

DISSERTATION

Kongruenzen und symmetrische Differenzen auf orthomodularen Verbänden

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften
unter der Leitung von

Univ.Prof. Dr. Dietmar Dorninger
Institut für Algebra und Diskrete Mathematik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Technisch Naturwissenschaftliche Fakultät

von

Dipl. Ing. Gerhard Dorfer

Matrikelnummer 8726773
A-1160 Wien, Odoakergasse 10-18/5/16

Wien, im Oktober 1998

KONGRUENZEN
UND
SYMMETRISCHE DIFFERENZEN
AUF
ORTHOMODULAREN VERBÄNDEN

Kurzfassung

Orthomodulare Verbände spielen in der axiomatischen Quantenmechanik als sogenannte Quantenlogiken eine bedeutende Rolle. Neben dem allgemeinen algebraischen Interesse hat vor allem dieser Aspekt die Untersuchung dieser Struktur entscheidend vorangetrieben. Monographien wie [Ka], [PP] und [Be] fassen die wesentlichen Entwicklungen auf diesem Gebiet in den letzten Jahrzehnten vom algebraischen Standpunkt aus zusammen.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als ein Beitrag zur Theorie orthomodularer Verbände und ist von algebraischer Natur. Aufbauend auf bekannte Ergebnisse werden Kongruenzen eingehend untersucht und der Themenkomplex der symmetrischen Differenz behandelt. Die erhaltenen Ergebnisse werden immer wieder auf Unterschiede bzw. Analogien zu verwandten Strukturen wie Booleschen Algebren und Orthoverbänden ausgelotet.

Die Arbeit gliedert sich in 3 Kapitel. Im ersten Kapitel werden die im weiteren benötigten Begriffe eingeführt und Grundlegendes aus der Theorie der orthomodularen Verbände zusammengestellt. Darüber hinaus dient dieser Abschnitt dazu, die Notation vorzustellen und gewisse Abkürzungen und Schreibweisen zu erklären.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit Kongruenzrelationen auf orthomodularen Verbänden. Nachdem der bekannte Zusammenhang zwischen Kongruenzen und den sogenannten p -Idealen, die genau den Kongruenzkernen entsprechen, dargestellt wird, übertragen wir im Unterabschnitt 2.2 Infimum und Supremum aus dem Kongruenzverband auf p -Ideale, wobei sich mit Hilfe des Komplexproduktes sehr einfache Beschreibungen für diese Operationen auf den p -Idealen ergeben. Im Anschluß wird der Kongruenzverband im Hinblick auf Komplemente untersucht. Dabei gelingt über die p -Ideale eine explizite Beschreibung des Pseudokomplementes und des relativen Pseudokomplementes, was unter anderem auch einen einfachen Beweis des bekannten Satzes liefert, der besagt, daß genau die Kongruenzen mit einem Hauptideal als Kongruenzkern ein Komplement im Kongruenzverband besitzen. Aufbauend auf diese Ergebnisse werden einige Resultate betreffend subdirekter und direkter Irreduzibilität eines orthomodularen Verbandes bewiesen. Einige Beispiele runden diese Betrachtungen ab.

In 2.3 werden die einzelnen Kongruenzklassen näher betrachtet und Darstellungen dieser Klassen mit Hilfe des zugehörigen p -Ideales angegeben. Der Fall, daß das p -Ideal ein Hauptideal ist, hebt sich hierbei wesentlich vom allgemeinen Fall ab. Weiters wird ausgehend von einer beliebigen Kongruenzklasse das zugehörige

p-Ideal beschrieben und charakterisiert, welche Teilmengen als Kongruenzklassen auftreten können.

Diese Ergebnisse werden dann in 2.4 dazu benützt, die Kongruenzregularität, -vertauschbarkeit und -uniformität orthomodularer Verbände zu beweisen, wobei die ersten beiden Eigenschaften bereits für etwas allgemeinere Strukturen auf anderem Wege hergeleitet wurden und daher bekannt sind. Schließlich wird an Hand von Beispielen gezeigt, daß Orthoverbände im allgemeinen keine der eben angesprochenen Eigenschaften besitzen.

Im dritten Kapitel werden symmetrische Differenzen auf orthomodularen Verbänden untersucht. Ausgangspunkt ist die Frage, inwieferne die in Booleschen Algebren wohlstudierte Operation der symmetrischen Differenz auf orthomodularen Verbänden definiert werden kann. Es stellt sich heraus, daß dies durch Termfunktionen auf 6 verschiedene Arten möglich ist. Es sind dies neben der konjunktiven und disjunktiven Normalform, im folgenden mit $\triangle$ und ∇ bezeichnet, 4 im allgemeinen nicht kommutative Termfunktionen, die in einfacher Weise ineinander umgeformt werden können.

