Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

Diplomarbeit

Parameter in Bäumen und erzeugende Funktionen

ausgeführt am Institut für

Geometrie

der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

a.o. Univ. Prof. DI Dr. techn. Michael Drmota

durch

Andreas Traxler
Mat. Nr. 9725728
1228 Wien, Seefeldergasse 6/2

16. Mai 2002 .....

Vorwort

Es sind noch keine sechzig Jahre vergangen, seit der erste programmierbare Computer gebaut wurde und dennoch sind wir schon in einem Maß von modernen Geräten abhängig, die jede Erwartung von damals übersteigt. Obwohl Computer hoch komplexe Geräte sind, die nur die Wenigsten vollständig verstehen, ist man heutzutage durchaus in der Lage, spielerisch mit ihnen umzugehen. Selbst Programmieren ist heute nicht mehr so aufwendig und schwierig zu erlernen, wie dies am Anfang der Computer-Ära der Fall war.

Aufgrund der rasanten Entwicklung der Leistungsfähigkeit der Computer wird es immer unwichtiger, bei der Programmierung auf Optimalität zu achten. Oft ist ein leicht verständlicher Algorithmus schneller zu implementieren als ein bis ins Detail optimierter, der zwar *theoretisch* schneller in der Ausführung ist, aber wesentlich mehr Zeit bei dessen Umsetzung verschlingt.

Die Mathematik hat oft den Ruf, abstrakte und vorerst nutzlos erscheinende Sachverhalte zu untersuchen. Es hat sich dabei sehr oft gezeigt, dass diese abstrakten Betrachtungen sich in der Zukunft als nützlich erwiesen haben. Ein Beispiel dafür ist die Zahlentheorie, die heute besonders durch die Kryptografie am Internetsektor vertreten ist. Der Gegenstand dieser Arbeit ist ein gegenteiliges Beispiel. Programmierer auf der ganzen Welt versuchen, immer neue Datenstrukturen und Algorithmen zu entwickeln. Dabei wird – teilweise zu Recht – eher das „Versuch und Irrtum“-Prinzip verwendet, als die Zeit genommen, eine wissenschaftlich exakte Analyse der Algorithmen durchzuführen.

Andererseits gibt es natürlich auch in der Theorie gut untersuchte Algorithmen und Datenstrukturen, die aufgrund ihrer bewiesenen Vorzüge eine breite Akzeptanz in allen Lagern finden. In dieser Arbeit finden sich einige dieser Analysen von baumartigen Datenstrukturen, deren Aussagen oft als Entscheidungsgrundlage dienen, welche Datenstruktur verwendet wird.

Es ist oft eine langwierige und mühsame Arbeit, einen in der Praxis scheinbar unbedeutenden Sachverhalt nachzuweisen. Das zeigt auch die Tatsache, dass, obwohl diese Wissenschaft noch recht jung ist, manche Vermutungen mehr als ein Jahrzehnt unbewiesen bleiben. Andererseits fordern diese Schwierigkeiten Mathematiker und Informatiker dazu auf, neue Methoden zu entwickeln, die sich allgemeiner einsetzen lassen und auch in anderen Bereichen der Mathematik zur Anwendung kommen. Ein Beispiel hierfür sei die Singularitätenanalyse [FO90] von Flajolet und Odlyzko, die von Vielen weiterentwickelt wurde.

Nach einer Übersicht, in der ein systematischer Aufbau der untersuchten baumartigen Datenstrukturen gegeben wird und die wichtigsten Ergebnisse kurz mit der zugehörigen Literatur aufgelistet werden, folgt eine kurze Einführung in die erzeugenden Funktionen, die ein wesentliches Werkzeug bei der Untersuchung von Datenstrukturen darstellen. Danach werden einige klassische analytische Hilfsmittel vorgestellt, die öfters zum Einsatz kommen.

Das dritte Kapitel ist einigen Parametern in Bäumen, wie die Höhe und interne Pfadlänge, gewidmet. Nach einführenden Definitionen werden zunächst die ebenen Wurzelbäume untersucht. Sie sind zwar nicht speziell als Datenstruktur konzipiert, stellen aber einen guten Ausgangspunkt für die Konstruktion von rekursiven Datenstrukturen dar. Wichtiger sind binäre Bäume, die sich gut als Datenstruktur eignen und mit den binären Suchbäumen auch eine konkrete Anwendung finden. Einfach erzeugte Bäume bilden den theoretischen Rahmen zu den ebenen Wurzelbäumen und den binären Bäumen. Mit den digitalen Suchbäumen und den Tries werden in den letzten beiden Abschnitten des Kapitels weit verbreitete Datenstrukturen vorgestellt.

Es gäbe noch viele weitere Baumklassen und ihnen verwandte Datenstrukturen, die aber aus Platz- und Zeitgründen nicht aufgenommen wurden. Einen guten Überblick über Algorithmen und Datenstrukturen geben die Klassiker von Knuth, wobei in [Knu97] eine Einführung in Bäume und nicht rekursive Datenstrukturen gegeben wird und in [Knu73] einen Großteil der hier behandelten Klassen beschrieben und analysiert wird. Obwohl viele der einfacheren Ergebnisse aus [SF96] entnommen sind, stammen sie oft ursprünglich von Knuth.

Andreas Traxler
Mai 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Übersicht

1.1 Systematik

Die in dieser Arbeit untersuchten Bäume lassen sich primär in zwei Klassen unterteilen. Zum einen werden die *Catalanbäume* und zum anderen *Suchbäume* behandelt. Der Unterschied besteht in den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmodellen.

Das Catalanmodell zählt die Bäume nach ihrer inneren Struktur. Das heißt, dass zwei Bäume, die in einer gewissen normierten Darstellung gleich aussehen, nur als ein Baum behandelt werden. Vom Standpunkt der Graphentheorie aus bedeutet dies, dass die Knoten in Catalanbäumen *nicht* markiert sind und sich daher nicht unterscheiden lassen.

Die Catalanbäume lassen sich noch weiter unterteilen, wobei gewisse restriktive Regeln für die Knotengrade aufgestellt werden. *Binäre Bäume* z.B. dürfen nur aus Knoten mit Knotengrad null oder zwei aufgebaut werden. *Ebene Wurzelbäume* hingegen haben keine einschränkende Regel, ihre Knoten dürfen daher jeden Knotengrad $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Eine große Klasse der Catalanbäume sind die *einfach erzeugten Bäume*, zu denen auch die ebenen Wurzelbäume und binäre Bäume gehören.

Bei Suchbäumen geht man von einer Folge von Schlüsseln aus, die nach bestimmten Regeln zu einem Baum formiert werden. Nun kann es aber vorkommen, dass zwei verschiedene Folgen denselben Baum produzieren. Dieser wird bei Suchbäumen dann auch zweimal gezählt. Das hat auch zur Folge, dass manche Bäume wahrscheinlicher sind als andere. Betrachtet man Suchbäume wieder von der Graphentheorie aus, dann bedeutet dies, dass die Knoten mit den Schlüsseln markiert werden und daher wohl unterscheidbar sind.

Auch die Suchbäume lassen sich noch weiter unterteilen. Diese Unter-

scheidung erfolgt in der Art und Weise, wie die einzelnen Schlüssel untereinander verglichen werden. Grundsätzlich kann davon ausgegangen werden, dass die Schlüssel numerische Werte sind. Es ist zwar durchaus möglich z.B. ein Alphabet zu verwenden, doch werden die Buchstaben auf EDV Anlagen erst wieder in numerische Werte ‚umgerechnet'. Sei also $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge solcher Schlüssel, wobei o.B.d.A $n_k \in \mathbb{N}$ sei[1], dann benutzt man z.B. bei *binären Suchbäumen* die natürliche Ordnung der Zahlen. Die Datenstruktur der *digitalen Suchbäume* konzentriert sich noch stärker auf die Eigenheit elektronischer Systeme in Binärzahlen zu rechnen. Hier wird pro Vergleich nur ein Bit der Binärdarstellung der Zahlen n_k herangezogen und auf Grund dieses einen Bits entschieden, ob im Baum nach links oder rechts[2] weiterverzweigt wird.

Ein besonders ausgefallenes Konzept liegt den *Tries* zu Grunde. Hier wird zwar, wie oben beschrieben, aufgrund der n-ten Bits im n-ten Schritt entschieden, ob links oder rechts fortgefahren wird, doch werden die Daten selbst nicht in den internen Knoten gespeichert, sondern in den externen. Dabei kann es vorkommen, dass mehr interne Knoten eingefügt werden, als eigentlich zur Unterscheidung notwendig sind, dass also eine lineare Liste innerhalb des *Tries* vorkommt. In der Unterklasse der *PATRICIA Tries* werden solche linearen Listen wieder auf einen Knoten reduziert. Dies spart ein wenig Speicher, beschleunigt die Suche aber nicht wesentlich.

Den schematischen Überblick, der hier gegeben wurde, findet man nochmals graphisch dargestellt in Abbildung 1.1.

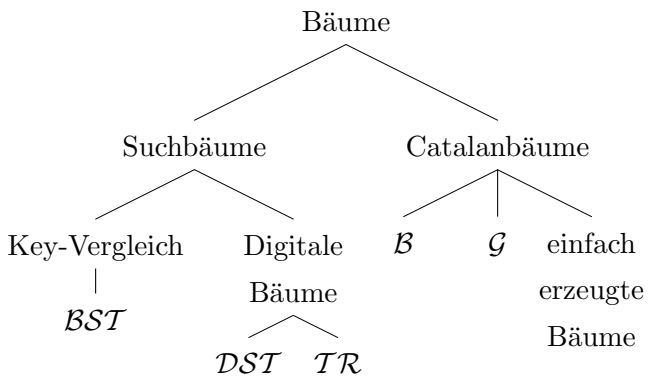

Abbildung 1.1: Unterscheidung der einzelnen Baumklassen

[1] Am Computer lässt sich jede Zahl in Hinsicht auf den Vergleichsoperator $\leq$ als natürliche Zahl darstellen.

[2] Man kann auch Bäume mit Knotengraden größer als zwei betrachten. Dabei werden dann dementsprechend mehr Bits als Entscheidung herangezogen.

1.2 Ergebnisse und Literatur

In diesem Abschnitt sind die behandelten Ergebnisse, die sich im Wesentlichen auf die durchschnittliche Pfadlänge und Höhe beziehen, sowie die dazugehörige Literatur aufgelistet. Etwaige Konstanten finden sich in den entsprechenden Sätzen.

Catalanbäume

- Anzahl: $T_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1}$, [SF96]
- Pfadlänge: $\mathbb{E}\pi_N = \frac{N}{2}\left(\sqrt{\pi N} - 1\right) + O\left(\sqrt{N}\right)$, [SF96]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N = \sqrt{\pi N} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{\ln N}{\sqrt{N}}\right)$, [dBKR72]

Binäre Catalanbäume

- Anzahl: $B_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$, [SF96]
- Pfadlänge: $\mathbb{E}\pi_N = N\sqrt{\pi N} - 3N + O\left(\sqrt{N}\right)$, [SF96]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N = 2\sqrt{\pi N} + O\left(N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, [FO82]

einfach erzeugte Bäume

- Anzahl: $y_n \sim \frac{b}{2\sqrt{\pi}}\rho^{-n+\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{2}}$, [MM78]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N \sim \theta'(\tau)\sqrt{\frac{2\pi}{\theta(\tau)\theta''(\tau)}}\sqrt{N}$, [FO82]

$\mathcal{BST}$ – Binäre Suchbäume

- Pfadlänge: $\mathbb{E}\pi_N = 2N\ln N - 2(2-\gamma)N + 2\ln N + O(1)$, [SF96]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N = c\log N - \frac{3c}{2(c-1)}\log\log N + O(1)$, [Ree]
  $\mathbb{E}|\eta_N - \mathbb{E}\eta_N|^L = O(1)$, [DR95], [Drm02a]

$\mathcal{DST}$ – Digitale Suchbäume

- Pfadlänge: $\mathbb{E}\pi_N = N\,\mathrm{ld}\,N + N\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma-1}{\ln 2} - \alpha + \delta(N)\right) + O\left(\sqrt{N}\right)$, [FS86]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N = \mathrm{ld}\,N + \sqrt{2\,\mathrm{ld}\,N}\,(1 + o(1))$, [AS88], [Drm02b]
  $\mathbb{E}|\eta_N - \mathbb{E}\eta_N|^L = O(1)$, [Drm02b]
- Interne Knoten ohne Nachfolger:
  $\mathbb{E}I_N = N\left(\beta + 1 - \frac{1}{Q_\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} + \alpha^2 - \alpha\right) + \delta(N)\right) + O\left(\sqrt{N}\right)$, [FS86]

$\mathcal{TR}$ – **Tries und Patricia Tries**

- Pfadlänge: $\mathbb{E}\xi_N^{[T]} = N \operatorname{ld} N + N\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2} + \delta(N)\right) + O(1)$
  $\mathbb{E}\xi_N^{[P]} = N \operatorname{ld} N + N\left(-\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2} + \delta(N)\right) + O(1)$
  $\mathbb{V}\xi_N^{[T]} = N\left(\frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6\log^2 2} + \sigma(\operatorname{ld} N)\right)$,
  $\mathbb{V}\xi_N^{[P]} = N\left(\frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6\log^2 2} - \frac{2}{\log 2}\log\prod_{\lambda\geq 1}\left(1 + \frac{1}{2^\lambda}\right) + \sigma(\operatorname{ld} N)\right)$,
  [KP86]
- Höhe: $\mathbb{E}\eta_N^{[T]} = 2 \operatorname{ld} N + O(1)$, [Fla83], [Drm02b]
  $\mathbb{E}|\eta_N^{[T]} - \mathbb{E}\eta_N^{[T]}|^L = O(1)$, [Drm02b]

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Kombinatorische Grundlagen

Erzeugende Funktionen sind ein mächtiges Werkzeug, das in der Kombinatorik zum Einsatz kommt.

Definition 2.1 *Sei die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen gegeben, dann nennt man die formale Potenzreihe*

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

die gewöhnliche erzeugende Funktion *der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und die formale Potenzreihe*

$$\hat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$$

die exponentiell erzeugende Funktion *der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Man schreibt dann für den n-ten Koeffizienten a_n von z^n in $A(z)$

$$[z^n]A(z) := a_n.$$

Man kann dieses Konzept aber auch erweitern auf Doppelfolgen.

Definition 2.2 *Sei die Doppelfolge* $(b_{n,k})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}}$ *gegeben, dann nennt man die formale Potenzreihe*

$$B(u,z) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ k\geq 0}} b_{n,k} u^n z^k$$

die bivariate erzeugende Funktion *der Folge* $(b_{n,k})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}}$.

Es seien im Folgenden noch einige in dieser Arbeit verwendete Tatsachen über erzeugende Funktionen zusammengefasst:

Satz 2.3 *Sei $A(z)$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $B(z)$ die erzeugende Funktion der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt*

1. *$C(z) = A(z)B(z)$ ist die erzeugende Funktion der Folge*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ und}$$

2. *$C(z) = \frac{1}{1-z}A(z)$ ist die erzeugende Funktion der Folge*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beweis. Aus

$$\begin{aligned} C(z) = A(z)B(z) &= \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n \end{aligned}$$

folgt Punkt 1. Punkt 2 ist eine direkte Folgerung aus Punkt 1. □

Satz 2.4 *Sei $\hat{A}(z)$ die exponentiell erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\hat{B}(z)$ die exponentiell erzeugende Funktion der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt*

1. *$\hat{C}(z) := \hat{A}(z)\hat{B}(z)$ ist die exponentiell erzeugende Funktion der Folge*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \text{ und}$$

2. *$\hat{C}(z) := e^x \hat{A}(z)$ ist die exponentiell erzeugende Funktion der Folge*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Beweis. Durch Einsetzen des Cauchy-Produktes folgt

$$\begin{aligned}\hat{C}(z) = \hat{A}(z)\hat{B}(z) &= \left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{z^k}{k!} \cdot b_{n-k}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

und damit Punkt 1. Mit $e^x = \sum_{n\geq 0} 1\frac{z^n}{n!}$ folgt aus Punkt 1 sofort Punkt 2. □
Eine weitere hilfreiche Tatsache ist

Lemma 2.5 *Sei $A(z)$ die erzeugende Funktion und $\hat{A}(z)$ die exponentiell erzeugende der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $zA'(z)$ die erzeugende Funktion und $z\hat{A}'(z)$ die exponentiell erzeugende Funktion der Folge $\big(na_n\big)$.*

Beweis. Durch einfaches Einsetzen folgt

$$zA'(z) = z\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} na_n z^n.$$

bzw.

$$z\hat{A}'(z) = z\sum_{n\geq 1} a_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} na_n \frac{z^n}{n!}$$

□

2.2 Analytische Grundlagen

Definition 2.6 *Gegeben seien die Funktionen $f(N)$ und $g(N)$, dann schreibt man*

- *$f(N) = O\left(g(N)\right)$ genau dann, wenn $\left|\frac{f(N)}{g(N)}\right|$ nach oben beschränkt ist für $N \to \infty$,*
- *$f(N) = o\left(g(N)\right)$, genau dann, wenn $\frac{f(N)}{g(N)} \to 0$ für $N \to \infty$ gilt,*
- *$f(N) \sim g(N)$, genau dann wenn $\frac{f(N)}{g(N)} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.*

Satz 2.7 (Euler-Maclaurin'sche Summenformel) *Sei $f(x)$ auf dem Intervall $[1,\infty)$ definiert. Existieren die Ableitungen $f^{(i)}(x)$ und sind diese absolut integrierbar für $1 \leq i \leq 2m$, wobei m eine feste Konstante ist, dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = \int_1^N f(x)\,dx + \frac{f(1)+f(N)}{2} + C_f + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(N) + R_m,$$

wobei B_k die Bernoulli-Zahlen bezeichnet, die Konstante C_f durch[1]

$$C_f = \int_1^\infty \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$$

bestimmt ist und der Rest R_m

$$|R_m| = O\left(\int_N^\infty \left|f^{(2m)}(x)\right|\,dx\right)$$

erfüllt.

Beweis. Den Beweis findet man in dem meisten Büchern über Analysis. So auch z.B. in [Heu94]. □

Die Euler-Maclaurin'sche Summenformel kann nun dazu verwendet werden, asymptotisches Verhalten zu beschreiben. Besonders wichtig ist das

Lemma 2.8 *Sei $N \in \mathbb{N}^\times$, dann gilt*

$$\ln N! = \left(N + \frac{1}{2}\right)\ln N - N + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \tag{2.1}$$

und

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right). \tag{2.2}$$

Beweis. Man betrachtet die Summe

$$\sum_{k=1}^N \ln k = \ln N!$$

und setzt daher im Satz 2.7 $f(x) = \ln x$. Dann folgt aus der Euler-Maclaurin'schen Summenformel

$$\begin{aligned}
\ln N! &= \sum_{k=1}^N \ln k \\
&= x(\ln x - 1)\big|_1^N + \frac{0 + \ln N}{2} + C_f + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(N) + R_m \\
&= N\ln N + N + 1 + \frac{1}{2}\ln N + \underbrace{\int_1^\infty \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}}_{=\ln\sqrt{2\pi}-1} + \frac{1}{12N} + O\left(\frac{1}{N^5}\right) \\
&= \left(N + \frac{1}{2}\right)\ln N - N + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12N} + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

[1] $\{x\}$ bezeichnet den Nachkommaanteil von x.

Die asymptotische Entwicklung von $N!$ erhält man, indem man e mit (2.3) potenziert. $\square$

Folgerung 2.9 *Sei $N \in \mathbb{N}^\times$, dann gilt*

$$N!^2 = 2\pi N \left(\frac{N}{e}\right)^{2N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \tag{2.4}$$

und

$$(2N)! = 2\sqrt{\pi N} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{2.5}$$

Beweis. Die beiden Formeln folgen direkt aus (2.2) $\square$

Lemma 2.8 kann für die Γ-Funktion verallgemeinert werden.

Lemma 2.10 *Sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt*

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{2.6}$$

Beweis. Dieser und weitere interessante Tatsachen über die Γ-Funktion finden sich in [Rem95, Kap. 2.4]. $\square$

Lemma 2.11 *Sei $N \in \mathbb{N}^\times$ und H_N durch*

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

definiert, dann gilt

$$H_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \tag{2.7}$$

Beweis. Durch Anwenden der Euler-Maclaurin'schen Summenformel mit $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} &= \ln x|_1^N + \frac{1}{2N} + \underbrace{\frac{1}{2} - \int_1^\infty \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x^2}}_{=\gamma} - \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \\ &= \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right).\end{aligned}$$

$\square$

Die Zahlen H_N nennt man die harmonischen Zahlen, da sie die Partialsummen der harmonischen Reihe sind.

Lemma 2.12 ([FS86]) *Sei C eine geschlossen Kurve, in deren umschlossenen Gebiet die Punkte $0, 1, \ldots, N$ liegen und $f(x)$ eine in diesem Gebiet analytische Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k f(k) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C B(N+1, -z) f(z)\, dz,$$

wobei $B(x, y)$ die durch

$$B(x, y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

definierte Beta-Funktion bezeichnet.

Beweis. Durch Anwenden des Cauchy'schen Satzes. Die Residuen des Integranden an den Stellen $z = k$ sind genau $\binom{N}{k}(-1)^k f(k)$. Es sind auch keine weiteren Singularitäten innerhalb von C vorhanden. □

Lemma 2.13 ([FS86]) *Ist $F(z) = \prod_{j \in R} \frac{1}{1-f_j(z)}$ für eine Indexmenge R, dann ist die Taylorreihe von $F(z)$ an der Stelle a – sofern sie existiert – gegeben durch*

$$F(z) = F(a) \left(1 + \sum_{j \in R} \frac{f_j'(a)}{1 - f_j(a)} (z-a) + O\left((z-a)^2\right) \right).$$

Beweis. Sei $G(z) = \prod_{k \in R} g_k(z)$, dann ist

$$G'(z) = \sum_{k \in R} g_k'(z) \prod_{j \in R \setminus \{k\}} g_j(z). \tag{2.8}$$

Dividiert man (2.8) durch $G(z)$, so erhält man

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k \in R} \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}.$$

□

Lemma 2.14 *Es gilt*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \frac{1}{(1-u)(1-qu)(1-q^2u)\cdots}$$

Beweis. Der Koeffizient von $u^n q^m$ zählt auf beiden Seiten die Anzahl der Möglichkeiten n als Summe von m nicht negativen Zahlen zu schreiben. $\square$

Ein besonders wichtiges ‚Lemma' ist das so genannte Transferlemma. Es bietet die Möglichkeit asymptotisches Verhalten von Funktionen unter bestimmten Voraussetzungen auf deren Taylorkoeffizienten zu übertragen. Ein Spezialfall ist Satz 3.38. Es wird der Einfachheit halber die Singularität bei $z = 1$ angenommen, was aber keine echte Einschränkung ist.

Satz 2.15 ([FO90]) *Sei $f(z)$ bis auf die singuläre Stelle $z = 1$ analytisch in $\Delta = \Delta(\phi, \eta)$, mit $\eta > 0$ und $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, definiert durch*

$$\Delta(\phi, \eta) := \Big\{ z : |z| \leq 1 + \eta \wedge \big| \operatorname{Arg}(z-1) \big| \geq \phi \Big\}.$$

Gilt für z in Δ

$$f(z) = O\left((1-z)^\alpha L\left(\frac{1}{1-z} \right) \right) \text{ mit } L(u) = (\log u)^\gamma (\log\log u)^\delta$$

und $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, dann gilt für den n-ten Taylorkoeffizienten von $f(z)$

$$f_n = [z^n] f(z) = O\left(\frac{L(n)}{n^{\alpha+1}} \right).$$

Kapitel 3

Parameter in Bäumen

3.1 Eigenschaften von Bäumen

Definition 3.1 *Ein* Baum *ist ein schlichter, kreisfreier und zusammenhängender Graph.*

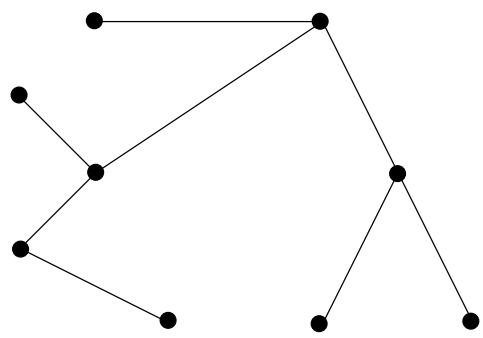

Abbildung 3.1: Beispiel eines Baumes

Definition 3.2 *Ein Baum t, bei dem ein Knoten w ausgezeichnet ist, heißt* Wurzelbaum*. Der Knoten w heißt* Wurzel *des Baumes t.*

Bei Binärbäumen wird zwischen internen und externen Knoten unterschieden. Extern Knoten haben keine Nachfolger und haben daher den Knotengrad 1.

Bei Wurzelbäumen lässt sich die graphische Darstellung normieren. Man zeichnet die Wurzel auf eine horizontale Ebene. Die Nachfolger (das sind jene Knoten, die direkt mit der Wurzel über eine Kante verbunden sind) zeichnet

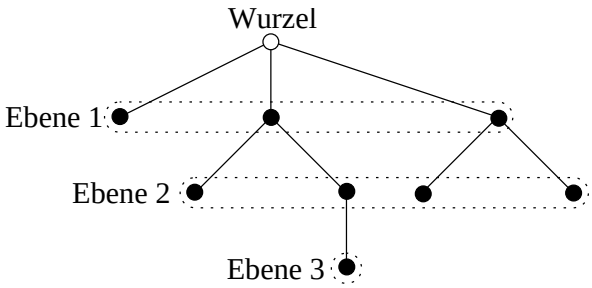

Abbildung 3.2: Beispiel eines Wurzelbaumes in normierter Darstellung

man auf die nächste Ebene, usw. Der Baum aus Abbildung 3.1 wäre z.B., wenn man einen Knoten auszeichnet, wie in Abbildung 3.2 zu zeichnen.

Definition 3.3 *Knoten $v \neq w$ eines Wurzelbaumes mit Knotengrad* 1 *heißen* Blätter*. Bei Binärbäumen sind Blätter interne Knoten, an denen zwei externe Knoten hängen (siehe Kap. 3.3).*

Definition 3.4 *Die* Höhe $\eta(v)$ *eines Knoten v ist die Länge des Weges von der Wurzel w des Baumes zu v selbst.*

Diese Definition ist sinnvoll, da in einem Baum stets ein eindeutiger Weg zwischen zwei Knoten existiert.

