

## DISSERTATION

# Ebene turbulente Trennschichten zwischen ungestörten Parallelströmungen mit kleinen Geschwindigkeitsunterschieden

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

o.Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Wilhelm Schneider  
am Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenbau

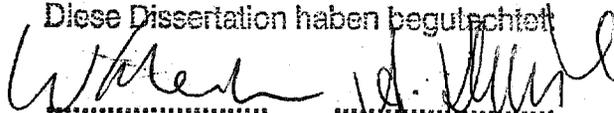
von

Dipl.-Ing. Harald Schmidt  
Matr.-Nr.: 9025406  
Waldmüllergasse 24/21, 1200 Wien

Wien, 3. Mai 2004



Diese Dissertation haben begutachtet



828.760 II

## Kurzfassung

Konventionelle Methoden der Beschreibung der ebenen turbulenten Trennschicht führen zumindest an einem der beiden Ränder auf eine nicht verschwindende, konstante Quergeschwindigkeit. Daher werden Störungen in der die Trennschicht umgebenden Potentialströmung induziert. K. Mörwald [19] hat festgestellt, dass keine Lösung für die zugehörige Potentialströmung existiert. Über ein analoges Problem der Nicht-Existenz einer Lösung der induzierten Zuströmung berichtet G.I. Taylor [33] für den auftriebserzeugten turbulenten Freistrahle. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob dieses Paradoxon aufgelöst werden kann, indem man nach Lösungen für die Trennschicht sucht, die auf beiden Seiten der Trennschicht kein Einströmen in die Querrichtung ergeben. Den Untersuchungen sind die Reynoldsschen Gleichungen zugrunde gelegt. Zwei verschiedene Turbulenzmodelle, nämlich ein Eingleichungsmodell und ein vereinfachtes Reynoldsspannungstransportmodell, werden auf ihre Tauglichkeit geprüft. Um die Rechnung zu vereinfachen und die Interpretation der Ergebnisse zu erleichtern, wird eine reguläre asymptotische Entwicklung nach kleinen Unterschieden zwischen den Zuströmgeschwindigkeiten durchgeführt. Es stellt sich heraus, dass das Eingleichungsmodell ungeeignet ist, während das Reynoldsspannungstransportmodell Lösungen zulässt, wenn die empirischen Parameter eine bestimmte Bedingung erfüllen. Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt, dass nicht alle berechneten Größen mit den gemessenen in Einklang gebracht werden können. Auch die Betrachtung schwacher Abweichungen von der klassischen Ähnlichkeitsstruktur führt nicht zur Auflösung des Paradoxons, denn als einziger lösbarer Sonderfall ergibt sich die klassische Ähnlichkeitsstruktur.

## Abstract

As a result of conventional approaches for describing plane turbulent mixing layers, there are non-vanishing constant lateral velocity components at least at one edge of the mixing layer. This induces perturbations in the incident potential flow. However, as observed by K. Mörwald [19], a solution to this potential-flow problem does not exist. An analogous problem of non-existence of an induced flow solution has been observed previously by G. I. Taylor [33] for plane turbulent plumes. In this work it is investigated whether it is possible to resolve the paradox by searching for mixing-layer solutions that are characterized by vanishing lateral velocities at both edges. The Reynolds-averaged equations of motion are taken as the basic equations, and two different turbulence models, i.e. an one-equation model and a simplified Reynolds-stress transport model, respectively, are tested for their suitability. To simplify the analysis, an asymptotic expansion in terms of small differences between the incident-flow velocities is performed. It turns out that the one-equation model is insufficient, whereas the Reynolds-stress transport model allows solutions provided a certain relationship between the empirical parameters is satisfied. The results of the analysis are compared with experimental data, showing not every physical component is in accordance. Furthermore the examination of weak deviations of the classical similar solution does not give a resolution to the problem, because the only solvable special case is the classical similar solution itself.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundgleichungen</b>	<b>5</b>
2.1 Bewegungsgleichungen . . . . .	5
2.2 Turbulenzmodelle . . . . .	6
2.2.1 $k$ -Gleichungsmodell . . . . .	6
2.2.2 Reynoldsspannungstransportmodell . . . . .	8
2.3 Grenzschicht-Approximationen . . . . .	10
2.3.1 Grenzschicht-Approximation der Bewegungsgleichungen . . . . .	10
2.3.2 Grenzschicht-Approximation der Turbulenzmodellgleichungen . . . . .	11
2.3.2.1 $k$ -Gleichungsmodell . . . . .	11
2.3.2.2 Reynoldsspannungstransportmodell . . . . .	12
<b>3 Lösungen der vollständigen Bewegungsgleichungen</b>	<b>15</b>
3.1 Selbstähnlichkeit . . . . .	15
3.2 Randbedingungen . . . . .	17
3.3 Numerische Lösung der vollständigen Bewegungsgleichung mit der $k$ -Gleichung als Turbulenzmodell . . . . .	17
3.3.1 Bewegungsgleichung und $k$ -Gleichung in Zylinderkoordinaten . . . . .	18
3.3.2 Entwicklung in der Nähe des Randes . . . . .	19
3.3.3 Numerische Lösung für $\delta = 0.7$ . . . . .	24
<b>4 Entwicklung für kleine Unterschiede der Zuströmgeschwindigkeiten</b>	<b>30</b>
4.1 Impulssatz . . . . .	30
4.2 Koordinatenstreckung und Störungsansatz . . . . .	31
4.3 Entwicklung der Randbedingungen . . . . .	32
4.4 Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichung mit $k$ -Transportgleichung . . . . .	33
4.5 Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichungen mit Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschicht-Approximation . . . . .	36
4.5.1 Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschicht-Approximation . . . . .	36
4.5.2 Ergebnisse der Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichungen . . . . .	37
4.5.3 Vergleich mit Experimenten . . . . .	42
4.6 Modifizierter Störungsansatz . . . . .	50
4.7 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	53

<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>55</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>59</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>61</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Skizze der ebenen turbulenten Trennschicht . . . . .	1
3.1	Skizze der ebenen turbulenten Trennschicht; kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten . . . . .	15
3.2	Lösungszweige für $\bar{u}_r$ in der Nähe des Randes; $c_r c_\mu = 0.0048$ , $c_D/c_r = 16.6$ , $\sigma_k = 2.2$ , $\vartheta_1 = 2.19^\circ$ . . . . .	21
3.3	Lösungszweige für $\bar{u}_\vartheta$ in der Nähe des Randes; $c_r c_\mu = 0.0048$ , $c_D/c_r = 16.6$ , $\sigma_k = 2.2$ , $\vartheta_1 = 2.19^\circ$ . . . . .	21
3.4	$k$ in der Nähe des Randes; $c_r c_\mu = 0.0048$ , $c_D/c_r = 16.6$ , $\sigma_k = 2.2$ , $\vartheta_1 = 2.19^\circ$ . . . . .	22
3.5	Linien konstanter Werte des Koeffizienten $\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{d^2 \bar{u}_{\vartheta,2}}{d\Delta^2} \Big _0$ der Ordnung $O(\Delta^2)$ der Entwicklung von $\bar{u}_\vartheta$ in der Nähe des Randes abhängig von $\sigma_k$ und $c_r c_\mu$	23
3.6	Linien konstanter Werte des Koeffizienten $\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{d^3 \bar{u}_{\vartheta,2}}{d\Delta^3} \Big _0$ der Ordnung $O(\Delta^3)$ der Entwicklung von $\bar{u}_\vartheta$ in der Nähe des Randes abhängig von $\sigma_k$ und $c_r c_\mu$	24
3.7	$\bar{u}$ -Komponente des numerisch ermittelten Geschwindigkeitsprofils ( $\delta = 0.7$ , $cc_\mu = 0.004665$ , $c_D/c = 1.715$ , $\sigma_k = 2.2$ ) im Vergleich mit experimentellen Daten (Rodi[25]) . . . . .	25
3.8	Numerische ermittelte turbulente kinetische Energie $k$ ( $\delta = 0.7$ , $cc_\mu = 0.004665$ , $c_D/c = 1.715$ , $\sigma_k = 2.2$ ) im Vergleich mit experimentellen Daten (Rodi[25]) . . . . .	26
3.9	$\bar{v}$ -Komponente des numerisch ermittelten Geschwindigkeitsprofils; $\delta = 0.7$ , $cc_\mu = 0.004665$ , $c_D/c = 1.715$ , $\sigma_k = 2.2$ . . . . .	27
3.10	Bilanz der turbulenten kinetischen Energie $k$ ; $\delta = 0.7$ , $cc_\mu = 0.004665$ , $c_D/c = 1.715$ , $\sigma_k = 2.2$ . . . . .	28
4.1	Parameterbereich empirischer Konstanten des Reynoldsspannungstransportmodells in Grenzschichtapproximation für Lösungen ohne laterales Einströmen auf beiden Seiten der Trennschicht; Punkt und Unterstrich kennzeichnen die Standardwerte (vgl. Rodi [26]) . . . . .	38
4.2	Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der Stromfunktion $F(\bar{\eta})$ ; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	40
4.3	Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der Ableitung der Stromfunktion $F'(\bar{\eta})$ ; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	40
4.4	Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der zweiten Ableitung der Stromfunktion $F''(\bar{\eta})$ ; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	41
4.5	Linien konstanter Werte des Öffnungswinkels $\Delta\bar{\eta}^{(0)}$ in führender Ordnung abhängig von den Modellkonstanten . . . . .	42
4.6	Linien konstanter Werte der Maxima der turbulenten Scheinschubspannungen $\frac{\overline{u^* v^*}^{(0)}_{\max}}{(U_1^* - U_2^*)^2}$ in führender Ordnung abhängig von den Modellkonstanten . . . . .	43
4.7	Maxima der Reynoldsschen Schubspannungen in Abhängigkeit von $\delta$ ; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	44
4.8	Öffnungswinkel für 95% der Anströmungsgeschwindigkeit; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	45

4.9	Öffnungswinkel für 90% der Anströmungsgeschwindigkeit; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ . . . . .	45
4.10	Scheinschubspannung; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ , $\delta = 0.2$ . . . . .	47
4.11	Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung; $c_1 = 0.8$ , $c_2 =$ $0.63$ , $c/c_D = 4$ , $\delta = 0.25$ . . . . .	47
4.12	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D =$ $4$ , $\delta = 0.2$ . . . . .	48
4.13	Reynoldssche Normalspannungen; experimentelle Daten aus Pui [23]; $\delta =$ $0.25$ . . . . .	49
4.14	Reynoldssche Normalspannungen; $c_1 = 0.8$ , $c_2 = 0.63$ , $c/c_D = 4$ , $\delta = 0.25$	49

## Lateinische Symbole

$b$	Breite der Trennschicht
$c$	Parameter zur Modellierung von $l$
$c_D$	Dissipationsparameter
$c_s$	Diffusionsparameter im Reynoldsspannungstransportmodell
$c_1$	1. Parameter der Druckscherkorrelation im Reynoldsspannungstransportmodell
$c_2$	2. Parameter der Druckscherkorrelation im Reynoldsspannungstransportmodell
$F = \frac{\psi}{x}$	Stromfunktion
$k$	turbulente kinetische Energie
$l$	turbulentes Integral-Längenmaß
$\bar{p}$	mittlerer Druck
$U_1, U_2$	Anströmgeschwindigkeiten
$\bar{u}$	mittlere Geschwindigkeit in $x$ -Richtung
$\overline{u'v'}$	kinematische Reynoldssche Schubspannung in der $xy$ -Ebene
$\overline{u'^2}$	kinematische Reynoldssche Normalspannung in $x$ -Richtung
$\overline{u'w'}$	kinematische Reynoldssche Schubspannung in der $xz$ -Ebene
$\bar{v}$	mittlere Geschwindigkeit in $y$ -Richtung
$\overline{v'^2}$	kinematische Reynoldssche Normalspannung in $y$ -Richtung
$\overline{v'w'}$	kinematische Reynoldssche Schubspannung in der $yz$ -Ebene
$\bar{w}$	mittlere Geschwindigkeit in $z$ -Richtung
$\overline{w'^2}$	kinematische Reynoldssche Normalspannung in $z$ -Richtung

## Griechische Symbole

$\alpha, \beta$	Eigenwerte
$\gamma$	
$\delta = \frac{U_1 - U_2}{U_1}$	Entwicklungsparameter (relatives Geschwindigkeitsverhältnis)
$\varepsilon$	turbulente Dissipation
$\eta$	Ähnlichkeitsvariable für lineares Breitenwachstum
$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\delta}$	gestreckte Ähnlichkeitsvariable für lineares Breitenwachstum
$\nu_t$	turbulente Scheinviskosität
$\xi$	Ähnlichkeitsvariable für nicht lineares Breitenwachstum
$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\delta}$	gestreckte Ähnlichkeitsvariable für nicht lineares Breitenwachstum
$\rho$	Dichte
$\sigma_0$	Kerwert des Anstiegs der Trennschicht für $U_2 = 0$
$\sigma_k$	Diffusionsparameter im $k$ -Gleichungsmodell

Dimensionsbehaftete Größen werden mit einem hochgestellten Stern gekennzeichnet (z.B.  $k^*$ ).

# 1 Einleitung

Eine halbunendliche Platte trennt zwei Parallelströmungen mit den Geschwindigkeiten  $U_1^*$  und  $U_2^*$  voneinander. Ein kartesisches Koordinatensystem wird derart gewählt, dass der Ursprung mit der Hinterkante der Platte zusammenfällt. Experimente (vgl. z. B. Mehta und Westphal [17] oder Pui und Gartshore [23]) zeigen, dass das Problem in guter Näherung als zweidimensional angesehen werden kann. Effekte, die von den Rändern der Platte herrühren könnten, werden in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht. Die Ausdehnung in  $z$ -Richtung wird nicht berücksichtigt und das Problem als eben behandelt. Stromabwärts bildet sich zwischen den beiden Anströmgeschwindigkeiten ein zeitlich gemittelt Geschwindigkeitsprofil, das durch die longitudinale Komponente  $\bar{u}^*$  und die laterale Komponente  $\bar{v}^*$  beschrieben wird. Da das von den beiden Rändern begrenzte Gebiet in der vorliegenden Arbeit stets als turbulent angenommen wird, bezeichnet der Querstich über einem Symbol zeitlich gemittelte Größen.

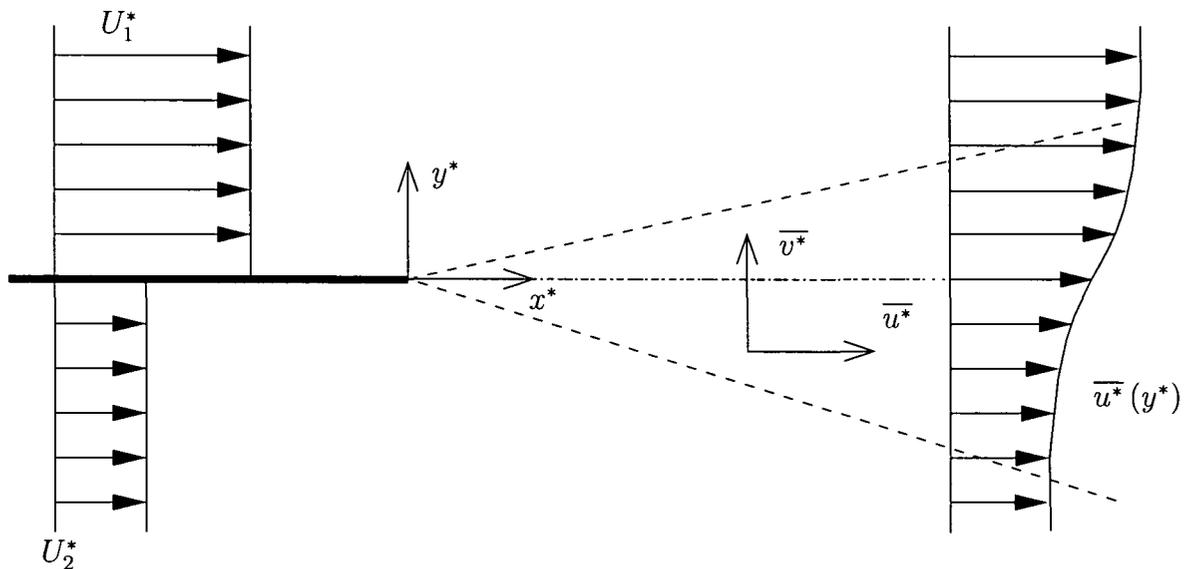


Abbildung 1.1: Skizze der ebenen turbulenten Trennschicht

Abbildung 1 zeigt eine Skizze der ebenen turbulenten Trennschicht, wobei  $\bar{u}^*(y^*)$  den qualitativen Verlauf der Geschwindigkeitskomponente in die Hauptströmungsrichtung an einer bestimmten Stelle  $x^*$  andeutet. Im Gegensatz zu experimentellen Untersuchungen, bei denen die Trennschicht aus praktischen Gründen immer von Wänden umgeben ist, wird hier deren Einfluss nicht berücksichtigt unter der Annahme, dass begrenzende Wände sehr weit entfernt sind. Außerdem ist  $\bar{u}^*(y^*)$  die dominante Geschwindigkeitskomponente, daher gehört die ebene turbulente Trennschicht zu den sogenannten turbulenten freien Scherschichten, wie z. B. der Freistrahle, der Auftriebsstrahl, die Strahlrandströmung und der Nachlauf (vgl. Gersten und Herwig [7, S. 724], Schlichting und Gersten [30, S. 652] und Mörwald [19]). Relativ frühe Messungen von Reichhardt [24] sowie neuere Messungen wie zum Beispiel von Bell und Mehta [4] bestätigen die dimensionsanalytische Überlegung, dass die Breite der Trennschicht linear mit dem Abstand von der

Hinterkante wächst.

Die Behandlung dieses Problems wurde schon sehr früh von Tollmien [36] vorgenommen. Er legte seinen Berechnungen die Grenzschichtgleichung [22, S. 575-584] und den Mischungswegansatz [20] von Prandtl zugrunde, allerdings nicht in der in Abbildung 1 skizzierten Allgemeinheit, sondern unter der Annahme  $U_2^* = 0$ . Der Grund, weshalb heute noch im Allgemeinen die Grenzschichtgleichung zur Lösung von turbulenten freien Scherschichten verwendet wird, ist im empirischen Befund zu suchen, dass diese schlank sind, vgl. Schneider [32] und Gersten und Herwig [7, S. 723]. Später verwendete Görtler [8] Prandtls Idee des Austauschansatzes [21] um eine allgemeine Lösung des Problems für beliebige Anströmgeschwindigkeiten  $U_1^*$  und  $U_2^*$  anzugeben. Aber Görtler musste eine willkürliche Wahl treffen, nämlich  $\bar{u}^*(0) = (U_1^* + U_2^*)/2$ , um die sonst unbestimmte Lage des Geschwindigkeitsprofils festzulegen.

Die Verwendung der Grenzschichtgleichung macht nur Sinn, wenn es möglich ist, eine Außenströmung zu konstruieren, die mit den bekannten asymptotischen Methoden an die Lösung der Grenzschichtgleichung angepasst werden kann. Mörwald [19] hat die Lösung Tollmiers im Sinne einer konsequenten asymptotischen Entwicklung behandelt und gezeigt, dass sich im allgemeinen Fall  $U_2^*/U_1^* \neq 0$  keine Potentiallösung zur Anpassung konstruieren lässt. Schneider [32] vergleicht diesen als grundsätzlich zu bezeichnenden Widerspruch mit einem analogen Paradoxon den Auftriebsstrahl betreffend, welches von Taylor aufgezeigt worden ist. Ein möglicher Ausweg wird von Schneider [32] angegeben, indem zur Erzeugung der Anströmung eine Quellenbelegung im endlichen Abstand von der Hinterkante der Platte verwendet wird.

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ist die Grenzschichtgleichung eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Verwendet man nun den Mischungswegansatz [20], erhält man einen endlich breiten Strahl, und der Ort des Randes muss ebenfalls durch die Rechnung bestimmt werden. In diesem Fall ist die Trennschicht scharf von der Umgebung abgegrenzt, was auch für die turbulente kinetische Energie gilt, die daher am jeweiligen Rand verschwinden muss. Zusammen mit jenen für die Geschwindigkeitskomponenten sind insgesamt sechs Randbedingungen zu stellen, allerdings sind nur fünf Integrationskonstanten vorhanden, nämlich 3 entsprechend der Ordnung der Differentialgleichung und 2 entsprechend den unbekanntem Rändern der Trennschicht. Tollmien [36] umging dieses Dilemma, indem er eine der beiden Zuströmgeschwindigkeiten null setzte und auf dieser Seite das laterale Einströmen in die Trennschicht aus seinen Berechnungen ermittelte. Am anderen Rand nahm Tollmien an, dass die Anströmung durch die Trennschicht überhaupt nicht gestört wäre. Das von Tollmien behandelte Problem ist nicht mehr das durch Abbildung 1 skizzierte, sondern ein Sonderfall, der in der Praxis durchaus vorkommt, z. B. am Rand eines Strahles, der in ein ruhendes Medium fließt. Kuethe [12] gibt eine Lösung für beliebige Geschwindigkeitsverhältnisse  $U_1^*/U_2^*$  an, indem er die  $\bar{v}^*$ -Komponente am oberen Trennschichtrand null setzt. Er vergleicht die so erhaltene Lösung mit jener, die sich durch die Randbedingung  $\bar{v}^*_1 U_1^* = -\bar{v}^*_2 U_2^*$  (er bezieht sich dabei auf von Kármán) ergibt und stellt keinen nennenswerten Unterschied fest.  $\bar{v}^*_1$  und  $\bar{v}^*_2$  sind die lateralen Geschwindigkeitskomponenten am Rand der Trennschicht an einer bestimmten Stelle  $x^*$ . Diese Bedingung wurde später von Ting [35] unter Verwendung von asymptotischen Methoden und unabhängig davon von Schneider [32] aus einer globalen Impulsbilanz hergeleitet.

Verwendet man zur Modellierung der turbulenten Scheinschubspannung den Austauschansatz, führt dieser auf ein asymptotisches Abklingen der Störungen in der Umgebung. Die Berechnung des Öffnungswinkels erübrigt sich, zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten sind insgesamt vier Randbedingungen zu stellen, nämlich an die  $\overline{u^*}$ - und  $\overline{v^*}$ - Geschwindigkeitskomponenten am jeweiligen Rand im Unendlichen. Man hat wieder eine Randbedingung zu viel, um die Auslenkung der Trennschicht zu bestimmen. Die willkürliche Wahl von Görtler [8], der diese nicht durch physikalische sondern durch rechentechnische Gründe rechtfertigt, kann auch hier durch die oben angegebene Beziehung von Ting [35] und Schneider [32] ersetzt werden.

Durch das Anpassen der jeweiligen empirischen Parameter im Mischungsweg oder im Austauschansatz lassen sich die Lösungen beider Modellierungsarten in gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten bringen. Görtlers Zugang zur Lösung des Problems hat sich in der Literatur als theoretischer Vergleich zu experimentellen Daten durchgesetzt (vgl. Piu und Gartshore [23], Metha und Westphal [17], Miles und Shih [18], Yule [38] und Bell und Mehta [4]). Genauer gesagt verwenden diese Experimentatoren Görtlers Lösung 1. Ordnung, bei der die Lage der Trennschicht noch unbestimmt ist. Die Verwendung des Austauschansatzes zusammen mit Tings Beziehung hat Eingang in etablierte Lehrbücher gefunden (vgl. Schlichting und Gersten [30, 665-666] und Gersten und Herwig [7, S.742-743]). Tatsache ist jedoch, dass der Austauschansatz eine Ausnahmestellung innerhalb der Turbulenzmodelle hat. Folgt man zum Beispiel Rotta [28, S.128-131] oder Tennekes und Lumley [34, S.104-109], um von den Navier-Stokes-Gleichungen zu den Grenzschichtgleichungen zu kommen, indem man eine Grenzschichtapproximation macht und wendet diese Methode auf die bekannten Modelle an, dann ergeben diese in führender Ordnung immer den Mischungsweg, was sich auch darin widerspiegelt, dass diese Modelle eine endliche Breite der Trennschicht liefern. Der grundsätzliche Kritikpunkt an der etablierten Darstellung ist aber keineswegs in der Verwendung eines bestimmten Turbulenzmodells zu suchen, sondern in der Tatsache, dass sich keine Außenströmung konstruieren lässt. Die von Ting [35] und Schneider [32] angegebenen Herleitungen der Beziehung  $\overline{v^*}_1 U_1^* = -\overline{v^*}_2 U_2^*$  setzten beide die Existenz einer Außenströmung voraus. Da aber Mörwald [19] gezeigt hat, dass die Außenströmung nicht angegeben werden kann, stellt das die Verwendung dieser Beziehung in Frage.

In der vorliegenden Arbeit wird Tollmiens Vorschlag der Formulierung des Problems insofern aufgegriffen, als Lösungen gesucht werden, die auf *beiden* Seiten der Trennschicht keine Störung in der Zuströmung induzieren. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass ein stetiger Übergang der Geschwindigkeitskomponenten  $\overline{u^*}$  und  $\overline{v^*}$  von der Potentialströmung in das turbulente Gebiet der Trennschicht verlangt wird.

Zuvor werden im Kapitel 2, die der Arbeit zugrunde gelegten Bewegungsgleichungen und Turbulenzmodelle dargestellt und die Anwendung der Grenzschichtapproximation auf die Bewegungsgleichung und die Turbulenzmodelle gezeigt, weil manche Vereinfachungen im weiteren Verlauf der Arbeit benutzt werden.

Im Kapitel 3 wird die Selbstähnlichkeit des Problems dargestellt. Wegen der eben beschriebenen Probleme mit der Verwendung der Grenzschichtgleichung werden die vollständigen Bewegungsgleichungen in Verbindung mit dem  $k$ -Gleichungsmodell betrachtet. Die mit numerischen Methoden gefundene Lösung unter Verwendung der üblichen empirischen Parameter erfüllt nicht alle geforderten Randbedingungen.

Im Kapitel 4 werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, das Paradoxon aufzulösen. Zuerst wird ein Parameterbereich von empirischen Konstanten der Turbulenzmodelle gesucht, innerhalb dessen alle Randbedingungen erfüllbar sind. Um dies in einer systematischen Vorgangsweise zu behandeln, wird eine reguläre asymptotische Entwicklung angewendet (vgl. Schneider [31, S. 59-82], van Dyke [6, S. 9-19]). Schließlich wird untersucht, ob eine Ähnlichkeitslösung, die Barenblatt [2] "zweiter Art" nennt, neue Einsichten bringen kann. Dabei kommt ein Eigenwert ins Spiel, der als zusätzlicher Parameter die Möglichkeit bietet, die Lösung an die geforderten Randbedingungen anzupassen.

## 2 Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegenden Gleichungen zusammengefasst. Dies sind die Bewegungsgleichungen und zwei Turbulenzmodelle, nämlich das  $k$ -Gleichungsmodell und das Reynoldsspannungstransportmodell. Die Untersuchungen in allen folgenden Kapitel werden sich immer auf die hier zusammengefassten Gleichungen beziehen.

Gemäß der in Abbildung 1 dargestellten Skizze wird die Platte, welche die zwei Anströmungen voneinander trennt, als in die positive und negative  $z^*$ -Richtung unendlich ausgedehnt angenommen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden stets zeitlich gemittelte Größen betrachtet, wie zum Beispiel das in Abbildung 1 angedeutete Geschwindigkeitsprofil, die zeitabhängige Struktur der Turbulenz wird außer Acht gelassen. Da sich im zeitlichen Mittel ein stationärer Zustand einstellt, wird die Trennschicht als zweidimensionales zeitunabhängiges Problem behandelt, die zur Beschreibung notwendigen Größen werden ausschließlich in  $x^*$ - und  $y^*$ -Richtung veränderlich angesehen. Die beiden zuströmenden Fluide werden als in allen Materialeigenschaften identisch angenommen und haben dieselbe Temperatur, die daher im weiteren Verlauf der Arbeit keine Rolle mehr spielen kann. Zu den Voraussetzungen gehört auch, dass die beiden Fluide als inkompressibel behandelt werden.