In den Unterabschnitten 3.2 und 3.3 zeigt sich, daß diese symmetrischen Differenzen ein stark unterschiedliches Verhalten aufweisen. Während $\triangle$ und ∇ weder regulär noch invertierbar sind, erweisen sich die nicht kommutativen Formen als einseitig regulär und einseitig invertierbar. Weiters wird bewiesen, daß in der Varietät der orthomodularen Verbände keine beidseitig regulären bzw. beidseitig invertierbaren Termfunktionen existieren. Ist eine der symmetrischen Differenzen regulär oder invertierbar, so liegt notwendigerweise eine Boolesche Algebra vor. In der Folge werden auch Bedingungen für die Links- bzw. Rechtskürzbarkeit angegeben und sämtliche Lösungen der Gleichungen, die bei der Invertierbarkeit auftreten für jede symmetrische Differenz angegeben.

Die Assoziativität für die symmetrischen Differenzen wird in 3.4 untersucht. Auch hier erhält man, daß eine symmetrische Differenz nur in einer Booleschen Algebra dem Assoziativgesetz genügt. Des weiteren werden Bedingungen angegeben, die die Anwendung dieses Gesetzes gestatten, wobei auch hier die Unterschiede zwischen den einzelnen symmetrischen Differenzen deutlich werden.

In 3.5 wird nachgeprüft, ob ein Distributivgesetz für eine Schnittoperation bzgl. einer symmetrischen Differenz besteht. Hier werden nicht nur alle symmetrischen Differenzen sondern auch alle – in einem näher präzisierbaren Sinne – möglichen Schnittoperationen betrachtet. Es stellt sich heraus, daß in einem orthomodularen Verband, der nicht schon eine Boolesche Algebra darstellt, für keine Kombination aus Schnittoperation und symmetrischer Differenz ein Distributivgesetz allgemeine Gültigkeit besitzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4
2 Kongruenzrelationen auf orthomodularen Verbänden	7
2.1 P-Ideale	7
2.2 Der Verband der p-Ideale	8
2.3 Zusammenhang zwischen den einzelnen Kongruenzklassen	17
2.4 Kongruenzvertauschbarkeit, -regularität, -uniformität	23
3 Die symmetrische Differenz auf orthomodularen Verbänden	28
3.1 Verschiedene Ausprägungen der symmetrischen Differenz	28
3.2 Regularität der symmetrischen Differenzen	32
3.3 Invertierbarkeit der symmetrischen Differenzen	36
3.4 Assoziativität der symmetrischen Differenzen	42
3.5 Verschiedene Schnittoperationen und Distributivität	46
Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Abschnitt werden einige der in den folgenden Kapiteln ständig verwendeten Begriffe und Notationen eingeführt. Vielfach erklären wir neue Schreibweisen erst bzw. wiederholen bekannte Begriffsbildungen nochmals an der Stelle, an der sie tatsächlich verwendet werden.

Unter einer Algebra $\mathcal{A}$ verstehen wir, wie in der universalen Algebra üblich, eine Menge A , Trägermenge von $\mathcal{A}$ genannt, mit einer Familie von endlichstelligen Operationen auf A . Eine exakte Definition wird z.B. in Definition 1.1.3 in [Ih] gegeben. Kalligraphische Buchstaben wie $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ bezeichnen stets Algebren, die zugehörigen Trägermengen lauten dann immer L , B , A usw. Wir schreiben z.B. $\mathcal{A} = \langle A, +, 0 \rangle$ für eine Algebra $\mathcal{A}$ mit Trägermenge A und Operationen $+$ und 0 .

Ein orthomodularer Verband ist eine Algebra $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Algebra $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ ist ein Verband mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1 . Die zugehörige Verbandsordnung wird mit $\leq$ bezeichnet.
2. Die einstellige Operation $'$ ist ein Orthokomplement, d.h.:

$$x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1, \quad x \leq y \Rightarrow y' \leq x', \quad x'' = x$$

3. Es gilt das orthomodulare Gesetz:

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad y = x \vee (y \wedge x')$$

Sind nur die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, so liegt ein Orthoverband vor. Die Notation betreffend werden wir uns weitestgehend an der Standardmonographie [Ka] orientieren, in der alle verwendeten Definitionen und Sätze aus der Theorie der orthomodularen Verbände enthalten sind, sofern nicht ein anderes Zitat angegeben ist. $\mathcal{L}$ bezeichnet immer einen orthomodularen Verband $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, wenn nicht anderes ausdrücklich erwähnt wird.

Die Symbole $\wedge$, $\vee$ und $'$ werden in der Folge auch zur Bezeichnung verschiedener anderer Operationen verwendet. Dies wird an den entsprechenden Stellen noch genauer ausgeführt (siehe z.B. Beginn von Unterabschnitt 2.2). Die Operationssymbole $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ bleiben den mengentheoretischen Operationen Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz vorbehalten.