Definition 3.5 *Die Anzahl der Knoten eines Baumes t wird mit $|t|$ bezeichnet. Bei einem binären Baum ist dies die Anzahl der internen Knoten.*

Definition 3.6 *Die* Pfadlänge $\pi(t)$ *eines Baumes t ist die Summe der Höhen der Knoten von t. Also*

$$\pi(t) := \sum_{v \in t} \eta(v). \tag{3.1}$$

Bei einem binären Baum t bezeichnet $\pi(t)$ die interne Pfadlänge*, d.h. in (3.1) wird nur über interne Knoten summiert, und $\xi(t)$ die* externe Pfadlänge*, d.h. in (3.1) nur über externe Knoten summiert, von t.*

Definition 3.7 *Die Höhe $\eta(t)$ eines Baumes t ist das Maximum der Höhen der Knoten von t. Also*

$$\eta(t) := \max_{v \in t} \eta(v).$$

Definition 3.8 *Bei ebenen Wurzelbäumen werden zwei verschiedene Eibettungen in die Ebene als verschieden betrachtet, es ist also die links-rechts-Reihenfolge der Subbäume relevant.*

3.2 Ebene Wurzelbäume

Zu Beginn geben wir eine etwas andere Definition eines Wurzelbaumes, die aber die rekursive Struktur des Baumes besser beschreibt, und daher für die folgenden Betrachtungen von Vorteil ist.

Definition 3.9 *Ein ebener Wurzelbaum*[1] *ist ein Knoten – die Wurzel – an dem eine Folge von disjunkten Bäumen hängt.*

Die kombinatorische Konstruktion eines solchen Baumes, die sich aus dieser Definition ergibt, sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} \times \mathfrak{S}(\mathcal{G}), \tag{3.2}$$

wobei $\mathcal{G}$ die Bäume beschreibt und $\mathcal{N}$ einen Knoten (der Größe eins). $\mathfrak{S}(\mathcal{G})$ bezeichnet die unendliche Summe $\{\varepsilon\} + \mathcal{G} + (\mathcal{G} \times \mathcal{G}) + (\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}) + \cdots$.

3.2.1 Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit N Knoten

Mit Formel (3.2) lässt sich leicht folgender Satz formulieren und beweisen.

Satz 3.10 *Die Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit N Knoten beträgt*

$$G_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1} = \frac{4^{N-1}}{\sqrt{\pi N^3}}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{3.3}$$

Beweis. Sei $G(z)$ die erzeugende Funktion der G_N, also $G(z) = \sum_{k\geq 1} G_k z^k$. $G(z)$ erfüllt aufgrund der Formel (3.2) die Gleichung

$$G(z) = z + zG(z) + zG(z)^2 + \cdots = z\sum_{k\geq 0} G(z)^k = \frac{z}{1-G(z)}. \tag{3.4}$$

Aus (3.4) erhält man

$$G(z)^2 - G(z) + z = 0$$

und daraus schließlich

$$G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}. \tag{3.5}$$

[1] Mit ‚Baum‘ ist ab nun immer ein Wurzelbaum gemeint.

Mit Hilfe von (3.5) erhält man für $[z^N]G(z) = G_N$ $(N > 0)$

$$\begin{aligned}
[z^N]G(z) &= [z^N]\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} = \frac{1}{2}[z^N]\left(1-\sqrt{1-4z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-(-4)^N\binom{\frac{1}{2}}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(-(-4)^N\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-N+1\right)}{N!}\right) \\
&= 2^{N-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2N-3)}{N!}\cdot\frac{(N-1)!}{(N-1)!} = \frac{(2N-2)!}{N!(N-1)!} = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Für die asymptotische Auswertung benutzt man

$$\begin{aligned}
(2N-2)! &= \left(\frac{2N-2}{e}\right)^{2N-2} 2\sqrt{\pi(N-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
(N-1)!^2 &= \left(\frac{N-1}{e}\right)^{2N-2} 2\pi(N-1)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right).
\end{aligned}$$

Man erhält aus (3.6)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1} &= \frac{1}{N}\frac{(2N-2)!}{(N-1)!^2} \\
&= \frac{1}{N}\frac{\left(\frac{2N-2}{e}\right)^{2N-2} 2\sqrt{\pi(N-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(\frac{N-1}{e}\right)^{2N-2} 2\pi(N-1)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)} \\
&= 4^{N-1}\frac{1}{N}\sqrt{\pi(N-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2 = \frac{4^{N-1}}{\sqrt{\pi N^3}}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

3.2.2 Mittlere Pfadlänge der ebenen Wurzelbäume

Nun soll die Pfadlänge in ebenen Wurzelbäumen untersucht werden.

Lemma 3.11 *Für einen ebenen Wurzelbaum t gilt*

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{d}\pi(t_i) + |t| - 1, \qquad (3.7)$$

wobei d den Knotengrad der Wurzel bezeichnet und t_i die Subbäume, die an der Wurzel hängen.

Beweis. Aus $t = \{w\} \cup t_1 \cup \cdots \cup t_d$ und mit Definition 3.6 folgt

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \sum_{v \in t} \eta(v) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{v \in t_i} \eta(v) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \big(\pi(t_i) + |t_i|\big) = \sum_{i=1}^{d} \pi(t_i) + \sum_{i=1}^{d} |t_i| \\
&= \sum_{i=1}^{d} \pi(t_i) + |t| - 1
\end{aligned}$$

da der Beitrag eines Subbaumes t_i zur Pfadlänge $\pi(t)$ gleich $\pi(t_i) + |t_i|$ ist; es wird für jeden Knoten eine Kante mehr benötigt. □

Satz 3.12 *Die durchschnittliche Pfadlänge eines ebenen Wurzelbaumes t mit N Knoten beträgt*

$$\pi(t) = \frac{N}{2}\left(\frac{4^{N-1}}{\binom{2N-2}{N-1}} - 1\right) = \frac{N}{2}\left(\sqrt{\pi N} - 1\right) + O\left(\sqrt{N}\right). \tag{3.8}$$

Beweis. Sei $Q(u,z)$ die bivariate erzeugende Funktion, die Bäume $t \in \mathcal{G}$ nach Größe und Pfadlänge zählt, also $Q(u,z) = \sum_{t \in \mathcal{G}} u^{\pi(t)} z^{|t|}$. Aus Gleichung (3.2) und Formel (3.7) erhält man

$$\begin{aligned}
Q(u,z) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{t_1 \in \mathcal{G}} \cdots \sum_{t_k \in \mathcal{G}} u^{\pi(t_1) + \cdots + \pi(t_k) + |t_1| + \cdots + |t_k|} z^{|t_1| + \cdots + |t_k| + 1} \\
&= z \sum_{k \geq 0} \sum_{t_1 \in \mathcal{G}} u^{\pi(t_1))} (uz)^{|t_1|} \cdots \sum_{t_k \in \mathcal{G}} u^{\pi(t_k)} (uz)^{|t_k|} \\
&= z \sum_{k \geq 0} Q(u, uz)^k = \frac{z}{1 - Q(u, uz)}.
\end{aligned}$$

Setzt man $u = 1$, also summiert man über die Pfadlängen auf, so erhält man die bereits in Gleichung (3.5) gezeigte erzeugende Funktion, mit der die Bäume der Größe nach gezählt werden:

$$Q(1,z) = G(z).$$

Für diesen Beweis notwendig ist der Erwartungswert der Pfadlänge der Bäume mit N Knoten. Man berechnet daher

$$Q_u(u,z) = \frac{zQ_u(u,uz) + z^2 Q_z(u,uz)}{\big(1 - Q(u,uz)\big)^2},$$

verwendet

$$Q_z(1,z) = G_z(z) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \frac{1}{1-2G(z)}$$

und erhält

$$\begin{aligned}
Q_u(1,z) &= \frac{zQ_u(1,z) + z^2 Q_z(1,z)}{\big(1-Q(1,z)\big)^2} \\
Q_u(1,z)\Big(\big(1-G(z)\big)^2 - z\Big) &= \frac{z^2}{1-2G(z)} \\
Q_u(1,z) &= \frac{z^2}{\sqrt{1-4z}} \cdot \frac{2}{1-4z+\sqrt{1-4z}} \\
&= \frac{2z^2}{1-4z} \cdot \frac{1-\sqrt{1-4z}}{4z} \\
&= \frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-4z} - \frac{1}{\sqrt{1-4z}}\right). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Aus (3.9) liest man den Koeffizienten von z^N ab:

$$[z^N]Q_u(1,z) = \frac{1}{2}4^{N-1} - \frac{1}{2}\binom{2N-2}{N-1}. \qquad (3.10)$$

Schließlich muss (3.10) noch durch die Anzahl aller Bäume (3.3) dividiert werden und man erhält

$$\bar{\pi}(t) = \frac{N}{2}\left(\frac{4^{N-1}}{\binom{2N-2}{N-1}} - 1\right).$$

Für die asymptotische Betrachtung benutzt man wieder die Gleichungen (2.4) und (2.2) und erhält

$$\begin{aligned}
\frac{N}{2}\left(\frac{4^{N-1}}{\binom{2N-2}{N-1}} - 1\right) &= \frac{N}{2}\left(\frac{4^{N-1}(N-1)!^2}{(2N-2)!} - 1\right) \\
&= \frac{N}{2}\left(\frac{4^{N-1}\left(\frac{N-1}{e}\right)^{2N-2} 2\pi(N-1)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)}{\left(\frac{2N-2}{e}\right)^{2N-2} 2\sqrt{\pi(N-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)} - 1\right) \\
&= \frac{N\sqrt{\pi(N-1)}}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \frac{N}{2} = \frac{N}{2}\left(\sqrt{\pi N} - 1\right) + O\left(\sqrt{N}\right).
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Mittlere Höhe der ebenen Wurzelbäume

Nun soll die Höhe der ebenen Wurzelbäume untersucht werden. Leider lässt sich die Analyse dieses Parameters nicht mehr so direkt angehen, wie z.B. die der Pfadlänge, da die Höhe kein additiver Parameter ist. Im folgenden bezeichne $G_N^{[h]}$ die Bäume mit N Knoten, deren Höhe kleiner gleich h ist.

Lemma 3.13 *Die Anzahl der ebenen Wurzelbäume mit $N+1$ Knoten und einer Höhe $\eta \geq h-1$ beträgt*

$$G_{N+1} - G_{N+1}^{[h-2]} = \sum_{k\geq 1} \left(\binom{2N}{N+1-kh} - 2\binom{2N}{N-kh} + \binom{2N}{N-1-kh} \right). \tag{3.11}$$

Beweis. Sei $\mathcal{G}^{[h]}$ die Klasse der Bäume mit Höhe $\eta \geq h$, dann gilt

$$\mathcal{G}^{[h+1]} = \{\bullet\} \times \left(\emptyset + \mathcal{G}^{[h]} + \mathcal{G}^{[h]} \times \mathcal{G}^{[h]} + \cdots\right),$$

woraus sich die erzeugende Funktion $G^{[h]}(z)$ ergibt. Für diese gilt

$$G^{[h+1]}(z) = \frac{z}{1 - G^{[h]}(z)} \text{ mit } G^{[0]}(z) = z.$$

Daraus kann man durch Iteration die $G^{[h]}(z)$ schrittweise berechnen, also

$$\begin{aligned}
G^{[0]}(z) &= z \\
G^{[1]}(z) &= z\frac{1}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots \\
G^{[2]}(z) &= z\frac{1-z}{1-2z} = z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + \cdots \\
G^{[3]}(z) &= z\frac{1-2z}{z^2-3z+1} = \cdots
\end{aligned}$$

Man setzt nun mit

$$G^{[h]}(z) = z\frac{F_{h+1}(z)}{F_{h+2}(z)} \tag{3.12}$$

mit $F_0(z) = 0$, $F_1(z) = 1$, $F_2(z) = 1 - z$, $F_3(z) = 1 - 2z$, $F_4(z) = 1 - 3z + z^2$ usw. an und erhält mittels

$$z\frac{F_{h+1}(z)}{F_{h+2}(z)} = G^{[h]}(z) = \frac{z}{1 - G^{[h-1]}(z)} = \frac{z}{1 - \frac{zF_h(z)}{F_{h+1}(z)}} = z\frac{F_{h+1}(z)}{F_{h+1}(z) - zF_h(z)}$$

die Rekursion

$$F_{h+2}(z) = F_{h+1}(z) - zF_h(z)$$

für $h \geq 0$ und mit $F_0(z) = 0$ und $F_1(z) = 1$. Hält man z fest, so kann man die Rekursion leicht über ihre charakteristische Gleichung $q^2 - q + z = 0$ lösen und erhält mit $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$

$$F_h(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2} \right)^h - \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} \right)^h = \frac{q_1^h - q_2^h}{q_1 - q_2}.$$

Setzt man dies in (3.12) ein, so bekommt man

$$G^{[h]}(z) = 2z \frac{\left(1+\sqrt{1-4z}\right)^{h+1} - \left(1-\sqrt{1-4z}\right)^{h+1}}{\left(1+\sqrt{1-4z}\right)^{h+2} - \left(1-\sqrt{1-4z}\right)^{h+2}}.$$

Substituiert man $z = \frac{u}{(1+u)^2}$, so erhält man mit

$$\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} = \frac{u}{1+u} \qquad \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2} = \frac{1}{1+u}$$

für den gesuchten Ausdruck

$$G(z) - G^{[h]}(z) = \frac{1-u}{1+u} \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}}. \tag{3.13}$$

Nun liest man noch den Koeffizienten von z^{N+1} ab:

$$\begin{aligned}
[z^{N+1}] \left(G(z) - G^{[h]}(z) \right) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z^{N+2}} \frac{1-u}{1+u} \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}} \, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1+u)^{2N+4}}{u^{N+2}} \frac{1-u}{1+u} \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}} \frac{1-u}{(1+u)^3} \, du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{u^{N+2}} (1+u)^{2N} (1-u)^2 \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}} \, du \\
= [u^{N+1}](1+u)^{2N}(1-u)^2 \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}} &= [u^{N+1}](1-2u+u^2)(1+u)^{2N} \frac{u^{h+2}}{1-u^{h+2}} \\
&= \sum_{k \geq 1} [u^{N+1-k(h+2)}](1-2u+u^2)(1+u)^{2N} = \\
\sum_{k \geq 1} \left(\binom{2N}{N+1-k(h+2)} - 2\binom{2N}{N-k(h+2)} + \binom{2N}{N-1-k(h+2)} \right).
\end{aligned}$$

Für die Behauptung verschiebt man den h-Index noch um 2 und der Beweis ist erbracht. □

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man nun die durchschnittliche Höhe der ebenen Wurzelbäume bestimmen. Einige weitere Überlegungen finden sich in [dBKR72].

Satz 3.14 *Die durchschnittliche Höhe von ebenen Wurzelbäumen mit N Knoten ist unter der Voraussetzung, dass alle solche Bäume gleich wahrscheinlich sind*

$$\sqrt{\pi N} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right).$$

Beweis. Bezeichne $B_N^{[h]}$ die im Lemma 3.13 gezeigte Anzahl (3.11) der Bäume mit N Knoten und einer Höhe größer als h. Die durchschnittliche Höhe der Bäume ist daher $\frac{S_N}{G_N}$, wobei S_N die Summe

$$S_N := \sum_{h\geq 1} h(G_N^{[h]} - G_N^{[h-1]}) = \sum_{h\geq 1} h(B_N^{[h-1]} - B_N^{[h]}) = \sum_{h\geq 0} B_N^{[h]}$$

darstellt. Aus (3.13) folgt weiters

$$\begin{aligned}\sum_{h\geq 0} B_N^{[h]} &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{u^{N+1}}(1-u)^2(1+u)^{2N-2}\sum_{h\geq 1}\frac{u^h}{(1-u)^h}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{u^{N+1}}(1-u)^2(1+u)^{2N-2}\sum_{k\geq 1} d(k)u^k\,du.\end{aligned}$$

wobei $d(k)$ die positiven Teiler von k zählt. Man erhält also

$$S_{N+1} = \sum_{k\geq 1} d(k)\left(\binom{2N}{N+1-k} - 2\binom{2N}{N-k} + \binom{2N}{N-1-k}\right). \tag{3.14}$$

Für die asymptotische Betrachtung müssen zuerst Ausdrücke der Form

$$f_a(N) := \sum_{k\geq 1} \frac{\binom{2N}{N+a-k}}{\binom{2N}{N}} d(k) \tag{3.15}$$

betrachtet werden. Man erhält für $n \to \infty$ und mit $x = \frac{k-a}{N}$

$$\begin{aligned}\log\frac{\binom{2N}{N+a-k}}{\binom{2N}{N}} &= \log\frac{(N!)^2}{\big(N(1-x)\big)!\big(N(1+x)\big)!} \\ &= 2\log(N!) - \log\big(N(1-x)\big)! - \log\big(N(1+x)\big)!. \end{aligned}\tag{3.16}$$

Mit (2.1) kann man (3.16) leicht vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
&- N\log(1-x) + Nx\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{12N(1-x)} + \frac{1}{6N} \\
&- N\log(1+x) + Nx\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{12N(1+x)} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \\
&= -2N\left(\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right) - \frac{1}{6N}\left(x^2 + x^4 + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad + O\left(\frac{x^2}{N^3}\right)
\end{aligned}$$

Für $k \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + a$ erhält man aber

$$\frac{\binom{2N}{N+a-k}}{\binom{2N}{N}} = O\left(e^{-N^{2\varepsilon}}\right)$$

und man kann, da diese Terme in (3.15) vernachlässigbar sind, $x = O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ wählen. Nun betrachtet man das asymptotische Verhalten von

$$g_b(N) = \sum_{k\geq 1} k^b d(k) e^{-\frac{k^2}{N}}$$

für festes b und $n \to \infty$. Auch hier sind die Terme mit $k \geq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ vernachlässigbar und es kann daher f_a mit Hilfe von g_b über die Taylorreihe von f_a nach k dargestellt werden:

$$f_a(N) = g_0(N) + \frac{2a}{N}g_1(N) - \frac{a^2}{N}g_0(N) + \frac{2a^2}{N^2}g_2(N) - \frac{2a^3}{N^2}g_1(N) + O\left(\frac{g_0(N)}{N^{2-\varepsilon}}\right). \tag{3.17}$$

Für die eigentliche asymptotische Untersuchung von $g_b(N)$ benutzt man die Darstellung

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z)x^{-z}\,dz, \text{ für } c > 0 \text{ und } x > 1,$$

mit welcher man unter Berücksichtigung von $\zeta(z)^2 = \sum_{k\geq 1}\frac{d(k)}{k^z}$

$$\begin{aligned}
g_b(N) &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^z\Gamma(z)k^{b-2z}d(k)\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^z\Gamma(z)\zeta(2z-b)^2\,dz
\end{aligned} \tag{3.18}$$

mit $c > \frac{1}{2}(b+1)$ erhält. Für $q \in \mathbb{N}$ folgt aus $\Re(s) \geq -q$ für $s \to \infty$ $\zeta(s) = O\left(|s|^{q+\frac{1}{2}}\right)$. Da weiters $n^z\Gamma(z)$ auf vertikalen Linien sehr klein wird (siehe [Rem95, Kapitel 2.4.3]), kann man den Integrationsweg nach links verschieben und muss nur die Residuen aufsummieren. Der Integrand in (3.18) hat einen Pol zweiter Ordnung bei $z = \frac{1}{2}(b+1)$ und möglicherweise noch einfache Pole bei $z = 0, -1, -2, \ldots$. Sei daher $w = z - \frac{1}{2}(b+1)$, dann ist

$$\begin{aligned} n^z\Gamma(z)\zeta(2z-b)^2 =& n^{\frac{b+1}{2}}\left(1 + w\ln n + O(w^2)\right) \times \\ & \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)\left(1 + w\Psi\left(\frac{b+1}{2}\right) + O(w^2)\right) \times \\ & \left(\frac{1}{4w^2} + \frac{\gamma}{w} + O(1)\right), \end{aligned}$$

wobei $\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ und γ die Euler-Mascheroni Konstante ist. Das Residuum bei $z = \frac{b+1}{2}$ ist daher

$$\operatorname{res}_{\frac{b+1}{2}}\left(n^z\Gamma(z)\zeta(2z-b)^2\right) = n^{\frac{b+1}{2}}\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\ln n + \frac{1}{4}\Psi\left(\frac{b+1}{2}\right) + \gamma\right) \tag{3.19}$$

und jenes bei $z = -k$

$$\operatorname{res}_{-k}\left(n^z\Gamma(z)\zeta(2z-b)^2\right) = \frac{n^{-k}(-1)^k\zeta(-2k-b)^2}{k!}, \tag{3.20}$$

welches 0 ist, wenn b gerade ist. Bildet man nun die Summe von (3.19) und (3.20) über alle $k \in \mathbb{N}$, so erhält man eine asymptotische Entwicklung der $g_b(N)$, also

$$g_0(N) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi N}\ln N + \left(\frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{2}\ln 2\right)\sqrt{\pi N} + \frac{1}{4} + O(N^{-m}), \tag{3.21}$$

$$g_1(N) = \frac{1}{4}N\ln N + \frac{3}{4}\gamma N + \frac{1}{144} - \frac{1}{14400N} + O(n^{-2})$$

und

$$g_2(N) = \frac{N}{8}\sqrt{\pi N}\ln N + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\gamma - \frac{1}{4}\ln 2\right)N\sqrt{\pi N} + O(n^{-m}). \tag{3.22}$$

Nun kann man das Behauptete beweisen, indem man (3.14), (3.15), (3.17), (3.21) und (3.22) zusammensetzt und erhält

$$\begin{aligned}\frac{S_N}{(N+1)G_N} &= f_1 - 2f_0 + f_{-1} = -\frac{2}{N}g_0(N) + \frac{4}{N^2}g_2(N) + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\log N\right) \\ &= -\frac{1}{2N^2}\sqrt{\pi N}\ln N - \frac{3}{2N}\gamma\sqrt{\pi N} + \frac{\ln 2}{n}\sqrt{\pi N} + \frac{1}{2N} + \\ &+ \frac{1}{2N}\sqrt{\pi N}\ln N + \frac{\sqrt{\pi N}}{N} + \frac{3}{2N}\gamma\sqrt{\pi N} - \frac{\ln 2}{N}\sqrt{\pi N} + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\log N\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi N}}{N} + \frac{1}{2N} + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\log N\right).\end{aligned}$$

Multiplikation mit dem Faktor $N+1$ liefert asymptotisch das Ergebnis. □

3.3 Binäre Bäume

Auch hier wird eine Definition mit rekursivem Charakter gegeben.

Definition 3.15 (Binärbaum) *Ein* Binärbaum *oder* binärer Baum *ist entweder ein externer Knoten oder ein interner Knoten, an dem ein geordnetes Paar von Binärbäumen hängt.*

Definition 3.16 *Die Anzahl der externen Knoten eines Binärbaumes wird mit e und die Anzahl der internen Knoten eines Binärbaumes wird mit i bezeichnet.*

Die Unterscheidung in interne und externe Knoten mag hier noch etwas willkürlich wirken, wird aber im nächsten Abschnitt verständlich. Die kombinatorische Konstruktion eines Binärbaumes ist

$$\mathcal{B} = \mathcal{N}_e + \mathcal{N}_i \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \tag{3.23}$$

wobei $\mathcal{B}$ die Klasse der Binärbäume, $\mathcal{N}_e$ ein externer und $\mathcal{N}_i$ ein interner Knoten ist.

Lemma 3.17 *Für Binärbäume gilt*

$$e = i + 1. \tag{3.24}$$

Beweis. Induktion nach der Anzahl i der internen Knoten.

$i = 0$ Es existiert nur ein Baum ohne interne Knoten, nämlich der, der nur aus einem externen Knoten besteht. Für diesen Baum gilt die Gleichung (3.24).

$i \to i+1$ Sei B ein Binärbaum mit $i+1$ internen Knoten ($i \geq 0$), dann gibt es mindestens einen internen Knoten, der ein Blatt ist. Sei B' der Binärbaum, der durch Ersetzen dieses Blattes (und seiner beiden externen Knoten) durch einen externen Knoten entsteht. B' hat also i interne Knoten, also $e = i+1$ externe Knoten. B hat genau einen internen und einen externen Knoten mehr als B' und hat daher $i+2$ externe Knoten, womit die Gleichung (3.24) auch für B gilt.

□

3.3.1 Anzahl der binären Bäume mit N Knoten

Satz 3.18 *Die Anzahl t_N der Binärbäume mit N internen Knoten beträgt*

$$t_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N} = \frac{4^N}{\sqrt{\pi N^3}}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{3.25}$$

Beweis. Sei $T(z) = \sum_{k\geq 0} t_k z^k$ die erzeugende Funktion der t_N, dann gilt nach Definition 3.15

$$T(z) = 1 + zT(z)^2. \tag{3.26}$$

Analog zu (3.5) erhält man aus (3.26) den ersten Teil der Gleichung (3.25).

Mit (2.4) und (2.5) erhält man den zweiten Teil der Gleichung (3.25). □

Definition 3.19 *t_l bezeichne den linken und t_r den rechten Unterbaum des Binärbaumes t.*

Lemma 3.20 *Sei t ein Binärbaum, dann gilt*

1. $|t| = |t_l| + |t_r| + 1$,
2. $\pi(t) = \pi(t_l) + \pi(t_r) + |t| - 1$,
3. $\xi(t) = \xi(t_l) + \xi(t_r) + |t| + 1$ *und*
4. $\eta(t) = 1 + \max\big(\eta(t_l), \eta(t_r)\big)$.

Beweis.

1. folgt aus der Definition 3.15.
2. Es gilt $t = \{w\} \cup t_l \cup t_r$. Für jeden Knoten aus t_l und t_r ist der Weg zur Wurzel w nun eine Kante länger als in t_l bzw. t_r, also $\pi(t) = \pi(t_l) + |t_l| + \pi(t_r) + |t_r| = \pi(t_l) + \pi(t_r) + |t| - 1$.

3. analog.

4. folgt aus der Definition 3.7.

□

Nun ein Lemma über den Zusammenhang zwischen interner und externer Pfadlänge.

Lemma 3.21 *In einem Binärbaum t gilt*

$$\xi(t) = \pi(t) + 2|t|. \tag{3.27}$$

Beweis. Mittels Induktion nach $|t|$. Subtrahiert man die Gleichung (2) von Gleichung (3) aus Lemma 3.20, so erhält man

$$\xi(t) - \pi(t) = \big(\xi(t_l) - \pi(t_l)\big) + \big(\xi(t_r) - \pi(t_r)\big). \tag{3.28}$$

$|t| = 1$ Man erhält $2 = 0 + 2 \cdot 1$.

$|t| \to |t| + 1$ Beide Unterbäume haben höchstens die Größe $|t| - 1$, also $|t_l| < |t|$ und $|t_r| < |t|$. Dies verwendet man in (3.28) und erhält mit Gleichung 1 aus Lemma 3.20

$$\xi(t) - \pi(t) = 2|t_l| + 2|t_r| + 2 = 2|t|.$$

□

Ein weiteres Lemma über den Zusammenhang zwischen interner Pfadlänge und Höhe von Binärbäumen.