### 2.1 Bewegungsgleichungen

In der Turbulenztheorie ist es üblich, die Geschwindigkeitskomponenten wie folgt aufzuteilen (vgl. Rotta [28, S. 17]):

$$u^* = \overline{u^*} + u^{*'} \quad v^* = \overline{v^*} + v^{*'} \quad w^* = \overline{w^*} + w^{*'} \quad p^* = \overline{p^*} + p^{*'} \quad (2.1)$$

Hier bedeuten  $\overline{u^*}$ ,  $\overline{v^*}$ ,  $\overline{w^*}$  und  $\overline{p^*}$  jeweils zeitlich gemittelte Größen, während  $u^{*'}$ ,  $v^{*'}$ ,  $w^{*'}$  und  $p^{*'}$  jeweils Schwankungsgrößen sind. Setzt man die Ausdrücke (2.1) in die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen ein, erhält man nach zeitlicher Mittelung die sogenannten Reynoldsschen Gleichungen.

Die Reynoldsschen Gleichungen (s. z.B. Gersten und Herwig [7, S. 764-766]) reduzieren sich schließlich zu den folgenden drei Gleichungen, wenn man alle Terme, die Ableitungen nach  $z^*$  und der Zeit enthalten, vernachlässigt und  $\overline{w^*} = 0$  setzt. Die Kontinuitätsgleichung unterscheidet sich formal nicht vom zweidimensionalen laminaren Fall:

$$\frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial y^*} = 0. \quad (2.2)$$

In den Bewegungsgleichungen kommen zu den aus der Beschreibung von laminaren Strömungen bekannten Termen die sogenannten Reynoldsschen Spannungen hinzu:

$$\overline{u^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \overline{v^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \overline{p^*}}{\partial x^*} - \frac{\partial \overline{u^{*2}}}{\partial x^*} - \frac{\partial \overline{u^* v^*}}{\partial y^*} \quad (2.3a)$$

$$\overline{u^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial x^*} + \overline{v^*} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \overline{p^*}}{\partial y^*} - \frac{\partial \overline{u^* v^*}}{\partial x^*} - \frac{\partial \overline{v^{*2}}}{\partial y^*}. \quad (2.3b)$$

Die Scheinschubspannungen bestehen aus Korrelationen der Schwankungsgrößen der Geschwindigkeitskomponenten. Ihr Auftreten führt dazu, dass in dem Differentialgleichungssystem (2.2) und (2.3) mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind, daher müssen diese modelliert werden. Im nächsten Abschnitt 2.2 werden die in dieser Arbeit verwendeten Arten der Modellierung dargestellt.

Nicht unerwähnt sollte bleiben, dass in Wandnähe der Impulstransport auch über die Viskosität stattfindet. Da aber in dem zu untersuchenden Bereich der Trennschicht Wände keinen Einfluss haben, wird die laminare Reibung in den Gleichungen (2.3) vernachlässigt.

## 2.2 Turbulenzmodelle

### 2.2.1 $k$ -Gleichungsmodell

Dieses Modell wird auch Eingleichungsmodell genannt, weil zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen (2.2) und (2.3) eine weitere Differentialgleichung eingeführt wird, die den Transport des Mittelwertes der kinetischen Schwankungsenergie  $k^*$  beschreibt. Diese kinetische Turbulenzenergie ist durch

$$k^* = \frac{1}{2} \left( \overline{u^{*2}} + \overline{v^{*2}} + \overline{w^{*2}} \right) \quad (2.4)$$

definiert. Die Herleitung der  $k$ -Gleichung ist bei Hinze [11, S. 62-65] zu finden. In der allgemeinsten Form nützt diese Gleichung nichts, weil neue unbekannte Korrelationen für die turbulente Diffusion und die turbulente Dissipation vorkommen. Üblicherweise findet man die Gleichung in der Literatur (Rodi [27]), unter Vernachlässigung des instationären Terms, der Ableitungen nach  $z^*$  und der Annahme  $\overline{w^*} = 0$ , wie folgt:

$$\underbrace{\overline{u^*} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \overline{v^*} \frac{\partial k^*}{\partial y^*}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\left[ \overline{u^{*2}} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \overline{u^* v^*} \left( \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} + \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial x^*} \right) + \overline{v^{*2}} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial y^*} \right]}_{= P, \text{ Produktion}} - \underbrace{\varepsilon^*}_{\text{Dissipation}}. \quad (2.5)$$

Der Diffusionsterm ist bereits modelliert und zwar wird dieser proportional zum Gradienten von  $k^*$  angegeben,  $\sigma_k$  ist eine empirische Konstante. Die Gleichung (2.5) ist eine Bilanzgleichung für  $k^*$ . Die hervorgehobenen Ausdrücke sind erstens der konvektive Transport, verursacht durch die gemittelten Geschwindigkeitskomponenten, zweitens

der diffusive Transport durch die turbulente Bewegung, drittens die Produktion, bewirkt durch die Wechselwirkung zwischen den turbulenten Scheinspannungen und den Gradienten der gemittelten Geschwindigkeitskomponenten und viertens die Vernichtung von  $k^*$  durch die Dissipation. Um das Gleichungssystem (2.2), (2.3) und (2.5) zu schließen, müssen die Dissipation  $\varepsilon^*$ , die kinematische turbulente Scheinviskosität  $\nu_t^*$  und die Reynoldsspannungen durch die mittleren Geschwindigkeiten und die kinetische Turbulenzenergie ausgedrückt werden.

Bei der Beschreibung der Dissipation (vgl. Rotta [28, S. 112-114]) geht man von der Vorstellung aus, dass der Dissipationsvorgang durch die Energieübertragung von großen auf kleinere Turbulenzelemente (bzw. Wirbel) beherrscht wird. Wenn die großen Turbulenzelemente durch ein Integral-Längenmaß  $l^*$  und Geschwindigkeiten von der Größenordnung  $\sqrt{k^*}$  beschrieben werden, dann findet man für die Dissipation aus dimensionsanalytischen Überlegungen den Ausdruck

$$\varepsilon^* = c_D \frac{k^{*\frac{3}{2}}}{l^*}, \quad (2.6)$$

wobei die Konstante  $c_D$  durch Vergleiche mit Experimenten zu bestimmen ist.

Schon Ende des neunzehnten Jahrhunderts wurde von Boussinesq (vgl. Gersten und Herwig [7, S. 766]) ein Ansatz in Analogie zum Newtonschen Gesetz für die laminare Reibung vorgeschlagen, indem eine scheinbare turbulente Zähigkeit  $\nu_t^*$  eingeführt wird. Lässt man wieder die Ableitungen nach  $z^*$  beiseite und setzt  $\overline{w^*} = 0$ , bleiben die folgenden Beziehungen,

$$\overline{u^{*2}} = -2\nu_t^* \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \frac{2}{3}k^* \quad (2.7a)$$

$$\overline{v^{*2}} = -2\nu_t^* \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial y^*} + \frac{2}{3}k^* \quad (2.7b)$$

$$\overline{w^{*2}} = \frac{2}{3}k^* \quad (2.7c)$$

$$\overline{u^{*'}v^{*'}} = -\nu_t^* \left( \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} + \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial x^*} \right) \quad (2.7d)$$

$$\overline{u^{*'}w^{*'}} = 0 \quad (2.7e)$$

$$\overline{v^{*'}w^{*'}} = 0 \quad (2.7f)$$

als Ausdrücke für die Reynoldsspannungen.

Die scheinbare Viskosität  $\nu_t^*$  ist selbstverständlich keine Materialeigenschaft, sondern vom Strömungsfeld abhängig. Unter der Annahme, dass  $\nu_t^*$  nur eine Funktion von  $\varepsilon^*$  und  $k^*$  ist (Schlichting und Gersten [30, S. 559]), folgt aus Dimensionsgründen sofort

$$\nu_t^* = c_t \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \quad (2.8)$$

und daher mit (2.6) weiters die Kolmogorov-Prandtl Beziehung:

$$\nu_t^* = c_\mu \sqrt{k^*} l^*. \quad (2.9)$$

Die Konstante  $c_\mu$  ergibt sich aus empirischen Daten.

Nun bleibt noch eine Formulierung für die integrale Turbulenzlänge  $l$  zu finden. Einerseits sollen an einer bestimmten Stelle  $x$  mehrere Turbulenzballen innerhalb der Breite  $b(x^*) = y_1^*(x^*) - y_2^*(x^*)$  der Trennschicht Platz finden und andererseits steht gar keine andere Bezugslänge als eben diese Breite zur Verfügung. Daher ist die folgende Wahl von  $l$  sinnvoll und üblich:

$$l^*(x^*) = cb^*(x^*). \quad (2.10)$$

Die Konstante  $c$  muss so gewählt werden, dass  $l^*$  die gerade angesprochene Forderung erfüllt und zur Übereinstimmung mit Experimenten gebracht werden kann.

## 2.2.2 Reynoldsspannungstransportmodell

Dieses Modell verwendet für jede Reynoldsspannung eine eigene Transportgleichung, ihre exakte Form findet man z. B. bei Hanjalić und Launder [10]. Um die Gleichungen kompakter anschreiben zu können, wird in diesem Abschnitt die Indexschreibweise benutzt:  $\bar{u}^* = \bar{u}^*_{x_1}$ ,  $\bar{v}^* = \bar{u}^*_{x_2}$ ,  $u^* = u^*_{x_1}$ ,  $v^* = u^*_{x_2}$ ,  $w^* = u^*_{x_3}$ ,  $x^* = x^*_{x_1}$  und  $y^* = x^*_{x_2}$ . Für eine bestimmte turbulente Scheinspannung  $\bar{u}^*_{ij}$  im stationären ebenen Fall gilt dann (mit  $i, j = 1, 2$ )

$$\underbrace{\bar{u}^*_{x_1} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1} u^*_{x_1}}{\partial x^*} + \bar{u}^*_{x_2} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1} u^*_{x_1}}{\partial y^*}}_{\text{Konvektion}} = - \underbrace{\left( \bar{u}^*_{x_1} u^*_{x_1} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1}}{\partial x^*} + \bar{u}^*_{x_1} u^*_{x_2} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1}}{\partial x^*} + \bar{u}^*_{x_2} u^*_{x_1} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1}}{\partial x^*} + \bar{u}^*_{x_2} u^*_{x_2} \frac{\partial \bar{u}^*_{x_1}}{\partial y^*} \right)}_{= P_{ij}, \text{ Produktion}} + \underbrace{+ D_{ij}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{+ \Pi_{ij}}_{\text{Druckscherkorrelation}} - \underbrace{\varepsilon^*_{ij}}_{\text{Dissipation}} \quad (2.11)$$

In (2.11) sind genau jene Terme explizit angegeben, die keiner weiteren Modellierung bedürfen, also der konvektive Transport der jeweiligen turbulenten Scheinspannung und die Produktion. Im Diffusionsterm kommen Tripelkorrelation der Schwankungsgrößen der Geschwindigkeiten und Korrelationen des Drucks mit den Schwankungsgrößen der Geschwindigkeiten vor, während der Druckscherkorrelationsterm Korrelationen des Drucks mit den Gradienten der Schwankungsgrößen der Geschwindigkeit enthält.

Setzt man hohe lokale Reynoldszahlen voraus, kann man die Dissipation in guter Näherung als isotrop (Hanjalić und Launder [10]) betrachten und verwendet daher üblicherweise den Ausdruck

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon^*. \quad (2.12)$$

Der Druckscherkorrelationsterm  $\Pi_{ij}$  lässt sich in zwei Anteile zerlegen (vgl. Launder [14]).  $\Pi_{ij,1}$  enthält nur die Wechselwirkung der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten und  $\Pi_{ij,2}$  die Korrelation der mittleren Spannungen mit den Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten.

Rotta [28, S. 126-127] hat den Ausdruck

$$\Pi_{ij,1} = -c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left( \overline{u_i^* u_j^*} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k^* \right) \quad (2.13)$$

für die Modellierung des ersten Druckanteils vorgeschlagen. Für den zweiten Teil geben Launder et al. [15]

$$\begin{aligned} \Pi_{ij,2} = & -\frac{c_2 + 8}{11} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - \frac{30c_2 - 2}{55} \left( \frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{u_j^*}}{\partial x_i^*} \right) k^* - \\ & - \frac{8c_2 - 2}{11} \left( d_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

an, wobei

$$d_{ij} = - \left( \overline{u_i^* u_1^*} \frac{\partial \overline{u_1^*}}{\partial x_j^*} + \overline{u_i^* u_2^*} \frac{\partial \overline{u_2^*}}{\partial x_j^*} + \overline{u_j^* u_1^*} \frac{\partial \overline{u_1^*}}{\partial x_i^*} + \overline{u_j^* u_2^*} \frac{\partial \overline{u_2^*}}{\partial x_i^*} \right). \quad (2.15)$$

Die Größen  $P_{ij}$  bzw.  $P$  entsprechen dem Produktionsterm in den Gleichung für den Transport der turbulenten Scheinspannungen (2.11) bzw. der  $k$ -Gleichung (2.5). Eine einfachere Modellierung verwendet nur den ersten Term von Beziehung (2.14) (Noat et al. und Reynolds in Rodi [26, S. 36]):

$$\Pi_{ij,2} = -\gamma \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right). \quad (2.16)$$

Daly und Harlow [5] haben die folgende Modellierung des Diffusionsterms vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} D_{ij} = & c_s \frac{\partial}{\partial x^*} \left[ \frac{k^*}{\varepsilon^*} \left( \overline{u_1^* u_1^*} \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^*}}{\partial x^*} + \overline{u_1^* u_2^*} \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^*}}{\partial y^*} \right) \right] + \\ & + c_s \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ \frac{k^*}{\varepsilon^*} \left( \overline{u_1^* u_2^*} \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^*}}{\partial x^*} + \overline{u_2^* u_2^*} \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^*}}{\partial y^*} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Addieren der Transportgleichungen für  $\overline{u^{*2}}$ ,  $\overline{v^{*2}}$  und  $\overline{w^{*2}}$  gibt die Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{u^*} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \overline{v^*} \frac{\partial k^*}{\partial y^*}}_{\text{Konvektion}} = & c_s \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} \left[ \frac{k^*}{\varepsilon^*} \left( \overline{u^{*2}} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \overline{u^* v^*} \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ \frac{k^*}{\varepsilon^*} \left( \overline{u^* v^*} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \overline{v^{*2}} \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right] \right\}}_{\text{Diffusion}} + \\ & + \underbrace{\left[ \overline{u^{*2}} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \overline{u^* v^*} \left( \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} + \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial x^*} \right) + \overline{v^{*2}} \frac{\partial \overline{v^*}}{\partial y^*} \right]}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\varepsilon^*}_{\text{Dissipation}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Das bedeutet, dass man diese Gleichung statt einer der Transportgleichungen (2.11) für die turbulenten Scheinnormalspannungen verwenden kann.

Will man zum Schließen des Gleichungssystems (2.2), (2.3) und (2.11) keine weiteren Transportgleichungen einführen, können die Beziehungen aus dem vorigen Abschnitt 2.2.1 für die Dissipation (2.6) und den integralen Längenmaßstab (2.10) herangezogen werden.

## 2.3 Grenzschicht-Approximationen

Um die Bedeutung der einzelnen Terme der Bewegungsgleichung (2.3) und den Modellgleichungen (2.5) und (2.11) größenordnungsmäßig abzuschätzen, werden sie auf folgende Weise dimensionslos gemacht (vgl. Tennekes und Lumley[34, 104-113]):

$$x = \frac{x^*}{L^*} \quad y = \frac{y^*}{b^*} \quad \bar{u} = \frac{\bar{u}^*}{U_s^*} \quad \bar{v} = \frac{\bar{v}^* L^*}{U_s^* b^*} \quad (2.19a)$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}^*}{\rho^* U_s^{*2}} \quad k = \frac{k^*}{k_s^*} \quad \overline{u'^2} = \frac{\overline{u^{*2}}}{k_s^*} \quad \overline{v'^2} = \frac{\overline{v^{*2}}}{k_s^*} \quad (2.19b)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{\overline{w^{*2}}}{k_s^*} \quad \overline{u'v'} = \frac{\overline{u^*v^*}}{k_s^*} \quad \overline{u'w'} = \frac{\overline{u^*w^*}}{k_s^*} \quad \overline{v'w'} = \frac{\overline{v^*w^*}}{k_s^*} \quad (2.19c)$$

Die Längen  $b^*$  und  $L^*$  charakterisieren die Ausdehnung der Trennschicht in  $y^*$ - und in  $x^*$ -Richtung. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{b^*}{L^*}\right). \quad (2.20)$$

Für schlanke Trennschichten muss das Verhältnis  $\gamma = b^*/L^*$  klein sein, also

$$\gamma = \frac{b^*}{L^*} \ll 1. \quad (2.21)$$

$U_s^*$  ist die charakteristische Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung, und daher wird  $\bar{u}^*$  damit dimensionslos gemacht. Die Geschwindigkeit in  $y^*$ -Richtung  $\bar{v}^*$  ist so skaliert worden, dass die ursprüngliche Form der Kontinuitätsgleichung (2.2) erhalten bleibt. Alle Scheinschubspannungen und die turbulente kinetische Energie werden mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{k_s^*}$  dimensionslos gemacht, wobei  $k_s^*$  für die charakteristische turbulente kinetische Energie steht.

### 2.3.1 Grenzschicht-Approximation der Bewegungsgleichungen

Betrachtet man die Bewegungsgleichungen (2.3) in den dimensionslosen Variablen (2.19) und macht den Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  sind die folgenden Bedingungen zu beachten:

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.22a)$$

$$\frac{U_s^{*2}}{k_s^*} \gamma = O(1). \quad (2.22b)$$

In der Bedingung (2.22a) bedeutet  $p_0$  den von außen aufgeprägten Druck, der in Strömungsrichtung als konstant angenommen wird. Es kann im Allgemeinen nicht angenommen werden, dass sich die  $x$ -Ableitungen sinnvollerweise durch  $L$  skalieren lassen, wenn sich  $p_0$  stromabwärts ändert, weil ein in  $x$ -Richtung variierendes  $p_0$  die Einführung einer Bezugsgröße anderer Größenordnung notwendig machen könnte.

Die zweite Bedingung (2.22b) folgt aus der Forderung, dass der konvektive Term der Bewegungsgleichung von der Ordnung 1 sein soll. Selbstverständlich ist damit auch eine Aussage über das Verhältnis  $k_s^*/U_s^{*2}$  impliziert:

$$\frac{k_s^*}{U_s^{*2}} = O(\gamma). \quad (2.23)$$

Die Terme der führenden Ordnung bilden nach Rücktransformation die Grenzschichtgleichung:

$$\overline{u^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial x^*} + \overline{v^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = - \frac{\partial \overline{u^{*'} v^{*'}}}{\partial y^*}. \quad (2.24)$$

## 2.3.2 Grenzschicht-Approximation der Turbulenzmodellgleichungen

Wendet man dieselbe Vorgehensweise wie in Abschnitt 2.3.1 unter der Beachtung der Bedingung (2.23) an, dann gilt sowohl für das  $k$ -Gleichungsmodell (2.5) als auch das Reynoldsspannungstransportmodell (2.11), dass sich in führender Ordnung die Produktion und die Dissipation die Waage halten (vgl. Mörwald [19]).

**2.3.2.1  $k$ -Gleichungsmodell** Betrachtet man die Größenordnungen der einzelnen Terme der  $k$ -Gleichung, so findet man für den konvektiven Term

$$\overline{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial k}{\partial y} = O(\gamma). \quad (2.25)$$

Die Größenordnungen der einzelnen Terme der Produktion sind

$$\overline{u'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = O(\gamma) \quad \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = O(1) \quad (2.26a)$$

$$\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} = O(\gamma^2) \quad \overline{v'^2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = O(\gamma). \quad (2.26b)$$

Für die Diffusion findet man die Abschätzung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = O(\gamma^3) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = O(\gamma). \quad (2.27)$$

Hier ist  $\nu_t^* = \frac{k_s}{U_s} b \nu_t$  verwendet worden und außerdem vorausgesetzt, dass  $\sigma_k = O(1)$  ist.

Für den Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  bleibe nach den bisherigen Betrachtungen nur der zweite Term in (2.26a) über. Allerdings ist noch keinerlei Aussage über den Dissipations-term gemacht worden. Da der Produktionsterm alleine keinen Sinn macht, nutzt man die Freiheit bei der Wahl der Skalierung der Dissipation für folgende Forderung:

$$\varepsilon = \frac{b^*}{U_s^* k_s^*} \varepsilon^* = O(1). \quad (2.28)$$

Somit bleibt für das  $k$ -Gleichungsmodell nach Rücktransformation in dimensionsbehaftete Größen in führender Ordnung (vgl. Mörwald [19]):

$$\overline{u^* v^*} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} = -\varepsilon^*. \quad (2.29)$$

Verwendet man für die Dissipation die Beziehung (2.6) und für die turbulente Scher-spannung die Beziehung (2.7d) in Grenzschichtnäherung, sieht man, dass (2.29) dem Mi-schungswegansatz äquivalent ist (vgl. Rodi [26]).

**2.3.2.2 Reynoldsspannungstransportmodell** Da die turbulente kinetische Energie und sämtliche turbulente Scheinspannungen mit derselben Konstanten dimensionslos gemacht werden, ist der konvektive Term für alle Transportgleichungen der turbulenten Schein-spannungen ebenso wie im vorigen Abschnitt von der Größenordnung  $O(\gamma)$ .

In den Produktionstermen und dem jeweils ersten Term der Druckscherkorrelation der Gleichungen für den Transport der turbulenten Normalspannungen finden sich dieselben Produkte aus turbulenten Scheinspannungen und Ableitungen der gemittelten Geschwin-digkeit wieder, wie schon im Produktionsterm der  $k$ -Gleichung. Der Vollständigkeit hal-ber werden die betreffenden Terme, die in den Transportgleichungen für die turbulenten Scheinschubspannungen vorkommen, angegeben:

$$\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = O(\gamma^2) \quad \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = O(1) \quad (2.30)$$

$$\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = O(\gamma) \quad \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = O(1) \quad (2.31)$$

$$\overline{u' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = O(\gamma^2) \quad \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = O(\gamma). \quad (2.32)$$

Der Dissipationsterm wird völlig analog zum vorhergehenden Abschnitt behandelt, und daher braucht hier nicht nochmals darauf eingegangen werden.

Da die Diffusionsterme in den Transportgleichungen für eine bestimmten Scheinspan-nung formal gleich aufgebaut sind, reicht es stellvertretend für alle Diffusionsterme, die Größenordnungen anzugeben, die zur Transportgleichung von  $\overline{u'^2}$  gehören:

$$c_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'^2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \right) = O(\gamma^3), \quad c_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\overline{u'v'}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} \right) = O(\gamma^2), \quad (2.33)$$

$$c_s \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \right) = O(\gamma^2), \quad c_s \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\overline{v'^2}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} \right) = O(\gamma). \quad (2.34)$$

Die Modellkonstante  $c_s$  ist wieder mit der Größenordnung  $O(1)$  angenommen worden.

Der erste Druckscherkorrelationsterm  $\Pi_{ij,1}$  (2.13) ist ebenfalls in allen Transportgleichungen derart ähnlich aufgebaut, dass man ihn nur einmal anzuführen braucht. Zum Beispiel gilt für  $\overline{u'^2}$  unter der Voraussetzung  $c_1 = O(1)$ :

$$c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u'^2} - \frac{2}{3} k \right) = O(1). \quad (2.35)$$

Der zweite Druckscherkorrelationsterm  $\Pi_{ij,2}$  (2.14) enthält hauptsächlich schon angeführte Kombinationen aus Reynoldsspannungen und Geschwindigkeitsgradienten bis auf die noch nicht abgeschätzten Ausdrücke:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} k = O(\gamma) \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} k = O(1) \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} k = O(\gamma^2) \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} k = O(\gamma). \quad (2.36b)$$

Berücksichtigt man alle soeben gemachten Abschätzungen der Größenordnungen, nimmt das Reynoldsspannungstransportmodell für den Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  nach Rücktransformation in dimensionsbehafete Größen die folgende Form an:

$$2 \frac{5 + 2c_2}{11} \overline{u'^* v'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = -c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left( \overline{u'^*{}^2} - \frac{2}{3} k^* \right) - \frac{2}{3} \varepsilon^* \quad (2.37a)$$

$$2 \frac{4 - 5c_2}{11} \overline{u'^* v'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = -c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left( \overline{v'^*{}^2} - \frac{2}{3} k^* \right) - \frac{2}{3} \varepsilon^* \quad (2.37b)$$

$$2 \frac{2 + 3c_2}{11} \overline{u'^* v'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = -c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left( \overline{w'^*{}^2} - \frac{2}{3} k^* \right) - \frac{2}{3} \varepsilon^*. \quad (2.37c)$$

Addiert man die Gleichungen (2.37a), (2.37b) und (2.37c), ist das Ergebnis genau die Gleichung (2.29). Von den Transportgleichungen der turbulenten Schubspannungen verbleibt:

$$\frac{3 - c_2}{11} \overline{v'^* w'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = \frac{2}{11} \left( (4c_2 - 1) \overline{u'^*{}^2} - \frac{15c_2 - 1}{5} k^* \right) \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} - c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \overline{u'^* v'^*} \quad (2.38a)$$

$$\frac{3 - c_2}{11} \overline{v'^* w'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = -c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \overline{u'^* w'^*} \quad (2.38b)$$

$$2 \frac{4c_2 - 1}{11} \overline{u'^* w'^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*} = c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \overline{v'^* w'^*}. \quad (2.38c)$$

Die letzten zwei Gleichungen lassen nur zu, dass  $\overline{u^* w^*} = 0$  und  $\overline{v^* w^*} = 0$  sind. Dies entspricht der Voraussetzung zeitlich gemittelter ebener Strömung.

Mit Hilfe des Ausdrucks (2.29) und der Gleichungen (2.37a) und (2.37b) läßt sich die turbulente Schubspannung in Grenzschichtapproximation folgendermaßen darstellen:

$$\overline{u^* v^*} = -\frac{1}{11c_1^2} \left( \frac{2}{3} - 4c_2 - 2c_2^2 + \frac{44}{15}c_1 \right) \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*}. \quad (2.39)$$

Unter der Verwendung der turbulenten Scheinviskosität  $\nu_t^* = -\overline{u^* v^*} / \frac{\partial \overline{u^*}}{\partial y^*}$ , kann die Gleichung (2.39) in der Form der Kolmogorov-Prandtl Beziehung (vgl. Rodi [26])  $\nu_t^* = c_t k^{*2} / \varepsilon^*$  geschrieben werden. Der konstante Faktor in Gleichung (2.39) entspricht  $c_t$ . Man hat also wiederum eine Darstellung gefunden, die dem Mischungswegansatz entspricht. Durch das Auftreten der zwei Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  hat man allerdings mehr Freiheit bei der Wahl der empirischen Parameter gewonnen. Der Transport der turbulenten Scheinschubspannungen findet keine Berücksichtigung mehr. Da aber nicht auf die Boussinesqapproximation zur Beschreibung der Reynoldsspannungen zurückgeriffen wird, sondern auf die Grenzschichtapproximation des Reynoldsspannungstransportmodells, wird anisotrope Turbulenz wiedergegeben (vgl. Rodi [26]). Darauf wird in dieser Arbeit später noch genauer eingegangen. Die Anisotropie der Turbulenz wird sich dabei als essentiell herausstellen.

### 3 Lösungen der vollständigen Bewegungsgleichungen

#### 3.1 Selbstähnlichkeit

Sämtliche schon in der Einleitung angeführten Experimente zeigen, dass die Breite der Trennschicht linear mit dem Abstand von der Hinterkante wächst. Da die einzig vorhandenen Einflussgrößen die Anströmgeschwindigkeiten als Bezugsgeschwindigkeiten und die  $x^*$ - und  $y^*$ -Koordinaten als Bezugslängen sind, bleibt auch aus dimensionsanalytischen Überlegungen nur eine Möglichkeit für die Wahl einer Ähnlichkeitsvariablen, nämlich  $\eta = y^*/x^*$ . Die Breite der Trennschicht ergibt sich zu  $b^*(x^*) = y_1^*(x^*) - y_2^*(x^*) = x^*(\eta_1 - \eta_2)$  und steigt linear mit  $x^*$ .