C bezeichnet die Kommutatorrelation in einem orthomodularen Verband, d.h. es gilt $aCb \Leftrightarrow a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b')$. Ein paar einfache Eigenschaften für die Kommutatorrelation, die an vielen Stellen verwendet werden, lauten:

- $aCb \Leftrightarrow bCa \Leftrightarrow aCb'$,
- $a \leq b$ oder $a \leq b'$ impliziert aCb ,
- der Kommutator eines Elementes a (das sind alle Elemente, die mit a kommutieren) bildet eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{L}$.

Das Zentrum von $\mathcal{L}$ besteht aus jenen Elementen, die mit allen Elementen von L kommutieren und wird mit $C(\mathcal{L})$ bezeichnet. $C(\mathcal{L})$ bildet eine vollständige Boolesche Unteralgebra von $\mathcal{L}$.

Der Satz von Foulis und Holland (siehe z.B. Satz 1.3.5 in [Ka]) besagt, daß der von den Elementen $a, b, c \in L$ erzeugte Unterverband von $\mathcal{L}$ distributiv ist, sofern eines dieser drei Elemente mit den beiden übrigen kommutiert. Dieser Satz stellt das wesentliche Rechenhilfsmittel dar und wird praktisch in jeder Rechnung verwendet. Um die Nachvollziehbarkeit bei etwas komplizierteren Umformungen zu erleichtern, wurde folgende Schreibweise eingeführt: Wenn ein Element in einer Rechnung unterstrichen wird, so bedeutet dies, daß dieses Element mit zwei weiteren Elementen (die nachfolgen oder vorangegangen sind) kommutiert und daß in der nächsten Umformung das Distributivgesetz auf Grundlage des Satzes von Foulis und Holland angewendet wird. Wir geben dazu ein Beispiel an:

$$(a \wedge b) \vee \underline{c} \vee (d \wedge e) = (a \wedge b) \vee ((c \vee d) \wedge (c \vee e)).$$

Die Voraussetzung dieser Umformung war cCd und cCe . Man kann also aus dem umgeformten Ausdruck ersehen, auf welche Elemente der Satz von Foulis und Holland angewendet wurde.

Unter einem Ideal I wird immer ein Verbandsideal verstanden, d.h. es hat die Eigenschaften

1. $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$,
2. $a \in I$ und $x \leq a \Rightarrow x \in I$.

Gilt die erste Eigenschaft nicht, so sprechen wir von einem Ordnungsideal.

Kapitel 2

Kongruenzrelationen auf orthomodularen Verbänden

2.1 P-Ideale

Einem bekannten Satz aus der Theorie der orthomodularen Verbände zu Folge (vgl. Satz 2.6.6 in [Ka] und [Fi]) besteht eine bijektive Beziehung zwischen der Menge der Kongruenzrelationen $\text{Con}(\mathcal{L})$ und gewissen Idealen eines orthomodularen Verbandes $\mathcal{L}$, den sogenannten p-Idealen von $\mathcal{L}$. Dabei heißt ein Ideal I in $\mathcal{L}$ ein p-Ideal, wenn es perspektiv abgeschlossen ist: Zwei Elemente $a, b \in L$ heißen zueinander perspektiv, in Zeichen $a \sim b$, wenn ein $c \in L$ existiert, für das gilt:

$$a \wedge c = b \wedge c = 0, \quad a \vee c = b \vee c = 1,$$

also a und b ein gemeinsames Komplement in L besitzen. Die Perspektivitätsrelation ist reflexiv und symmetrisch, i.a. aber nicht transitiv. Die transitive Hülle von $\sim$ wird mit $\approx$ bezeichnet und heißt Projektivitätsrelation. Ein p-Ideal I ist daher ein Ideal mit der Eigenschaft

$$a \in I, b \sim a \Rightarrow b \in I.$$

Der angesprochene Zusammenhang zwischen p-Idealen und Kongruenzrelationen sieht folgendermaßen aus (siehe Satz 2.6.6 in [Ka]):

Satz 2.1 1. Ist θ eine Kongruenzrelation, so ist $[0]\theta$ ein p-Ideal.

2. Ist I ein p -Ideal, so ist die Relation θ festgelegt durch

$$a\theta b \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \in I$$

eine Kongruenzrelation.

Die in 1. und 2. angegebenen Zuordnungen zwischen Kongruenzrelationen und p -Idealen sind zueinander invers.

Ein bekannter Satz zur Charakterisierung von p -Idealen lautet wie folgt (vgl. [Be], Satz V.4.2):

Satz 2.2 Sei I ein Ideal in $\mathcal{L}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. I ist ein p -Ideal,
2. für alle $i \in I$ und $x \in L$ gilt $x \wedge (i \vee x') \in I$,
3. für alle $i \in I$ und $x \in L$ gilt $(i \vee x) \wedge (i \vee x') \in I$.