Lemma 3.22 *Für die Höhe und die interne Pfadlänge eines Binärbaumes t gilt*

$$\frac{\pi(t)}{|t|} \leq \eta(t) \leq \sqrt{2\pi(t)} + 1. \tag{3.29}$$

Beweis. Man unterscheidet zwei Fälle:

1. Fall Aus $\eta(t) = 0$ folgt $\pi(t) = 0$ und es gilt $0 \leq 0 \leq 1$.

2. Fall Ist $\eta(t) \neq 0$ dann gilt $\pi(t) = \sum_{v \in t} \eta(v) < |t|\eta(t)$, da wenigstens für die Wurzel w $\eta(w) = 0$ gilt. Ebenso gilt $\pi(t) = \sum_{v \in t} \eta(v) \geq \sum_{0 \leq i < \eta(t)} i$, da auf jeder Ebene $< \eta(t)$ wenigstens ein Knoten existiert. Daraus ergibt sich

$$2\pi(t) \geq \eta(t)^2 - \eta(t) \geq \big(\eta(t) - 1\big)^2$$

und die Behauptung ist bewiesen.

□

3.3.2 Mittlere Pfadlänge der binären Bäume

Satz 3.23 *Die mittlere interne Pfadlänge eines Binärbaumes mit N internen Knoten ist*

$$(N+1)\frac{4^N}{\binom{2N}{N}} - 3N - 1 = N\sqrt{\pi N} - 3N + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Beweis. Sei $P(u,z) = \sum_{t\in\mathcal{B}} u^{\pi(t)} z^{|t|}$ die bivariate erzeugende Funktion, die Binärbäume nach Pfadlänge und Größe zählt. Mit Punkt 2 aus Lemma 3.20 und Formel (3.23) erhält man

$$\begin{aligned} P(u,z) &= \sum_{t\in\mathcal{B}} u^{\pi(t)} z^{|t|} = 1 + \sum_{t_l\in\mathcal{B}}\sum_{t_r\in\mathcal{B}} u^{\pi(t_l)+\pi(t_r)+|t_l|+|t_r|} z^{|t_l|+|t_r|+1} \\ &= 1 + z\sum_{t_l\in\mathcal{B}} u^{\pi(t_l)}(uz)^{|t_l|} \sum_{t_r\in\mathcal{B}} u^{\pi(t_r)}(uz)^{|t_r|} \\ &= 1 + zP(u,uz)^2. \end{aligned}$$

Der Mittelwert für die Pfadlänge ist

$$P_u(1,z) = \frac{2z^2 P_z(1,z)P(1,z)}{1-2zP(1,z)}, \tag{3.30}$$

woraus man mit den bereits bekannten Ausdrücken

$$P(1,z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \qquad \text{und} \qquad P_z(1,z) = \frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2\sqrt{1-4z}}$$

folgendes für (3.30) erhält

$$P_u(1,z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-4z} - \frac{1-z}{\sqrt{1-4z}}. \tag{3.31}$$

Aus (3.31) lassen sich die Koeffizienten von z^N leicht ablesen und man erhält für die Pfadlänge

$$\bar{\pi}(t) = (N+1)\frac{4^N}{\binom{2N}{N}} - 3N - 1. \tag{3.32}$$

Für die Asymptotik von (3.32) benutzt man wieder die Gleichungen (2.5) und (2.4) und erhält schließlich

$$\begin{aligned} &(N+1)\frac{4^N}{\binom{2N}{N}} - 3N - 1 = (N+1)\frac{4^N N!^2}{(2N)!} - 3N - 1 \\ &= (N+1)\frac{4^N\left(\frac{N}{e}\right)^{2N} 2\pi N\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)}{\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} 2\sqrt{\pi N}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)} - 3N - 1 = N\sqrt{\pi N} - 3N + O\left(\sqrt{N}\right). \end{aligned}$$

□

3.3.3 Mittlere Höhe der binären Bäume

Satz 3.24 ([FO82]) *Die erwartete Höhe $\mathbb{E}\eta_N$ von binären Bäumen mit N Knoten ist asymptotisch*

$$\mathbb{E}\eta_N \sim 2\sqrt{\pi N} \text{ für } N \to \infty.$$

Beweis. Der Beweis beginnt ähnlich dem der Höhe der Wurzelbäume. Es sei $\mathcal{B}^{[h]}$ die Klasse der binären Bäume mit einer Höhe $\eta \leq h$. Die erzeugende Funktion $B^{[h]}(z)$ soll die Bäume der Klasse $\mathcal{B}^{[h]}$ nach der Anzahl ihrer Knoten zählen. Nach (3.23) gilt daher folgende Rekursion

$$B^{[h+1]}(z) = 1 + zB^{[h]}(z)^2 \text{ mit } B^{[0]}(z) = 0. \tag{3.33}$$

Nun führt man die erzeugende Funktion $H(z) := \sum_{N\geq 0} H_N z^N$ ein, die die Bäume aus $\mathcal{B}$ (alle binären Bäume) gewichtet mit deren Höhe nach der Anzahl der Knoten zählt. H_N ist also die gesuchte Größe multipliziert mit der Anzahl der binären Bäume bestehend aus N Knoten. Es gilt also

$$H(z) = \sum_{h\geq 0} \left(B(z) - B^{[h]}(z)\right). \tag{3.34}$$

Leider ist die Funktion $H(z)$ aufgrund der Rekursion von $B^{[h]}(z)$ nicht so leicht zu behandeln, wie das für die Wurzelbäume der Fall war. Dort konnte eine explizite Summe mit Binomialkoeffizienten erreicht werden. Man folgt daher hier dem Beweis von Flajolet und Odlyzko ([FO82]), der sich in mehrere Abschnitte gliedert.

Analytische Fortsetzung von $H(z)$ Man beginnt damit, zu untersuchen, wo $H(z)$ existiert, d.h. wo die Summe (3.34) konvergiert. Antwort gibt der

Satz 3.25 *Der Konvergenzradius von $H(z)$ ist $\frac{1}{4}$ und die Gleichung*

$$H(z) = \sum_{h\geq 0} \left(B(z) - B^{[h]}(z)\right) \tag{3.35}$$

bleibt gültig für $z \in C_0$ mit

$$C_0 := \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{4} \wedge z \neq \frac{1}{4} \right\}.$$

und mit positiven Vorzeichen von $\sqrt{1-4z}$ für reelle z in $B(z)$. Weiters konvergiert die Summe absolut in C_0.

Beweis. Klarerweise gilt für jeden binären Baum t, der wenigstens aus einem Knoten besteht $1 \leq \eta(t) \leq |t|$. Summiert man diese Ungleichungen über alle Bäume der Klasse $\mathcal{B}_N$ auf, so erhält man $B_N \leq H_N \leq NB_N$, woraus mit Formel (3.25) folgt, dass $H(z)$ einen Konvergenzradius von $\frac{1}{4}$ hat.

Die Funktion $B(z)$ konvergiert für $|z| \leq \frac{1}{4}$ absolut, da sie dann mindestens wie $\sum n^{-\frac{3}{2}}$ konvergiert. Definiert man $R_m(z) = \sum_{n \geq m} B_n z^n$, so sieht man für $|z| \leq \frac{1}{4}$ durch

$$\big|B(z) - B^{[h]}(z)\big| \leq R_h\big(|z|\big),$$

dass $B^{[h]}(z)$ gegen $B(z)$ konvergiert. Im Weiteren sei $\varepsilon(z) := \sqrt{1-4z}$ und $e_h(z) := \frac{B(z)-B^{[h]}(z)}{2B(z)}$. Durch Anwendung der Rekursionen von $B(z)$ und $B^{[h]}(z)$ folgt

$$\begin{aligned} B(z) - B^{[h]}(z) &= 1 + zB(z)^2 - 1 - zB^{[h]}(z)^2 \\ &= z\big(B(z) + B^{[h]}(z)\big)\big(B(z) + B^{[h]}(z)\big). \end{aligned}$$

Dividiert man die Gleichung durch $2B(z)$ und verwendet $e_h(z)$, dann gilt

$$e_{h+1}(z) = \big(1 - \varepsilon(z)\big)e_h(z)\big(1 - e_h(z)\big)$$

mit $e_0(z) = \frac{1}{2}$. Ist $z \in C_0$, dann gilt $|1 - \varepsilon| < 1$ und es konvergiert $e_h(z)$ geometrisch gegen 0, denn es lässt sich ein $c(z)$ finden, sodass die Abschätzung

$$\big|e_h(z)\big| < c(z)\big|1 - \varepsilon(z)\big|^h \tag{3.36}$$

gilt. Es konvergiert daher die Summe $\sum_{h \geq 0} e_h(z)$ und so auch die Summe in (3.35) in C_0. □

Die neu eingeführten Größen $e_h(z)$ und $\varepsilon(z)$ erleichtern auch die Schreibweise der beiden Gleichungen (3.33) und (3.35). Man erhält die Rekursion

$$e_{n+1}(z) = \big(1 - \varepsilon(z)\big)e_n(z)\big(1 - e_n(z)\big) \text{ mit } e_0(z) = \frac{1}{2} \tag{3.37}$$

sowie die Gleichung

$$H(z) = \frac{4}{1 + \varepsilon(z)} \sum_{n \geq 0} e_n(z).$$

Als nächsten Schritt versucht man den Bereich, in dem $H(z)$ analytisch ist, über den Konvergenzkreis hinaus zu erweitern. Betrachtet man die

Funktion $f(y) := \big(1-\varepsilon(z)\big)y(1-y)$, dann gilt $e_n(z) = f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$, also die n-te Iteration von f. Damit diese Iteration gegen 0 konvergiert, muss $f'(0) = 1-\varepsilon$ dem Betrage nach kleiner als eins sein, da 0 sonst kein anziehender Fixpunkt ist. Man betrachtet daher das Gebiet D_0, das durch

$$D_0 := \Big\{z : \big|1-\varepsilon(z)\big| < 1\Big\}$$

definiert ist. Dieses Gebiet umfasst C_0 zur Gänze. Das folgende Lemma gibt ein Kriterium für die Konvergenz von $e_n(z)$ gegen 0 für $z \in D_0$ an.

Lemma 3.26 *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von* $\big(e_n(z)\big)_{n\geq 0}$ *nach* 0 *für* $z \in D_0$ *ist, dass für wenigstens ein* m

$$|e_m(z)| < \frac{1}{|1-\varepsilon(z)|} - 1$$

gilt. Ist dies der Fall, so ist die Konvergenz für $n \geq m$ *monoton.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus der Rekursion der Funktion f. Die Bedingung ist aber auch hinreichend, da aus der Dreiecksungleichung $|e_{n+1}| \leq |1-\varepsilon||e_n| + |1-\varepsilon||e_n|^2$ sofort

$$|e_{n+1}| - |e_n| \leq |e_n||1-\varepsilon|\left(|e_n| + 1 - \frac{1}{|1-\varepsilon|}\right)$$

folgt. Ist nämlich $|e_n| < \frac{1}{|1-\varepsilon|} - 1$, dann gilt auch $|e_{n+1}| < |e_n|$. Dies kann man iterieren, man benötigt lediglich einen Wert m für den die Ungleichung zum ersten Mal erfüllt wird.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $|e_n|$ gegen 0 konvergiert. Angenommen $|e_n|$ konvergiert gegen ein $L \neq 0$. Dann gilt wegen (3.36), dass

$$|1-e_n| \to \frac{1}{|1-\varepsilon|} \text{ für } n \to \infty$$

gilt. Daher müsste für $e_n \to \alpha$ aber sowohl $|\alpha| = L < \frac{1}{|1-\varepsilon|} - 1$ als auch $|1-\alpha| = \frac{1}{|1-\varepsilon|}$ gelten. Daraus folgt $L = 0$. □

Lemma 3.27 *Die Menge* $K \subseteq D_0$ *der* $z \in D_0$*, für die* $\big(e_n(z)\big)_{n\geq 0}$ *konvergiert, ist offen. Weiters ist die Summe* $\sum_{n\geq 0} e_n(z)$ *analytisch in* K.

Beweis. Sei $\Phi(z) := \frac{1}{|1-\varepsilon|} - \big|e_m(z)\big| > 1$ für ein $z \in K$ und das m aus dem vorigen Lemma. Da $\Phi(z)$ in D_0 stetig ist, existiert ein k, sodass für alle z' mit $|z - z'| < h$ folgt, dass $\Phi(z') > 1$. D.h. $e_m(z')$ konvergiert und K ist offen.

Aus (3.36) weiß man, dass die Folge e_n geometrisch konvergiert. Überdies ist die Konvergenz noch gleichmäßig in z. Da es ein d gibt, sodass $|1-\varepsilon|\Big(1 - \big|e_m(z)\big|\Big) < d < 1$ gilt, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}$, sodass für alle z' mit $|z - z'| < \delta$ das Folgende gilt:

$$\big|1 - \varepsilon(z')\big|\Big(1 + \big|e_m(z')\big|\Big) < d < 1.$$

Da für $n \geq m$ die Folge $\big|e_m(z')\big|$ monoton fällt, ist $\big|e_n(z')\big| \leq d^{n-m}\big|e_m(z')\big|$ und daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\big|e_n(z')\big| \leq cd^n$ gleichmäßig in $|z' - z| < \delta$ ist. Daher ist die Summe $\sum_{n\geq 0} e_n(z')$ gleichmäßig konvergent in z für $|z - z'| < \delta$ und analytisch. □

Wendet man Lemma 3.27 auf die Punkte in C_0 an, dann erhält man

Satz 3.28 *Für alle $\eta > 0$ existiert ein $\lambda > \frac{1}{4}$, sodass $H(z)$ für $|\operatorname{Arg}(z)| > \eta$ und $|z| < \lambda$ analytisch ist.*

Analytische Fortsetzung von $H(z)$ um $z = \frac{1}{4}$ Nun wird untersucht, ob die Funktion $H(z)$ analytisch ist. Es zeigt sich, dass außer $z = \frac{1}{4}$ keine weiteren Singularitäten vorhanden sind.

Lemma 3.29 *Sei $g(y) = y(1-y)$, dann gilt: Erfüllt y $|y| < \frac{1}{2}$ und $0 \leq \operatorname{Arg}(y) \leq \operatorname{Arccos}\frac{1}{4}$ dann gilt $\big|g(y)\big| \leq |y|$ und $0 \leq \operatorname{Arg}\big(g(y)\big) \leq \operatorname{Arg}(y)$.*

Beweis. Es sei $y = re^{it}$ in Polardarstellung gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned} g(y) = y(1-y) &= re^{it}\sqrt{\mathfrak{Re}(1-re^{iz})^2 + \mathfrak{Im}(1-re^{it})^2}e^{i\operatorname{Arg}(1-re^{it})} \\ &= re^{it}\sqrt{(1-r\cos t)^2 + (r\sin t)^2}e^{i\operatorname{Arctan}\frac{r\sin t}{1-r\cos t}} \\ &= r\sqrt{1+r^2-2r\cos t}e^{i\left(t-\operatorname{Arctan}\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Aus $2r\cos t \geq r^2$ folgt daher sofort

$$\big|g(y)\big| = r\sqrt{1+r^2-2r\cos t} \leq r = |y|.$$

Andererseits folgt aus $1 - r\cos t \geq r$

$$0 \leq \operatorname{Arctan}\frac{r\sin t}{1-r\cos t} \leq \operatorname{Arctan}\sin t \leq t$$

und damit die Behauptung $0 \leq \operatorname{Arg} g(y) \leq \operatorname{Arg} y$. □

Lemma 3.30 *Sei $z \in D_0$, $\mathfrak{Im}\, z \geq 0$ und*

$$N(z) := 1 + \left\lfloor \frac{\operatorname{Arccos} \frac{1}{4}}{\operatorname{Arg}\big(1 - \varepsilon(z)\big)} \right\rfloor, \tag{3.39}$$

dann gilt für alle $n < N(z)$

$$\big|e_{n+1}(z)\big| \leq \big|e_n(z)\big| \leq \frac{1}{4}$$

und $0 \leq \operatorname{Arg}(e_{n+1}) \leq (n+1) \operatorname{Arg}\big(1 - \varepsilon(z)\big)$.

Beweis. Durch iteriertes Anwenden von Lemma 3.29. □

Das nächste Lemma bildet ein Kernstück des Beweises, da es Reziprokwerte von e_n mit e_j für $j < n$ in Beziehung setzt. Dies wird später ausgenützt um Schranken für $\big|e_n(z)\big|$ zu erhalten.

Lemma 3.31 *Sind alle $e_j(z) \neq 1$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$, dann gilt*

$$\frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} = \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + 2 + \sum_{j<n} \frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j.$$

Beweis. Dividiert man (3.37) durch den Faktor $(1-\varepsilon)^{j+1}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{e_{j+1}}{(1-\varepsilon)^{j+1}} &= \frac{e_j}{(1-\varepsilon)^j}(1-e_j) \\
\frac{(1-\varepsilon)^{j+1}}{e_{j+1}} &= \frac{(1-\varepsilon)^j}{e_j}\frac{1}{1-e_j} = \frac{(1-\varepsilon)^j}{e_j}\left(1 + e_j + \frac{e_j^2}{1-e_j}\right) \\
&= \frac{(1-\varepsilon)^j}{e_j} + (1-\varepsilon)^j + \frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j
\end{aligned}$$

Bringt man den ersten Bruch der rechten Seite auf die linke und summiert über $j = 0, \ldots, n-1$ auf, dann teleskopiert die linke Summe und man erhält mit $e_0 = \frac{1}{2}$

$$\frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} = \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j.$$

□

Lemma 3.31 kann man dazu verwenden $f_n := e_n\left(\frac{1}{4}\right)$ asymptotisch abzuschätzen. f_n erfüllt nämlich die Rekursion $f_n = f_n(1-f_n)$ und hat

den Anfangswert $f_0 = \frac{1}{2}$. Wendet man nun Lemma 3.31 an, so erhält man

$$\frac{1}{f_n} = n + 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_j}{1 - f_j}.$$

Nach Formel (3.36) wächst $\frac{1}{f_n}$ geometrisch und ist daher $> n + 2$. Es gilt daher

$$\frac{1}{f_n} < n + 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1}$$

bzw.

$$f_n = \frac{1}{n + \ln n + O(1)}. \tag{3.40}$$

Dieses asymptotische Verhalten wird später noch benötigt.

Das nächste Lemma beschreibt das Gebiet, in dem $e_n(z)$ konvergiert genauer.

Lemma 3.32 *Es existieren positive Konstanten ρ_0 und θ_0, sodass $\big(e_n(z)\big)_{n\geq 0}$ gegen 0 konvergiert, wenn $z \in D_0$, $\big|\varepsilon(z)\big| \leq \rho_0$ und*

$$-\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) < \operatorname{Arg}\big(\varepsilon(z)\big) < -\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right)$$

gilt.

Beweis. Um Lemma 3.26 anwenden zu können setzt man Lemma 3.31 ein, womit man eine obere Schranke von $\big|e_{N(z)}(z)\big|$ erhält. Dazu setzt man wieder $\varepsilon(z) = \rho e^{i\theta}$ an und entwickelt $\big(1 - \varepsilon(z)\big)^{N(z)}$ nach ρ um null, wobei $\theta \neq 0$ aus einem Intervall um $-\frac{\pi}{4}$ ist. Es darf dabei ρ nicht zu groß werden, da die Entwicklung ja nur lokal gilt. Man entwickelt mit Hilfe von Teilen aus (3.38) und (3.39)

$$\begin{aligned}
\big|1 - \varepsilon(z)\big| &= 1 - \rho\cos\theta + O\left(\rho^2\right), \qquad (3.41)\\
\operatorname{Arg}\big(1 - \varepsilon(z)\big) &= -\rho\sin\theta + O\left(\rho^2\right),\\
N(z) &= \frac{-\alpha}{\rho\sin\theta} + O(1),\\
\big|1 - \varepsilon(z)\big|^{N(z)} &= e^{\alpha\cot\theta} + O(\rho),
\end{aligned}$$

wobei $\alpha = \arccos\frac{1}{4}$ bezeichnet. Um eine obere Schranke zu erhalten kann man auch eine untere Schranke vom Reziprokwert, der in Lemma

3.26 ausgeführt ist, bestimmen. Man verwendet

$$\frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} = \underbrace{\frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon}}_{=:B(z)} + \frac{8}{3} + \underbrace{\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j}_{=:A(z)} . \tag{3.42}$$

und daher gilt es $A(z)$ und $B(z)$ so abzuschätzen, dass man $|e_N|$ gewinnbringend mit der Bedingung aus Lemma 3.26 vergleichen kann. Dazu bietet sich die Ungleichung $\big|A(z)+B(z)\big| \geq \big|B(z)\big| - \big|A(z)\big|$ an. Daher muss man weiters $A(z)$ nach oben und $B(z)$ nach unten abschätzen. Da für $1 \leq j \leq N(z)$ $\left|\frac{e_j}{1-e_j}\right| \leq \frac{1}{3}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \big|A(z)\big| &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N-1} |1-\varepsilon|^j \leq \frac{1}{3}\frac{1-|1-\varepsilon|^N}{1-|1-\varepsilon|} \\ &< \frac{1}{3}\frac{1-e^{\alpha\cot\theta}}{\rho\cos\theta} + O\left(1\right), \end{aligned} \tag{3.43}$$

und für $B(z)$ gilt

$$\begin{aligned} \big|B(z)\big| &\geq \frac{1-|1-\varepsilon|^N}{\varepsilon} \\ &> \frac{1-e^{\alpha\cot\theta}}{\rho} + O\left(1\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Setzt man (3.43) und (3.44) zusammen in (3.42) ein und betrachtet den Betrag, so gilt

$$\frac{|1-\varepsilon|^N}{|e_N|} > \frac{1-e^{\alpha\cot\theta}}{\rho\cos\theta}\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\right)\left(1+O\left(\rho\right)\right),$$

woraus man leicht durch Kehrwertbildung

$$|e_N| < \rho\frac{|1-\varepsilon|^N\cos\theta}{\left(1-e^{\alpha\cot\theta}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)}\left(1+O\left(\rho\right)\right)$$

folgert. Nun muss dieser Wert mit der Schranke aus Lemma 3.26 verglichen werden. Für diese gilt

$$\frac{1}{|1-\varepsilon|} - 1 = \rho\cos\theta + O\left(\rho^2\right),$$

d.h. $|e_N|$ erfüllt die Bedingung von Lemma 3.26, wenn

$$\frac{e^{\alpha\cot\theta}}{\left(1-e^{\alpha\cot\theta}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)} < 1$$

gilt, was für $|\theta| < 0.819\ldots$ erfüllt ist. □

Satz 3.33 *Es gibt positive Konstanten α_0 und β_0, sodass die Funktion $H(z)$ analytisch in einem Gebiet um $\frac{1}{4}$ ist, das durch*

$$\left\{ z \neq \frac{1}{4} : \left| z - \frac{1}{4} \right| < \alpha_0 \text{ und } \frac{\pi}{2} - \beta_0 < \left| \operatorname{Arg}\left(z - \frac{1}{4} \right) \right| \right\}$$

beschrieben wird.

Beweis. Folgt aus den Lemmata 3.29, 3.30, 3.31 und 3.32. □

Asymptotische Entwicklung von $H(z)$ Dieser Abschnitt des Beweises zielt darauf ab, die Funktion $H(z)$ an der Singularität $z = \frac{1}{4}$ zu entwickeln. Es stellt sich heraus, dass sie sich dort logarithmisch verhält. Zunächst eine Schranke für $|e_n(z)|$:

Lemma 3.34 *Es existieren Konstanten α_1, β_1 und c_1, sodass*

$$\left| e_n(z) \right| < \frac{c_1}{n} \tag{3.45}$$

gilt, wenn $|z - \frac{1}{4}| < \alpha_1$ und $\frac{\pi}{2} - \beta_1 < \left| \operatorname{Arg}\left(z - \frac{1}{4} \right) \right| < \frac{\pi}{2} + \beta_1$. Weiters gilt für $n \geq N(z)$

$$\left| e_n(z) \right| < c_1 \left| \varepsilon(z) \right| \left| 1 - \varepsilon(z) \right|^n. \tag{3.46}$$

Beweis. Es werden die Methoden, die für den Beweis von Lemma 3.32 verwendet wurden, verfeinert, um die Geschwindigkeit der Konvergenz nachzuweisen. Es muss allerdings zwischen den Fällen $n \leq N(z)$ und $n \geq N(z)$ unterschieden werden. Für die detailierte Durchführung sei auf [FO82] verwiesen. □

Lemma 3.35 *Es existieren Konstanten α_2, β_2 und c_2, sodass*

$$\left| e_n(z) - e_n\left(\frac{1}{4} \right) \right| < c_2 \left| \varepsilon(z) \right|$$

gilt, wenn $|z - \frac{1}{4}| < \alpha_2$ und $\frac{\pi}{2} - \beta_2 < \left| \operatorname{Arg}\left(z - \frac{1}{4} \right) \right| < \frac{\pi}{2} + \beta_2$.

Beweis. Wendet man (3.45) auf die Aussage von Lemma 3.31 an, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} &= \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + O\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|q-\varepsilon|^j}{j} \right) \\ &= \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + O\left(\log \frac{1}{1-|1-\varepsilon|} \right) \\ &= \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + O\left(\log \frac{1}{|\varepsilon|} \right). \end{aligned}$$

Für $n \leq N(z)$ erhält man mit der schon in (3.40) gezeigten Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{(1-\varepsilon)^n\left(e_n\left(\frac{1}{4}\right)-e_n\right)}{e_n e_n\left(\frac{1}{4}\right)} &= \frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} - \frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n\left(\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{1-(1-\varepsilon)^n - n\varepsilon(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + O\left(\log\frac{1}{|\varepsilon|}\right) \\ &= O\left(n^2|\varepsilon|\right)\end{aligned}$$

Daher ist

$$\left|e_n\left(\frac{1}{4}\right)-e_n\right| = O\left(n^2\frac{\left|\varepsilon e_n e_n\left(\frac{1}{4}\right)\right|}{(1-\varepsilon)^n}\right) = O\left(|\varepsilon|\right).$$

Für $n > N(z)$ gilt $|e_n|, \left|e_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(|\varepsilon|\right)$. Damit ist der Beweis erbracht. □

Das Lemma 3.35 legt nahe, die Summe $\sum_{n\geq 0} e_n(z)$ durch die Funktion

$$L(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon(z)\big(1-\varepsilon(z)\big)^n}{1-\big(1-\varepsilon(z)\big)^n} \tag{3.47}$$

zu approximieren. Um diese Approximation genauer beurteilen zu können, untersucht man den Fehler, also die Differenz

$$D(z) := \sum_{n\geq 0} e_n(z) - L(z). \tag{3.48}$$

Mit Hilfe der Darstellung von $e_n(z)$ aus Lemma 3.31 kann man (3.48) auch als

$$D(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} e_n(z)\frac{S_n(z)}{q(n,z)},$$

schreiben, wobei die beiden Größen $q(n,z)$ und $S(z)$ durch

$$q(n,z) := \frac{1-\big(1-\varepsilon(z)\big)^n}{\varepsilon(z)} \quad \text{und} \quad S_n(z) := 3 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{e_j(z)}{1-e_j(z)}\big(1-\varepsilon(z)\big)^j$$

definiert werden. Weiters ist zu beachten, dass $D\left(\frac{1}{4}\right)$ existiert, da die Reihe wie $\sum \frac{\log n}{n^2}$ konvergiert. Im Folgenden wird gezeigt, dass $D(z) = D\left(\frac{1}{4}\right) + o\left(1\right)$ für $z \to \frac{1}{4}$.