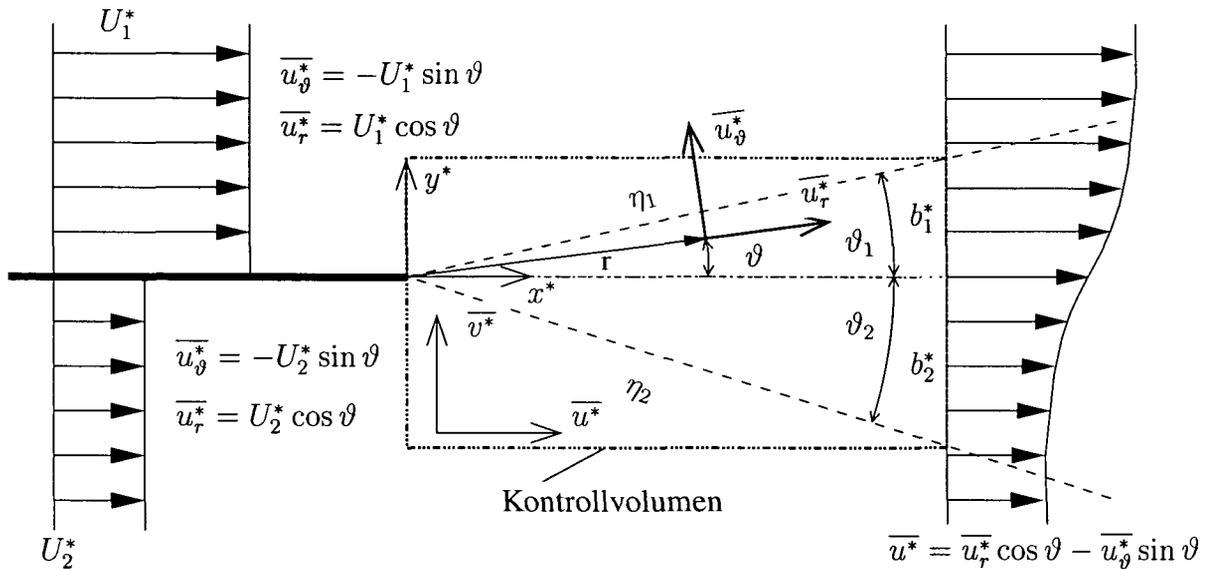


Abbildung 3.1: Skizze der ebenen turbulenten Trennschicht; kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten

In der Ähnlichkeitsvariablen  $\eta$  sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  die Ränder der Trennschicht, wie auch aus der Abbildung 3.1 ersichtlich ist. Die Geschwindigkeitskomponenten sollen dann nur noch Funktionen dieser Variable sein, also zum Beispiel die gemittelte Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung:

$$\overline{u^*} = f^* \left( \frac{y^*}{x^*} \right) = f^*(\eta). \quad (3.1)$$

Um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen wird die Stromfunktion  $\psi^*$  eingeführt, die folgendermaßen definiert wird:

$$\overline{u^*} = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \quad \overline{v^*} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}. \quad (3.2)$$

Daraus ergibt sich

$$\psi^* = x^* F^*(\eta). \quad (3.3)$$

Damit lauten die mit  $U_1^*$  dimensionslos gemachten Geschwindigkeitskomponenten:

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}^*}{U_1^*} = \frac{dF}{d\eta} = \frac{1}{U_1^*} \frac{dF^*(\eta)}{d\eta} \quad (3.4a)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}^*}{U_1^*} = \eta \frac{dF(\eta)}{d\eta} - F(\eta) = \frac{1}{U_1^*} \left( \eta \frac{dF^*(\eta)}{d\eta} - F^*(\eta) \right). \quad (3.4b)$$

Die integrale Turbulenzlänge (2.10) wird in der Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  zu

$$l^* = c(\eta_1 - \eta_2) x^* = c_x x^*. \quad (3.5)$$

Üblicherweise wird für der Behandlung der Trennschicht die Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  benutzt. Da die Schlankheit der Trennschicht vorausgesetzt wird, ist es zweckmäßiger Zylinderkoordinaten zu verwenden, denn es gilt

$$\vartheta = \arctan(\eta) \approx \eta. \quad (3.6)$$

Aus (2.10) wird

$$l^* = c(\tan \vartheta_1 - \tan \vartheta_2) r^* \cos \vartheta \approx c(\vartheta_1 - \vartheta_2) r^* = c_r r^*, \quad (3.7)$$

wobei durch  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Ränder der Trennschicht laut Abbildung 3.1 gekennzeichnet werden. Die Näherungen in beiden Beziehungen (3.6) und (3.7) gelten, solange  $\vartheta$  als klein angesehen werden kann. In Zylinderkoordinaten ist es angenehmer statt einer Stromfunktion direkt die Kontinuitätsgleichung zu verwenden, um eine der beiden Geschwindigkeitskomponenten zu eliminieren. Gemäß (3.6) übernimmt  $\vartheta$  die Rolle der Ähnlichkeitsvariable  $\eta$ , das heißt, das Problem ist unabhängig von  $r$  und die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Fluid wird zu

$$\nabla \vec{u}^* = \frac{\partial \bar{u}_z^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* \bar{u}_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \bar{u}_\vartheta^*}{\partial \vartheta} = \bar{u}_r^* + \frac{d\bar{u}_\vartheta^*}{d\vartheta} = 0. \quad (3.8)$$

Der Vorteil der Verwendung von Zylinderkoordinaten liegt nun auf der Hand. Die Beziehung (3.8) stellt einen viel einfacheren Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{u}_\vartheta^*$  und  $\bar{u}_r^*$  dar, als der durch die Beziehungen (3.4) gegebene Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{u}^*$  und  $\bar{v}^*$  in kartesischen Koordinaten.

Somit lassen sich die Bewegungsgleichungen und die Gleichungen für die Modellierung der Turbulenz durch gewöhnliche Differentialgleichungen in  $\eta$  oder  $\vartheta$  beschreiben, wenn man in konsistenter Weise auch alle anderen abhängigen Größen wie die turbulenten Scheinspannungen nur als Funktionen von  $\eta$  oder  $\vartheta$  annimmt.

### 3.2 Randbedingungen

Tollmien [36] hat den Spezialfall für  $U_2^* = 0$  untersucht und an der anderen Seite der Trennschicht ungestörte Anströmung angenommen. Hier wird untersucht, ob Lösungen möglich sind, die beide Anströmungen  $U_1^* \neq 0$  und  $U_2^* \neq 0$  ungestört lassen. Es soll also kein laterales Einströmen in die Trennschicht zugelassen werden. Die Geschwindigkeitskomponenten an den Strahlrändern  $\eta_1$  und  $\eta_2$  sind daher  $\overline{u^*}(\eta_1) = U_1^*$ ,  $\overline{v^*}(\eta_1) = 0$ ,  $\overline{u^*}(\eta_2) = U_2^*$  und  $\overline{v^*}(\eta_2) = 0$ . Die turbulente kinetische Energie verschwindet an den Rändern, also  $k^*(\eta_1) = 0$ ,  $k^*(\eta_2) = 0$ . Die dimensionslosen Orte  $\eta_1$  und  $\eta_2$  des Randes der Strahlgrenze sind Unbekannte, die gemeinsam mit der Lösung für die Geschwindigkeitskomponenten und der turbulenten kinetischen Energie gefunden werden müssen. Es handelt sich um ein so genanntes freies Randwertproblem.

Drückt man nach (3.4a) und (3.4b) die Geschwindigkeitskomponenten durch die dimensionslose Stromfunktion  $F$  aus, lassen sich die Randbedingungen wie folgt anschreiben:

$$\left. \frac{dF(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta_1} = 1 \quad F(\eta_1) = \eta_1 \quad k(\eta_1) = 0 \quad (3.9a)$$

$$\left. \frac{dF(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta_2} = \frac{U_2}{U_1} = (1 - \delta) \quad F(\eta_2) = (1 - \delta)\eta_2 \quad k(\eta_2) = 0, \quad (3.9b)$$

wobei hier ist das relative Geschwindigkeitsverhältnis

$$\delta := \frac{U_1 - U_2}{U_1} \quad (3.10)$$

verwendet worden ist.

Dieselben Randbedingungen in Zylinderkoordinaten angeschrieben lauten

$$u_{\vartheta}(\vartheta_1) = -\sin(\vartheta_1) \quad \left. \frac{du_{\vartheta}(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta_1} = -u_r(\vartheta_1) = -\cos(\vartheta_1) \quad (3.11a)$$

$$k(\vartheta_1) = 0$$

$$u_{\vartheta}(\vartheta_2) = -(1 - \delta)\sin(\vartheta_2) \quad \left. \frac{du_{\vartheta}(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta_2} = -u_r(\vartheta_2) = -(1 - \delta)\cos(\vartheta_2) \quad (3.11b)$$

$$k(\vartheta_2) = 0.$$

### 3.3 Numerische Lösung der vollständigen Bewegungsgleichung mit der $k$ -Gleichung als Turbulenzmodell

In diesem Abschnitt werden gemäß Abbildung 3.1 Zylinderkoordinaten aus oben genannten Gründen verwendet, um das Differentialgleichungssystem zu lösen, das die vollständigen Bewegungsgleichungen und die  $k$ -Gleichung umfasst. Die Geschwindigkeitskomponenten an einem bestimmten Ort  $r^*$  und  $\vartheta$  sind in radialer Richtung  $\overline{u_r^*}$  und azimuthaler Richtung  $\overline{u_{\vartheta}^*}$ . Die parallelen Anströmungen werden in diesem Fall durch die in der Skizze

angegebenen Beziehungen beschrieben. Wie in Abbildung 1 ist der Verlauf von  $\overline{u^*}$  angedeutet. Deshalb ist auch die Umrechnung von Zylinderkoordinaten in die  $\overline{u^*}$ -Komponente angegeben.

### 3.3.1 Bewegungsgleichung und $k$ -Gleichung in Zylinderkoordinaten

Die Bewegungsgleichungen in Boussinesq-Approximation in Zylinderkoordinaten findet man zum Beispiel bei Gersten und Herwig [7, S. 772-774]. Unter Vernachlässigung der  $r^*$  abhängigen Terme und jener, die  $\overline{u_z^*}$  enthalten, werden die turbulenten Normalspannungen zu

$$\frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{zz}}^* = -\overline{u_z^{*2}} = \nu_t^* \left( 2 \frac{\partial \overline{u_z^*}}{\partial z^*} - \frac{2}{3} \nabla \overline{u^*} \right) - \frac{2}{3} k^* = -\frac{2}{3} k^* \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{rr}}^* = -\overline{u_r^{*2}} = \nu_t^* \left( 2 \frac{\partial \overline{u_r^*}}{\partial r^*} - \frac{2}{3} \nabla \overline{u^*} \right) - \frac{2}{3} k^* = -\frac{2}{3} k^* \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{\vartheta\vartheta}}^* = -\overline{u_{\vartheta}^{*2}} = \nu_t^* \left[ 2 \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{u_{\vartheta}^*}}{\partial \vartheta} + \frac{\overline{u_r^*}}{r^*} \right) - \frac{2}{3} \nabla \overline{u^*} \right] - \frac{2}{3} k^* = -\frac{2}{3} k^*. \quad (3.14)$$

Die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors in Vektorschreibweise (s. Gl.(3.8)) ist als Abkürzung verwendet worden.

Die turbulenten Schubspannungen haben die folgende Form:

$$\frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{zr}}^* = -\overline{u_z^* u_r^*} = \nu_t^* \left( \frac{\partial \overline{u_r^*}}{\partial z^*} + \frac{\partial \overline{u_z^*}}{\partial r^*} \right) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{z\vartheta}}^* = -\overline{u_z^* u_{\vartheta}^*} = \nu_t^* \left( \frac{\partial \overline{u_{\vartheta}^*}}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{u_z^*}}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^*} \tau_{t_{r\vartheta}}^* &= -\overline{u_r^* u_{\vartheta}^*} = \nu_t^* \left[ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\overline{u_{\vartheta}^*}}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{u_r^*}}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \nu_t^* \left( -\frac{1}{r^*} \overline{u_{\vartheta}^*} + \frac{1}{r^*} \frac{d \overline{u_r^*}}{d \vartheta} \right) \\ &= -\frac{\nu_t^*}{r^*} \left( \overline{u_{\vartheta}^*} + \frac{d^2 \overline{u_{\vartheta}^*}}{d \vartheta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die turbulente Scheinviskosität  $\nu_t^*$  ist durch die Beziehung (2.9) unter Verwendung des integralen Längenmaßstabes (3.7) gegeben. In Zylinderkoordinaten wird offensichtlich, dass die  $k$ -Gleichung zusammen mit der Boussinesq-Approximation völlig isotrope Turbulenz wiedergibt. Von den Scheinschubspannung bleibt erwartungsgemäß nur jene in der  $r\vartheta$ -Ebene übrig.

Zum Entdimensionieren werden die Beziehungen

$$\overline{u_{\vartheta}^*} = U_1^* \overline{u_{\vartheta}} \quad k^* = U_1^{*2} k \quad \overline{p^*} = U_1^{*2} \rho^* \overline{p} \quad (3.18)$$

eingeführt. Es werden wieder jene Terme weggelassen, die von  $r^*$  und  $t^*$  abhängen und die  $\overline{u_z^*}$  enthalten, daher bleibt von der Bewegungsgleichung in  $r$ -Richtung unter Verwendung der Scheinnormalspannungen (3.12) und der Scheinschubspannung (3.17)

$$\bar{u}_\vartheta \left( \bar{u}_\vartheta + \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\vartheta^2} \right) = c_r c_\mu \frac{d}{d\vartheta} \left[ \sqrt{k} \left( \bar{u}_\vartheta + \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\vartheta^2} \right) \right] \quad (3.19)$$

und in  $\vartheta$ -Richtung

$$\frac{d\bar{p}}{d\vartheta} = -c_r c_\mu \sqrt{k} \left( \bar{u}_\vartheta + \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\vartheta^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{dk}{d\vartheta}. \quad (3.20)$$

Der Druck ist also von der Bewegungsgleichung in  $r$ -Richtung entkoppelt, dieser kann im Nachhinein durch Integration der Gleichung (3.20) ermittelt werden.

Die  $k$ -Gleichung erhält unter den vorgestellten Vereinfachungen die Form

$$\bar{u}_\vartheta \frac{dk}{d\vartheta} = c_r c_\mu \sqrt{k} \left( \bar{u}_\vartheta + \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\vartheta^2} \right)^2 - \frac{c_D}{c_r} k^{\frac{3}{2}} + \frac{c_r c_\mu}{\sigma_k} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sqrt{k} \frac{dk}{d\vartheta} \right). \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Entwicklung in der Nähe des Randes

Will man die Differentialgleichungen (3.19) und (3.21) numerisch lösen, müssen diese auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umgeformt werden. Dies führt dazu, dass Terme in Erscheinung treten, die  $1/k$  enthalten. Das macht Probleme, weil an den Rändern der Trennschicht  $k$  verschwinden soll. Es ist daher notwendig, das Verhalten von  $k$  in der Nähe der Ränder zu untersuchen, um diese Singularität zu umgehen. Zu diesem Zweck entwickelt man  $\bar{u}_\vartheta$  und  $k$  in Taylorreihen um die Position des jeweiligen Randes:

$$\bar{u}_\vartheta(\Delta) = \bar{u}_\vartheta(0) + \left. \frac{d\bar{u}_\vartheta}{d\Delta} \right|_0 \Delta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\Delta^2} \right|_0 \Delta^2 + \dots \quad (3.22a)$$

$$k(\Delta) = k(0) + \left. \frac{dk}{d\Delta} \right|_0 \Delta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 k}{d\Delta^2} \right|_0 \Delta^2 + \dots, \quad (3.22b)$$

wobei hier  $\Delta = \vartheta - \vartheta_1$  gewählt wurde und mit  $\Delta = 0$  laut Skizze 3.1 der obere Rand der Trennschicht betrachtet wird. Aus den Randbedingungen (3.11) ist schon bekannt, dass  $k(0) = 0$ . Daraus folgt unmittelbar durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (3.19), dass  $\left. \frac{dk}{d\Delta} \right|_0 = 0$  gelten muss.  $k$  ist also am Rand stetig differenzierbar. Die Entwicklung von  $k$  ist erst ab dem Term  $\Delta^2$  in Betracht zu ziehen.

Die folgenden Abkürzungen werden eingeführt, um die Übersichtlichkeit der weiteren Ausführungen zu erhalten:

$$\bar{u}_\vartheta'(0) = \left. \frac{d\bar{u}_\vartheta}{d\Delta} \right|_0, \quad \bar{u}_\vartheta''(0) = \left. \frac{d^2 \bar{u}_\vartheta}{d\Delta^2} \right|_0, \quad k''(0) = \left. \frac{d^2 k}{d\Delta^2} \right|_0 \quad \text{und} \quad k'''(0) = \left. \frac{d^3 k}{d\Delta^3} \right|_0. \quad (3.23)$$

Demgemäß steht ' für  $\frac{d}{d\Delta}$ .

Einsetzen der Beziehungen (3.22) in die Bewegungsgleichung (3.19) ergibt geordnet nach Potenzen von  $\Delta$

$$\Delta^0 : \bar{u}_\vartheta(0) (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0)) = \frac{c_r c_\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{k''(0)} (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0)) \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \Delta^1 : [\bar{u}_\vartheta(0) (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0))] &= \sqrt{2} c_r c_\mu \sqrt{k''(0)} (\bar{u}_\vartheta'(0) + \bar{u}_\vartheta'''(0)) + \\ &+ \frac{c_r c_\mu}{3\sqrt{2}} \frac{k'''(0)}{\sqrt{k''(0)}} (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0)). \end{aligned} \quad (3.24b)$$

Die Terme sind so geordnet, dass der konvektive Anteil links und die modellierte Schein-  
spannung rechts vom Gleichheitszeichen steht.

Dieselbe Vorgangsweise angewandt auf die  $k$ -Gleichung (3.21) führt auf

$$\Delta^1 : \bar{u}_\vartheta(0) k''(0) = c_r c_\mu \frac{\sqrt{k''(0)}}{\sqrt{2}} (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0))^2 + \sqrt{2} \frac{c_r c_\mu}{\sigma_k} (k''(0))^{\frac{3}{2}} \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 : \frac{\bar{u}_\vartheta(0) k'''(0)}{2} + \bar{u}_\vartheta'(0) k''(0) &= \\ &= c_r c_\mu \sqrt{2} \sqrt{k''(0)} (\bar{u}_\vartheta'(0) + \bar{u}_\vartheta'''(0)) (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0)) + \\ &+ \frac{c_r c_\mu}{6\sqrt{2}} \frac{k'''(0)}{\sqrt{k''(0)}} (\bar{u}_\vartheta(0) + \bar{u}_\vartheta''(0))^2 + \sqrt{2} \frac{c_r c_\mu}{\sigma_k} \sqrt{k''(0)} k'''(0). \end{aligned} \quad (3.25b)$$

Der konvektive Term steht wieder jeweils links, die Produktion und die Diffusion rechts  
vom Gleichheitszeichen. Der Dissipationsterm tritt bei dieser Entwicklung für kleine Ab-  
stände vom Rand erst in der nächsten Ordnung auf.

Verwendet man die Randbedingungen (3.11a) für  $\bar{u}_\vartheta(0)$  und  $\bar{u}_\vartheta'(0)$  und löst das Glei-  
chungssystem (3.24) und (3.25) nach  $\bar{u}_\vartheta''(0)$  und  $k''(0)$  bzw.  $\bar{u}_\vartheta'''(0)$  und  $k'''(0)$  auf, so  
erhält man drei Lösungen:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\vartheta,(1,2)}(\Delta) &= -\sin \vartheta_1 - \cos \vartheta_1 \Delta + \left( 1 \pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sigma_k - 2}}{c_r c_\mu \sigma_k} \right) \frac{\sin \vartheta_1}{2} \Delta^2 + \\ &+ \left[ 1 \pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sigma_k - 2} (2\sigma_k - 5)}{3 c_r c_\mu (\sigma_k - 3)} \right] \frac{\cos \vartheta_1}{6} \Delta^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$k_{(1,2)}(\Delta) = \frac{\sin^2 \vartheta_1}{(c_r c_\mu)^2} \Delta^2 + \frac{(\sigma_k - 4) \sin 2\vartheta_1}{6 (c_r c_\mu)^2 (\sigma_k - 3)} \Delta^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\vartheta,3}(\Delta) &= -\sin \vartheta_1 - \cos \vartheta_1 \Delta + \frac{\sin \vartheta_1}{2} \Delta^2 + \frac{\cos \vartheta_1}{6} \Delta^3 + \dots \\ k_3(\Delta) &= \frac{\sigma_k \sin^2 \vartheta_1}{4 (c_r c_\mu)^2} \Delta^2 + \frac{\sigma_k^2 \sin 2\vartheta_1}{12 (c_r c_\mu)^2} \Delta^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.26b)$$

Die dritte Lösung (3.26b) ist zu verwerfen, weil sie in Bezug auf die Geschwindig-  
keitskomponente  $\bar{u}_\vartheta$  einfach nur der Taylor-Reihe von  $-\sin \vartheta$  um  $\vartheta_1$  entspricht, also der  
ungestörten Anströmung. Dies ist zwar eine mögliche Lösung, allerdings nur die triviale,  
die natürlich nicht von weiterem Interesse ist.

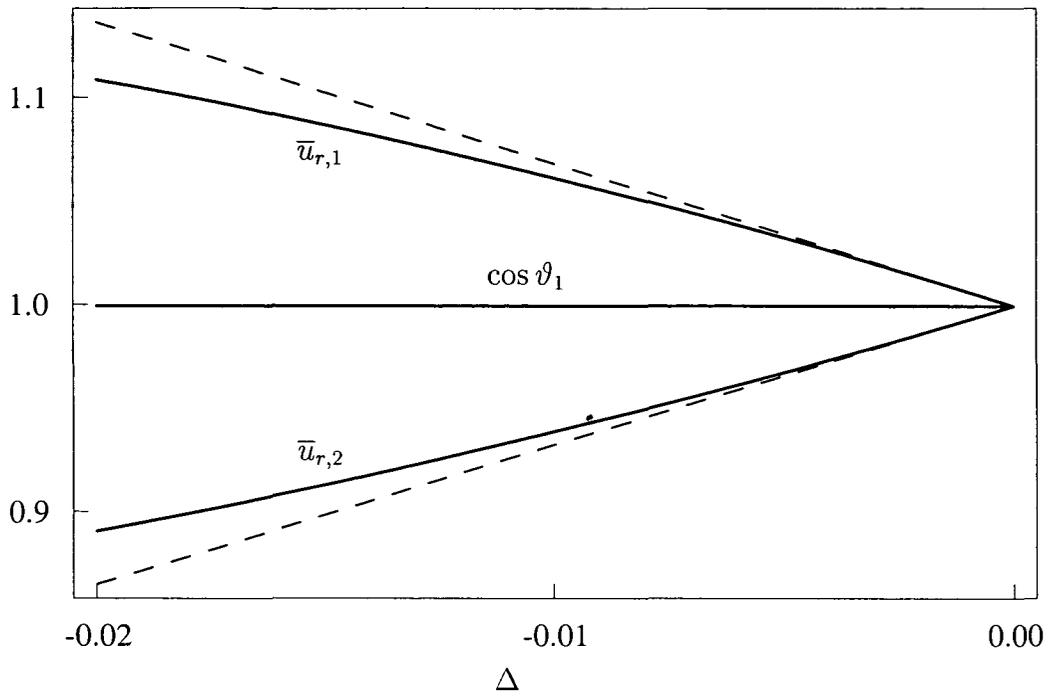


Abbildung 3.2: Lösungszweige für  $\bar{u}_r$  in der Nähe des Randes;  $c_r c_\mu = 0.0048$ ,  $c_D/c_r = 16.6$ ,  $\sigma_k = 2.2$ ,  $\vartheta_1 = 2.19^\circ$

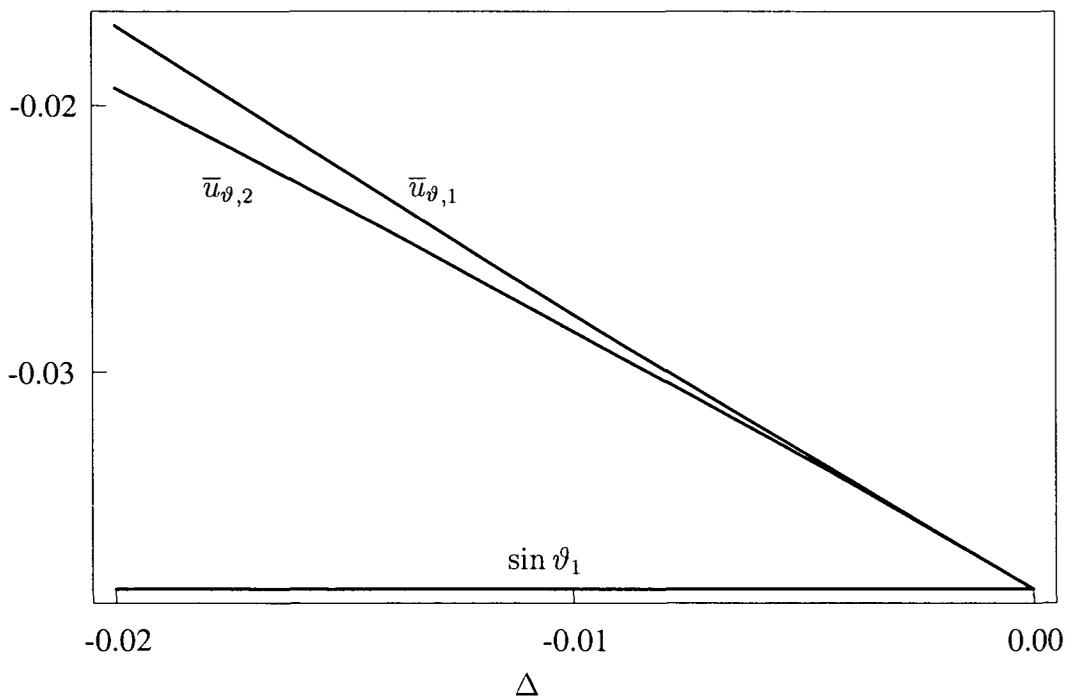


Abbildung 3.3: Lösungszweige für  $\bar{u}_\vartheta$  in der Nähe des Randes;  $c_r c_\mu = 0.0048$ ,  $c_D/c_r = 16.6$ ,  $\sigma_k = 2.2$ ,  $\vartheta_1 = 2.19^\circ$

Die Entscheidung, ob der negative oder der positive Zweig der Beziehung (3.26a) für die physikalisch sinnvolle Lösung steht, kann mittels eines Blicks auf die Abbildung 3.2 getroffen werden: Da die Geschwindigkeitskomponenten mit der größeren Zuströmgeschwindigkeit  $U_1$  dimensionslos gemacht worden sind, machen Werte  $\bar{u}_r > 1$  keinen Sinn. Die zu verwendende Lösung gehört daher zu dem Zweig, der in den Abbildungen 3.2 und 3.3 mit dem Index 2 gekennzeichnet ist. Dieser Zweig ist die graphische Darstellung des negativen Wurzelzweiges von (3.26a). In den Abbildungen 3.2 und 3.3 ist jeweils der Wert der ungestörten Grundlösung als Vergleich zur Entwicklung angegeben.

Zusätzlich sind in die Abbildung 3.2 die Tangenten an  $\bar{u}_{r,1}$  und  $\bar{u}_{r,2}$  im Punkt  $\Delta = 0$  eingezeichnet. Man erkennt, dass diese nicht horizontal sind, daher geht  $\bar{u}_r$  mit einem "Knick" in die parallele Anströmung über.

Da  $\vartheta_1$  und der Öffnungswinkel, der nach Beziehung (3.7) in  $c_r$  "verborgen" ist, Teil der Lösung sind, kann man die Abbildungen der Gleichungen (3.26) nur vor der Berechnung erstellen, indem man empirische Daten heranzieht. Hier ist die Wahl der konkreten Werte von  $\vartheta_1, \vartheta_2$  zur Erstellung der Abbildungen 3.2 und 3.3, 3.4 und der empirischen Parameter des  $k$ -Gleichungsmodells ein Vorgriff auf den nächsten Abschnitt 3.3.3.