2.2 Der Verband der p -Ideale

Es stellt sich die Frage: Wie übertragen sich die Operationen aus dem Kongruenzverband auf die zugehörigen p -Ideale? Die beiden nächsten Propositionen geben darüber Auskunft.

Zunächst noch eine Bemerkung zur Notation. Operationssymbole wie $\wedge$, $\vee$ usw. werden in der Folge zur Bezeichnung verschiedener Operationen eingesetzt:

1. Auf Elemente von L angewendet entsprechen sie den Operationen in $\mathcal{L}$.
2. Treten diese Symbole im Zusammenhang mit Teilmengen von L auf, so bezeichnen sie das Komplexprodukt. Sind z.B. $A, B \subseteq L$, so bezeichnet $A \vee B'$ die Menge $\{a \vee b' \mid a \in A, b \in B\}$.
3. Auch das Infimum und Supremum im Kongruenzverband wird mit $\wedge$ bzw. $\vee$ bezeichnet.

Da die Argumente in den angeführten Fällen jeweils verschieden sind, ist in jedem Fall klar, welche Operation gemeint ist.

Proposition 2.3 *Der mengentheoretische Durchschnitt von p -Idealen ist wieder ein p -Ideal, und es gilt: $I_1 \cap I_2 = I_1 \wedge I_2$.*

Beweis: Für $i \in I_1 \cap I_2$ gilt $i = i \wedge i \in I_1 \wedge I_2$, und umgekehrt gilt klarerweise für $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$, daß $i_1 \wedge i_2 \in I_1 \cap I_2$. Damit ist $I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$ und mit 2. von Satz 2.2 folgt die perspektive Abgeschlossenheit dieses Ideals sofort. $\square$

Überraschend einfach kann das Supremum angegeben werden:

Proposition 2.4 *Für zwei p -Ideale I_1 und I_2 ist $I_1 \vee I_2$ ein p -Ideal.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $I_1 \vee I_2$ ein Ideal ist: Es ist klar, daß $I_1 \vee I_2$ abgeschlossen bzgl. $\vee$ ist. Weiters gilt:

Ist $x \leq i_1 \vee i_2$ für $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$, so folgt

$$\underbrace{(x \wedge (i_1 \vee x'))}_{\in I_1} \vee \underbrace{(x \wedge (i_2 \vee x'))}_{\in I_2} = x \wedge ((i_1 \vee x') \vee (i_2 \vee x')) = x \wedge (i_1 \vee i_2 \vee x') = x,$$

also $x \in I_1 \vee I_2$ und folglich $I_1 \vee I_2$ ein Ideal.

$I_1 \vee I_2$ ist perspektiv abgeschlossen: Sei $y \in L, i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$, dann gilt:

$$y \wedge (i_1 \vee i_2 \vee y') = y \wedge ((i_1 \vee y') \vee (i_2 \vee y')) = (y \wedge (i_1 \vee y')) \vee (y \wedge (i_2 \vee y')) \in I_1 \vee I_2,$$

woraus nach Satz 2.2 die Abgeschlossenheit bzgl. Perspektivität folgt. $\square$

Bemerkung: Für die beiden symmetrischen Differenzen

$$x \triangle y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y'), \quad x \nabla y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

gilt auch:

$$I_1 \vee I_2 = I_1 \triangle I_2 = I_1 \nabla I_2$$

(die Symbole $\triangle$ und ∇ sind in der letzten Gleichung ebenfalls als Komplexprodukt zu verstehen).

Beweis: Für $x \perp y$ gilt, wie man leicht nachrechnet, $x \triangle y = x \nabla y = x \vee y$.

Sei $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$. Nach 3. von Satz 2.2 ist $(i_1 \vee i_2) \wedge (i_1 \vee i'_2) \in I_1$, weiters ist $i_2 \wedge i'_1 \in I_2$ und $(i_1 \vee i_2) \wedge (i_1 \vee i'_2) \perp i_2 \wedge i'_1$. Nach dem orthomodularen Gesetz gilt $(i_2 \wedge i'_1) \vee ((i_1 \vee i_2) \wedge (i_1 \vee i'_2)) = i_1 \vee i_2$. $\square$

Im folgenden bezeichne $I(\mathcal{L})$ die Menge der p -Ideale von $\mathcal{L}$. Da $I_1 \wedge I_2$ bzw. $I_1 \vee I_2$

offensichtlich das größtmögliche p-Ideal unter bzw. das kleinstmögliche über I_1 und I_2 darstellt, folgt unmittelbar:

Satz 2.5 *Der Kongruenzverband $\langle \text{Con}(\mathcal{L}), \wedge, \vee \rangle$ ist isomorph zum Verband der p-Ideale $\langle I(\mathcal{L}), \wedge, \vee \rangle$, die Abbildung $\varphi : \text{Con}(\mathcal{L}) \rightarrow I(\mathcal{L})$, $\varphi(\theta) = [0]\theta$, ist ein Isomorphismus.*

Als nächstes untersuchen wir den Kongruenzverband im Hinblick auf Komplemente.

