 50% des Auftriebs am Flügel, siehe Abbildung 2.40. Nach einer Dauer von  $s = 20$  wirken rund 90% des Auftriebs. Im Fall des an früherer

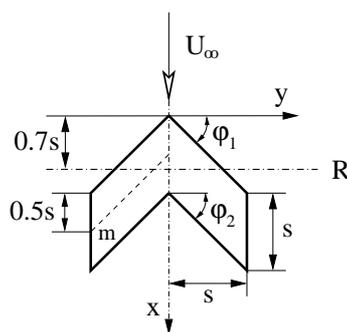


Abbildung 2.41: Anordnung des schwingenden Pfeilflügels

Tabelle 2.1: Daten des schwingenden Pfeilflügels

Eintrittskanten-Pfeilungswinkel	$\varphi_1$	45 Grad
Hinterkanten-Pfeilungswinkel	$\varphi_2$	45 Grad
Halbspannweite bzw. Flügeltiefe	$s$	
Anströmung	$U_\infty$	
Momentenbezugsachse	$m$	$0.5s +  y $
Drehachse der Schwingbewegung	$R$	$0.7s$

Stelle vorgestellten Nurflügels NIKWING, der mit 20m/s fliegt und eine Flügeltiefe von einem Meter aufweist, sind die 90% Prozent des Auftriebs bereits nach zwei Sekunden erreicht. Das numerische Ergebnis stimmt bis zu einem Wert von  $s = 10$  sehr gut mit der Näherungsformel überein. Für größere Werte von  $s$  nähert sich die numerische Lösung dem stationären Wert von Eins etwas langsamer an.

### 2.21.3 Dreidimensionale Drehschwingung eines Flügels

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse für eine dreidimensionale Strömung verglichen. Gegenstand der Untersuchung ist dabei ein stark gepfeilter Flügel mit einer Streckung von  $\Lambda = 2$ . In Abbildung 2.41 ist die Anordnung schematisch dargestellt. Die wesentlichen Geometriedaten sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt. Die Problemstellung und eines der Referenzergebnisse wurden einer Arbeit von *Laschka* [20] entnommen, in der ein Verfahren zur Analyse harmonisch schwingender Tragflächen vorgestellt wird. Das Verfahren geht dabei von einer Integralgleichung aus, die über das Beschleunigungspotential abgeleitet wird. Die Ergebnisse nach *Laschka* sind in Abbildung 2.42 dargestellt. Für einen weiteren Vergleich sind die Ergebnisse für ein Panelverfahren dargestellt, welches mit Quell-

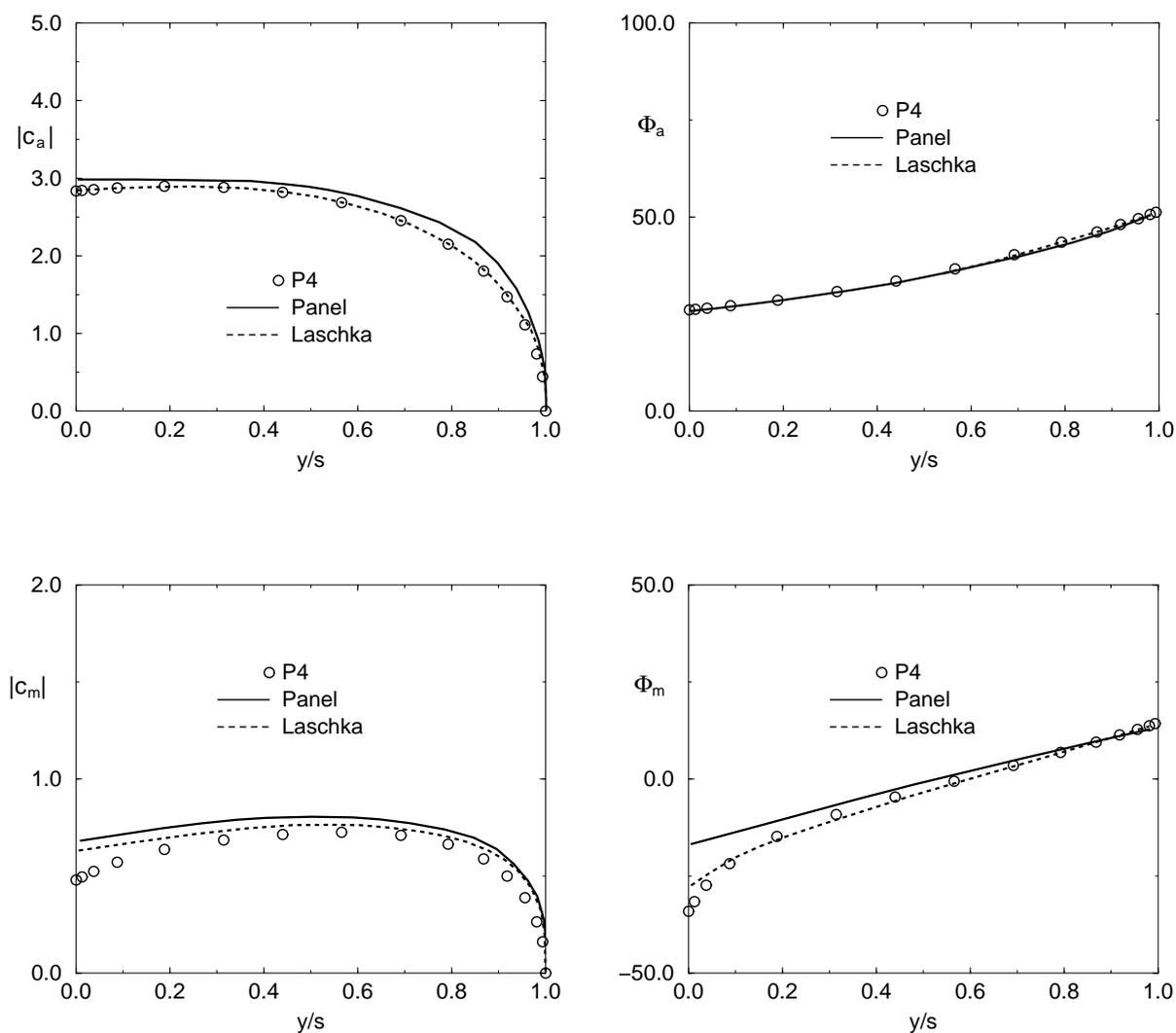


Abbildung 2.42: Nickschwingung am Pfeilflügel

und Dipolverteilungen operiert, jedoch keine so hohe Interpolationsordnung aufweist, wie das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren, dessen Ergebnisse in den Diagrammen mit  $P_4$  bezeichnet wurden. Die beiden oberen Diagramme der Abbildung 2.42 beschreiben die Amplitude des örtlichen Auftriebsbeiwerts  $|C_a|$  und den Phasenwinkel  $\Phi_a$  gegenüber der Drehbewegung. Die beiden unteren Diagramme geben die Amplitude des örtlichen Momentenbeiwerts  $|C_m|$  sowie deren Phasenverschiebung  $\Phi_m$  wieder. Dabei ist interessant, dass auch der Phasenwinkel sehr stark von der Spannweitenposition abhängt. Für die Beiwerte  $C_a$  und  $C_m$  gilt

$$C = C' + iC'' = |C|e^{i\Phi}. \quad (2.298)$$

Die Größen  $C'$  und  $C''$  verkörpern dabei wiederum die Real- und Imaginäranteile des entsprechenden Koeffizienten. Der Phasenwinkel errechnet sich schließlich zu

$$\Phi = \arctan \frac{C''}{C'}. \quad (2.299)$$

Die Amplitude des örtlichen Auftriebsbeiwertes  $|C_a|$  wird von  $P_4$  und dem Verfahren nach Laschka nahezu identisch berechnet. Etwas höher liegen dabei die Werte des Panelverfahrens. Die Phasenwinkel  $\Phi_a$  stimmt bei allen drei Verfahren sehr gut überein.

Die Momentenbeiwerte bezeichnen Momente um die  $y$ -Achse und beziehen sich auf die Linie  $m$ , die in Abbildung 2.41 dargestellt ist. Die Ergebnisse weichen hier stärker von einander ab. Das Panelverfahren liefert die höchsten Werte für die Amplitude, gefolgt vom Verfahren von Laschka und den Ergebnissen von  $P_4$ , welche speziell in der Flügelmitte deutlich unter den Werten der anderen Verfahren liegen. Beim Phasenwinkel stimmen die Ergebnisse von  $P_4$  und nach Laschka gut überein. Das Panelverfahren zeigt im Bereich der Flügelmitte deutlich höhere Phasenwinkel an. Generell kann jedoch gesagt werden, dass die Übereinstimmung der instationären Ergebnisse sehr zufriedenstellend ist.

## 2.22 Daten für Fluid-Struktur-Interaktion

Am Ende einer strömungsmechanischen Analyse stand bisher die Ermittlung einer Druckverteilung bzw. die Berechnung von konsistenten Knotenlasten  $\underline{F}_{\text{aero}}$ . Damit lässt sich bereits ein Verfahren zur Berechnung der Fluid-Struktur-Interaktion formulieren, bei dem Geometriedaten an den Strömungsanalyseroutinen übergeben werden und diese dann aerodynamische Lasten an die Strukturanalyse zurückgeben. Für viele Problemstellungen ist diese einfachste Form der Koppelung auch ausreichend. Bei Strukturen mit großen Verformungen und stark nichtlinearem Verhalten, wie es zum Beispiel Membranflügel sind, können jedoch Konvergenzprobleme, ja sogar ein Divergieren der Lösung auftreten. Ein Beispiel ist im Abschnitt 4 angeführt.

Die Eigenschaften eines Koppelungsschemas können verbessert werden, wenn neben den aerodynamischen Lasten  $\underline{F}_{\text{aero}}$  auch deren Änderung zufolge von Verschiebungskomponenten  $U_j$  in den Knoten  $j$

$$k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \quad (2.300)$$

bzw. Geschwindigkeitskomponenten

$$d_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{U}_j} \quad (2.301)$$

bekannt wären. Die beiden derart gewonnen Matrizen werden in Anlehnung an die nichtlineare Finite Elemente Methode als *aerodynamische Laststeifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  und *aerodynamische Dämpfungsmatrix*  $\mathbf{D}_{\text{aero}}$  bezeichnet. Die beiden Matrizen sind in der Regel voll besetzt und unsymmetrisch. Ein Aerodynamiker würde sie eventuell auch als Einflussmatrizen bezeichnen, doch dieser Begriff wurde bereits für die Abhängigkeit der induzierten Geschwindigkeiten von der Singularitätenbelegung verwendet.

### 2.22.1 Auslenkung einer Platte

Zunächst soll anhand eines einfachen Beispiels die Methodik zur Bestimmung von  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  und  $\mathbf{D}_{\text{aero}}$  erläutert werden.

In Abbildung 2.43 sind die Ergebnisse einer Platte mit einer lokalen Auslenkung dargestellt. Unterhalb des Diagramms sind zwanzig Elementarflügel dargestellt. Die Anströmung erfolgt horizontal von links. In der Mitte der Platte ist ein einzelner Knoten nach oben hin ausgelenkt. Die Strömung muss der Kontur folgen und es entsteht eine Wirbeldichteverteilung die im Diagramm mit der strichlierten Linie dargestellt ist. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist, dass die Auslenkung durch nur zwei Elementarflügel beschrieben wird, deren Kontrollpunkte in der Mitte der Elemente liegen. Um die Frage zu beantworten, wie gut zwei Elemente in der Lage sind die Wirbeldichteverteilung und in weiterer Folge die Druckverteilung zu erfassen, wurde in einer zweiten Analyse jeder Elementarflügel in Tiefenrichtung in fünf Elemente unterteilt. Die Strömung muss der gleichen Kontur folgen, es gibt allerdings deutlich mehr Kontrollpunkte. Mit dieser wesentlich feineren Diskretisierung erhält man den im Diagramm mit der ungebrochenen Linie dargestellten Verlauf der Wirbeldichte. Beide Verteilungen sind sehr ähnlich. Die feinere Diskretisierung erfasst die Singularitäten in den Knickpunkten besser. Wesentlich ist jedoch die Tatsache, dass beide Verteilungen nahezu identische Auftriebskräfte, gekennzeichnet durch den Beiwert  $c_A$ , produzieren. Die Abweichung beträgt nur rund 1%!

Dieses Ergebnis erleichtert die Formulierung einer effizienten Fluid-Struktur-Interaktion. Die wichtigsten Auswirkungen sind dabei:

- die Strömung um eine Auslenkung wird mit nur zwei Elementarflügeln ausreichend genau erfasst,

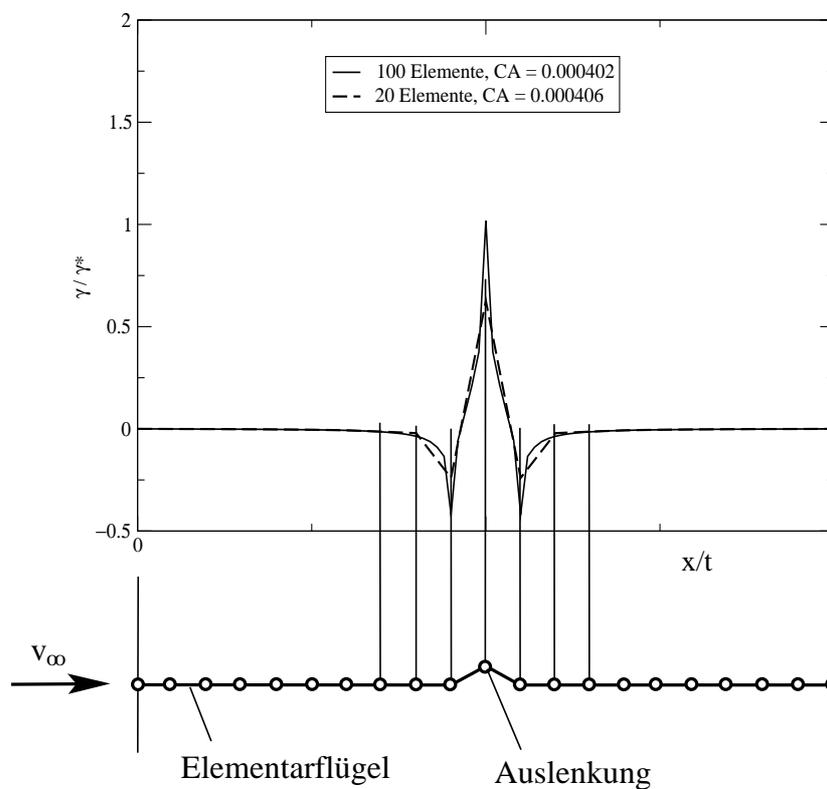


Abbildung 2.43: Zirkulationsverteilung bei lokaler Auslenkung

- für das Strömungs- sowie das Strukturproblem kann die gleiche Diskretisierung gewählt werden. Die aerodynamischen Kräfte können direkt auf FE-Knoten aufgebracht werden,
- durch ein sequentielles Auslenken der einzelnen Knoten und anschließender Bildung von Differenzenquotienten kann die aerodynamische Laststeifigkeitsmatrix konstruiert werden.

### 2.22.2 Aerodynamische Laststeifigkeitsmatrix

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie mit vertretbarem numerischen Aufwand die aerodynamische Steifigkeitsmatrix im stationären Fall bestimmt werden kann.

Zunächst wird eine Strömungsanalyse durchgeführt und der aerodynamische Lastvektor  $\underline{F}_{\text{aero}}$  bestimmt. Dannach werden sequentiell alle Knoten um einen kleinen Wert verschoben

bzw. ausgelenkt und dazu der neue Lastvektor berechnet. Eine reale Auslenkung verändert allerdings die Geometrie des Analysenetzes und es müsste eine komplette Analyse inklusive der kostspieligen Ermittlung der induzierten Geschwindigkeiten durchgeführt werden. Die daraus resultierenden Analysezeiten wären für gekoppelte Probleme unbrauchbar. Durch zwei Maßnahmen kann dieses Problem allerdings umgangen werden.

- Auslenkung nur normal auf die Tragfläche,
- Ersetzen der Auslenkung durch Rotation der Normalen.

Für ein Analyse Netz sind in allen Knoten die Normalvektoren auf die Flügelfläche bekannt. In Abbildung 2.44 ist eine Gruppe von Elementarflügeln mit zwei ausgezeichneten Knoten  $i$  und  $j$  dargestellt. Eine Verschiebung in der Tangentialebene verursacht keine Änderung

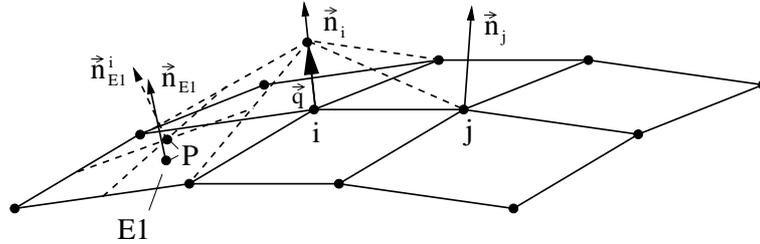


Abbildung 2.44: Panelanordnung zur Bestimmung von  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$

der Profilkontur und damit auch keine Änderung in den aerodynamischen Lasten. Die Auslenkung muss daher nur normal auf die Tragfläche erfolgen. In Abbildung 2.44 erfolgt diese Auslenkung mit  $\vec{q}$  in Richtung  $\vec{n}_i$ . Dadurch wird beispielsweise der Kontrollpunkt  $P$  im Element  $E1$  vertikal verschoben und der Normalvektor  $\vec{n}_{E1}$  nach  $\vec{n}_{E1}^i$  geschwenkt.

Die zweite Maßnahme zur Reduktion des Rechenaufwands leitet sich aus einer Methode der Profiltheorie ab, siehe z.B. *Schlichting/Truckenbrodt* [34]. Die eigentlich Belegung mit Wirbeldichten erfolgt nicht auf der Skelettlinie sondern näherungsweise auf der Profilschneide. Eine äquivalente Vorgangsweise wird hier angewandt und ist in Abbildung 2.45 skizziert. Im exakten Fall müsste die kinematische Strömungsbedingung des Elementes  $E1$  im Punkt  $P^i$  erfüllt werden und lautet

$$\vec{w}_{P^i} \cdot \vec{n}_{E1}^i = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{E1}^i \quad (2.302)$$

Diese Gleichung wird im Punkt  $P$  angenähert durch

$$\vec{w}_P \cdot \vec{n}_{E1} = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{E1}^i \frac{1}{\cos \alpha} = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{E1}^i \frac{1}{\vec{n}_{E1} \cdot \vec{n}_{E1}^i}, \quad (2.303)$$

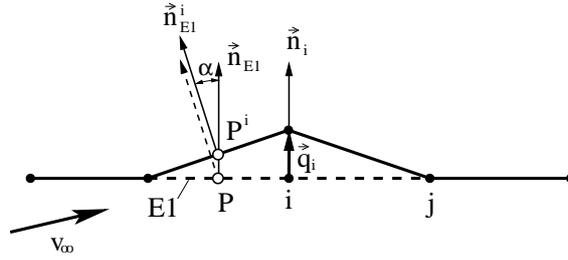


Abbildung 2.45: Kinematische Strömungsbedingung zur Berechnung von  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$

und bezieht sich auf den Normalvektor  $\vec{n}_{E1}$  der unverformten Geometrie. Der Vorteil dieser Formulierung liegt nun darin, dass die linke Seite der Gleichung (2.303) genau der Formulierung in Abschnitt 2.10 entspricht und die Systemmatrix  $\mathbf{W}_t$  direkt übernommen werden kann. Es müssen keine neuen Induktionsintegrale gelöst werden. Soll also der Einfluss einer lokalen Auslenkung in Knoten  $i$  berechnet werden, muss nur die rechte Seite von (2.172) entsprechend Gleichung (2.303) an einigen wenigen Stellen modifiziert werden

$$\mathbf{W}_t \underline{\Gamma}^i = \underline{B}^i. \quad (2.304)$$

Die invertierte Form von  $\mathbf{W}_t$  ist ebenfalls bekannt und es gilt somit

$$\underline{\Gamma}^i = \mathbf{W}_t^{-1} \underline{B}^i. \quad (2.305)$$

Mit  $\underline{\Gamma}^i$  sind die Singularitätenbelegungen bekannt und die Berechnung von  $\underline{F}_{\text{aero}}^i$  erfolgt wie in Abschnitt 2.11. Während für die Bestimmung der Singularitäten näherungsweise die unverformte Geometrie verwendet wird, kann die Integration der Druckverteilung auf der tatsächlich ausgelenkten Geometrie erfolgen. Damit wird nicht nur die Änderung der Druckverteilung aufgrund der Auslenkung sondern auch die Rotation der Normalenvektoren und somit der Folgelastcharakter erfasst.

Mit den beiden aerodynamischen Lastvektoren können durch Bildung von Differenzenquotienten die partiellen Ableitungen angenähert werden. Für jeden Knoten erhält man eine 3x3-Submatrix aus denen dann die gesamte Laststeifigkeitsmatrix assembliert wird. Die

Submatrix lautet

$$k_{11} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^x\|} \vec{e}_x, \quad (2.306)$$

$$k_{12} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^x\|} \vec{e}_y, \quad (2.307)$$

$$k_{13} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^x\|} \vec{e}_z, \quad (2.308)$$

$$k_{21} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^y\|} \vec{e}_x, \quad (2.309)$$

$$k_{22} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^y\|} \vec{e}_y, \quad (2.310)$$

$$k_{23} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^y\|} \vec{e}_z, \quad (2.311)$$

$$k_{31} = \frac{F_j^z - F_{ki}^z}{\|\vec{q}^z\|} \vec{e}_x, \quad (2.312)$$

$$k_{32} = \frac{F_j^z - F_{ji}^z}{\|\vec{q}^z\|} \vec{e}_y, \quad (2.313)$$

$$k_{33} = \frac{F_j^z - F_{ji}^z}{\|\vec{q}^z\|} \vec{e}_z. \quad (2.314)$$

Sie beschreibt die Änderung der Last in Knoten  $j$  bei einer Verschiebung des Knotens  $i$  in Richtung des Normalvektors  $\vec{n}^i$ . Mit der aerodynamischen Laststeifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  und einer Veränderung der Geometrie  $\Delta\tilde{U}$  kann der Lastvektor aktualisiert werden

$$\tilde{F}_{\text{aero,neu}} = \tilde{F}_{\text{aero,alt}} + \mathbf{K}_{\text{aero}} \Delta\tilde{U}. \quad (2.315)$$

Die Matrix  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  gilt natürlich nur für moderate Abweichungen der Geometrie von der Ausgangskonfiguration.

Die Laststeifigkeitsmatrix kann nicht nur für strukturelle Analysen verwendet werden, sondern es lassen sich eine Reihe von flugmechanischen Beiwerten berechnen. Ein Klappen-ausschlag kann beispielsweise über einen Verschiebungsvektor  $\Delta\tilde{U}_{\text{flap}}$  definiert werden und liefert mit  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  multipliziert ein  $\tilde{F}_{\text{flap}}$ , waraus resultierende Kräfte und Momente bestimmbar sind.

### 2.22.3 Aerodynamische Dämpfungsmatrix

Die Bestimmung der aerodynamischen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{\text{aero}}$  erfolgt in analoger Weise zum vorhergehenden Abschnitt. Tatsächlich wird die Problemstellung vereinfacht, da die

Geometrie unverändert bleibt und nur mit Geschwindigkeiten operiert wird. In Abbildung 2.46 ist ein zweidimensionale Anordnung von Elementarflügeln dargestellt. Der Knoten  $i$  wird mit der Geschwindigkeit  $\vec{q}_i$  in Richtung der Normalvektors  $\vec{n}_i$  nach oben ausgelenkt. Die Geschwindigkeiten werden innerhalb der Elementarflügel linear interpoliert. Dies ergibt im Kontrollpunkt  $P$  des Elementes  $E1$  eine vertikale Geschwindigkeit von  $\vec{q}_{E1}$ . Die

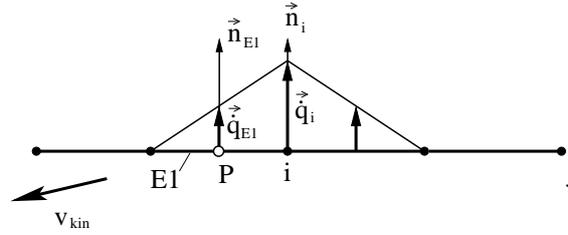


Abbildung 2.46: Kinematische Strömungsbedingung zur Berechnung von  $\mathbf{D}_{aero}$

kinematische Strömungsbedingung lautet somit

$$\vec{w}_P \cdot \vec{n}_{E1} = -(-\vec{v}_{kin} - \vec{d}_{E1}) \cdot \vec{n}_{E1}. \quad (2.316)$$

Wieder beschränken sich die Änderungen in Gleichung (2.172) auf die rechte Seite  $\underline{B}$  und die Singularitätenbelegung  $\underline{\Gamma}'$  kann durch einfache Matrizenmultiplikation erfolgen. Die Berechnung der einzelnen Elemente der Sub-Dämpfungsmatrix erfolgt wiederum mittels Differenzenquotienten. Eine Submatrix ist wie folgt definiert:

$$d_{11} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_x, \quad (2.317)$$

$$d_{12} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_y, \quad (2.318)$$

$$d_{13} = \frac{F_j^x - F_{ji}^x}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_z, \quad (2.319)$$

$$d_{21} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_x, \quad (2.320)$$

$$d_{22} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_y, \quad (2.321)$$

$$d_{23} = \frac{F_j^y - F_{ji}^y}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_z, \quad (2.322)$$

$$d_{31} = \frac{F_j^z - F_{ji}^z}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_x, \quad (2.323)$$

$$d_{32} = \frac{F_j^z - F_{ji}^z}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_y, \quad (2.324)$$

$$d_{33} = \frac{F_j^z - F_{ji}^z}{\|\vec{q}^i\|} \vec{e}_z. \quad (2.325)$$

Sie beschreibt die Änderung der Last in Knoten  $j$  bei einer Auslenkgeschwindigkeit des Knotens  $i$  in Richtung des Normalvektors.

Mit der Dämpfungsmatrix kann der Lastvektor wiederum aktualisiert werden und es gilt

$$\underline{F}_{\text{aero,neu}} = \underline{F}_{\text{aero,alt}} + \mathbf{D}_{\text{aero}} \Delta \dot{U}. \quad (2.326)$$

## 2.23 Prediktor-Korrektor-Schema

Die beiden vorhergehenden Abschnitte haben die Berechnung der aerodynamischen Laststeifigkeits und Dämpfungsmatrix behandelt. Für stationäre Probleme kann die Laststeifigkeitsmatrix direkt in einer FEM-Prozedur verwendet werden.

Bei instationären Problemen sind alle Größen von der Vorgeschichte abhängig, die sozusagen im Nachlauf gespeichert wird. Das bedeutet auch, dass die Lastvektoren und die beiden Matrizen  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  sowie  $\mathbf{D}_{\text{aero}}$  nur für einen bestimmten Zeitpunkt gültig sind, da sie ebenfalls vom zeitlich veränderlichen Nachlauf beeinflusst werden.

Für die gekoppelte Analyse soll im instationären Fall ein implizites Zeitschrittverfahren nach Newmark zum Einsatz kommen, das ausführlich in den Büchern von *Argyris* [4] und *Bathe* [5] behandelt wird. Alle Systemgrößen, wie Druckverteilung, Position, Geschwindigkeit und Beschleunigungen des Flugzeuges, zum Zeitpunkt  $t$  seien bekannt. Um eine Lösung für den nächsten Zeitschritt zu ermitteln, müssen die Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aufgestellt werden. Das bedeutet, dass auch die aerodynamischen Kräfte sowie die beiden Matrizen  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  und  $\mathbf{D}_{\text{aero}}$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  bekannt sein müssen und nicht die zur Zeit  $t$  bestimmten Werte verwendet werden können. Dieses Problem kann durch ein Prediktor-Korrektor-Verfahren behandelt werden.

### 2.23.1 Konzept des Prediktor-Korrektor-Verfahren

Als Ausgangspunkt wird zunächst von bekannten Systemgrößen zum Zeitpunkt  $t$  ausgegangen. Mit einer vorgegebenen Zeitschrittweite  $\Delta t$  werden für den Zeitpunkt  $t + \Delta t$  die Verschiebung und Geschwindigkeit des Flugzeuges ermittelt. Dies erfolgt unter Annahme einer konstanten Beschleunigung.

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^* = {}^t\underline{U} + {}^t\dot{\underline{U}}\Delta t + {}^t\ddot{\underline{U}}\frac{\Delta t^2}{2} \quad (2.327)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^* = {}^t\dot{\underline{U}} + {}^t\ddot{\underline{U}}\Delta t \quad (2.328)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^* = {}^t\ddot{\underline{U}}. \quad (2.329)$$

Der Asterisk in den hochgestellten Indices soll andeuten, dass es sich um extrapolierte Werte handelt. Für die extrapolierte Position werden der aerodynamische Lastvektor  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^*$  und die Matrizen  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{aero}}^*$  sowie  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{\text{aero}}^*$  bestimmt.

Für die Lösung der Bewegungsgleichung kann mit folgendem Lastvektor gearbeitet werden:

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^{\text{fem}} = {}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^* + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{aero}}^* ({}^{t+\Delta t}\underline{U} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^*) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{\text{aero}}^* ({}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}} - {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^*). \quad (2.330)$$

Der in Gleichung (2.330) dargestellte Lastvektor ergibt sich aus einem Lastvektor für die extrapolierte Position (*Prediktor*) plus Korrekturtermen, die eine Abweichung von der extrapolierten Position korrigieren (*Korrektor*). Wichtig ist dabei, dass die Korrekturterme nur Abweichungen erfassen, die normal zur Tragfläche auftreten. Abweichungen in Richtung der Flugbewegung sind vernachlässigbar, weil die Beschleunigungen sich zwischen zwei Zeitschritten nur geringfügig ändern. Andernfalls muss die Schrittweite entsprechend reduziert werden, bis diese Bedingung erfüllt ist. In Abbildung 2.47 ist die Skelettlinie eines Flügels in zwei verschiedenen Positionen dargestellt. Die obere Position, gekennzeichnet

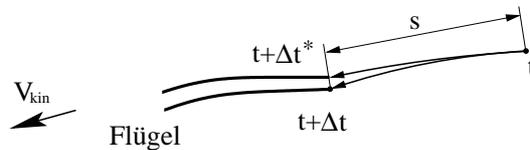


Abbildung 2.47: Mögliche Abweichung von der extrapolierten Position

durch  $t + \Delta t^*$  stellt die vom Zeitpunkt  $t$  aus extrapolierte Position dar. Die untere Position sei die sich zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  tatsächlich einstellende. Wichtig für diese Schema ist, dass die Schrittlänge in Flugrichtung  $d$  durch die Extrapolation möglichst gut getroffen wird.

Im Prediktor-Korrektor-Schema kann die Güte der Extrapolation beurteilt und notfalls das Zeitinkrement reduziert werden. Nachdem nämlich eine Lösung der Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gefunden wurde, erfolgt eine Fluidanalyse für diese neue Konfiguration. Eine zu große Differenz zwischen dem mittels Gleichung (2.330) und dem direkt bestimmten Lastvektor  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}$  signalisiert eine zu große Schrittweite.