Die azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{u}_{\vartheta,1}$  bzw.  $\bar{u}_{\vartheta,2}$  unterscheiden sich kaum von einander, wie man in Abbildung 3.3 sieht. Das Verhalten von  $k$  nahe dem Rand laut Gleichung (3.26a) ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

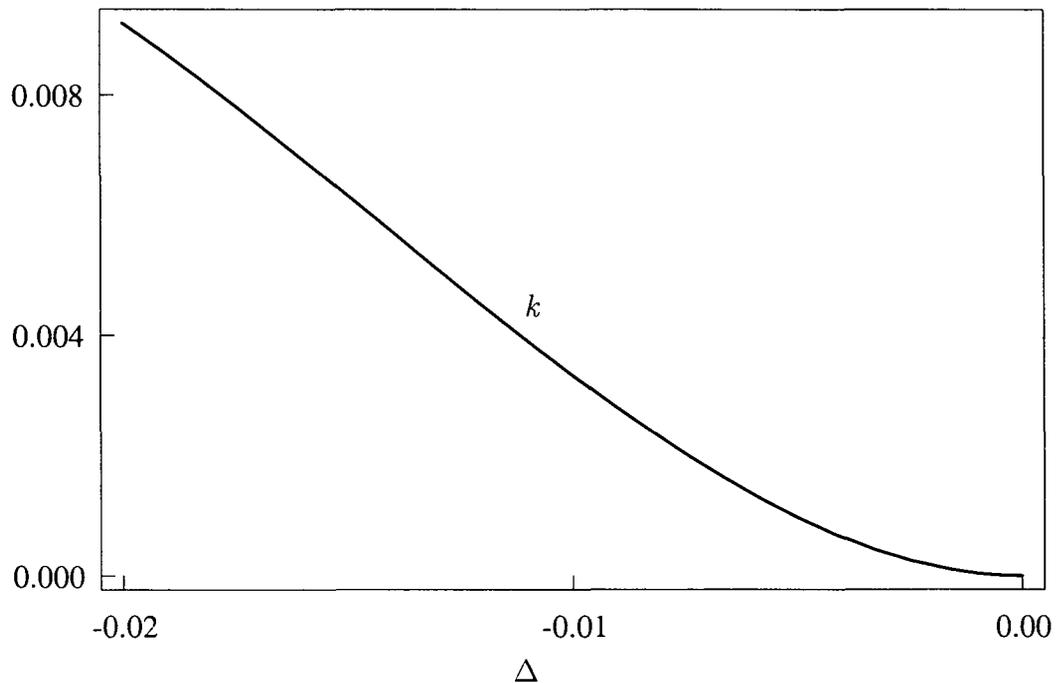


Abbildung 3.4:  $k$  in der Nähe des Randes;  $c_r c_\mu = 0.0048$ ,  $c_D/c_r = 16.6$ ,  $\sigma_k = 2.2$ ,  $\vartheta_1 = 2.19^\circ$

Die Betrachtung der Gleichungen (3.26) zeigt, dass die Konstante  $\sigma_k$  des Diffusions-terms nicht beliebig gewählt werden kann. Für  $\sigma_k = 2$  gehen die drei Zweige ineinander

über und stellen die ungestörte Anströmung dar. Soweit es den  $O(\Delta^2)$  Term betrifft, muss für reelle Lösungen  $\sigma_k \geq 2$  sein. Abbildung 3.5 zeigt Linien konstanter Werte des Koeffizienten des  $\Delta^2$ -Terms der Entwicklung von  $\bar{u}_{\vartheta,2}$  (Gleichung (3.26a)), dividiert durch  $\sin \vartheta_1$ , in Abhängigkeit der empirischen Konstanten. Bedenkt man, dass realistische Öffnungswinkel in Radianten von der Größenordnung  $O(10^{-1})$  sind, sollten die gewählten Werte von  $\sigma_k$  bei maximal ungefähr 2.5 liegen, um einen Koeffizienten des  $\Delta^2$ -Terms der Größenordnung  $O(1)$  zu erhalten.

Betrachtet man die nächste Ordnung  $O(\Delta^3)$ , ergibt sich des Weiteren, dass für  $2.5 \leq \sigma_k < 3$  ein Vorzeichenwechsel dieses Terms auftritt. Die Abbildung 3.6 zeigt Linien konstanter Werte des Koeffizienten von  $\Delta^3$ , dividiert durch  $\cos \vartheta_1$ , in Abhängigkeit der empirischen Konstanten. Wählt man  $\Delta$  klein genug, so spielt der Vorzeichenwechsel keine Rolle. Aber ab einer bestimmten Größe von  $\Delta$  ist  $\bar{u}_{r,2}$  eine steigende Funktion und  $\bar{u}_{r,1}$  eine fallende Funktion von  $\Delta$ , das heißt  $\bar{u}_{r,2}$  wird größer und  $\bar{u}_{r,1}$  kleiner als die Anströmungsgeschwindigkeit. Daher vertauschen die beiden Lösungen im physikalischen Sinn ihre Rollen. Jene mit 1 indizierten Geschwindigkeitskomponenten wären nun als die physikalisch sinnvolle Beschreibung des Verhaltens nahe dem Rand zu wählen. Bei  $\sigma_k = 3$  tritt eine Singularität auf und der Koeffizient der Ordnung  $O(\Delta^3)$  würde über die Terme niedrigerer Ordnung dominieren, wenn man einen Wert von  $\sigma_k$  nahe der Singularität wählt.

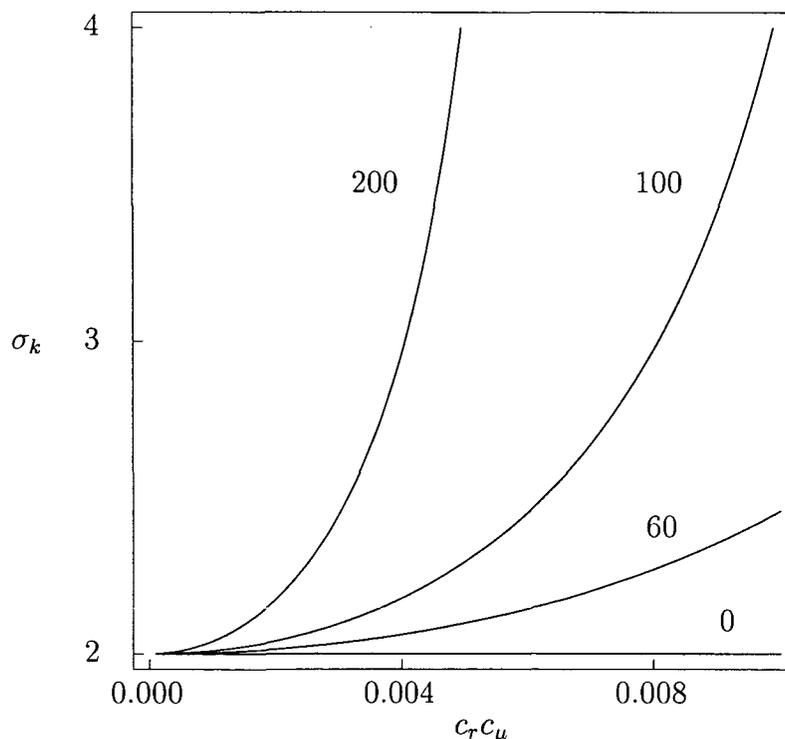


Abbildung 3.5: Linien konstanter Werte des Koeffizienten  $\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{d^2 \bar{u}_{\vartheta,2}}{d\Delta^2} \Big|_0$  der Ordnung  $O(\Delta^2)$  der Entwicklung von  $\bar{u}_{\vartheta}$  in der Nähe des Randes abhängig von  $\sigma_k$  und  $c_r c_\mu$

Aus dem oben diskutierten ergibt sich, dass nur die folgende Wahl für  $\sigma_k$  sinnvoll scheint, um endliche und reelle Koeffizienten in der Entwicklung (3.26) zu erhalten:

$$2 < \sigma_k < 2.5. \quad (3.27)$$

Dies steht im Widerspruch zu dem normalerweise gewählten Wert von  $\sigma_k \approx 1$  (vgl. Rodi [26]). Der Einfluss des Diffusionsterms in der  $k$ -Gleichung (3.21) wird also zumindest halbiert. Im nächsten Abschnitt 3.3.3 wird die konkrete Wahl der restlichen empirischen Parameter des  $k$ -Gleichungsmodells diskutiert.

Da die Vorgangsweise am anderen Rand der Trennschicht völlig analog nachzuvollziehen ist, wird diese nicht extra angeführt.

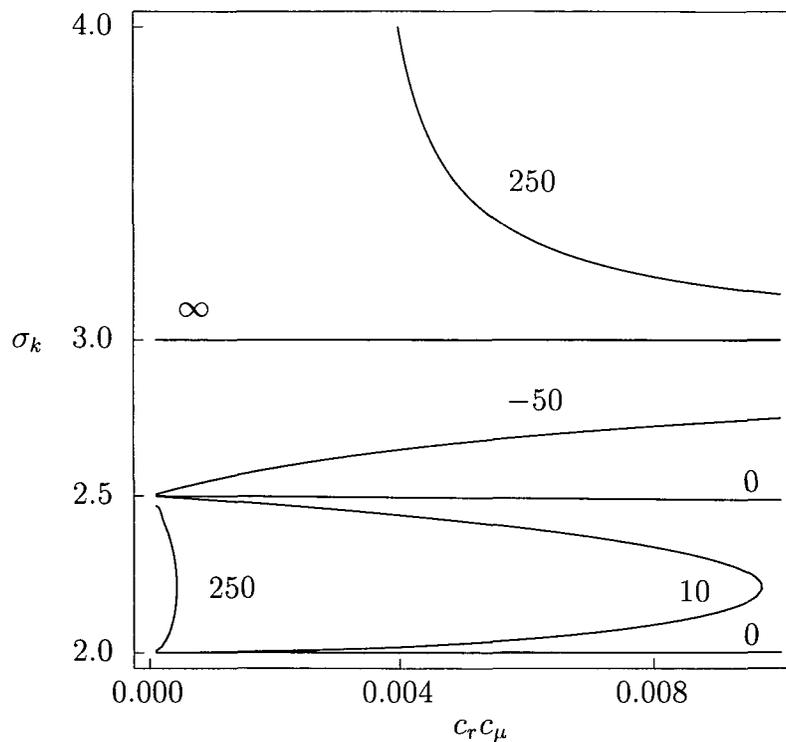


Abbildung 3.6: Linien konstanter Werte des Koeffizienten  $\frac{1}{\sin \vartheta_1} \left. \frac{d^3 \bar{u}_{\vartheta, 2}}{d\Delta^3} \right|_0$  der Ordnung  $O(\Delta^3)$  der Entwicklung von  $\bar{u}_{\vartheta}$  in der Nähe des Randes abhängig von  $\sigma_k$  und  $c_r c_\mu$

### 3.3.3 Numerische Lösung für $\delta = 0.7$

Auf jeder Seite der Trennschicht sind jeweils eine Randbedingung für  $k$  und zwei für die Geschwindigkeitskomponenten anzuwenden, insgesamt also sechs Randbedingungen. Die Bewegungsgleichung (3.19) und die  $k$ -Gleichung (3.21) ergeben ein Differentialgleichungssystem dritter Ordnung. Zusätzlich sind die Winkel  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  zu ermitteln. Man hat fünf Konstanten zur Anpassung der Lösung an die sechs Randbedingungen (3.11).

Da mathematisch gesehen eine Randbedingung zu viel vorhanden ist, können im Allgemeinen nicht alle erfüllt werden. Die  $\bar{u}_r$ -Komponente ist die bei weitem dominantere Geschwindigkeitskomponente und deswegen für Messungen leicht zugänglich. Die turbulente kinetische Energie  $k$  kann ebenfalls mit vorhanden Messdaten verglichen werden. Für die  $\bar{u}_\vartheta$ -Komponente findet man keine Messdaten in der Literatur, ein direkter Vergleich wird dadurch unmöglich. Es ist daher naheliegend, z. B. die Randbedingung  $\bar{u}_\vartheta(\vartheta_2) = -(1 - \delta) \sin \vartheta_2$  auf der Seite der kleineren Anströmgeschwindigkeit vorerst einmal beiseite zu lassen. Überprüfbar bleibt allerdings, in wie weit die zentrale Forderung der vorliegenden Arbeit, kein laterales Einstromen in die Trennschicht zuzulassen, erfüllt ist. In den Abbildungen 3.7, 3.8 und 3.9 ist die numerische Lösung der Bewegungs-

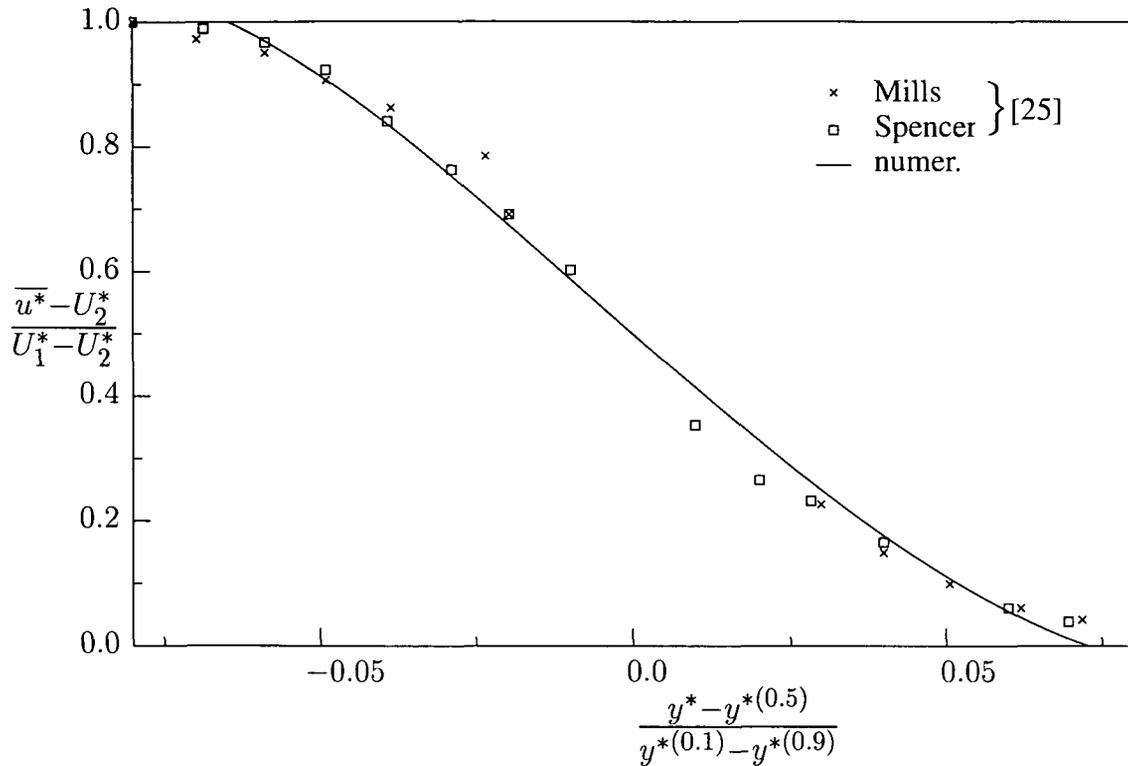


Abbildung 3.7:  $\bar{u}$ -Komponente des numerisch ermittelten Geschwindigkeitsprofils ( $\delta = 0.7$ ,  $cc_\mu = 0.004665$ ,  $c_D/c = 1.715$ ,  $\sigma_k = 2.2$ ) im Vergleich mit experimentellen Daten (Rodi[25])

gleichung (3.19) und der  $k$ -Gleichung (3.21) mit Hilfe der Entwicklung am Rand (3.22) angegeben. Abramovich [1, S. 36-42] gibt eine Abschätzung an, aus der folgt, dass das Breitenwachstum der Trennschicht proportional zum Quotienten aus der Differenz und der Summe der Anströmgeschwindigkeiten  $U_1^*$  und  $U_2^*$  ist. Diese Beziehung wird häufig in der folgenden Form angegeben:

$$\sigma_0(\vartheta_1 - \vartheta_2) \approx \sigma_0 \Delta\eta = 2 \frac{U_1^* - U_2^*}{U_1^* + U_2^*} = 2 \frac{\delta}{2 - \delta}. \quad (3.28)$$

Die Konstante  $\sigma_0$  entspricht dem halben Öffnungswinkel im Fall  $U_2^* = 0$ , während der Anstieg  $\Delta\eta/2$  für beliebige Geschwindigkeitswerte  $U_2^* \neq 0$  in der Literatur oft mit  $1/\sigma$

bezeichnet wird. Sabin [29] erzielt gute Übereinstimmung mit seinen Messergebnissen für beliebiges  $\delta$ , indem er den von Liepmann und Laufer [16] angegebenen Wert von  $\sigma_0 = 11$  verwendet. In einer neueren Arbeit berichten Mehta und Westphal [17], dass die beste Übereinstimmung mit deren Messungen für  $\sigma_0 = 10.5$  erreicht wird. Aus diesem Grund wird dieser Wert auch hier verwendet.

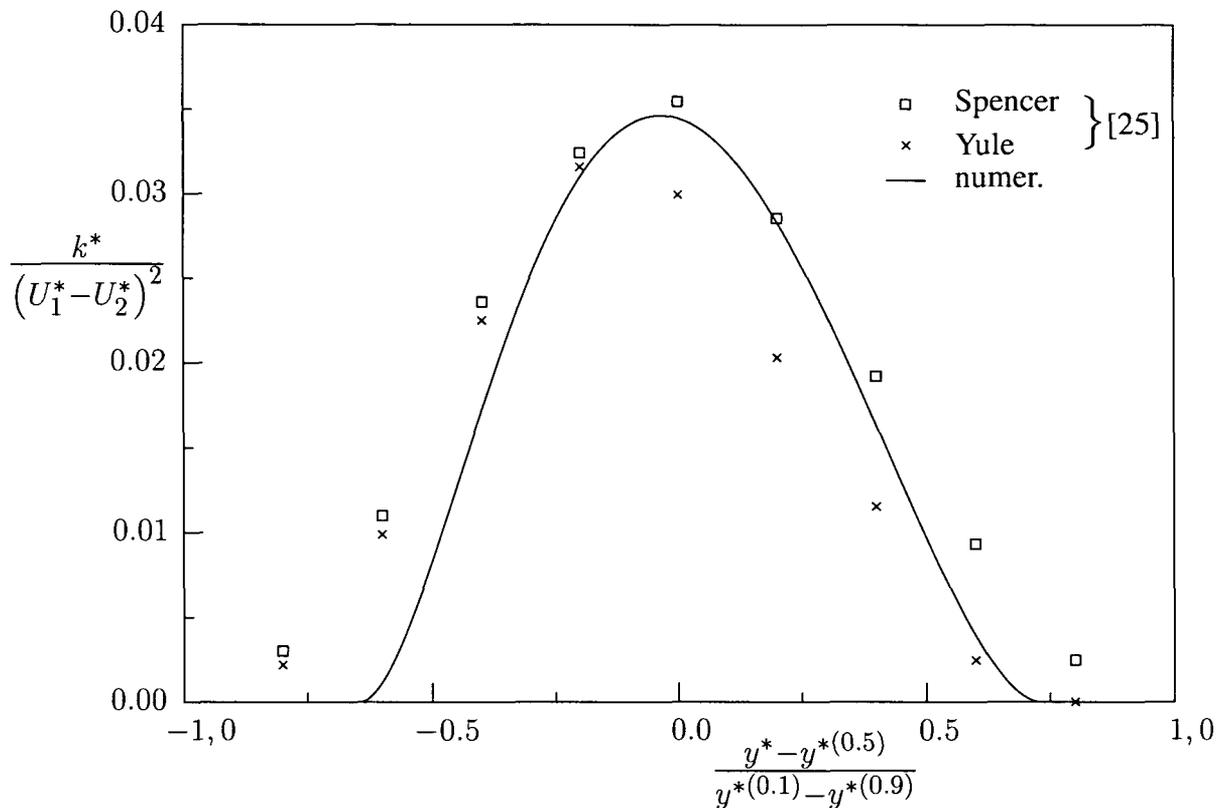


Abbildung 3.8: Numerische ermittelte turbulente kinetische Energie  $k$  ( $\delta = 0.7$ ,  $cc_\mu = 0.004665$ ,  $c_D/c = 1.715$ ,  $\sigma_k = 2.2$ ) im Vergleich mit experimentellen Daten (Rodi[25])

Im Fall von  $\delta = 0.7$  folgt daraus, dass ein Öffnungswinkel  $\vartheta_1 - \vartheta_2$  von etwa  $6^\circ$  zu erwarten ist. Wegen der Ausführungen des vorigen Abschnittes kann für  $\sigma_k$  nicht der Standardwert  $\sigma_k = 1$  gewählt werden. Es ist zu erwarten, dass dann auch die verbleibenden empirischen Parameter nicht entsprechend der Standardwerte gewählt werden können. Zur Anpassung der empirischen Parameter ist der abgeschätzte Wert des Öffnungswinkel benutzt worden. Die folgenden Werte der empirischen Parameter sind verwendet worden:

$cc_\mu$	$\frac{c_D}{c}$	$\sigma_k$
0.04665	1.715	2.2

In dieser Tabelle sind nicht die einzelnen Werten von  $c$ ,  $c_\mu$  und  $c_D$  angeführt, weil nur die angegebenen Produkte und Quotienten in den Differentialgleichung (3.19) und (3.21) eine Rolle spielen. Der empirische Parameter  $c$  wird statt  $c_r$  verwendet, weil die Verwendung von  $c_r$  eine starke Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, denn  $c_r$  hängt definitionsgemäß (s. Gl. (3.7)) vom Öffnungswinkel ab. Für die in der Literatur übliche Wahl von

$c_\mu = 0.08$  (vgl. Launder [13]) ergibt sich, dass der Parameter  $c$  den Wert  $c = 0.583$  hat. Dieser ermittelte Wert stimmt ebenfalls relativ gut mit dem in der Literatur angegebenen Wert (vgl. Launder [13]) von  $c = 0.879$  überein. Mit  $c_D = 1$  aus der Literatur (vgl. Launder [13]) ist der in der Tabelle angegebene Wert der Kehrwert von  $c = 0.583$ .

Der Graph 3.7 zeigt einen Vergleich der aus  $\bar{u}_r$  und  $\bar{u}_\theta$  ermittelten kartesischen Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung über der mit der Breite der Trennschicht dimensionslos gemachten  $y$ -Koordinate. Außerdem ist die  $y$ -Koordinate um genau jenen Wert verschoben, um deren Ursprung mit dem Mittelwert der beiden Anströmungsgeschwindigkeiten zusammenfallen zu lassen. Der Vorteil dieser Verschiebung ist, dass die Geschwindigkeitsverläufe unabhängig vom relativen Geschwindigkeitsverhältnis  $\delta$  angegeben werden können, denn alle fallen in einer Kurve zusammen. Sämtliche Experimentatoren vermeiden allerdings auf diese Weise den Wert der Auslenkung der Grenzschicht überhaupt anzugeben. Aus den numerischen Berechnungen folgt, dass die Trennschicht um  $-1.521^\circ$  verdreht ist.

Die Abbildung 3.8 gibt einen Vergleich zwischen dem numerischen Ergebnis des  $k$ -Verlaufes über der auf dieselbe Weise wie in Abbildung 3.7 dimensionslos gemachten  $y$ -Koordinate wieder. Die angegebenen Messwerte zweier verschiedener Quellen stimmen nicht gut überein und daher kann von dem numerisch ermittelten  $k$ -Verlauf behauptet werden, dass dieser qualitativ gute Übereinstimmung zeigt.

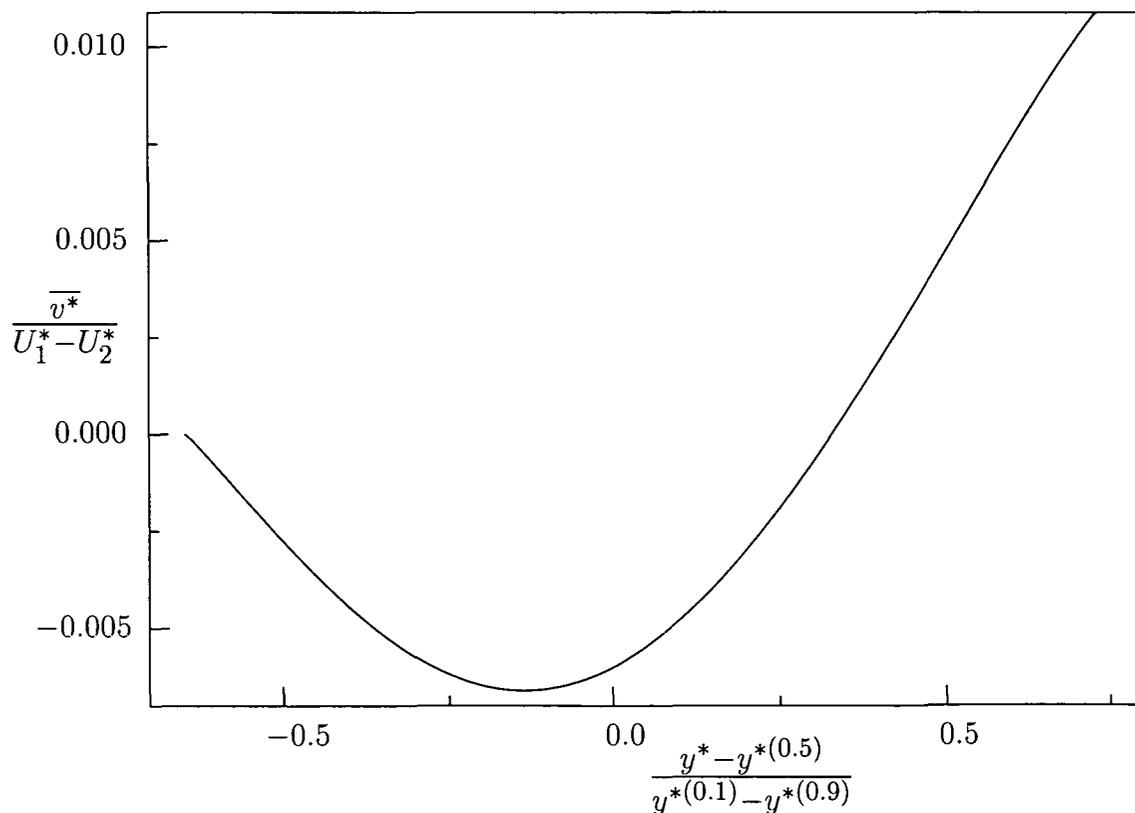


Abbildung 3.9:  $\bar{v}$ -Komponente des numerisch ermittelten Geschwindigkeitsprofils;  $\delta = 0.7$ ,  $cc_\mu = 0.004665$ ,  $c_D/c = 1.715$ ,  $\sigma_k = 2.2$

Die aus  $\bar{u}_r$  und  $\bar{u}_\vartheta$  ermittelte kartesische Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung sieht man in der Abbildung 3.9. Den gewählten Randbedingungen entsprechend verschwindet die  $v$ -Komponente nur auf der Seite der größeren Anströmungsgeschwindigkeit. Der numerisch ermittelte Wert von  $\bar{u}_\vartheta$  am Rand  $\vartheta_2$  mit der kleineren Anströmungsgeschwindigkeit beträgt  $\bar{u}_\vartheta(\vartheta_2 = -3.708^\circ) = 0.02703$ . Nimmt man denselben Wert von  $\vartheta_2$  und setzt diesen Winkel in die entsprechende Randbedingung für die ungestörte Anströmung ein, so findet man  $-(1 - \delta) \sin(\vartheta_2 = -3.708^\circ) = 0.01940$ . Der zuletzt angegebene Wert müsste aus der numerischen Rechnung folgen, wenn die Anströmung auf der Seite  $\vartheta_2 = -3.708^\circ$  ungestört wäre. Das Verhältnis des numerisch errechneten Wertes zu dem fiktiven Wert für die ungestörte Anströmung ist

$$\frac{\bar{u}_\vartheta(\vartheta_2 = -3.708^\circ)}{-(1 - \delta) \sin(\vartheta_2 = -3.708^\circ)} \approx 1.4. \quad (3.29)$$

Die Forderung, kein laterales Einströmen auf beiden Seiten der Trennschicht zuzulassen, ist am Rand  $\vartheta_2$  nicht annähernd erfüllt. Dieser Umstand wird auch durch die Abbildung 3.9 verdeutlicht.