Lemma 3.36 *Es existieren Konstanten α_3 und β_3, sodass für z mit $\left|z-\frac{1}{4}\right| < \alpha_3$ und $\frac{\pi}{2}-\beta_3 < \left|\operatorname{Arg}\left(z-\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{\pi}{2}+\beta_3$ und für alle $\eta > 0$*

$$D(z) = D\left(\frac{1}{4}\right) + O\left(|1-4z|^{\frac{1}{4}-\eta}\right)$$

gilt.

Beweis. Zusätzlich zu

$$\left|3+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j\right| = O\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|1-\varepsilon|^j}{j}\right) = O\left(\log\frac{1}{|\varepsilon|}\right)$$

gilt für $n \geq 3$ auch

$$\left|3+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{e_j}{1-e_j}(1-\varepsilon)^j\right| = O\left(3+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right) = O\left(\log n\right).$$

Aus Lemma 3.31 folgt daher $\frac{(1-\varepsilon)^n}{e_n} = \frac{1-(1-\varepsilon)^n}{\varepsilon} + t_n(z)$ mit $t_n(z) = O\left(\log\min\left(n, \frac{1}{|\varepsilon|}\right)\right)$. Ist n hinreichend groß, dann gilt

$$\frac{e_n}{(1-\varepsilon)^n} = \frac{\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)^n} + O\left(\frac{|\varepsilon^2 t_n|}{\left|1-(1-\varepsilon)^n\right|^2}\right)$$

und man erhält daraus eine Abschätzung der untersuchten Differenz

$$d_n := e_n - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n} = O\left(\frac{|\varepsilon^2 t_n||1-\varepsilon|^n}{\left|1-(1-\varepsilon)^n\right|^2}\right). \tag{3.49}$$

Die Summe über die d_N wird nun in zwei Bereiche geteilt. Der erste Teil erfüllt $1 \leq n < \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}$ und der zweite $\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \leq n$. Im ersten Abschnitt gilt die Abschätzung

$$\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n} = \frac{1}{n} + O\left(|\varepsilon|\right). \tag{3.50}$$

Investiert man (3.50) in (3.49), dann erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{n<\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}}\left(d_n - d_n\left(\frac{1}{4}\right)\right) &= \sum_{n<\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} O\left(\left|e_n - e_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| + \left|\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)^n} - \frac{1}{n}\right|\right) \\ &= \sum_{n<\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} O\left(|\varepsilon|\right) = O\left(\sqrt{|\varepsilon|}\right). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Im zweiten Abschnitt gilt für $\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \leq n \leq \frac{1}{|\varepsilon|}$

$$d_n = O\left(\frac{|\varepsilon^2| \log n}{\left|1-(1-\varepsilon)^n\right|^2}\right) = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

und für $n > \frac{1}{|\varepsilon|}$ gilt $d_n = O\left(|\varepsilon|^2 |1-\varepsilon|^n \log \frac{1}{|\varepsilon|}\right)$ und daher auch

$$\begin{aligned}\sum_{n>\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} d_n &= O\left(\sum_{n>\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} \frac{\log n}{n^2}\right) + O\left(|\varepsilon|^2 \log \frac{1}{|\varepsilon|} \sum_{n\geq 0} |1-\varepsilon|^n\right) \\ &= O\left(\sqrt{|\varepsilon|} \log \frac{1}{|\varepsilon|}\right) \qquad (3.52)\end{aligned}$$

Da für $n \geq 2$ außerdem noch $d_n\left(\frac{1}{4}\right) = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$ gilt, ändert sich die Abschätzung (3.52) nicht mehr. Es gilt nämlich

$$\sum_{n>\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} d_n - \sum_{n>\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}} d_n\left(\frac{1}{4}\right) = O\left(\sqrt{|\varepsilon|} \log \frac{1}{|\varepsilon|}\right) \qquad (3.53)$$

Mit (3.51) und (3.53) ist der Beweis beendet. □

Die Konstante $D\left(\frac{1}{4}\right)$ lässt sich nur numerisch berechnen und ist $-1.602\ldots$. Es bleibt nun noch $L(z)$ genauer zu untersuchen, was zu folgendem Satz führt:

Satz 3.37 *Es existieren α und β, sodass für z mit $\left|z-\frac{1}{4}\right| < \alpha$, $\frac{\pi}{2}-\beta < \left|\operatorname{Arg}\left(z-\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{\pi}{2}+\beta$ und alle $\nu < \frac{1}{4}$ die folgende Entwicklung*

$$H(z) = -2\ln(1-4z) + K + O\left(|1-4z|^\nu\right) \qquad (3.54)$$

von $H(z)$ zur Verfügung steht, wobei $K \approx -4.1$ eine Konstante ist.

Beweis. Der Einfachheit halber setzt man $e^{-u} := 1-\varepsilon$. Man deutet nun die Summe (3.47) als Riemann Integral. Um das tun zu können, vereinfacht man sie noch und erhält

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-^{-u}}{1-e^{-nu}} e^{-nu} = \frac{1-e^{-u}}{u} \sum_{n\geq 1} u \frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}}.$$

Ist man mit u nahe der Null und mit $\operatorname{Arg} u$ nahe an $\frac{\pi}{4}$, dann kann man anstatt der letzten Summe folgendes Integral betrachten:

$$\int_u^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx.$$

Klarerweise ist das Integral divergent, daher wird es in zwei Teile gespalten, und zwar in $n|u| < 1$ und $n|u| \geq 1$.

Ist $n|u| \geq 1$, dann kann man mit Taylor den Fehler, den die Schreibweise als Integral bringt, in einem Teilintervall $\big[nu, (n+1)u\big]$ abschätzen. Es gilt

$$\left| \int_{nu}^{(n+1)u} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx - \frac{ue^{-nu}}{1-e^{-nu}} \right| < \frac{|u|^2}{2} \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \bigg|_{x=(n+t)u} \right|,$$

woraus durch Summierung

$$\sum_{n \geq \frac{1}{|u|}} u \frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}} = \int_{u\lceil \frac{1}{|u|} \rceil} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx + O\left(|u|\right)$$

folgt.

Ist andererseits $n|u| < 1$, dann betrachtet man einen um $\frac{1}{x}$ reduzierten Integranden, der differenzierbar und beschränkt auf $[0,1]$ ist. Daher gilt

$$\left| u \frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}} - \frac{1}{n} - \int_{nu}^{(n+1)u} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx \right| < c|u|^2,$$

wobei c ein Konstante ist. Setzt man $n_0 := \frac{1}{|u|}$, dann erhält man

$$\sum_{n\geq 1} u \frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}} = \sum_{n \leq n_0} \frac{1}{n} + \int_{u}^{n_0 u} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx + \\ + \int_{n_0 u}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx + O\left(|u|\right).$$

Approximiert man die harmonische Summe durch den Logarithmus und ändert die Grenzen der Integrale, sodass nur Fehler mit $O\left(|u|\right)$ auftreten, dann gilt

$$\sum_{n\geq 1} u \frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}} = -\log|u| + \gamma + \int_{0}^{\frac{u}{|u|}} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx + \\ + \int_{\frac{u}{|u|}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx + O\left(|u|\right).$$

Unter Verwendung des Cauchy'schen Integralsatzes kann man den Integrationsweg auf die reelle Achse verschieben. Dort lassen sich die

Integrale leichter berechnen und man erhält

$$\sum_{n\geq 1} u\frac{e^{-nu}}{1-e^{-nu}} = -\log|u| + \gamma +$$
$$+ \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, dx}_{=:\delta} - \int_1^{\frac{u}{|u|}} \frac{dx}{x} + O\left(|u|\right)$$
$$= -\log|u| + \gamma + \delta - i\operatorname{Arg} u + O\left(|u|\right).$$

Wie man leicht sieht, ist $\delta = 0$, $\varepsilon = u + O\left(|u|^2\right)$ und $\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 + O\left(|u|\right)$, und es gilt daher schließlich

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^n} 1 - (1-\varepsilon)^n = -\log\varepsilon + \gamma + O\left(|\varepsilon|\right).$$

Setzt man noch $K = 4D\left(\frac{1}{4}\right) + 4\gamma$, dann ist die Asymptotik von $H(z)$ um seine Singularität $\frac{1}{4}$ bekannt. □

Übertragung der Asymptotik von $H(z)$ auf H_N Dieser Teil des Beweises ist allgemeiner formuliert, da damit leicht ähnliche Fälle behandelt werden können.

Satz 3.38 *Sei $G(z)$ in*

$$D := \left\{z : z \neq \rho \wedge |z| < \rho_1 \wedge \left|\operatorname{Arg}(z-\rho)\right| > \theta\right\}$$

mit $\rho_1 > \rho$ und $\theta < \frac{\pi}{2}$ analytisch und habe $G(z)$ weiters die in D gültige asymptotische Darstellung

$$G(z) = \gamma\log\left(1-\frac{z}{\rho}\right) + \mu + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{\alpha_i} + O\left(\left|1-\frac{z}{\rho}\right|^{\nu}\right) \quad (3.55)$$

mit $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \nu$, dann hat der n-te Taylorkoeffizient G_n von $G(z)$ die asymptotische Darstellung

$$G_n = \rho^{-n}\left(-\frac{\lambda}{n} + \sum_{\alpha_i+j<\nu} \frac{c_{ij}}{n^{\alpha_i+j+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\nu+1}}\right)\right).$$

Im Prinzip folgt der Satz direkt aus dem Transfer-Lemma 2.15. Da dieses selbst aber nicht bewiesen wird, soll hier ein Beweis erbracht werden.

Beweis. Den n-ten Taylorkoeffizienten von $G(z)$ erhält man, indem man den Cauchy'schen Residuensatz anwendet, wobei die Funktion $G(z)$ entlang des Integrationsweges analytisch sein muss. Allgemein gilt also

$$G_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{0+} G(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

wobei sich für diesen speziellen Fall der Integrationsweg in drei Teile aufspalten lässt. Für kleine $\omega > 0$ definiert man den Integrationsweg als $\Gamma(\omega) := \Gamma_{0,\omega} \cup \Gamma_{1,\omega} \cup \Gamma_2$, wobei $\Gamma_{1,\omega}$ selbst aus zwei spiegelsymmetrischen Teilen besteht. Man definiert die Teilwege mit einem θ_1 und einem r_1, die $\theta < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\rho < r_1 < \rho_1$ erfüllen, durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,\omega} &:= \Big\{ z : |z-\rho| = \omega \wedge \big| \operatorname{Arg}(z-\rho) \big| > \theta_1 \Big\}, \\
\Gamma_{1,\omega} &:= \Big\{ z : |z-\rho| \geq \omega \wedge |z| < r_1 \wedge \big| \operatorname{Arg}(z-\rho) \big| = \theta_1 \Big\} \text{ und} \\
\Gamma_2 &:= \Big\{ z : |z| = r_1 \wedge \big| \operatorname{Arg}(z-\rho) \big| \geq \theta_1 \Big\}.
\end{aligned}$$

Zunächst beobachtet man, dass das Integral

$$I(\omega) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,\omega}} G(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

für $\omega \to 0$ verschwindet. Dies lässt sich mit der Abschätzung

$$\big| I(\omega) \big| \leq \frac{\omega}{(\rho-\omega)^{n+1}} \max_{z \in \Gamma_{0,\omega}} \big| G(z) \big|$$

dadurch begründen, dass das Maximum der Funktion $G(z)$ nur logarithmisch gegen ∞ geht, während ω linear gegen null strebt. Es sei daher im Weiteren $\Gamma := \Gamma(0)$. Man betrachtet die Funktionen in der Darstellung (3.55) gesondert und erhält mit demselben Argument wie zuvor

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{dz}{z^{n+1}} &= -\frac{1}{n\rho^n} \text{ und} \\
\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \frac{dz}{z^{n+1}} &= \binom{\alpha}{n} \frac{(-1)^n}{\rho^n}.
\end{aligned}$$

Damit hat man schon folgendes Resultat

$$G_n = \rho^{-n} \left(-\frac{\lambda}{n} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^n \lambda_i \binom{\alpha_i}{n} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \tag{3.56}$$

gezeigt, wobei gilt

$$R(z) := G(z) - \lambda \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) - \mu - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha_i}.$$

Noch zu zeigen ist, dass der Restterm einer gewissen asymptotischen Schranke genügt. Dazu betrachtet man $R(z)$ auf Γ_2 und benutzt, dass $R(z)$ dort ein $O\left(\left|1 - \frac{z}{\rho}\right|^{\nu}\right)$ ist. Man kann das Integral auf Γ_2 dann wieder mit

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} R(z)\frac{dz}{z^{n+1}}\right| < \frac{1}{r_1^n}\max_{z\in\Gamma_2}\left|R(z)\right|$$

abschätzen. Da $R(z)$ auf Γ_2 beschränkt ist, ist dieses Integral verglichen mit ρ^{-n} exponentiell klein, da $r_1 > \rho$ gilt. Es genügt daher Integrale der Form

$$I_\nu(n) := \int_{\Gamma_2} \left|1 - \frac{z}{\rho}\right| \frac{dz}{|z|^{n+1}}$$

zu betrachten. Setzt man $z = \rho(1 + te^{i\phi})$ mit reellem t und $\phi = \pm\theta_1$, dann erhält man aus der Symmetrie des Integrationsweges Γ für ein $\sigma > 0$

$$I_\nu(n) = \frac{2}{\rho^n}\int_0^\sigma \frac{t^\nu\, dt}{|1 + te^{i\phi}|^{n+1}} < \frac{2}{\rho^n}\int_0^\infty \frac{t^\nu\, dt}{|1 + te^{i\phi}|^{n+1}}.$$

Vereinfacht man noch $|1 + e^{i\phi}| = \sqrt{1 + t^2 + 2t\cos\phi}$ mit $\cos\phi > 0$ zu $\sqrt{1 + t^2 + 2t\cos\phi} > 1 + \lambda t$ für ein $\lambda > 0$, dann gilt

$$I_\nu(n) < \frac{2}{\rho^n}\int_0^\infty \frac{t^\nu\, dt}{(1 + \lambda t)^{n+1}} < O\left(\frac{1}{\rho^n}\int_0^\infty \frac{x^\nu\, dx}{(1 + x)^{n+1}}\right).$$

Es muss also nur noch dieses letzte Integral untersucht werden. Man kann sich überlegen, dass das Integral für das Intervall $[1, \infty]$ kleiner als 2^{-n} ist, also ein $O\left(2^{-n}\right)$. Im verbleibenden Intervall $[0, 1]$ gilt $1+x > e^{\frac{x}{2}}$ und damit auch

$$\int_0^1 \frac{x^\nu\, dx}{(1 + x)^{n+1}} < \int_0^1 x^\nu e^{-\frac{(n+1)x}{2}} dx < \int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{(n+1)x}{2}} dx < \frac{\Gamma(\nu + 1)2^{\nu+1}}{(n + 1)^{\nu+1}}.$$

Damit ist gezeigt, dass $I_\nu(n) = O\left(\rho^{-n} n^{-\nu-1}\right)$ gilt. Damit ist der Restterm von niederer Ordnung als die bereits berechneten Terme in (3.56).

Zum Schluss betrachtet man nochmals die Terme $(-1)^n\binom{\alpha}{n}$. Mittels Γ-Funktion, kann man auch

$$(-1)^n\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{n\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)} \tag{3.57}$$

schreiben. Mit (3.57) kann man die asymptotische Äquivalenz

$$(-1)^n\binom{\alpha}{n} \sim \sum_{j\geq 0} \frac{c_j(\alpha)}{n^{\alpha+j+1}}$$

herleiten, wobei im Speziellen $c_0(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ gilt. Damit ist der Beweis des ‚Transfer-Lemmas' abgeschlossen. □

Nun kann man aus (3.54) und dem ‚Transfer-Lemma' 3.38 die gesuchten Größen H_n asymptotisch bestimmen. Es gilt

$$H_n = 4^n\left(\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\nu+1}}\right)\right).$$

Die mittlere Höhe der Binärbäume ergibt sich schließlich aus dem Quotienten von H_n und B_n aus (3.25) und ist

$$\bar{H}_n = 2\sqrt{\pi n} + O\left(n^{\frac{1}{4}+\eta}\right) \text{ für } n \to \infty$$

mit einem $\eta > 0$. □

3.4 Einfach erzeugte Bäume

Eine große Klasse von Bäumen fällt in die Kategorie der *einfach erzeugten Bäume*[2]. Dies gilt im Prinzip auch für die beiden Bäume in Kapitel 3.2 und 3.3, wobei bei den zweiten eine andere Zählweise von Nöten ist. Nach [MM78] daher nun eine genaue

Definition 3.39 *Sei y_n die Anzahl der betrachteten Bäume der Klasse $\mathcal{T}$ mit n Knoten und $y(x) = \sum_{n\geq 0} y_n x^n$ die entsprechende erzeugende Funktion. Dann heißt die Klasse der Bäume $\mathcal{T}$* einfach erzeugt, *wenn*

$$y(x) = x\theta\big(y(x)\big) \tag{3.58}$$

gilt, wobei $\theta(y)$ eine Potenzreihe in y ist, also $\theta(y) = \sum_{i\geq 0} c_i y^i$, mit nicht negativen Koeffizienten $c_i \geq 0$.

[2]engl.: simply generated trees.

Anmerkung 3.40 *Die ebenen Wurzelbäume aus Kapitel 3.2 sind einfach erzeugt, da die erzeugende Funktion $G(z)$ nach (3.4)*

$$G(z) = \frac{z}{1 - G(z)} = z\theta_{\mathcal{G}}\big(G(z)\big)$$

erfüllt. Bei den Binärbäumen aus Kapitel 3.3 müssen die Knoten anders gezählt werden. Unterscheidet man nämlich nicht zwischen internen und externen Knoten, so gilt für die erzeugende Funktion

$$B(z) = z + zB(z)^2 = z\theta_{\mathcal{B}}\big(B(z)\big).$$

3.4.1 Anzahl von einfach erzeugten Bäumen

Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt gilt nun

Satz 3.41 ([MM78]) *Habe $\theta(t) = 1 + \sum_{i\geq 1} c_i t^i$ den Konvergenzradius R und sei $y = y(x) = x + \sum_{i\geq 2} y_i x^i$ die Lösung von $y(x) = x\theta\big(y(x)\big)$ in einer Umgebung von $x = 0$. Gilt*

1. *$c_1 > 0$ und $c_j > 0$ für einige $j \geq 2$,*
2. *$c_i \geq 0$ für alle $i \geq 2$ und*
3. *$\tau\theta'(\tau) = \theta(\tau)$ für ein τ mit $0 < \tau < R$,*

dann konvergiert $y(x)$ für $|x| \leq \rho := \frac{\tau}{\theta(\tau)}$ und $x \neq \rho$. Weiters gilt in einer Umgebung um ρ die Entwicklung

$$y(x) = \tau - b\sqrt{\rho - x} - b_2(\rho - x) + \cdots \tag{3.59}$$

mit

$$b = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2\tau}{\theta''(\tau)}} \tag{3.60}$$

sowie

$$y_n \sim \frac{b}{2\sqrt{\pi}}\rho^{-n+\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}} \text{ für } n \to \infty. \tag{3.61}$$

Beweis. Sei $f(t) = t\theta'(t) - \theta(t)$, dann gilt $f(0) = -1$ und $f'(t) = t\theta''(t) > 0$ für $0 < t < R$, da nach Punkt 1 und Punkt 2 des Satzes alle Koeffizienten von $\theta(t)$ nicht negativ sind. $f(t)$ ist daher streng monoton wachsend zwischen Null und R und es gilt wegen Punkt 3 $t\theta'(t) - \theta(t) < 0$ für $0 \leq t < \tau$.

Betrachtet man nun die Gleichung $F(x, y) = y - x\theta(y) = 0$, dann gilt $F_y = 1 - x\theta'(y)$. Aus obiger Überlegung folgt nun $F_y \neq 0$ solange $|x| < \rho =$

$\frac{\tau}{\theta(\tau)}$ und $|y| \leq \tau$ gilt. Da $F_y(\rho,\tau) = 0$ folgt aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen, dass $y = y(x)$ für $|x| < \rho$ existiert, dass $y(\rho) = \tau$ und dass $x = \rho$ eine Singularität von $y(x)$ darstellt. Da $y_1 = 1$ und $y_2 = c_1 > 0$ gilt, wenn $|x| = \rho$ aber $x \neq \rho$, $\big|y(x)\big| < y(\rho) = \tau$. Daher gilt auch $\Big|\theta'\big(y(x)\big)\Big| < \theta'(\tau) = \frac{1}{\rho}$ wegen den Punkten 1 und 2. Daraus folgt, dass $\Big|x\theta'\big(y(x)\big)\Big| < 1$, wenn $|x| = \rho$ und $x \neq \rho$ gilt und weiters $F_y\big(x, y(x)\big) \neq 0$ wenn $|x| \leq \rho$ und $x \neq \rho$ gilt. Da nun $F_x(\rho,\tau) \neq 0$, $F_y(\rho,\tau) = 0$ und $F_{yy}(\rho,\tau) \neq 0$ folgt aus dem Weierstraß'schen Vorbereitungssatz, dass $y(x)$ für $|x| \leq \rho$ und $x \neq \rho$ existiert und daher die Entwicklung (3.59) hat.

Aus (3.59) und (3.58) folgt

$$\frac{1}{2}b^2 = \lim_{x\to\rho-0}\big(\tau - y(x)\big)y'(x) = \lim_{x\to\rho-0}\frac{y\big(\tau - y(x)\big)}{x\Big(1 - x\theta'\big(y(x)\big)\Big)}$$

woraus man $\frac{1}{2}b^2 = \frac{\tau}{\rho^2\theta''(\tau)}$ und somit (3.60) erhält. Aus (3.59) kann man die Koeffizienten y_n leicht mit Hilfe des Transfer-Lemmas 2.15 ablesen, wobei für den Hauptterm nur die Wurzel ausschlaggebend ist. Auf diese Weise erhält man (3.61) □

3.4.2 Pfadlänge von einfach erzeugten Bäumen

Satz 3.42 *Für den Erwartungswert der Pfadlänge der einfach erzeugten Bäume, die (3.58) für ein festes θ erfüllen und aus n Knoten aufgebaut sind, gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 3.41*

$$\mathbb{E}L_n \sim \frac{b\sqrt{\rho}}{2\tau}n\sqrt{\pi n}.$$

Beweis. Sei $\Psi(z,w) := \sum_{t\in\mathcal{T}} z^{\pi(t)}w^{|t|}$ die erzeugende Funktion, die die Bäume nach ihrer Pfadlänge und Größe zählt. Es gilt daher

$$\begin{aligned}\Psi(z,w) &= \sum_{i\geq 0} c_i \sum_{t_1\in\mathcal{T}}\cdots\sum_{t_i\in\mathcal{T}} z^{\sum_{j=1}^{i}\left(\pi(t_j)+|t_j|\right)}w^{1+\sum_{k=1}^{i}\pi(t_k)}\\ &= w\theta\big(\Psi(z,wz)\big).\end{aligned}$$

Setzt man nun $z = 1$, so erhält man die erzeugende Funktion (3.59), da ja über alle Pfadlängen aufsummiert wird. Nun benötigt man die partielle Ableitung von $\Psi(z,w)$ nach z um den Erwartungswert zu bestimmen. Aus

$$\Psi_z(1,w) = w\theta'\big(y(w)\big)\big(\Psi_z(1,w) + wy'(w)\big)$$

folgt durch Umformen

$$\Psi_z(1,w) = \frac{w^2 y'(w)\theta'\big(y(w)\big)}{1 - w\theta'\big(y(w)\big)}. \tag{3.62}$$

Setzt man nun die Entwicklung von $y(w)$ aus (3.59) in (3.62) ein, so erhält man mit

$$\begin{aligned} y(w) &= \tau - b\sqrt{\rho - w} + b_2(\rho - w) + \cdots \\ y'(w) &= \frac{b}{2\sqrt{\rho - w}} + \cdots \\ w\theta'\big(y(w)\big) &= 1 - \frac{y(w)}{wy'(w)} = 1 - \frac{2\sqrt{\rho - w}}{wb}\left(\tau - b\sqrt{\rho - w}\right) + \cdots \end{aligned}$$

die asymptotische Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi_z(1,w) &\sim \frac{\frac{wb}{2\sqrt{\rho-w}}\left(1 - \frac{2\tau}{wb}\sqrt{\rho - w} + \frac{2}{wb}(\rho - w)\right)}{\frac{2\tau}{wb}\sqrt{\rho - w} - \frac{2}{wb}(\rho - w)} \\ &\sim \frac{w^2 b^2}{4\tau(\rho - w)} \frac{1}{1 - \frac{1}{\tau}\sqrt{\rho - w}}. \end{aligned}$$

Mit dem Transferlemma erhält man daraus

$$[w^n]\Psi_z(1,w) \sim \frac{b^2}{4\tau\rho^{n-1}}$$

und durch Division durch (3.61) schließlich

$$\mathbb{E}L_n = \frac{[w^n]\Psi_z(1,w)}{[w^n]\Psi(1,w)} \sim \frac{b\sqrt{\rho}}{2\tau} n\sqrt{\pi n}.$$

□

Man kann natürlich auch höhere Momente betrachten. Dies wird im Artikel [Tak93] von Takács getan. Es sei hier ein Satz zitiert:

Satz 3.43 *Bezeichne τ_n die Pfadlänge des Baumes, $\sigma^2 = \theta''(1) < \infty$, $d = \mathrm{ggT}\{j : c_j \geq 0\}$ und*

$$M_r = K_r \frac{4\sqrt{\pi} r!}{\Gamma\left(\frac{3r-1}{2}\right) 2^{\frac{r}{2}}}$$

mit $K_0 = -\frac{1}{2}$, $K_1 = \frac{1}{8}$ und

$$K_r = \frac{3r-4}{4} K_{r-1} + \sum_{j=1}^{r-1} K_j K_{r-j} \text{ für } r \geq 2,$$

dann gilt für $n \equiv 1 \mod n$, dass

$$\mathbb{E}\tau_n^r \sim \frac{2^r M_r}{\sigma^r} n^{\frac{3r}{2}}$$

3.4.3 Höhe von einfach erzeugten Bäumen

Die Höhe in einfach erzeugten Bäumen kann man ähnlich der Höhe der binären Bäume behandeln, wie das in Kapitel 3.3.3 geschehen ist. Man muss dabei allerdings je nach Struktur der zu untersuchenden Bäume auf die verschiedenen Singularitäten aufpassen. Bei den binären Bäumen gab es nur eine Singularität bei $z = \frac{1}{4}$. Es gilt

Satz 3.44 ([FO82]) *Für einfach erzeugte Bäume, die durch festes θ in (3.58) beschrieben werden, gilt mit $d = \mathrm{ggT}\{j : c_j \neq 0\}$ für $n = 1 \mod d$, dass*

$$\mathbb{E}\eta_n \sim \lambda\sqrt{n}, \tag{3.63}$$

wobei

$$\lambda = \theta'(\tau)\sqrt{\frac{2\pi}{\theta(\tau)\theta''(\tau)}}$$

gilt und τ die kleinste positive Nullstelle der Gleichung

$$\theta(\tau) - \tau\theta'(\tau) = 0 \tag{3.64}$$

ist.