Der Ablauf dieses Schemas lässt sich in kurzer Form zusammenfassen als:

- 1.) das Finite Elemente Programm liefert die Lösung für Zeitschritt  $t$ :  ${}^t\underline{U}$ ,  ${}^t\underline{\dot{U}}$  und  ${}^t\underline{\ddot{U}}$ ,
- 2.) mit diesen Größen wird der aerodynamische Lastvektor  ${}^t\underline{F}_{\text{aero}}$  bestimmt und jene Wirbeldichte errechnet, die in diesem Zeitschritt tatsächlich freigesetzt wurde (Aktualisierung des Nachlaufs),
- 3.) mittels der Gleichungen (2.327) bis (2.329) werden für ein vorgegebenes  $\Delta t$  die neuen Zustandsgrößen ermittelt:  ${}^t\underline{U}^*$ ,  ${}^t\underline{\dot{U}}^*$  und  ${}^t\underline{\ddot{U}}^*$ ,
- 4.) das Analysenetz des Flügels wird in die neue Position verschoben und die Lücke zwischen Hinterkante und Nachlauf mit einer neuen Reihe Nachlaufelemente ausgefüllt. Der bekannte Anteil der Wirbeldichtenbelegung (siehe Punkt 2.) wird ebenfalls aufgebracht.
- 5.) die Strömungsanalyse liefert:  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^*$ ,  ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{K}}_{\text{aero}}^*$  sowie  ${}^{t+\Delta t}\underline{\mathbf{D}}_{\text{aero}}^*$ . Diese Größen werden wieder ans FE-Programm retourniert,
- 0.) Lösung der Bewegungsgleichungen für den Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Der zu diesem Zeitpunkt im FE-Programm verwendete Lastvektor wurde mittels Gleichung (2.330) ermittelt:  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^{\text{fem}}$ . Nach der erfolgreichen Lösung wird dieser Zeitpunkt in  $t$  umbenannt, also auch

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^{\text{fem}} \rightarrow {}^t\underline{F}_{\text{aero}}^{\text{fem}}$$

und der Kreis schließt sich.

- 1.) das Finite Elemente Programm liefert wieder die Lösung für Zeitschritt  $t$ :  ${}^t\underline{U}$ ,  ${}^t\underline{\dot{U}}$  und  ${}^t\underline{\ddot{U}}$ ,
- 2.) mit diesen Größen wird der aerodynamische Lastvektor  ${}^t\underline{F}_{\text{aero}}$  bestimmt und jene Wirbeldichte errechnet, die in diesem Zeitschritt tatsächlich freigesetzt wurde. Ferner kann jetzt ein Vergleich zwischen  ${}^t\underline{F}_{\text{aero}}^{\text{fem}}$  und  ${}^t\underline{F}_{\text{aero}}$  durchgeführt und damit die

Genauigkeit des Verfahrens kontrolliert werden. Falls beispielsweise

$$\frac{|{}^t F_{\text{aero}}^{\text{fem}} - {}^t F_{\text{aero}}|}{|{}^t F_{\text{aero}}|} \geq \varepsilon_{pk} \quad (2.331)$$

erfüllt ist, muss die Zeitschrittweite reduziert werden.

3.) ...

Im Vergleich zu einer stationären Analyse müssen also bei einer Koppelung mit einem FEM-Algorithmus mindestens zwei Fluidanalysen pro Zeitschritt (Lastinkrement) durchgeführt werden, wobei jedoch nur bei einer auch die aerodynamische Steifigkeitsmatrix und die aerodynamische Dämpfungsmatrix berechnet werden.

### 2.23.2 Stabilität des Verfahrens

Die Stabilität des Verfahrens hängt primär davon ab, mit welcher Methode die Strukturbewegung berechnet wird. Im Abschnitt 4.2 wird dieser Aspekt aufgegriffen.

Instabilitäten die alleine auf das Prediktor-Korrektor-Schema zurückzuführen sind, konnten bisher nicht festgestellt werden. Für die Genauigkeit des Verfahrens ist allerdings die Wahl einer geeigneten Zeitschrittweite essentiell, da zur Berechnung der instationären Luftkräfte die zeitlichen Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials benötigt werden.

### 2.23.3 Simulation einer Koppelung: schlagender Flügel

In diesem Abschnitt soll die Arbeitsweise des Prediktor-Korrektor-Schemas anhand des zweidimensionalen Problems eines vertikal schlagenden Flügels illustriert werden. In Abbildung 2.48 ist die Anordnung skizziert. Der Flügel bzw. die Platte wird horizontal ange-

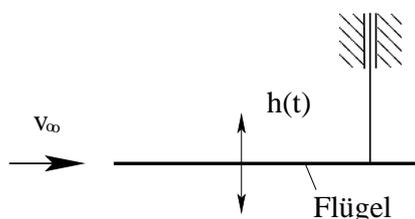


Abbildung 2.48: Schlagender Flügel

strömt und schwingt vertikal mit

$$h(t) = H \sin \omega t. \quad (2.332)$$

Die vertikale Geschwindigkeit beträgt dann

$$\dot{h}(t) = H\omega \cos \omega t \quad (2.333)$$

und die Beschleunigung ist

$$\ddot{h}(t) = -H\omega^2 \sin \omega t. \quad (2.334)$$

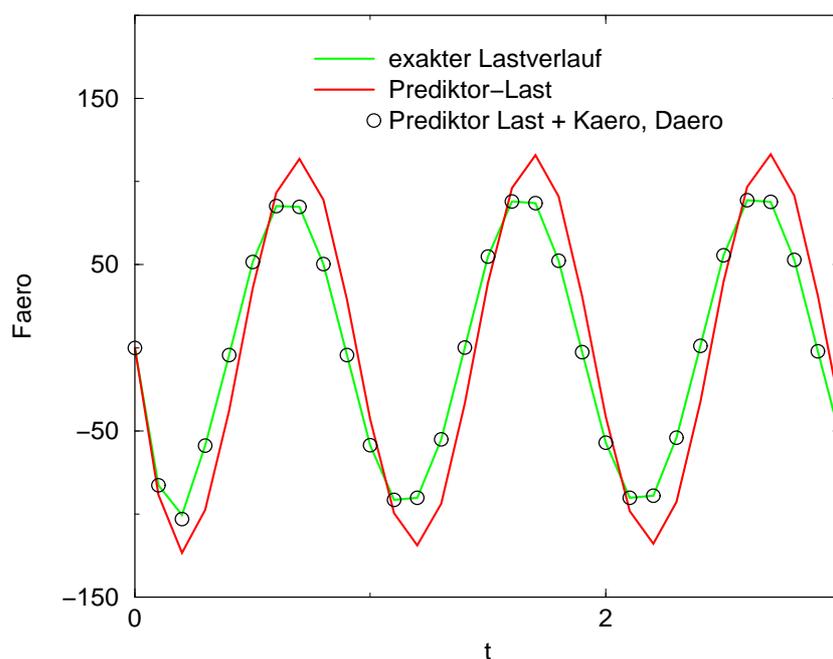


Abbildung 2.49: Aerodynamische Lasten am schlagenden Flügel

In Abbildung 2.49 sind verschiedene Lastverläufe dargestellt. Der grüne Verlauf stellt sich ein, wenn zu jedem Zeitpunkt die exakte Position  $h(t)$  und die exakte Geschwindigkeit  $\dot{h}(t)$  für die Berechnung der instationären Kräfte verwendet werden. Kommt hingegen nur der Prediktor-Anteil des Verfahrens zum Einsatz, indem nämlich bei konstanter Zeitschrittweite von einem Zeitpunkt  $\tau$  ausgehend mithilfe der Gleichungen (2.327) und (2.328) extrapolierte Werte für Position und Geschwindigkeit zur Zeit  $\tau + \Delta\tau$  bestimmt werden, dann ergibt sich:

$$h^*(\tau + \Delta\tau) = h(\tau) + \dot{h}(\tau)\Delta\tau + \ddot{h}(\tau)\frac{\Delta\tau^2}{2} \quad (2.335)$$

$$\dot{h}^*(\tau + \Delta\tau) = \dot{h}(\tau) + \ddot{h}(\tau)\Delta\tau \quad (2.336)$$

Der dazugehörige Lastverlauf  ${}^{\tau+\Delta\tau}\tilde{F}_{\text{aero}}^*$  ist in Abbildung 2.49 mit Rot markiert. Die Abweichung zwischen dem exakten Verlauf und dem reinen Prediktor-Verlauf ist groß. Zusätzlich ist eine leichte Phasenverschiebung der Kurven erkennbar. Werden zusätzlich im extrapolierten Zustand die aerodynamischen Laststeifigkeits- und Dämpfungsmatrizen berechnet und die Korrekturterme mitgenommen, dann erhält man einen Verlauf der durch die schwarzen Kreise gekennzeichnet ist und mit der exakten Kurve (grün) wieder übereinstimmt:

$$\begin{aligned} {}^{\tau+\Delta\tau}\tilde{F}_{\text{aero}}^{\text{PK}} &= {}^{\tau+\Delta\tau}\tilde{F}_{\text{aero}}^* + {}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{K}_{\text{aero}}^* (h^*(\tau + \Delta\tau) - h(\tau + \Delta\tau)) \\ &\quad + {}^{\tau+\Delta\tau}\mathbf{D}_{\text{aero}}^* (\dot{h}^*(\tau + \Delta\tau) - \dot{h}(\tau + \Delta\tau)). \end{aligned} \quad (2.337)$$

# Kapitel 3

## Strukturanalyse

### 3.1 Einleitung

Die Berechnung des strukturellen Verhaltens erfolgt mittels der Methode der Finiten Elemente, auch kurz FEM genannt. Membranstrukturen müssen mit einem nichtlinearen Verfahren behandelt werden, da die Struktursteifigkeit von der aktuellen Geometrie und den Membrankräften abhängt. Dabei ist eine inkrementell-iterative Vorgangsweise erforderlich, wobei die Last in Schritten gesteigert und die gesuchte Gleichgewichtslösung durch Iteration gefunden wird.

Ein wichtiges Ziel dieser Arbeit ist der Vergleich verschiedener Koppelungsmethoden zwischen einem Fluid- und einem Finite-Elemente-Programm. Dabei sind gravierende Eingriffe in die Struktur eines FE-Programms erforderlich, das für reine Strukturanalysen konzipiert wurde. Als FE-Programm wurde dabei auf das Programm *CARINA* [1] zurückgegriffen, das am Institut für Leichtbau und Flugzeugbau der Technischen Universität Wien entwickelt wird. Es handelt sich dabei um ein nichtlineares FE-Programm, das speziell für die Analyse von Stabilitätsproblemen von Schalenstrukturen entwickelt wurde. Eine Reihe von Adaptionen war jedoch notwendig, um die Struktur-Fluid-Interaktion realisieren zu können. Die wesentlichen Entwicklungsschritte waren dabei:

- a.) Implementierung eines Membranelementes mit der Möglichkeit von Faltenbildung,
- b.) Implementierung eines Balkenelementes mit Vordeformation zur Simulation vorgespannter Strukturen,
- c.) Implementierung nichtlinearer Koppelbedingungen zur Simulation von Segeltaschen,

- d.) Erweiterung des Gleichungslösers zur Behandlung von vollbesetzten unsymmetrischen Steifigkeitsmatrizen,
- e.) Erweiterung auf instationäre Probleme,
- f.) Implementierung numerischer Dämpfung,
- g.) Implementierung eines PID-Reglers für das Abfliegen von Geschwindigkeitsprofilen.

Die Punkte a.) bis c.) werden in diesem Kapitel behandelt. Punkt d.) wird nicht näher erläutert, da die Umsetzung nur programmiertechnische Aspekte mit sich brachte. Die Punkte e.) und f.) werden in Abschnitt 4 behandelt. Der Punkte g.) wird schließlich anhand der Modellbildung eines Hängegleiters, Abschnitt 5, beschrieben.

## 3.2 Formulierung eines Membranelementes mit Faltenbildung

### 3.2.1 Isoparametrisches Element

Bei der Diskussion unterschiedlicher Verfahren zur Ermittlung aerodynamischer Kräfte wurde erwähnt, dass sowohl für die Fluid- als auch für die Strukturanalyse die gleiche Diskretisierung verwendet werden soll, da dies zu einem einfacheren Koppelungsschema führt. Dazu war es notwendig ein isoparametrisches vierknotiges Membranelement mit bilinearer Interpolation und drei Verschiebungsfreiheitsgraden je Knoten in *CARINA* zu implementieren. Auf die detaillierte Formulierung des Membranelementes wird hier nicht näher eingegangen. Eine ausführliche Beschreibung findet man zum Beispiel in den Arbeiten von *Taenzer* [37] oder *Schrefler* [8]. In Abbildung 3.1 ist das Element im globalen Raum (globales  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ -System) bzw. im Einheitsraum ( $rst$ -System) dargestellt. Die numerische Integration erfolgt mit Hilfe der Integrationspunkte IP1 bis IP4. Im globalen Raum ist für den Integrationspunkt IP3 ein lokales tangentes Koordinatensystem mit den Richtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  eingezeichnet. Die lokale  $x$ -Achse verläuft dabei parallel zur  $r$ -Richtung des Integrationspunktes. Die Elementsteifigkeitsmatrix sowie der Vektor der inneren Kräfte werden in jedem Integrationspunkt im lokalen, tangentialen  $xyz$ -System bestimmt. Vor der Assemblierung der Beiträge der einzelnen Integrationspunkte erfolgt schließlich die Transformation auf das globale  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ -System.

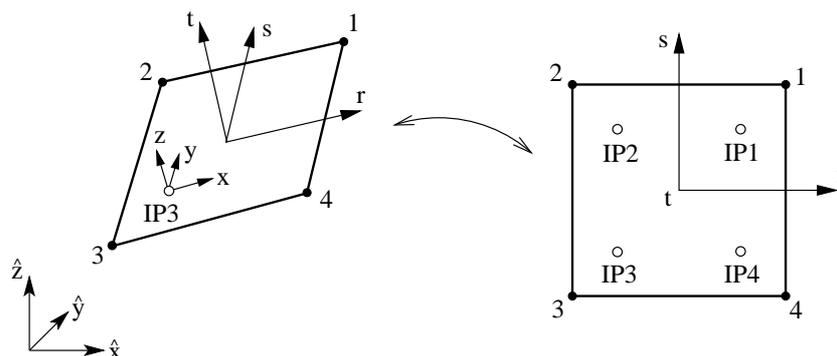


Abbildung 3.1: Isoparametrisches Element

Die vier Interpolationsfunktionen lauten

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad (3.1)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad (3.2)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad (3.3)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (3.4)$$

Mittels dieser Funktionen werden sowohl die unverformte als auch die verformte Geometrie durch Interpolation beschrieben. Ein Ortsvektor der unverformten Ausgangsgeometrie wird mit  ${}^0\vec{x}$  bezeichnet. In der verformten Struktur zum Zeitpunkt  $t$  ist die Position eines Punktes durch  ${}^t\vec{x}$  definiert. Für einen beliebigen Punkt innerhalb des Elementes gilt

$$\vec{x}_P(r_P, s_P) = \sum_{i=1}^4 \vec{x}_i h_i(r_P, s_P) \quad (3.5)$$

mit den Ortsvektoren  $\vec{x}_i$  der vier Eckknoten.

### 3.2.2 Spannungs- und Verzerrungsgrößen

Die Formulierung des Elementes erfolgt in der Totalen-Lagrange-Betrachtungsweise. Bei der Totalen-Lagrange-Formulierung dient der unverformte Ausgangszustand als Bezugssystem. Als Verzerrungsmaß wird mit den Green-Lagrange-Verzerrungen operiert. Als energetisch konjugiertes Spannungsmaß dienen die Piola-Kirchhoff-Spannungen zweiter Art (PK2-Spannungen).

Für die Berechnung der Verzerrungen müssen die Verschiebungen nach den Koordinatenrichtungen differenziert werden. Um die Formulierung zu vereinfachen wird eine Koordinatentransformation vom globalen  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ -System in ein lokales tangentielles vom jeweiligen Integrationspunkt abhängiges  $xyz$ -System durchgeführt. In der Abbildung 3.1 ist ein derartiges lokales System auf der linken Seite für den Integrationspunkt IP3 dargestellt. Die Jakobi-Matrix in einem Integrationspunkt lautet

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^0 x}{\partial r} & \frac{\partial^0 y}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial^0 x}{\partial s} & \frac{\partial^0 y}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Der rechts hochgestellte Index 0 zeigt an, dass es sich um die undeformierte Geometrie handelt. Die Determinante der Jakobimatrix ist

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial^0 x}{\partial r} \frac{\partial^0 y}{\partial s} - \frac{\partial^0 y}{\partial r} \frac{\partial^0 x}{\partial s} \quad (3.7)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Richtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  werden damit zu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial()}{\partial^0 x} \\ \frac{\partial()}{\partial^0 y} \\ \frac{\partial()}{\partial^0 z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_j} \begin{pmatrix} \frac{\partial^0 y}{\partial s} & -\frac{\partial^0 y}{\partial r} & 0 \\ -\frac{\partial^0 x}{\partial s} & \frac{\partial^0 x}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial()}{\partial r} \\ \frac{\partial()}{\partial s} \\ \frac{\partial()}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Für den Deformationsgradienten gilt nach *Bathe* [5]

$${}^t_0 \mathbf{X} = ({}_0 \nabla {}^t \vec{x}^T)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^t x}{\partial^0 x} & \frac{\partial^t x}{\partial^0 y} & 0 \\ \frac{\partial^t y}{\partial^0 x} & \frac{\partial^t y}{\partial^0 y} & 0 \\ \frac{\partial^t z}{\partial^0 x} & \frac{\partial^t z}{\partial^0 y} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

mit

$${}_0 \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial^0 x} \\ \frac{\partial()}{\partial^0 y} \\ \frac{\partial()}{\partial^0 z} \end{bmatrix}; \quad {}^t \vec{x} = \begin{pmatrix} {}^t x \\ {}^t y \\ {}^t z \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Mit dem Deformationsgradienten lässt sich der Cauchy-Greene Deformationstensor berechnen als

$${}^t_0 \mathbf{C} = {}^t_0 \mathbf{X}^T {}^t_0 \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

Der Green-Lagrange Verzerrungstensor wird durch eine  $3 \times 3$ -Matrix beschrieben

$${}^t_0 \epsilon = \frac{1}{2} ({}^t_0 \mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.12)$$

Der Green-Lagrange Verzerrungstensor ist symmetrisch und invariant gegenüber Starrkörperrotationen. Die Voraussetzung linear elastischen Materialverhaltens führt auf

$${}^t_0S_{ij} = S_{ij}^v + C_{ijkl} {}^t_0\varepsilon_{kl} \quad (3.13)$$

mit eine Vorspannung im undeformierten Zustand von  $S_{ij}^v$  und dem Materialtensor  $\mathbf{C}$ .

Die PK2-Spannungen sind keine physikalischen Größen, weil sie die Spannungen zum Zustand  $t$  auf die unverformte Konfiguration  ${}^t_0\mathcal{X}$  beziehen. Mit den Beziehungen

$${}^t\tau_{mn} = \frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} {}^t_0x_{m,i} {}^t_0S_{ij} {}^t_0x_{n,j} \quad (3.14)$$

sowie

$$\frac{{}^t\rho}{{}_0\rho} = \frac{1}{\det {}^t_0\mathbf{X}} \quad (3.15)$$

werden die sogenannten Cauchy-Spannungen ermittelt, die dem physikalischen Begriff einer Spannung entsprechen und sich auf den aktuellen Zustand  $t$  beziehen.

### 3.2.3 Einfaches Faltenmodell für isotrope Membranen

Die Faltenbildung von Membranen ist zumeist ein lokales Phänomen mit kurzwelligem Faltenmuster. Eine derart feine Modellierung, die diese Falten mittels FEM auflösen könnte, ist für spezielle Probleme zwar zielführend, aber für die Betrachtung gekoppelter Probleme meist ungeeignet. Nicht die Faltengeometrie sondern das Verhalten der Struktur ist von Interesse. Steht die Membran allseitig unter Zug (keine Falten), dann wird die Form der Membran durch die Interpolationsfunktionen beschrieben. Die Verzerrungen, die das Membranmaterial erfährt, können dabei direkt über die Knotenverschiebungen und die Interpolationsfunktionen ermittelt werden.

Wird jedoch eine der Hauptnormalspannungen negativ, dann setzt die Faltenbildung ein. Die Richtung der Falten verläuft dabei parallel zur Zugrichtung. Eine ideale Membran verfügt über keinerlei Biegesteifigkeit, und die Druckspannungen werden vollständig abgebaut. Gleichzeitig verschwindet auch die Membransteifigkeit quer zu den Falten (Druckrichtung). Dieser Zustand ist naturgemäß mit einem isotropen Werkstoffverhalten und den herkömmlichen Elementverzerrungen nicht beschreibbar.

Aus diesem Grund wird in weiterer Folge bei gefalteten Bereichen zwischen den Elementverzerrungen, welche durch die Knotenverschiebungen und die bilinearen Interpolationsfunktionen definiert sind, und den Verzerrungen in einem materiellen Punkt der Membran

unterschieden. Die Elementverzerrungen können bei einer Faltenbildung sehr groß werden, wobei die Verzerrungen und die Spannungen in der Membran in der Regel klein bleiben, da die Membran durch eine Faltenbildung normal zur Druckrichtung ausweicht. Die Interpolationsfunktionen beschreiben somit nur noch eine mittlere Lage der gefalteten Membran. In Abbildung 3.2 ist dieser Zusammenhang dargestellt.

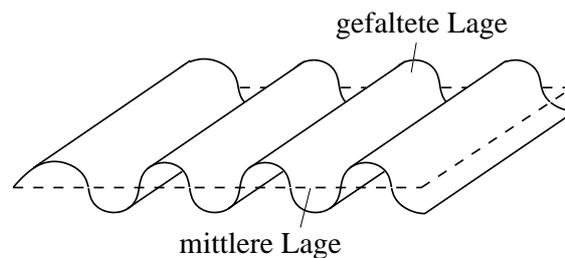


Abbildung 3.2: Mittlere und gefaltete Lagen

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens wird die lokale Faltenbildung auf Integrationsebene durch spezielle Formulierungen erfasst, die entweder auf einem nichtlinearen Materialgesetz basieren (*Miller*, [23], [24]) oder mit einer modifizierten Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung arbeiten. Das in diesem Abschnitt vorgestellte Modell könnte man zur ersten Gruppe zählen, während das viel allgemeinere Roddemansche Modell [33] der zweiten Gruppe angehört und im nachfolgenden Kapitel behandelt wird.

Bevor das Faltenmodell im Detail dargestellt wird, ist noch eine kurze Beschreibung der Abläufe innerhalb des FEM-Programmes notwendig. Wie bereits an früherer Stelle erwähnt, ist zur Lösung des nichtlinearen Strukturverhaltens eine inkrementell-iterative Vorgangsweise notwendig. Die Lasten werden dabei in kleinen Inkrementen verändert bzw. erhöht. Durch eine Gleichgewichtsiteration wird die dazugehörige Deformation der Struktur ermittelt. Das strukturelle Verhalten der Membran hängt von ihrem Zustand, i.e. allseitig unter Zug oder Faltenbildung, ab. Dieser Zustand kann sich während der Iteration ändern. D.h. der Faltenalgorithmus muss in jeder Iteration den Zustand der Membran in den Integrationspunkten kontrollieren. Diese Kontrolle erfolgt in zwei Schritten:

- 1.) Unter Annahme eines isotropen Membranverhaltens wird mittels der Elementverzerrungen der Spannungszustand in der Membran ermittelt,
- 2.) eine Kontrolle der Hauptnormalspannungen zeigt an, ob Faltenbildung vorliegt.
  - a.) Falls beide Hauptnormalspannungen positiv sind, dann herrscht allseitiger Zug. Die für das Finite Element berechneten Verzerrungen entsprechen auch den Ver-

zerrungen im Membranmaterial. Die mittlere Lage stimmt mit der tatsächlichen Lage überein. Der unter Punkt 1.) berechnete Spannungszustand ist gültig, und die Analyse setzt an einem anderen Integrationspunkt fort.

- b.) Falls eine der beiden Hauptnormalspannungen negativ ist, dann liegt eine Faltenbildung vor. Die Verzerrungen, die unter Punkt 1.) für die Berechnung der Spannungen herangezogen wurden, sind Werte der mittleren Lage. Die tatsächlichen Verzerrungen und Spannungen der gefalteten Membran sind zunächst noch unbekannt und müssen vom Faltenalgorithmus für jeden Iterationsdurchgang neu berechnet werden.

In [8] wird ein Faltenmodell beschrieben, das in einem iterativen Verfahren die negativen Hauptnormalspannungen innerhalb der Membran eliminiert. Die ersten Iterationsschritte erfolgen mit einer linear elastischen Membran, die auch Druckspannungen übertragen kann. Mit diesem Modell wurden in [8] Airbags analysiert.

Im Fall der schwach gekrümmten Membran einer Tragfläche ist diese Vorgangsweise problematisch, weil die in den ersten Iterationsschritten entstehenden Druckspannungen bereits zu Stabilitätsproblemen führen. Der hier vorgestellte Algorithmus lässt von Beginn an keine Druckspannungen zu. Ferner wird die Materialmatrix angepasst und dadurch die Konvergenz verbessert.

An dieser Stelle ist noch die Frage zu klären, mit welchem Spannungsmaß der Faltenalgorithmus arbeiten soll. *Taenzer* [37] empfiehlt die Verwendung von Cauchy-Spannungen, speziell dann, wenn sehr große Verzerrungen der Membran zu erwarten sind. Die Segeltücher, die bei Hängegleitern zum Einsatz kommen, haben eine relativ hohe Membransteifigkeit, sodass die Flügeldeformationen in erster Linie auf die Verformung der Aluminium-Struktur zurückzuführen sind. Eine lokale hochwellige Faltenbildung ist zwar bei jedem Hängegleiter zu beobachten, doch bleiben aufgrund der unterstützenden Flügelstruktur auch die Verzerrungen, die für die mittleren Lagen berechnet werden, klein.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Unterschied zwischen PK2- und Cauchy-Spannungen, die durch eine Drehtransformation (Starrkörperrotation) in die Ausgangslage zurückrotiert werden, gering. Das in diesem Abschnitt diskutierte einfache Faltenmodell arbeitet daher näherungsweise mit PK2-Spannungen. Dabei besteht das primäre Ergebnis des Faltenalgorithmus in der Feststellung, ob Faltenbildung auftritt und wenn ja, in welcher Richtung die Falten orientiert sind. Bei einem Vergleich des einfachen Modells mit dem aufwendigeren Verfahren nach Roddeman, welches mittels Cauchy-Spannungen formuliert wird, zeigt sich schließlich, dass beide Faltenmodelle für den Fall einer isotropen Membran zum identischen

Strukturverhalten führen. Diese Erkenntnis gilt bei großen Verzerrungen auch dann, wenn die in die Ausgangslage rotierten Cauchy-Spannungen deutlich von den PK2-Spannungen abweichen. Der Grund dafür liegt einfach darin, dass die Falten sich stets nach den Richtungen der Spannungshauptachsen orientieren. Durch die Drehtransformation wird eine Faltenlage, die mittels Cauchy-Spannungen ermittelt wurde, in jene Position gedreht, die mittels den PK2-Spannungen berechnet worden wäre. Beide Spannungsmaße sind daher im Falle einer isotropen Membran zum Aufspüren von Falten in gleicher Weise geeignet.

Zunächst werden die Hauptnormalspannungen  $\bar{\sigma}_1^{el}$  und  $\bar{\sigma}_2^{el}$  und die zugehörigen Richtungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  unter der Annahme eines linear elastischen Materialverhaltens bestimmt, siehe [31]. Der Querbalken soll dabei andeuten, dass es sich um Spannungen der mittleren Lage handelt. Die Bezeichnung der Hauptnormalspannungen erfolgt derart, dass  $\bar{\sigma}_1^{el}$  stets größer bzw. gleich  $\bar{\sigma}_2^{el}$  ist.

$$\bar{\sigma}_{1,2}^{el} = \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy})^2 + 4\bar{\sigma}_{xy}^2} \quad (3.16)$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\bar{\sigma}_{xy}}{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}. \quad (3.17)$$

Drei Fälle können dabei für den Zustand der Membran unterschieden werden.

- 1.)  $\bar{\sigma}_2^{el} > 0$  ... Zug in beiden Richtungen,
- 2.)  $\bar{\sigma}_1^{el} < 0$  ... Druck in beiden Richtungen,
- 3.)  $\bar{\sigma}_1^{el} > 0$  und  $\bar{\sigma}_2^{el} < 0$  ... Zug und Druck.

Im Fall von 1.) war die Annahme des linear elastischen Verhaltens korrekt und die Spannungen der mittleren Lage können beibehalten werden,  $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1^{el}$  und  $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2^{el}$ .

Der Zustand 2.) sollte wenn möglich nie auftreten, weil die Form der Membran unter allseitigem Druck nicht mehr definiert ist. Es gilt daher:  $\sigma_1 = 0$  und  $\sigma_2 = 0$ . Durch besondere Maßnahmen können aber auch solche Zustände ohne numerische Probleme durchlaufen werden. Näheres dazu im Abschnitt 3.2.7.

Der Zustand 3.) ist der interessanteste und auch gleichzeitig der gängige Fall der Faltenbildung. Die Membran steht in einer Richtung unter Zug und wirft hochwellige Falten. Der tatsächliche Spannungszustand in der gefalteten Membran ist allerdings nicht einfach durch  $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1^{el}$  und  $\bar{\sigma}_2 = 0$  gegeben, da die Spannungskomponenten über den Poisson-Effekt gekoppelt sind. Es ist daher erforderlich, zunächst die Dehnungen in Richtung der

Spannungshauptachsen  $\bar{\varepsilon}_1$  und  $\bar{\varepsilon}_2$  zu ermitteln.

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\nu} & \frac{-\nu}{1+\nu} & 0 \\ \frac{-\nu}{1+\nu} & \frac{1}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1^{el} \\ \bar{\sigma}_2^{el} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

mit dem isotropen Elastizitätsmodul  $E$  und der Poisson-Zahl  $\nu$ . Aufgrund der Faltenbildung liegt jedoch ein einachsiger Spannungszustand vor, und die Dehnung  $\bar{\varepsilon}_2$  der mittleren Lage hat keine Aussagekraft mehr. Die tatsächliche Dehnung quer zu den Falten ergibt sich zu:

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu\bar{\varepsilon}_1 = -\nu\varepsilon_1 \quad (3.20)$$

Mit diesen modifizierten Dehnungen werden schließlich die tatsächlichen Membranspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  berechnet.