Die Abbildung 3.10 zeigt die einzelnen Terme der  $k$ -Gleichung (3.21) abhängig vom Winkel  $\vartheta$  in Radianen.

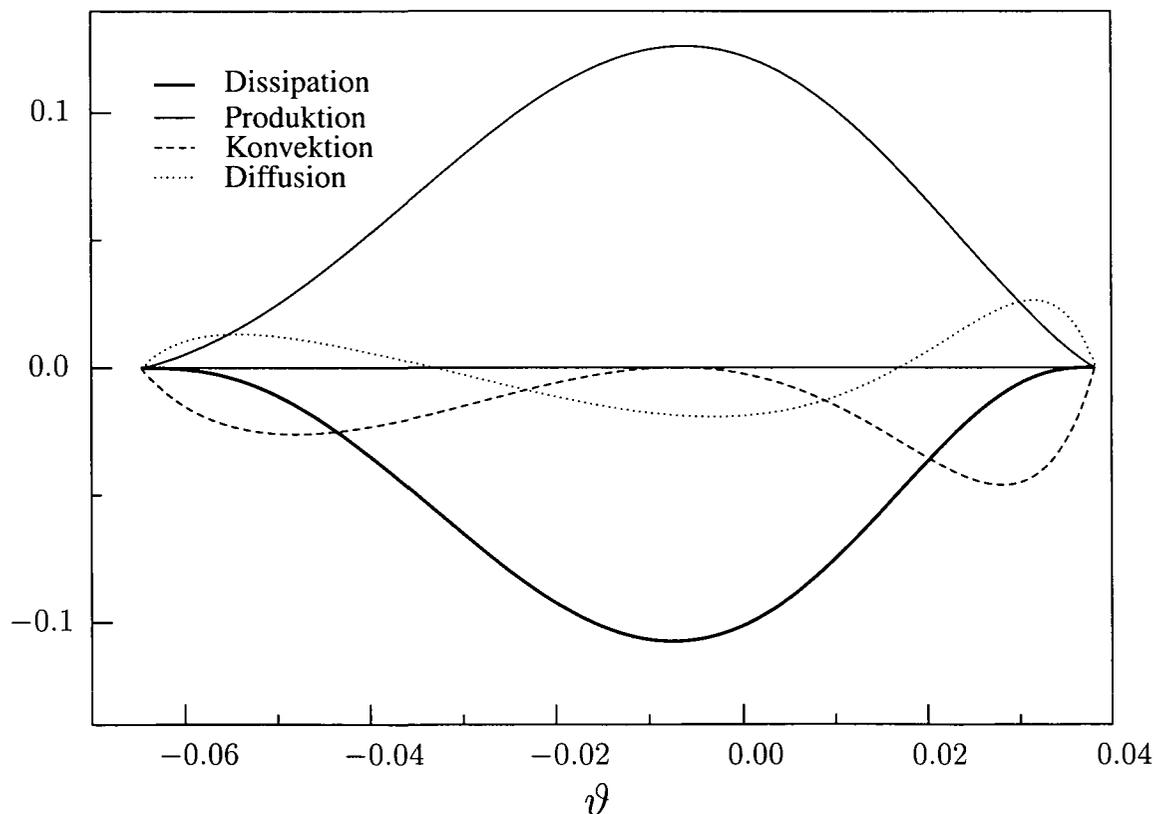


Abbildung 3.10: Bilanz der turbulenten kinetischen Energie  $k$ ;  $\delta = 0.7$ ,  $cc_\mu = 0.004665$ ,  $c_D/c = 1.715$ ,  $\sigma_k = 2.2$

Die Frage, wie dieses Problem behoben werden kann, wird im nächsten Kapitel er-

örtert. Es wäre wünschenswert, einen Parameterbereich der empirischen Konstanten zu finden, der die Erfüllung der fehlenden Randbedingung zulässt. Es hat sich als praktisch nicht durchführbar erwiesen, dies mit numerischen Mitteln zu versuchen. Da aber schon zum Auffinden von Startlösungen für die numerischen Untersuchung Entwicklungen nach kleinen Unterschieden der Zuströmgeschwindigkeiten durchgeführt worden sind, hat sich angeboten, den analytischen Weg weiter zu verfolgen. Außerdem wird im nächsten Kapitel gezeigt, dass es mit dem  $k$ -Gleichungsmodell prinzipielle Probleme gibt, einen geeigneten Parameterbereich zu finden.

## 4 Entwicklung für kleine Unterschiede der Zuströmgeschwindigkeiten

Im Folgenden wird die Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  verwendet, weil unter anderem das Reynolds-  
spannungstransportmodell zur Schließung der Bewegungsgleichungen verwendet wird.  
Da in der Literatur keine Darstellung dieses Modells in Zylinderkoordinaten gefunden  
worden ist, relativiert sich die oben besprochene Vereinfachung der Darstellung in Zylind-  
derkoordinaten durch den Aufwand der Umrechnung.

### 4.1 Impulssatz

Zu Beginn soll die Anwendung des Impulssatzes betrachtet werden, um zu untersuchen,  
ob dies weiterführende Erkenntnisse bringen kann. Die zentrale Forderung der vorliegen-  
den Arbeit ist, dass die Trennschicht die Anströmungen nicht stört. Aus dieser Forderung  
folgt, dass in das Kontrollvolumen gemäß Abbildung 3.1 durch die obere und die untere  
Grenzfläche weder Masse- noch Impulstransport erfolgen kann. Es spielt nur die Bilanz  
der einströmenden und ausströmenden Masse und des einströmenden und ausströmen-  
den Impuls durch die Grenzflächen normal auf die Strömungsrichtung eine Rolle. Die  
Massenerhaltung in integraler Form wird daher zu:

$$\int_0^{b_1^*} (1 - \bar{u}) dy^* = \int_{-b_2^*}^0 [\bar{u} - (1 - \delta)] dy^*, \quad (4.1)$$

wobei die Geschwindigkeit wieder mit der größeren Anströmungsgeschwindigkeit  $U_1^*$   
dimensionslos gemacht worden ist. Die beiden Teilabschnitte der Breite  $b_1^*$  und  $b_2^*$  sollen  
die Lage der Trennschicht beschreiben.

Der Impulssatz über dasselbe Kontrollvolumen und denselben Voraussetzungen wird  
zu:

$$\int_0^{b_1^*} (1 - \bar{u}^2) dy^* - \int_{-b_2^*}^0 [u^2 - (1 - \delta)^2] dy^* = - \int_{-b_2^*}^{b_1^*} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) dy^*. \quad (4.2)$$

Auf diesen Ausdruck kommt man, indem man den Impulssatz aus den Reynoldsschen  
Bewegungsgleichungen herleitet (vgl. Rotta [28]): In Grenzschichtnäherung folgt aus der  
Reynoldsschen Bewegungsgleichung in  $y$ -Richtung (2.3b), dass

$$p = p_0 - \overline{v'^2}. \quad (4.3)$$

Diesen Ausdruck verwendet man, um in der Reynoldsschen Bewegungsgleichung in  $x$ -  
Richtung (2.3a) den Druck zu eliminieren, integriert diese über  $y$  und vernachlässigt den  
aufgeprägten Druck  $p_0$  unter der Annahme, dass er sich in  $x$ -Richtung nicht ändert.

Die linke Seite der Gleichung (4.2) läßt sich umschreiben in

$$\int_0^{b_1^*} (1 - \bar{u}) (1 + \bar{u}) dy^* - \int_{-b_2^*}^0 [u - (1 - \delta)] [u + (1 - \delta)] dy^* = \quad (4.4a)$$

$$= \int_0^{b_1^*} (1 - \bar{u}) [2 + O(\delta)] dy^* - \int_{-b_2^*}^0 [u - (1 - \delta)] [2 + O(\delta)] dy^*. \quad (4.4b)$$

In der Gleichung (4.4b) ist als Abschätzung für kleine Unterschiede in den Zuströmgeschwindigkeiten  $\bar{u} = 1 + O(\delta)$  benutzt worden. Die linke Seite des Impulsatzes (4.2), also der Impulstransport, in linearisierter Form (4.4b) geht für  $\delta \rightarrow 0$  in die Massenerhaltung (4.1) über. In diesem Fall führt die völlig isotrope Turbulenz, also das Verschwinden der rechten Seite des Impulsatzes (4.2), zu keinerlei Widerspruch. Offensichtlich ist die Normalspannungsdifferenz  $\overline{u'^2} - \overline{v'^2}$  notwendig, um einen Widerspruch zwischen der integralen Massenerhaltung (4.1) und dem Impulsatz (4.2) für beliebige  $\delta$  (d.h.  $\delta = O(1)$ ) zu vermeiden. Aus diesem Grund wird eine Störungsrechnung für  $\delta \rightarrow 0$  mit Turbulenzmodellen, die anisotrope Turbulenz wiedergeben, unter Einbeziehung von Termen höherer Ordnung durchgeführt. Einen Parameterbereich der Modellkonstanten des  $k$ -Gleichungsmodells in Zylinderkoordinaten aus Abschnitt 3.3 zu suchen, um alle Randbedingungen (3.9) erfüllen zu können, ist daher aus Sicht dieser Betrachtung zum Scheitern verurteilt, weil vollkommene Isotropie herrscht. In den weiteren Untersuchungen wird es daher wichtig sein, ob in der Bewegungsgleichung die Normalspannungen eine Rolle spielen, denn nur in diesem Fall kann eine Lösung des Problems unter Berücksichtigung der Randbedingungen (3.9) gefunden werden.

## 4.2 Koordinatenstreckung und Störungsansatz

Experimentelle Befunde zeigen, dass die Trennschicht mit kleiner werdendem Geschwindigkeitsunterschied schlanker wird (vgl. Sabin ([29])), daher soll  $\eta$  mit dem relativem Geschwindigkeitsverhältnis  $\delta$  (s. Gl. (3.10)) gestreckt werden. Die gestreckte Koordinate ist

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\delta}. \quad (4.5)$$

Mit dem Störungsansatz

$$F(\bar{\eta}) = \delta F^{(0)}(\bar{\eta}) + \delta^2 F^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^3 F^{(2)}(\bar{\eta}) + \dots, \quad (4.6a)$$

$$k(\bar{\eta}) = \delta^2 k^{(0)}(\bar{\eta}) + \delta^3 k^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^4 k^{(2)}(\bar{\eta}) + \dots, \quad (4.6b)$$

$$\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_1^{(0)} + \delta \bar{\eta}_1^{(1)} + \dots, \quad (4.6c)$$

$$\bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_2^{(0)} + \delta \bar{\eta}_2^{(1)} + \dots \quad (4.6d)$$

werden die Bewegungsgleichung und die Turbulenzmodelle daraufhin untersucht, ob alle Randbedingung (3.9) durch eine bestimmte Wahl der Werte der empirischen Parameter erfüllt werden können.

Es liegt auf der Hand, dass  $F^{(0)}(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$  sein muss, um für  $\delta \rightarrow 0$  die ungestörte Anströmung darzustellen und daher sind die weiteren Terme der Entwicklung (4.6a) naheliegend. Da  $k^*$  die Dimension von  $\overline{u'^2}$  hat, ist es notwendig, dass die Entwicklung der

turbulenten kinetischen Energie (4.6b) mit einem  $\delta^2$  Term beginnt. Allerdings wird sich später herausstellen, dass die führende Ordnung der Entwicklung von  $k$  verschwindet. Dies bedeutet, dass für die nicht verschwindenden Terme der führenden Ordnung gilt:

$$\frac{k^*}{u^{*2}} = \frac{k}{\bar{u}^2} \approx \frac{\delta^3 k^{(1)}}{\delta^2 \left( \frac{dF^{(0)}}{d\bar{\eta}} \right)^2} = O(\delta). \quad (4.7)$$

Diese Aussage steht in Einklang mit der Beziehung (2.23) für schlanke Trennschichten.

Es wird dem Sinn der Streckung (4.5) entsprechend erwartet, dass der gestreckte Öffnungswinkel von der Größenordnung 1 ist, also

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\delta} \approx \bar{\eta}_0^{(1)} - \bar{\eta}_0^{(2)} = O(1). \quad (4.8)$$

Die Ansätze (4.6c) und (4.6d) für die Entwicklung von  $\bar{\eta}_1$  und  $\bar{\eta}_2$  sind aus diesem Grund konsistent.

### 4.3 Entwicklung der Randbedingungen

Für die durchgerechnete Entwicklung im Abschnitt 4.5 ist  $k \propto \left( \frac{d^2 F}{d\bar{\eta}^2} \right)^2$  und die Randbedingungen (3.9) in der gestreckten Koordinate  $\bar{\eta}$  werden zu:

$$\left. \frac{dF(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} \right|_{\bar{\eta}_1} = \delta \quad F(\bar{\eta}_1) = \delta \bar{\eta}_1 \quad \left. \frac{d^2 F(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}^2} \right|_{\bar{\eta}_1} = 0 \quad (4.9a)$$

$$\left. \frac{dF(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} \right|_{\bar{\eta}_2} = \delta(1 - \delta) \quad F(\bar{\eta}_2) = \delta(1 - \delta) \bar{\eta}_2 \quad \left. \frac{d^2 F(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}^2} \right|_{\bar{\eta}_2} = 0. \quad (4.9b)$$

Für ein freies Randwertproblem ist es notwendig, die Entwicklung der Position des Randes (4.6c) und (4.6d) mit der Entwicklung für die abhängigen Größen (4.6a) in Einklang zu bringen. Dazu entwickelt man den  $n$ -ten Term  $F^{(n)}$  der Entwicklung (4.6a) an den beiden Rändern um den jeweiligen Randwinkel  $\bar{\eta}_1^{(0)}$  bzw.  $\bar{\eta}_2^{(0)}$  in eine Taylorreihe

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\bar{\eta}_i) &= F^{(n)}(\bar{\eta}_i^{(0)}) + \left. \frac{dF^{(n)}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} \right|_{\bar{\eta}_i^{(0)}} \underbrace{\left( \delta \bar{\eta}_i^{(1)} + \delta^2 \bar{\eta}_i^{(2)} + \dots \right)}_{=(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_i^{(0)})} + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 F^{(n)}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}^2} \right|_{\bar{\eta}_i^{(0)}} \left( \delta \bar{\eta}_i^{(1)} + \delta^2 \bar{\eta}_i^{(2)} + \dots \right)^2 + \dots \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

und setzt diese in (4.6a) ein. Schließlich erhält man für  $F(\bar{\eta}_i)$ :

$$\begin{aligned}
F(\bar{\eta}_i) &= \delta F^{(0)} + \\
&+ \delta^2 \left( \bar{\eta}_i^{(1)} F^{(0)'} + F^{(1)} \right) + \\
&+ \delta^3 \left( \bar{\eta}_i^{(2)} F^{(0)'} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_i^{(1)2} F^{(0)''} + \bar{\eta}_i^{(1)} F^{(1)'} + F^{(2)} \right) + \dots \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

In der obigen Formel ist als Abkürzung, um die Lesbarkeit zu erhalten,  $F^{(n)}$  anstatt von  $F^{(n)}(\bar{\eta}_i^{(0)})$  und  $F^{(n)(j)}$  anstatt von  $\left. \frac{d^j F^{(n)}(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}^j} \right|_{\bar{\eta}_i^{(0)}}$  geschrieben worden.

Mit (4.11) werden einerseits die Randbedingungen (4.9a), geordnet nach Potenzen von  $\delta$ , zu

$$\delta : F^{(0)'}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 1 \quad F^{(0)}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = \bar{\eta}_1^{(0)} \quad F^{(0)''}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \tag{4.12a}$$

$$\delta^2 : F^{(1)'}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \quad F^{(1)}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \quad F^{(1)''}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \tag{4.12b}$$

$$\delta^3 : F^{(2)'}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \quad F^{(2)}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = 0 \quad F^{(2)''}(\bar{\eta}_1^{(0)}) = -F^{(1)'''}(\bar{\eta}_1^{(0)}) \bar{\eta}_1^{(1)}, \tag{4.12c}$$

während aus (4.9b)

$$\delta : F^{(0)'}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 1 \quad F^{(0)}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = \bar{\eta}_2^{(0)} \quad F^{(0)''}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 0 \tag{4.13a}$$

$$\delta^2 : F^{(1)'}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = -1 \quad F^{(1)}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = -\bar{\eta}_2^{(0)} \quad F^{(1)''}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 0 \tag{4.13b}$$

$$\delta^3 : F^{(2)'}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 0 \quad F^{(2)}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 0 \quad F^{(2)''}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = -F^{(1)'''}(\bar{\eta}_2^{(0)}) \bar{\eta}_2^{(1)} \tag{4.13c}$$

folgt.

#### 4.4 Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichung mit $k$ -Transportgleichung

Die im Abschnitt 3.1 vorgestellte Ähnlichkeitsvariable und die daraus resultierende Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten (3.4) durch die Stromfunktion  $\psi = xF(\eta)$  werden nun verwendet. Laut Skizze 3.1 sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  die Orte des oberen und des unteren Randes der Trennschicht.

Nach Einsetzen des Ähnlichkeitsansatzes in die Bewegungsgleichungen (2.3) kann man den Druck eliminieren, indem man die Gleichung (2.3b) mit  $\eta$  multipliziert und danach zu Gleichung (2.3a) addiert:

$$-(1 + \eta^2) F \frac{d^2 F}{d\eta^2} = (\eta^2 - 1) \frac{d\bar{u}'v'}{d\eta} + \eta \frac{d}{d\eta} (\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2). \tag{4.14}$$

Den folgenden Entwicklungen wird die Bewegungsgleichung (4.14) zugrunde gelegt sein. Zum Schließen des Gleichungssystems wird einerseits die  $k$ -Gleichung andererseits das

Reynoldsspannungstransportmodell verwendet. Zuerst wird untersucht, wie sich das  $k$ -Gleichungsmodell in der Ähnlichkeitsvariable  $\eta$  im Vergleich zu der Darstellung in Zylinderkoordinaten verhält. Die Reynoldsspannungen (2.7) werden mit Hilfe des Ähnlichkeitsansätze (3.4) auf die folgende Form gebracht:

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k + 2c(\eta_1 - \eta_2)c_\mu\eta\sqrt{k}\frac{d^2F}{d\eta^2} \quad (4.15a)$$

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3}k - 2c(\eta_1 - \eta_2)c_\mu\eta\sqrt{k}\frac{d^2F}{d\eta^2} \quad (4.15b)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3}k \quad (4.15c)$$

$$\overline{u'v'} = c(\eta_1 - \eta_2)c_\mu(\eta^2 - 1)\sqrt{k}\frac{d^2F}{d\eta^2} \quad (4.15d)$$

$$\overline{u'w'} = 0 \quad (4.15e)$$

$$\overline{v'w'} = 0. \quad (4.15f)$$

Durch Einsetzen der Reynoldsspannungen (4.15) in die vollständige Bewegungsgleichung (4.14) erhält man in der gestreckten Koordinate  $\bar{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{-(1 + \delta^2\bar{\eta}^2)FF''}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{4\delta^2c_\mu c(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)\bar{\eta}\frac{d}{d\bar{\eta}}(\bar{\eta}\sqrt{k}F'')}_{\text{Normalspannungen}} + \\ &+ \underbrace{c_\mu c(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)(1 - \delta^2\bar{\eta}^2)\frac{d}{d\bar{\eta}}[(1 - \delta^2\bar{\eta}^2)\sqrt{k}F'']}_{\text{Scherspannung}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

In dieser Gleichung (4.16) und im restlichen Verlauf dieses Abschnittes wird wegen der Übersichtlichkeit  $'$  für  $\frac{d}{d\bar{\eta}}$  geschrieben. Setzt man die Störansätze (4.6) in die obige Gleichung (4.16) ein und verwendet die Tatsache, dass die ungestörte Anströmung  $F^{(0)}(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$  ist, erhält man geordnet nach Potenzen von  $\delta$  die folgenden Beziehungen für  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $k^{(0)}$  und  $k^{(1)}$ :

$$\delta^3 : \quad \bar{\eta}F^{(1)''} + c_\mu c(\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)})\frac{d}{d\bar{\eta}}(\sqrt{k^{(0)}}F^{(1)''}) = 0 \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned} \delta^4 : \quad &\bar{\eta}F^{(2)''} + F^{(1)}F^{(1)''} + \\ &+ c_\mu c(\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)})\frac{d}{d\bar{\eta}}\left(\sqrt{k^{(0)}}F^{(2)''} + \frac{1}{2}\frac{k^{(1)}}{\sqrt{k^{(0)}}}F^{(1)''}\right) + \\ &+ c_\mu c(\bar{\eta}_1^{(1)} - \bar{\eta}_2^{(1)})\frac{d}{d\bar{\eta}}(\sqrt{k^{(0)}}F^{(1)''}) = 0. \end{aligned} \quad (4.17b)$$

Verwendet man die Beziehungen (4.15) für die Reynoldsschen Spannungen in der  $k$ -Gleichung in der gestreckten Ähnlichkeitsvariable  $\bar{\eta}$ , so hat diese die folgende Form:

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\delta^2 F k'}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\frac{c_\mu c}{\sigma_k} (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) \left[ \delta^4 \eta \frac{d}{d\bar{\eta}} (\eta \sqrt{k} k') + \delta^2 \frac{d}{d\bar{\eta}} (\sqrt{k} k') \right]}_{\text{Diffusion}} - \\
&\quad - \underbrace{c_\mu c (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2) \sqrt{k} (F'')^2 (1 + \delta^2 \eta)^2}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\delta^2 \frac{c_D}{c_\mu c} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)}}_{\text{Dissipation}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Somit ergeben sich für die mit den einzelnen Ordnungen der Bewegungsgleichung korrespondierenden Gleichungen der  $k$ -Transportgleichung:

$$\begin{aligned}
\delta^5 : \bar{\eta} k^{(0)'} + \frac{c_\mu c}{\sigma_k} (\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}) \frac{d}{d\bar{\eta}} (\sqrt{k^{(0)}} k^{(0)'}) - \\
c_\mu c (\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}) \sqrt{k^{(0)}} (F^{(1)''})^2 - \frac{c_D}{c_\mu c} \frac{(k^{(0)})^{\frac{3}{2}}}{(\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)})} = 0
\end{aligned} \tag{4.19a}$$

$$\begin{aligned}
\delta^6 : F^{(1)} k^{(0)'} + \bar{\eta} k^{(1)'} + \\
+ \frac{c_\mu c}{\sigma_k} \left[ (\bar{\eta}_1^{(1)} - \bar{\eta}_2^{(1)}) \frac{d}{d\bar{\eta}} (\sqrt{k^{(0)}} k^{(0)'}) + (\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}) \frac{d^2}{d\bar{\eta}^2} (\sqrt{k^{(0)}} k^{(1)}) \right] - \\
- c_\mu c \left\{ \left[ (\bar{\eta}_1^{(1)} - \bar{\eta}_2^{(1)}) \sqrt{k^{(0)}} + \frac{\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}}{2} \frac{k^{(1)}}{\sqrt{k^{(0)}}} \right] (F^{(1)''})^2 \right\} - \\
- c_\mu c \left[ 2 (\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}) \sqrt{k^{(0)}} F^{(1)''} F^{(2)''} \right] - \\
- \frac{c_D}{c_\mu c} \left[ \frac{\bar{\eta}_1^{(1)} - \bar{\eta}_2^{(1)}}{(\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)})^2} (k^{(0)})^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \sqrt{k^{(0)}} k^{(1)}}{2 (\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)})} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.19b}$$

Aus der Entwicklung der Bewegungsgleichung sieht man, dass weder für  $F^{(1)}$  noch für  $F^{(2)}$  die Normalspannungsterme eine Rolle spielen. Die Entwicklung unterscheidet sich bis zu dieser Ordnung nicht von der Grenzschichtgleichung. Erst in der nächsten Ordnung, also für  $F^{(3)}$ , hätte der Normalspannungsterm einen Einfluß, was allerdings zu spät ist. Wie im Abschnitt 4.5 gezeigt wird, braucht man zur Bestimmung von  $F^{(1)}$  den Normalspannungsterm noch nicht, um alle Randbedingungen erfüllen zu können. Allerdings ist das Vorhandensein der Normalspannungen in der Bestimmungsgleichung von  $F^{(2)}$  essentiell zur Erfüllung aller Randbedingungen. Dies ist in vollem Einklang mit Kapitel 3.3, wo die Isotropie der Normalspannungen in Zylinderkoordinaten offensichtlich ist. Die Darstellung in kartesischen Koordinaten zeigt ebenfalls, dass das  $k$ -Gleichungsmodell mit der Verwendung des Boussinesq-Ansatzes für die turbulenten Scheinspannungen isotrope Turbulenz wiedergibt. Nach den Aussagen von Abschnitt 4.1 über den Impulssatz kann dieses Modell prinzipiell nicht dazu beitragen, eine Lösung des Problems zu finden.

Die Entwicklung der  $k$ -Transportgleichung zeigt, dass schon in führender Ordnung keiner der vorkommenden Terme, weder Konvektion, Diffusion, Produktion noch die Dissipation für eine vollständige Behandlung des Problems für  $\delta \ll 1$  zu vernachlässigen sind. Dies steht in Einklang mit Mörwalds Analyse [19], wonach zwar im Hauptteil der Trennschicht das Gleichgewicht aus Produktion und Dissipation dominant ist, aber am Rand alle Terme der  $k$ -Gleichung größenordnungsmäßig von derselben Bedeutung sind. Für kleine relative Geschwindigkeitsunterschiede  $\delta$  und daraus resultierenden kleine Öffnungswinkel wird der gesamte Trennschichtbereich zum "Rand".

## 4.5 Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichungen mit Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschicht-Approximation

### 4.5.1 Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschicht-Approximation

Nachdem im Abschnitt 4.4 festgestellt worden ist, dass für  $\delta \ll 1$  alle Terme in der Modellierung von gleicher Größenordnung sind, müsste man das Reynoldsspannungstransportmodell in vollständiger Form benutzen, wodurch es mit analytischen Mitteln unhandhabbar würde. Im Abschnitt 4.1 über den Impulssatz ist gezeigt worden, dass der Term  $\overline{u'^2} - \overline{v'^2}$  für die Problemlösung von essentieller Bedeutung ist. Da das Reynoldsspannungstransportmodell selbst unter der vereinfachenden Annahme, dass nur die Produktion und die Dissipation eine Rolle spielen, anisotrope Turbulenz liefert (s. Gl. (4.20b), (4.20c) und (4.20d)), wird dieses Modell als ausreichend erachtet und in der Grenzschichtapproximation benützt. Verwendung der Geschwindigkeitskomponenten (3.4) ausgedrückt durch die Stromfunktion  $F(\eta)$  in den Ausdrücken für die turbulenten Scheinschubspannungen des Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschicht-Approximation (2.37) und (2.38) ergibt die folgende Form:

$$k = \frac{11Ac_1}{4 + 28c_2} (\eta_1 - \eta_2)^2 \left( \frac{d^2 F}{d\eta^2} \right)^2 \quad (4.20a)$$

$$\overline{u'^2} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{4 + 6c_2}{33c_1} \right) k \quad (4.20b)$$

$$\overline{v'^2} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1 - 15c_2}{33c_1} \right) k \quad (4.20c)$$

$$\overline{w'^2} = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{-5 + 9c_2}{33c_1} \right) k \quad (4.20d)$$

$$\overline{u'v'} = \frac{c_D}{c} \sqrt{\frac{11Ac_1}{4 + 28c_2}} k. \quad (4.20e)$$

Im Abschnitt 4.1 ist erläutert worden, dass die Normalspannungen von entscheidender Bedeutung für die Untersuchung des hier vorliegenden Problems sind. Aus diesem Grund werden die vollständigen Bewegungsgleichungen in der Form (4.14) verwendet. Aber bei der Turbulenzmodellierung wählt man eine Vereinfachung, die für die Untersuchung des hier vorliegenden Problems ausreichend ist. Es wird sich zeigen, dass durch die Koeffizienten in den Ausdrücken für die Normalspannungen (4.20b) und (4.20c) ausreichend

Anisotropie dargestellt wird, um deren Einfluss bei der Entwicklung nach kleinen  $\delta$  studieren zu können.