Definition 2.6 *Es sei I ein Ideal. Dann bezeichne $I^* = \{x \in L \mid \forall i \in I : x \leq i'\}$. I^* besteht also aus den unteren Schranken von I' .*

Proposition 2.7 *Ist I ein p-Ideal, dann auch I^* .*

Beweis: Als Menge von unteren Schranken ist I^* natürlich ein Ideal. Für $i \in I$ und $x \in L$ gilt nach Satz 2.2 $x \wedge (i \vee x') \in I$ also folgt für $a \in I^*$, daß $a \leq x' \vee (i' \wedge x)$ ist. Das impliziert $x \wedge (a \vee x') \leq x \wedge (x' \vee (i' \wedge x)) = i' \wedge x \leq i'$, also ist I^* perspektiv abgeschlossen. □

Für ein p-Ideal I kann I^* auch auf folgende Weise beschrieben werden:

Lemma 2.8 $I^* = \{x \in L \mid \forall i \in I : x \wedge i = 0\}$.

Beweis: Wenn $x \leq i'$, dann folgt natürlich $x \wedge i = 0$. Gilt umgekehrt $x \wedge i = 0$ für alle $i \in I$, dann gilt auch (Satz 2.2) $x \wedge (x \wedge (i \vee x')) = 0$, woraus $x' \vee (x \wedge (i \vee x')) = x'$ folgt und damit $i \vee x' = x'$, also $x \leq i'$ gilt. □

Die Notation betreffend erinnern wir daran, daß $C(\mathcal{L})$ die Menge der zentralen Elemente von $\mathcal{L}$ bezeichnet.

Lemma 2.9 *Ein Hauptideal $[0, c]$ ist genau dann ein p-Ideal, wenn $c \in C(\mathcal{L})$.*

Ein Beweis für dieses Lemma läßt sich unmittelbar aus Satz 2.2 ableiten und ist implizit in Satz 2.6.10 von [Ka] enthalten.

Eine Aussage des letzten Lemmas läßt sich noch verschärfen:

Proposition 2.10 *Existiert das Supremum c eines p -Ideales, dann ist c ein zentrales Element.*

Beweis: Wenn $c = \sup I$ gilt, dann folgt direkt $I^* = [0, c']$, also ist c' nach Lemma 2.9 ein zentrales Element und somit auch c .

□

Es ist bekannt (vgl. Korollar II.3.11 in [Gr]), daß der Kongruenzverband eines Verbandes pseudokomplementär ist, d.h. es gibt zu jeder Kongruenzrelation θ eine größte Kongruenz ψ mit der Eigenschaft $\theta \wedge \psi = \Delta$, wobei Δ die Identitätsrelation bezeichnet. Dieses ψ heißt Pseudokomplement von θ und wird mit θ^* bezeichnet. Da die Kongruenzen eines orthomodularen Verbandes $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ mit den Kongruenzen des Verbandes $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ übereinstimmen (vgl. [Ka], S. 74, Bemerkung vor Lemma 1), ist auch der Kongruenzverband eines orthomodularen Verbandes pseudokomplementär. Allgemein kann das Pseudokomplement über die Formel

$$\theta^* = \bigvee_{\psi \wedge \theta = \Delta} \psi$$

angegeben werden.

Proposition 2.11 *Für jedes p -Ideal I ist I^* das Pseudokomplement im Verband der p -Ideale.*

Beweis: Auf Grund der Definition von I^* ist die Beziehung $I \wedge I^* = \{0\}$ klar. Was noch zu zeigen bleibt, ist, daß für ein beliebiges p -Ideal J aus $I \wedge J = \{0\}$ schon $J \subseteq I^*$ folgt. Sei $i \in I$, $j \in J$, dann ist $i \wedge (j \vee i') \in I \cap J = I \wedge J = \{0\}$, woraus sich $i' = i' \vee (i \wedge (j \vee i')) = j \vee i'$, also $j \leq i'$ ergibt. Damit ist $J \subseteq I^*$.

□

Wenn ein p -Ideal I ein Komplement besitzt, so muß nach der Definition des Pseudokomplements I^* ein Komplement sein. Da zudem der Verband der p -Ideale distributiv ist (vgl. Satz II.3.11 in [Gr] und die Bemerkung vor der letzten Proposition), ist dann I^* das einzige Komplement. Mit Hilfe der expliziten Beschreibung des Pseudokomplements läßt sich nun einfach feststellen, wann ein p -Ideal ein Komplement besitzt.