Durch die Faltenbildung wird das isotrope zu einem orthotropen Material, mit Orthotropieachsen in Richtung der Spannungshauptachsen:  $\varphi_1, \varphi_2$ . Die einfachste Methode zur Anpassung der Steifigkeit wäre das Nullsetzen aller Komponenten der Elastizitätsmatrix mit Ausnahme der Steifigkeit in Zugrichtung.

$$\mathbf{E}_{\text{mod}}^{12} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Dabei ist die Matrix in einem lokalen System definiert, das mit den Richtungen der Spannungshauptachsen korrespondiert. Dies wird durch den Index 12 angedeutet. Sie muss anschließend in das globale Koordinatensystem zurückgedreht werden. Die Vorgangsweise kann dabei aus der Laminattheorie übernommen werden, [31]. In Abbildung 3.3 sind die Richtungen des Hauptachsensystems und des lokalen Koordinatensystems angegeben. Die Drehtransformationsmatrix lautet für den zweidimensionalen Fall:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} c &= \cos(-\varphi_1) \\ s &= \sin(-\varphi_1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Damit wird die modifizierte Steifigkeitsmatrix im  $xyz$ -System zu:

$$\mathbf{E}_{\text{mod}}^{\text{xy}} = \mathbf{T} \mathbf{E}_{\text{mod}}^{12} \mathbf{T}^T \quad (3.23)$$

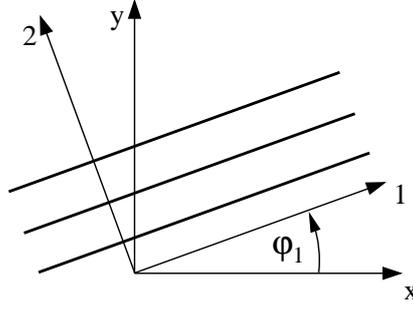


Abbildung 3.3: Faltenwinkel

Allerdings liefert eine Matrix nach (3.21) sehr schlechte Konvergenzeigenschaften. Im Vergleich dazu wird in der Arbeit von *Schrefler* [8] die Steifigkeit der Membran in den gefalteten Gebieten überhaupt nicht reduziert, während die Elementspannungen sehr wohl in einen einachsigen Zustand übergeführt werden. Auch dies führt zu einer langsamen Konvergenz, da die Ungleichgewichtskräfte quer zu den Falten sehr gering sind, jedoch mit der unveränderten isotropen Materialmatrix iteriert wird. In [23] und [24] werden die Materialmatrizen für den ungefalteten ( $\mathbf{D}_T$ ) und den gefalteten ( $\mathbf{D}_W$ ) Bereich angegeben

$$\mathbf{D}_T = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_W = \frac{E}{4} \begin{pmatrix} 2(1+P) & 0 & Q \\ 0 & 2(1-P) & Q \\ Q & Q & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

mit

$$P = \cos 2\alpha = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad Q = \sin 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (3.25)$$

Zur Bestimmung von  $\mathbf{D}_W$  gehen *Miller et al.* zunächst von einer vollbesetzten symmetrischen Matrix  $\mathbf{D}_W$  mit sechs unbekanntem Elementen aus: drei Gleichungen zur Transformation der Verzerrungen sowie den beiden Bedingungen für die Faltenbildung

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}(1+P)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1-P)\varepsilon_2 \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2}(1-P)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1+P)\varepsilon_2 \quad (3.27)$$

$$\gamma_{xy} = Q\varepsilon_1 - Q\varepsilon_2 \quad (3.28)$$

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (3.29)$$

$$\sigma_2 = 0. \quad (3.30)$$

Mit diesen fünf Gleichungen ist das System noch nicht eindeutig festgelegt, und es wird ein Matricelement  $\mathbf{D}_{W12}$  bzw.  $\mathbf{D}_{W21}$  gleich Null gesetzt. Diese Annahme wird zwar laut [23] durch Versuche untermauert, ist aber physikalisch nicht vollständig erklärbar.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg beschritten. Der eigentliche Grund für die numerischen Schwierigkeiten bei der Verwendung der Matrix nach (3.21) ist im Iterationsschema bzw. im Faltenalgorithmus selbst zu finden. Am Ende eines Iterationsdurchgangs  $i$  werden die Ungleichgewichtskräfte und die Struktursteifigkeit berechnet, wobei die korrigierten Membranspannungen und die reduzierten Materialmatrizen nach (3.21) einfließen. Mit der Steifigkeitsmatrix und den Ungleichgewichtskräften wird das nächste Verschiebungsinkrement der Iteration  $i+1$  ermittelt. Daraus lassen sich wiederum die Verzerrungen der mittleren Lage berechnen. Werden diese Verzerrungen in die Richtungen der Spannungshauptachsen der  $i$ -ten Iteration transformiert, dann erhält man in der Regel Werte für alle drei Komponenten eines ebenen Verzerrungszustandes:  $\bar{\varepsilon}_{1^i 1^i}^{i+1}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{2^i 2^i}^{i+1}$  und  $\bar{\gamma}_{1^i 2^i}^{i+1}$ . Die Indices  $1^i$  und  $2^i$  beschreiben dabei die Richtungen der Spannungshauptachsen der vorhergehenden Iteration. Werden diese Komponenten schließlich mit der degenerierten Materialmatrix nach (3.21) multipliziert, erhält man wiederum nur einen einachsigen Spannungszustand.

Der Faltenalgorithmus wählt allerdings zur Bestimmung der Spannungen einen anderen Weg. Es werden zunächst unter Annahme einer linear elastischen Membran die Spannungen der mittleren Lage bzw. die neuen Richtungen der Spannungshauptachsen bestimmt. Dannach wird der Spannungszustand in den gefalteten Gebieten wiederum in einen einachsigen Zustand übergeführt. In der Regel unterscheiden sich die auf unterschiedlichem Weg berechneten Ergebnisse vorwiegend in der Richtung der Spannungshauptachsen, da die nach (3.21) degenerierte Materialmatrix eine Rotation der Spannungshauptachsen nicht erfassen kann. Diese Abweichungen führen zu einer unbefriedigenden Konvergenzrate. Die Reduktion der Materialmatrix nach (3.21) erzeugt während der Gleichgewichtssiteration zu große Verschiebungsinkremente. Die Korrektur schießt über das Ziel hinaus. Dabei tritt häufig die Situation auf, bei der die Iterationsergebnisse um den Gleichgewichtszustand oszillieren und die Abbruchschranke nie erreicht wird.

Durch die Einführung einer künstlichen Schubsteifigkeit kann das numerische Verhalten des Verfahrens deutlich verbessert werden. Diese Schubsteifigkeit muss dabei so gewählt werden, dass die Schubverzerrung  $\bar{\gamma}_{1^i 2^i}^{i+1}$  (Schubverzerrung der  $i+1$ -ten Iteration, bezogen auf die Richtungen der Spannungshauptachsen der Iteration  $i$ ) bei beiden Materialmodellen (degeneriert bzw. linear elastisch) zur gleichen Richtungsänderung der Spannungshauptachsen führt.

In der Abbildung 3.4 ist das Verfahren zur Bestimmung der Schubsteifigkeit graphisch dargestellt. Mittels der beiden Hauptnormalspannungen  $\bar{\sigma}_1^{el}$  und  $\bar{\sigma}_2^{el}$  des linear elastischen

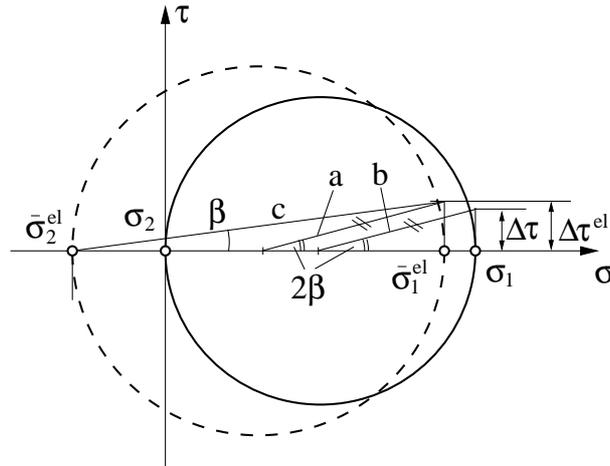


Abbildung 3.4: Mohr'scher Spannungskreis

Systems wird der größere, strichlierte Mohr'sche Spannungskreis gezeichnet. Durch die Faltenbildung erfolgt ein Übergang auf einen einachsigen Spannungszustand, und man erhält den durchgezogenen Kreis, der wegen  $\sigma_2 = 0$  durch den Ursprung verläuft. In diesem Zustand wird eine fiktive Schubspannung der Form  $\Delta\tau^{el}$  eingebracht,

$$\Delta\tau^{el} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \Delta\gamma_{12}, \quad (3.31)$$

die aus einer kleinen Schubverzerrung  $\Delta\gamma_{12}$  (entsprechend einer Verzerrung  $\bar{\gamma}_{12}^{i+1}$  der mittleren Lage) und dem linear elastischen Materialgesetz folgt.

Ist diese Schubspannung klein, dann werden in erster Näherung nur die Richtungen der Spannungshauptachsen um den Winkel  $\beta$  rotiert (Winkel zwischen Abszisse und Linie  $c$ ).

$$\beta = \frac{\Delta\tau^{el}}{\bar{\sigma}_1^{el} - \bar{\sigma}_2^{el}} \quad (3.32)$$

Die Werte der Hauptnormalspannungen  $\bar{\sigma}_1^{el}$  und  $\bar{\sigma}_2^{el}$  bleiben dabei nahezu unverändert. Damit die Richtungen der Spannungshauptachsen im Falle des einachsigen Spannungszustandes (Abb.3.4, durchgezogener Kreis) ebenfalls um den Winkel  $\beta$  rotiert werden, muss eine Schubspannung der Grösse  $\Delta\tau$  aufgebracht werden.

In der Abbildung 3.4 ist dies durch die beiden Parallelen  $a$  und  $b$  angedeutet. Die Linie  $a$  verläuft durch den Mittelpunkt des strichlierten Kreises und den Punkt  $(\bar{\sigma}_1^{el}, \Delta\tau^{el})$ . Verschiebt man diese Linie nach  $b$  in den Mittelpunkt des durchgezogenen Kreises und bildet an der Stelle  $\sigma_1$  den Schnittpunkt mit einer vertikalen Linie, dann erhält man die Schubspannung  $\Delta\tau$ . Sie ist somit jene Schubspannung, die benötigt wird, um die Orientierung

des einachsigen Spannungszustandes bzw. die Falten um den Winkel  $\beta$  zu drehen.

$$\Delta\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta\gamma_{12} \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1^{el} - \bar{\sigma}_2^{el}} \quad (3.33)$$

Aus diesem Zusammenhang lässt sich die künstliche Schubsteifigkeit  $G^M$  einer Membran für die Hauptachsenlage direkt ablesen:

$$G^M = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1^{el} - \bar{\sigma}_2^{el}} = G \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1^{el} - \bar{\sigma}_2^{el}} \quad (3.34)$$

und die Materialmatrix wird zu

$$\mathbf{E}_{\text{mod}}^{1,2} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1^{el} - \bar{\sigma}_2^{el}} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Dieses Materialgesetz, das für die Hauptachsenlage definiert ist, muss durch Drehtransformationen wieder in das globale Koordinatensystem rotiert werden. Anhand der Gleichung (3.34) ist zu sehen, dass die Schubsteifigkeit nicht wie die Quersteifigkeit schlagartig beim Auftreten von Falten verschwindet, sondern kontinuierlich abnimmt. Durch diese neuartige Formulierung des Schubmoduls wird das numerische Verhalten deutlich verbessert, und es wird nach wenigen Iterationen ein Gleichgewichtszustand gefunden. Die Einführung des künstlichen Schubmoduls hat Neuheitswert. Das Materialverhalten ist dabei vom Spannungszustand abhängig.

### 3.2.4 Faltenmodell nach Roddeman

In der Arbeit von *Taenzer* [37] wird ein kurzer Überblick über die unterschiedlichen Faltenmodelle gegeben. Eine sehr allgemeiner Formulierung der Faltenbildung stellt das Verfahren von *Roddeman* [33] dar, welches ebenfalls in [37] ausführlich beschrieben wird. Die Formulierung der Faltenbildung über ein nichtlineares Materialverhalten entspricht nicht der tatsächlichen Physik. Eine Membran mit Falten kann durchaus ein lineares Materialverhalten aufweisen, während das Gesamtverhalten der Struktur nichtlinear ist. Die ursprüngliche Idee von *Wu* [39] besteht darin, eine zusätzliche Größe, nämlich die Faltendehnung, einzuführen. Das Verfahren von *Roddeman* glättet gefaltete Bereiche durch eine fiktive Streckung und ermittelt dann für diesen Zustand die Spannungen. Diese fiktive Glättung kann durch zwei Parameter, nämlich dem Faltenwinkel und dem Streckparameter definiert werden.

Im folgenden Abschnitt wird die Funktionsweise des Verfahrens erläutert. In Abbildung 3.2 ist die Membran in ihrer mittleren bzw. gefalteten Lage dargestellt. Die Finiten Elemente beschreiben dabei nur die mittlere Lage. Die Spannungen und Verzerrungen der mittleren Lage werden durch einen Querbalken über den Symbolen gekennzeichnet. Die Formulierung des Faltenmodells erfolgt über Cauchy-Spannungen. Der entsprechende Tensor lässt sich über die PK2-Spannungen ermitteln. Mit der Gleichung (3.9) wurde der Deformationsgradient definiert und nimmt für die mittlere Lage folgende Form an:

$${}^t_0\bar{\mathbf{X}} = ({}_0\nabla {}^t\bar{\mathbf{x}}^T)^T \quad (3.36)$$

Mit dem Cauchy-Green-Deformationstensor

$${}^t_0\bar{\mathbf{C}} = {}^t_0\bar{\mathbf{X}}^T {}^t_0\bar{\mathbf{X}}. \quad (3.37)$$

wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor der mittleren Lage zu

$${}^t_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}({}^t_0\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I}). \quad (3.38)$$

Über das Materialgesetz (3.13) erhält man schließlich die PK2-Spannungen der mittleren Lage

$${}^t_0\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^v + \mathbf{C}_0^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.39)$$

mit der Vorspannung  $\bar{\mathbf{S}}^v$ . Daraus folgt mit Gleichung (3.14) der Cauchy-Spannungstensor der mittleren Lage:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\det {}^t_0\bar{\mathbf{X}}} {}^t_0\bar{\mathbf{X}}^T {}^t_0\bar{\mathbf{S}} {}^t_0\bar{\mathbf{X}}. \quad (3.40)$$

Zur einfacheren Behandlung wird der Deformationsgradient in eine orthogonale Drehmatrix  ${}^t_0\bar{\mathbf{R}}$  und eine symmetrische Streckmatrix  ${}^t_0\bar{\mathbf{U}}$  zerlegt.

$${}^t_0\bar{\mathbf{X}} = {}^t_0\bar{\mathbf{U}} {}^t_0\bar{\mathbf{R}} \quad (3.41)$$

Die Zerlegung, die auf ein Eigenwertproblem führt, ist ausführlich in [5] beschrieben. Die Matrix  ${}^t_0\bar{\mathbf{U}}$  ist folgendermaßen besetzt

$${}^t_0\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \bar{U}_{xx} & \bar{U}_{xy} & 0 \\ \bar{U}_{yx} & \bar{U}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Gleichung (3.40) nimmt damit folgende Form an

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\det {}^t_0\bar{\mathbf{U}}} {}^t_0\bar{\mathbf{R}}^T {}^t_0\bar{\mathbf{U}}^T {}^t_0\bar{\mathbf{S}} {}^t_0\bar{\mathbf{U}} {}^t_0\bar{\mathbf{R}} \quad (3.43)$$

und kann mit

$${}^t\bar{\mathbf{R}}^{\text{T}^{-1}} = {}^t_0\bar{\mathbf{R}} \quad (3.44)$$

umgeordnet werden zu

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\text{R}} = {}^t_0\bar{\mathbf{R}}\bar{\boldsymbol{\tau}}_0^{\text{T}} = \frac{1}{\det {}^t_0\bar{\mathbf{U}}} {}^t_0\bar{\mathbf{U}} {}^t_0\bar{\mathbf{S}}_0^{\text{T}} {}^t_0\bar{\mathbf{U}}. \quad (3.45)$$

Der Tensor  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{\text{R}}$  der Gleichung (3.45) stellt die in die Referenzlage zurückgedrehten Cauchy-Spannungen der mittleren Lage dar.

Für diese Referenzlage werden die Hauptnormalspannungen ermittelt, und es wird kontrolliert, ob Faltenbildung vorliegt. Die Hauptnormalspannungen  $\bar{\sigma}_1^{\text{C}}$  und  $\bar{\sigma}_2^{\text{C}}$  werden dabei mittels der Gleichung (3.16) ermittelt. *Roddeman* unterscheidet dabei verschiedene Zustände:

- a.) allseitiger Zug: Der aktuelle Zustand ist zulässig,
- b.) homogene Faltenbildung: Einachsiger Zug mit Falten, die sich parallel zur Zugbeanspruchung ausbilden,
- c.) allseitiger Druck: regellose Faltenbildung (schlaffe Membran).

Die Punkte a.) und c.) sind einfach zu behandelnde Fälle, während b.) einer besonderen Behandlung bedarf. Die gefalteten Bereiche werden durch den sogenannten *Roddeman'schen* Strecktensor der Form

$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\bar{\mathbf{X}}\mathbf{U}^{\text{R}}; \quad \mathbf{U}^{\text{R}} = (\mathbf{I} + \beta\bar{\mathbf{n}}_1\bar{\mathbf{n}}_1^{\text{T}}) \quad (3.46)$$

glattegezogen. Der Einheitsvektor  $\bar{\mathbf{n}}_1$  zeigt dabei in die Richtung der Faltenbildung und  $\beta$  ist der Faltenparameter, der die Differenz eine Faserlänge der mittleren und der gefalteten Lage, bezogen auf die Faserlänge der mittleren Lage angibt; siehe auch Abbildung 3.5

$$\beta = \frac{l - \bar{l}}{\bar{l}} \quad (3.47)$$

Die Streckung in den beiden Richtungen  $\bar{\mathbf{n}}_1$  und  $\bar{\mathbf{n}}_2$  lauten nach [37]

$$s_{\text{quer}} = \bar{\mathbf{n}}_1^{\text{T}}(\mathbf{I} + \beta\bar{\mathbf{n}}_1\bar{\mathbf{n}}_1^{\text{T}})\bar{\mathbf{n}}_1 = 1 + \beta \quad (3.48)$$

und

$$s_{\text{längs}} = \bar{\mathbf{n}}_2^{\text{T}}(\mathbf{I} + \beta\bar{\mathbf{n}}_1\bar{\mathbf{n}}_1^{\text{T}})\bar{\mathbf{n}}_2 = 1. \quad (3.49)$$

Wird in weiterer Folge die Vektor  $\bar{\mathbf{n}}_1$  in die Referenzlage gedreht, dann gilt für  ${}^t_0\mathbf{X}$

$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{I} + \beta\bar{\mathbf{N}}_1^*\bar{\mathbf{N}}_1^{*\text{T}}) {}^t_0\bar{\mathbf{R}} \quad (3.50)$$

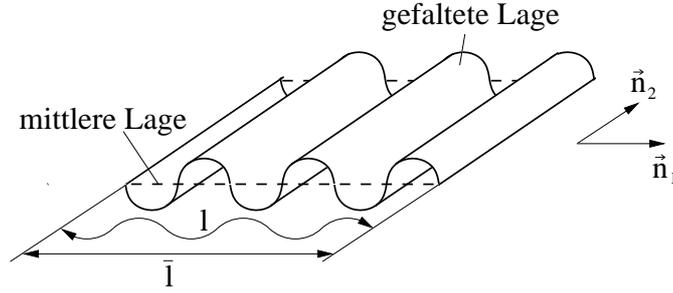


Abbildung 3.5: Faltenparameter

mit

$$\vec{N}_1^* = {}^t_0\overline{\mathbf{R}}\vec{n}_1. \quad (3.51)$$

Wobei  ${}^t_0\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{I} + \beta\vec{N}_1^*\vec{N}_1^{*T})$  kein Strecktensor mehr ist, da laut [37]  $\vec{N}_1^*$  keine Hauptrichtung des Strecktensors  ${}^t_0\overline{\mathbf{U}}$  darstellt. Damit kennzeichnet  $\vec{N}_1^*$  nur näherungsweise die Referenzrichtung der Faltenbildung.

Für die Betrachtung der Faltenbildung sind nur noch die Strecktensoren in der Referenzebene ausschlaggebend. Durch die Rotation in die Referenzlage wird daher die Faltenberechnung in weiterer Folge als zweidimensionales Problem behandelt. Der Vektor  $\vec{N}_1$  liegt in der Referenzebene und der Strecktensor  ${}^t_0\overline{\mathbf{U}}$  führt nur zu Verzerrungen in der  $xy$ -Ebene.

Mittels des Faltenwinkels  $\varphi$  lassen sich die beiden orthogonalen Vektoren  $\vec{N}_1$  und  $\vec{N}_2$  definieren als

$$\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \vec{N}_2 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Die Green-Lagrange-Verzerrungen für den gestreckten Zustand sind

$${}^t_0\epsilon = {}^t_0\overline{\epsilon} + \frac{1}{2}(2\beta + \beta^2){}^t_0\overline{\mathbf{U}}\vec{N}_1\vec{N}_1^T{}^t_0\overline{\mathbf{U}}. \quad (3.53)$$

Diese Verzerrungen sind somit abhängig von den Werten der mittleren Lage und von den Faltenparametern  $\varphi$  und  $\beta$ . Durch die Faltenbildung werden Druckspannungen abgebaut. Die Richtungen der Spannungshauptachsen müssen mit den Richtungen  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  übereinstimmen, und die Druckspannungen (sowie die Schubspannungen) im  $\vec{n}_1\vec{n}_2$ -System müssen verschwinden.

$$\vec{n}_1^T {}^t_0\tau \vec{n}_1 = 0 \quad (3.54)$$

$$\vec{n}_1^T {}^t_0\tau \vec{n}_2 = 0. \quad (3.55)$$

Die Gleichungen (3.54) und (3.55) sind in der aktuellen Lage definiert. Durch eine Transformation in die Referenzlage wird wieder der Übergang auf die 2d-Formulierung erreicht. Mit den Gleichungen (3.40) und (3.50) kann für die transformierten Cauchy-Spannungen

$$\tau^R = {}^t_0\bar{\mathbf{R}}\tau_0^t\bar{\mathbf{R}}^T = \frac{1}{(1+\beta)\det {}^t_0\bar{\mathbf{U}}}(\mathbf{I} + \beta\vec{N}_1\vec{N}_1^T)_0^t\bar{\mathbf{U}}_0^t\mathbf{S}({}_0^t\epsilon)_0^t\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{I} + \beta\vec{N}_1\vec{N}_1^T). \quad (3.56)$$

geschrieben werden, mit  ${}^t_0\mathbf{S}$  als den PK2-Spannungen der gestreckten Konfiguration. Mit (3.54) und (3.55) erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem für  $\varphi$  und  $\beta$ . Nach einigen Umformungen erhält man schließlich

$$\vec{N}_1^T {}^t_0\bar{\mathbf{U}}_0^t\mathbf{S} = 0. \quad (3.57)$$

Gleichung (3.57) kann mittels Newton-Raphson-Verfahren iterativ gelöst werden. Die detaillierte Vorgangsweise ist zum Beispiel in [37] beschrieben. *Taenzer* führt zusätzlich noch einen Parameter  $\lambda$  zur Steuerung der Faltenbildung ein, durch den ein kontinuierlicher Übergang der klassischen Theorie, die Druckspannungen erlaubt, zur korrigierten Theorie erfolgt.

$$\vec{N}_1^T(\tau^R - \lambda\bar{\tau}^R) = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (3.58)$$

Für  $\lambda = 0$  erhält man die Roddeman-Bedingung (3.57). Für  $\lambda = 1$  folgt  $\beta = 0$  und man erhält die Lösung der klassischen Theorie mit Druckspannungen in der Membran. Lässt man  $\lambda$  Werte von null bis eins durchlaufen, dann kann ein stetiger, leicht kontrollierbarer Übergang vom ungefalteten in den gefalteten Zustand simuliert werden. Ferner kann durch sehr kleine  $\lambda$ -Werte eine verschwindende Drucksteifigkeit quer zur Faltenrichtung realisiert werden, die ein Kollabieren des Elementes vermeidet. Für die iterative Lösung wird diese Gleichung wieder umgeformt, und man erhält

$$\vec{N}_1^T {}^t_0\bar{\mathbf{U}}_0^t\mathbf{S} - \lambda\vec{N}_1^T {}^t_0\bar{\mathbf{U}}_0^t\bar{\mathbf{S}}_0^t\bar{\mathbf{U}} \frac{1}{1+\beta}(\mathbf{I} + \beta\vec{N}_2\vec{N}_2^T)_0^t\bar{\mathbf{U}}^{-1} = 0 \quad (3.59)$$

Das Newton-Raphson-Verfahren kann zum Beispiel direkt von [29] übernommen werden. Formal kann dieses nichtlineare Gleichungssystem angeschrieben werden als:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} f_1(\beta, \varphi) \\ f_2(\beta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Mit

$$\mathbf{R} = (\varphi, \beta)^T \quad (3.61)$$

und

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

gilt

$$\underline{F}(\underline{R} + \delta\underline{R}) = \underline{F}(\underline{R}) + \mathbf{J}_R \delta\underline{R} + O(\delta\underline{R}^2). \quad (3.63)$$

Werden die Terme höherer Ordnung  $O(\delta\underline{R}^2)$  vernachlässigt und wird  $\underline{F}(\underline{R} + \delta\underline{R}) = 0$  gesetzt, dann kann  $\delta\underline{R}$  bestimmt werden. Das Verfahren benötigt Startwerte für  $\varphi$  und  $\beta$ . Mit ihnen werden  $\mathbf{J}_R$  und  $\underline{F}$  berechnet und die Korrekturwerte bestimmt.

$$\delta\underline{R} = -\mathbf{J}_R^{-1} \underline{F} \quad (3.64)$$

Schließlich erhält man die neuen Werte von  $\varphi$  und  $\beta$  durch Aktualisierung von  $\underline{R}$

$$\underline{R}_{\text{neu}} = \underline{R}_{\text{alt}} + \delta\underline{R}. \quad (3.65)$$

In der vorliegenden Arbeit wurden ausschließlich isotrope Membranen analysiert. Ein Startwert für  $\varphi$  ist dabei aus den Hauptachsenrichtungen des PK2-Tensors ermittelbar. Für  $\beta$  ist Null ein brauchbarer Startwert.

Sind  $\varphi$  und  $\beta$  bekannt, dann kann mittels Gleichung (3.53) der korrigierte Green-Lagrange-Verzerrungstensor  ${}^t_0\epsilon$  bestimmt werden. Die PK2-Spannungen einer isotropen vorgespannten Membran sind dann beispielsweise

$$\begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xx}^v \\ S_{yy}^v \\ S_{xy}^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Diese Werte fließen in die Bestimmung der geometrischen Steifigkeit und in die Berechnung der inneren Kräfte ein.

Bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix muss, wie im Abschnitt zuvor, der gefaltete Zustand berücksichtigt werden. Unterschiedliche Wege sind dabei möglich. In [37] wird eine Methode zur exakten Formulierung der Steifigkeitsmatrix angegeben, wobei die numerische Umsetzung sehr aufwendig ist und vor allem die Fehlersuche (Debugging) in vertretbarer Zeit nicht möglich war. *Roddeman* führt in [33] eine numerische Differentiation der Elementkräfte nach den einzelnen Verschiebungsfreiheitsgraden des Elementes durch und bestimmt auf diese Weise die Elementsteifigkeitsmatrix. In der vorliegenden Arbeit wird ein dritter, sehr einfacher Weg beschritten. Die degenerierte Matrix aus dem vorhergehenden Abschnitt kommt dabei zum Einsatz. Aus Gleichung (3.57), die in der Referenzlage formuliert ist, kann die Richtung der verschwindenden Steifigkeit mit  $\vec{N}_1^T {}^t_0 \bar{\mathbf{U}}$  angegeben werden. Damit ist die Ausrichtung eines orthotropen Materials definiert.

Tabelle 3.1: Membran-Schubfeld

Steifigkeit	$Eh$	$10000 \frac{N}{m}$
Poisson-Zahl	$\nu$	0.4
Anfangsdehnung	$\varepsilon_{xx}^v$	10%
Belastung	$F_{ref}$	1000N

Die Materialmatrix kann in folgender Form angeschrieben werden:

$$\mathbf{E}_M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^M \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Der Schubmodul wird dabei über die Hauptnormalspannungen der PK2-Tensoren der mittleren bzw. der korrigierten Lage definiert und lautet:

$$G^M = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{S_1}{\bar{S}_1 - \bar{S}_2}. \quad (3.68)$$

Die Materialmatrix (3.67) muss, wie im vorherigen Abschnitt, wieder ins  $xyz$ -System zurückgedreht werden. Bei großen Verzerrungen, d.h. starker Faltenbildung, wird der Term  $\bar{S}_2$  in Gleichung (3.68) dominieren und den Schubmodul zum Verschwinden bringen. Gleichung (3.68) stellt keine exakte Vorgangsweise dar. Fehler werden aber durch das iterative Verfahren eliminiert. Obwohl das Verfahren von *Roddeman* grundsätzlich auch für anisotrope Werkstoffe konzipiert wurde, sind in der vorliegenden Arbeit nur isotrope Membranen analysiert worden. Beispielsweise gilt (3.68) nur für isotrope Werkstoffe. Auch die Startwerte des Newton-Raphson-Verfahren beruhen auf diesen Annahmen.

In Abbildung 3.6 sind Ergebnisse einer Schubfeldberechnung mit beiden Faltenmodellen dargestellt. Das Schubfeld ist im unverformten Zustand quadratisch, mit einer Kantenlänge von einem Meter. Die Profile sind in den Ecken gelenkig verbunden und nahezu starr. Die weiteren Daten der Anordnung sind in Tabelle 3.1 angeführt. Die Membran ist im unbelasteten Zustand mit einer Dehnung von 10% in  $x$ -Richtung vorgespannt. Abbildung 3.6 zeigt zunächst das Last-Verschiebungsdiagramm des Schubfeldes. Es wurde mit dem Faltenmodell nach Abschnitt 3.2.3, welches auf der Verwendung von PK2-Spannungen basiert, sowie mittels Roddeman-Modell ermittelt. Die beiden Verfahren liefern identische Ergebnisse, obwohl sie zur Bestimmung der Falten unterschiedliche Spannungsmaße heranziehen. Für drei Zustände sind die Form des Schubfeldes sowie die Richtung der Falten über die Cauchy-Spannungshauptachsen dargestellt:

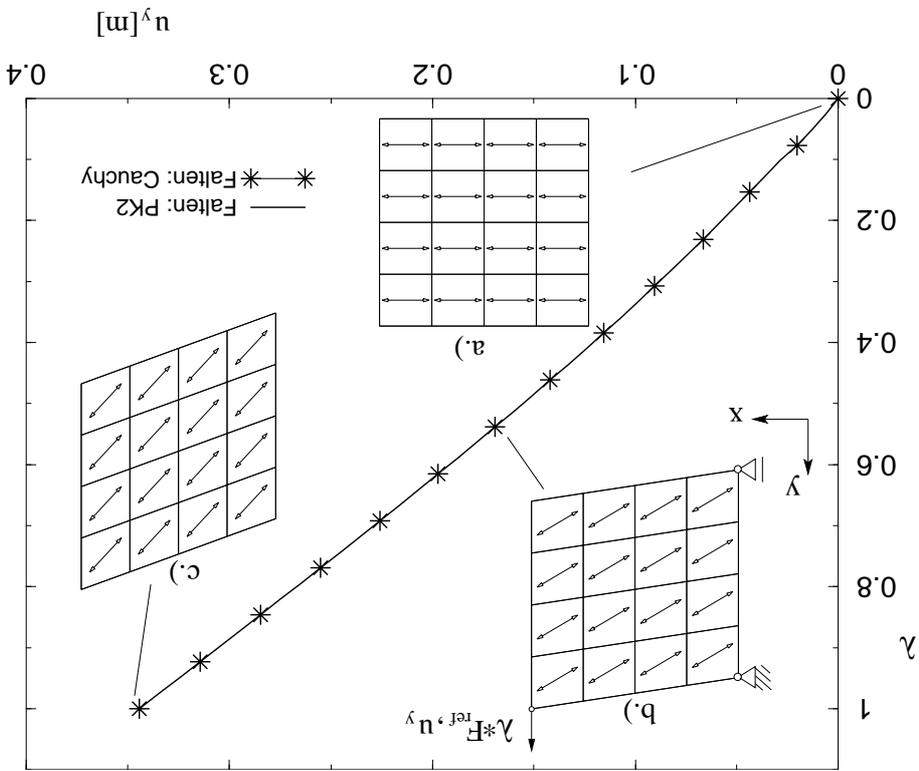


Abbildung 3.6: Schubfeld

- a.) vorgespannter Zustand ohne äußere Last,
- b.) Faltenorientierung bei rund 500N Vertikallast,
- c.) Endlage bei 1000N Vertikallast.