#### 4.5.2 Ergebnisse der Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichungen

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4.20) in die Bewegungsgleichung (4.14) erhält man in gestreckten Koordinaten:

$$(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)^2 [(1 - \delta^2 \bar{\eta}^2) B + A \delta \bar{\eta}] F'''' + (1 + \delta^2 \bar{\eta}^2) \delta F = 0. \quad (4.21)$$

Um die Gleichungen (4.20) und (4.21) übersichtlicher zu gestalten, sind die Konstanten  $A$  und  $B$  eingeführt worden, die die empirischen Parameter des Turbulenzmodells zusammenfassen:

$$A := 8 \frac{1 + 7c_2}{(11c_1)^2} \left( \frac{1}{3c_1} - 2 \frac{c_2}{c_1} - \frac{6}{11} \frac{c_2^2}{c_1} + \frac{22}{15} \right) \frac{c^2}{c_D^2} \quad (4.22a)$$

$$B := 2 \left( \frac{2}{11c_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{3c_1} - 2 \frac{c_2}{c_1} - \frac{6}{11} \frac{c_2^2}{c_1} + \frac{22}{15} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{c^2}{c_D^2}. \quad (4.22b)$$

Außerdem ist in Gleichung (4.21)' für  $\frac{d}{d\bar{\eta}}$  verwendet worden. Man verwendet nun in der Gleichung (4.21) die Ansätze (4.6a) für die Entwicklung von  $F(\bar{\eta})$  und die Entwicklungen (4.6c) und (4.6d) der beiden Orte der Ränder (4.6c) und (4.6d) und erhält für die einzelnen Ordnungen von  $\delta$ :

$$\delta : \quad F^{(0)''''} = 0 \quad (4.23a)$$

$$\delta^2 : \quad B \left( \bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)} \right)^2 F^{(1)''''} + F^{(0)} = 0 \quad (4.23b)$$

$$\delta^3 : \quad - \left( \frac{A}{B} \bar{\eta} + 2 \frac{\bar{\eta}_1^{(1)} - \bar{\eta}_2^{(1)}}{\bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)}} \right) F^{(0)} + B \left( \bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)} \right)^2 F^{(2)''''} + F^{(1)} = 0 \quad (4.23c)$$

Die Gleichung (4.23b) für  $F^{(1)}$  entspricht der Grenzschichtgleichung und hat die von Tollmien [36] angegebene Form für den Mischungswegansatz. Der erste Term in der zu  $\delta^3$  gehörigen Gleichung (4.23c) beschreibt den Einfluss der Normalspannungen. Wie sich später herausstellen wird, ist dieser Term für die Erfüllung aller Randbedingungen notwendig.

Erwartungsgemäß ist  $F^{(0)} = \bar{\eta}$  die ungestörte Anströmung, welche die Randbedingungen (4.12a) und (4.13a) erfüllt. Der Verlauf der Funktionen  $F^{(0)}$ ,  $F^{(0)'}$  und  $F^{(0)''}$  ist in Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4 dargestellt.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten der Funktion  $F^{(1)}$  und der Positionen  $\bar{\eta}_1^{(0)}$  und  $\bar{\eta}_1^{(1)}$  aus der Gleichung (4.23b) reicht es, fünf der sechs Bedingungen (4.12b) und (4.13b) zu verwenden, das Ergebnis ist

$$F^{(1)} = -\frac{1}{2^7 3^3 B^3} \bar{\eta}^4 + \frac{1}{2^4 B} \bar{\eta}^2 - \frac{1}{2} \bar{\eta} + \frac{9B}{8}. \quad (4.24)$$

Die sechste Randbedingung ist ohne weiteres Zutun widerspruchsfrei erfüllbar. Dafür ist es notwendig, dass die beiden Randwinkel  $\bar{\eta}_1$  und  $\bar{\eta}_2$  betragsmäßig gleich groß sind und den folgenden Wert annehmen:

$$\bar{\eta}_1^{(0)} = -\bar{\eta}_2^{(0)} = 6B. \quad (4.25)$$

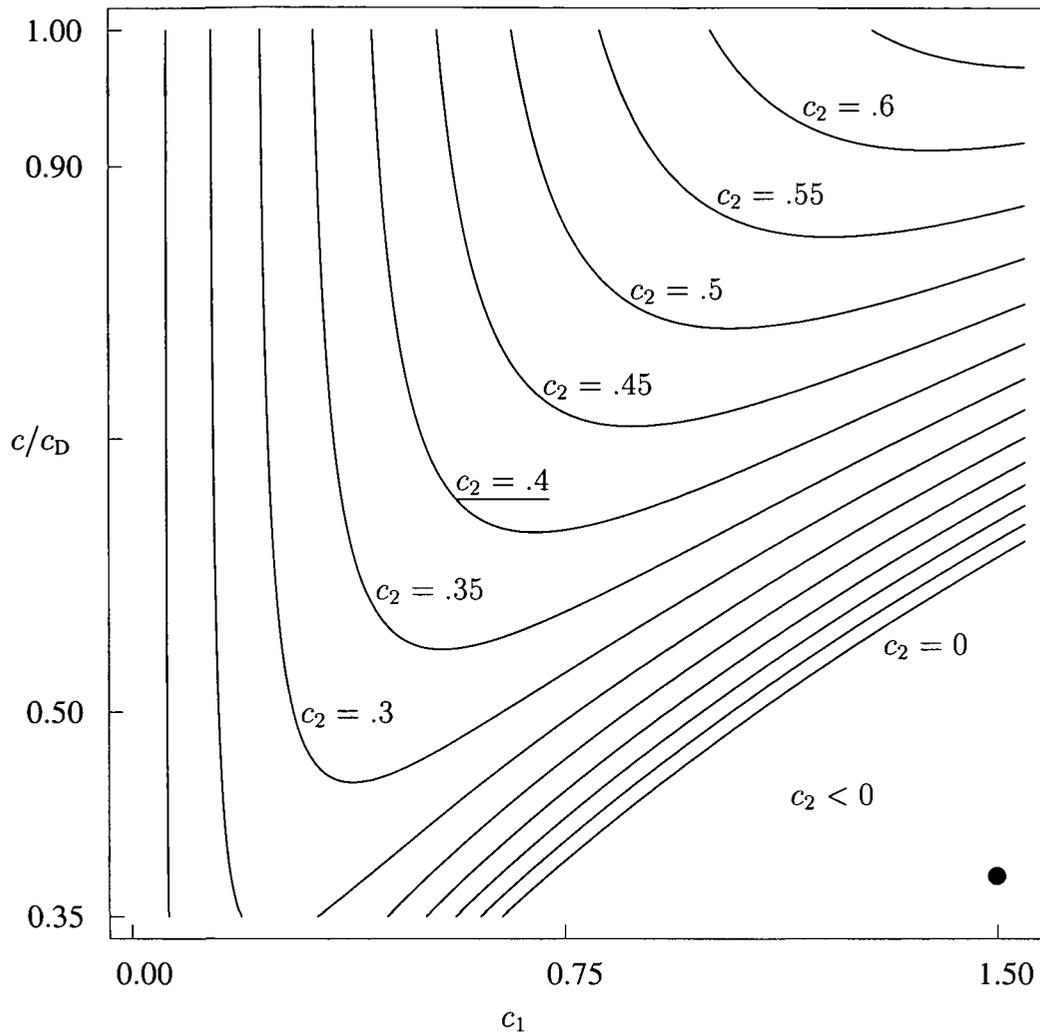


Abbildung 4.1: Parameterbereich empirischer Konstanten des Reynoldsspannungstransportmodells in Grenzschichtapproximation für Lösungen ohne laterales Einströmen auf beiden Seiten der Trennschicht; Punkt und Unterstrich kennzeichnen die Standardwerte (vgl. Rodi [26])

Die Abbildung 4.4 zeigt, dass der Verlauf von  $k^{(1)2} \propto F^{(1)''}$  symmetrisch ist. Beendet man die analytische Betrachtung mit dieser Ordnung der Entwicklung, könnte man das Ergebnis als zufriedenstellend erachten. Die Auslenkung der Trennschicht wird aber nicht wiedergegeben.

In der nächsten Ordnung liefert dreimalige Integration der Gleichung (4.23c) ein Polynom 7. Grades:

$$F^{(2)}(\bar{\eta}) = \frac{K_4}{210}\bar{\eta}^7 + \frac{K_3}{60}\bar{\eta}^5 + \frac{K_2}{24}\bar{\eta}^4 + \frac{K_1}{6}\bar{\eta}^3 + \frac{A_2}{2}\bar{\eta}^2 + B_2\bar{\eta} + C_2. \quad (4.26)$$

Um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, sind  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  Zusammenfassungen schon eingeführter Konstanten:

$$K_1 := -\frac{1}{2^7 B^2} \quad K_2 := \frac{1}{2^5 3^2 B^3} \left( \frac{\bar{\eta}_2^{(1)} - \bar{\eta}_1^{(1)}}{3B} + 1 \right) \quad (4.27a)$$

$$K_3 := \frac{1}{2^4 3^2 B^4} \left( A - \frac{1}{2^4} \right) \quad K_4 := \frac{1}{2^{11} 3^5 B^6}, \quad (4.27b)$$

während  $A_2$ ,  $B_2$  und  $C_2$  Integrationskonstanten darstellen:

$$A_2 = -\frac{K_2}{6}\bar{\eta}_1^{(0)2} \quad B_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_4}{15}\bar{\eta}_1^{(0)6} + \frac{K_3}{6}\bar{\eta}_1^{(0)4} + K_1\bar{\eta}_1^{(0)2} \right) \quad (4.27c)$$

$$C_2 = \frac{1}{24}K_2\bar{\eta}_1^{(0)2}. \quad (4.27d)$$

Sowohl diese Konstanten als auch die Störungen  $\bar{\eta}_1^{(1)}$  bzw.  $\bar{\eta}_2^{(1)}$  von  $\bar{\eta}_1^{(0)}$  bzw.  $\bar{\eta}_2^{(0)}$  am jeweiligen Rand sind durch fünf der Randbedingungen (4.12c) und (4.13c) festgelegt. Die Störung der Position des Randes ist:

$$\bar{\eta}_1^{(1)} = \frac{132B}{35} \quad \bar{\eta}_2^{(1)} = -\frac{78B}{35}. \quad (4.28)$$

In dieser Ordnung ist die sechste, noch nicht verwendete Randbedingung nicht ohne weiteres erfüllt. Vielmehr kann man diese als Bedingung für die empirischen Konstanten sehen, um der Forderung gerecht zu werden, kein laterales Einströmen auf beiden Seiten der Trennschicht zuzulassen. Die folgende Vorgangsweise ist gewählt worden: Die Randbedingungen (4.12c) und (4.13c) - außer der Bedingung  $F^{(2)}(\bar{\eta}_2^{(0)}) = 0$  - sind zur Bestimmung von  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $\bar{\eta}_1^{(1)}$  und  $\bar{\eta}_2^{(1)}$  herangezogen worden. Die empirischen Parameter müssen zur Erfüllung der nicht verwendeten Randbedingung der folgenden Beziehung gehorchen:

$$A = \frac{3}{14}, \quad (4.29)$$

wobei  $A$  durch die Definition (4.22a) gegeben ist. Löst man die Beziehung (4.29) zum Beispiel nach  $c_2$  auf, findet man zwei Lösungsbereiche einer negativen und positiven Wurzelverzweigung. Einer der beiden Zweige liefert ausschließlich negative Werte von  $c_2$  und

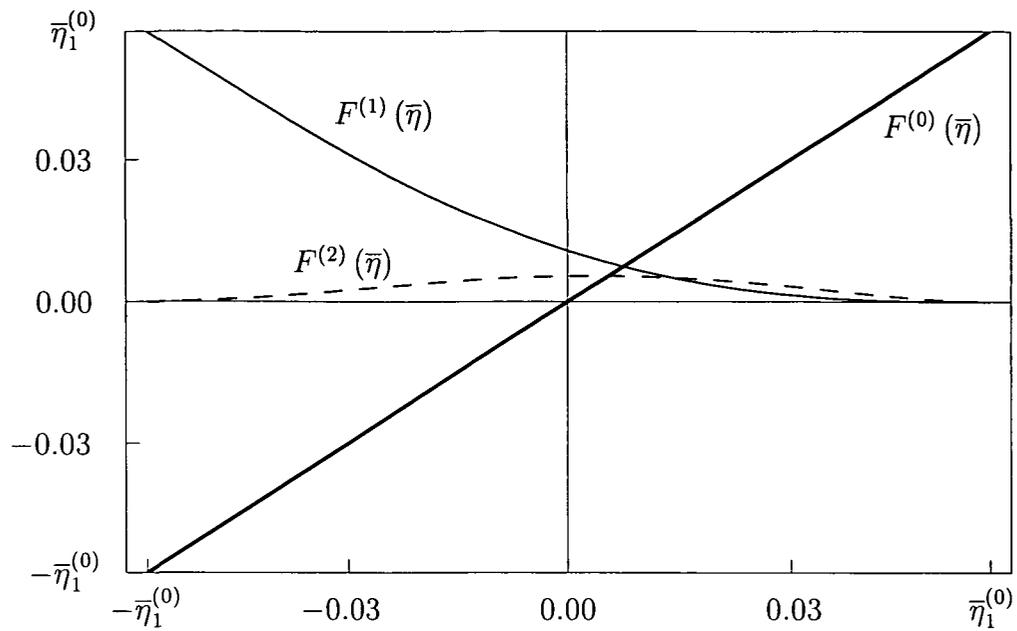


Abbildung 4.2: Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der Stromfunktion  $F(\bar{\eta})$ ;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

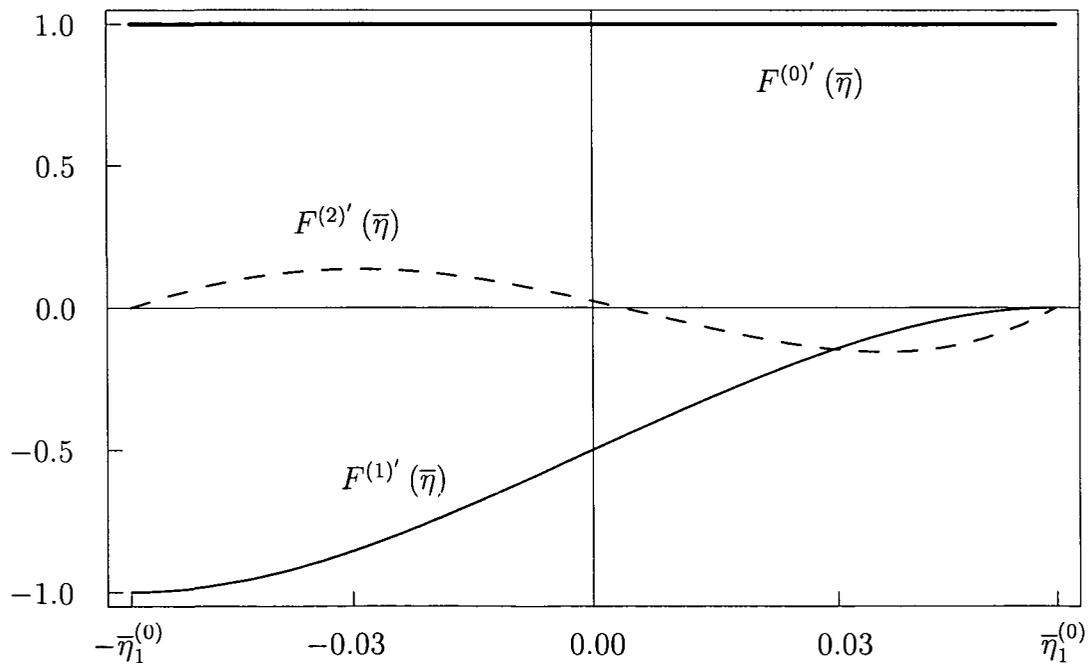


Abbildung 4.3: Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der Ableitung der Stromfunktion  $F(\bar{\eta})$ ;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

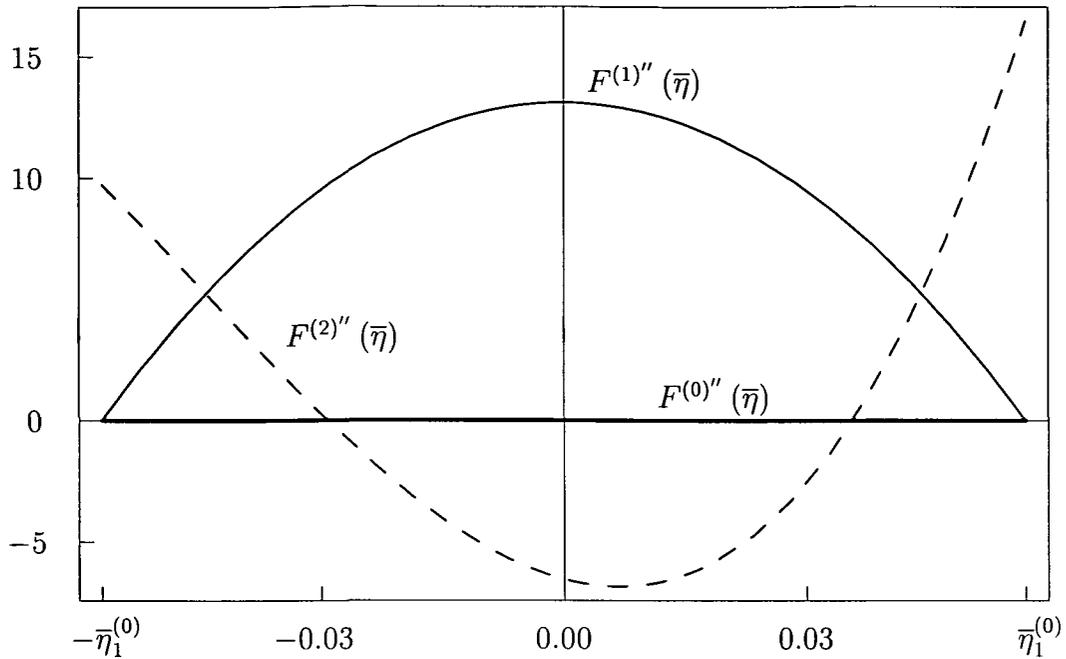


Abbildung 4.4: Terme führender, 1. und 2. Ordnung der Entwicklung der zweiten Ableitung der Stromfunktion  $F''(\bar{\eta})$ ;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

wird daher verworfen, der andere Lösungszweig ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Dort sieht man Linien konstanter Werte von  $c_2$  in Abhängigkeit der Parameter  $c/c_D$  und  $c_1$ . Die Literaturwerte der empirischen Konstanten liegen bei (vgl. Rodi [26]):

$c/c_D$	$c_1$	$c_2$
0.36	1.5	0.4

Tabelle 4.1: Standardwerte der empirischen Konstanten (vgl. Rodi [26])

Mit der üblichen Wahl von  $c_D \approx 1$  ergibt sich  $c \approx 0.36$ . Dieser Wert für  $c$  ist nicht aus der Literatur entnommen, sondern durch das Anpassen des Öffnungswinkels und der turbulenten Schubspannungsprofile an Experimente unter der Verwendung der Randbedingung von Ting festgestellt worden. Der verwendete Wert liegt zwischen dem für den Mischungsweg angegebenen Wert von  $c \approx 0.1$  (s. Rotta [28]) und dem für das  $k$ -Gleichungsmodell angegebenen Wert von  $c \approx 0.9$  (s. Launder [13]).

In Abbildung 4.1 ist der Standardwert von  $c_2$  durch Unterstreichung hervorgehoben, die Werte von  $c/c_D$  und  $c_1$  sind durch einen Punkt angedeutet. Wie man sieht, liegen die Standardwerte von  $c/c_D$  und  $c_1$  im negativen Bereich von  $c_2$ . Die in der Tabelle 4.1 angegebenen Werte lassen sich offensichtlich nicht mit der Bedingung (4.29) in Einklang bringen.

Die Graphen 4.2, 4.3 und 4.4 zeigen die zwischen den ungestörten Randwinkeln  $\bar{\eta}_1^{(0)}$  und  $\bar{\eta}_2^{(0)}$  gültigen Funktionen  $F^{(2)}$ ,  $F^{(2)'}$  und  $F^{(2)''}$ . Man sieht, dass  $F^{(2)''}$  nicht symme-

trisch ist, genauso wie  $\bar{\eta}_1^{(1)}$  und  $\bar{\eta}_1^{(2)}$  betragsmäßig nicht mehr gleich sind. Die Auslenkung der Trennschicht manifestiert sich in dieser Ordnung erstmals.

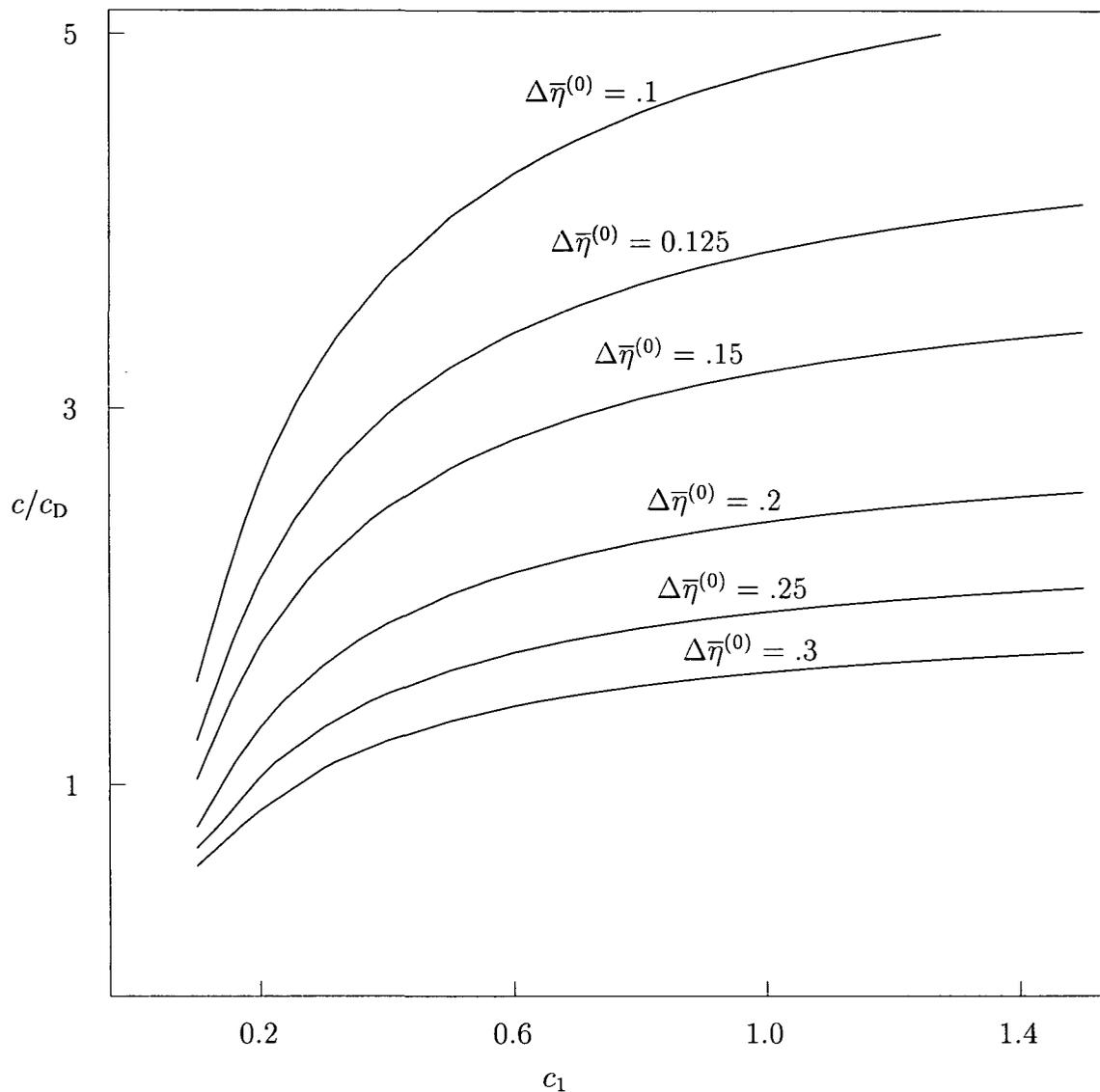


Abbildung 4.5: Linien konstanter Werte des Öffnungswinkels  $\Delta\bar{\eta}^{(0)}$  in führender Ordnung abhängig von den Modellkonstanten

### 4.5.3 Vergleich mit Experimenten

Im vorigen Abschnitt ist festgestellt worden, dass die in der Literatur gefundenen Werte für die empirischen Parameter nicht verwendet werden können, wenn die Bedingung (4.29) nicht verletzt werden soll. Es stellt sich natürlich die Frage, ob ein anderer Satz von Parametern gefunden werden kann, um Übereinstimmung mit experimentellen Daten zu erzielen.

Der Öffnungswinkel und das Maximum der turbulenten Scheinschubspannung sind herangezogen worden, um geeignete Werte der empirischen Parameter zu wählen. Die

Abbildung 4.5 zeigt Linien konstanter Werte des Öffnungswinkel in führender Ordnung,  $\Delta\bar{\eta}^{(0)} = \bar{\eta}_0^{(1)} - \bar{\eta}_0^{(2)}$ , abhängig von  $c_1$  und  $c/c_D$ , während konstante Linien der Maxima der führenden Ordnung der turbulenten Scheinschubspannungen in Abhängigkeit von  $c_1$  und  $c/c_D$  im Graphen 4.6 angegeben sind. Zum Vergleich mit den experimentellen Daten ist die turbulente Scheinschubspannung mit der Geschwindigkeitsdifferenz dimensionslos gemacht, dann gilt in führender Ordnung:

$$\frac{\overline{u^*v^*}^{(0)}(\bar{\eta})}{(U_1^* - U_2^*)^2} = \frac{\overline{u^*v^*}^{(0)}(\bar{\eta})}{\delta^2} \propto \frac{\delta^2 \left( \bar{\eta}_1^{(0)} - \bar{\eta}_2^{(0)} \right) \left( F^{(1)''}(\bar{\eta}) \right)^2}{\delta^2}. \quad (4.30)$$

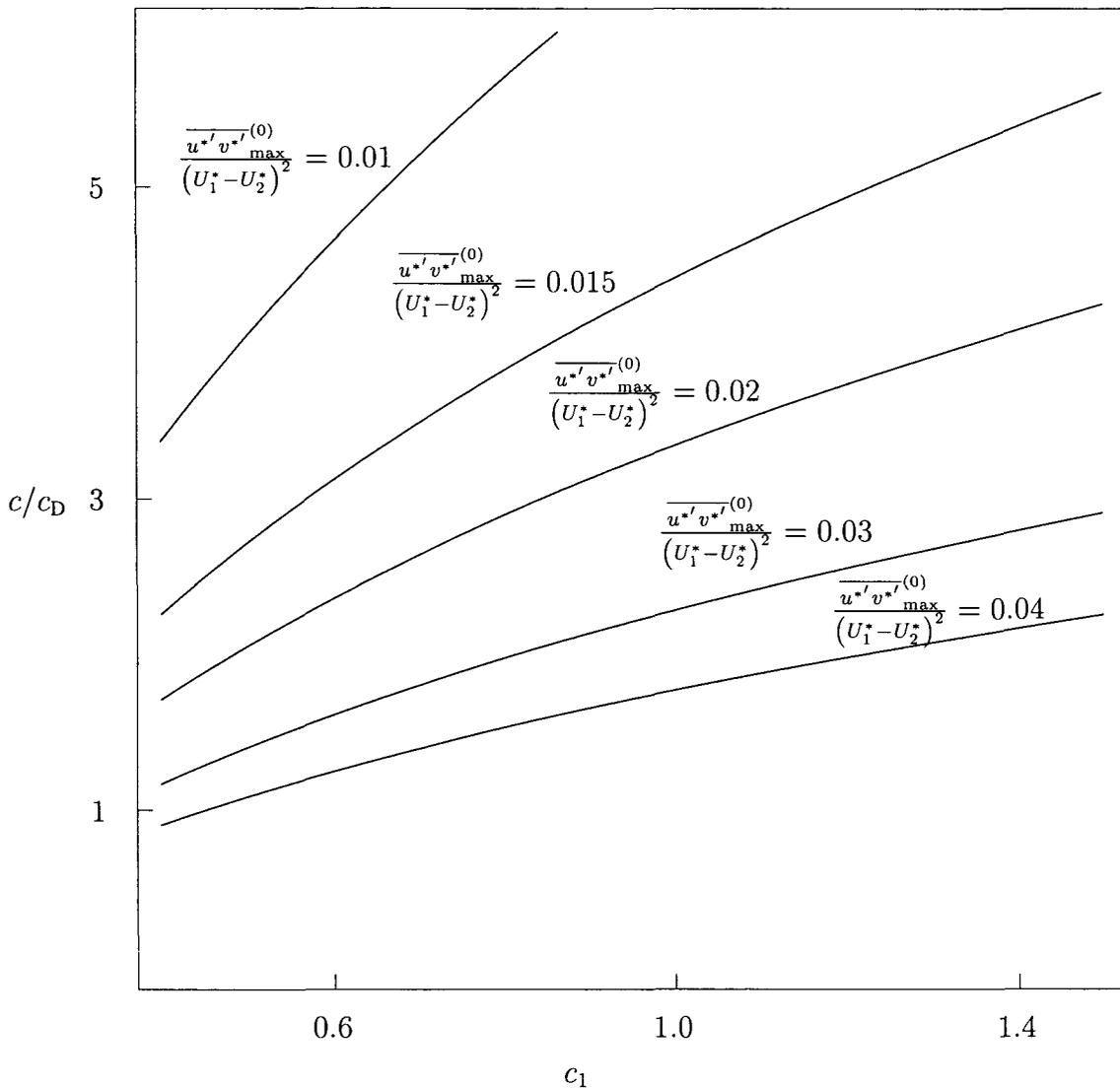


Abbildung 4.6: Linien konstanter Werte der Maxima der turbulenten Scheinschubspannungen  $\frac{\overline{u^*v^*}_{\max}^{(0)}}{(U_1^* - U_2^*)^2}$  in führender Ordnung abhängig von den Modellkonstanten

Die Tatsache, dass die Reynoldsspannungen in führender Ordnung unabhängig von  $\delta$  ist, ist experimentell (vgl. Mehta and Westphal [17]) und theoretisch (vgl. Townsend [37]) seit längerem bekannt.