Beweis. Es soll demonstriert werden, wie die Methoden, die für die Höhe der binären Bäumen in Kapitel 3.3.3 angewandt wurden, allgemein einsetzbar sind. Es sei also $y(x) = \sum_{n\geq 0} y_n x^n$ die erzeugende Funktion der betrachteten Bäume, die (3.58) erfüllt. Bezeichne weiters $y_n^{[h]}$ die Anzahl der Bäume mit n Knoten, die eine Höhe kleiner gleich h besitzen. Dann ist die Gesamthöhe der Bäume mit n Knoten

$$H_n = \sum_{h\geq 0} h(y_n^{[h]} - y_n^{[h-1]}).$$

Zentrum des Interesses ist wieder die Funktion $H(z) = \sum_{n\geq 0} H_n z^n$, woraus sich

$$\mathbb{E}\eta_n = \frac{H_n}{y_n} \tag{3.65}$$

bestimmen lässt. Das asymptotische Verhalten der y_n wurde bereits in Satz 3.41 untersucht.

Man unterscheidet nun zwischen zwei Fällen. Der erste Fall ist, dass $y(x)$ genau eine Singularität am Konvergenzkreis hat. Dies ist dann der Fall, wenn $d = 1$ gilt. Der zweite Fall beschreibt die Situation, dass mehrere Singularitäten am Konvergenzkreis von $y(x)$ liegen. In diesem Fall gilt $d \neq 1$ und außerdem ist $y_n = 0$, wenn $n \not\equiv 1 \mod d$ gilt.

Fall 1 Betrachtet man die beiden Gleichungen $y(x) = x\theta\big(y(x)\big)$ und $y^{[h+1]} = x\theta\big(y^{[h]}(x)\big)$, so erhält man durch Subtraktion

$$y(x) - y^{[h+1]}(x) = x\Big(\theta\big(y(x)\big) - \theta\big(y^{[h]}(x)\big)\Big). \tag{3.66}$$

Entwickelt man die rechte Seite in (3.66) in eine Taylorreihe um $y(x)$, so gilt

$$y - y^{[h+1]} = x(y - y^{[h]})\theta'(y)\left(1 - (y - y^{[h]})\frac{\theta''(y)}{2\theta'(y)} + O\left(|y - y^{[h]}|^2\right)\right).$$

Entwickelt man $z\theta'(y)$ um $z = \rho$, so erhält man mit (3.59)

$$\begin{aligned} z\theta'(y) &= 1 + (y - \tau)\frac{\tau\theta''(\tau)}{\theta(\tau)} + O\left(|y - \tau|^2\right) \\ &= 1 - \tau\sqrt{1 - \frac{x}{\rho}}\sqrt{\frac{2\theta''(\tau)}{\theta(\tau)}} + O\left(|y - \tau|^2\right). \end{aligned}$$

Schreibt man nun $e_h(x) := y(x) - y^{[h]}(x)$ und $\varepsilon(x) := 1 - z\theta'(y)$, dann gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} e_{h+1}(x) = \big(1 - \varepsilon(x)\big)e_h(x)\times \\ \left(1 - \frac{\theta''(\tau)e_h(x)}{2\theta'(\tau)} + O\left(\left|e_h^2(x)\right| + \left|e_h(x)(y - \tau)\right|\right)\right) \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon(x) = \tau\sqrt{1 - \frac{x}{\rho}}\sqrt{\frac{2\theta''(\tau)}{\theta(\tau)}} + O\left(|y - \tau|^2\right).$$

Betrachtet man nun wieder den Reziprokwert, so erhält man

$$e_n \sim c_2\varepsilon(x)\frac{\big(1 - \varepsilon(x)\big)^n}{1 - \big(1 - \varepsilon(x)\big)^n}$$

mit $c_2 = \frac{2\theta'(\tau)}{\theta''(\tau)}$. Daraus folgt, dass sich $H(x) = \sum_{n\geq 0} e_n(x)$ um die Singularität $x = \rho$ wie $c_2 \ln \varepsilon(x)$ verhält. Daher gilt mit

$$H_n \sim \frac{c_2}{2\rho^n n}$$

die Behauptung (3.63).

Fall 2 Da $d \neq 1$, kann die Gleichung (3.58) als $y = x\kappa(y^d)$ geschrieben werden, wobei $\kappa = \theta(u^{\frac{1}{d}})$ eine Potenzreihe in u ist. Da $\theta(y)$ nur von y^d abhängt, hat y singuläre Stellen bei $\tau_j = \omega^j \tau$ für $j = 0, \dots d_1$. Dabei bezeichnet τ wieder die kleinste positive Wurzel von (3.64) und ω eine d-te primitive Einheitswurzel. Die entsprechenden x Werte der Singularitäten sind $\rho_j = \omega^j \rho$, mit $\rho = \frac{\tau}{\theta(\tau)}$.

Die lokale Entwicklung von y um den Punkt $x = \rho_j$ ist, wie man zeigen kann,

$$\tau_j - w^j \frac{2\theta(\tau)}{\theta''(\tau)} \sqrt{1 - \frac{x}{\rho_j}}. \tag{3.67}$$

Der Beitrag einer Singularität ist nun der n-te Taylorkoeffizient von (3.67) mit

$$c_1 = \sqrt{\frac{\theta(\tau)}{2\pi\theta''(\tau)}}$$

gleich

$$\frac{c_1}{\rho\omega^{j(n-1)} n^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.68}$$

Die Werte (3.68) summieren sich zu

$$\frac{dc_1}{\rho^n n^{\frac{3}{2}}}$$

auf.

Ähnliches passiert mit der Funktion $H(z)$. Auch hier entstehen d Singularitäten ρ_j am Konvergenzkreis, um die sie sich wie

$$\frac{1}{2} c_2 \omega^j \ln\left(1 - \frac{x}{\rho_j}\right)$$

verhält. Daraus kann man wieder den n-ten Koeffizienten

$$H_n \sim \frac{dc_2}{2\rho^n n}$$

ablesen. Durch Einsetzen in (3.65) erhält man schließlich

$$\mathbb{E}\eta_n \sim \frac{c_2}{2c_1} \sqrt{n}.$$

□

Auch hier ist es natürlich möglich, die höheren Momente zu betrachten. Es sei ein Satz aus [FO82] zitiert:

Satz 3.45 *Für eine Klasse von einfach erzeugten Bäumen, die durch (3.58) beschrieben werden, gilt, dass das r-te Moment der Höhe in Bäumen mit n Knoten gleich*

$$\mathbb{E}\eta_n^r \sim r(r-1)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\zeta(r)\sqrt{\xi^r n^r}$$

ist mit

$$\xi = \frac{2\theta'(\tau)^2}{\theta(\tau)\theta''(\tau)}.$$

3.5 Binäre Suchbäume

Definition 3.46 *Binäre Suchbäume entstehen durch Einfügen einer Folge S von Elementen. Das erste Element s_1 wird zur Wurzel des binären Suchbaumes. Die restlichen Elemente der Folge werden nun in zwei Teilfolgen – eine mit Elementen kleiner ($S_<$) als die Wurzel und eine mit denen, die größer ($S_>$) als die Wurzel sind – aufgespalten. Danach verfährt man mit den beiden Teilfolgen rekursiv weiter, wobei deren Wurzeln an s_1 angehängt werden. Man schreibt*

$$\mathcal{BST}(S) = \begin{cases} \langle \mathcal{BST}(S_<), s_1, \mathcal{BST}(S_>)\rangle\,, & |S| \geq 1 \\ \langle \blacksquare \rangle & |S| = 0. \end{cases}$$

3.5.1 Interne Pfadlänge der binären Suchbäume

Satz 3.47 *Die durchschnittliche interne Pfadlänge $\mathbb{E}\pi_N$ von binären Suchbäumen mit N Schlüssel ist*

$$\mathbb{E}\pi_N = 2(N+1)H_N - 4N = 2N\ln N - 2(2-\gamma)N + 2\ln N + O\left(1\right).$$

Beweis. Es sei C_N die durchschnittliche interne Pfadlänge von binären Suchbäumen. Da alle Permutationen, die einem binären Suchbaum zugrunde liegen können, gleich wahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wurzel des Baumes das k-größte Element der Permutation ist, gleich $\frac{1}{N}$. Weiters wächst ein Pfad für jeden Knoten in den Subbäumen um 1 in Bezug auf die Wurzel, die die beiden Unterbäume verbindet. Daher gilt folgende Rekursion

$$C_N = N - 1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(C_{k-1} + C_{N-k}) \text{ für } N > 0 \text{ und mit } C_0 = 0.$$

Multipliziert man die Gleichung mit N, nützt man die Symmetrie der Summe aus und subtrahiert die Gleichung für C_{N-1} von der für C_N, so erhält man

$$\frac{C_N}{N+1} = \frac{C_{N-1}}{N} + 2\frac{N-1}{N(N+1)}.$$

Betrachtet man nun $\frac{C_N}{N+1}$ als neue Variable, so lässt sich die Rekursion durch einfaches Aufsummieren lösen. Man erhält

$$\begin{aligned}\frac{C_N}{N+1} &= 2\sum_{j=2}^{N}\frac{j-1}{j(j+1)} = 2\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{2}{j+1} - \frac{1}{j}\right)\\ &= 4H_{N+1} - 4H_2 - 2H_N + 2H_1\\ &= 2H_N + \frac{4}{N+1} - 4.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}\pi_N = C_N = 2(N+1)H_N - 4N. \tag{3.69}$$

Für die Asymptotik benutzt man Formel (2.7) und erhält

$$\mathbb{E}\pi_N = C_N = 2N\ln N - 2(2-\gamma)N + 2\ln N + O(1).$$

□

3.5.2 Suche in binären Suchbäumen

Satz 3.48 *In einem binären Suchbaum, der aus N Schlüsseln aufgebaut ist, beträgt die durchschnittliche Anzahl an Vergleichen für das* erfolgreiche Suchen *eines Schlüssels*

$$2H_N - 3 + 2\frac{H_N}{N}$$

und für das erfolglose Suchen *eines Schlüssels*

$$2H_{N+1} - 2.$$

Beweis. Da die Schlüssel in einem binären Suchbaum nach dem Eintragen fix bleiben, sich also der Pfad von der Wurzel zu diesem Knoten niemals ändert, ist die durchschnittliche Anzahl an Vergleichen

$$\begin{aligned}\frac{C_N}{N} + 1 &= \frac{2(N+1)H_N - 4N}{N} + 1\\ &= 2H_N - 3 + 2\frac{H_N}{N}.\end{aligned}$$

Dasselbe Argument gilt auch für das erfolglose Suchen. Allerdings muss hierbei die externe Pfadlänge herangezogen werden, da das erfolglose Suchen erst bei einem externen Knoten endet. Mit Lemma 3.21 folgt aus (3.69)

$$\bar{\xi}(t) = \bar{\pi}(t) + 2|\bar{t}| = 2(N+1)(H_{N+1} - 1).$$

Da ein solcher binäre Suchbaum nach Lemma 3.17 $N+1$ externe Knoten hat, wird diesmal durch $N+1$ dividiert, was sofort das Ergebnis liefert. □

3.5.3 Höhe der binären Suchbäume

Für den Satz über die Höhe der binären Suchbäume müssen zuerst die Funktionen $y_h(x)$ definiert werden.

Definition 3.49 *Die Funktionen $y_h(x)$ seien durch*

$$y_{h+1}(x) = 1 + \int_0^x y_h(t)^2\, dt \text{ für } h \geq 0 \text{ und mit } y_0(x) = 1$$

definiert.

Satz 3.50 *Für den Erwartungswert der Höhe H_n der binären Suchbäume gilt*

$$\mathbb{E}H_n = \max\left\{h : y_h(1) \leq n\right\} + O(1) \text{ für } n \to \infty \tag{3.70}$$

und für die Varianz gilt

$$\mathbb{E}|H_n - \mathbb{E}H_n|^L = O(1) \text{ für } n \to \infty.$$

Anmerkung 3.51 *In [Ree] wird gezeigt, dass*

$$\mathbb{E}H_n = c \ln n - \frac{3c}{2(c-1)} \ln\ln n + O(1)$$

gilt, wobei c die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{2e}{c}\right)^c = e$$

ist. Mit Formel (3.70) ist das äquivalent zu

$$y_h(1) = e^{\frac{h}{c} + \frac{3}{2(c-1)} \ln h + O(1)}.$$

Beweis. Bezeichne $a_{n,h}$ die Anzahl der Permutationen von n Zahlen, die einen binären Suchbaum mit Höhe $\eta \leq h$ erzeugen. Die $a_{n,h}$ erfüllen dann die Rekursion

$$a_{n,h+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{k,h} a_{n-1-k,h} \tag{3.71}$$

mit den Anfangswerten $a_{0,0} = 1$ und $a_{n,0} = 0$ für $n > 0$. Der gesuchte Erwartungswert ist daher

$$\mathbb{E}H_n = \sum_{h \geq 0} h \left(\frac{a_{n,h}}{n!} - \frac{a_{n,h-1}}{n!} \right) = \sum_{h \geq 0} \left(1 - \frac{a_{n,h}}{n!} \right). \tag{3.72}$$

Weiters führt man die erzeugende Funktion $y_h(x)$ ein, die durch

$$y_h(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n,h}}{n!} x^n$$

definiert ist. Die Funktionen $y_h(x)$ sind also durch $y_0(x) = 1$ und $y_h(0) = 1$ initialisiert. Weiters erhält man durch

$$\begin{aligned} y'_{h+1}(x) &= \sum_{n \geq 1} n \frac{a_{n,h+1}}{n!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n,h+1}}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{a_{k,h} a_{n-1-k,h}}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,h}}{k!} x^k \frac{a_{n-1-k,h}}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} \\ &= y_h(x)^2 \end{aligned}$$

eine Differentialgleichung für diese Funktionen. Man kann aber auch eine Integralgleichung aufstellen, die dasselbe leistet:

$$y_{h+1}(x) = 1 + \int_0^x y_h(t)^2 \, dt \text{ für } h \geq 0 \text{ und } y_0(x) = 1.$$

Es sei c die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{2e}{c} \right)^c = e \tag{3.73}$$

im Intervall $[2, \infty]$. Zunächst zeigt man, dass eine bestimmte Differentialgleichung eine Lösung besitzt. Es gilt mit $\alpha := e^{\frac{1}{c}}$ und c Lösung der Gleichung (3.73)

Lemma 3.52 *Es existiert eine eindeutige ganze Funktion, die Lösung der Differentialgleichung*

$$\Phi'(u) = -\frac{1}{\alpha^2}\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 \tag{3.74}$$

mit den Anfangswerten $\Phi(0) = 1$ *ist. Außerdem hat diese Lösung folgende Eigenschaften für reelle* $u > 0$*:*

1. $0 < \Phi(u) < \frac{1}{u}$,
2. $\Phi(u)$ *ist fallend und* $u\Phi(u)$ *ist steigend sowie*
3. $u\Phi(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right)$ *für* $u \to \infty$.

Beweis. Setzt man für $\Phi(u)$ eine formale Potenzreihe $\Phi(u) = \sum_{n\geq 0} c_n u^n$ mit $c_0 = 1$ ein, so sieht man durch Koeffizientenvergleich

$$c_{n+1} = -\frac{\alpha^{-n-2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}. \tag{3.75}$$

Nun sind alle $|c_n| \leq 1$, wie man durch Induktion zeigt: Für c_0 gilt dies laut Voraussetzung. Für $n \geq 1$ gilt dann die Rekursion (3.75). In dieser sind die Produkte $|c_k c_{n-k}| \leq 1$, die Summe daher $\leq n+1$ und mit dem Vorfaktor gilt die Behauptung. Es stellt $\sum_{n\geq 0} c_n u^n$ daher für $|u| < 1$ eine analytische Funktion dar, die Lösung von (3.74) ist. Aus (3.74) folgt dann aber, dass $\Phi'(u)$ eine analytische Fortsetzung auf $|u| < \alpha$ besitzt, die sich auf $\Phi(u)$ überträgt. Dieses Argument kann nun beliebig oft angewandt werden und führt daher zu einer ganzen Lösung von (3.74). Andererseits kann es auch nur eine ganze Lösung von (3.74) geben, die $\Phi(0) = 1$ erfüllt.

Da die rechte Seite in (3.74) negativ ist, gilt selbstverständlich, dass $\Phi(u)$ streng fallend ist für $u \geq 0$. Für das Folgende führt man die Funktion $f(x) := e^{(c-1)x}\big(1 - e^x\Phi(e^x)\big)$ ein. Dadurch übersetzt sich die Differentialgleichung (3.74) unter Verwendung von $c = \frac{2e}{\alpha}$ in

$$f'(x) = c\left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{c}\right)\right) + \left(\frac{c}{2}\right)^2 e^{-(c-1)x} f\left(x - \frac{1}{c}\right)^2. \tag{3.76}$$

Da $\Phi(u) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}u + O\left(u^2\right)$ und $\Phi'(u) = -\frac{1}{\alpha^2} + O\left(u\right)$ für $u \to 0$ gilt, muss ein x_0 existieren, sodass für $x \leq x_0$ $f(x)$ steigend ist. Angenommen $x_1 := \sup_{f'(x)>0} x$ sei endlich. Da f' stetig ist, gilt $f'(x_1) = 0$ und $f'(x) > 0$ für $x < x_1$. Aus (3.76) folgt dann aber, dass $f'(x_1) > 0$, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt. Es ist daher $f(x)$ wachsend und positiv für alle x. Daraus folgt auch $u\Phi(u) < 1$ für alle $u > 0$.

Sei nun $\Psi(u) := u\Phi(u)$, dann erfüllt aufgrund von (3.74) $\Psi(u)$ die Differentialgleichung

$$u\Psi'(u) = \Psi(u) - \Psi\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2$$

Da $\lim_{u\to 0} \Psi'(u) = 1$ gilt, wächst $\Psi(u)$ monoton wenigstens in einem Intervall $[0, u_0]$, mit einem hinreichend kleinen u_0. Sei daher u_1 das Maximum der u_0, für die gilt, $\Psi(u)$ wächst in $[0, u_0]$. Aus $\Psi(u) < 1$ folgt dann

$$u_1\Psi'(u_1) = \Psi(u_1) - \Psi\left(\frac{u_1}{\alpha}\right)^2 > 0,$$

was wiederum bedeutet, dass $\Psi(u)$ für alle $u > 0$ wächst. Daher gilt für alle $u \geq 0$: $\Phi(u) > 0$.

Da also $u\Phi(u)$ monoton wachsend ist, gilt

$$u\Phi(u) \geq \frac{u}{\alpha}\Phi\left(\frac{u}{\alpha}\right)$$

und mit (3.74) daher auch

$$-\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)^2} \leq 1 \text{ für } u \geq 0. \tag{3.77}$$

Durch Integration nach u folgt aus (3.77)

$$\frac{1}{\Phi(u)} - \frac{1}{\Phi(0)} \leq u,$$

was auch als $\Phi(u) \geq \frac{1}{1+u}$ geschrieben werden kann. Aus $u\Phi(u) < 1$ folgt daher schließlich

$$u\Phi(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \text{ für } u \to \infty.$$

□

Der Grund, warum diese Differentialgleichung näher untersucht wurde, ist, dass man damit eine Hilfsfunktion einführen kann, die den Beweis ermöglicht. Man setzt nämlich

$$\widetilde{y}_h(x) := \alpha^h\Phi\big(\alpha^h(1-x)\big) \tag{3.78}$$

für $h \geq 0$. Bemerkenswert ist, dass $\widetilde{y}_h(x)$ aufgrund der Bauart der Differentialgleichung (3.74), dieselbe Differentialgleichung erfüllt wie $y(x)$. Dies sieht man leicht durch

$$\begin{aligned}\widetilde{y}'_{h+1}(x) &= -\alpha^{2(h+1)}\Phi'\big(\alpha^{h+1}(1-x)\big) = \alpha^{2h}\Phi\big(\alpha^h(1-x)\big)^2 \\ &= \widetilde{y}_h(x)^2.\end{aligned}$$

Weitere im Folgenden wichtige Eigenschaften von $\widetilde{y}(x)$ finden sich in

Lemma 3.53 *Die in (3.78) definierten Funktionen $\widetilde{y}(x)$ besitzen die Eigenschaft*

1. $0 < \widetilde{y}(0) < 1$,
2. $1 - \widetilde{y}_h(0) = O\left(\frac{1}{\alpha^h}\right)$ *für* $h \to \infty$,
3. $\widetilde{y}_h(1) = \alpha^h$,
4. $\widetilde{y}_{h+r}(x) \geq \widetilde{y}_h(x)$ *für alle* $x \geq 0$ *und* $r \geq 0$ *sowie*
5. *für alle ganzzahligen* $h \geq 0$ *und reellen* D *hat die Differenz* $y_h(x) - \widetilde{y}_{h+D}(x)$ *genau eine Nullstelle* $x_{h,D}$ *auf der positiven reellen Achse. Diese Nullstellen erfüllen überdies* $x_{h+1,D} > x_{h,D}$.

Beweis. Die ersten vier Eigenschaften folgen direkt aus Lemma 3.52. Punkt 5 zeigt man induktiv. Zunächst gilt beginnend mit $h = 0$, dass $\widetilde{y}_D(x)$ eine Potenzreihenentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ besitzt. Diese Entwicklung hat nur positive Koeffizienten, da einerseits die Ableitungen $\operatorname{sgn} \Phi^{(k)}(u) = (-1)^k$ erfüllen, andererseits aber ebenso alternierende Vorzeichen aus der inneren Ableitung entstehen. Daher wächst $\widetilde{y}_D(x)$ streng monoton und zwar schneller als jedes Polynom. Mit Punkt 1 folgt daher die Gültigkeit für $h = 0$, da $y_0(0) = 1 > \widetilde{y}_0(0)$ gilt.

Sei nun also $h \geq 0$ und gelte Punkt 5 für dieses h, dann gilt mit $\delta_{h,D}(x) := y_h(x) - \widetilde{y}_{h+D}(x)$ auch

$$\begin{aligned} \delta'_{h+1,D}(x) &= y'_{h+1} - \widetilde{y}_{h+1,+D}(x) = y_h(x)^2 - \widetilde{y}_{h+D}(x)^2 \\ &= \delta_{h,D}(x)\big(y_h(x) + \widetilde{y}_{h+D}(x)\big). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Daher wächst $\delta_{h+1,D}(x)$ für $0 \leq x < x_{h,D}$. Ist $x > x_{h,D}$, dann fällt es, da der Faktor $\delta_{h,D}(x)$ in (3.79) negativ wird. Nun ist die Differenz $\delta_{h+1,D}(0) > 0$ aber der $\lim_{x\to\infty} \delta_{h+1,D}(x) = -\infty$. Daher gibt es genau eine Nullstelle $x_{h+1,D}$ von $\delta_{h+1,D}(x)$.

Da die Ableitung $\delta'_{h+1,D}(x)$ erst dann das Vorzeichen wechselt, wenn x größer als die Nullstelle $x_{h,D}$ ist, gilt natürlich auch $x_{h+1,D} > x_{h,D}$. □

Nun kann man zeigen, dass die Funktionen $y_h(1)$ schnell wachsen. Genauer gilt

Lemma 3.54 *Für alle* $h \geq 0$ *gilt*

$$\frac{y_{h+1}(1)}{y_h(1)} \geq \alpha$$

Beweis. Man setzt $e_h := c \ln y_h(1)$ und erhält aus der Definition (3.78) $\widetilde{y}_{e_h}(1) = \alpha^{e_h} = y_h(1)$. Daher ist die Nullstelle $x_{h,e_h-h} = 1$ und es gilt $x_{h+1,e_h+1-(h+1)} = x_{h+1,e_h-h} > x_{h,e_h-h} = 1$, woraus

$$\alpha^{e_{h+1}} = y_{h+1}(1) > \widetilde{y}_{e_h+1}(1) = \alpha^{e_h+1} = \alpha y_h(1)$$

folgt. Dies zeigt auch

$$e_{h+1} \geq e_h + 1. \tag{3.80}$$

□

Die Koeffizienten von $y_h(x)$ fallen monoton, d.h. $\mathbb{P}[h_{n+1} \leq h] \leq \mathbb{P}[H_n \leq h]$ bzw. gilt wegen $\mathbb{P}[H_n \leq h] = \frac{a_{n,h}}{n!}$ auch

$$a_{n+1,h} \leq (n+1)a_{n,h}. \tag{3.81}$$

Dies zeigt man wieder induktiv. Für $h = 0$ gilt (3.81), da $0 = a_{n+1,0} \leq (n+1)a_{n,0} = \delta_n^0$ gilt. Sei nun also $h \geq 0$, dann gilt für $n \geq 0$ mit (3.71)

$$\begin{aligned} a_{n+1,h+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k,h} a_{n-k,h} = a_{n,h} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_{k,h} a_{n-k,h} \\ &\leq a_{n,h+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} a_{k,h}(n-k) a_{n-k-1,h} \\ &= n a_{n,h+1} + a_{n,h+1} = (n+1) a_{n,h+1}, \end{aligned}$$

womit (3.81) gezeigt ist.

Nun benötigt man noch eine obere Schranke für $\mathbb{P}[H_n \leq h]$ mit $n \geq y_h(1)$ und eine untere Schranke für $\mathbb{P}[H_n \leq h]$ mit $n \leq y_h(1)$. Es sei wieder $e_h := c \ln y_h(1)$, d.h. $y_h(1) = \widetilde{y}_{e_h}(1)$. Mit $x \geq 1$ folgt aus Punkt 5 aus Lemma 3.53

$$\widetilde{y}_{e_h}(x) \geq y_h(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[H_k \leq h] x^k \geq \mathbb{P}[H_n \leq h] \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Wählt man $x = 1 + \frac{1}{\alpha^{e_h}}$, dann erhält man aus der Definition (3.78) eine obere Schranke

$$\mathbb{P}[H_n \leq h] \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha^{e_h}}\right)^{n+1} - 1} \Phi(-1) \ll \frac{\alpha^{e_h}}{n} = \alpha^{-(c \ln n - e_h)}, \tag{3.82}$$

die für $n \geq y_h(1)$ gültig ist. Analog erhält man für $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \widetilde{y}_{e_h}(x) \geq \frac{1}{1-x} - y_h(x) &\geq \sum_{k=n}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}[H_k \leq h]\big) x^k \\ &\geq \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) \frac{x^n}{1-x}. \end{aligned}$$

Hier wählt man $x = 1 - \frac{1}{n}$ und erhält[3]

$$1 - \mathbb{P}[H_n \leq h] \ll 1 - \alpha^{e_h - c\ln n}\Phi(\alpha^{e_h - c\ln n}) \ll \alpha^{-(e_h - c\ln n)}, \tag{3.83}$$

was für $n \leq y_h(1)$ gültig ist.