Der wesentliche Vorteil des Faltenmodells nach *Rodde-man* ist seine Anwendbarkeit auf anisotrope Membrane. Das im Abschnitt 3.2.3 beschriebene einfache Faltenmodell kommt mit deutlich geringerem Rechenaufwand aus, funktioniert allerdings nur bei isotropen Materialien.

### 3.2.5 Elementsteifigkeit und innere Kräfte

Die Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der inneren Kräfte folgt dem in [5] beschriebenen Formalismus und ist in dieser Arbeit aus Gründen der Vollständigkeit noch einmal angeführt. In Gleichung (3.12) wurden die Green-Lagrange-Verzerrungen über den Cauchy-Greenschens Deformationstensor ermittelt. Die Formulierung direkt mittels der

Verschiebungen lautet

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i}{}^t_0u_{k,j}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.69)$$

mit

$${}^t_0u_{i,j} = \frac{\partial({}^t_0x_i - {}^0x_i)}{\partial {}^0x_j}; u_j^k = ({}^t_0x_i^k - {}^0x_i^k). \quad (3.70)$$

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix werden Operatormatrizen definiert, die die Zusammenhänge zwischen den Verzerrungen und den Knotenverschiebungen beschreiben (lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformation).

$${}^t_0\mathbf{B}_L = {}^t_0\mathbf{B}_{L0} + {}^t_0\mathbf{B}_{L1} \quad (3.71)$$

mit

$${}^t_0\mathbf{B}_{L0} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & \cdots & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & h_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,2} & 0 & \cdots & h_{4,2} \\ 0 & 0 & h_{1,1} & 0 & \cdots & h_{4,1} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

wobei

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^0x_j}$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{L1} = \begin{pmatrix} l_{11} h_{1,1} & l_{21} h_{1,1} & l_{31} h_{1,1} & l_{11} h_{2,1} & \cdots & l_{31} h_{4,1} \\ l_{12} h_{1,2} & l_{22} h_{1,2} & l_{32} h_{1,2} & l_{12} h_{2,2} & \cdots & l_{32} h_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (l_{11} h_{1,2} + l_{21} h_{1,2} + l_{31} h_{1,2} + l_{11} h_{2,2} + \cdots + l_{31} h_{4,2} + l_{12} h_{1,1}) & (l_{21} h_{1,2} + l_{22} h_{1,1}) & (l_{31} h_{1,2} + l_{32} h_{1,1}) & (l_{11} h_{2,2} + l_{12} h_{2,1}) & \cdots & (l_{31} h_{4,2} + l_{32} h_{4,1}) \\ l_{13} h_{1,2} & l_{23} h_{1,2} & l_{33} h_{1,2} & l_{13} h_{2,2} & \cdots & l_{33} h_{4,2} \\ l_{13} h_{1,1} & l_{23} h_{1,1} & l_{33} h_{1,1} & l_{13} h_{2,1} & \cdots & l_{33} h_{4,1} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

mit

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^4 h_{k,j} u_i^k; \quad N = \text{Anzahl der Knoten.}$$

Die nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix lautet

$${}^t_0\mathbf{B}_{NL} = \begin{pmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

mit

$${}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{\text{NL}} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & \cdots & h_{4,1} \\ h_{1,2} & 0 & 0 & h_{2,2} & \cdots & h_{4,2} \\ h_{1,3} & 0 & 0 & h_{2,3} & \cdots & h_{4,3} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungsmatrix und der Vektor der Spannungskomponenten sind definiert als:

$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{pmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$${}^t_0\hat{\mathbf{S}}^{\text{T}} = [{}^t_0S_{11} \quad {}^t_0S_{22} \quad 0 \quad {}^t_0S_{12} \quad 0 \quad 0] \quad (3.76)$$

$${}^t_0\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & 0 \\ {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Damit lassen sich die Anteile der Elementsteifigkeitsmatrix sowie der Kraftvektor angeben, wobei die Tangentensteifigkeit  ${}_0\mathbf{C}$  beispielsweise aus (3.35) gewonnen wird:

$${}^t_0\mathbf{k}_e^{(e)} = \int_{{}_0V_{\text{Vol}}} {}^t_0\mathbf{B}_L^{\text{T}} {}_0\mathbf{C} {}^t_0\mathbf{B}_L dV_{\text{Vol}} \quad (3.78)$$

$${}^t_0\mathbf{k}_g^{(e)} = \int_{{}_0V_{\text{Vol}}} {}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}}^{\text{T}} {}^t_0\mathbf{S} {}^t_0\mathbf{B}_{\text{NL}} dV_{\text{Vol}} \quad (3.79)$$

$${}^t_0\mathbf{f}^{(e)} = \int_{{}_0V_{\text{Vol}}} {}^t_0\mathbf{B}_L^{\text{T}} {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} dV_{\text{Vol}} \quad (3.80)$$

Die konsistente Massenmatrix lautet:

$${}_0\mathbf{m}^{(e)} = \begin{pmatrix} {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{11} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{12} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{13} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{14} \\ & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{22} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{23} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{24} \\ \text{symm.} & & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{33} & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{34} \\ & & & {}_0\tilde{\mathbf{m}}_{44} \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

wobei

$${}_0\tilde{\mathbf{m}}_{ij} = \begin{pmatrix} m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & m_{ij} \end{pmatrix}; \quad m_{ij} = {}_0\rho \int_{{}_0V_{\text{Vol}}} h_i h_j dV_{\text{Vol}}$$

### 3.2.6 Membranstabilisierung

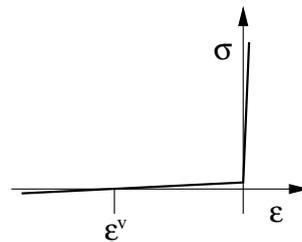
Die ideale Membran hat im spannungsfreien Zustand keinerlei Steifigkeit in Richtung der Flächennormalen. In einer 3d-FE-Analyse führt dies sofort zu einer singulären Steifigkeitsmatrix. Ferner können vereinzelt Bereiche in Membranen auftreten, die eine regellose Faltenbildung zufolge negativer Hauptnormalspannungen aufweisen. Auch in diesem Fall kann eine singuläre Systemmatrix die Folge sein. In den beiden folgenden Abschnitten wird erläutert, wie die dabei auftretenden numerischen Probleme vermieden werden können.

#### Vorspannen der Membran

Neben der Form der Membranfläche hat der Benutzer des FE-Programmes die Möglichkeit, im jeweiligen lokalen Elementsystem eine Vorspannung zu definieren. Diese Vorspannung führt bereits bei der unverformten Struktur zu Membrankräften, die in der ersten Iteration des ersten Inkrementes der Analyse nicht mit äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Die daraus resultierenden Ungleichgewichtskräfte sind unter Umständen groß und können nicht von Beginn an für die Iteration herangezogen werden, zumal die äußeren Kräfte schrittweise aufgebracht werden. Aus diesem Grund wird der Vektor der inneren Kräfte, der bei unverformter Geometrie nur von den Vorspannungen abhängt, mit umgekehrtem Vorzeichen als zusätzlicher Lastvektor abgespeichert und in weiterer Folge schrittweise bis auf Null reduziert. Damit kann von beliebigen Membranformen gestartet werden. Wird die Membran durch eine steife Struktur gestützt, dann bleibt die Vorspannung erhalten. Andernfalls kann die Vorspannung völlig verloren gehen. In diesen Fällen müssen die äußeren Lasten die Stabilisierung übernehmen.

### 3.2.7 Overlay

Analysen haben gezeigt, dass Membrantragflächen, wie etwa Hängegleiter, die keinen steifen Stützapparat aufweisen, in manchen Bereichen des Flügels die Segelspannung verlieren können. Sobald jedoch ein Knoten auch nur in einer Richtung keine Steifigkeit mehr hat, wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix singulär. Es hat sich dabei bewährt, der tragenden Membran eine weitere Membran zu überlagern, deren Membransteifigkeit  $Eh$  um rund fünf Größenordnungen kleiner ist als jene der Originalmembran, um das globale Verhalten nicht wesentlich zu beeinflussen und eine ausreichend hohe Anfangsdehnung von mehreren Prozent zu ermöglichen. Diese Dehnung kann so gewählt werden, dass während der Bela-

Abbildung 3.7:  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Overlaymodus

stung keine Druckspannungen auftreten. Der gleiche Effekt könnte auch in einem Element durch die Verwendung einer geeigneten bilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung erzielt werden, wie sie schematisch in Abbildung 3.7 für einen einachsigen Spannungszustand dargestellt ist. Die Dehnung  $\varepsilon^v$  ist dabei die Anfangsdehnung der Overlay-Membran.

### 3.3 Formulierung eines Balkenelementes für Membranflügel

#### 3.3.1 Anforderungen an das Element

Zur Modellierung von Membranflügeln sind neben den Membranelementen auch noch Balkenelemente erforderlich, mit denen das Gerippe bzw. der Stützapparat modelliert werden kann. Die instationäre Analyse kann jedoch zu beliebig großen Rotationen des frei fliegenden Membranflügels führen. Bei der Formulierung der Balkenelemente muss dieser Aspekt berücksichtigt werden.

Ferner wird bei Hängegleitern die Segelspannung durch elastisch deformierte Balkenstrukturen aufrecht erhalten. Abbildung 3.8 zeigt den Aufbau eines Flügels. Bei konventionellen Hängegleitern ist das Seitenrohr aus Aluminium und im unbelasteten Zustand gerade. Manche Flügel verfügen über sogenannte Randbögen, die aus faserverstärktem Kunststoff (GFK oder CFK) bestehen und beim Aufbau der Tragfläche durch spezielle Vorrichtungen gespannt werden. Auch sie sind im unbelasteten Zustand gerade, weisen aber entlang ihrer Achse eine veränderliche Biegesteifigkeit auf. Die gleichmäßige Vorspannung des Segels in Flügellängsrichtung, siehe Abbildung 3.8, wird in erster Linie durch die elastisch verformte Struktur erreicht. Will man diese Strukturen mittels FE-Methoden analysieren, dann muss der Spannvorgang beim Aufbau des Flügels ebenfalls berücksichtigt werden. Für diesen Zweck wurde ausgehend von einem Hermite'schen Balken ein Element ent-

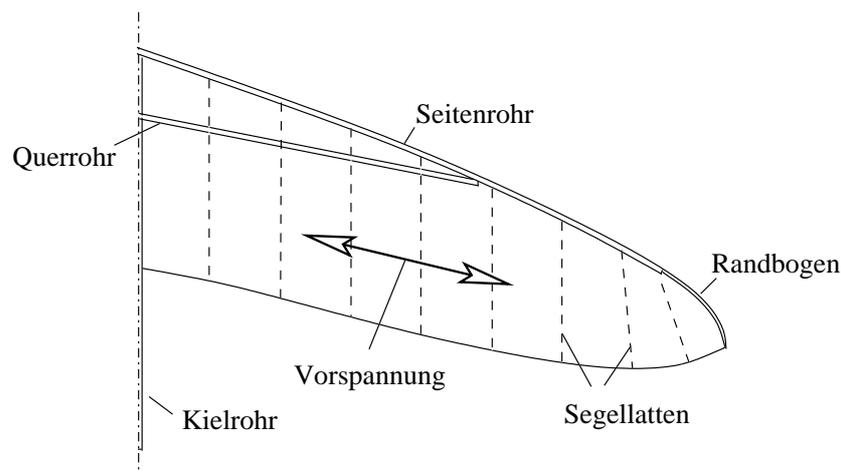


Abbildung 3.8: Aufbau eines Hängegleiterflügels

wickelt, das im deformierten Zustand definiert wird. Die sich einstellende Segelspannung in Flügellängsrichtung wird durch die FE-Analyse bestimmt und hängt von den Steifigkeiten der Strukturkomponenten und dem Segelschnitt ab.

Die wesentlichen Eigenschaften lassen sich somit stichwortartig zusammenfassen als:

- große Rotationen möglich, wobei jedoch kleine Verzerrungen bzw. Krümmungen vorausgesetzt werden,
- Vordeformationen (Biegung) vom Benutzer definierbar.

### 3.3.2 Formulierung des Balkenelementes für große Rotationen

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt erläutert, wird ein Hermite'sches Balkenelement mit zwei Knoten und sechs Freiheitsgraden je Knoten verwendet. Es wird eine mitgehende Lagrange-Formulierung verwendet. Jeder FE-Knoten verfügt über drei Rotationsfreiheitsgrade. Bei Problemen mit großen Rotationen muss eine geeignete Winkeldefinition gefunden werden, die einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Verdrehfreiheitsgraden und der räumlichen Winkellage herstellt (siehe dazu beispielsweise *ABAQUS-Theory* [2] oder *Argyris* [4]). Die Winkellage ist dabei durch einen Drehvektor definiert, der einerseits die Richtung der Drehachse und andererseits über seine Länge den Drehwinkel in Radianten angibt. Dieser Drehvektor kann nicht direkt durch eine Akkumulierung von Drehinkrementen gewonnen werden. Er wird beispielsweise in [2] durch die Verwendung von Quaternionen

und entsprechende mathematische Operationen (Quaternion-Algebra) berechnet bzw. aktualisiert. Die so gewonnene Formulierung ist nach [2] in numerischer Hinsicht effizient, universell verwendbar und eindeutig.

Das Programm *CARINA* verfügt nicht über diese Formulierung für große Rotationen. Für die Modellierung von Membrantragflächen werden Membran-, Balken und Stabelemente benötigt. Zur Begrenzung des Programmieraufwandes wurde daher die Formulierung großer Rotationen nur auf das Hermit'sche Balkenelement beschränkt. Anstatt eine eindeutige Lage im Raum über Winkel zu beschreiben, wird im vorliegenden Fall die Ausrichtung des Balkenelementes über begleitende Dreibeine realisiert, die während der inkrementellen Analyse stets um die berechneten Rotationsinkremente gedreht werden. Eine ähnliche Beschreibung der Winkellagen mittels Richtungsvektoren ist bei *Bathe* [5] zu finden. Eine räumliche Winkellage muss dabei nicht berechnet werden.

Im unverformten Zustand (Zustand: 0) werden zunächst die Winkellagen der Elementknoten durch zwei orthogonale Vektoren gekennzeichnet, die das Dreibein eindeutig beschreiben. In Abbildung 3.9 sind diese Vektoren mit  ${}^0\vec{r}_1$ ,  ${}^0\vec{t}_1$  sowie  ${}^0\vec{r}_2$ ,  ${}^0\vec{t}_2$  bezeichnet. Sie sind im globalen Koordinatensystem  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  definiert. Diese Vektoren werden während der iterativ-inkrementellen Analyse mit jedem Winkelinkrement mitrotiert und zeigen somit zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Achsorientierung des Balkens an. Beispielsweise liefert die  $i$ -te Iteration im Knoten  $k$  inkrementelle Verdrehungen  $\vec{\varrho}_k$  mit

$$\vec{\varrho}_k^i = \begin{pmatrix} \varrho_x \\ \varrho_y \\ \varrho_z \end{pmatrix}_k^i \quad (3.82)$$

Mit diesem inkrementellen Drehvektor der Iteration  $i$  kann nach [12] eine Drehtransformationsmatrix definiert werden.

$$\varrho = |\vec{\varrho}_k| \quad (3.83)$$

$$a = \frac{\varrho_{\hat{x}}}{\varrho} \sin\left(\frac{\varrho}{2}\right) \quad (3.84)$$

$$b = \frac{\varrho_{\hat{y}}}{\varrho} \sin\left(\frac{\varrho}{2}\right) \quad (3.85)$$

$$c = \frac{\varrho_{\hat{z}}}{\varrho} \sin\left(\frac{\varrho}{2}\right) \quad (3.86)$$

$$d = \cos\left(\frac{\varrho}{2}\right) \quad (3.87)$$

Die Größen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  können auch direkt für die Quaternion-Darstellung verwendet

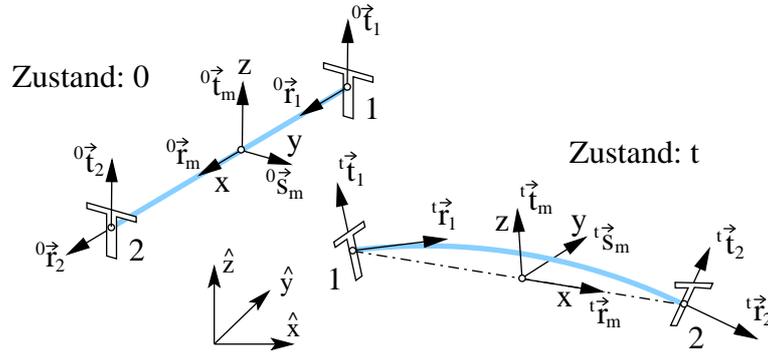


Abbildung 3.9: Balkendefinition

werden, wie sie beispielsweise vom Programm *ABAQUS* verwendet wird.

$$\mathbf{T}_k^i = \begin{pmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

Mit dieser Transformationsmatrix werden die lokalen Elementvektoren (Dreibeiene) gedreht, und es gilt zum Beispiel:

$${}^t\vec{r}_1^i = \mathbf{T}_k^i \cdot {}^t\vec{r}_1^{i-1} \quad (3.89)$$

In Abbildung 3.9 ist der verformte Balken (Zustand: t) mit den Vektoren der Winkellagen dargestellt:  ${}^t\vec{r}_1$ ,  ${}^t\vec{t}_1$  sowie  ${}^t\vec{r}_2$ ,  ${}^t\vec{t}_2$ .

Um die Starrkörperanteile der Rotation zu eliminieren, muss ein lokales Elementkoordinatensystem ( ${}^t\vec{r}_m$ ,  ${}^t\vec{s}_m$  und  ${}^t\vec{t}_m$ ) definiert werden. Die Richtung  ${}^t\vec{r}_m$  wird durch die Verbindungslinie der beiden Balkenknoten festgelegt.

$${}^t\vec{r}_m = \frac{{}^t\vec{x}_2 - {}^t\vec{x}_1}{\|{}^t\vec{x}_2 - {}^t\vec{x}_1\|} \quad (3.90)$$

Wobei die Größen  ${}^t\vec{x}_1$  und  ${}^t\vec{x}_2$  die Ortsvektoren der Elementknoten beschreiben. Um diese Torsionsachse kann das lokale System noch rotiert werden. Die lokale Richtung  ${}^t\vec{s}_m$  wird daher derart festgelegt, dass zwischen dem Achssystem des Knoten 1 und dem lokalen Elementsystem keine Verdrehung um  ${}^t\vec{r}_m$  auftritt:

$${}^t\vec{s}_m = \frac{{}^t\vec{t}_1 \times {}^t\vec{r}_m}{\|{}^t\vec{t}_1 \times {}^t\vec{r}_m\|} \quad (3.91)$$

Für  ${}^t\vec{t}_m$  gilt schließlich

$${}^t\vec{t}_m = \frac{{}^t\vec{r}_m \times {}^t\vec{s}_m}{\|{}^t\vec{r}_m \times {}^t\vec{s}_m\|} \quad (3.92)$$

Mit diesen Vektoren können nun die Verformungen des Elementes im lokalen Elementsystem bestimmt werden, das in Abbildung 3.9 mit  $xyz$  bezeichnet ist und durch die Richtungsvektoren  $\vec{r}_m$ ,  $\vec{s}_m$  und  $\vec{t}_m$  definiert wird.

$$\underline{u}^{(e)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \\ w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^tL - {}^0L \\ 0 \\ \frac{{}^t r_1, {}^t s_m}{{}^t r_1, {}^t r_m} \\ 0 \\ \frac{{}^t r_2, {}^r s_m}{{}^t r_2, {}^t r_m} \\ 0 \\ -\frac{{}^t r_1, {}^t t_m}{{}^t r_1, {}^t r_m} \\ 0 \\ -\frac{{}^t r_2, {}^t t_m}{{}^t r_2, {}^t r_m} \\ 0 \\ \arctan\left(-\frac{{}^t t_2, {}^t s_m}{{}^t t_2, {}^t t_m}\right) \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Die Werte  $\chi$ ,  $v'$  und  $w'$  beschreiben die Drehungen um die  ${}^t\vec{r}_m$ -Achse sowie die Neigungen der lokalen Biegelinie. Für die Verschiebung in Achsrichtung sowie die Torsion werden lineare Interpolationsfunktionen verwendet. Die Biegung wird durch Hermite'sche Polynome interpoliert und ist auf die lokalen Elementachsen  $y$  und  $z$  bezogen, siehe Abbildung 3.9.

$$\varphi_1^d = 1 - \xi \quad (3.94)$$

$$\varphi_2^d = \xi \quad (3.95)$$

$$\varphi_1^{bz} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (3.96)$$

$$\varphi_2^{bz} = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \quad (3.97)$$

$$\varphi_3^{bz} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.98)$$

$$\varphi_4^{bz} = (-\xi^2 + \xi^3)L \quad (3.99)$$

$$\varphi_1^{by} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (3.100)$$

$$\varphi_2^{by} = -(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \quad (3.101)$$

$$\varphi_3^{by} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.102)$$

$$\varphi_4^{by} = -(-\xi^2 + \xi^3)L \quad (3.103)$$

$$\varphi_1^t = 1 - \xi \quad (3.104)$$

$$\varphi_2^t = \xi \quad (3.105)$$

Für die Berechnung der Steifigkeits- bzw. der Massenmatrix sind die Ableitungen der An-

satzfunktionen erforderlich. Die ersten Ableitungen  $\frac{d()}{d\xi} = ()'$  lauten:

$$\varphi_1'^d = -1 \quad (3.106)$$

$$\varphi_2'^d = 1 \quad (3.107)$$

$$\varphi_1'^{bz} = -6\xi + 6\xi^2 \quad (3.108)$$

$$\varphi_2'^{bz} = (1 - 4\xi + 3\xi^2)L \quad (3.109)$$

$$\varphi_3'^{bz} = 6\xi - 6\xi^2 \quad (3.110)$$

$$\varphi_4'^{bz} = (-\xi + 3\xi^2)L \quad (3.111)$$

$$\varphi_1'^{by} = -6\xi + 6\xi^2 \quad (3.112)$$

$$\varphi_2'^{by} = -(1 - 4\xi + 3\xi^2)L \quad (3.113)$$

$$\varphi_3'^{by} = 6\xi - 6\xi^2 \quad (3.114)$$

$$\varphi_4'^{by} = (2\xi - 3\xi^2)L \quad (3.115)$$

$$\varphi_1'^t = -1 \quad (3.116)$$

$$\varphi_2'^t = 1 \quad (3.117)$$

Die zweiten Ableitungen  $\frac{d^2()}{d\xi^2} = ()''$  sind:

$$\varphi_1''^{bz} = -6 + 12\xi \quad (3.118)$$

$$\varphi_2''^{bz} = (-4 + 6\xi)L \quad (3.119)$$

$$\varphi_3''^{bz} = 6 - 12\xi \quad (3.120)$$

$$\varphi_4''^{bz} = (-1 + 6\xi)L \quad (3.121)$$

$$\varphi_1''^{by} = -6 + 12\xi \quad (3.122)$$

$$\varphi_2''^{by} = (4 - 6\xi)L \quad (3.123)$$

$$\varphi_3''^{by} = 6 - 12\xi \quad (3.124)$$

$$\varphi_4''^{by} = (2 - 6\xi)L \quad (3.125)$$

Für die Berechnung der lokalen Balkenkräfte müssen aus den Verschiebungen und Rota-

tionen der Beziehung (3.93) die Balkenverzerrungen  $\underline{\tilde{b}}^{(e)}$  ermittelt werden, siehe [1].

$$\underline{\tilde{b}}^{(e)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{u_1}{{}^tL} + \frac{u_2}{{}^tL} \\ v_1 \\ -\frac{v_1}{{}^tL} + \frac{v_2}{{}^tL} \\ -\frac{3v_1}{({}^tL)^2} - \frac{2v_1'}{{}^tL} + \frac{3v_2}{({}^tL)^2} - \frac{v_2'}{{}^tL} \\ \frac{2v_1}{({}^tL)^3} + \frac{v_1'}{({}^tL)^2} - \frac{2v_2}{({}^tL)^3} + \frac{v_2'}{({}^tL)^2} \\ w_1 \\ -\frac{w_1}{{}^tL} + \frac{w_2}{{}^tL} \\ -\frac{3w_1}{({}^tL)^2} + \frac{2w_1'}{{}^tL} + \frac{3w_2}{({}^tL)^2} + \frac{w_2'}{{}^tL} \\ \frac{2w_1}{({}^tL)^3} - \frac{w_1'}{({}^tL)^2} - \frac{2w_2}{({}^tL)^3} - \frac{w_2'}{({}^tL)^2} \\ \chi_1 \\ -\frac{\chi_1}{{}^tL} + \frac{\chi_2}{{}^tL} \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

mit der Elementlänge der aktuellen Lage

$${}^tL = \|\vec{\tilde{x}}_2 - \vec{\tilde{x}}_1\| \quad (3.127)$$

Damit können die lokalen Balkenkräfte  $\underline{\tilde{F}}^{(e)}$  berechnet werden:

$$\underline{\tilde{f}}^{(e)} = \begin{pmatrix} f_1^x \\ f_2^x \\ f_1^y \\ m_1^{bz} \\ f_2^y \\ m_2^{bz} \\ f_1^z \\ m_1^{by} \\ f_2^z \\ m_2^{by} \\ m_1^t \\ m_2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -EA(b_2 - \frac{1}{2}(b_2b_2 + b_4b_4 + b_8b_8)) \\ EA(b_2 - \frac{1}{2}(b_2b_2 + b_4b_4 + b_8b_8)) \\ (2EJ_z b_5 + EJ_z(2b_5 + 6b_6{}^tL))/{}^tL \\ -2EJ_z b_5 \\ -(2EJ_z b_5 + EJ_z(2b_5 + 6b_6{}^tL))/{}^tL \\ EJ_z(2b_5 + 6b_6{}^tL) \\ -(2EJ_y b_9 - EJ_y(2b_9 + 6b_{10}{}^tL))/{}^tL \\ 2EJ_y b_9 \\ (2EJ_y b_9 - EJ_y(2b_9 + 6b_{10}{}^tL))/{}^tL \\ -EJ_y(2b_9 + 6b_{10}{}^tL) \\ -GJ_t b_{12} \\ GJ_t b_{12} \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

	$E$	...	Elastizitätsmodul,
	$G$	...	Schubmodul,
mit	$A$	...	Querschnittsfläche,
	$J_y$	...	Flächenträgheitsmoment bezüglich der lokalen $y$ -Achse,
	$J_z$	...	Flächenträgheitsmoment bezüglich der lokalen $z$ -Achse,
	$J_t$	...	Trägheitsmoment bezüglich der lokalen $x$ -Achse.

Diese Elementkräfte werden anschließend ins globale Koordinatensystem transformiert und zum Vektor der inneren Kräfte addiert.

Verschiedene dynamische Testbeispiele haben gezeigt, dass es bei großen Winkeländerungen vorteilhaft ist, nur mit einer linear elastischen Steifigkeitsmatrix zu operieren. Bei großen Drehinkrementen können nämlich axiale Ungleichgewichtskräfte sehr hohe Werte annehmen, die im Falle von Druckkräften zu singulären Steifigkeitsmatrizen führen können.

Für jede Beanspruchungsart, wie Längskraft, Biegung oder Torsion, erhält man Submatrizen, die entsprechend assembliert die gesamte Elementsteifigkeitsmatrix ergeben. Diese Submatrizen können über das *Prinzip der virtuellen Arbeit* oder aus dem *Prinzip vom stationären Wert des Potentials* abgeleitet werden und lauten

$$k_{ij}^d = \frac{EA}{L} \int_0^1 \varphi_i'^d \varphi_j'^d d\xi \quad (3.129)$$

$$k_{ij}^{bz} = \frac{EJ_z}{L^3} \int_0^1 \varphi_i''^{bz} \varphi_j''^{bz} d\xi \quad (3.130)$$

$$k_{ij}^{by} = \frac{EJ_y}{L^3} \int_0^1 \varphi_i''^{by} \varphi_j''^{by} d\xi \quad (3.131)$$

$$k_{ij}^t = \frac{GJ_t}{L} \int_0^1 \varphi_i'^t \varphi_j'^t d\xi \quad (3.132)$$

Die komplette Matrix  $\mathbf{k}^{(e)}$  ist der Vollständigkeit wegen in 3.2 dargestellt und lässt sich in dieser Form auch in der Literatur finden.

Für die dynamischen Analysen wird noch die konsistente Massenmatrix benötigt. Die Herleitung ist in [32], bzw. speziell für Balken in der Arbeit von Hofmann [13] beschrieben.

Wieder ergeben sich für die unterschiedlichen Deformationsmodi Submatrizen:

$$m_{ij}^d = \rho AL \int_0^1 \varphi_i^d \varphi_j^d d\xi \quad (3.133)$$

$$m_{ij}^{bz} = \frac{\rho J_z}{L} \int_0^1 \varphi_i'^{bz} \varphi_j'^{bz} d\xi \quad (3.134)$$

$$m_{ij}^{by} = \frac{\rho J_y}{L} \int_0^1 \varphi_i'^{by} \varphi_j'^{by} d\xi \quad (3.135)$$

$$m_{ij}^t = \rho J_p L \int_0^1 \varphi_i^t \varphi_j^t d\xi \quad (3.136)$$

Die vollständige konsistente Massenmatrix  $\mathbf{m}^{(e)}$  ist ebenfalls der Vollständigkeit wegen ausführlich in Tabelle 3.2 angeführt. Diese Darstellung für ein Hermite'sches Element ist in der Literatur schwer zu finden.



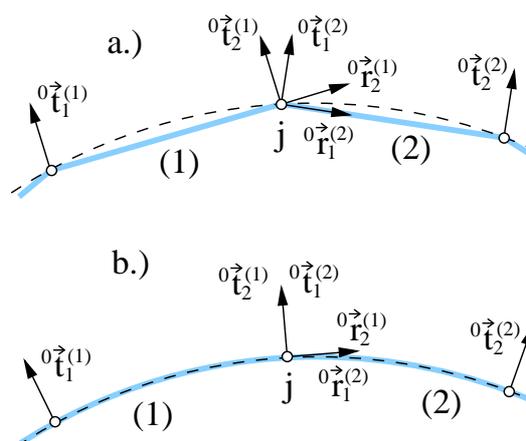


Abbildung 3.10: Vordeformation

### 3.3.3 Vordeformation

Ein im unbelasteten Zustand gekrümmter Träger wird durch gerade Balkenelemente angenähert. Dieser Fall ist in Abbildung 3.10, Bereich a.), dargestellt. An den Knoten  $k$  grenzen die beiden Elemente (1) und (2). Werden bei der Definition des Elementes vom Benutzer keine Angaben zu den lokalen Koordinatensystemen  ${}^0\vec{r}_1$ ,  ${}^0\vec{t}_1$  bzw.  ${}^0\vec{r}_2$ ,  ${}^0\vec{t}_2$  gemacht, geht das Programm von einem im unbelasteten Zustand gekrümmter Träger aus. Die beiden lokalen Systeme, die im Knoten  $k$  aufeinander treffen, sind unterschiedlich ausgerichtet und behalten diese Winkellagedifferenz während der gesamten Analyse bei. Beide Systeme werden im Knoten  $k$  immer mit der selben Transformationsmatrix nach (3.88) rotiert.