Man kann aus der Abbildung 4.5 ablesen, dass der Öffnungswinkel mit fallenden Werten von  $c/c_D$  und steigenden Werten von  $c_1$  größer wird. Aus der Abbildung 4.6 kann man die steigende Tendenz der Werte von  $\overline{u^{*'}v^{*'}(0)}/(U_1^* - U_2^*)^2$  mit fallenden Werten von  $c/c_D$  und steigenden Werten von  $c_1$  ablesen.

Die Abbildung 4.7 zeigt  $\overline{u^{*'}v^{*'}_{\max}}/(U_1^* - U_2^*)^2$  abhängig von  $\delta$  verglichen mit experimentellen Daten von Mehta und Westphal [17]. Die Graphen 4.8 und 4.9 geben Werte des Öffnungswinkels in Abhängigkeit von  $\delta$  wieder.

Die in Abbildung 4.8 dargestellten Datenpunkte für den Öffnungswinkel  $\Delta\eta = \eta_1^{(0.95)} - \eta_2^{(0.95)}$  sind aus Mehta und Westphal [17] entnommen, während der Graph 4.9 von  $\Delta\eta = \eta_1^{(0.9)} - \eta_2^{(0.9)}$  auf Daten von Pui [23] zurückgreift. Der hochgestellte Index gibt an, welche Werte der Geschwindigkeitsverteilung bezogen auf die Anströmungen  $U_1^*$  und  $U_2^*$  vom jeweiligen Autor verwendet worden sind, um die Breite der Trennschicht zu definieren. Durch eine unterbrochene Linie wird die Beziehung (3.28) von Abramovich für den Öffnungswinkel abhängig von  $\delta$  in den Abbildungen 4.8 und 4.9 dargestellt. In beiden Graphen findet man gute Übereinstimmung der experimentellen Daten mit der Beziehung (3.28), obwohl sich  $\sigma_0$  genau genommen auf die Definition der Breite von 5% Abweichung von der Außenströmung bezieht.

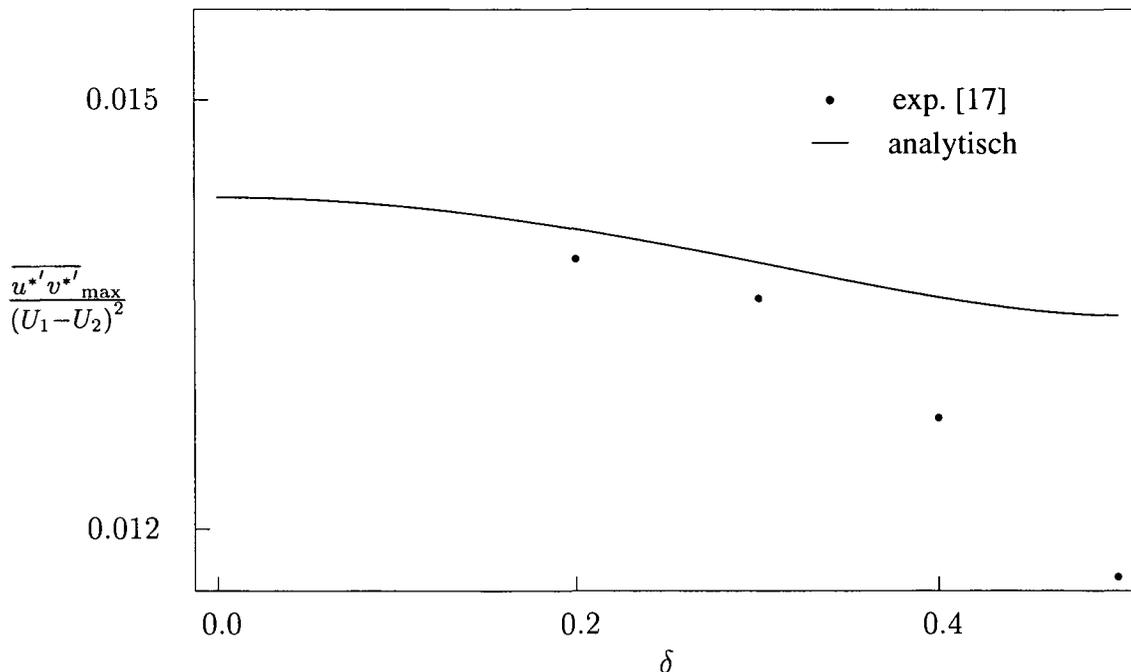


Abbildung 4.7: Maxima der Reynoldsschen Schubspannungen in Abhängigkeit von  $\delta$ ;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

Die empirischen Parameter der in den Graphen 4.7, 4.8 und 4.9 angegebenen analytischen Lösungen sind derart gewählt, dass gute Übereinstimmung mit den experimentellen

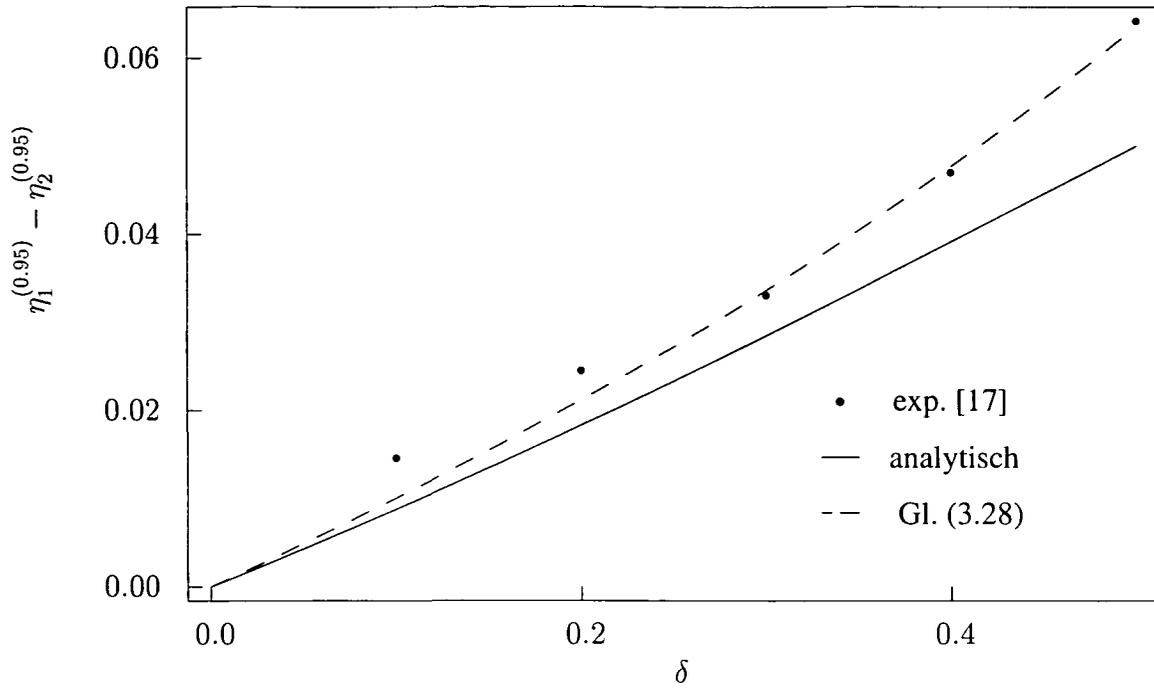


Abbildung 4.8: Öffnungswinkel für 95% der Anströmungsgeschwindigkeit;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

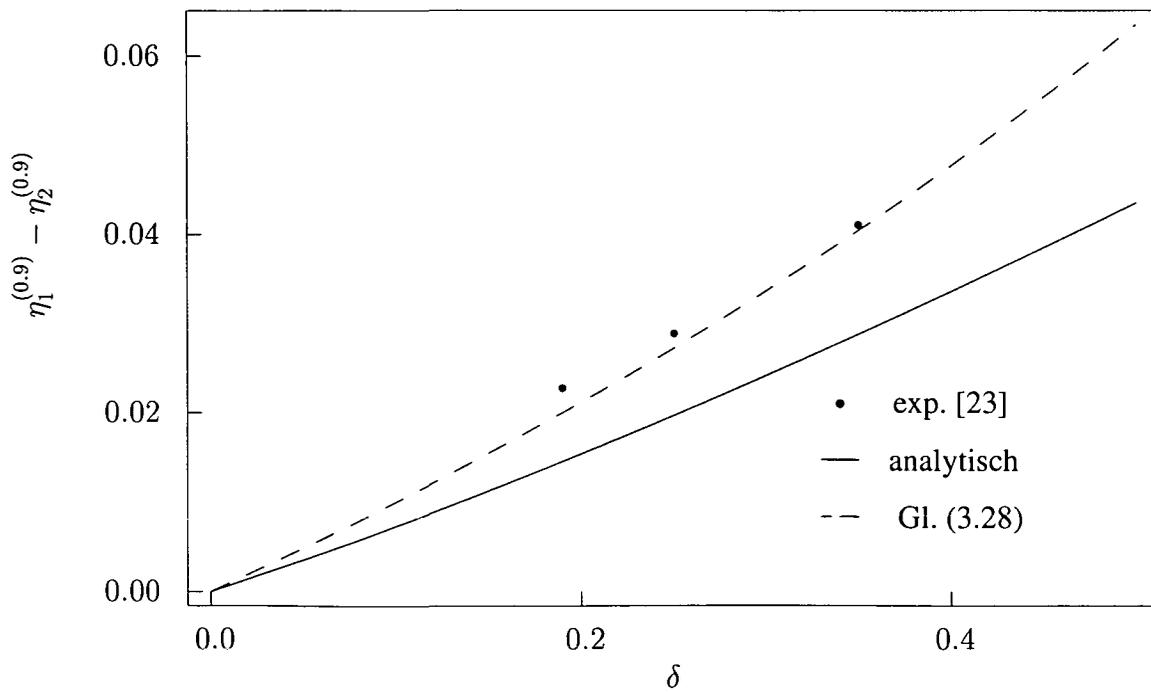


Abbildung 4.9: Öffnungswinkel für 90% der Anströmungsgeschwindigkeit;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$

Daten erzielt worden ist. Die Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

$c/c_D$	$c_1$	$c_2$
4	0.8	0.63

Tabelle 4.2: Empirische Parameter des Reynoldsspannungstransportmodells für Lösungen ohne laterales Einströmen

Der Parameter  $c_2$  ergibt sich durch Auswerten der Beziehung (4.29).

Die experimentellen Verläufe der Maxima der turbulenten Scheinschubspannung verglichen mit der Auswertung der Entwicklung (4.6) eingesetzt in den Ausdruck (4.20e) stimmen zumindest für kleine  $\delta$  gut überein. Auch die Tendenz der Werte des Öffnungswinkel abhängig von  $\delta$  wird von der Entwicklung (4.6) gut wiedergegeben. Dies erklärt, dass in der Abbildung 4.10 die analytische Auswertung der Entwicklung (4.6) für  $\delta = 0.2$  und die von Mehta und Westphal [17] entnommenen Daten für die turbulenten Schubspannungen gut übereinstimmen.

Der sich durch die Rechnung ergebende Geschwindigkeitsverlauf  $(\overline{u^*} - U_2^*) / (U_1^* + U_2^*)$  in die Hauptströmungsrichtung für  $\delta = 0.25$  stimmt mit der experimentellen Auswertung in der Abbildung 4.11 von Pui [23] ebenfalls gut überein.

$\delta$		0.17	0.2	0.25
$100 \cdot \overline{u^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$	exp.	3.13	4.0	3.7
	anal. <sup>1</sup>	24.22	24.123	23.93
	anal. <sup>2</sup>	3.54	3.53	3.51
$100 \cdot \overline{v^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$	exp.	1.96	2.4	3.0
	anal. <sup>1</sup>	0.3928	0.3911	0.3881
	anal. <sup>2</sup>	1.78	1.77	1.76
$100 \cdot \overline{w^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$	exp.	-	-	3.9
	anal. <sup>1</sup>	13.88	13.822	13.712
	anal. <sup>2</sup>	2.34	2.33	2.31
$100 \cdot \overline{u^* v^*}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$	exp.	1.5	1.39	1.25
	anal. <sup>1</sup>	1.42	1.41	1.40
	anal. <sup>2</sup>	1.40	1.39	1.38

Tabelle 4.3: Maxima der Scheinspannungen in Abhängigkeit von  $\delta$ ; experimentelle Werte: 1. und 3. Spalte Pui [23], 2. Spalte Mehta und Westphal [17]; analytisch ermittelte Werte: anal.<sup>1</sup>: Entwicklung ohne laterales Einströmen ( $c/c_D = 4$ ,  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ), anal.<sup>2</sup>: Entwicklung mit Randbedingung von Ting [35] ( $c/c_D = 0.36$ ,  $c_1 = 1.5$ ,  $c_2 = 0.4$ )

In der Tabelle 4.3 werden die experimentellen Werte der Maxima der turbulenten Scheinspannungen und die analytischen Ergebnisse verglichen. Der Index 1 steht für die Entwicklung mit den Randbedingungen ohne laterales Einströmen. Der Index 2 bezieht sich auf dieselbe Entwicklung mit der Randbedingung von Ting [35] und den empirischen

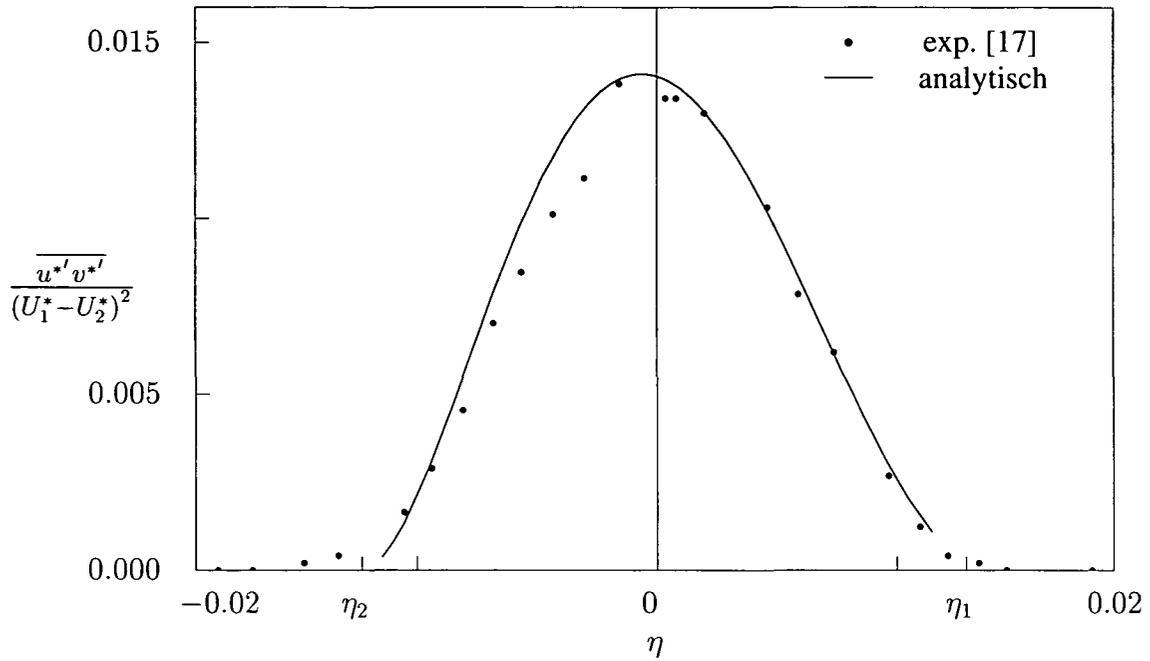


Abbildung 4.10: Scheinschubspannung;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$ ,  $\delta = 0.2$

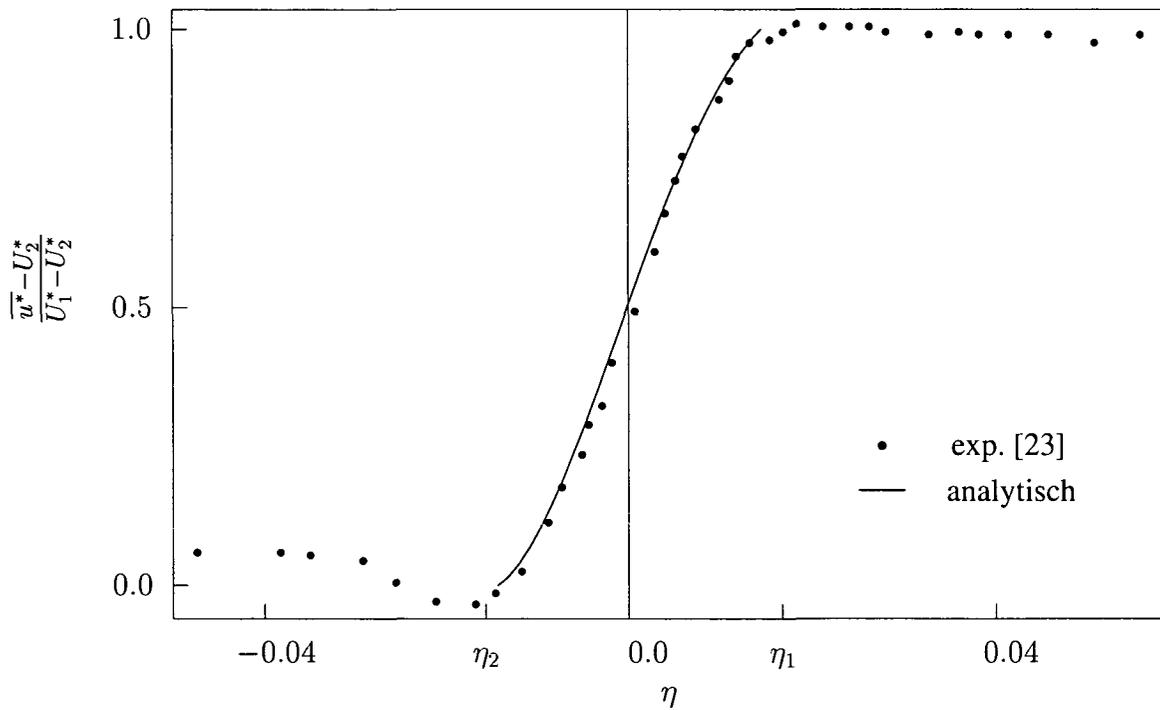


Abbildung 4.11: Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$ ,  $\delta = 0.25$

Konstanten laut Tabelle 4.1. Wie weiter oben erwähnt sind die Reynoldsspannungen unter der Voraussetzung der Selbstähnlichkeit in führender Ordnung unabhängig vom relativen Geschwindigkeitsverhältnis  $\delta$ . Mehta und Westphal [17] erklären die gemessenen fallenden Maxima der Reynoldsspannungen mit steigendem relativen Geschwindigkeitsverhältnis  $\delta$  durch den Einfluss des Turbulenzgrades der freien Anströmungen auf die Trennschicht. Im Windkanal sei das Breitenwachstum der Trennschicht für  $\delta \leq 0.5$  hauptsächlich vom Turbulenzgrad der Anströmungen beeinflusst, der aber für  $\delta \leq 0.5$  im Allgemeinen nicht von  $\delta$  abhängen würde. Die dimensionsbehafteten Werte der Reynoldsspannungen sind dann zwar konstant, aber sobald man diese mit der Geschwindigkeitsdifferenz  $U_1^* - U_2^*$  dimensionslos macht, ergeben sich natürlich fallende Werte für steigende  $\delta$ . Abbildung 4.7 zeigt, dass das Einbeziehen höherer Terme der Entwicklung der asymptotischen Lösung, fallende Werte der Scheinschubspannung mit steigendem  $\delta$  ergibt. Gerade für kleine Werte von  $\delta$  stimmt die analytische Kurve gut mit den Daten von Mehta und Westphal [17] überein, obwohl der Einfluss des Turbulenzgrades der Anströmungen in der Rechnung nicht berücksichtigt ist.

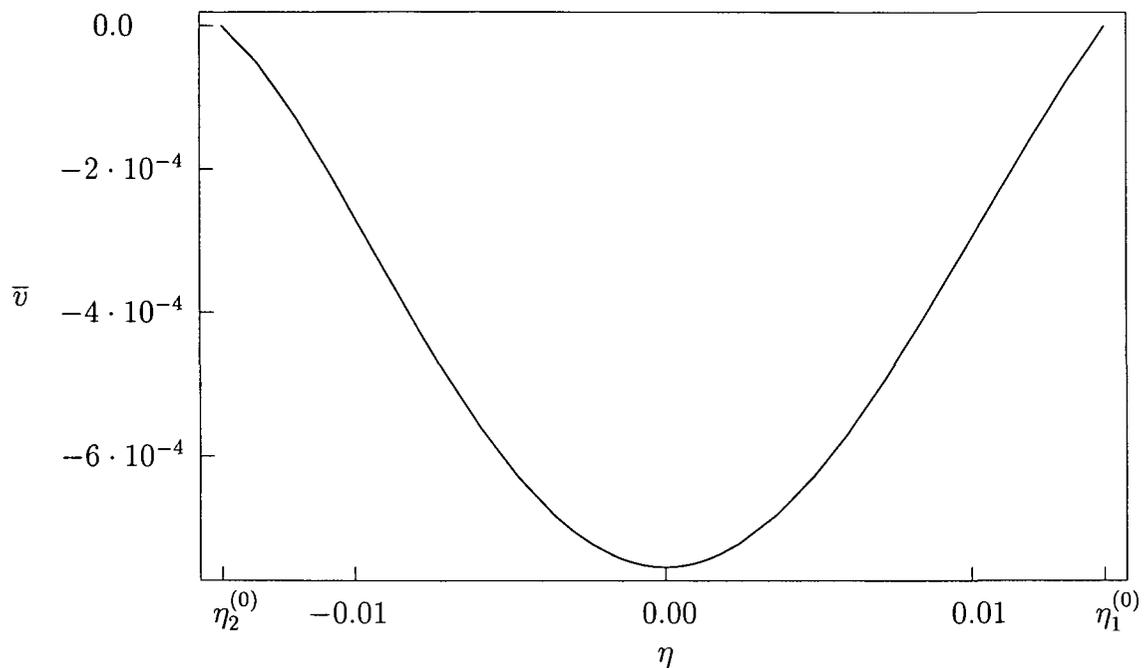


Abbildung 4.12: Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$ ,  $\delta = 0.2$

Die Diskrepanzen der in der Tabelle 4.3 angegebenen Messwerte und dem eben besprochenen Verhalten der Reynoldsspannungen abhängig von  $\delta$  sind wahrscheinlich durch die unterschiedlichen Turbulenzgrade der Zuströmungen in den verschiedenen Windkanälen zu erklären.

Die Werte der Normalspannungen sind in guter Übereinstimmung mit jenen Lösungen, die mittels der Randbedingung von Ting gefunden worden sind. Die analytisch bestimmten turbulenten Normalspannungen ermittelt mit den Randbedingungen ohne

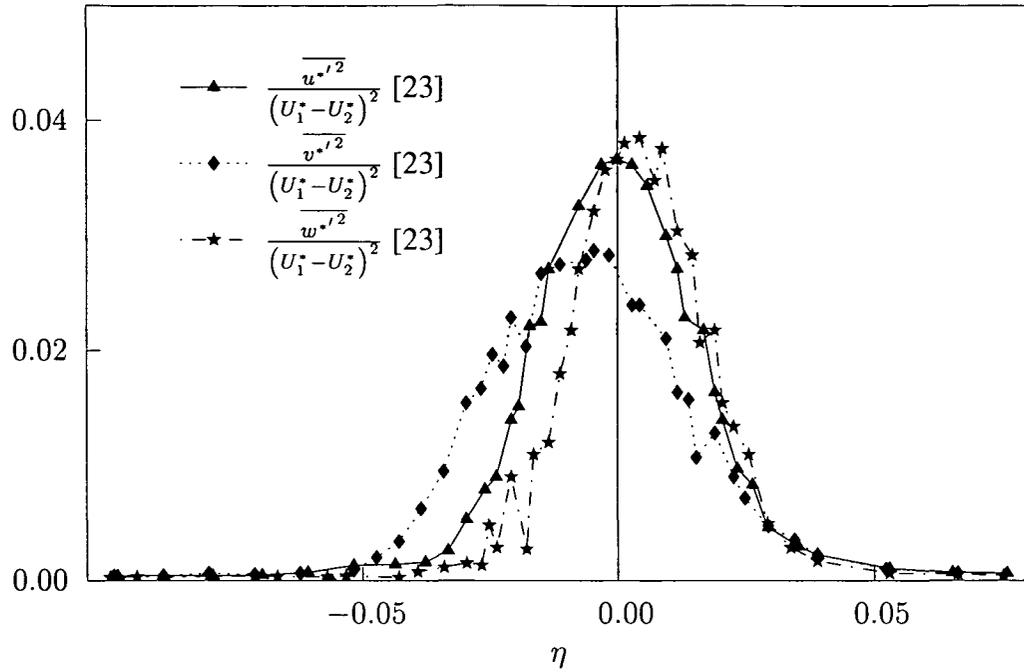


Abbildung 4.13: Reynoldssche Normalspannungen; experimentelle Daten aus Pui [23];  $\delta = 0.25$

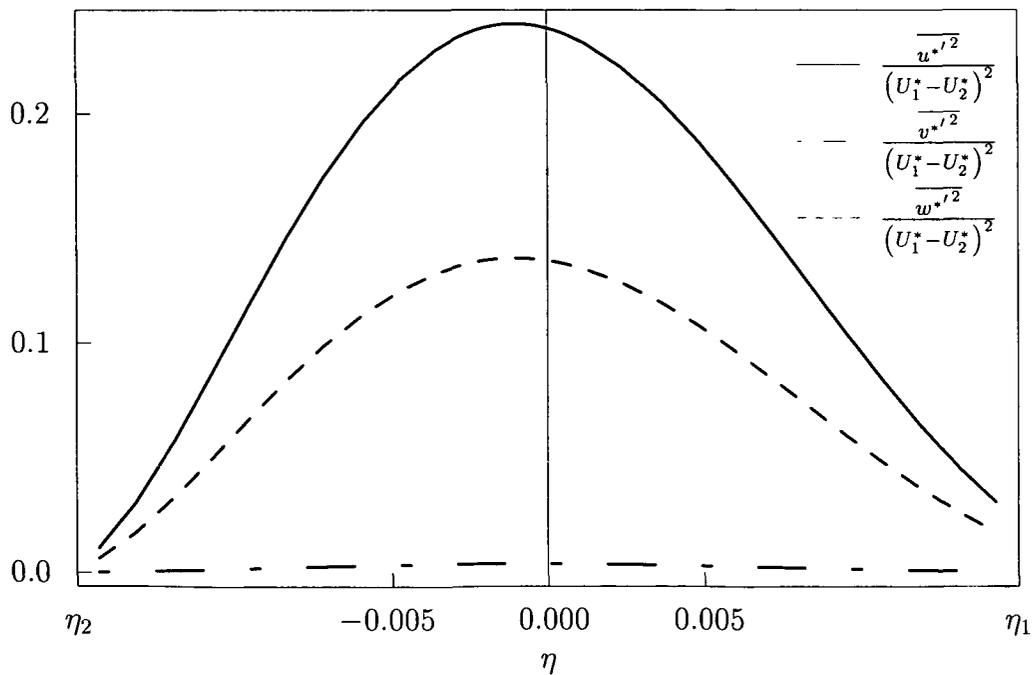


Abbildung 4.14: Reynoldssche Normalspannungen;  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.63$ ,  $c/c_D = 4$ ,  $\delta = 0.25$

laterales Einströmen sind nicht in Einklang mit den Messungen.