Nun gelten unter Verwendung von (3.80) die beiden Abschätzungen für $n \to \infty$

$$\sum_{h:y_h(1)\leq n} \mathbb{P}[H_n \leq h] \ll \sum_{h:e_h \leq c\ln n} \alpha^{-(c\ln n - e_h)} \ll \sum_{j\geq 0} \alpha^{-j} = O\,(1) \tag{3.84}$$

und

$$\sum_{h:y_h(1)>n} \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) \ll \sum_{h:e_h > c\ln n} \alpha^{-e_h - c\ln n)} \ll \sum_{j\geq 0} \alpha^{-j} = O\,(1)\,. \tag{3.85}$$

Die beiden Formeln (3.84) und (3.85) genügen um (3.70) zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}H_n &= \sum_{h\geq 0} \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) \\
&= \sum_{h:y_h(1)\leq n} \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) + \sum_{h:y_h(1)>n} \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) \\
&= \max\big\{h : y_h(1) \leq n\big\} + O\,(1) \\
&\quad - \sum_{h:y_h(1)\leq n} \mathbb{P}[H_n \leq h] + \sum_{h:y_h(1)>n} \big(1 - \mathbb{P}[H_n \leq h]\big) \\
&= \max\big\{h : y_h(1) \leq n\big\} + O\,(1)\,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung erhält man für $h \leq \mathbb{E}H_n$ die Ungleichung $c\ln n - e_h \geq (\mathbb{E}H_n - h) + C_1$ und für $h \geq \mathbb{E}H_n$ die Ungleichung $e_h - c\ln n \geq (h - \mathbb{E}H_n) + C_2$ mit passenden Konstanten C_1 und C_2. Aus (3.82) und (3.83) folgt daher $\mathbb{P}\big[|H_n - \mathbb{E}H_n| \geq j\big] \ll \alpha^{-j}$ und schließlich auch

$$\mathbb{E}(H_n - \mathbb{E}H_n)^L \ll \sum_{j\geq 0} j^{L-1}\mathbb{P}\big[|H_n - \mathbb{E}H_n| \geq j\big] = O\,(1)\,.$$

□

Folgerung 3.55 *Aus dem Satz 3.50 kann man mit Formel (3.70) und Lemma 3.54 leicht folgern, dass für den Erwartungswert der Höhe der binären Suchbäume*

$$\mathbb{E}H_n \leq c\ln n + O\,(1)\,.$$

[3] $a \ll b$ bedeutet, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $a \leq Cb$ gilt.

gilt. Wie bereits in Anmerkung 3.51 erwähnt, kann man wesentlich mehr zeigen. Es gilt nämlich (siehe [Ree])

$$\mathbb{E}H_n = c \ln n - \frac{3c}{2(c-1)} \ln \ln n + O(1).$$

3.6 Digitale Suchbäume

Definition 3.56 *Ein digitaler Suchbaum entsteht durch Einfügen einer Folge von Elementen, die durch* 0-1*-Folgen gekennzeichnet sind. Das erste Element s_1 wird zur Wurzel des digitalen Suchbaumes. Die restlichen Elemente der Folge werden nun in zwei Teilfolgen – eine mit Elementen, die in Binärdarstellung mit* 0 *(S_0) beginnen und eine mit Elementen, die mit* 1 *(S_1) beginnen – aufgespalten, wobei diese führenden Bits gelöscht werden. Danach verfährt man mit S_0 und S_1 rekursiv weiter und hängt den digitalen Suchbaum, der aus S_0 entsteht als linken Nachfolger von s_1 und den Baum, der aus S_1 entsteht, rechts an s_1. Man schreibt*

$$\mathcal{DST} = \begin{cases} \langle \mathcal{DST}(S_0), s_1, \mathcal{DST}(S_1) \rangle, & |S| \geq 1 \\ \langle \blacksquare \rangle & |S| = 0. \end{cases}$$

3.6.1 Mittlere interne Pfadlänge der digitalen Suchbäume

Satz 3.57 ([FS86]) *Die durchschnittliche interne Pfadlänge eines digitalen Suchbaumes ist*

$$N \operatorname{ld} N + N \left(\frac{\gamma - 1}{\ln 2} - \alpha + \frac{1}{2} + \delta(N) \right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Beweis. Bezeichne A_N die gesuchte durchschnittliche interne Pfadlänge eines digitalen Suchbaumes mit N Schlüsseln, dann gilt

$$A_N = N - 1 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\binom{N-1}{k}}{2^{N-1}} (A_k + A_{N-1-k}) \text{ für } N \geq 1$$

mit dem Anfangswert $A_0 = 0$. Geht man nun wieder mittels Multiplikation mit $\frac{z^{N-1}}{(N-1)!}$ und Summation über $N > 0$ zu der erzeugenden Funktion $A(z) := \sum_{n \geq 0} A_N \frac{z^N}{N!}$ über und benutzt man davor noch die Symmetrie der Summe,

so erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{N\geq 1} A_N \frac{z^{N-1}}{(N-1)!} &= \sum_{N\geq 2} \frac{z^{N-1}}{(N-2)!} + 2\sum_{N\geq 1}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\binom{N-1}{k}}{2^{N-1}} A_k \frac{z^{N-1}}{(N-1)!} \\
&= ze^z + 2\sum_{k\geq 0} \frac{A_k}{k!} \sum_{N\geq k+1} \frac{1}{(N-k-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{N-1} \\
&= ze^z + 2\sum_{k\geq 0} A_k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k!} \sum_{N\geq 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^N}{N!} \\
A'(z) &= ze^z + 2A\left(\frac{z}{2}\right) e^{\frac{z}{2}} \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Setzt man in (3.86) $\widetilde{A}(z) = e^{-z}A(z)$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\widetilde{A}'(z) + \widetilde{A}(z) = z + 2\widetilde{A}\left(\frac{z}{2}\right). \qquad (3.87)$$

Liest man den Koeffizienten von z^N in (3.87) ab, erhält man die Rekursion

$$\widetilde{A}_N = -\left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right)\widetilde{A}_{N-1} \text{ für } N \geq 3 \text{ und mit } \widetilde{A}_2 = 1, \qquad (3.88)$$

welche die Lösung

$$\widetilde{A}_N = (-1)^N \prod_{j=1}^{N-2}\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) \qquad (3.89)$$

hat. Das Produkt in (3.89) wird oft mit Q_{N-2} bezeichnet[4]. Setzt man (3.89) in $A(z) = e^z\widetilde{A}(z)$ ein, so ergibt sich eine explizite Formel für die mittlere interne Pfadlänge:

$$\begin{aligned}
A_N &= \left[\frac{z^N}{N!}\right] A(z) = \left[\frac{z^N}{N!}\right] e^z\widetilde{A}(z) = N![z^N]\sum_{N\geq 2}\sum_{k=2}^{N} \frac{z^{N-k}}{(N-k)!}\frac{\widetilde{A}_k z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k \prod_{j=1}^{k-2}\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) = \sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k Q_{k-2}.
\end{aligned}$$

Bevor man Lemma 2.12 anwenden kann, muss man die Funktion Q_k auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Dies gelingt mit der Funktion $f(z) = \frac{Q(1)}{Q(2^{-z})}$ mit $Q(x) = \prod_{j\geq 1}\left(1 - \frac{x}{2^j}\right)$. Das lässt sich folgendermaßen begründen: Die Funktion Q_N erfüllt die Rekursion

$$Q_{N+1} = \left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) Q_N \text{ für } N \geq 1 \text{ und mit } Q_0 = 1,$$

[4]Es kommt in Partitionsproblemen vor.

woraus durch einmaliges Anwenden der Rekursion

$$Q_N = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}} Q_{N+1}$$

folgt. Setzt man nun $f(N) = Q_N$, wobei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist, und teleskopiert die Rekursion, erhält man, vorausgesetzt der Limes existiert,

$$f(z) = \frac{1}{Q\left(2^{-z}\right)} \lim_{z\to\infty} f(z).$$

Andererseits impliziert $f(0) = Q_0 = 1$, dass $\lim_{z\to\infty} f(z) = Q(1)$. Daher ist

$$f(z) = \frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z}\right)} \tag{3.90}$$

eine analytische Fortsetzung.

In der asymptotischen Betrachtung verwendet man nun das Lemma 2.12 und erhält mit (3.90)

$$\sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k Q_{k-2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C B(N+1,-z) \frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z+2}\right)}\, dz. \tag{3.91}$$

Der Integrationsweg C ist eine geschlossene Kurve, die die Punkte $2, 3, \ldots, N$ umschließt. Man erweitert die Kurve C nun zu einem Rechteck R_{XY} und summiert die zusätzlichen Residuen auf. Das Rechteck R_{XY} habe daher die Eckpunkte $\left(\frac{1}{2} \pm iY, X \pm iY\right)$. Mit Hilfe der Abschätzungen

$$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+a)} = N^{-a} + O\left(N^{-a-1}\right) \tag{3.92}$$

und

$$\Gamma(x+iY) = O\left(|Y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|Y|}{2}}\right) \tag{3.93}$$

kann man zeigen, dass der Integrand bei geeigneter Wahl von X und Y auf drei der vier Seiten verschwindet. Auf der linken Seite des Rechtecks gilt die Abschätzung

$$O\left(\int_{-Y}^{Y} \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma\left(N+\frac{1}{2}-iy\right)}\, dy\right) = O\left(\sqrt{N}\right).$$

Der Integrand in (3.91) hat Pole bei $z = j \pm \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ für $j = 1, 0, -1, -2, \ldots$ und für alle $k \geq 0$, da an einem solchen Punkt $2^{-z+j} = 1$ gilt und daher

ein Faktor in $Q\left(2^{-z+2}\right)$ verschwindet. Zusätzlich sind die Punkte 0 und 1 doppelte Pole, da dort auch die Beta Funktion $B(N+1,-z)$ Pole hat. Von diesen Polen liegen aber nur Pole der Gestalt $z = 1 \pm \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ im Rechteck R_{XY} aber nicht in C.

Mit Hilfe von Lemma 2.13 kann man den Integranden in (3.91) entwickeln. Es gilt nämlich bei $z = 1$

$$\begin{aligned}
-B(N-1,-z) &= \frac{1}{1-z} z^{-1} \prod_{j=2}^{N} \left(1 - \frac{z}{j}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{1-z} N \left(1 + (H_{N-1} - 1)(z-1) + O\left((z-1)^2\right)\right) \\
&= -\frac{N}{z-1} - N(H_{N-1} - 1) + O\left(z-1\right) \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z+1}\right)} &= Q(1) \prod_{j<1} \left(1 - 2^{-z+j}\right)^{-1} \\
&= 1 - \ln 2 \sum_{j<1} \frac{2^{j-1}}{1-2^{j-1}} (z-1) + O\left((z-1)^2\right) \\
&= 1 - \alpha \ln 2 (z-1) + O\left((z-1)^2\right), \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

wobei $\alpha = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots$ ist. Setzt man nun (3.94) und (3.95) zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}
-B(N+1,-z) \frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z+2}\right)} &= -B(N+1,-z) \frac{1}{1-2^{-z+1}} \frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z+1}\right)} \\
&= \left(-\frac{N}{z-1} - N(H_{N-1} - 1) + O\left(z-1\right)\right) \qquad (3.96) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(z-1)\ln 2} + \frac{1}{2} + O\left(z-1\right)\right) \\
&\quad \times \left(1 - \alpha \ln 2 (z-1) + O\left((z-1)^2\right)\right),
\end{aligned}$$

woraus man nach Ausmultiplizieren das Residuum an der Stelle $z = 1$ ablesen kann:

$$-\frac{N}{\ln 2}(H_{N-1} - 1) + N\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = -N \operatorname{ld} N - N\left(\frac{\gamma - 1}{\ln 2} - \alpha + \frac{1}{2}\right) + O\left(1\right).$$

Dies liefert bereits den Hauptterm der asymptotischen Entwicklung. Die noch ausständigen Residuen liefern nur mehr einen sehr kleinen Beitrag zum linearen Term.

Für die Residuen an den Polen bei $a := 1 \pm \frac{2\pi ik}{\ln 2}$ erhält man mit Hilfe von (3.92) eine Entwicklung der Beta Funktion

$$\begin{aligned} B\left(N+1, -1-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right) &= \frac{\Gamma(N+1)\Gamma\left(-1-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)}{\Gamma\left(N-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)} \\ &= N\Gamma\left(-1-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)\frac{\Gamma(N)}{\Gamma\left(N-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)} \\ &= N\Gamma\left(-1-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)N^{\frac{2\pi ik}{\ln 2}}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Analog zu (3.95) gilt

$$\frac{Q(1)}{Q\left(2^{-z+1}\right)} = 1 + O\left(z-a\right),$$

womit man zu folgendem Residuum des Integranden in (3.91) in $1 \pm \frac{2\pi ik}{\ln 2}$ kommt

$$N^{1\pm\frac{2\pi ik}{\ln 2}}\Gamma\left(-1\mp\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Als Summe der Residuen an Stellen der Form $z = 1 \pm \frac{2\pi ik}{\ln 2}$ erhält man schließlich

$$-N\delta(N) + O\left(1\right) = -\frac{N}{\ln 2}\sum_{k\neq 0}\Gamma\left(-1-\frac{2\pi ik}{\ln 2}\right)e^{2\pi ik \operatorname{ld} N} + O\left(1\right).$$

Die Funktion $\delta(N)$ ist eine Fourierreihe in $\operatorname{ld} N$ und ist dem Betrage nach sehr klein, genauer gilt $|\delta(N)| < 10^{-6}$. □

3.6.2 Höhe der digitalen Suchbäume

Satz 3.58 ([Drm02b]) *Für die Höhe H_n der digitalen Suchbäume, die durch Einfügen von n Schlüsseln entstehen, gilt*

$$\mathbb{E}H_n = \operatorname{ld} n + \sqrt{2\operatorname{ld} n}\left(1+o\left(1\right)\right) \text{ für } n \to \infty. \tag{3.98}$$

Weiters gilt für die zentralen Momente

$$\mathbb{E}|H_n - \mathbb{E}H_n|^L = O\left(1\right) \text{ für feste } L \geq 0 \text{ und für } n \to \infty. \tag{3.99}$$

Beweis. Bezeichne $h_{n,k}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein digitaler Suchbaum bestehend aus n Schlüsseln eine Höhe von k nicht überschreitet, also $h_{n,k} := \mathbb{P}[H_n \leq k]$. Die $h_{n,k}$ erfüllen die Rekursion

$$h_{n+1,k+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_{i,k} h_{n-i,k} \text{ für } k \geq 0 \tag{3.100}$$

mit den Anfangswerten $h_{0,0} = h_{1,0} = 1$ und $h_{n,0} = 0$ für $n \geq 2$. Damit lässt sich nun die erzeugende Funktion $G_k(x)$ definieren:

$$G_k(x) := \sum_{n \geq 0} h_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Die Funktion $G_k(x)$ zählt digitale Suchbäume mit einer Höhe kleiner oder gleich k ihrer Wahrscheinlichkeit nach. Überträgt man die Rekursion (3.100) auf die Funktionen $G_k(x)$, so erhält man (siehe auch [KS00])

$$\begin{aligned} G'_{k+1}(x) &= \sum_{n \geq 0} h_{n+1,k+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_{i,k} h_{n-i,k} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{n} h_{i,k} \frac{x^i}{2^i i!} \cdot h_{n-i,k} \frac{x^{n-i}}{2^{n-i}(n-i)!} \\ &= G_k\left(\frac{x}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $G_k(x)$ die Anfangswerte $G_0(x) = 1 + x$ und $G_k(0) = 1$ für $k \geq 0$ erfüllen. Das folgende Lemma umfasst einige wichtige Eigenschaften der Funktionen $G_k(x)$:

Lemma 3.59 *Für $x > 0$ gilt*

1. $\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \leq G_k(x) \leq e^x$,
2. $G_{k+1}(x) > G_k(x)$,
3. $G_k(x) > G'_k(x)$ *und*
4. $G_k(x) - G'_k(x) \leq C \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ *mit einer Konstanten $C > 0$, die nicht von k abhängt.*

Beweis. Da für $n \leq k$ die Wahrscheinlichkeit, dass der digitale Suchbaum eine Höhe kleiner als k erreicht, gleich eins ist, gilt der erste Teil der Ungleichung in Punkt 1. Andererseits gilt für die $h_{n,k}$ immer $0 \leq h_{n,k} \leq 1$, womit auch die zweite Ungleichung folgt.

Punkt 2 folgt einfach aus der Tatsache, dass $h_{n,k+1} \geq h_{n,k}$ gilt. Diese Ungleichung ist für wenigstens ein n strikt.

Es gilt $h_{n,k} \geq h_{n+1,k}$ für alle n; die Ungleichung ist strikt für manche n. Daher gilt $G_k'(x) = \sum_{n\geq 0} h_{n+1,k} \frac{x^n}{n!} < G_k(x)$.

Der letzte Punkt folgt aus der Überlegung

$$\begin{aligned} G_k(x) - G_k'(x) &= 1 + \sum_{n\geq 1} h_{n,k} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{n\geq 1} \left| \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right| \\ &\leq 1 + 2 \max_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} \leq C \frac{e^x}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist. □

Nun führt man eine neue Klasse von Funktionen ein, die durch Transformation aus den $G_k(x)$ hervorgehen. Man definiert

$$P_k(x) := G_k(x) e^{-x} \tag{3.101}$$

und formuliert Lemma 3.59 für $P_k(x)$ neu:

Lemma 3.60 *Für die Funktionen $P_k(x)$ gilt*

1. $0 < P_k(x) < 1$ *für* $x \geq 0$,
2. $P_k(0) = 1$ *und* $\lim_{x\to\infty} P_k(x) = 0$ *sowie*
3. $P_k'(x) < 0$ *für* $x > 0$, *die Funktionen* $P_k(x)$ *sind also streng monoton fallend.*

Beweis. Punkt 1 folgt direkt aus Punkt 1 aus Lemma 3.59.

Aus der Definition (3.101) folgt durch Einsetzen $P_k(0) = 1$. Außerdem ist $G_k(x)$ ein Polynom und wächst daher sicher langsamer als e^x. Daraus folgt sofort die Grenzwerteigenschaft.

Es gilt $P_k'(x) = e^{-x}\big(G_k'(x) - G_k(x)\big)$ woraus mit Punkt 3 des Lemmas 3.59 die Behauptung $P_k'(x) < 0$ für $x > 0$ folgt. □

Nun müssen Schranken für $h_{n,k}$ gefunden werden. Dies leistet das

Lemma 3.61 *Seien $n_k \in \mathbb{R}$ positiv und definiert durch $G_k(n_k) = e^{n_k - 1}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für hinreichend große k*

$$h_{n,k} \leq C e^{-\frac{n}{2n_k}} \text{ für } n \geq n_k \text{ und} \tag{3.102}$$

$$1 - h_{n,k} \leq C \frac{n}{n_k} \text{ für } n \leq n_k \tag{3.103}$$

gilt.

Beweis. Relativ leicht zu zeigen ist

$$h_{n,k} \leq CP_k(n) \text{ und} \tag{3.104}$$
$$1 - h_{n,k} \leq C\big(1 - P_k(n)\big). \tag{3.105}$$

Verwendet man nämlich wieder die Eigenschaft 3 aus Lemma 3.59, so erhält man

$$\begin{aligned} G_k(n) &= \sum_{l=0}^{\infty} h_{l,k} \frac{n^l}{l!} \geq \sum_{l=0}^{n} h_{l,k} \frac{n^l}{l!} \\ &\geq h_{n,k} \sum_{l=0}^{n} \frac{n^l}{l!} \geq h_{n,k} e^n \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \end{aligned} \tag{3.106}$$

woraus (3.104) folgt. Analog erhält man

$$\begin{aligned} e^n - G_k(n) &\geq \sum_{l=0}^{\infty} (1 - h_{l,k}) \frac{n^l}{l!} \geq \sum_{l \geq n} (1 - h_{l,k}) \frac{n^l}{l!} \\ &\geq (1 - h_{n,k}) \sum_{l \geq n} \frac{n^l}{l!} \geq (1 - h_{n,k}) e^n \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \end{aligned} \tag{3.107}$$

womit auch (3.105) gezeigt ist.

Damit muss nur noch $P_k(x)$ entsprechend abgeschätzt werden. Zu diesem Zweck führt man die Folge c_k ein. Sie ist definiert durch

$$\left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{-c_k} = \frac{1}{e}$$

und konvergiert daher gegen eins. Mit Hilfe der Folge c_k kann man eine neue Funktion $\widetilde{G}_k(x)$ bilden, die ähnliche Eigenschaften wie $G_k(x)$ hat. Es sei also

$$\widetilde{G}_k(x) := \left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{\left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) x}.$$

Die Funktion $\widetilde{G}_k(x)$ erfüllt

$$\widetilde{G}_k(n_k) = G_k(n_k) = e^{n_k - 1}$$

ebenso, wie die Differentialgleichung, die den $G_k(x)$ zugrunde liegt:

$$\widetilde{G}'_k(x) = \widetilde{G}_k \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Nun betrachtet man die Differenz $D_{k,l}(x) := G_l(x) - \widetilde{G}_k(x)$ und zeigt induktiv, dass sie für $k, l \geq 0$ genau eine Nullstelle $x_{k,l} > 0$ besitzt. Beginnend mit $l = -1$ (man definiert dazu $G_{-1}(x) = 1$) gilt

$$D_{k,-1}(x) = 1 - \left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{\left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right)x},$$

woraus man $D_{k,-1}(0) > 0$, $D'_{k,-1}(x) < 0$ und $\lim_{x\to\infty} D_{k,-1}(x) = -\infty$ ablesen kann. Daraus folgt sofort, dass es eine eindeutige Nullstelle $x_{k,-1} > 0$ gibt. Sei nun $l \geq -1$, dann gilt

$$D'_{k,l+1}(x) = \left(G_l\left(\frac{x}{2}\right) + \widetilde{G}_k\left(\frac{x}{2}\right)\right) D_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{3.108}$$

und aufgrund der Definitionen von $G_k(x)$ und $\widetilde{G}_k(x)$ auch $D_{k,l+1}(0) > 0$, sowie $\lim_{x\to\infty} D_{k,l+1}(x) = -\infty$. Aus (3.108) folgt nun, dass $D_{k,l+1}$ für $0 \leq x \leq 2x_{k,l}$ steigt und für $x \geq 2x_{k,l}$ fällt. Also existiert genau eine Nullstelle $x_{k,l+1} > 2x_{k,l} > 0$ von $D_{k,l+1}(x)$.

Betrachtet man nun $D_{k,k}(x)$, so ist dessen Nullstelle $x_{k,k} = n_k$. Daher ist $D_{k,k}(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq n_k$ und $D_{k,k}(x) \leq 0$ für $x \geq n_k$. Daher gelten die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} P_k(x) &\geq \left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{-\frac{c_k}{n_k}x} \text{ für } x \leq n_k \text{ und} \\ P_k(x) &\leq \left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{-\frac{c_k}{n_k}x} \text{ für } x \geq n_k. \end{aligned}$$

Jetzt folgert man aus $\lim_{k\to\infty} c_k = 1$, dass für hinreichend große k $c_k > \frac{1}{2}$ gilt und daher für $n \geq n_k$ Formel (3.102). Umgekehrt gilt für $n \leq n_k$

$$\begin{aligned} 1 - h_{n,k} &\leq C' \left(1 - \left(1 - \frac{c_k}{n_k}\right) e^{-\frac{c_k}{n_k}n}\right) \\ &= 2C' \frac{n}{n_k} + O\left(\frac{n^2}{n_k^2}\right) \\ &\leq C \frac{n}{n_k}, \end{aligned}$$

womit auch (3.103) gezeigt ist. □

Die in Lemma 3.61 eingeführten Zahlen n_k haben eine weitere wichtige Eigenschaft:

Lemma 3.62 *Für die Folge n_k gilt*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \sqrt{2}$$

Beweis. Man benötigt einige Hilfsfunktionen. Man definiert daher die Größen m_k durch

$$\left(1+\frac{n_k}{m_k}\right)^{m_k-1} = e^{n_k-1} \tag{3.109}$$

und damit weiters für $0 \le l \le k$ die Funktion $\widetilde{G}_{k,l}(x)$ durch

$$\widetilde{G}_{k,l}(x) := c_{k,l}\left(1+\frac{x}{2^{l-k}m_k}\right)^{2^{l-k}m_k-1}, \tag{3.110}$$

wobei $c_{k,k} := 1$ und für $0 \le l < k$

$$c_{k,l} := \prod_{i=0}^{k-l-1}\left(1-\frac{2^i}{m_k}\right)^{2^{i-(k-l)}}$$

gilt. Einige Eigenschaften der Funktionen $\widetilde{G}_{k,l}(x)$ fasst das folgende Lemma zusammen.

Lemma 3.63 *Für $0 \le l \le k$ erfüllen die Funktionen $\widetilde{G}_{k,l}(x)$*

1. $0 \le \widetilde{G}_{k,l}(x) \le e^x$,
2. $0 < \widetilde{G}_{k,l}(x) \le 1$,
3. $\widetilde{G}'_{k,l+1}(x) = \widetilde{G}_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right)^2$ *und*
4. $\widetilde{G}_{k,k}(n_k) = e^{n_k-1} = G_k(n_k)$.

Beweis. Per Definition gilt $0 \le c_{k,l} \le 1$ und damit auch die Punkte 1 und 2.

Punkt 3 folgt aus der einfachen Überlegung

$$\begin{aligned}\widetilde{G}'_{k,l+1}(x) &= c_{k,l+1}\frac{2^{l+1-k}m_k-1}{2^{l+1-k}m_k}\left(1+\frac{x}{2^{l+1-k}}\right)^{2^{l+1-k}m_k-2}\\ &= c_{k,l+1}\left(1-\frac{2^{k-l-1}}{m_k}\right)\left(1+\frac{\frac{x}{2}}{2^{l-k}}\right)^{2(2^{l-k}m_k-1)}\\ &= \widetilde{G}_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Der letzte Punkt folgt schließlich aus den Definition (3.109) und (3.110) durch einfaches Einsetzen. □

Man sieht also, dass $\widetilde{G}_{k,l}(x)$ analog zu $\widetilde{G}_k(x)$ fast die gleichen Eigenschaften hat wie $G_k(x)$. Daher betrachtet man wieder die Differenz

$$\Delta_{k,l} := G_l(x) - \widetilde{G}_{k,l}(x)$$

und zeigt induktiv, dass sie genau eine Nullstelle größer null hat. Der Einfachheit halber setzt man wieder $G_{-1}(x) = 1$ und zeigt für $l = -1$, dass $\Delta_{k,-1}(0) > 0$, $\Delta'_{k,-1}(x) < 0$ und $\lim_{x\to\infty} \Delta_{k,-1}(x) = -\infty$. Daher gibt es genau eine Nullstelle $x_{k,-1} > 0$.