Um eine elastische Vordeformation zu definieren, können die lokalen Balkenelementsysteme explizit vorgegeben werden. Sind die beiden Richtungen  ${}^0\vec{r}_2^{(1)}$  und  ${}^0\vec{r}_1^{(2)}$  im Knoten  $k$  identisch, siehe Abbildung 3.10 b.), dann sind beide Balken im unbelasteten Zustand gleich orientiert und somit gerade. Ob bei der Definition der lokalen Systeme exakt die Tangentenrichtung der Biegelinie getroffen wurde, spielt keine große Rolle. Wesentlich ist dabei nur, dass die Systeme der beiden im Knoten  $k$  angrenzenden Elemente identisch sind. Der in Abbildung 3.10 b.) dargestellte Zustand entspricht einer verformten Struktur, wie sie in Abbildung 3.9 bereits dargestellt wurde. Zu Beginn der Analyse kann daher der Vektor der inneren Kräfte und Momente berechnet werden. Der vorgekrümmte Zustand steht zu Beginn noch nicht mit der übrigen Struktur, insbesondere der Membran, im Gleichgewicht. Daher wird der Vektor der inneren Balkenkräfte des Ausgangszustandes mit umgekehrtem Vorzeichen als äußere Last aufgebracht und inkrementell bis auf Null reduziert.

## 3.4 Slider

### 3.4.1 Einleitung

Membrantragflächen sind häufig durch Segellatten versteift, die einerseits dazu dienen, die Vorspannung zu erhöhen, und andererseits auch eine formgebende Funktion erfüllen. Beispielsweise verfügen moderne Hängegleiter über rund 15 Segellatten pro Flügelhälfte. Sie definieren die aerodynamischen Profile in Spannweitenrichtung. Die Segellatten, zumeist gebogene Aluminiumrohre, werden beim Aufbau des Gleiters in Segeltaschen geschoben und durch elastische Spannelemente am Ende fixiert. Zwischen Segel und Rippe ist eine Gleitbewegung möglich. In Abbildung 3.11 ist eine Segellatte samt Membranflügel darge-

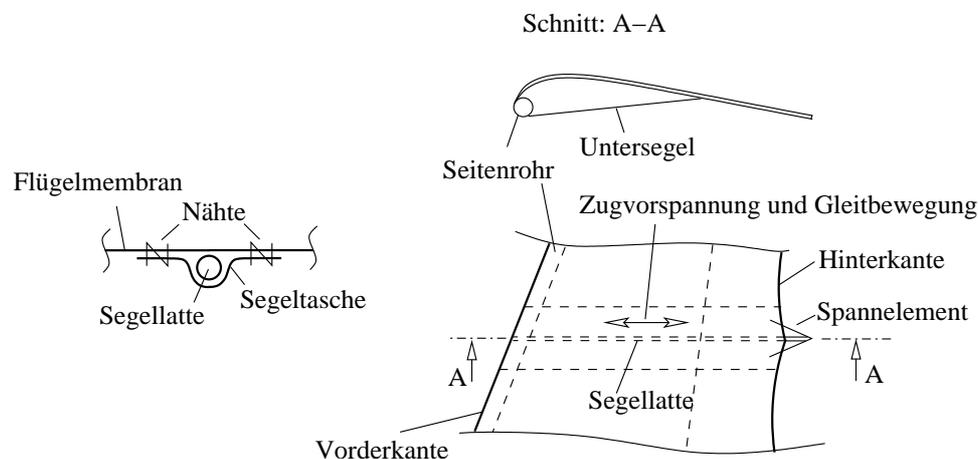


Abbildung 3.11: Funktionsweise der Segellatten

stellt. Die Spannelemente, die zum Beispiel einfache elastische Bänder sein können, erzeugen eine Zugvorspannung parallel zur Segellatte, die wiederum durch eine Tasche mit der Hauptmembran verbunden wird. Die Segeltasche ist in der linken Hälfte der Abbildung 3.11 schematisch dargestellt. Beim Spannen der Membran kommt es dabei zu Gleitbewegungen zwischen Latte und Segel.

Die Segelspannung in Spannweitenrichtung kann im Flug durch eine Variation des Nasenwinkels  $\theta$  verändert werden, wie Abbildung 3.12 zeigt. Dabei wird der Endpunkt  $A$  des Querrohres entlang des Kielrohres in Richtung Punkt  $B$  mittels Flaschenzug verschoben. Diese Änderung der Geometrie führt zu Gleitbewegungen zwischen dem Segel und dem Seitenrohr. In Abbildung 3.12 ist der Spannvorgang skizziert. Die mögliche Lage des Seitenrohres bei erhöhter Vorspannung ist durch die strichlierte Kurve angedeutet.

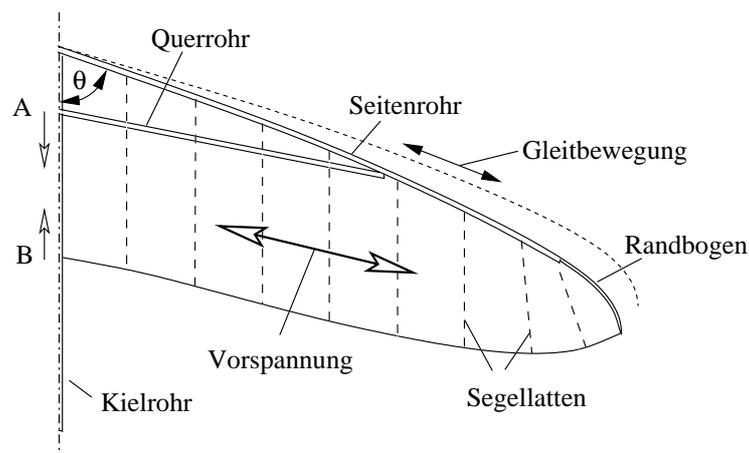


Abbildung 3.12: Spannen im Flug

Durch die Gleitbewegungen zwischen Latte und Segel bildet sich eine gleichmäßige Vorspannung der Flügelmembran aus. Dieser Mechanismus muss daher bei der Modellierung einer Tragfläche mitberücksichtigt werden.

### 3.4.2 Multi Point Constraint: SLIDER

Für einfache aeroelastische Analysen ist es natürlich nicht zweckmäßig, die Segeltaschen mit Membranen zu modellieren und Kontaktbedingungen zwischen Latte und Segel zu definieren. Die einfachere Modellierung von Führungen besteht darin, die Freiheitsgrade der beteiligten Knoten in spezieller Weise zu koppeln. Beispielsweise soll ein Membranknoten, dessen Position mit einer Segellatte zusammenfällt, nur entlang einer durch das Profil vorgegebenen Richtung gleiten können. Für die Simulation einer Membrantragfläche wurden vier verschiedene Koppelungen in *CARINA* implementiert, die in Abbildung 3.13 dargestellt sind. Der einfachste Slidertyp ist der *S2P* (2-Point-Slider), der den Knoten  $m$  auf einer geraden Verbindungslinie zwischen den Knoten  $l$  und  $n$  hält. Die Formulierung der Koppelungsbedingungen wurde von [2] übernommen und wird in dieser Arbeit nicht ausführlich beschrieben. Im Falle des Sliders *S2P* werden die kinematischen Zusammenhänge, die in weiterer Folge auf die Koppelbedingungen führen, skizziert. Auf der rechten Hälfte von Abbildung 3.13 ist ein *S2P*-Slider in zwei verschiedenen Zuständen dargestellt (Zeitpunkt  $t$  und  $t + \Delta t$ ). Im Zustand  $t$  sind die Positionen der drei Knoten  $l$ ,  $n$  und  $m$  durch die Ortsvektoren  ${}^t\vec{r}_l$ ,  ${}^t\vec{r}_n$ ,  ${}^t\vec{r}_m$  definiert. Die Position des Knoten  $m$  innerhalb des Sliders ist durch die beiden Längen  $s_1$  und  $s_2$  definiert. Ausgehend vom bekannten Zustand  $t$  soll nun die Koppelbedingung für den Zeitpunkt  $t + \Delta t$  angegeben werden. Die neuen Positionen

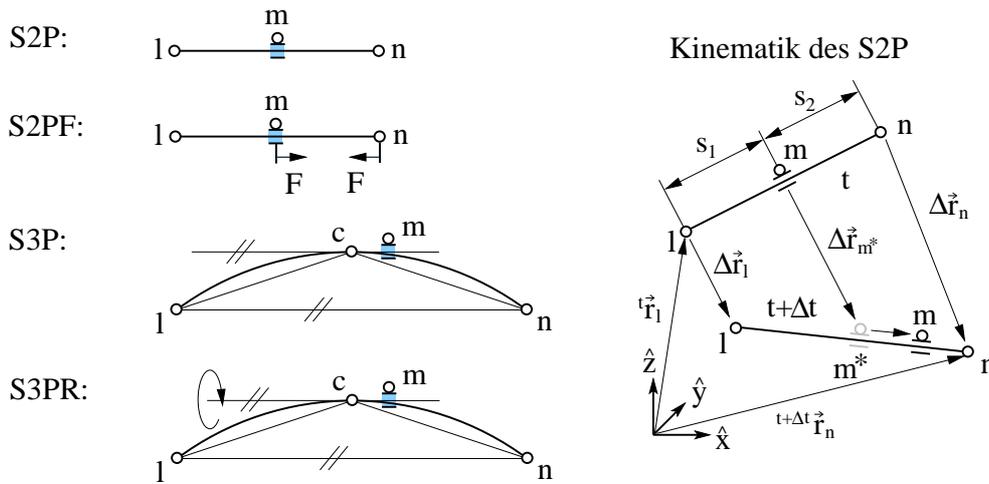


Abbildung 3.13: Slider-MPC

der Knoten  $l$  und  $n$  sind dabei  ${}^{t+\Delta t}\vec{r}_l$  und  ${}^{t+\Delta t}\vec{r}_n$ . Der Knoten  $m$  wird im Zustand  $t + \Delta t$  an die gleiche relative Position innerhalb des Sliders wie zur Zeit  $t$  positioniert (Position  $m^*$ ). Von dieser Lage sind nur noch Verschiebungen in Richtung der Sliderachse möglich. Die entsprechende mathematische Formulierung lautet

$$({}^{t+\Delta t}\vec{r}_m - {}^{t+\Delta t}\vec{r}_{m^*}) \cdot ({}^{t+\Delta t}\vec{r}_n - {}^{t+\Delta t}\vec{r}_l) = 0 \quad (3.137)$$

Dieser nichtlineare Zusammenhang ist für die direkte Verwendung bei der Gleichgewichtsiteration nicht geeignet. Daher kommt

$$({}^{t+\Delta t}\vec{r}_m^i - {}^{t+\Delta t}\vec{r}_{m^*}^i) \cdot ({}^{t+\Delta t}\vec{r}_n^{i-1} - {}^{t+\Delta t}\vec{r}_l^{i-1}) = 0 \quad (3.138)$$

zum Einsatz. Als Richtung der Relativbewegung im Inkrement  $i$  wird dann die Position des vorhergehenden Inkrementes  $i - 1$  verwendet.

Zur Erzeugung von definierten Vorspannungen wurde dieser einfache Slidertyp mit Spannkraften ausgestattet. Mit diesem neuen Slidertyp *S2PF* kann der Punkt  $m$  mit einer definierten Kraft entlang der Linie  $\overline{ln}$  beaufschlagt werden. Die entsprechende Reaktionskraft wird auf einem der beiden Führungsknoten aufgebracht. In Abbildung 3.13 wirkt die Kraft auf den Knoten  $n$ . Die Steuerung der Kraft erfolgt, wie bei allen anderen Kräften, über einen vom Benutzer definierten Zeitverlauf. Soll ein Spannelement modelliert werden, das beim Aufbauvorgang des Gleiters eine Vorspannung erzeugt, dann aber in weiterer Folge einer Fixierung gleichkommt (Schnallen oder selbstsperrende Spannhebelmechanismen), dann kann die aktuelle Position des Sliders ab einem bestimmten Analysezeitpunkt relativ zu den beiden Knoten  $l$  und  $n$  fixiert werden.

Membransteifigkeit	$Eh$	$1000 \frac{N}{m}$	
Poisson-Zahl	$\nu$	0.25	
isotrope Anfangsdehnung	$\varepsilon^v$	0.1 %	
Biegesteifigkeit des Balkens	$EJ$	$1000 Nm^2$	
Koordinaten des Punktes <i>I.</i> )	$r_I$	$(0 \ 0 \ 0)^T$	$[m]$
Koordinaten des Punktes <i>III.</i> )	$r_{III}$	$(1 \ 1 \ 0)^T$	$[m]$

Tabelle 3.3: Bespannter Bogen

Wie bereits erwähnt, kommen bei der aeroelastischen Analyse Hermite'sche Balkenelemente zum Einsatz. Gekrümmte Profile werden dabei durch elementweise gerade Strukturen ersetzt. Um entlang des gekrümmten Stabes trotzdem näherungsweise tangentielle Gleitbewegungen zwischen Segel und Latte zu gestatten, wurde ein weiterer Slidertyp, nämlich *S3P*, entwickelt. Bei diesem Typ wird die Gleitrichtung wieder von der Verbindungslinie  $\overline{ln}$  vorgegeben. Der Knoten  $m$  bewegt sich jedoch nicht unmittelbar auf dieser Linie, sondern auf einer Parallelen dazu, die durch den Knoten  $c$  verläuft. Die Linie  $\overline{ln}$  beschreibt in einfacher Näherung die Tangente des gekrümmten Profils im Knoten  $c$ . In diesem Fall sind natürlich nur kleine Gleitbewegungen sinnvoll.

Für stationäre Analysen mit geraden oder sehr schwach gekrümmten Flügelprofilen wurde der Slidertyp *S3P* um eine zusätzliche Option erweitert. Ein gerader Balken der nur über Slider mit der restlichen Struktur verbunden ist, kann um seine Stabachse frei rotieren. Damit wird allerdings die Steifigkeitsmatrix singulär. Der Slidertyp *S3PR* ermöglicht die gleiche Gleitbewegung wie *S3P* und sperrt aber gleichzeitig die Rotation des Knoten  $c$  um eine Achse, die von der näherungsweisen Tangente  $\overline{ln}$  beschrieben wird. Diese Zusatzbedingung muss für jede Segellatte nur in einem Knoten definiert werden, und wird laufend an die sich verändernde Geometrie angepasst.

### 3.5 Beispiel: Bespannter Bogen

Um die in den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels beschriebenen Verfahren und Strategien zu illustrieren, wird in diesem Abschnitt ein bespannter Bogen analysiert. Dabei kommen unterschiedliche Modellierungen zum Einsatz. Die mechanischen Eigenschaften der in Abbildung 3.14 dargestellten Anordnung sind in Tabelle 3.3 aufgelistet. Drei verschiedene Varianten sind in Abbildung 3.14 dargestellt.

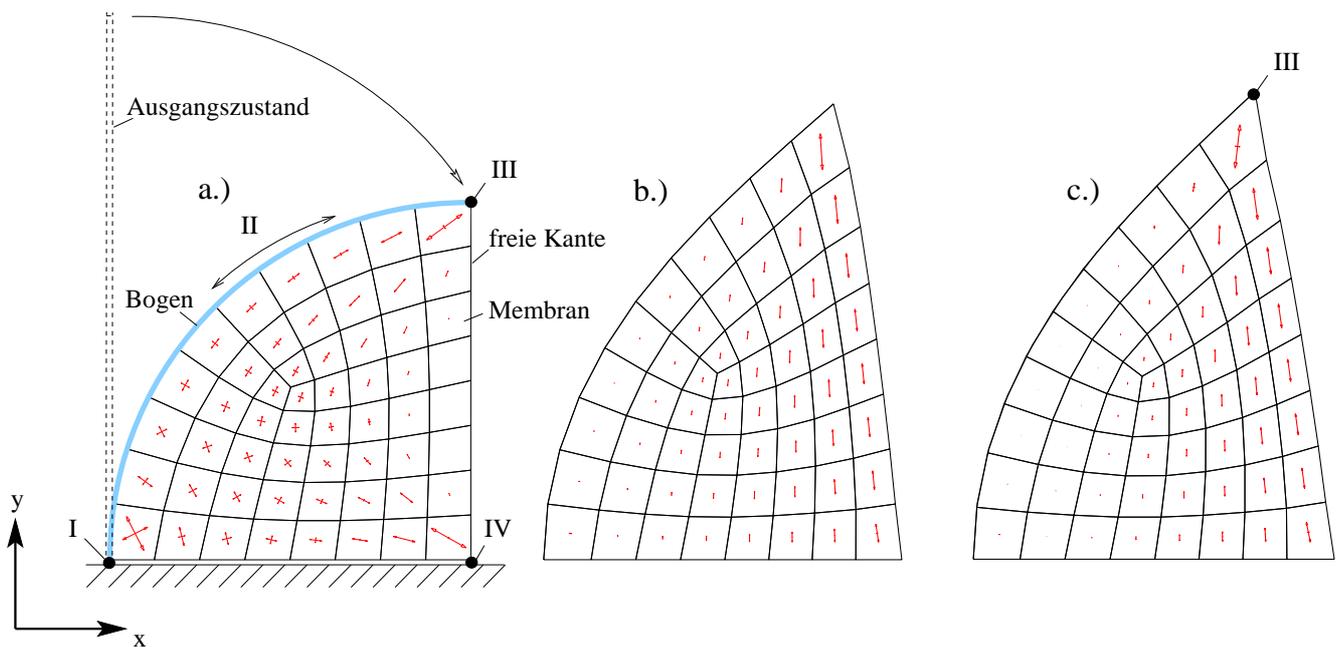


Abbildung 3.14: Bespannter Bogen

- a.) In diesem Fall wird die elastische Vorkrümmung (Vorspannung) des Bogens nicht berücksichtigt. Die Membran ist im Punkt III fix mit dem Bogen verbunden. Ansonsten kann die Membran entlang des Bogens frei gleiten, was durch S3P-Sliders realisiert wurde. Ferner ist der Membranpunkt IV eingespannt. Die Knoten entlang der horizontalen Kante sind in x-Richtung frei verschieblich.

Mittels Tensorplot sind innerhalb der Membranelemente die Cauchy-Spannungen dargestellt. Wäre die Membran an allen Rändern starr eingespannt, dann würde sie eine isotrope Zugvorspannung aufweisen, die sich aus dem E-Modul und der Anfangsverzerrung ergibt. Tatsächlich verformt sich der Rahmen, wodurch die Vorspannung von links nach recht abnimmt. In der Nähe des freien Randes müssen ferner die Spannungskomponenten normal zum freien Rand verschwinden. Die Hinterkanten von Membrantragflächen stellen in der Regel freie Ränder dar. Geringe Auslenkungen an der Hinterkante normal zur Flügelebene haben einen massiven Einfluss auf die Druckverteilung des gesamten Flügels. Da die geometrische Steifigkeit der Membranelemente entlang der freien Kante gering ist, hat diese Anordnung in Bezug auf aeroelastische Effekt ungünstige Eigenschaften. Die weiche Hinterkante wird bei einer realen Struktur zu lokalem Membranflattern führen.

- b.) In diesem Fall wurde die elastische Vorkrümmung des Bogen mitberücksichtigt. Die

hohen Rückstellkräfte führen zu starken Membranverzerrungen. Abgesehen vom tatsächlichen Spannungsniveau ist auch die Verteilung der Spannungen völlig anders als im Fall a.). Die Anfangsvorspannung tritt in den Hintergrund. Die höchsten Spannungen treten parallel zur Hinterkante auf. Die Spannungsverteilung der Membran ist in diesem Fall für eine Belastung durch aerodynamische Lasten besser geeignet als im Fall a.). In dieser Variante ist die Membran ferner mit dem Bogen fix verbunden, d.h. es gibt keine Gleitvorgänge zwischen Membran und Bogen.

- c.) Diese Variante entspricht der Version b.), allerdings wurden hier S3P-Slider zwischen Bogen und Membran verwendet. Die Unterschiede sind für diese spezielle Anordnung nicht sehr signifikant. Variante c.) weist etwas größere Verschiebungen in y-Richtung auf. Die Spannungen sind im Bereich des freien Randes etwas höher jedoch im Bereich des Bogen niedriger. In Variante c.) werden die Kräfte, die den Bogen zurückhalten, stärker in der oberen Ecke konzentriert (Punkt III).

# Kapitel 4

## Fluid-Struktur-Interaktion

### 4.1 Das stationäre Problem

Im Abschnitt 2.22 wurde die Berechnung des aerodynamischen Lastvektors  $\underline{F}_{\text{aero}}$  sowie der aerodynamischen Laststeifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{aero}}$  erläutert. Zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen ist eine inkrementell-iterative Vorgangsweise notwendig. Dies bedeutet, dass die Last in Schritten (Lastinkrementen) aufgebracht und über eine Newton-Raphson-Iteration eine Gleichgewichtslösung bestimmt wird (siehe z.B. *Rammerstorfer* [30]).

$${}^{m+1}\mathbf{K}^{i-1} \Delta \underline{U}^i = {}^{m+1}\underline{R} - {}^{m+1}\underline{F}^{i-1} \quad (4.1)$$

Eine alternative Möglichkeit wäre der Einsatz eines Constant-Arc-Length Verfahrens, wie zum Beispiel die Methode nach Riks-Whempner bzw. Ramm, die ebenfalls bei *Rammerstorfer* [30] oder auch *Bathe* [5] behandelt werden. Dabei tritt jedoch ein zentrales Problem auf. Das Lastniveau kann nämlich in der hier vorliegenden Problemstellung nicht direkt über einen Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  definiert werden, weil die Last auch von der Verformung der Struktur abhängt. Die Nebenbedingungen in den oben erwähnten Constant-Arc-Length-Verfahren wären damit nicht in der Lage, die Lasten zu begrenzen, womit die grundlegende Idee nicht mehr funktioniert.

Die besondere Herausforderung bei gekoppelten Problemen besteht darin, dass der Lastvektor  ${}^m\underline{R}$  durch eine Verformung der Struktur laufend verändert wird. Je nach Art der Koppelung zwischen den Verfahren der Fluid- bzw. Strukturanalyse lassen sich drei verschiedene Varianten formulieren, die in den folgenden Abschnitten näher erläutert werden.

### 4.1.1 Steigerung aerodynamischer Lasten

Die aerodynamischen Lasten sind durch die Flügelgeometrie, die Anströmung und die Dichte  $\rho_{\text{aero}}$  des Fluids definiert. Die Laststeigerung bei Interaktionsproblemen erfolgt über eine langsame Erhöhung der Dichte, die ähnlich wie bei vorgegebenen Lasten über einen fiktiven Zeitverlauf gesteuert werden kann. Bei einer inkrementellen Analyse wird jedem Lastschritt eine bestimmte Dichte  $\rho_{\text{aero}}$  zugewiesen.

### 4.1.2 Indirekte Koppelung

Diese Vorschrift entspricht der Gleichung (4.1), wobei die aerodynamische Last während der Iteration konstant gehalten wird. In Abbildung 4.1 werden die unterschiedlichen Koppelungsstrategien schematisch gezeigt. Der Iterationsverlauf für das Lastinkrement  $m + 1$  ist für die indirekte Koppelung  $I$  durch die blaue Linie dargestellt. Ausgehend vom be-

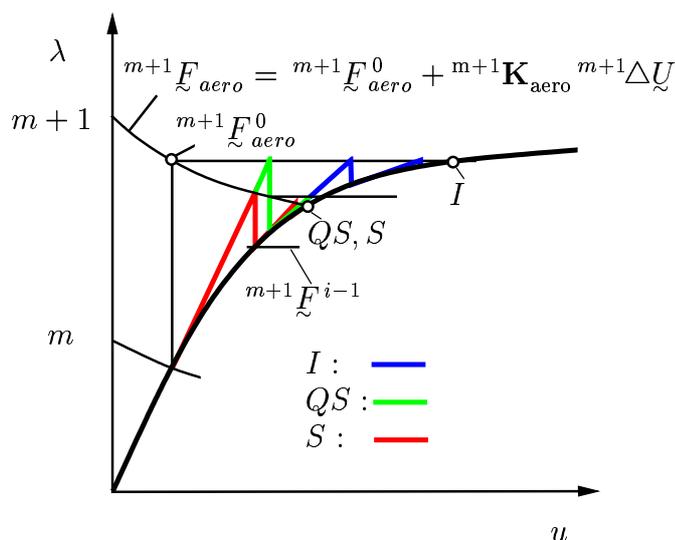


Abbildung 4.1: Koppelungsstrategien

kannten Lastniveau  $m$  wird die Last von  ${}^m\underline{F}$  auf  ${}^{m+1}\underline{F}^0$  erhöht und während der darauf folgenden Iteration konstant gehalten.

$${}^{m+1}\mathbf{K}^{i-1}\Delta\tilde{U}^i = {}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^0 - {}^{m+1}\underline{F}^{i-1} \quad (4.2)$$

Dabei ergibt sich ein Gleichgewichtspunkt der mit  $I$  gekennzeichnet ist. Das tatsächliche Lastniveau wäre allerdings deutlich niedriger, weil zum Beispiel durch die Deformation die

Auftriebskräfte reduziert werden. Der hochgestellte Index 0 bei  ${}^{m+1}\underline{F}^0$  deutet an, dass es sich um die 0te Iteration des  $m + 1$ ten Lastinkrements handelt.

### 4.1.3 Quasi-simultane Koppelung

Die quasi-simultane Koppelung stellt eine Verbesserung der indirekten Koppelung dar. Es wird nämlich während der Gleichgewichtsiteration auch der Lastvektor sukzessive verändert:

$${}^{m+1}\mathbf{K}^{i-1}\Delta\underline{U}^i = {}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^{i-1} - {}^{m+1}\underline{F}^{i-1}. \quad (4.3)$$

Dies kann entweder durch eine neuerliche Strömungsanalyse erfolgen oder mithilfe der aeroelastischen Steifigkeitsmatrix, die zu Beginn des Lastschrittes berechnet wurde:

$${}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^{i-1} = {}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^0 + {}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0 ({}^{m+1}\underline{U}^{i-1} - {}^{m+1}\underline{U}^0). \quad (4.4)$$

Die Matrix  ${}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0$  wurde für den Verschiebungszustand  ${}^{m+1}\underline{U}^0$  bestimmt, der mit der Gleichgewichtslösung  ${}^m\underline{U}$  des vorherigen Zeitschrittes übereinstimmt. Die Differenz der Verschiebungen ( ${}^{m+1}\underline{U}^{i-1} - {}^{m+1}\underline{U}^0$ ) liefert die Abweichung von diesem Startwert. In Abbildung 4.1 wird die quasi-simultane Koppelung durch den grünen Verlauf dargestellt. Durch die Reduktion der aerodynamischen Lasten während der Iteration wird ein vollkommen anderer Gleichgewichtspunkt berechnet als bei der indirekten Iteration.

An dieser Stelle muss betont werden, dass die in der 0ten Iteration des  $m + 1$  Zeitschrittes bestimmte Laststeifigkeitsmatrix eine Linearisierung der aerodynamischen Kräfte darstellt und der Differenzvektor ( ${}^{m+1}\underline{U}^{i-1} - {}^{m+1}\underline{U}^0$ ) nicht zu groß werden darf. Die Potentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung und die Linearisierung ist somit gerechtfertigt. Die Nichtlinearitäten sind in erster Linie auf das Verhalten der Membranstrukturen zurückzuführen.

### 4.1.4 Simultane Koppelung

Eine weitere Modifikation der Gleichung (4.2) ist möglich. Die Beziehung (4.4) kann auch für den aktuellen Iterationsschritt  $i$  formuliert werden:

$${}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^i = {}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^0 + {}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0 ({}^{m+1}\underline{U}^{i-1} + \Delta\underline{U}^i - {}^{m+1}\underline{U}^0). \quad (4.5)$$

Gleichung (4.1) wird damit zu

$${}^{m+1}\mathbf{K}^{i-1}\Delta\underline{U}^i = {}^{m+1}\underline{F}_{\text{aero}}^0 + {}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0 ({}^{m+1}\underline{U}^{i-1} + \Delta\underline{U}^i - {}^{m+1}\underline{U}^0) - {}^{m+1}\underline{F}^{i-1} \quad (4.6)$$

bzw. nach Umordnung

$$({}^{m+1}\mathbf{K}^{i-1} - {}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0)\Delta\mathcal{U}^i = {}^{m+1}\mathcal{F}_{\text{aero}}^0 + {}^{m+1}\mathbf{K}_{\text{aero}}^0({}^{m+1}\mathcal{U}^{i-1} - {}^{m+1}\mathcal{U}^0) - {}^{m+1}\mathcal{F}^{i-1}. \quad (4.7)$$

Die Gleichung (4.7) stellt eine simultane Koppelung in der Fluid-Struktur-Interaktion dar. Der Verlauf der Iteration bei dieser Koppelungsvariante ist in Abbildung 4.1 durch die rote Linie gekennzeichnet. Diese Variante kommt mit der geringsten Zahl an Iterationen aus.

#### 4.1.5 Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Koppelungen

Jede der Koppelungsstrategien hat Vor- und Nachteile, die in diesem Abschnitt kurz diskutiert werden sollen. Die *indirekte Koppelung*, die beispielsweise auch von *Schoop* [36] eingesetzt wird, ist vom Programmieraufwand her gesehen das sparsamste Verfahren. Die Strömungsanalyse kann auf die Berechnung des Lastvektors zu Beginn des Lastinkrements beschränkt werden. Die Struktur der Gleichungen im FE-Programm wird nicht verändert. Speziell die Bandstruktur der Steifigkeitsmatrix bleibt erhalten. Ein gravierender Nachteil liegt allerdings in der schlechten Konvergenzrate beim iterativen Berechnen des nichtlinearen Strukturverhaltens. Wie bereits in Abbildung 4.1 zu sehen ist, führt diese Art der Koppelung zu Lösungen, die eigentlich keine echten Gleichgewichtspunkte sind, da die aerodynamischen Lasten durch die Verformung des Systems verändert werden. In manchen Fällen kann es sogar zu Divergenz kommen. In Abbildung 4.2 sind die Verläufe der unterschiedlichen Koppelungsstrategien anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Gegeben ist eine rechteckige Membran, die entlang dreier Kanten festgehalten wird. Die Hinterkante der Membran ist frei verschieblich. Die Anordnung ist im unteren Teil der Abbildung skizziert.

Das Diagramm im oberen Bildteil zeigt den Auftriebsbeiwert der Anordnung, aufgetragen über der Anzahl an Iterationen. Die blaue Kurve des Diagramms beschreibt die indirekte Koppelung. Es ist ein divergentes Verhalten zu erkennen. Durch das Konstanthalten des aerodynamischen Lastvektors übersteuert die Membran in den einzelnen Inkrementen. Blau eingerahmt, ist ein Verschiebungszustand der divergierenden Membran dargestellt. Für die Untersuchungen an Membrantragflächen ist somit die indirekte Koppelung im Vergleich zu den beiden anderen Verfahren deutlich unterlegen.