Die errechnete Normalspannung in Hauptströmungsrichtung  $\overline{u^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$  hat ungefähr den sechsfachen des gemessenen Wertes, jene in lateraler Richtung  $\overline{v^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$  ein Zehntel des gemessenen Wertes, und  $\overline{w^{*2}}_{\max} / (U_1^* - U_2^*)^2$  hat ungefähr den dreifachen Wert verglichen mit den Messungen. In der Abbildung 4.13 sind Reynoldsschen Normalspannungen nach Daten von Pui [23] angegeben, während die Abbildung 4.14 den analytisch ermittelten Verlauf wiedergibt. Für den Verlauf von  $v(\eta)$  in der Abbildung 4.12 sind keine Messdaten gefunden worden, was daran liegen mag, dass diese Geschwindigkeitskomponente betragsmäßig sehr klein ist.

## 4.6 Modifizierter Störungsansatz

Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, kann die Störung der 1. Ordnung für eine beliebige Wahl der empirischen Parameter die Randbedingungen (4.9) erfüllen. Erst durch die zweite Ordnung gerät man in Konflikt mit der mathematisch gesehen überzähligen Randbedingung. Dadurch wird man gezwungen, eine Bedingung an die empirischen Parameter zu stellen, die auf physikalisch unrealistische Ergebnisse in den Normalspannungen führt. In diesem Abschnitt wird die Frage geklärt, ob ein schwach nichtlineares Anwachsen der Strahlbreite das Problem beheben kann. Verschiedene Messungen legen ein lineares Wachstum der Trennschicht nahe (vgl. Mehta und Westphal [17], Pui und Gartshore[23], Bell und Mehta [4]), allerdings berichten Mehta und Westphal [17] und Pui und Gartshore[23], dass sie gerade bei kleinen  $\delta$  die Selbstähnlichkeit nicht zweifelsfrei verifizieren können. Die Betrachtung eines Breitenwachstums abhängig von  $x^{*\beta}$  kann dimensionsrichtig nur durch die Einführung einer Bezugslänge  $L_i^*$  durchgeführt werden. Der Exponent  $\beta$  wird in unserem Problem als Eigenwert in Erscheinung treten. Dies ist vergleichbar mit der Potentialströmung um einen unendlich ausgedehnten Keil. Es gibt bei diesem Problem ebenfalls keine charakteristische Länge. Die Potentialtheorie liefert dafür keine Lösung, die die geforderten Randbedingungen erfüllen kann. Führt man eine charakteristische Länge ein, findet man eine Lösung, die bis auf einen einzigen Parameter unbestimmt bleibt (vgl. Barenblatt [3, S. 297-298]). Interpretiert man diese Lösung als lokale Lösung bzw. innere Lösung (vgl. van Dyke [6, 68-70]) um die Spitze des Keils, kann der unbekannte Parameter genutzt werden, um mit der Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung eine zur äußeren Lösung passende innere Lösung zu konstruieren. In Analogie zu dieser Vorgangsweise soll im Folgenden überprüft werden, ob für den Fall der turbulenten Trennschicht eine innere Lösung gefunden werden kann. Die charakteristische Länge  $L_i^*$  soll Abstände nahe der Hinterkante der Platte beschreiben. Formaler ausgedrückt, gibt es für eine Beziehung

$$\phi(U_1^*, U_2^*, x^*, y^*, L_i^*) = 0 \quad (4.31)$$

für die fünf Einflussgrößen nach dem  $\Pi$ -Theorem [9, 119-161] drei mögliche Potenzprodukte, weil der Rang der Dimensionsmatrix zwei ist. Darunter sind die schon bekannten Potenzprodukte  $U_1^*/U_2^*$  und  $\eta = y^*/x^*$  und ein mögliches Potenzprodukt gebildet mit der charakteristischen Länge  $L_i^*$

$$\xi = L_i^{*\beta-1} \frac{y^*}{x^{*\beta}}. \quad (4.32)$$

Dabei ist  $\xi$  so gewählt, dass  $x^{*\beta}$  vorkommt. Dies kann physikalisch als das von der Länge  $x^*$  abhängige Breitenwachstum interpretiert werden. Über den Exponenten  $\beta$  kann durch die Dimensionsanalyse keine weitere Aussage gemacht werden. Dies nennt Barenblatt [2, S. 145-160] ein Ähnlichkeitsproblem 2. Art. Im vorigen Abschnitt sind nur vier Einflussgrößen betrachtet worden, und da der Rang der Dimensionsmatrix zwei bleibt, sind nur zwei Potenzprodukte möglich, in denen keine unbekanntenen Exponenten vorkommen. Dies wird bei Barenblatt [2, S. 145-160] ein Ähnlichkeitsproblem 1. Art genannt.

Da wieder kleine Geschwindigkeitsunterschiede untersucht werden, wird die gestreckte Koordinate

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\delta} \quad (4.33)$$

eingeführt. Der folgende Ansatz wird als Entwicklung für die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmrichtung angenommen:

$$\bar{u}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 1 + \delta f_1(\bar{\eta}) + \delta^2 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} f_2(\bar{\xi}) + O(\delta^3). \quad (4.34)$$

In Abschnitt 4.5 ist gezeigt worden, dass die Störung der 1. Ordnung alle Randbedingungen (4.12b) und (4.13b) erfüllt, daher bleibt sie unverändert. Die Störung 2. Ordnung ist eine Funktion der neuen Ähnlichkeitsvariable  $\bar{\xi}$ . Der Exponent  $\alpha$  wird eingeführt, um eine zusätzliche freie Wahlmöglichkeit zu erhalten, wobei  $\alpha \ll 1$  gelten soll, um die schwache Nichtlinearität darzustellen. Der Exponent in der Ähnlichkeitsvariablen soll ebenfalls Werte annehmen, die die schwache Nichtlinearität zum Ausdruck bringen, also  $\beta \approx 1$ . Mit der Geschwindigkeitsstörung 2. Ordnung in der Entwicklung (4.34) wird die zugehörige Stromfunktion  $\psi_2$  zu

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \int_{y_0^*}^{y^*} \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} f_2 \left( \frac{L_i^{*\beta-1} y^*}{\delta x^{*\beta}} \right) dy^* = \\ &= \delta L_i^* \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{\beta-\alpha} \int_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}} f_2(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \delta L_i^* \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{\beta-\alpha} F^{(2)}(\bar{\xi}), \end{aligned} \quad (4.35)$$

wobei  $F^{(2)}(\bar{\xi}_0) = 0$  gesetzt worden ist. Die Entwicklung der Stromfunktion lautet daher

$$\psi(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = x^* \delta \bar{\eta} + \delta^2 x^* F_1(\bar{\eta}) + \delta^3 L_i^* \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{\beta-\alpha} F_2(\bar{\xi}) + \dots \quad (4.36)$$

Die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmrichtung wird zu

$$\bar{u}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 1 + \delta \frac{dF_1(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} + \delta^2 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} \frac{dF_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \dots, \quad (4.37)$$

und die  $v$ -Komponente hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = & \delta^2 \left( \bar{\eta} \frac{dF_1(\bar{\eta})}{d\bar{\eta}} - F_1(\bar{\eta}) \right) + \\ & + \delta^3 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{\beta-\alpha-1} \left[ \beta \bar{\xi} \frac{dF_2(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} - (\beta - \alpha) F_2(\bar{\xi}) \right] \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

Im Unterschied zum vorigen Abschnitt wird kein konkretes Turbulenzmodell betrachtet, um sich die Möglichkeit frei zu halten den Einfluss eines konkreten Modells im Nachhinein studieren zu können. Es wird daher eine Entwicklung für die einzelnen Reynolds-Spannungen angesetzt:

$$\overline{u'^2} = \delta^2 \overline{u'^2}^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^3 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} \overline{u'^2}^{(2)}(\bar{\xi}) + \dots \quad (4.39a)$$

$$\overline{v'^2} = \delta^2 \overline{v'^2}^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^3 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} \overline{v'^2}^{(2)}(\bar{\xi}) + \dots \quad (4.39b)$$

$$\overline{w'^2} = \delta^2 \overline{w'^2}^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^3 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} \overline{w'^2}^{(2)}(\bar{\xi}) + \dots \quad (4.39c)$$

$$\overline{u'v'} = \delta^2 \overline{u'v'}^{(1)}(\bar{\eta}) + \delta^3 \left( \frac{x^*}{L_i^*} \right)^{-\alpha} \overline{u'v'}^{(2)}(\bar{\xi}) + \dots \quad (4.39d)$$

Für die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  werden die Ausdrücke

$$\alpha = A_1 \delta \quad \text{und} \quad \beta = 1 + B_1 \delta \quad \text{mit} \quad A_1 = O(1), B_1 = O(1) \quad (4.40)$$

verwendet, um die schwache Nichtlinearität darzustellen. Setzt man die Entwicklungen (4.34) und (4.39) in die Bewegungsgleichungen (2.3) in  $x^*$ - und  $y^*$ -Richtung ein, kann man den Druck in führender Ordnung eliminieren, indem man die Gleichung in  $y^*$ -Richtung mit  $\delta \bar{\eta}$  multipliziert und die beiden Gleichungen dann addiert. Geordnet nach Potenzen erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\delta : \bar{\eta} \frac{d^2 F_1}{d\bar{\eta}^2} - \frac{d\overline{u'v'}^{(1)}}{d\bar{\eta}} = 0 \quad (4.41a)$$

$$\delta^2 : \frac{L_i^{*\alpha}}{x^{*\alpha+1}} \bar{\xi} \frac{d^2 F_2}{d\bar{\xi}^2} - \frac{L_i^{*\beta-1}}{x^{*\alpha+\beta}} \frac{d\overline{u'v'}^{(2)}}{d\bar{\xi}} = -\frac{1}{x^*} F_1 \frac{d^2 F_1}{d\bar{\eta}^2} - \frac{1}{x^*} \bar{\eta} \frac{d}{d\bar{\eta}} \left( \overline{u'^2}^{(1)} - \overline{v'^2}^{(1)} \right). \quad (4.41b)$$

Aufgrund der Entwicklung (4.34) und der Ausdrücke (4.40) für  $\alpha$  und  $\beta$  entspricht die Bewegungsgleichung 1. Ordnung (4.41a) der Entwicklung im vorigen Abschnitt 4.5, also der Grenzschichtgleichung. In der Ordnung  $\delta^2$  treten zwei unüberwindliche Probleme auf: Erstens kann in der Gleichung (4.41b)  $x$  nur eliminiert werden, wenn  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$ . In diesem Fall geht aber die Gleichung (4.41b) in die Gleichung (4.23c) des Abschnitts 4.5 über. Zweitens verhindert das Auftreten des Kopplungsterms mit der niedrigeren Ordnung, der  $F_1$  enthält, dass die Gleichung (4.41b) als Bestimmungsgleichung für die Größen der 2. Ordnung verwendet werden kann, weil nicht ausschließlich Größen vorkommen, die von  $\bar{\xi}$  abhängen.

## 4.7 Diskussion der Ergebnisse

Im Abschnitt 4.5.2 ist gezeigt worden, dass mittels der Entwicklung (4.6) analytische Lösungen gefunden werden können, für die kein laterales Einströmen in die Trennschicht zugelassen wird. Da die Differentialgleichung (4.21) dritter Ordnung ist und zwei unbekannte Orte der Ränder mitzubestimmen sind, braucht man fünf Randbedingungen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Während die Tatsache, dass die ungestörte Grundströmung  $F^{(0)}$  alle sechs Randbedingungen erfüllt, nicht weiter erstaunlich ist, kann man dies von der Abweichung  $F^{(1)}$  nicht behaupten.  $F^{(1)}$  erfüllt ebenfalls alle sechs zugehörigen Randbedingungen für jede beliebige Wahl der empirischen Konstanten des Reynoldsspannungstransportmodells in Grenzschnittnäherung, obwohl dies einem überbestimmtem Gleichungssystem entspricht. Erst durch die Anwendung des Impulssatzes im Abschnitt 4.1 wird diese Tatsache erhellt:  $F^{(1)}$  ist in nichtgestreckten Koordinaten  $\eta$  genau der Term der Ordnung  $O(\delta)$ , der bei der Linearisierung des Problems auf keine Widersprüche mit dem Impulssatz führt. In der 1. Ordnung der Entwicklung ist es daher möglich, sowohl kein laterales Einströmen in die Trennschicht zu fordern als auch die von Ting [35] angegebene Randbedingung zu verwenden. In beiden Fällen können alle Randbedingungen mit den Standardwerten der empirischen Konstanten erfüllt werden. Experimentatoren (z.B. Mehta und Westphal [17] oder Pui und Gartshore[23]) verwenden üblicherweise Görtlers [8] Lösung 1. Ordnung als analytische Vergleichsfunktion, welche genauso wie  $F^{(1)'}$  (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) eine ungerade Funktion ist. Üblicherweise sind die Daten der Experimentatoren um die Auslenkung der Trennschicht verschoben angegeben, sodass die Funktion  $F^{(1)'}$ , bei der die Auslenkung noch keine Rolle spielt, und Görtlers Lösung der führenden Ordnung gut mit den Messdaten übereinstimmen.

Genauso wenig wie zu erwarten ist, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.21) für beliebige relative Geschwindigkeitsverhältnisse  $\delta$  "zufällig" alle sechs Randbedingungen (4.9) erfüllt, gilt dies schließlich für die Störung der 2. Ordnung  $F^{(2)}$ . Nur durch eine eingeschränkte Wahl der empirischen Konstanten des Turbulenzmodells ist es möglich, die mathematisch gesehen überzählige Randbedingung zu erfüllen. In dieser Ordnung lässt sich die Auslenkung bestimmen.

Die Abbildung 4.1 zeigt, dass die in der Literatur angegebenen Standardwerte der empirischen Konstanten des Reynoldsspannungstransportmodelles nicht in einem verwendbaren Wertebereich liegen, um die Forderung, kein laterales Einströmen in die Trennschicht zuzulassen, erfüllen zu können. Daher sind experimentelle Daten für das Maximum der Scheinschubspannung und den Öffnungswinkel herangezogen worden, um Werte der empirischen Konstanten zu finden, die die analytische Lösung in Einklang mit den experimentellen Daten bringen. Die Verläufe der Scheinschubspannung (Abbildung 4.10) und der Geschwindigkeitskomponente in  $x^*$ -Richtung (Abbildung 4.11) stimmen gut mit experimentellen Daten überein. Die Abbildung 4.13 der von Pui [23] gemessenen Verläufe der Reynoldsschen Normalspannungen zeigt, dass in der Trennschicht nicht völlig isotrope Turbulenz herrscht. Die Maxima der Reynoldsschen Normalspannungen sind allerdings von derselben Größenordnung. Die analytisch ermittelte Lösung, die eine ungestörte Zuströmung zulässt, stimmt damit nicht überein, denn die in Abbildung 4.14 wiedergegebene Anisotropie ist viel stärker als die der Messdaten.

Die Untersuchung in Abschnitt 4.6 von schwach nichtlinearem Verhalten des Breitenwachstums der Trennschicht nahe der Hinterkante der Platte hat zur Einsicht geführt, dass das schwach nichtlineare Verhalten nicht ausreicht, um das Paradoxon aufzulösen. Als einziger lösbarer Sonderfall ergibt sich wieder das lineare Breitenwachstum.

Alle in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Vorschläge setzen eine Ähnlichkeitslösung voraus, die durch das lineare oder schwach nicht lineare Wachstum der Trennschichtbreite motiviert sind. Da aber keine physikalisch befriedigenden Lösungen gefunden worden sind, muss dieses Konzept hinterfragt werden. Zumindest nahe der Hinterkante der Platte sollte das zweidimensionale Verhalten der Strömung untersucht werden. Die bisherigen experimentellen Untersuchungen lassen einigen Interpretationspielraum zu. Mehta und Westphal [17] und Bell und Mehta [4] zeigen, dass sich die Selbstähnlichkeit der Reynoldsspannungen erst ab einem gewissem Abstand von der Hinterkante einstellt. Im Unterschied zu analytischen Betrachtungen sind bei Experimenten immer Wände in endlicher Entfernung vorhanden. Außerdem lässt sich über das Verhalten der Strömung am Rand der Trennschicht (vgl. Pui und Gartshore [23]) keine eindeutige Aussage machen. Es liegt im Bereich des Möglichen, dass am Rand Rückströmungsgebiete auftreten, um die globale Impulsbilanz zu erfüllen.

## 5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Lösungsmöglichkeiten des Problems der ebenen turbulenten Trennschicht vorgeschlagen, die in der Anströmung keinerlei Störung induzieren, und bezüglich ihrer Tauglichkeit geprüft.

Zunächst wurden Lösungen auf numerischem Weg gesucht, indem man die vollständigen Bewegungsgleichungen mit dem  $k$ -Gleichungsmodell in Zylinderkoordinaten betrachtete. Dafür war es notwendig, das Verhalten der Gleichungen am Rand der Trennschicht auf analytischem Weg zu untersuchen. Es stellte sich ein Widerspruch zwischen der üblichen Wahl der Konstante des Diffusionsparameters  $\sigma_k \approx 1$  mit der Entwicklung heraus. Die Forderung, dass die Terme der Entwicklung reelle und endliche Werte ergeben sollten, schien nur einen möglichen Bereich von  $2 < \sigma_k < 2.5$  zuzulassen. Eine Variation sämtlicher Parameter des  $k$ -Gleichungsmodells, um die beidseitig ungestörte Anströmung zu erreichen, stellte sich mit numerischen Mitteln als nicht unmittelbar durchführbar heraus. Um die für die numerische Rechnung notwendigen Startlösungen zu erhalten, wurden reguläre Entwicklungen nach kleinen relativen Geschwindigkeitsverhältnissen durchgeführt. Daher war es naheliegend, diesen analytischen Weg weiter zu verfolgen.

In der 1. Ordnung der Entwicklung waren *alle* Randbedingungen für eine beliebige Wahl von Parametern des Turbulenzmodells erfüllt. Es war in dieser Ordnung von keinerlei Bedeutung, was für eine Randbedingung gestellt wurde, um die Diskrepanz zwischen der Anzahl der Randbedingungen und der Anzahl der Integrationskonstanten aufzulösen. Es wurde gezeigt, dass diese Tatsache im Einklang mit dem Impulssatz zu sehen war: In führender Ordnung hebt die Linearisierung der Geschwindigkeitsverteilung bezüglich  $\delta$  den Widerspruch zwischen der integralen Massenerhaltung und dem Impulssatz auf. Dies erklärt, weshalb für geeignete Parameter des Turbulenzmodells immer gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreicht werden konnte. Selbstverständlich konnte die Auslenkung der Trennschicht erst in der nächsten Ordnung berechnet werden.

Die Betrachtung des Impulssatzes machte auch klar, dass für  $\delta = O(1)$  die turbulenten Normalspannungen von entscheidender Bedeutung sind, um einen Widerspruch mit der Massenerhaltung zu vermeiden. Daher ist das  $k$ -Gleichungsmodell offensichtlich nicht geeignet, weil es völlig isotrope Turbulenz liefert. Trotz dieser Tatsache wurde die Entwicklung der vollständigen Bewegungsgleichung und  $k$ -Gleichung in kartesischen Koordinaten angegeben. Diese zeigte, dass für  $\delta \ll 1$ , und daher gleichzeitig schlanken Schichten, alle Terme der  $k$ -Gleichung von derselben Größenordnung waren. Das Reynoldsspannungstransportmodell in Grenzschichtnäherung wurde jedoch als ausreichend erachtet, um den Einfluss der anisotropen Turbulenz analytisch studieren zu können. In der 2. Ordnung der Entwicklung ergab sich eine Bedingung für die empirischen Parameter des Modells, um alle Randbedingungen für eine ungestörte Zuströmung zu erfüllen. Im Vergleich mit experimentellen Daten stellte sich allerdings heraus, dass keine Übereinstimmung mit allen Größen erzielt werden konnte. Die Breite der Trennschicht und das Maximum der turbulenten Scheinschubspannung wurden verwendet, um konkrete Werte der Parameter zu wählen. Die sich ergebenden turbulenten Scheinnormalspannungen unterscheiden sich um ein Vielfaches von den Messwerten aus der Literatur.

Durch die Einführung einer charakteristischen Länge, die die Umgebung nahe der Hinterkante der Platte beschreiben sollte, kam in der analytischen Darstellung der tur-

bulenten Trennschicht ein Eigenwert vor, der zur Anpassung an die Randbedingungen hätte verwendet werden können. Physikalisch gesehen, war dies als ein Abgehen vom linearen Breitenwachstum der Trennschicht zu interpretieren. Wegen des Vergleichs mit Experimenten und der Tatsache, dass die bisherigen analytischen Ergebnisse relativ gute Übereinstimmung ergaben, wurde davon ausgegangen, dass die Abweichung von der klassischen Ähnlichkeitsstruktur nur schwach sein könnte. In der Entwicklung nach  $\delta$  traten in 2. Ordnung jedoch Widersprüche auf, die sich nur im bereits untersuchten Sonderfall linearen Breitenwachstums beheben ließen

## Literatur

- [1] ABRAMOWITSCH, G. *The Theory of Turbulent Jets*. 1963.
- [2] BARENBLATT, G. I. *Scaling, Selfsimilarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [3] BARENBLATT, G. I., AND ZEL'DOVICH, Y. Self-similar solutions as intermediate asymptotics. In *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol.4, M. van Dyke, G. Vincenti, Walter, and J. V. Wehausen, Eds. Annual Reviews Inc., 1972.
- [4] BELL, J. H., AND MEHTA, R. D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA J.* 28 (1990), 2034–2041.
- [5] DALY, B. J., AND HARLOW, F. H. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids* 13 (1970), 2634–2649.
- [6] DYKE, M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, 1975.
- [7] GERSTEN, K., AND HERWIG, H. *Strömungsmechanik*. Vieweg, 1992.
- [8] GÖRTLER, H. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. *ZAMM* 22 (1942), 244–254.
- [9] GÖRTLER, H. *Dimensionsanalyse*. Springer, 1975.
- [10] HANJALIĆ, K., AND LAUNDER, B. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.* 52 (1972), 609–638.
- [11] HINZE, J. O. *Turbulence*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- [12] KUETHE, A. M. Investigation of the turbulent mixing regions formed by jets. *J. Appl. Mech.* 2 (1935), A87–A95.
- [13] LAUNDER, B. Prediction of free shear flow—a comparison of the performance of six turbulence models. In *Proc. NASA Langley Free Turbulent Shear Flows Conf.*, vol. 1, pp. 361–426.
- [14] LAUNDER, B. E. Heat and mass transport. In *Topics in Applied Physics: Turbulence*, vol.12, P. Bradshaw, Ed., 2 ed. Springer, 1978, pp. 236–242.
- [15] LAUNDER, B. E., REECE, G., AND RODI, W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* 68 (1974), 537–566.
- [16] LIEPMANN, H. W., AND LAUFERT, J. Investigation of free turbulent mixing. Tech. Rep. 1257, NACA Tech. Note, 1947.
- [17] MEHTA, R. D., AND WESTPHAL, R. V. Effect of velocity ratio on plane mixing layer development. In *Seventh symposium on turbulent shear flows* (Stanford University, California, USA, 1989), vol. 1, Durst, F. and Launder, B. E. and Schmidt, F.W. and Whitelaw, J.H., Eds., pp. 3.2.1–3.2.6.

- [18] MILES, J. B., AND SHIH, J.-S. Similarity parameter for two-stream turbulent jet-mixing region. *AIAA J.* 6 (1968), 1429–1430.
- [19] MÖRWALD, K. *Asymptotische Theorie freier turbulenter Scherströmungen*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1988.
- [20] PRANDTL, L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *ZAMM* 5 (1925), 136–139.
- [21] PRANDTL, L. Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz. *ZAMM* 22 (1942), 241–243.
- [22] PRANDTL, L. *Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik*, Band 2. Springer, 1961.
- [23] PUI, N. K., AND GARTSHORE, I. Measurements of the growth rate and structure in plane turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* 91 (1979), 111–130.
- [24] REICHHARDT, H. *Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz*, 2. Auflage. VDI-Forschungsheft 414. Deutscher Ingenieur-Verlag, 1951.
- [25] RODI, W. A review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers. In *Studies in Convection: Theory, Measurement and Applications*, B. E. Launder, Ed., vol. 1. Academic Press, 1975.
- [26] RODI, W. *Turbulence Models and their Applications in Hydraulics, A State of the Art Review*. Balkema, 1980.
- [27] RODI, W. Examples of turbulence models for incompressible flows. *AIAA J.* 20 (1981), 872–879.
- [28] ROTTA, J. C. *Turbulente Strömungen*. B.G. Teubner Stuttgart, 1972.
- [29] SABIN, C. M. An analytical and experimental study of plane incompressible turbulent free shear layer with arbitrary velocity ratio and pressure gradient. *J. Basic Eng.* (1965), 421–428.
- [30] SCHLICHTING, H., AND GERSTEN, K. *Boundary-Layer Theory*, 8 ed. Springer, 2000.
- [31] SCHNEIDER, W. *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, 1978.
- [32] SCHNEIDER, W. Boundary-layer theory of free turbulent shear flows. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 15 (1991), 143–158.
- [33] TAYLOR, G. I. Flow induced by jets. *J. Aero/Space Sci* 25 (1958), 464–465.
- [34] TENNEKES, H., AND LUMLEY, J. L. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [35] TING, L. On the mixing of two parallel streams. *J. Math. Phys.* 38 (1959), 153–165.

- [36] TOLLMIEN, W. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. *ZAMM* 6 (1926), 468–478.
- [37] TOWNSEND, A. A. *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2 ed. Cambridge University Press, 1976. 227-230.
- [38] YULE, A. J. Spreading of turbulent mixing layers. *AIAA J.* 10 (1972), 686–687.

## Lebenslauf

27.1.1972	geboren in Wien
09/1978 - 06/1982	Volksschule Spielmannngasse
09/1982 - 06/1990	Neusprachlicher Zweig Bundesgymnasium XX Unterbergergasse
10/1990 - 09/1998	Studium Technische Physik Technische Universität Wien
10/1998 - 9/1999	Zivildienst Innenministerium
10/1999 - 9/2003	Universitätsassistent Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung Technische Universität Wien
11/2003 -	Entwickler ECS Magna

## **Danksagung**

Natürlich ist meinem Doktorvater Prof. W. Schneider für das Zustandekommen dieser Arbeit besondere Bedeutung beizumessen. Ich danke ihm, dass er mir Einblicke in die wissenschaftlichen Arbeiten ermöglicht hat.

Prof. A. Kluwick danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Allen Kollegen habe ich für das abteilungsübergreifend freundschaftliche Klima zu danken.

Diese Stelle ist eine willkommene Gelegenheit meiner Familie für alles, was sie für mich getan hat zu danken: Für meine Eltern, Luzia und Harald, und meine Schwester, Barbara, sollte keinerlei Zweifel bestehen, wie wichtig sie für mich sind. Auf meine Freundin, Katharina, kann ich immer zählen.