Satz 2.12 *Ein p -Ideal besitzt genau dann ein Komplement, wenn es ein Hauptideal ist.*

Beweis: Wenn $I = [0, c]$ ein Hauptideal mit $c \in C(\mathcal{L})$ ist, dann ist offensichtlich $I^* = [0, c']$ ein Komplement. Gilt umgekehrt $I \vee I^* = L$, so existieren $i \in I$ und $j \in I^*$, sodaß $i \vee j = 1$. Daraus folgt wegen $j \leq i'$ nach dem orthomodularen Gesetz $j = i' \wedge (j \vee i) = i'$, was $I = [0, i]$ zur Folge hat, weil $i = j' \geq x$ für alle $x \in I$ gilt.

□

Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz 2 in [Ja].

Unmittelbar einsichtig auf Grund der Definition von I^* ist die folgende Aussage:

Lemma 2.13 *Es gilt $I^* = \{0\}$ genau dann, wenn $\sup I = 1$, und $I^* = L$ genau dann, wenn $I = \{0\}$.*

Eine Algebra $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ heißt subdirekt irreduzibel, wenn für jede Einbettung $\varphi : A \rightarrow \prod_{j \in \Lambda} A_j$ mit der Eigenschaft, daß für die Projektion π_i von $\prod_{j \in \Lambda} A_j$ auf A_i , $\pi_i \circ \varphi$ für alle $i \in \Lambda$ surjektiv ist, ein $i \in \Lambda$ existiert, sodaß $\pi_i \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist. Diese Eigenschaft ist dazu äquivalent, daß im Kongruenzverband von $\mathcal{A}$ das kleinste Element Δ genau einen oberen Nachbarn besitzt (siehe z.B. [Ih], Satz 5.2.6).

Unter den Booleschen Algebren sind nur die ein- und die zweielementige Algebra subdirekt irreduzibel. Bei orthomodularen Verbänden ist die Klasse der subdirekt irreduziblen Algebren wesentlich größer. Sie enthält natürlich alle einfachen Algebren, für welche im nachfolgenden Lemma ein paar Beispiele angegeben werden. Zuvor wiederholen wir noch zwei bekannte Begriffsbildungen.

Unter einer horizontalen Summe einer Familie $\mathcal{B}_i$, $i \in \Lambda$, von Booleschen Algebren ist jener orthomodulare Verband zu verstehen, der entsteht, wenn alle Null- bzw. Einselemente der $\mathcal{B}_i$ identifiziert werden und ansonsten die disjunkte Vereinigung der $\mathcal{B}_i$ gebildet wird (siehe z.B. Abschnitt 1.4 in [Ka]).

Eine Hilbertraumlogik $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist ein orthomodularer Verband, der als Trägermenge die Menge der abgeschlossenen linearen Teilräume eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ besitzt, wobei die Inklusion $\subseteq$ als Verbandshalbordnung und das orthogonale Komplement als Komplementbildung fungiert (siehe z.B. Abschnitt 1.5 in [Ka]).

Lemma 2.14 *Die folgenden orthomodularen Verbände sind einfach:*

1. *Nichttriviale horizontale Summen von Booleschen Algebren (d.h. mindestens zwei Summanden mit mehr als zwei Elementen)*

2. Hilbertraumlogiken $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, wobei $\dim \mathcal{H} < \infty$

Beweis: Was die horizontale Summe von Booleschen Algebren betrifft, sind je zwei von 0, 1 verschiedene Elemente x, y , die in verschiedenen Blöcken liegen, zueinander perspektiv (gemeinsames Komplement x'), und aus $x \vee y = 1$ folgt die Einfachheit.

Zwei Unterräume eines endlichdimensionalen Raumes sind genau dann perspektiv, wenn sie dieselbe Dimension haben. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt direkt aus dem Dimensionssatz für Unterräume U_1 und U_2 ,

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2),$$

umgekehrt konstruiert man leicht für zwei Unterräume mit derselben Dimension ein gemeinsames Komplement. Wenn also irgendein vom Nullraum verschiedener Unterraum in einem p-Ideal liegt, dann schon alle Unterräume mit derselben Dimension wie dieser, und wegen der Abgeschlossenheit bzgl. $\vee$ enthält das p-Ideal damit alle Unterräume, woraus die Einfachheit folgt.

□

Jetzt wird ein Beispiel dafür angegeben, daß nicht jeder subdirekt irreduzible orthomodulare Verband einfach ist.

Lemma 2.15 *Der Kongruenzverband des Verbandes der abgeschlossenen Unterräume eines unendlichdimensionalen separablen Hilbertraumes ist eine dreielementige Kette.*

Beweis: Die endlichdimensionalen Teilräume bilden das kleinste p-Ideal über $\{0\}$ (vgl. Bemerkung in [Ka] nach Satz 2.6.10).