Die quasi-simultane Koppelung zeigt ein besseres Konvergenzverhalten. Es kommt zu keiner Übersteuerung. Allerdings werden die gewählten Abbruchschranken für die Iteration nie erreicht, weil in diesem Verfahren die Lasten innerhalb einer Iteration konstant gehalten werden. Der Verlauf der Analyse wird durch den grünen Strich dargestellt. Ein wesentlicher

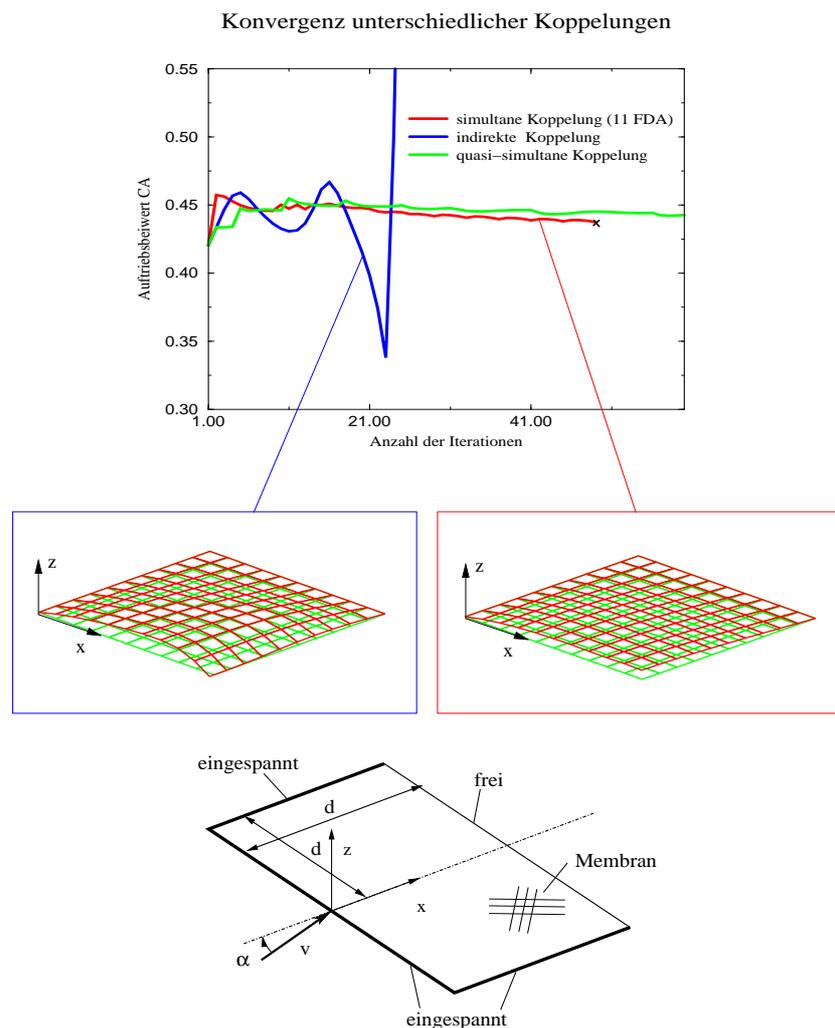


Abbildung 4.2: Konvergenzstudien

Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass die ursprüngliche Struktur der FE-Steifigkeitsmatrix erhalten bleibt.

Die simultane Koppelung ist mit Abstand das numerisch aufwendigste Verfahren. Durch die Einführung der vollbesetzten, unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix in die Gleichung (4.7) nehmen sowohl Speicherplatzbedarf als auch Rechenzeit deutlich zu. Belohnt wird dieser Aufwand jedoch mit den besten Konvergenzeigenschaften. In Abbildung 4.2 ist der Verlauf mit roter Farbe dargestellt und konvergiert auch als einziger.

### 4.1.6 Vergleich mit VLM- und QCC-Verfahren

Für die Analyse der Fluid-Membran-Interaktion wurden bisher kaum Panel-Verfahren sondern hauptsächlich Wirbelleiter-Verfahren, im englischen Sprachraum Vortex-Lattice-Method (VLM), eingesetzt. In [36] werden verschiedene Varianten der VLM beschrieben und anhand von Beispielen die Fehler in Abhängigkeit von der Diskretisierung verglichen. Die VLM-Verfahren verwenden diskrete Wirbel, die hufeisenförmig angeordnet werden und dabei eine Gitter- bzw. Leiterstruktur ergeben. Die Leiterspinnen sind in Spannweitenrichtung orientiert, während die Steher in Strömungsrichtung verlaufen. Die Verfahren werden je nach Anordnung der Wirbel und Kontrollpunkte unterschieden.

Zu Vergleichszwecken wurde die in [36] untersuchte Rechteckmembran mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren analysiert. Im linken Teil der Abbildung 4.3 ist die Anord-

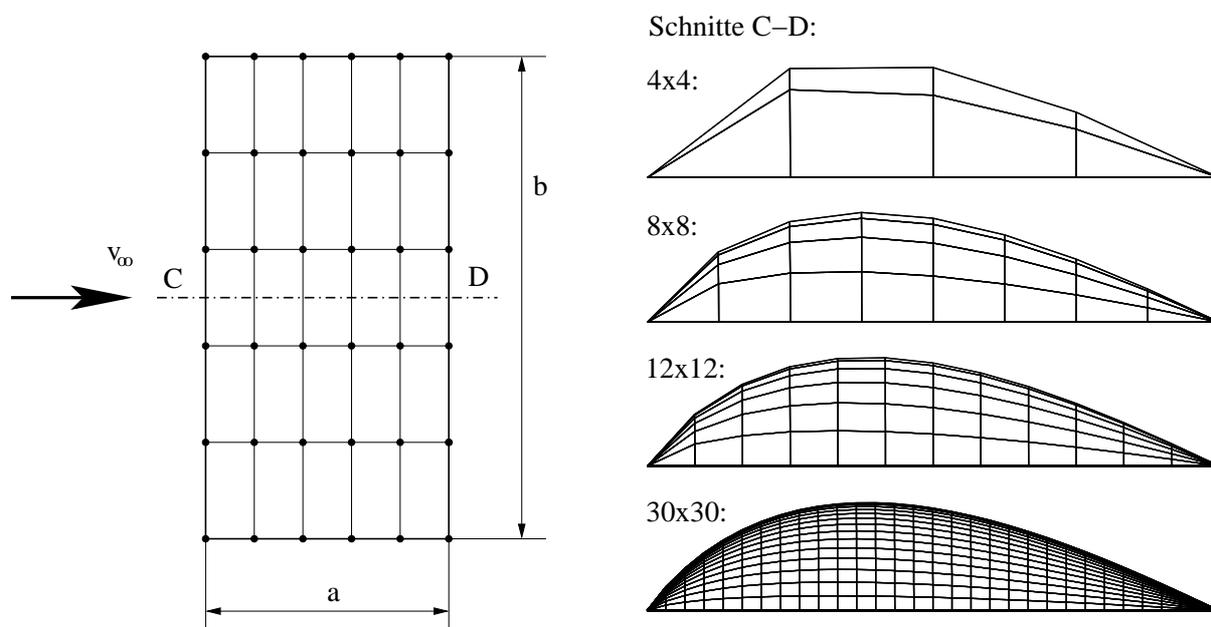


Abbildung 4.3: Aufbau

nung der Membran, die entlang der Ränder gelagert ist, dargestellt. In der Abbildung ist das Rechteck mit einer  $5 \times 5$  Diskretisierung dargestellt. Die Daten für die Analyse sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Im rechten Teil der Abbildung 4.3 ist die verformte Membran mit unterschiedlich feinen Netzen dargestellt. Die Verschiebungen sind dabei fünfzigfach vergrößert.

In den beiden Abbildungen 4.4 und 4.5 sind die Fehler  $|\frac{\Delta c_l}{c_l}|$  und  $|\frac{\Delta c_m}{c_m}|$  über der Anzahl der

Tiefe	$a$	10m
Breite	$b$	20m
Anströmung	$v_\infty$	$10 \frac{m}{s}$
Vordehnung	$\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{22}^p$	1%
Anstellwinkel	$\alpha$	$3^\circ$
Steifigkeit	$Eh$	$200000 \frac{N}{m}$
Poisson-Zahl	$\nu$	0

Tabelle 4.1: Definition der Membran

verwendeten Wirbelelemente bzw. Elementarflügel dargestellt. Die Werte für die beiden VLM-Verfahren wurden aus [36] übernommen. In [36] werden die Referenzlösungen  $c_l$  und  $c_m$  durch Extrapolation ermittelt und betragen

$$c_l = 0.1458 \pm 0.0001$$

und

$$c_m = 0.03560 \pm 0.00004,$$

wobei sich der Momentenbeiwert auf die Profilmittte bezieht.

Im Fall der hier beschriebenen Vorticity-Panel-Method wurden die Referenzlösungen mit einem sehr feinen Netz von  $50 \times 50$  Elementen ermittelt und lauten

$$c_l = 0.1415$$

und

$$c_m = 0.03608.$$

Die Unterschiede zwischen den Verfahren sind im Wesentlichen auf die unterschiedlichen aerodynamischen Modelle zurückzuführen. Nach Untersuchungen von *Horstmann* [15] sind der Genauigkeit von VLM Grenzen gesetzt, weil die Zirkulationsverteilung in Spannweitenrichtung durch eine Treppenfunktion angenähert wird und damit systematische Fehler bei der Berechnung der Auftriebsverteilung entstehen. Die Verwendung des relativen Fehlers lässt trotz der unterschiedlichen Referenzlösungen einen Vergleich der Konvergenzrate zu. In Abbildung 4.4 ist der relative Fehler des Auftriebsbeiwertes  $|\frac{\Delta c_l}{c_l}|$  über der Anzahl der verwendeten Wirbelelemente bzw. Elementarflügel im doppeltlogarithmischen Diagramm dargestellt. Mit VPM (Vorticity-Panel-Method) ist dabei das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren bezeichnet. Die Anzahl an Elementarflügeln stimmt mit der Anzahl der FEM-Elemente überein. Es kommen nur lineare Elemente mit vier Knoten zum Einsatz.

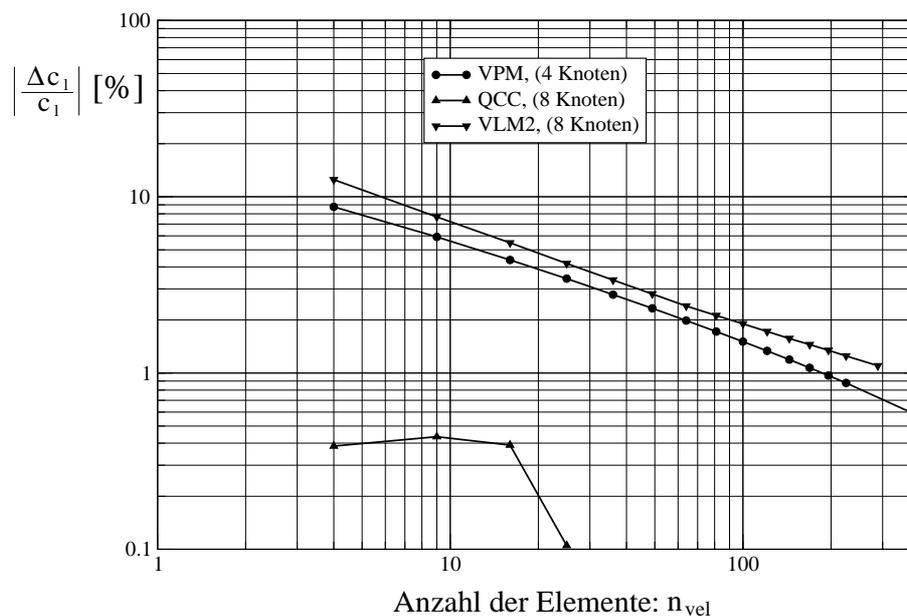


Abbildung 4.4: Konvergenzstudien

Mit QCC (Quasi-Continuous-Continuos) wird ein in [36] präsentierte Verfahren bezeichnet, das aus den diskreten Wirbeln, deren Positionen optimiert wurden, eine kontinuierliche Druckverteilung berechnet. Dabei kommen bekannte Verteilungsfunktionen aus der Profiltheorie zum Einsatz. Unter Berücksichtigung der Elementansatzfunktionen werden aus dieser kontinuierlichen Druckverteilungen konsistente Knotenkräfte errechnet. Für die Ermittlung der Werte im Diagramm der Abbildung 4.4 wurden ebenfalls gleich viele Wirbel wie FEM-Elemente eingesetzt, wobei allerdings Membranelemente mit acht Knoten zum Einsatz kamen.

Das VLM2-Verfahren berechnet die Knotenkräfte direkt aus den diskreten Wirbeln. Es ist das Standardverfahren für die Berechnung der Fluid-Membran-Interaktion. Bei der Verwendung von  $n \times n$  Wirbelelementen werden  $(n + 1) \times (n + 2)$  FEM-Elemente benötigt. Wieder wurden achtknotige Elemente herangezogen.

In Abbildung 4.4 ist erkennbar, dass das VPM-Verfahren eine etwas bessere Konvergenz aufweist als das VLM2. Deutlich besser schneidet jedoch das QCC-Verfahren ab. Ein Grund dafür liegt in der Verwendung von Elementen mit einer höheren Ordnung der Ansatzfunktionen. Ferner werden die Eintrittskantensingularitäten besser erfasst, die beim VPM durch die stückweise lineare Interpolation der Wirbeldichten nur bei feinen Netzen gut abgebildet werden. Die Art der Singularität ist jedoch auch von der Geometrie abhängig, sodass der Vorteil des QCC nicht immer so deutlich ausfällt.

Im Fall des relativen Fehlers im Momentenbeiwert sind die Ergebnisse aus der Abbildung 4.5 zu entnehmen. Das QCC-Verfahren weist die höchste Konvergenzrate auf. Das VLM2-

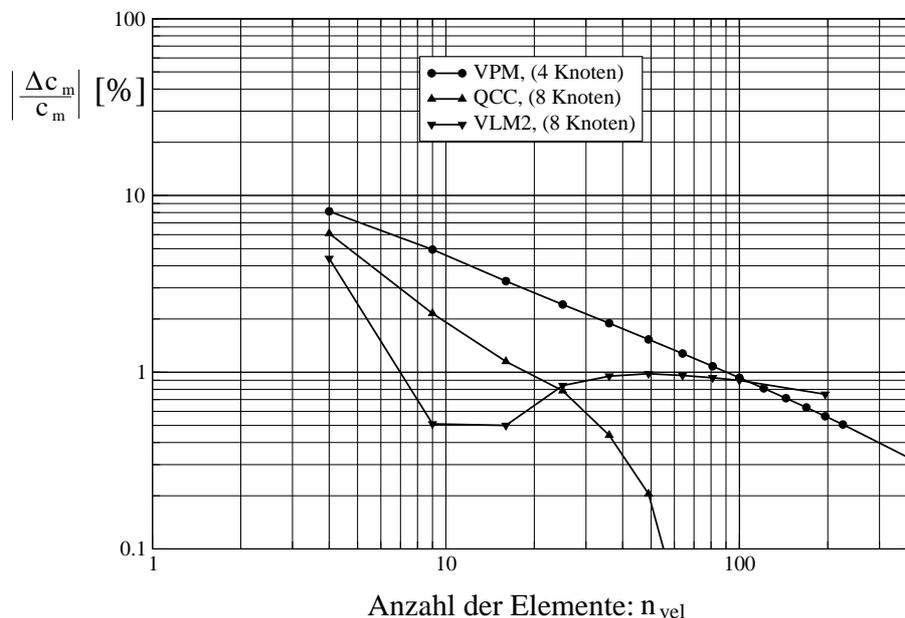


Abbildung 4.5: Konvergenzstudien

Verfahren ist bei kleinen Elementzahlen besser, für große Elementzahlen aber schlechter als QCC bzw. VPM. VPM zeigt im doppeltlogarithmischen Diagramm eine gleichmäßig gute Konvergenzrate.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die VPM gute Konvergenzeigenschaften aufweist, obwohl es das einzige Verfahren ist, das mit linearen Membranelementen arbeitet. Die  $10 \times 10$ - Diskretisierung produziert Fehler um etwa 1%. Das QCC-Verfahren zeigt für diese Membrananordnung, die durch die geringe Auslenkung eher einer ebenen Platte entspricht, eine höhere Konvergenzrate. Der wesentliche Vorteil der VPM scheint allerdings in diesem Vergleich nicht auf. Erhöht man die Intensität der Lasten in zwei Schritten auf den Sollwert, dann sind für die einzelnen Verfahren unterschiedlich viele Iterationen notwendig, um das gleiche Ergebnis zu erhalten:

- bei der simultanen Koppelung: zwei Lastschritte mit je drei Iterationen; → zwei aerodynamische Analysen + sechs Iterationen,
- bei der indirekten Koppelung: zwei Lastschritte mit je drei Iterationen und zusätzlich weitere vier Korrekturschritte mit je zwei Iterationen → sechs aerodynamische Analysen + 14 Iterationen.

Die Berechnung der aerodynamischen Laststeifigkeitsmatrix ist beim *QCC* nicht in einfacher Weise möglich, da die Analysenetze der Strömungs- und Strukturmodelle nicht übereinstimmen.

Wird beim oben angeführten Beispiel sowohl die Membransteifigkeit als auch die Vordehnung um eine Größenordnung reduziert, dann erhält man folgenden Vergleich, bei gleichem Endergebnis:

- simultane Koppelung: 3 aerodynamische Analysen, 22 Iterationen,
- indirekten Koppelung: 13 aerodynamische Analysen, 41 Iterationen.

## 4.2 Das instationäre Problem

Zur Behandlung instationärer gekoppelter Probleme wird in dieser Arbeit das Newmark-Verfahren für die Zeitintegration [5, 4, 32] eingesetzt. Zunächst soll das Verfahren für nicht-lineare instationäre Probleme formuliert werden. Anschließend erfolgt die Kombination mit dem Korrektor-Prediktor-Verfahren der instationären Aerodynamik. Dannach erfolgt die vollständige Formulierung mit Einbeziehung von numerischer Dämpfung.

### 4.2.1 Das Newmark-Verfahren

Das Newmark-Verfahren bei nichtlinearen dynamischen Berechnungen wird ausführlich in [4] behandelt. Für lineare Probleme lauten die Ansätze für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}} = {}^t\dot{\underline{U}} + [(1 - \beta_1) {}^t\ddot{\underline{U}} + \beta_1 {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}] \Delta t \quad (4.8)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{U} = {}^t\underline{U} + {}^t\dot{\underline{U}} \Delta t + [(\frac{1}{2} - \beta_2) {}^t\ddot{\underline{U}} + \beta_2 {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}] (\Delta t)^2 \quad (4.9)$$

In dieser Arbeit wird dabei die Methode konstanter mittlerer Beschleunigung angewendet, und für die Koeffizienten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  gilt:

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

Im stationären nichtlinearen Fall ist eine inkrementell-iterative Vorgangsweise erforderlich. Im instationären Fall entsprechen die Zeitschritte den Lastinkrementen. Durch eine

Newton-Raphson-Iteration je Zeitschritt wird eine Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen berechnet. Bei der iterativen Lösung gilt zunächst für die Zustandsgrößen der Iteration  $i + 1$ :

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^i + \Delta\ddot{\underline{U}}^{i+1} \quad (4.11)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i + \Delta\dot{\underline{U}}^{i+1} \quad (4.12)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^i + \Delta\underline{U}^{i+1} \quad (4.13)$$

Mittels den Gleichungen (4.8) und (4.9) werden für  $\Delta\ddot{\underline{U}}$ ,  $\Delta\dot{\underline{U}}$  durch  $\Delta\underline{U}$  ersetzt:

$$\Delta\ddot{\underline{U}}^{i+1} = \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{1}{\Delta t^2 \beta_2} \quad (4.14)$$

$$\Delta\dot{\underline{U}}^{i+1} = \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{\beta_1}{\Delta t \beta_2} \quad (4.15)$$

Damit können die Gleichungen (4.11) bis (4.13) auch geschrieben werden als

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^i + \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{1}{\Delta t^2 \beta_2} \quad (4.16)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i + \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{\beta_1}{\Delta t \beta_2} \quad (4.17)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^i + \Delta\underline{U}. \quad (4.18)$$

Diese Werte werden schließlich für die Formulierung der Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  und das Inkrement  $i + 1$  herangezogen

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left( {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^i + \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{1}{\Delta t^2 \beta_2} \right) + \mathbf{D} \left( {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i + \Delta\underline{U}^{i+1} \frac{\beta_1}{\Delta t \beta_2} \right) + \mathbf{K} \Delta\underline{U}^{i+1} = \\ = {}^{t+\Delta t}\underline{R}^{i+1} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}^i. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Der Vektor  ${}^{t+\Delta t}\underline{F}^i$  stellt dabei die inneren Kräfte in der Iteration  $i$  dar, und  ${}^{t+\Delta t}\underline{R}$  ist der Lastvektor. In Gleichung (4.19) stellt der Vektor  $\Delta\underline{U}$  die unbekanntes Verschiebungsinkremente der Iteration  $i + 1$  dar. Durch Umordnung der Gleichung (4.19) erhält man die Iterationsvorschrift für den Zeitschritt  $t + \Delta t$

$$\left( \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2 \beta_2} + \mathbf{D} \frac{\beta_1}{\Delta t \beta_2} + \mathbf{K} \right) \Delta\underline{U}^{i+1} = {}^{t+\Delta t}\underline{R} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^i - \mathbf{D} {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i - {}^{t+\Delta t}\underline{F}^i. \quad (4.20)$$

Der Ablauf dieser Analyse muss allerdings noch näher erläutert werden. Angenommen, der Zustand des Systems ist im Zeitpunkt  $t$  bekannt, dann sind folgende Schritte erforderlich:

- 1.) Unter Annahme einer konstanten Beschleunigung, d.h.  ${}^t\ddot{\underline{U}} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}$ , wird der Startpunkt der Iteration des Zeitschrittes  $t + \Delta t$  durch Extrapolation ermittelt.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^0 = {}^t\dot{\underline{U}} + {}^t\ddot{\underline{U}} \Delta t \quad (4.21)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^0 = {}^t\underline{U} + {}^t\dot{\underline{U}} \Delta t + \frac{1}{2} {}^t\ddot{\underline{U}} (\Delta t)^2 \quad (4.22)$$

Der Index 0 deutet an, dass es sich um den Ausgangspunkt der folgenden Iteration handelt.

- 2.) Mittels Gleichung (4.20) wird somit das Verschiebungsinkrement  $\Delta \underline{U}^{i+1}$  der ersten Iteration berechnet.
- 3.) Die Gleichungen (4.16) bis (4.18) liefern die Vektoren  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^1$ ,  ${}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^1$  und  ${}^{t+\Delta t}\underline{U}^1$ .
- 4.) Mittels Gleichung (4.20) wird das nächste Verschiebungsinkrement berechnet. Wird eine Abbruchbedingung für die Iteration erfüllt, dann wird der soeben berechnete Zustand  $t + \Delta t$  in  $t$  umbenannt, und die Analyse setzt bei Punkt 1.) fort. Sind Ungleichgewichtskräfte bzw. das Verschiebungsinkrement zu groß, ist eine weitere Iteration erforderlich, und das Programm kehrt zu Punkt 3.) zurück.

Um die Analyse jedoch überhaupt starten zu können, müssen als Anfangsbedingung die Zustandsgrößen des System bekannt sein, also beispielsweise zum Zeitpunkt 0:  ${}^0\ddot{\underline{U}}^0$ ,  ${}^0\dot{\underline{U}}^0$  und  ${}^0\underline{U}^0$ .

## 4.2.2 Artificielle selbsterregte Membranschwingungen

Wie bereits in früheren Abschnitten erläutert, verfügen die Membranelemente über einen Mechanismus, der Faltenbildung erlaubt. Treten Falten auf, dann wird die Membransteifigkeit in Richtung der Druck-Normalspannungen deutlich reduziert. Damit können die Membranelemente ein stark nichtlineares Materialverhalten aufweisen. Das in dieser Arbeit zum Einsatz kommende Newmark-Schema geht von einer konstanten mittleren Beschleunigung aus. Bei stark nichtlinearem Materialverhalten können zwischen zwei Zeitschritten Beschleunigungsverläufe auftreten, die durch die Annahme einer konstanten mittleren Beschleunigung völlig falsch erfasst werden. Das Newmark-Verfahren ist somit in diesem Fall nicht mehr energiekonservierend bzw. stabil, und es können artificielle selbstinduzierte Schwingungen in der Struktur auftreten. Um dieses Problem zu illustrieren, genügt das einfache Modell eines Einmassenschwingers mit nichtlinearer Federkennlinie. Die Anordnung



Abbildung 4.6: Einmassenschwinger

ist in Abbildung 4.6 schematisch dargestellt. Die Masse des Schwingers beträgt ein 1kg. Die Zugsteifigkeit der Feder ist  $100000 \frac{N}{m}$ . Die Drucksteifigkeit ist mit  $100 \frac{N}{m}$  deutlich geringer. Das System wird bei Anfangsverschiebung von  $x = 0.01m$  und  $\dot{x} = 0$  losgelassen und schwingt. Es ist keine Dämpfung vorhanden. In Abbildung 4.7 sind die Beschleunigungsverläufe für verschiedene Zeitschrittweiten über der Zeit aufgetragen. Für eine Schrittweite von  $\Delta t = 0.001$  ist das Newmark-Verfahren stabil, für  $\Delta t = 0.01$  jedoch instabil. Die positiven Beschleunigungen nehmen pro Zyklus stark zu.

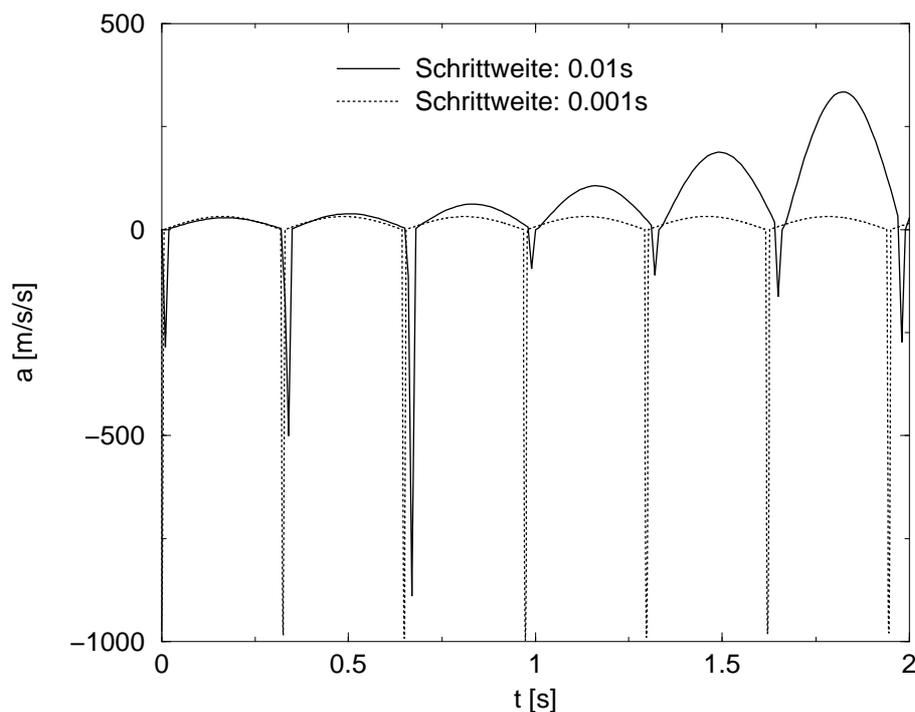


Abbildung 4.7: Instabile Lösungen

Bei Membranen können ähnliche Probleme auftreten und zu numerischen Schwierigkeiten führen. Eine Konfiguration mit acht Elementen ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Die Eigenschaften und Abmessungen der Membran wurden von der Tabelle 4.1 übernommen.

Im Gegensatz zu den früheren Analysen ist ein Rand frei verschieblich. Die vorgegebene Verzerrung erzeugt daher kein homogenes Spannungsfeld. Die Elemente entlang des freien Randes weisen einen nahezu einachsigen Spannungszustand auf. Wird auf dieses System

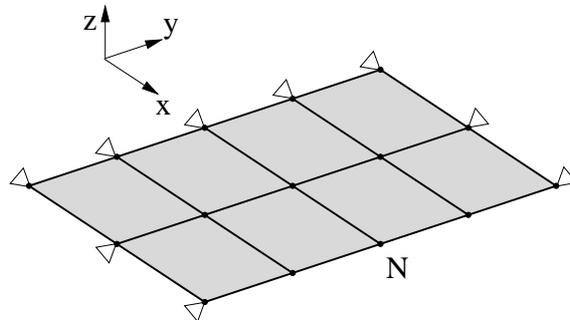


Abbildung 4.8: Schwingende Membrane

schlagartig eine Gravitation aufgebracht, dann schwingt die Membran um eine neue Ruhelage, sofern keine Dämpfung vorhanden ist. In den Abbildungen 4.9 und 4.10 sind die Beschleunigungen des Schwingvorgangs in vertikaler Richtung und in horizontaler Richtung abgebildet. Die rote Kurve zeigt dabei das ungedämpfte System. In der vertikalen

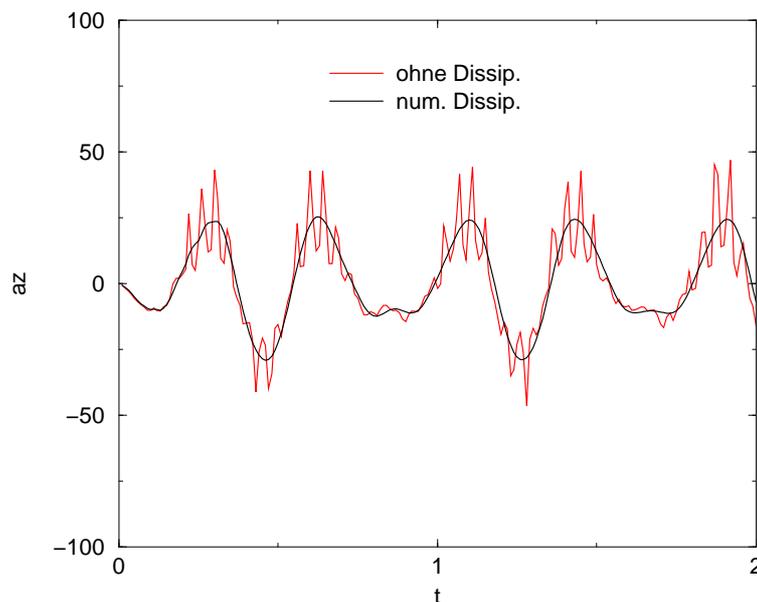


Abbildung 4.9: Vertikalschwingung einer Membran

Richtung treten Beschleunigungen bis  $45 \frac{m}{s^2}$  auf. Auch in horizontaler x-Richtung kommt es zu Schwingungen, wobei die Membran abwechselnd in Falten liegt bzw. eine Vorspannung aufweist. Durch diese starke Schwankung in der MembranstEIFigkeit in Verbindung

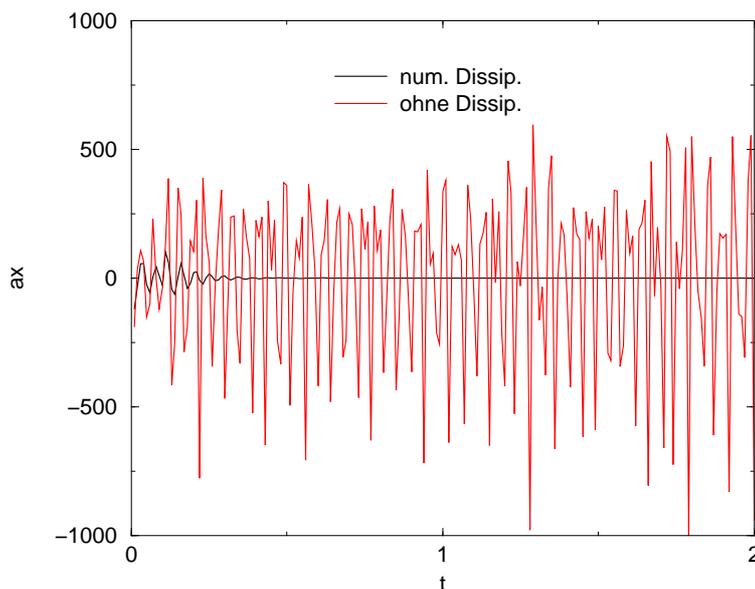


Abbildung 4.10: Horizontalschwingung einer Membrane

mit dem Newmark-Verfahren treten sehr hohe horizontale Beschleunigungen im Knoten  $N$  auf, die Werte bis zu  $1000 \frac{m}{s^2}$  aufweisen können und damit um mehr als eine Größenordnung über den Vertikalbeschleunigungen liegen. Aufgrund der geringen Elementanzahl kommt es zu keinen größeren numerischen Schwierigkeiten, doch bei Systemen mit etlichen hundert Freiheitsgraden würde die direkte Zeitintegration in dieser Form versagen.