Sei nun $l \geq -1$, dann gilt für die Ableitung

$$\Delta'_{k,l+1}(x) = \left(G_l\left(\frac{x}{2}\right) + \widetilde{G}_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Delta_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Analog zu oben (vergleiche (3.108)) erhält man wieder $\Delta_{k,l+1}(0) > 0$ und $\lim_{x\to\infty} \Delta_{k,l+1}(x) = -\infty$. Damit folgt dann, dass $\Delta_{k,l+1}(x)$ für $0 \leq x \leq 2x_{k,l}$ steigt und für $x \geq 2x_{k,l}$ monoton fällt. Daher gibt es genau eine Nullstelle $x_{k,l+1} > 2x_{k,l} > 0$.

Wieder gilt $\Delta_{k,k}(n_k) = 0$, also auch $x_{k,k} = n_k$. Daher gilt $\Delta_{k,k}(x) > 0$ für $0 \leq x < n_k$ und $\Delta_{k,k}(x) < 0$ für $x \geq n_k$. Dies kann man auch folgendermaßen anschreiben

$$\begin{aligned} &G_k(x) \geq \widetilde{G}_{k,k}(x) \text{ für } 0 \leq x \leq n_k \text{ und} \\ &G_k(x) \leq \widetilde{G}_{k,k}(x) \text{ für } x \geq n_k. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Nun benutzt man, dass für m_k die Entwicklung $m_k = \frac{n_k^2}{2} + O(n_k)$ gilt, und erhält für $\widetilde{G}_{k,k}(x)$

$$\widetilde{G}_{k,k}(x) = e^{x - \left(\frac{x}{n_k}\right)^2 + O\left(\frac{x^2}{n_k^3}\right) + O\left(\frac{x^3}{n_k^4}\right)}.$$

Daraus folgt für $x = \frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}}$

$$\widetilde{G}_{k,k}\left(\frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}}\right) = e^{\frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}} - \frac{1}{2+\varepsilon} + O\left(\frac{1}{n_k}\right)}. \tag{3.112}$$

Mit (3.111) folgt aus (3.112) die Ungleichung

$$P_k\left(\frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}}\right) \geq e^{-\frac{1}{2+\varepsilon} + O\left(\frac{1}{n_k}\right)} \tag{3.113}$$

Wegen (3.101) gilt $P_{k+1}(n_{k+1}) = \frac{1}{e}$ und daher auch

$$P_k\left(\frac{n_{k+1}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n_k}}\right). \tag{3.114}$$

Ist nun k genügend groß, dann folgt aus (3.113) und (3.114)

$$P_k\left(\frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}}\right) \geq P_k\left(\frac{n_{k+1}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}},$$

was gleichbedeutend mit

$$\frac{n_k}{\sqrt{2+\varepsilon}} \leq \frac{n_{k+1}}{2}$$

ist. Damit ist das Lemma 3.62 gezeigt. □

Nun kann (3.99) sowie $\mathbb{E}H_n = \max\{k : n_k \leq n\} + O(1)$ gezeigt werden. Für (3.98) benötigt man noch ein Resultat aus [AS88], das zusammen mit (3.99) ausreichend ist.

Es sei im Folgenden $k_0(n) := \max\{k : n_k \leq n\}$. Aus der Definition von k_0 folgt $n_{k_0(n)+1} > n \geq n_{k_0(n)}$. Weiters gilt wegen Lemma 3.62, dass ein $\eta > 0$ existiert, sodass $n_{k+1} \geq (1+\eta)n_k$ gilt. Daher gilt für k mit $n \geq n_k$

$$\frac{n}{n_k} \geq (1+\eta)^{k_0(n)-k-1} \tag{3.115}$$

und für k mit $n \leq n_k$

$$\frac{n}{n_k} \leq (1+\eta)^{-k_0(n)+k}. \tag{3.116}$$

Einerseits folgt aus (3.102) und (3.115) für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k:n\geq n_k} h_{n,k}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L &\ll \sum_{k\leq k_0(n)} e^{-\frac{1}{2}(1+\eta)^{k_0(n)-k-1}}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L \\ &\leq \sum_{l\geq 0} e^{-\frac{1}{2}(1+\eta)^{l-1}}(l+\delta)^L \\ &= O(1)\end{aligned} \tag{3.117}$$

und andererseits folgt aus (3.103) und (3.116) für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k:n\leq n_k} (1-h_{n,k})\big(k-k_0(n)+\delta\big)^L &\ll \sum_{k\geq k_0(n)} (1+\eta)^{-k_0(n)+k}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L \\ &\leq \sum_{l\geq 0} \frac{(l+\delta)^L}{(1+\eta)^l} \\ &= O(1).\end{aligned} \tag{3.118}$$

Setzt man in (3.117) und (3.118) $L = 0$, so kann man folgendes zeigen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}H_n &= \sum_{k\geq 0}(1-h_{n,k}) = \sum_{k:n\geq n_k}(1-h_{n,k}) + \sum_{k_n<n_k}(1-h_{n,k}) \\ &= \max\{k : n_k \leq n\} + O(1) - \sum_{k:n\geq n_k} h_{n,k} + \sum_{k:n<n_k}(1-h_{n,k}) \\ &= \max\{k : n_k \leq n\} + O(1) = k_0(n) + O(1).\end{aligned}$$

Analog verfährt man mit den zentralen Momenten. Setzt man $\delta = \left|\mathbb{E}H_n - k_0(n)\right| + 1$, dann folgt wieder mit (3.117) und (3.118) und $L \in \mathbb{N}^\times$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|H_n - \mathbb{E}H_n|^L &\ll \sum_{k \le \mathbb{E}H_n} h_{n,k}(\mathbb{E}h_n - k + 1)^{L-1} + \sum_{k \ge \mathbb{E}h_n} h_{n,k}(k - \mathbb{E}H_n + 1)^{L-1} \\
&\ll \sum_{k \le k_0(n)} h_{n,k}\big(k_0(n) - k + \delta\big)^{L-1} \\
&\quad + \sum_{k \ge k_0(n)} (1 - h_{n,k})\big(k - k_0(n) + \delta\big)^{L-1} + O\left(1\right) \\
&= O\left(1\right),
\end{aligned}$$

d.h. die zentralen Momente sind beschränkt.

Für die asymptotische Entwicklung des Erwartungswertes zieht man ein Ergebnis von Aldous und Shields aus [AS88] heran. Dieses besagt, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{H_n - \operatorname{ld} n - \sqrt{2 \operatorname{ld} n}}{\sqrt{\operatorname{ld} n}}\right| \ge \varepsilon\right] \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{3.119}$$

Nun folgt aus der Beschränktheit der zentralen Momente, dass es eine Konstante $C = C(L)$ gibt, mit der $\mathbb{P}\Big[\big|H_n - k_0(n)\big| \ge \kappa\Big] \le \frac{C}{\kappa^L}$ gilt. Daraus folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ auch

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{H_n - k_0(n)}{\sqrt{\operatorname{ld} n}}\right| \ge \varepsilon\right] \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{3.120}$$

Die Aussagen (3.119) und (3.120) können nur unter der Voraussetzung

$$k_0(n) = \operatorname{ld} n + \sqrt{2 \operatorname{ld} n}\,(1 + o\left(1\right))$$

beide wahr sein. Daraus folgt schließlich auch (3.98). □

3.6.3 Mittlere Anzahl der Knoten ohne Nachfolger in digitalen Suchbäumen

Satz 3.64 ([FS86]) *In einem digitalen Suchbaum, der aus N Schlüsseln besteht, ist die mittlere Anzahl der Knoten, die nur externe Knoten als Nachfolger haben*

$$N\left(\beta + 1 - \frac{1}{Q_\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} + \alpha^2 - \alpha\right) + \delta(N)\right) + O\left(\sqrt{N}\right),$$

wobei die Konstanten α, β und Q_∞ folgende Werte haben:

$$\alpha = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k - 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = 1.60\ldots$$

$$\beta = \sum_{k\geq 1} \frac{k2^{k+1}}{\prod_{l=2}^{k}(4l-5)} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j - 1} =$$
$$= \frac{1\cdot 2^2}{1}\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{2\cdot 2^3}{1\cdot 3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \frac{3\cdot 2^4}{1\cdot 3\cdot 7}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) + \cdots = 7.74\ldots$$

$$Q_\infty = \prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdots = 0.28\ldots.$$

Beweis. Sei C_N die gesuchte Größe, dann erfüllt C_N folgende Rekursion

$$C_N = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} (C_k + C_{N-1-k}) \text{ für } N \geq 2,\ C_0 = 0,\ C_1 = 1.$$

Führt man die exponential erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{N\geq 0} C_N \frac{z^N}{N!}$ ein, so erhält man wie in Formel (3.86)

$$C'(z) = 1 + 2C\left(\frac{z}{2}\right) e^{\frac{z}{2}}.$$

Nach Transformation mittels $D(z) = \sum_{N\geq 0} D_N \frac{z^N}{N!} := e^{-z}C(z)$ erhält man die Differentialgleichung

$$D'(z) + D(z) = e^{-z} + 2D\left(\frac{z}{2}\right),$$

sowie die daraus resultierende Rekursion für die D_N

$$D_N + D_{N-1} = (-1)^{N-1} + \frac{1}{2^{N-2}} D_{N-1} i$$
$$D_N = (-1)^{N-1} - \left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right) D_{N-1} \text{ für } N \geq 2,\ D_0 = 0,\ D_1 = 1. \tag{3.121}$$

Die Lösung von (3.121) ist leider nicht mehr ganz so einfach wie die von (3.88). Sie lautet nämlich

$$D_N = (-1)^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i}^{N-2} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right).$$

Führt man die Größe

$$R_N := Q_N \left(1 + \frac{1}{Q_1} + \cdots + \frac{1}{Q_N}\right) \tag{3.122}$$

ein, so kann man mit $C(z) = e^z D(z)$ die gesuchte Größe C_N in einer expliziten Summe angeben:

$$C_N = N - \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k R_{k-2}. \tag{3.123}$$

Nun benötigt man wieder eine analytische Fortsetzung der Funktion R_k auf $\mathbb{C}$. Dies ist weit schwieriger als für die Funktion Q_k, da das einfache Anwenden der Rekursion auf die vermeintliche Fortsetzung

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{1-q^{z+1}} + \frac{1}{1-q^{z+1}} R(z+1) \\ &= \sum_{j\geq 0} \frac{1}{(1-q^{z+1})(1-q^{z+2})\cdots(1-q^{z+1+j})} \end{aligned}$$

führen würde. Leider ist diese Summe für $z \in \mathbb{N}^\times$ nicht konvergent.

Die eben eingeführte Größe q hat hier den Wert $\frac{1}{2}$. Der Grund für ihre Verwendung liegt in der Beweisführung für m-äre Bäume. Dort muss nämlich im Wesentlichen nur die Größe q verändert werden.

Formt man (3.122) um, so erhält man

$$\frac{R_N}{Q_N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{Q_k}.$$

Die erzeugende Funktion der $\frac{R_N}{Q_N}$ lässt sich daraus leicht entwickeln:

$$\begin{aligned} \sum_{N\geq 0} \frac{R_n}{Q_N} u^N &= \sum_{N\geq 0} \sum_{k=0}^{N} \frac{u^N}{Q_k} = \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{Q_k} \sum_{N\geq k} u^{N-k} = \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{Q_k} \sum_{N\geq 0} u^N \\ &= \frac{1}{1-u} \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{Q_k}. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Die letzte Summe lässt sich mit Lemma 2.14 behandeln und ergibt

$$\sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{Q_k} = \frac{1}{(1-u)Q(u)}. \tag{3.125}$$

Mit (3.125) kann man (3.124) vereinfachen zu

$$T(u) := \sum_{N\geq 0} \frac{R_n}{Q_N} u^N = \frac{1}{(1-u)^2 Q(u)}. \tag{3.126}$$

Mit Lemma 2.13 entwickelt man $\frac{1}{Q(u)}$ nach u und erhält

$$\frac{1}{Q(u)} = \frac{1}{Q_\infty} + \frac{\alpha}{Q_\infty}(u-1) + O\left((u-1)^2\right). \tag{3.127}$$

Setzt man (3.127) in (3.126) ein, so bekommt man

$$T(u) = \frac{1}{Q_\infty(1-u)^2} - \frac{\alpha}{Q_\infty(1-u)} + g(z),$$

wobei $g(z)$ eine analytische Funktion für $|u| \leq 2$ ist, mit Ausnahme des einfachen Pols $u = 2$. Daraus folgt, dass

$$R_N = Q_N \left(\frac{N+1}{Q_\infty} - \frac{\alpha}{Q_\infty} \right) + O\left(2^{-N}\right),$$

und mit $\frac{Q_N}{Q_\infty} = 1 + O\left(2^{-N}\right)$, dass $R_N = N+1-\alpha+O\left(N2^{-N}\right)$. Man definiert die Funktion

$$R_N^* := R_N - (N+1-\alpha), \tag{3.128}$$

welche folgende Rekursion

$$R_N^* = \frac{(N+1-\alpha)q^{N+1}}{1-q^{N+1}} + \frac{1}{1-q^{N+1}} R_{N+1}^*.$$

erfüllt. R_N^* lässt sich nun durch die meromorphe Funktion $R(z)$ fortsetzen. $R(z)$ erhält man wieder durch Einsetzen in die Rekursion und anschließendes Teleskopieren:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{(z+1-\alpha)q^{z+1}}{1-q^{z+1}} + \frac{1}{1-q^{z+1}} R(z+1) \\ &= \frac{(z+1-\alpha)q^{z+1}}{1-q^{z+1}} + \frac{(z+2-\alpha)q^{z+2}}{(1-q^{z+1})(1-q^{z+2})} + \frac{1}{1-q^{z+2}} R(z+2) \\ &= \sum_{j\geq 0} \frac{(z+1+j-\alpha)q^{z+1+j}}{(1-q^{z+1})(1-q^{z+2})\cdots(1-q^{z+1+j})} \end{aligned} \tag{3.129}$$

Die Funktion $R(z)$ ist meromorph und hat an den Stellen $z = i \pm \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ für $j \leq 2$ und für $k \geq 0$, sowie für $j = -1$ und für $k > 0$ einfache Pole. Für die

spätere asymptotische Betrachtung ist wesentlich, dass $R(-1)$ existiert. Man führt die erzeugende Funktion $F(u,v)$ ein, um $R(-1)$ berechnen zu können. Die Koeffizienten von $F(u,v)$ von $u^n v^m q^k$ zählen die Möglichkeiten, k als Summe von m Zahlen zu schreiben, wobei keine der Zahlen größer als n ist. $F(u,v)$ lautet daher

$$F(u,v) = \sum_{j\geq 1} \frac{q^j u^j}{(1-qv)\cdots(1-q^j v)}.$$

Aus Lemma 2.14 folgt

$$F(u,1)+1 = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-q^j u}$$

und daher gilt $F(1,1) = Q_\infty^{-1} - 1$. Des Weiteren gilt nach Lemma 2.13

$$F_u(u,1) = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-q^j u} \sum_{i\geq 1} \frac{q^i}{1-q^i u}$$

also auch $F_u(1,1) = \frac{\alpha}{Q_\infty}$. Zusätzlich benötigt man noch die beiden Gleichungen

$$F\big(1,q^{z+1}\big) = \sum_{j\geq 1} \frac{q^j}{(1-q^{z+2})\cdots(1-q^{z+1+j})} \text{ und} \tag{3.130}$$

$$F_u\big(1,q^{z+1}\big) = \sum_{j\geq 1} \frac{jq^j}{(1-q^{z+2})\cdots(1-q^{z+1+j})}. \tag{3.131}$$

Ausgehend von (3.129) erhält man mit (3.130) und (3.131) eine Darstellung von $R(z)$:

$$R(z) = \frac{q^{z+1}}{1-q^{z+1}}\Big((z+1-\alpha)\big(F(1,q^{z+1})+1\big) + F_u(1,q^{z+1})\Big).$$

Aus dieser Darstellung kann man nun leicht eine Taylorreihenentwicklung für $R(z)$ um $z=-1$ gewinnen, indem man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{q^{z+1}}{1-q^{z+1}} &= -\frac{1}{(z+1)\ln q} - \frac{1}{2} + O\left(z+1\right), \\
F\big(1,q^{z+1}\big) &= F(1,1) + (z+1)\ln q F_v(1,1) + O\left((z+1)^2\right) \text{ und} \\
F_u\big(1,q^{z+1}\big) &= F_u(1,1) + (z+1)\ln q F_{uv}(1,1) + O\left((z+1)^2\right)
\end{aligned}$$

zusammensetzt. Man erhält schließlich

$$R(z) = -\frac{F(1,1)+1}{\ln q} + \alpha F_v(1,1) - F_{uv}(1,1) + O\left(z+1\right). \tag{3.132}$$

Schlussendlich muss man noch die beiden konstanten Größen $F_v(1,1)$ und $F_{uv}(1,1)$ bestimmen. Dies gelingt mit den beiden Darstellungen

$$F_v(1,1) = \sum_{j\geq 1} \frac{q^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \sum_{k=1}^{j} \frac{q^k}{1-q^k} \text{ und}$$

$$F_{uv}(1,1) = \sum_{j\geq 1} \frac{jq^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \sum_{k=1}^{j} \frac{q^k}{1-q^k}.$$

Es ist sogar möglich $F_v(1,1)$ durch α und Q_∞ auszudrücken. Dazu benutzt man die Symmetrie der Funktion $F(u,v)$ und betrachtet

$$F(u,v) - vF(qu,v) = \sum_{j\geq 1} \frac{q^j u^j (1-q^j v)}{(1-qv)\cdots(1-q^j v)} = qu\big(1+F(u,v)\big). \tag{3.133}$$

Löst man die Gleichung (3.133) nach $F(u,v)$ auf und teleskopiert diese Rekursion, so erhält man

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{qu}{1-qu} + \frac{v}{1-qu}F(qu,v) \\ &= \frac{qu}{1-qu} + \frac{vq^2u}{(1-qu)(1-q^2u)} + \frac{v^2}{(1-qu)(1-q^2u)}F(q^2u,v) \\ &\vdots \\ &= \frac{u}{v}F(v,u). \end{aligned}$$

Also gilt $vF(u,v) = uF(v,u)$. Differenziert man dies nun nach u, so folgt $F_u(1,1) = F_v(1,1) + F(1,1)$ und weiters $F_v(1,1) = (\alpha-1)Q_\infty^{-1} + 1$. Für $F_{u,v}(1,1)$ gibt es leider keine so einfache Darstellung in α und Q_∞. Man definiert daher $\beta := F_{uv}(1,1)$. Investgiert man die neu gewonnen Konstanten in (3.132) ein, so erhält man

$$R(z) = \beta + 1 - \frac{1}{Q_\infty}\left(-\frac{1}{\ln q} + \alpha^2 - \alpha\right) + O\left(z+1\right). \tag{3.134}$$

Setzt man die Funktion R_k^* aus (3.128) in (3.123) ein, so erhält man eine Variante der expliziten Summe als Lösung der gesuchten Größe C_N. Es gilt

$$C_N = N - \sum_{k\geq 2} \binom{N}{k} (-1)^k (R_{k-2}^* + k - 1 - \alpha),$$

woraus man mit den Identitäten $\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k k = 0$

$$C_N = (N-1)(\alpha+1) - \sum_{k\geq 2}\binom{N}{k}(-1)^k R^*_{k-2}$$

erhält. Mit Lemma 2.12 erhält man wieder eine Darstellung als Integral, nämlich

$$C_N - (N-1)(\alpha+1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C B(N+1,-z)R(z-2)\,dz. \tag{3.135}$$

Ändert man den Verlauf von C wieder so ab, dass er ein Rechteck R_{XY} beschreibt, so ist der Wert des Integrals entlang R_{XY} gleich der linken Seite in (3.135) minus der Residuen des Integranden innerhalb von R_{XY} aber außerhalb von C. Man wählt für das Rechteck die Eckpunkte $(\frac{1}{2}\pm iY, X\pm iY)$. Für die Beta Funktion benutzt man die beiden Abschätzungen (3.92) und (3.93) und folgert daraus, dass das Integral auf drei der vier Seiten exponentiell schnell verschwindet. Auf der linken Seite des Rechtecks gilt die Abschätzung bis auf ein $O\left(\sqrt{N}\right)$.

Der Hauptterm ergibt sich aus der Singularität bei $z=1$. Wie vorher gezeigt wurde, existiert $\lim_{z\to 1} R(z-2)$ (3.132). Es genügt also eine Entwicklung der Beta Funktion an dieser Stelle. Diese findet sich in Formel (3.96 wieder). Das Residuum an dieser Stelle ist daher $-NR(-1)$. Mit (3.134) erhält man also den Hauptterm der Entwicklung:

$$N\left(\beta+1-\frac{1}{Q_\infty}\left(-\frac{1}{\ln q}+\alpha^2-\alpha\right)\right). \tag{3.136}$$

Die restlichen Singularitäten im betrachteten Gebiet liegen bei $z = 1\pm\frac{2\pi i k}{\ln 2}$ für $k\neq 0$ und sind ausnahmslos einfache Pole, die noch einen kleinen oszillierenden Beitrag liefern. Der Faktor $\frac{1}{1-q^{z+1}}$ in $R(z)$ liefert für $z = 1\pm\frac{1}{2\pi i k}\ln 2$ den Beitrag $-\frac{1}{\ln q}$. Die anderen Faktoren in $R(z)$ liefern $\frac{2\pi i k}{Q_\infty \ln q}$ und schließlich liefert die Beta Funktion noch den Term in (3.97). Setzt man diese Beiträge zusammen, erhält man eine mit N multiplizierte Fourierreihe in $\operatorname{ld} N$, deren Amplitude aber sehr klein ist:

$$N\delta(N) = \frac{1}{Q_\infty \ln q}\sum_{k\neq 0}\frac{2\pi i k}{\ln q}\Gamma\left(-1-\frac{2\pi i k}{\ln q}\right)e^{2\pi i k \operatorname{ld} N}. \tag{3.137}$$

Die beiden Ausdrücke (3.136) und (3.137) schließen den Beweis ab. □

3.7 Tries

Definition 3.65 *Sei B eine Menge von Bitstrings. Der zugehörige Trie ist ein binärer Baum, der folgendermaßen definiert ist: Ist B leer, so ist der Trie ein ungültiger externer Knoten. Ist $|B| = 1$, dann ist der Trie ein gültiger externer Knoten, der den Bitstring enthält. Ist $|B| > 1$ dann definiert man B_0 und B_1 als die Teilmengen von B der Strings, die mit 0 bzw. 1 anfangen, löscht diese Anfangsbits und setzt B als internen Knoten, an dem links der Trie von B_0 und rechts der Trie von B_1 hängt. Man schreibt*

$$\mathcal{TR}(B) = \begin{cases} \langle \mathcal{TR}(B_0), \square, \mathcal{TR}(B_1) \rangle\,, & |B| > 1 \\ \langle \blacksquare \rangle, & |B| = 1 \\ \langle \emptyset \rangle & |B| = 0 \end{cases}$$

3.7.1 Mittlere externe Pfadlänge der Tries

Satz 3.66 *Für die externe Pfadlänge eines Tries mit N Schlüssel gilt*

$$\mathbb{E}\xi_N = N \operatorname{ld} N + N \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2} + \delta(\operatorname{ld} N) \right) + O\left(1\right).$$

Beweis. Die externe Pfadlänge L_N erfüllt die Anfangswerte $L_0 = 0$ und $L_1 = 0$ sowie die Rekursion

$$L_N = N + \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(L_k + L_{N-k}\right) \text{ für } N \geq 2. \tag{3.138}$$

Multipliziert man (3.138) mit $\frac{z^N}{N!}$ und summiert dies über $N \geq 2$ auf, erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrie der Summe

$$\begin{aligned} L(z) &= \sum_{N\geq 2} N \frac{z^N}{N!} + \sum_{N\geq 2} \frac{1}{2^N N!} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(L_k + L_{N-k}\right) z^N \\ &= z(e^z - 1) + \sum_{N\geq 2} \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} L_k \frac{z^N}{N!} \\ &= z(e^z - 1) + 2 \sum_{N\geq 2} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^N \frac{L_k}{N!} \\ &= z(e^z - 1) + 2e^{\frac{z}{2}} L\left(\frac{z}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.139}$$

Setzt man nun $\widetilde{L}(z) = e^{-z}L(z)$ in (3.139) ein, so folgt

$$\begin{aligned} e^z\widetilde{L}(z) &= z(e^z - 1) + 2e^{\frac{z}{2}}e^{\frac{z}{2}}\widetilde{L}\left(\frac{z}{2}\right) \\ \widetilde{L}(z) &= z(1 - e^{-z}) + 2\widetilde{L}\left(\frac{z}{2}\right). \end{aligned}$$

Sei $\widetilde{L}_N$ der Koeffizient von $\widetilde{L}(z)$ bei $\frac{z^N}{N!}$, dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_N = \left[\frac{z^N}{N!}\right]\widetilde{L}(z) &= \left[\frac{z^N}{N!}\right](-ze^{-z}) + 2\left[\frac{z^N}{N!}\right]\widetilde{L}\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= -N!\frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!} + 2N!\frac{\widetilde{L}_N}{2^N N!} = (-1)^N N + 2^{1-N}\widetilde{L}_N \\ &= \frac{(-1)^N N}{1 - 2^{1-N}}. \end{aligned}$$

Daher kann man L_N durch Einsetzen in $\widetilde{L}(z) = e^{-z}L(z)$ gewinnen, also

$$\begin{aligned} L_N = \left[\frac{z^N}{N!}\right]L(z) &= \left[\frac{z^N}{N!}\right]e^z\widetilde{L}(z) = N!\left[z^N\right]\sum_{N\geq 2}\sum_{k=2}^{N}\frac{z^{N-k}}{(N-k)!}\frac{\widetilde{L}_k z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^k k}{1 - 2^{1-k}} \text{ für } N \geq 2. \end{aligned} \tag{3.140}$$