Zu zeigen bleibt also noch, daß ein p-Ideal I , welches einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum M des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ enthält, schon alle Teilräume umfaßt. In der Folge bezeichne $\langle A \rangle$ den von einer Teilmenge A von H erzeugten abgeschlossenen Teilraum und $A^\perp$ den Orthogonalraum von A . Nehmen wir vorerst $\dim M = \dim M^\perp = \infty$ an, und sei $M = \langle \{x_k \mid k \in 2\mathbb{N}\} \rangle$, $M^\perp = \langle \{x_k \mid k \in 2\mathbb{N} - 1\} \rangle$, wobei $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathcal{H}$ ist. Wir behaupten, daß $N = \langle \{x_{k-1} + x_k \mid k \in 2\mathbb{N}\} \rangle$ ein gemeinsames Komplement von M und $M^\perp$ ist. Da auch die Mengen $\{x_k \mid k \in 2\mathbb{N}\} \cup \{x_{k-1} + x_k \mid k \in 2\mathbb{N}\}$ und $\{x_k \mid k \in 2\mathbb{N} - 1\} \cup \{x_{k-1} + x_k \mid k \in 2\mathbb{N}\}$ vollständige Orthonormalsysteme sind, folgt $M \vee N = M^\perp \vee N = H$ und aus der Eindeutigkeit

der Darstellung von $x \in H$ in der Form $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k x_k$ folgt unmittelbar $M \wedge N = M^\perp \wedge N = \{0\}$. Also liegen M und $M^\perp$ in I und damit alle abgeschlossenen Teilräume.

Den Fall $\dim M^\perp < \infty$ kann man auf den eben behandelten Fall zurückführen, da dann ein abgeschlossener Teilraum M_1 mit $M_1 \subset M$ und $\dim M_1 = \dim M_1^\perp = \infty$ existiert, also wieder $M_1, M_1^\perp \in I$ gilt.

□

Bemerkung: Falls $\mathcal{H}$ nicht separabel ist, so gibt es noch weitere p-Ideale (siehe Satz 2 in [Fi]).

Nach diesen Beispielen sollen einige allgemeine Aussagen im Zusammenhang mit subdirekter Irreduzibilität gemacht werden.

Proposition 2.16 *Wenn $\mathcal{L}$ subdirekt irreduzibel ist, so besitzt jede perspektiv abgeschlossene Teilmenge von L , die ein Element verschieden von 0 und 1 enthält, das Supremum 1 und Infimum 0.*

Beweis: Auf Grund der Existenz eines einzigen oberen Nachbarn von $\{0\}$ im Verband der p-Ideale folgt $I^* = \{0\}$ und damit $\sup I = 1$ für alle p-Ideale $I \neq \{0\}$. Da das von einem Element $a \in L$ erzeugte p-Ideal das von den zu a projektiven Elementen erzeugte Verbandsideal ist (vgl. Satz 2.6.8 in [Ka]), erhält man daraus die Behauptung über das Supremum einer perspektiv abgeschlossenen Menge. Wie man sofort einsieht, ist für eine perspektiv abgeschlossene Menge P auch P' perspektiv abgeschlossen, also ist $\sup P' = (\inf P)' = 1$ und folglich $\inf P = 0$.

□

Ein Element a eines pseudokomplementären Verbandes heißt dicht, wenn das Pseudokomplement $a^* = 0$ ist. Proposition 2.16 sagt also insbesondere, daß in einem subdirekt irreduziblen orthomodularen Verband jedes vom Nullideal verschiedene p-Ideal dicht ist. Die Umkehrung kann im folgenden unter einer Zusatzbedingung bewiesen werden.

Proposition 2.17 *Erfüllt der Kongruenzverband von $\mathcal{L}$ die absteigende Kettenbedingung und ist jedes von $\{0\}$ verschiedene p-Ideal dicht, so ist $\mathcal{L}$ subdirekt irreduzibel.*

Beweis: Die dichten Elemente in einem pseudokomplementären Verband bilden immer einen Filter (siehe z.B. 2.3 in [Kt]). Aus der Kettenbedingung folgt dann,

daß sie sogar einen Hauptfilter bilden, folglich ist $\mathcal{L}$ subdirekt irreduzibel.

□

In diesem Zusammenhang soll erwähnt werden, daß sich Proposition 2.10 wie folgt erweitern läßt:

Proposition 2.18 *Besitzt eine perspektiv abgeschlossene Teilmenge von L ein Supremum oder Infimum, so ist dies stets ein zentrales Element.*

Beweis: Da das von einer perspektiv abgeschlossenen Menge M erzeugte p-Ideal mit dem von M erzeugten Verbandsideal übereinstimmt (vgl. Lemma 2.6.7 in [Ka]), folgt die Aussage über das Supremum direkt aus Proposition 2.10. Für das Infimum kann man das gleiche Argument angewendet auf M' heranziehen.

□

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt direkt irreduzibel, wenn aus $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ folgt, daß $|A_1| = 1$ oder $|A_2| = 1$.