Es gibt verschiedene Maßnahmen, um dieses Problem der artifiziellen selbstinduzierten Schwingung zu reduzieren.

In [4] werden Verfahren für die Zeitintegration mit großen Zeitschritten behandelt. Vertreter sind beispielsweise der *Modifizierte unbedingt stabile Newmark-Algorithmus*, der bei quadratisch nichtlinearen Problemen energiekonservierend und damit unbedingt stabil ist, und der *Modifizierte unbedingt stabile kubisch hermetische Algorithmus*. Beide Verfahren gehen von speziellen zeitlichen Verläufen der inneren Kräfte der Struktur aus. Damit lassen sich genauere Werte für die Arbeit der inneren Kräfte ermitteln. Die Änderung der kinetischen Energie muss äquivalent sein mit der Arbeit der inneren und äußeren Kräfte. Damit lassen sich unbedingt stabile Algorithmen entwerfen, die jedoch auf speziellen Ordnungen der Nichtlinearitäten beruhen. Im Fall der Faltenbildung von Membranen, bei dem die Steifigkeit regelrecht sprunghaften Veränderungen unterworfen ist, bringen diese Verfahren keine wesentliche Verbesserung.

Eine weitere, wenn auch theoretische Weise, die hochfrequenten Schwingungen zu beseiti-

gen, wäre die Einführung einer strukturellen Dämpfung. In Testläufen stellte sich jedoch heraus, dass sehr hohe Dämpfungswerte erforderlich sind, die in weiterer Folge das globale Verhalten unzulässig stark beeinflussen.

Wie das oben angeführte Beispiel des nichtlinearen Einmassenschwingers zeigte, kann durch eine geeignet kleine Zeitschrittweite ebenfalls ein stabiles Verhalten erzielt werden. Viele aeroelastische Analysen wären dann allerdings nicht mehr sinnvoll möglich, weil sie zu lange dauern würden.

Als letzte Option bietet sich die numerische Dissipation an. Sie eliminiert durch eine spezielle Formulierung der Bewegungsgleichungen die hochfrequenten Schwingungsanteile. Damit kann auf einfache Weise das Problem der Schwingung in der Membranfläche entschärft werden. Zu diesem Zweck wurde zunächst das Verfahren der Generalized- $\alpha$ -Method von *Chung* [7] implementiert.

### 4.2.3 Generalized- $\alpha$ -Method

Nach [7] wird die Bewegungsgleichung in folgender Form angeschrieben:

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{U}}_\alpha + \mathbf{D}\dot{\underline{U}}_\alpha = \underline{R}_\alpha - \underline{F}_\alpha. \quad (4.23)$$

Der Vektor  $\underline{R}_\alpha$  ist der Lastvektor, und  $\underline{F}_\alpha$  beschreibt die inneren Kräfte der Struktur. Die Größen mit  $\alpha$  als Index sind dabei definiert als:

$$\ddot{\underline{U}}_\alpha = (1 - \alpha_m)^{t+\Delta t} \ddot{\underline{U}} + \alpha_m {}^t \ddot{\underline{U}} \quad (4.24)$$

$$\dot{\underline{U}}_\alpha = (1 - \alpha_f)^{t+\Delta t} \dot{\underline{U}} + \alpha_f {}^t \dot{\underline{U}} \quad (4.25)$$

$$\underline{U}_\alpha = (1 - \alpha_f)^{t+\Delta t} \underline{U} + \alpha_f {}^t \underline{U} \quad (4.26)$$

$$\underline{R}_\alpha = (1 - \alpha_f)^{t+\Delta t} \underline{R} + \alpha_f {}^t \underline{R} \quad (4.27)$$

$$\underline{F}_\alpha = (1 - \alpha_f)^{t+\Delta t} \underline{F} + \alpha_f {}^t \underline{F}. \quad (4.28)$$

Mit den Gleichungen (4.11) bis (4.13) erfolgt die Umformung für den Iterationsvorgang:

$$\ddot{\underline{U}}_\alpha^{i+1} = (1 - \alpha_m) \left( {}^{t+\Delta t} \ddot{\underline{U}}^i + \Delta \underline{U}^{i+1} \frac{1}{\Delta t^2 \beta_2} \right) + \alpha_m {}^t \ddot{\underline{U}} \quad (4.29)$$

$$\dot{\underline{U}}_\alpha^{i+1} = (1 - \alpha_f) \left( {}^{t+\Delta t} \dot{\underline{U}}^i + \Delta \underline{U}^{i+1} \frac{\beta_1}{\Delta t \beta_2} \right) + \alpha_f {}^t \dot{\underline{U}} \quad (4.30)$$

$$\underline{U}_\alpha^{i+1} = (1 - \alpha_f) \left( {}^{t+\Delta t} \underline{U}^i + \Delta \underline{U}^{i+1} \right) + \alpha_f {}^t \underline{U}. \quad (4.31)$$

Bei einer typischen instationären, gekoppelten Analyse setzt sich der Vektor der äußeren Kräfte aus Gravitations- und aerodynamischen Kräften zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{R}_\alpha^{i+1} = & (1 - \alpha_f)({}^{t+\Delta t}\underline{F}_g + \alpha_f {}^t\underline{F}_g) + \\ & (1 - \alpha_f)[{}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^* + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{aero}}^*(\Delta\underline{U}^{i+1} + {}^{t+\Delta t}\underline{U}^i - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^*) + \\ & {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{\text{aero}}^*(\Delta\underline{U}^{i+1}\frac{\beta_1}{\Delta t\beta_2} + {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i - {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^*) + \alpha_f {}^t\underline{F}_{\text{aero}}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\underline{F}_\alpha^{i+1} = (1 - \alpha_f)({}^{t+\Delta t}\underline{F}^i + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^i\Delta\underline{U}^{i+1}) + \alpha_f {}^t\underline{F}. \quad (4.33)$$

Mit den Ausdrücken (4.29) bis (4.33) kann schließlich die Bewegungsgleichung des simultan gekoppelten, numerisch gedämpften Systems für einen Iterationsschritt angegeben werden:

$$\widehat{\mathbf{K}}\Delta\underline{U}^{i+1} = \widehat{\underline{R}}, \quad (4.34)$$

mit der Steifigkeit  $\widehat{\mathbf{K}}$  und dem Lastvektor  $\widehat{\underline{R}}$ :

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{M}(1 - \alpha_m)\frac{1}{\Delta t^2\beta_2} + (1 - \alpha_f)({}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^i\frac{\beta_1}{\Delta t\beta_2} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{\text{aero}}^*\frac{\beta_1}{\Delta t\beta_2} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^i - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{aero}}^*) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{R}} = & -\mathbf{M}[(1 - \alpha_m){}^{t+\Delta t}\ddot{\underline{U}}^i + \alpha_m {}^t\ddot{\underline{U}}] - {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^i[(1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i + \alpha_f {}^t\dot{\underline{U}}] - \\ & (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\underline{F}^i - \alpha_f {}^t\underline{F} + \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha_f)[{}^{t+\Delta t}\underline{F}_{\text{aero}}^* + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{aero}}^*({}^{t+\Delta t}\underline{U}^i - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^*) + \\ & {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}_{\text{aero}}^*({}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^i - {}^{t+\Delta t}\dot{\underline{U}}^*)] + \alpha_f {}^t\underline{F}_{\text{aero}} + \\ & (1 - \alpha_f){}^{t+\Delta t}\underline{F}_g^i + \alpha_f {}^t\underline{F}_g \end{aligned} \quad (4.37)$$

In einer ersten Variante wurden die Dämpfungsparameter  $\alpha_m$  und  $\alpha_f$  nach der Generalized- $\alpha$ -Method [7] festgelegt:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (4.38)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad (4.39)$$

wobei der Spektralradius  $\rho_\infty$  vom Benutzer definiert wird, und  $\rho_\infty \in [1, 0]$  gilt. Für den Fall der faltigen Membran liefert die WBZ- $\alpha$ -Method nach *Wood* [38] jedoch bessere Werte, und es wurden in der Folge die Parameter

$$\alpha_m = \frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (4.40)$$

$$\alpha_f = 0 \quad (4.41)$$

verwendet, wobei wiederum gilt  $\rho_\infty \in [1, 0]$ .

In der Abbildung 4.9 ist die stabilisierte Systemantwort schwarz dargestellt. Dabei wurde die WBZ- $\alpha$ -Method mit einem spektralen Radius von  $\rho = 0.5$  verwendet. Im Diagramm ist zu erkennen, dass der globale Verlauf der Kurven übereinstimmt. Die hochfrequenten Anteile treten in der stabilisierten Version nicht mehr auf. Ein ähnliches Ergebnis zeigt sich in der Abbildung 4.10, das die horizontale Beschleunigung in x-Richtung darstellt. Im stabilisierten Fall verschwinden die Beschleunigungen beinahe vollständig, was bei einer vertikalen Membranschwingung auch zu erwarten ist.

#### 4.2.4 Strukturelle Dämpfung

Eine der Schwierigkeiten bei der Behandlung von Membranen ist die Abschätzung der Dämpfungseigenschaften. Die einfachste Methode leitet sich aus Ergebnissen für lineare Systeme ab. Dabei kann nach [32] bzw. [6] bei Kenntnis der modalen Dämpfung eines Systems die sogenannte Rayleigh-Dämpfung bestimmt werden. Die Dämpfungsmatrix nimmt dabei die Form

$$\mathbf{D} = \alpha_r \mathbf{M} + \beta_r \mathbf{K} \quad (4.42)$$

an. Die Parameter  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  lassen sich dabei aus den modalen Dämpfungsparametern zweier maßgeblicher Modi bestimmen. Die Zusammensetzung von  $\mathbf{D}$  lässt sich auch interpretieren als einen geschwindigkeitsproportionalen Anteil  $\alpha_r \mathbf{M}$  und einem Anteil  $\beta_r \mathbf{K}$ , der den Einfluss der Verzerrungsgeschwindigkeit berücksichtigt. Bei Analysen mit einer frei fliegenden Struktur ist der rein geschwindigkeitsproportionale Anteil unbrauchbar, weil damit ein permanenter Widerstand erzeugt wird. Außerdem wird ein Teil der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung direkt von der aerodynamischen Dämpfungsmatrix beigesteuert. Im Fall der nichtlinearen Membranstrukturen wird somit einfach ein Prozentsatz (z.B. 0.1%) der Steifigkeitsmatrix als Dämpfungsmatrix herangezogen. Für die schwingende Membran, deren Beschleunigungen in den Abbildungen 4.9 und 4.10 dargestellt sind, ergäbe dies eine modale Dämpfung von rund 1.0%. Dämpfungen für reale Segelstoffe liegen deutlich darüber.

### 4.2.5 Ablauf einer instationären gekoppelten Analyse

Eine gekoppelte Analyse geht immer von einem stationären Zustand, einer gleichmäßigen Translation, aus. Diese Anfangsbedingung wird vom Benutzer vorgegeben oder ist die Lösung einer vorangegangenen instationären aber nicht gekoppelten Analyse. Unter Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung wird die Geometrie des Nachlaufes festgelegt und eine stationäre Strömungsanalyse durchgeführt. Damit kann der gesamte Nachlauf mit freier Zirkulation belegt werden. Diese stationäre Lösung stellt den Ausgangspunkt der instationären aerodynamischen Berechnung dar.

### 4.2.6 Numerische Aspekte

Die simultane Koppelung führt innerhalb des FE-Programms zu einer vollbesetzten Steifigkeitsmatrix. Der dazu nötige Speicherplatzbedarf stellt in der heutigen Zeit kein besonderes Problem dar. Anders verhält es sich allerdings mit der CPU-Zeit, die für die Gleichungslösung bei einer nichtsymmetrischer Koeffizientenmatrix erforderlich wird. In dieser Arbeit kamen dabei optimierte Routinen aus der *Lapack-Library* [3] zum Einsatz.

Für die ursprüngliche softwaremäßige Implementierung war geplant, die Fluid-Struktur-Interaktion über zwei eigenständige Programme zu realisieren, die über eigene sequentielle Dateien die erforderlichen Informationen austauschen sollten. Dieser Datenaustausch beanspruchte einen erheblichen Teil der gesamten Analysezeit. Speziell die simultane bzw. die quasi-simultane Koppelung waren dadurch deutlich benachteiligt, weil bei diesen Varianten die aerodynamischen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen in das FE-Programm importiert werden müssen. Eine Verbesserung der Situation erbrachte die Verschmelzung beider Programme und die gemeinsame Nutzung eines Teiles der Datenbasis. Die eigenständige Variante des Wirbel-Panel-Verfahrens besteht aus einem Hauptteil und Unterprogrammen. In der gekoppelten Version wurde der Hauptteil als Unterprogramm in den FE-Code plaziert. Bei einer gekoppelten Analyse muss der Benutzer zwei Inputfiles, eines für das FE-Programm *CARINA* und eines für das Strömungsprogramm *P4* bereitstellen. Bei einer gekoppelten Analyse übernimmt das Strömungsprogramm dann die erforderlichen Daten direkt vom FE-Code. Beide Inputs können so unabhängig voneinander analysiert und getestet werden, bevor eine aufwändige gekoppelte Analyse durchgeführt wird.

# Kapitel 5

## Flugsimulation eines Hängegleiters

### 5.1 Motivation

Schon im einleitenden Abschnitt dieser Arbeit wurde die starke Fluid-Struktur-Koppelung bei Hängegleitern erwähnt. Die Flügelverwindung und somit die Auftriebsverteilung ist von den strukturellen Gegebenheiten des Segels und der unterstützenden Struktur sowie dem jeweiligen Flugzustand abhängig. Anhand eines vereinfachten Hängegleitermodells sollen nachfolgend die Möglichkeiten der instationären Koppelung veranschaulicht werden.

### 5.2 Modellbildung

#### 5.2.1 Aufbau des Analysemodells

Moderne Hängegleiter verfügen über ein räumlich geschnittenes Segel, das im vorderen Tragflächenbereich ein Profil mit endlicher Dicke (3d-Bereich) ergibt. Im hinteren Bereich geht das Flügelprofil in einen reinen Membranflügel über (siehe Abbildung 5.1)

Die Segellatten definieren die obere Flügelkontur und sind in Abständen von rund einem halben Meter angeordnet. Üblicher Weise wird das Segel auf der Profilunterseite an drei bis vier Positionen durch kurze gerade Segellatten unterstützt. Die Positionen in Richtung der Spannweite fallen nicht mit den Positionen der Latten des Obersegels zusammen. Wie bereits ausführlich beschrieben, wird mit dem verwendeten Verfahren zur Berechnung der aerodynamischen Kräfte die Mittelfläche (Skelettfäche) des Flügels diskretisiert. Aus die-

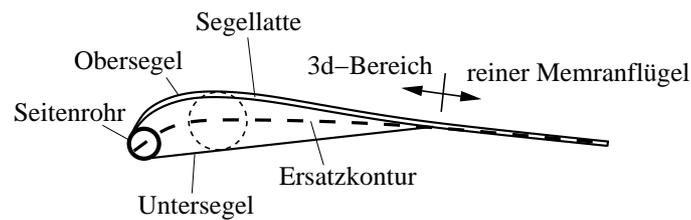


Abbildung 5.1: Reduktion des 3d-Flügels

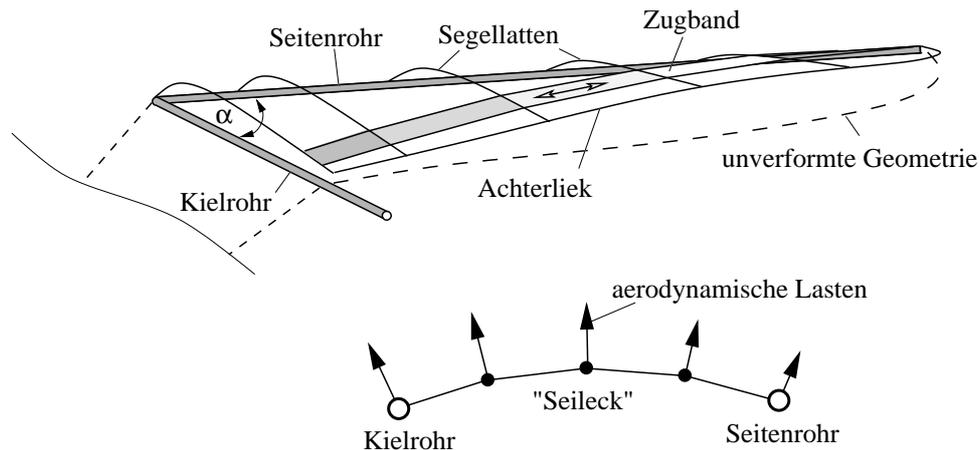


Abbildung 5.2: Ausbildung des Zugbandes

sem Grund wird auch das Strukturmodell auf ein Mittelflächenmodell reduziert, wodurch der teilweise dreidimensionale Flügel in eine reine Membranfläche übergeführt wird. In Abbildung 5.1 sind die Zusammenhänge dargestellt. Die Ersatzkontur kann beispielsweise durch die Verbindung der Mittelpunkte eingeschriebener Kreise konstruiert werden.

Diese strukturelle Vereinfachung kann damit gerechtfertigt werden, dass die Torsionssteifigkeit der Tragfläche in erster Linie von der globalen Membranspannung in Spannweitenrichtung in Kombination mit vertikalen Auslenkung der Membranfläche abhängt. In Abbildung 5.2 ist dieser Effekt skizziert. Die Segelspannung wird über den Winkel  $\alpha$  zwischen Seitenrohr und Kiehlrohr eingestellt. Die vorgespannte Membran, in Abbildung 5.2 durch das Modell eines Zugbandes gedanklich ersetzt, wird durch die aerodynamischen Lasten vertikal ausgelenkt und bildet einen Bogen (Seileck), der das Seitenrohr mit dem Kiehlrohr verbindet. Die Segellatten stützen sich an diesem Bogen ab und bilden die Knickpunkte. Der Bogen wird im Fachjargon auch als Tunnel bezeichnet und nimmt mit steigender Segelvorspannung ab. Für die Ausbildung des Tunnels ist die Segelspannung im hinteren Profilbereich (Hinterkantennähe) wichtiger als im vorderen Flügelbereich.

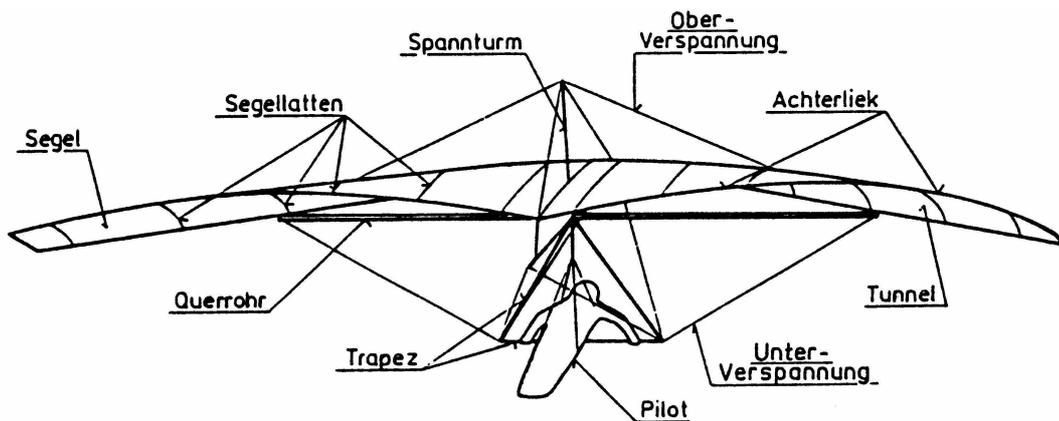


Abbildung 5.3: Schematischer Aufbau eines Hängegleiters (entnommen aus [28])

Die Segelröhre im dreidimensionalen Flügelabschnitt könnte zwar über Schubfluss ein Flügeltorsionsmoment übertragen, in der Realität ist die Segelvorspannung im Untersegel jedoch sehr gering und eine Faltenbildungen im Flug häufig zu beobachten. Damit kann in erster Näherung die zusätzliche Torsionssteifigkeit der dreidimensionalen Flügelbereiche vernachlässigt werden. Darüber hinaus verfügen ältere Baumuster ohnehin über rein zweidimensionale Segel, die durch das Mittelflächenmodell exakt abgebildet werden. In Abbildung 5.3 ist der schematische Aufbau eines Hängegleiters älterer Bauart dargestellt, der ohne Doppelsegel auskommt,

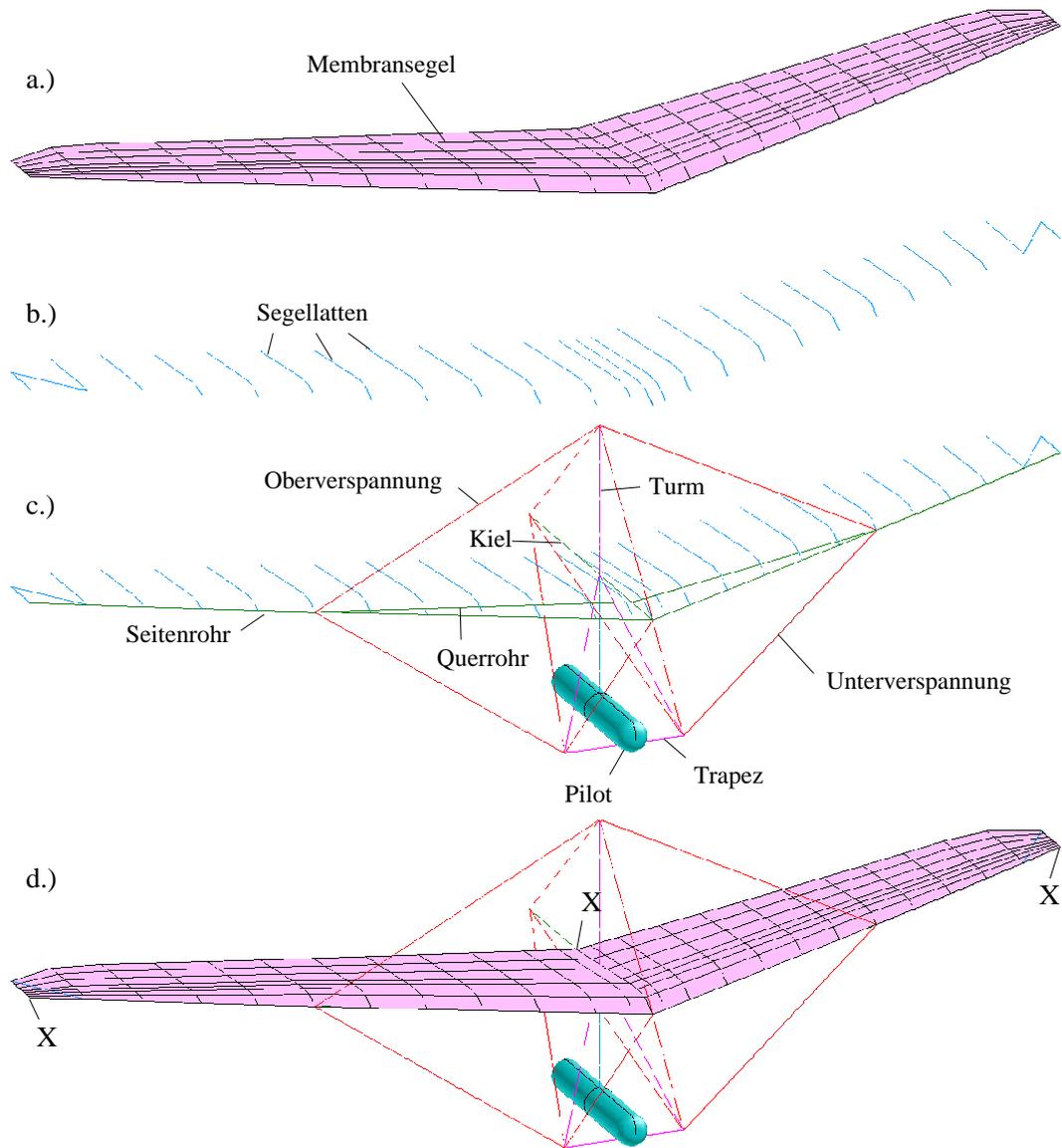


Abbildung 5.4: Analyse-Modell

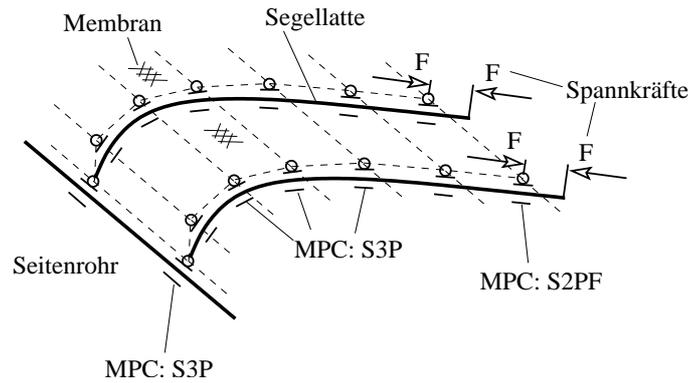


Abbildung 5.5: Koppelungen der Rippen

Tabelle 5.1: Definition der Membran

Spannweite	$b$	$10,4m$
Fläche	$F$	$13,9m^2$
Gesamtgewicht	$m$	$115kg$
Membransteifigkeit	$Eh$	$6,0 \cdot 10^5 [\frac{N}{m}]$
Membranvorspannung	$\varepsilon^V$	$0,0167\%$

Abbildung 5.4 zeigt das Analysemodell eines Hängegleiters. Der Abschnitt a.) stellt die Membranelemente der Tragfläche dar. Die Membranelemente sind mittels Slider-MPC's mit den Segellatten verbunden, die in Abschnitt b.) der gleichen Abbildung zu sehen sind. Die Segellatten wie auch das Membransegel sind wiederum mittels Slider-MPC's mit den Seitenrohren verbunden und können in Spannweitenrichtung gleiten. Die Segellatten verfügen am hinteren Ende (Achterliek) über Spannelemente, die eine konstante Vorspannung gewährleisten (S2PF). Eine schematische Darstellung der Slider-MPC's ist in Abbildung 5.5 zu sehen.

Das Membransegel ist mit den Endpunkten der Seitenrohre sowie mit dem Kiel fix verbunden. Diese Verbindungsstellen sind in Abbildung 5.4 Abschnitt d.) mit X gekennzeichnet. Die wesentlichen Daten des Modells sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Der Einfachheit wegen wurde das Segel als Membran mit isotropen Eigenschaften modelliert. Um die tatsächlichen Steifigkeitsverhältnisse eines Hängegleitersegels zu erfassen, müssten umfangreiche Versuche und Messungen durchgeführt werden, was allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Die gekoppelte Analyse wurde schließlich unter Annahme von Symmetrie mit einem Halb-

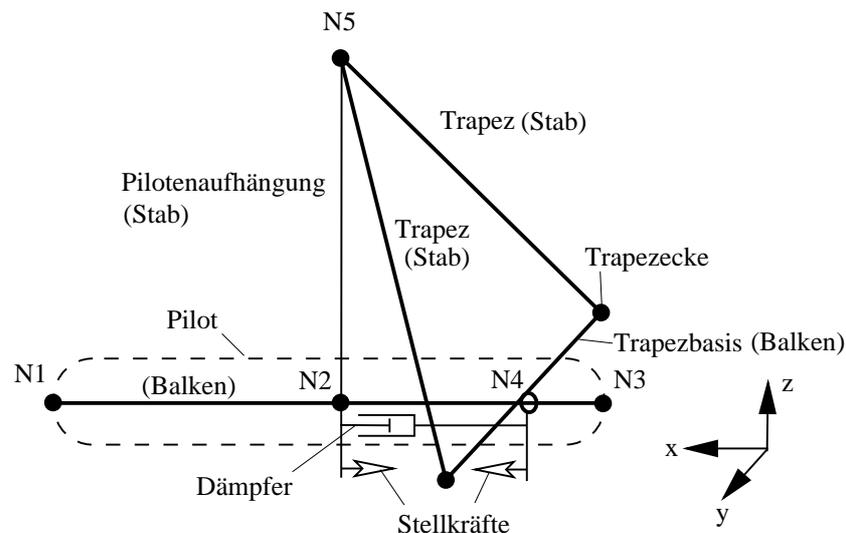


Abbildung 5.6: Gewichtsverlagerung

modell durchgeführt.

### 5.2.2 Pilot

Der Pilot wird durch zwei Balkenelemente mit entsprechender Massenbelegung modelliert und hängt an einem Stabelement (von  $N5$  nach  $N2$ ). Die Anordnung ist schematisch in Abbildung 5.6 dargestellt. Über einen Slider vom Typ  $S2PF$  ist der Pilot mit dem Mittelpunkt  $N4$  der Trapezbasis verbunden. Die Stellkräfte wirken in den Knoten  $N2$  und  $N4$ . Parallel dazu wirkt ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer, der die Pendelbewegung des Piloten dämpft. Der Pilot kann in diesem Modell in der Symmetrieebene frei pendeln.

### 5.2.3 Controller

Um das Flugverhalten des Hängegleiters zu simulieren, wurde ein einfacher PID-Regler in CARINA implementiert, mit dem vorgegebene Geschwindigkeitsprofile abgeflogen werden können. Die Steuerung erfolgt dabei, wie in der Realität, über die Gewichtsverlagerung des Piloten. Auf diese Art können beispielsweise Flugpolaren aufgenommen werden. Der Regelalgorithmus berechnet Geschwindigkeits- und Beschleunigungssollwerte. Die Abweichung zwischen Soll- und Ist-Werten werden über ein Integral-, ein Proportional- und ein Differentialglied erfasst. Die Formulierung wurde dabei [17] entnommen.

### 5.2.4 1DOF-Release

Neben der einfachen Geschwindigkeitsregelung musste ferner noch eine Prozedur entwickelt werden, die einen möglichst stationären Flugzustand zu Beginn der Analyse gewährleistet. Die Problematik liegt darin, dass die ersten Fluidanalysen an der undeformierten Geometrie durchgeführt werden. Das aerodynamische Zentrum (Punkt in dem die resultierenden Luftkräfte angreifen) liegt für die unverformte Geometrie deutlich hinter dem realen Massenmittelpunkt, und es entstehen starke negative Momente, die zu einer starken Nickbewegung des Hängegleiters führen. Um diese Nickbewegungen in der Startphase zu unterbinden, wird die Rotation eines Punktes der Struktur für einen kurzen Zeitraum unterdrückt, solange, bis sich die Tragfläche deformiert und sich eine realistische Druckverteilung ausgebildet hat.

## 5.3 Flugsimulation

### 5.3.1 Ablauf der Analyse

Der Hängegleiter wird mit einem bestimmten Anstellwinkel und einer Anfangsgeschwindigkeit gestartet. Der Nick-Freiheitsgrad ist jedoch zu Beginn noch gesperrt. In den folgenden Zeitschritten werden zunächst die künstlichen Membranstabilisierungskräfte und die Gleichgewichtskräfte der elastisch vordeformierten Seitenrohre sukzessive beseitigt. Anschließend werden simultan die Auftriebs- und die Gravitationskräfte schrittweise aktiviert. Sobald die vollen Auftriebskräfte erreicht sind, wird der Nickfreiheitsgrad freigegeben und der Hängegleiter bewegt sich nach rund 1.5 Sekunden völlig frei. Die maximale Zeitschrittweite der Analyse beträgt 0.05 Sekunden.