Die Asymptotik von (3.140) lässt sich über den Residuenkalkül bestimmen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^k k}{1 - 2^{1-k}} &= \frac{(-1)^N}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{s}{1 - 2^{1-s}}\frac{N!}{s(s-1)\cdots(s-N)}\,ds \\ &= (-1)^{N+1}\sum_{c\notin\overset{\circ}{\Gamma}}\operatorname{res}\left(\frac{1}{1 - 2^{1-s}}\frac{N!}{(s-1)\cdots(s-N)}, c\right), \end{aligned} \tag{3.141}$$

wobei die Kurve die Punkte $2, 3, \ldots N$ umläuft. Die Funktion in (3.141) hat einen zweifachen Pol bei $s = 1$ und einfache Pole bei $s = 1 - \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Den Hauptterm liefert das Residuum bei $s = 1$. Mit den beiden Entwicklungen

$$\begin{aligned} 1 - 2^{1-s} &= 1 - 1 + (s-1)\ln 2 - (s-1)^2\frac{\ln^2 2}{2} + O\left((s-1)^3\right) \\ &= (s-1)\ln 2 - (s-1)^2\frac{\ln^2 2}{2} + O\left((s-1)^3\right) \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&(s-2)\cdots(s-N) = (s-1-1)\cdots(s-1-N+1) = \\
&= (-1)^{N-1}(N-1)! - (s-1)\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)(-2)\cdots(-N+1)}{k} + O\left((s-1)^2\right) = \\
&\qquad = (-1)^{N-1}(N-1)! - (s-1)(-1)^{N-1}(N-1)!H_{N-1} + O\left((s-1)^2\right)
\end{aligned}
$$

erhält man schließlich die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
&\frac{N!}{(1-2^{1-s})(s-1)\cdots(s-N)} = \\
&= \frac{N}{(s-1)^2}\frac{1}{\ln 2(-1)^{N-1} + \left((-1)^N\frac{\ln^2 2}{2} + (-1)^N H_{N-1}\ln 2\right)(s-1) + O\left((s-1)^2\right)} = \\
&\qquad = \frac{N}{(s-1)^2}\left(\frac{(-1)^{N-1}}{\ln 2} - \frac{(-1)^N\frac{\ln^2 2}{2} + (-1)^N H_{N-1}\ln 2}{\ln^2 2}(s-1) + O\left((s-1)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

woraus man das Residuum bei $s = 1$ leicht ablesen kann, nämlich

$$
(-1)^{N-1}N\left(\frac{1}{2} + \frac{H_{N-1}}{\ln 2}\right).
$$

Daher erhält man asymptotisch

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^k k}{1-2^{1-k}} &\sim (-1)^{N+1}(-1)^{N-1}N\left(\frac{1}{2} + \frac{H_{N-1}}{\ln 2}\right) \\
&\sim N \operatorname{ld} N + N\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2}\right).
\end{aligned}
$$

Die bis jetzt vernachlässigten Terme, die von den Residuen an den Stellen $s = 1 - \frac{2\pi i k}{\ln 2}$ kommen, liefern zwar komplexe Terme, tragen aber zum Hauptterm nichts mehr bei. Sie spielen erst beim linearen Term wieder eine Rolle. Sei ab nun $\chi_k = \frac{2\pi i k}{\ln 2}$. Man entwickelt den ersten Nenner in (3.141) und erhält

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-2^{1-s}} &= \frac{1}{1-2^{-(s-1+\chi_k)+\chi_k}} = \frac{1}{1-e^{-(s-1+\chi_k)\ln 2}2^{\chi_k}} \\
&= \frac{1}{1-\Big(1-(s-1+\chi_k)\ln 2 + O\big((s-1+\chi_k)^2\big)\Big)} \\
&= \frac{1}{(s-1+\chi_k)\ln 2}\big(1 + O(s-1+\chi_k)\big).
\end{aligned}
$$

Gleichung (3.141) lässt sich dann folgendermaßen schreiben

$$
\begin{aligned}
(-1)^{N+1} \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \operatorname{res}\left(\frac{1}{(s-1+\chi_k)\ln 2}\frac{N!}{(s-1)\cdots(s-N)}\right) = \\
-\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \operatorname{res}\left(\frac{1}{(s-1+\chi_k)\ln 2}\frac{\Gamma(N+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(N+1-s)}\right) = \\
\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2}\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+\chi_k)} = \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2} e^{(1-\chi_k)\ln N + O\left(\frac{1}{N}\right)}. \qquad (3.142)
\end{aligned}
$$

Für den letzten Schritt in (3.142) benutzt man die Gleichung (2.6) und die folgende Überlegung

$$
\begin{aligned}
\ln\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+\chi_k)} &= \ln\Gamma(N+1) - \ln\Gamma(N+\chi_k) \\
&= (N+1)\ln(N+1) - (N+1) - \frac{1}{2}\ln(N+1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&\quad - (N+\chi_k)\ln(N+\chi_k) + (N+\chi_k) + \frac{1}{2}\ln(N+\chi_k) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}
$$

woraus nach einfachen Rechenschritten

$$
\begin{aligned}
\ln\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+\chi_k)} &= (1-\chi_k)\ln N + N\left(\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) - \ln\left(1+\frac{\chi_k}{N}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) + \ln\left(1+\frac{\chi_k}{N}\right)\right) + \chi_k - 1 \\
&= (1-\chi_k)\ln N + O\left(\frac{1}{N}\right).
\end{aligned}
$$

folgt. Nun lässt sich (3.142) weiter vereinfachen zu

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2} e^{(1-\chi_k)\ln N + O\left(\frac{1}{N}\right)} &= \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} i\frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2} e^{\ln N} e^{\chi_k \ln N}\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\
&= N\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2} e^{\frac{2\pi i k}{\ln 2}\ln N} + O(1) \\
&= N\underbrace{\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\in\mathbb{Z}}} \frac{\Gamma(\chi_k)}{\ln 2} e^{2\pi i \operatorname{ld} N}}_{=:\delta(\operatorname{ld} N)} + O(1).
\end{aligned}
$$

Die Summe ist eine Fourierreihe in $\operatorname{ld} N$ mit Periode 1. Schließlich erhält man zusammengefasst

$$\sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k k}{1-2^{1-k}} = N \operatorname{ld} N + N \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2} + \delta(\operatorname{ld} N) \right) + O(1).$$

□

Satz 3.67 *Für die externe Pfadlänge eines Tries mit N Schlüsseln gilt asymptotisch*

$$\mathbb{V}\xi_N = N \left(\frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6 \log^2 2} + \sigma(\operatorname{ld} N) \right),$$

wobei σ eine periodische Funktion mit kleiner Amplitude ist.

Beweis. Siehe [KP86]. □

3.7.2 Mittlere externe Pfadlänge der Patricia-Tries

Definition 3.68 *Ein* Patricia-Trie *ist ein Trie, bei dem lineare Listen zu einem Knoten kollabieren.*

Satz 3.69 *Die durchschnittliche externe Pfadlänge eines Patricia-Tries mit N Schlüssel ist um N kleiner als die der normalen Tries. Also*

$$\mathbb{E}\xi_N = N \operatorname{ld} N + N \left(-\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\ln 2} + \delta(\operatorname{ld} N) \right) + O(1)$$

Beweis. Analog zu (3.138) gilt die Rekursion

$$L_N^{[P]} = N \left(1 - \frac{1}{2^{N-1}} \right) + \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left(L_k^{[P]} + L_{N-k}^{[P]} \right) \text{ für } N \geq 1. \quad (3.143)$$

mit dem Anfangswert $L_0^{[P]} = 0$. Führt man in (3.143) eine Multiplikation mit $\frac{z^N}{N!}$ durch und summiert dann über $N \geq 1$, erhält man

$$\begin{aligned} L^{[P]}(z) &= \sum_{N \geq 1} N \left(1 - \frac{1}{2^{N-1}} \right) \frac{z^N}{N!} + \sum_{N \geq 1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^N N!} \binom{N}{k} \left(L_k^{[P]} + L_{N-k}^{[P]} \right) \\ &= z \left(e^z - e^{\frac{z}{2}} \right) + 2 \sum_{N \geq 1} \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left(\frac{z}{2^N} \right)^N \frac{L_k^{[P]}}{N!} \\ &= z \left(e^z - e^{\frac{z}{2}} \right) + 2 L^{[P]} \left(\frac{z}{2} \right) e^{\frac{z}{2}}. \end{aligned}$$

Transformiert man wieder $\widetilde{L^{[P]}}(z) = e^{-z} L^{[P]}(z)$, so gilt

$$\widetilde{L^{[P]}}(z) = z\left(1 - e^{-\frac{z}{2}}\right) + 2\widetilde{L^{[P]}}\left(\frac{z}{2}\right),$$

woraus man

$$\widetilde{L_N^{[P]}} = \frac{(-1)^N N}{2^{N-1} - 1}$$

ablesen kann. Daraus erhält man wieder die Größe

$$L_N^{[P]} = \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k k}{2^{k-1} - 1} \text{ für } N \geq 2. \tag{3.144}$$

Subtrahiert man (3.144) von (3.140), bekommt man

$$\begin{aligned} L_N - L_N^{[P]} &= \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k k}{1 - 2^{1-k}} - \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k k}{2^{k-1} - 1} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k k}{1 - 2^{1-k}} - \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k \frac{k}{2^{k-1}}}{1 - 2^{1-k}} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k k = N. \end{aligned}$$

□

Satz 3.70 *Für die externe Pfadlänge von Patricia-Tries gilt asymptotisch*

$$\mathbb{V}\xi_N = N\left(\frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6\log^2 2} - \frac{2}{\log 2} \log \prod_{\lambda \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2^\lambda}\right) + \sigma(\operatorname{ld} N)\right),$$

wobei σ eine periodische Funktion mit kleiner Amplitude ist.

Beweis. Siehe [KP86]. □

3.7.3 Höhe der Tries

Satz 3.71 *Für die Zufallsvariable H_n der Höhe von Tries, die aus n Schlüsseln bestehen gilt*

$$\mathbb{E}H_n = 2\operatorname{ld} n + O(1) \text{ für } n \to \infty$$

und

$$\mathbb{E}|H_n - \mathbb{E}H_n|^L = O(1) \text{ für } n \to \infty,$$

die zentralen Momente sind also beschränkt.

Beweis. Bezeichne $h_{n,k}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Trie bestehend aus n Schlüsseln eine Höhe kleiner gleich k hat. Es gilt dann die Rekursion

$$h_{n,k} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_{i,k-1} h_{n-i,k-1} \tag{3.145}$$

mit den Anfangswerten $h_{n,0} = \delta_{0,1}^n$. Definiert man die erzeugende Funktion

$$G_k(x) := \sum_{n \geq 0} h_{n,k} \frac{x^n}{n!}, \tag{3.146}$$

dann überträgt sich die Rekursion (3.145) folgendermaßen auf die Funktionen $G_k(x)$:

$$\begin{aligned} G_{k+1}(x) &= \sum_{n \geq 0} h_{n,k+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_{i,k} h_{n-i,k} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{n} h_{i,k} \frac{x^i}{2^i i!} \cdot h_{n-i,k} \frac{x^{n-i}}{2^{n-i}(n-i)!} \\ &= G_k(x)^2 \end{aligned}$$

mit $G_0(x) = 1 + x$. Daraus ergibt sich durch Induktion als explizite Lösung der Funktionen $G_k(x)$ die Formel

$$G_k(x) = \left(1 + \frac{x}{2^k}\right)^{2^k}.$$

Betrachtet man nun ein Entwicklung von $G_k(x)$, so erhält man

$$G_k(x) = e^{2^k \ln\left(1 + \frac{x}{2^k}\right)} = e^{x - \frac{x^2}{2^{k+1}} + O\left(\frac{x^3}{2^{2k}}\right)}.$$

Nun definiert man die Zahlen n_k als Lösung von $G_k(n_k) = e^{n_k - 1}$. Asymptotisch gilt in dem Fall

$$n_k = 2^{\frac{k+1}{2}} + O(1). \tag{3.147}$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \sqrt{2}. \tag{3.148}$$

Man führt die Funktion

$$\widetilde{G}_k(x) := e^{\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)x} \tag{3.149}$$

ein, mit deren Hilfe man obere und untere Schranken für $G_k(x)$ erhält. Dazu zeigt man, dass die Differenz

$$D_{k,l}(x) := \widetilde{G}_k(x) - G_l(x) \tag{3.150}$$

auf der positiven reellen Achse genau eine Nullstelle besitzt. Beginnend mit $l = 0$ gilt einerseits $D'_{k,0}(0) = -\frac{1}{n_k} - 1 < 0$, und andererseits wächst $\widetilde{G}_k(x)$ exponentiell im Vergleich zum Polynom $G_0(x) = 1 + x$. Daher gibt es genau eine Nullstelle $x_{k,0} > 0$. Nun gilt weiters

$$D_{k,l+1} = \left(\widetilde{G}_k\left(\frac{x}{2}\right) + G_l\left(\frac{x}{2}\right)\right) D_{k,l}\left(\frac{x}{2}\right), \tag{3.151}$$

was durch die Definitionen (3.146) und (3.149) gerechtfertigt wird. Da sowohl $\widetilde{G}_k(x)$ als auch $G_l(x)$ monoton wachsend sind, folgt aus (3.151), dass es genau eine Nullstelle $x_{k,l+1} = 2x_{k,l}$ von (3.150) gibt. Nun beobachtet man, dass $D_{k,k}(n_k) = 0$ gilt, die Nullstellen also $x_{k,k} = n_k$ erfüllen. Daraus folgt für $0 < x < n_k$, dass $D_{k,k}(x) < 0$ gilt, und für $x > n_k$, dass $D_{k,k}(x) > 0$. Formuliert man dies anders, so erhält man

$$\widetilde{G}_k(x) \leq G_k(x) \text{ für } 0 < x \leq n_k \text{ und} \tag{3.152}$$

$$\widetilde{G}_k(x) \geq G_k(x) \text{ für } n_k < x. \tag{3.153}$$

Aus $h_{n,k} \geq h_{n+1,k}$ folgert man analog zu (3.106)

$$G_k(n) \geq h_{n,k} e^n \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

woraus man mit (3.153)

$$h_{n,k} \leq C e^{-\frac{n}{n_k}} \tag{3.154}$$

ableiten kann. Analog zu (3.107) gilt mit $h_{n,k} \geq h_{n+1,k}$

$$e^n - G_k(n) \geq (1 - h_{n,k}) e^n \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

und wegen (3.152) auch

$$1 - h_{n,k} \leq C \frac{n}{n_k}. \tag{3.155}$$

Sei $k_0(n) := \max\{k : n_k \leq n\}$. Aus (3.148) folgt, dass es ein $\eta > 0$ gibt, sodass $n_{k+1} \geq (1 + \eta) n_k$ gilt. Für k mit $n \geq n_k$ gilt daher

$$\frac{n}{n_k} \geq (1 + \eta)^{k_0(n) - k - 1} \tag{3.156}$$

und für k mit $n \leq n_k$ gilt

$$\frac{n}{n_k} \leq (1+\eta)^{k-k_0(n)}. \tag{3.157}$$

Für ein festes $L \geq 0$ und ein $\delta > 0$ gilt wegen (3.154) und (3.156)

$$\begin{aligned}\sum_{k:n\geq n_k} h_{n,k}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L &\ll \sum_{k\leq k_0(n)} e^{-(1+\eta)^{k_0(n)-k-1}}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L \\ &\leq \sum_{l\geq 0} e^{-(1+\eta)^{l-1}}(l+\delta)^L = O\left(1\right). \end{aligned} \tag{3.158}$$

Genauso sieht man mit (3.155) und (3.157)

$$\begin{aligned}\sum_{k:n\leq n_k} (1-h_{n,k})\big(k-k_0(n)+\delta\big)^L &\ll \sum_{k\geq k_0(n)} (1+\eta)^{k-k_0(n)}\big(k_0(n)-k+\delta\big)^L \\ &\leq \sum_{l\geq 0} \frac{(l+\delta)^L}{(1+\eta)^l} = O\left(1\right). \end{aligned} \tag{3.159}$$

Indem man nun $L = 0$ setzt, erhält man aus (3.158) und (3.159) für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}H_n &= \sum_{k\geq 0}(1-h_{n,k}) = \sum_{k:n\geq n_k}(1-h_{n,k}) + \sum_{k:n<n_k} h_{n,k}(1-h_{n,k}) \\ &= \max\{k : n_k \leq n\} + O\left(1\right) - \sum_{k:n\geq n_k} h_{n,k} + \sum_{k:n<n_k}(1-h_{n,k}) \\ &= \max\{k : n_k \leq n\} + O\left(1\right) = k_0(n) + O\left(1\right).\end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3.147)

$$\mathbb{E}H_n = 2\,\mathrm{ld}\,n + O\left(1\right).$$

Mit $L \geq 1$ erhält man mit $\delta = |\mathbb{E}H_n - k_0(n)| + 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|H_n - \mathbb{E}H_n|^L &\ll \sum_{k\leq \mathbb{E}h_n} h_{n,k}(\mathbb{E}h_n - k + 1)^{L-1} + \sum_{k\geq \mathbb{E}H_n} h_{n,k}(k - \mathbb{E}H_n + 1)^{L-1} \\ &\ll \sum_{k\leq \mathbb{E}H_n} h_{n,k}(k_0(n) - k + \delta)^{L-1} \\ &\quad + \sum_{k\geq \mathbb{E}H_n} h_{n,k}(k - k_0(n)_n + \delta)^{L-1} + O\left(1\right) \\ &= O\left(1\right).\end{aligned}$$

□

3.8 Weitere Methoden zur Untersuchung von Parametern in Bäumen

Bisher wurden in dieser Arbeit hauptsächlich erzeugende Funktionen verwendet, um gewisse Informationen über Bäume zu erhalten. Hier soll eine weitere, prinzipiell andere Methode vorgestellt werden, mit deren Hilfe man ebenfalls Parameter untersuchen kann.

Zunächst sei der Begriff der Traversierung kurz erklärt. Wenn ein Computerprogramm alle Knoten eines Baumes besuchen soll, so gibt es verschiedene Strategien dies systematisch durchzuführen. Meistens wird die sogenannte *depth first order* verwendet, bei welcher zuerst ein Kindknoten besucht wird, bevor man die Nachbarknoten betrachtet. Ein Beispiel findet sich in Abbildung 3.3. Schreibt man nun die Höhe der Knoten, die man besucht, mit, so

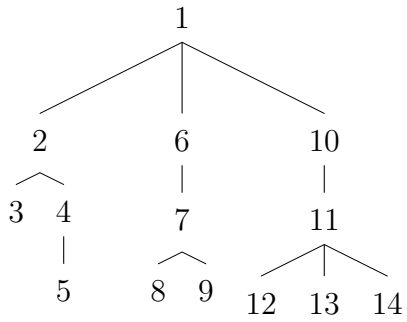

Abbildung 3.3: Traversierungsreihenfolge eines Baumes in depth first order.

kann man daraus einen Gitterpfad konstruieren. Der entsprechende Gitterpfad $x(i)$ des Baumes in Abbildung 3.3 ist in Abbildung 3.4 wiedergegeben.

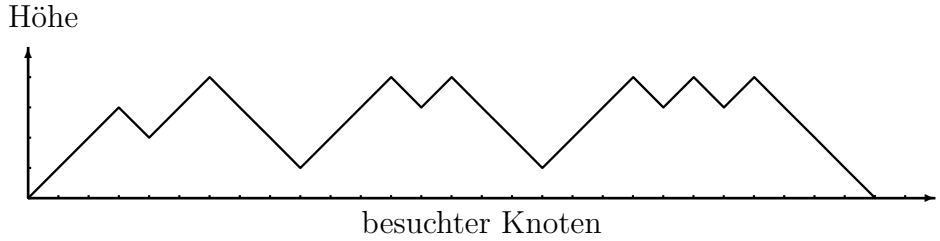

Abbildung 3.4: Gitterpfad der Traversierung des Baumes aus Abbildung 3.3.

Gibt man den Kanten in einem Baum die Eigenschaft einer Länge, dann hat man eine gewisse Metrik im Baum. Der Abstand zweier Knoten ist dann die Länge des Pfades, der sie verbindet. Normiert man diese Länge der Kanten mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$, wobei n die Anzahl der Knoten im Baum bezeichnet, dann konvergieren die Bäume für $n \to \infty$ gegen einen ‚Grenzbaum', dessen Traversierung eine Brown'sche Exkursion $e(t)$ liefert.

Man definiert nun einen Prozess, der die skalierte Tiefensuche beschreibt, durch

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} X\big([2nt]\big) \text{ für } 0 \leq t \leq 1,$$

wobei $X(i)$ die $x(i)$ entsprechende Zufallsfolge ist. Damit lässt sich folgendes zeigen (für die Definition der Funktion ϕ siehe Kap. 3.4):

Satz 3.72 ([Ald91b]) *Für den Prozess der Tiefensuche X_t^n gilt für $n \to \infty$ folgende Konvergenz*

$$(X_t^n; 0 \leq t \leq 1) \xrightarrow{d} \left(\frac{2}{\sigma} e(t); 0 \leq t \leq 1\right),$$

wobei $\sigma = \frac{\tau^2 \phi''(\tau)}{\phi(\tau)}$ gilt mit $\phi(y)$ die erzeugende Funktion der erlaubten Knotengrade in einfach erzeugten Bäumen *und τ Lösung der Gleichung $\tau\phi'(\tau) = \phi(\tau)$.*

Ein zweiter interessanter Parameter ist das Höhenprofil $h(j)$. Es beschreibt, wie viele Knoten eine Entfernung j von der Wurzel haben. Man definiert daher den Prozess

$$H_t^n = \frac{1}{n} \sum_{j \leq \sqrt{n}t} H(j) \text{ für } t \geq 0,$$

wobei $H(j)$ die $h(j)$ entsprechende Zufallsfolge ist. Auch hier erhält man als Folgerung aus Satz 3.72 ein Konvergenzresultat.

Satz 3.73 *Für den Prozess des Höhenprofils H_t^n gilt für $n \to \infty$*

$$(H_t^n; t \geq 0) \xrightarrow{d} \left(H_{\sigma \frac{t}{2}}; t \geq 0\right)$$

mit

$$H_s = \int_0^1 1_{(e(t) \leq s)}\, dt.$$

Betrachtet man das Maximum G_n bei dem Tiefensucheprozess, so stellt es die Höhe des Baums dar, der traversiert wird. Es gilt daher

Satz 3.74 *Für die Höhe G_n eines einfach erzeugten Baumes gilt für $n \to \infty$*

$$\frac{G_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \frac{2}{\sigma} e^*,$$

wobei

$$e^* = \sup_{0 \le t \le 1} e(t).$$

Von e^* kennt man sowohl den Erwartungswert

$$\mathbb{E}e^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

als auch die Verteilung

$$\mathbb{P}(e^* \le x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(4x^2k^2 - 1)e^{-2x^2k^2}$$

Die Summe $\sum_j jH(j)$ beschreibt schließlich die Pfadlänge des Baumes. Wieder erhält man als Folgerung aus Satz 3.72 die Konvergenz in der Verteilung.

Satz 3.75 *Für die Pfadlänge $\sum_j jH(j)$ in einfach erzeugten Bäumen gilt*

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_j jH(j) \xrightarrow{d} \frac{2}{\sigma} I,$$

wobei

$$I = \int_0^1 e(t)\, dt.$$

Wegen der Arbeit [DM] lassen sich die Konvergenzen der Verteilungen auch auf die einzelnen Momente übertragen, und man gewinnt die Sätze aus Kapitel 3.4 wieder.

Weitere Parameter und eine detaillierter Übersicht findet man in [Ald91b], [Ald91a] und [Ald93].

Danksagung

Ich möchte mich auf diesem Weg bei Herrn Prof. Drmota bedanken. Er gab mir einerseits die nötige Freiheit sowohl bei der Themenwahl, als auch bei der Vertiefung in einzelne Teilgebiete. Auf der anderen Seite stand er stets zur Verfügung, wenn ich einige erklärende Worte benötigte.

Weiters möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken. Ohne sie hätte ich dieses Studium nicht in dieser Weise bewältigen können. Sie gaben mir die finanzielle Möglichkeit und die moralische Unterstützung, die ich während meines Studiums benötigte.

Mein Dank gilt auch vielen Kollegen und Freunden, die mit mir das Studium bestritten haben. Namentlich erwähnt seien meine Freunde Georg Gutenbrunner und Alexander Paul, denen ich für ihre Hilfe und Unterstützung dankbar bin.

Schließlich bin ich meinen Freunden Angelika Friedrich, Georg Gutenbrunner, Alexander Paul und Gerhard Westphal für das Korrekturlesen dankbar.

Literaturverzeichnis

[Ald91a] David Aldous. The continuum random tree I. *Ann. Probab.*, 19:1–28, 1991.

[Ald91b] David Aldous. The continuum random tree II: An overview. In M.T. Barlow and N.H. Bingham, editors, *Stochastic Analysis*, pages 23–70. Cambridge University Press, 1991.

[Ald93] David Aldous. The continuum random tree III. *Ann. Probab.*, 21:248–289, 1993.

[AS88] David Aldous and Paul Schields. A diffusion limit for a class of randomly-growing binary trees. *Prob. Th. Rel. Fields*, 79:509–524, 1988.

[dBKR72] N. G. de Bruijn, D. E. Knuth, and S. O. Rice. The average height of planted trees. In Ronald C. Read, editor, *Graph Theory and Computing*, pages 15–22. Academic Press, New York, 1972.

[DM] Michael Drmota and Jean-François Marckert. Reinforced weak convergence of stochastic processes. *Statistics Probab. Letters.* submitted.

[DR95] L. Devroye and B. Reed. On the variance of the height of random binary search trees. *SIAM J. Comput.*, 24:1157–1162, 1995.

[Drm02a] Michael Drmota. The variance of the height of binary search trees. *Theoretical Computer Science*, 270:913–919, 2002.

[Drm02b] Michael Drmota. The variance of the height of digital search trees. *Acta Informatica*, 38:261–276, 2002.

[Fla83] Phillipe Flajolet. On the performance evaluation of extendible hashing and trie searching. *Acta Inf.*, 20:345–369, 1983.

[FO82] Philippe Flajolet and Andrew Odlyzko. The average height of binary trees and other simple trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 25:171–213, 1982.

[FO90] Phillipe Flajolet and Andrew Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3:216–240, 1990.

[FS86] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. Digital search trees revisited. *SIAM J. Comput.*, 15(3):748–767, 1986.

[Heu94] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* B.G. Teubner, Stuttgart, eleventh edition, 1994.

[Knu73] Donald E. Knuth. Sorting and searching. In *The Art of Computer Programming*, volume 3. Addison Wesley, Reading, MA, 1973.

[Knu97] Donald E. Knuth. Fundamental algorithms. In *The Art of Computer Programming*, volume 1. Addison Wesley, Reading, MA, third edition, 1997.

[KP86] Peter Kirschenhofer and Helmut Prodinger. Some further results on digital search trees. In Laurent Kott, editor, *Automata, Languages and Programming*, volume 226, pages 177–185, Berlin, July 1986. Springer-Verlag. ICALP '86, Rennes.

[KS00] Charles Knessl and Wojciech Szpankowski. Asymptotic behaviour of the height in a digital search tree and the longest phrase of the lempel-ziv scheme. *SIAM J. Computing*, 30:923–964, 2000.

[MM78] A. Meir and J. W. Moon. On the altitude of nodes in random trees. *Can. J. Math.*, 30(5):997–1015, 1978.

[Ree] B. Reed. The height of a random binary search tree. *J. Assoc. Comput. Mach.* submitted for publication.

[Rem95] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie*, volume 2. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1995.

[SF96] Robert Sedgewick and Philippe Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms.* Addison Wesley, Reading, MA, 1996.

[Tak93] Lajos Takács. The asymptotic distribution of the total heights of random rooted trees. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 57:613–625, 1993.