### 5.3.2 Instationäre Flugversuche

Zur Demonstration der Funktionsweise der instationären, simultanen Koppelung soll der zuvor beschriebene Hängegleiter zwei Testflüge absolvieren. Im ersten Flug wird die Geschwindigkeit langsam gesteigert, während sie im zweiten Flug reduziert wird.

In Abbildung 5.7 sind wichtige Kenndaten der Tests in vier Diagrammen zusammengefasst:

- *air speed*: Strömungsgeschwindigkeit, aufgetragen über der Flugdauer,

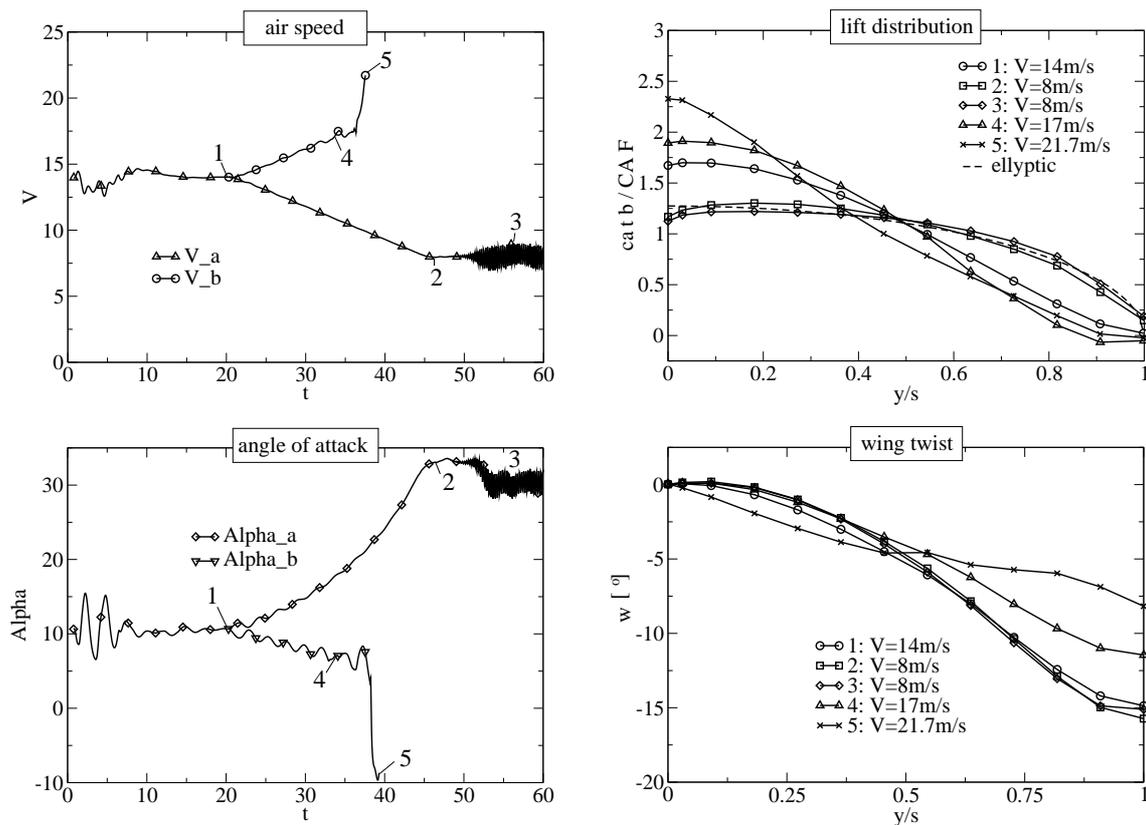


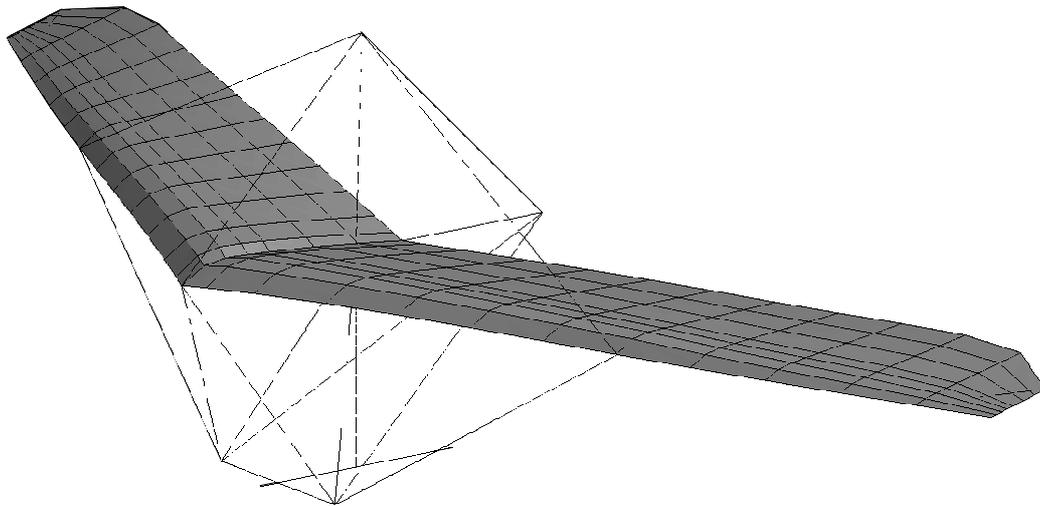
Abbildung 5.7: Testflug: a) Beschleunigung, b) Abbremsen

- *angle of attack:* Anstellwinkel, aufgetragen über der Flugdauer,
- *lift distribution:* Auftriebsverteilungen zu fünf ausgezeichneten Flugzuständen,
- *wing twist:* Flügelschubung zu fünf ausgezeichneten Flugzuständen.

Rund 15 Sekunden nach der Freisetzung wird eine annähernd stationäre Geschwindigkeit von rund  $14\text{ m/s}$  erreicht; siehe Diagramm *air speed* in Abbildung 5.7. Nach rund 20 Flugsekunden wird im Fall a) der Schwerpunkt nach vor und im Fall b) nach hinten verlagert.

### Beschleunigter Flug

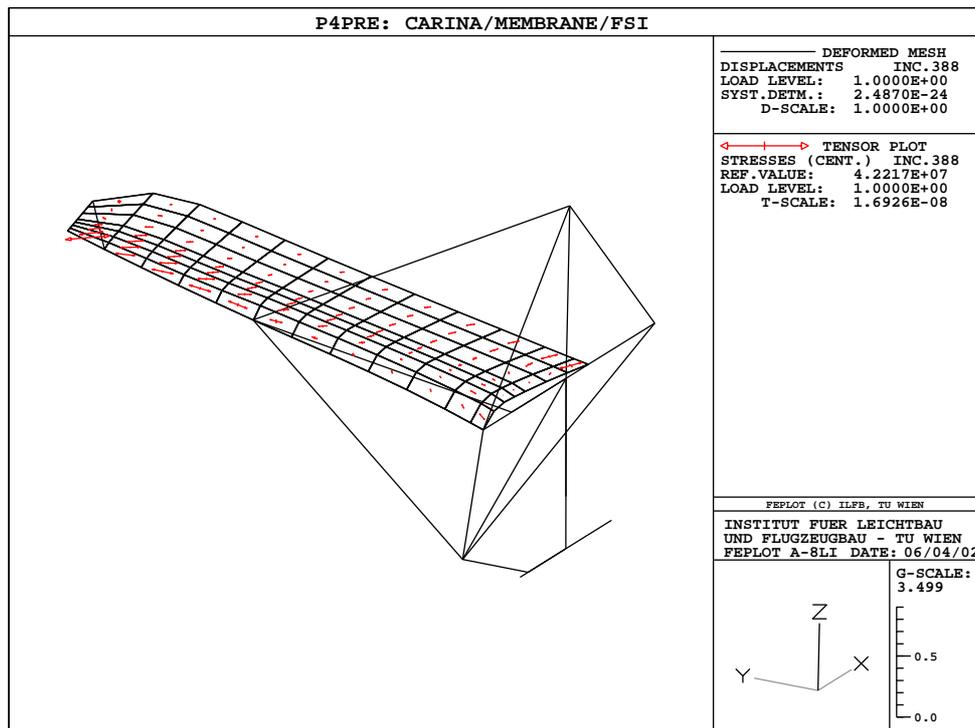
Wie bereits erwähnt, stellt sich nach rund 15 Sekunden eine nahezu konstante Flugeschwindigkeit ein. Diese Tatsache ist deswegen interessant, weil der Flügel ausschließlich Profile mit negativem Momentenbeiwert aufweist. Erst durch die elastische Deformation bzw. die Verwindung der Tragfläche ergibt sich im vorliegenden Fall ein flugfähiges Gerät,

Abbildung 5.8: Verformter Flügel bei  $V=14\text{m/s}$ 

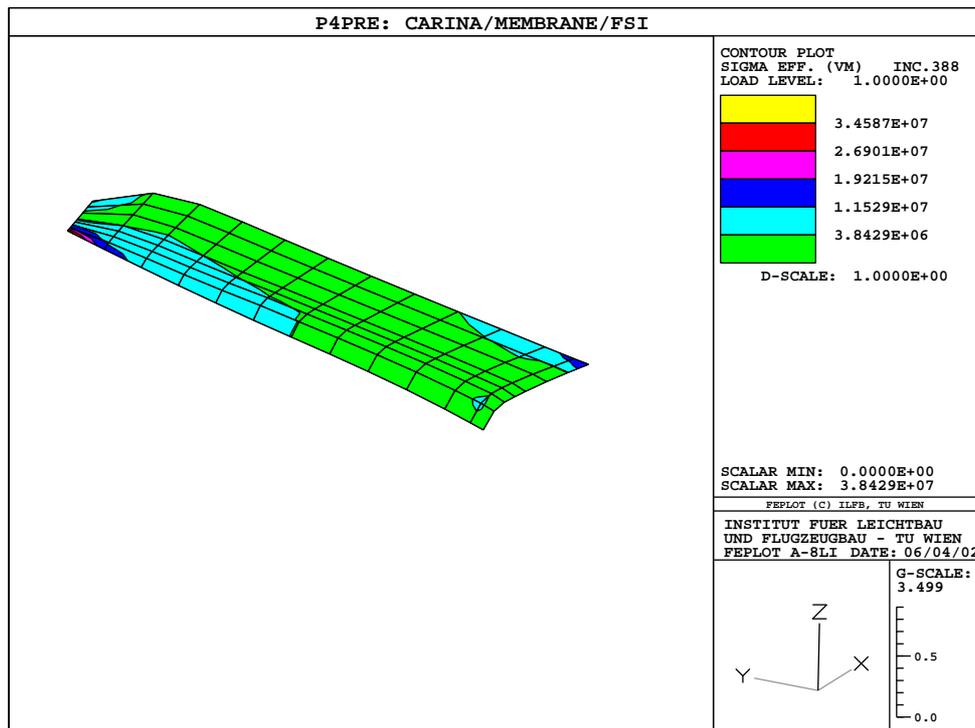
da die Verwindung zu einem aufrichtenden Nickmoment führt. In den Diagrammen *lift distribution* und *wing twist* sind die Auftriebsverteilung sowie die Flügelverwindung dargestellt. Die Kurven mit der Bezeichnung 1 sind für die Fluggeschwindigkeit von  $14\text{m/s}$  ermittelt worden. Die Flügelverwindung beträgt rund  $-15$  Grad (Winkel zwischen Wurzelrippe und Flügelende). Im Diagramm *lift distribution* ist die glockenförmige Auftriebsverteilung erkennbar, wobei die Flügelenden kaum Auftrieb liefern.

In der Abbildung 5.8 ist der verformte Flügel bei einer Geschwindigkeit von  $14\text{m/s}$  dargestellt. Die dabei auftretenden Spannungen in der isotropen Membran werden in den beiden folgenden Abbildungen gezeigt. Abbildung 5.9 stellt dabei die Cauchy-Spannungstensoren in den Elementmittelpunkten auf der verformten Geometrie dar. Aufgrund des verwendeten Faltenmodells nach *Roddeman*, (siehe dazu Abschnitt 3.2.4), können ausschließlich Zugspannungen in der Membran auftreten. Die höchsten Spannungen sind dabei am Flügelende zu beobachten, dort wo das Segel mit dem Seitenrohr fest verbunden wird, sowie im Bereich der Flügelhinterkante am Kiel. Eine deutlich geringere Segelspannung stellt sich entlang des Achterlieks im äußeren Flügelbereich und in der Flügelmitte im Bereich der Eintrittskante ein. Die Abbildung 5.10 zeigt die Vergleichsspannung nach v.Mises, wiederum auf der deformierten Membran abgebildet. Die eindimensionalen Elemente, wie Balken oder Stäbe, sind in dieser Darstellung nicht angeführt.

Bereits bei einer geringfügig höheren Geschwindigkeit von rund  $16\text{m/s}$  sind im Verlauf *air speed* Oszillationen erkennbar. Der Verlauf *angle of attack* zeigt in der gesamten Beschleunigung

Abbildung 5.9: Membranspannungen bei  $V=14\text{m/s}$ : Cauchy, Tensor

nigungsphase eine Schwingung, deren Amplitude zunächst konstant bleibt. Der Punkt 4 kennzeichnet einen Flugzustand bei rund  $17\text{m/s}$ . Die Flügelverwindung ist deutlich kleiner als bei  $14\text{m/s}$ . Trotzdem liefern die Flügelenden in diesem Zustand negativen Auftrieb. Die Ausbildung der glockenförmigen Auftriebsverteilung ist stärker ausgeprägt als bei  $14\text{m/s}$ . Nach rund 35 Flugsekunden fällt der Anstellwinkel jedoch schlagartig auf  $-10$  Grad ab (Punkt 5). Kurz bevor die Analyse abbricht, nimmt die Fluggeschwindigkeit stark zu. Es handelt sich dabei um einen Vorwärtsüberschlag des Hängegleiters. Der Grund für diese relativ niedrige kritische Geschwindigkeit liegt darin, dass der analysierte Hängegleiter ausschließlich Profile mit negativem Momentenbeiwert verwendet. Im Gegensatz dazu verfügen moderne Hängegleiter über Vorrichtungen, die auch im Schnellflug für eine ausreichende Nickstabilität sorgen. Bei zunehmender Fluggeschwindigkeit nimmt im untersuchten Fall die Schrängung (Flügelverwindung) und damit auch das aufrichtende Moment ab, während das durch die Profile erzeugte negative Nickmoment proportional zum Staudruck anwächst und schließlich das katastrophale Ereignis herbeiführt.

Abbildung 5.10: Membranspannungen bei  $V=14\text{m/s}$ : Cauchy, VonMises

### Verzögerter Flug

In den Diagrammen *air speed* und *angle of attack* stellt sich bis 20 Flugsekunden der gleiche Verlauf ein, wie beim beschleunigten Flug. Auch in diesem Fall sind Anstellwinkel-Schwankungen erkennbar, die jedoch mit abnehmender Fluggeschwindigkeit ebenfalls abnehmen. Punkt 2 der Kurve b) kennzeichnet eine Geschwindigkeit von rund  $8\text{m/s}$ . Der Anstellwinkel liegt dabei bei rund  $30$  Grad, was bei einem realen Fluid kaum noch möglich wäre, weil es bei so hohen Anstellwinkeln bereits zum Strömungsabriss kommt. Dieser Effekt kann jedoch mittels reibungsfreier Potentialströmung nicht erfasst werden. Die Flügelverwindung beträgt rund  $-16$  Grad. Trotz der hohen Verwindung stellt sich jedoch eine annähernd elliptische Auftriebsverteilung ein, die für einen Vergleich im Diagramm *lift distribution* strichliert eingetragen ist. Dieses Ergebnis bestätigt die exzellenten Langsamflugeigenschaften der Hängegleiter, die speziell beim Kreisen in den thermischen Aufwinden von Vorteil sind. Mit zunehmender Fluggeschwindigkeit bildet sich eine glockenförmige Verteilung aus, die sich in Bezug auf den induzierten Widerstand ungünstig auswirkt. Der Flugzustand im Punkt 2 bzw. Punkt 3 ist ferner auch deswegen interessant, weil er sich am Rande einer Instabilität befindet. Der Massenmittelpunkt der Struktur liegt sehr nahe

beim Neutralpunkt der Tragfläche, in dem die Änderungen der Auftriebskräfte angreifen. Das System befindet sich somit unmittelbar vor einem rückwärtigen Abkippen. In dieser Phase sind große Steuerkräfte notwendig, um den stationären Zustand beizubehalten. Die Verläufe für die Fluggeschwindigkeit bzw. den Anstellwinkel zeigen im Bereich von Punkt 3 hochfrequente Schwingungen. Sie stellen kein echtes aeroelastisches Flutterphänomen dar, sondern entstehen durch eine Interferenz des Reglers mit der ersten Biegeschwingung des Seitenrohres, das eine Eigenfrequenz von rund 4Hz aufweist. Somit wäre dieses Phänomen bei einem menschlichen Piloten nicht zu beobachten. Das Modell weist ferner eine sehr kleine strukturelle Dämpfung auf. Die Schwingungsamplituden werden im vorliegenden Fall nur durch das umgebende Fluid gedämpft.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Fluid-Struktur-Interaktion von membranartigen Tragflächen in stationärer und instationärer Potentialströmung. Dieses spezielle Problem der Aeroelastik spielt im Flug- und Segelsport eine bedeutende Rolle. Typische Vertreter sind dabei die Hängegleiter oder Boot- und Surfsegel.

Aufgrund numerischer Effizienz ist es sinnvoll die beiden physikalisch unterschiedlichen Problemstellungen mit verschiedenen Verfahren zu behandeln. Für die Analyse des dreidimensionalen Strömungsfeldes bietet sich ein Verfahren an, das mit einer Singularitätenbelegung (Wirbel bzw. Dipole) operiert. Das Strukturverhalten kann mittels der nichtlinearen Finite Elemente Methode erfasst werden. Bereits existierende Verfahren arbeiten nach diesem Prinzip, wobei die Strömung mit Wirbelleiterverfahren berechnet und die Koppelung der Modelle durch ein Austauschen von aerodynamischen Druckverteilungen bzw. Verschiebungsfeldern bewerkstelligt wird (iterative Koppelung).

Um in dieser Arbeit ein engeres Koppelschema zu verwirklichen, welches im Idealfall einer simultanen Lösung beider Teilprobleme nahekommt, wurde ein neuartiges Wirbelflächenverfahren mit dem Namen  $P_4$  entwickelt. Es kann als Wirbel-Panel-Verfahren charakterisiert werden. Innerhalb der Panele (Elementarflügel) wird die Wirbeldichte in Spannweitenrichtung quadratisch und in Flügeltiefenrichtung linear interpoliert. Das Verfahren kann nichtlineare Effekte im Sinne der Tragflügeltheorie und instationäre Strömungen erfassen. Eine Besonderheit stellt die Ermittlung des induzierten Widerstandes dar, der am Ort der Tragfläche berechnet wird und somit auch für instationäre Zustände bestimmt wer-

den kann. Aufgrund der quadratischen Interpolationsordnung innerhalb der Panele kommt das Verfahren mit relativ groben Analysenetzen aus. Damit wird es möglich, für beide Teilprobleme (Fluid und Struktur) die gleiche Diskretisierung zu verwenden. Diese Tatsache hat auf die Formulierung der Koppelung ebenfalls positive Auswirkungen. Durch eine numerisch effiziente Prozedur können von  $P_4$  nicht nur der für die FEM-Analyse benötigte aerodynamische Lastvektor sondern auch die aerodynamische Laststeifigkeits- und Dämpfungsmatrix berechnet werden. Letztere beschreiben die Änderung der aerodynamischen Lasten zufolge einer Verschiebung bzw. einer Geschwindigkeitsänderung und beschreiben damit das um einen Flugzustand linearisierte Strömungsverhalten. Diese Daten können für unterschiedliche Formulierungen der Fluid-Struktur-Interaktion verwendet werden. Die oben erwähnte iterative Koppelung ist dabei ebenso möglich, wie eine simultane Lösung, wobei mit vollbesetzten, nichtsymmetrischen Matrizen operiert wird. Die Erweiterung auf instationäre gekoppelte Probleme erforderte eine Zweischritt-Strategie, die aus einem Prediktor-Step für den Strömungszustand des nächsten Zeitschrittes und einer Korrektur besteht.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Formulierung geeigneter Finiten Elemente zur Modellierung von Membranflügeln, die über Balken und Stabelemente unter Spannung gehalten werden (Hängegleiter). Die Membran wird dabei durch Elemente mit vier Knoten und reiner Membransteifigkeit diskretisiert. Zwei unterschiedliche Faltenmodelle zur Berücksichtigung lokaler Faltenbildung wurden implementiert, die die Ausbildung von Druckspannungen unterbinden. Ein Modell stellt dabei eine Neuentwicklung dar, welche eine effiziente Analyse isotroper Membrane erlaubt. Spezielle Algorithmen zur Stabilisierung und Vorspannung mussten dabei entwickelt werden. Ein Hermite'sches Balkenelement wurde für große Rotation und elastischer Vorkrümmung formuliert und ermöglicht eine realistische Modellierung vorgespannten Membrantragflächen. Gleitbewegungen zwischen dem Segel und den Rippen (Balken) werden durch spezielle Koppelbedingungen verwirklicht, die auch als mechanische Spannelemente eingesetzt werden können.

Die Zeitintegration des instationären gekoppelten Problems erfolgt mithilfe eines impliziten Integrationsschemas (Newmark). Im Zusammenhang mit den Faltenalgorithmen der Membranelemente musste eine numerische Dämpfung eingeführt werden, die unphysikalische Schwingungen in der Membranfläche erfolgreich unterdrückt.

Die Ergebnisse der einzelnen Entwicklungsschritte werden mit Lösungen anderer Verfahren verglichen und zeigen gute Übereinstimmung. Dies betrifft primär die stationäre und instationäre Aerodynamik sowie die stationäre Fluid-Struktur-Interaktion. Schließlich werden

alle in dieser Arbeit entwickelten und implementierten Prozeduren zur Simulation eines frei fliegenden Hängegleiters eingesetzt und einige Aspekte der Aerodynamik und Stabilität diskutiert. Diese Form der Flugsimulation eines Hängegleiters hat ebenfalls Neuheitswert.

## 6.2 Ausblick

Es existiert eine Reihe von Möglichkeiten zur Weiterentwicklung des in der vorliegenden Arbeit präsentierten Verfahrens.

Der interessanteste Aspekt, der zur Zeit vernachlässigt wird, betrifft Reibungseinflüsse. Dies könnte in unterschiedlicher Komplexität realisiert werden. Die einfachste Variante bestünde darin, an verschiedenen Positionen der Tragfläche Druckverläufe zu bestimmen und damit abschnittsweise die Grenzschicht und Reibungskräfte zu berechnen. Die Rückwirkung auf die Lösung der reibungsfreien Strömung könnte in erster Näherung vernachlässigt werden.

Eine aufwändige, aber vielversprechende Variante wäre die Berechnung der dreidimensionalen Grenzschicht mittels einer Integralformulierung. Dabei wird die Grenzschicht durch über die Dicke integrierte Größen beschrieben. Die Aufdickung der Grenzschicht wird durch eine Queldichtebelegung der Tragfläche und einen damit verbundenem Ausblasvorgang erreicht. Dieses Verfahren existiert bereits für starre Flügelstrukturen. Die Kombination mit einer flexiblen Membran wäre eine Herausforderung, da sowohl die Strömung als auch die Struktur durch nichtlineares Verhalten gekennzeichnet werden.

Das derzeitige Verfahren wurde für nichtlineares Strukturverhalten konzipiert. Es sind keine direkten Methoden zum Aufspüren von klassischen aeroelastischen Instabilitätsformen, wie statische Divergenz, Ruderumkehr oder Flattern im verwendeten FEM-Programm implementiert. Eine diesbezügliche Erweiterung würde das Einsatzspektrum des Verfahrens deutlich vergrößern. Die statische Divergenz sowie die Ruderumkehr wäre mit der aeroelastischen Laststeifigkeitsmatrix bereits behandelbar. Der verwendete FEM-Code verfügt allerdings noch nicht über einen Eigenwertlöser für unsymmetrische, vollbesetzte Matrizen. Für klassische Flatteranalysen wären zusätzliche Erweiterungen erforderlich, da sie im Frequenz- und nicht im Zeitbereich durchgeführt werden. Der erste Schritt bestünde in der Implementierung eines Verfahrens zur Berechnung der Schwingmodi und Eigenfrequenzen der Struktur. Für diese verschiedenen Schwingmodi könnten abhängig von Luftdichte und Fluggeschwindigkeit die harmonischen Luftkräfte bestimmt, und schließlich die Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt werden. Zur Ermittlung der harmonischen Luftkräfte in  $P_4$  müssten dabei im Zeitbereich einige Schwingspiele durchlaufen werden, um die ent-

sprechenden modalen Werte ermitteln zu können.

# Literaturverzeichnis

- [1] (1997). *Input Description for the Finite Element Research Code CARINA, Version 2.01*. Institute of Lightweight Structures and Aerospace Engineering, Vienna University of Technology.
- [2] (1998). *ABAQUS Theory Manual, Version 5.8*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.
- [3] (2002). Lapack-linear algebra package, user guide. Internet address: <http://www.netlib.org/lapack/>.
- [4] Argyris, J. and Mlejnek, H.-P. (1986). *Die Methode der Finiten Elemente*, Band 1-3. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [5] Bathe, K.-J. (1990). *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag.
- [6] Beitz, W. and Küttner, K.-H. (eds.) (1990). *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, Berlin, 17. Auflage.
- [7] Chung, J. and Hulbert, G. (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics* **60**, pp. 371–375.
- [8] Contri, P. and Schrefler, A. (1988). A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model. *Communications In Applied Numerical Methods* **4**, pp. 5–15.
- [9] Dowell, E., Curtis Jr., H., Scanlan, R. and Sisto, F. (1989). *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers.
- [10] Försting, H. (1974). *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer-Verlag.
- [11] Geißler, W. (1993). Verfahren der instationären aerodynamik. Technical Report DLR-FB 93-21, DLR, Institut für Strömungsmechanik, Göttingen.

- [12] Gruber, P. M. (1994/95). *Vorlesungsbehef zur Vorlesung: Mathematik 1*. Institute of Analysis and Technical Mathematics, Vienna University of Technology.
- [13] Hofman, T. J. (1992). *Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie*. Ph.D. thesis, Universität Stuttgart.
- [14] Horten, R. and Selinger, P. F. (1987). *Nurflügel*. H. Weishaupt, Graz.
- [15] Hortsman, K.-H. (1987). *Ein Mehrfach-Traglinienverfahren und seine Anwendung für Entwurf und Nachrechnung nichtplanarer Flügelanordnungen*. DFVLR-FB 87-51.
- [16] Jackson, P. and G.W., C. (1987). Numerical analysis of three-dimensional elastic membrane wings. *AIAA J.* **25**(5), pp. 676–682.
- [17] Jörgl, H. P. (1993). *Repetitorium Regelungstechnik*. Oldenbourg, Wien.
- [18] Keune, F. and Burg, K. (1975). *Singularitätenverfahren der Strömungslehre*. G. Braun, Karlsruhe.
- [19] Lamar, J. E. and Gloss, B. B. (1985). Subsonic aerodynamic characteristics on interacting lifting surfaces with separated flow around sharp edges predicted by a vortex lattice method. Technical Report, NASA TN D-7921.
- [20] Laschka, B. (1963). Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallanströmung. *Zeitschrift für Flugwissenschaften* **7**, pp. 265–292.
- [21] Lippisch, A. (1976). *Ein Dreieck fliegt*. Motorbuch Verlag, Stuttgart.
- [22] Milewski, W. M. (1997). *Three-Dimensional Viscous Flow Computations Using the Integral Boundary Layer Equations Simultaneously Coupled with a Low Order Panel Method*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [23] Miller, R. and Hedgepeth, J. (1982). An algorithm for finite element analysis of partly wrinkled membranes. *AIAA J.* **20**(12), pp. 1761–1763.
- [24] Miller, R., Hedgepeth, J., Weingarten, V., Das, P. and Kahyai, S. (1985). Finite element analysis of partly wrinkled membranes. *Computers & Structures* **20**(1-3), pp. 631–639.
- [25] Mracek, C., Kim, M. and Mook, D. (1992). Three-dimensional potential flows by a vorticity-panel method. *Computers & Fluids* **21**(1), pp. 31–42.

- [26] Mracek, C. P. (1988). *A Vortex Panel Method for Potential Flows*. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [27] Nickel, K. (1987). A theory of sail-wings. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung* **11**, pp. 321–328.
- [28] Nickel, K. and Wohlfahrt, M. (1990). *Schwanzlose Flugzeuge*. Birkhäuser Verlag, Berlin.
- [29] Press, W., Vetterling, W., Teukolsky, S. and Flannery, B. (1992). *Numerical Recipes in Fortran, Second Edition*. Cambridge University Press.
- [30] Rammerstorfer, F. (1988). *Vorlesungsbehef zur Vorlesung: Nichtlineare Finite Elemente Methoden*. Institute of Lightweight Structures and Aerospace Engineering, Vienna University of Technology.
- [31] Rammerstorfer, F. (1992). *Repetitorium Leichtbau*. R.Oldenbourg Verlag.
- [32] Rammerstorfer, F. (1999). *Vorlesungsbehef zur Vorlesung: Grundzuge Finite Elemente und andere Numerische Ingenieurs Methoden*. Institute of Lightweight Structures and Aerospace Engineering, Vienna University of Technology.
- [33] Roddeman, D. (1991). Finite-element analysis of wrinkling membranes. *Communications in Applied Numerical Methods* (7), pp. 299–307.
- [34] Schlichting, H. and Truckenbrodt, E. (1967). *Aerodynamik des Flugzeuges*, Band 1 und 2, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, zweite neubearbeitete Auflage.
- [35] Schneider, W. (1978). *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig.
- [36] Schoop, H., Bessert, N. and Taenzer, L. (1998). On the elastic membrane in a potential flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **41**(2), pp. 271–291.
- [37] Taenzer, L. (1997). *Strukturdynamische Modellierung und statische Berechnung von Segelkonstruktionen*. Ph.D. thesis, TU-Berlin.
- [38] Wood, W., Bossak, M. and Zienkiewicz, O. (1980). An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **15**, pp. 1562–1566.

- [39] Wu, C. (1978). Nonlinear wrinkling of nonlinear membranes of revolution. *Journal of Applied Mechanics* **45**, pp. 533–538.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

<b>Name</b>	Nikolaus Friedl
<b>Geburtsdatum</b>	26. Mai 1968
<b>Geburtsort</b>	Wien, Alsergrund
<b>Staatsbürgerschaft</b>	österreichisch
<b>Eltern</b>	Priscilla Friedl (geb. Holmes), Dr. Guido Friedl
<b>Familienstand</b>	Lebensgemeinschaft mit Dr. Farah Faseli, zwei Kinder

## Ausbildung

<b>1974-78</b>	Volkschule in Wien und Bad Hofgastein
<b>1978-86</b>	Neusprachliches Gymnasium in St.Johann i.Pg.
<b>1986-93</b>	Studium des allgemeinen Maschinenbaus an der Technischen Universität Wien
<b>1997-</b>	Doktoratsstudium an der Technischen Universität Wien

## Beruflicher Werdegang

<b>1986-93</b>	diverse Ferialpraktika
<b>1992-93</b>	Präsenzdienst beim Bundesheer
<b>1993-95</b>	freier Mitarbeiter der Siemens-SGP-Verkehrstechnik in Wien
<b>1995-97</b>	Anstellung bei Siemens-SGP-Verkehrstechnik in Wien
<b>1997-2002</b>	Universitätsassistent am Institut für Leichtbau und Flugzeugbau der Technischen Universität Wien
<b>seit August 2002</b>	im Bereich numerischer Simulation selbständig tätig