Korollar 2.19 *Ein vollständiger orthomodularer Verband ist genau dann direkt irreduzibel, wenn jede perspektiv abgeschlossene Menge, die ein Element $x \neq 0, 1$ enthält, das Supremum 1 und das Infimum 0 besitzt.*

Beweis: Ein orthomodularer Verband ist genau dann direkt irreduzibel, wenn $C(\mathcal{L}) = \{0, 1\}$ ist (siehe z.B. Satz 2.6.9 in [Ka]). Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung folgt daher direkt aus der Vollständigkeit und der vorherigen Proposition. Umgekehrt ist für ein zentrales Element c die Menge $\{c\}$ perspektiv abgeschlossen, also ist die Bedingung auch hinreichend.

□

Der Kongruenzverband eines jeden Verbandes ist nicht nur pseudokomplementär, sondern sogar relativ pseudokomplementär (auch Brouwersch genannt), d.h. für jedes Paar θ und ψ von Kongruenzen gibt es eine Kongruenz $\theta * \psi$ mit der Eigenschaft

$$\theta \wedge \phi \leq \psi \Leftrightarrow \phi \leq \theta * \psi$$

(siehe z.B. Satz VI.9 in [Bi]). Jeder Brouwersche Verband ist distributiv (siehe Satz II.18 in [Bi]). Das Pseudokomplement θ^* erhält man als Spezialfall: $\theta^* = \theta * 0$. Auch dieses relative Pseudokomplement kann nun einfach beschrieben werden:

Proposition 2.20 *Für p-Ideale I und J wird das relative Pseudokomplement $I * J$ gegeben durch*

$$I * J = \{x \in L \mid x \wedge I \subseteq J\}.$$

Beweis: Nach dem Beweis von 2.9 in [Kt] gilt, daß $I * J$ gleich dem Pseudokomplement von I im Intervall $[I \wedge J, L]$ ist. Nun ist aber der Verband $[I \wedge J, L]$ isomorph zum Kongruenzverband der Faktorstruktur $\mathcal{L}/(I \wedge J)$ (vgl. Satz 4.2.1 in [Ih]). Bezeichnet $[a]$ die Kongruenzklasse von a in $\mathcal{L}/(I \wedge J)$, so bedeutet die Bedingung $x \wedge I \subseteq J$ genau $[x] \wedge [i] = [0]$ für alle $i \in I$. Daraus folgt mit Lemma 2.8 die Behauptung. □

Allgemein gelten folgende Beziehungen in einem Brouwerschen Verband:

Lemma 2.21 1. $b \vee a^* \leq a * b \leq (b \vee a^*)^{**}$.

2. $(a * b)^* = b^* \wedge a^{**}$.

Beweis: Zu 1.: Die linke Ungleichung folgt aus $a \wedge (b \vee a^*) = a \wedge b \leq b$.

Gilt umgekehrt $a \wedge c \leq b$, so folgt $(a \vee a^*) \wedge (c \vee a^*) \leq b \vee a^*$. Bildet man auf beiden Seiten das zweifache Pseudokomplement (erhält die Ordnung) und verwendet die allgemeingültigen Beziehungen

$$(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}, \quad (x \vee x^*)^{**} = 1,$$

so erhält man $(c \vee a^*)^{**} \leq (b \vee a^*)^{**}$, woraus wegen $c \leq (c \vee a^*)^{**}$ die zweite Ungleichung folgt.

2. folgt unmittelbar aus 1., weil $x \leq y \leq x^{**}$ impliziert $x^{***} \leq y^* \leq x^*$ und damit $y^* = x^*$. □

Bemerkung: 2. wird auch in Satz IX.2.3 in [BD] bewiesen.

Es wird nun an Hand von Beispielen gezeigt, daß im Kongruenzverband eines orthomodularen Verbandes, ja selbst im Kongruenzverband einer Booleschen Algebra keine der beiden in 1. von Lemma 2.21 angegebenen Schranken und auch das dazwischen liegende Element $b^{**} \vee a^*$ nicht in jedem Fall mit $a * b$ übereinstimmen muß:

Zunächst zeigen wir, daß $b \vee a^* \leq b^{**} \vee a^* \leq (b \vee a^*)^{**}$ gilt: Die linke Ungleichung ist wegen $b \leq b^{**}$ klar. Da die Funktion $x \mapsto x^{**}$ monoton ist, erhält man $b^{**} \leq (b \vee a^*)^{**}$ und $a^* \leq (b \vee a^*)^{**}$, woraus die rechte Ungleichung sofort folgt.

Weiters gilt (siehe 2.12 in [Kt]): Ist b abgeschlossen, d.h. es gilt $b = b^{**}$, dann folgt $a * b = (b \vee a^*)^{**}$, d.h. das relative Pseudokomplement stimmt mit der oberen Schranke überein.

Wir betrachten jetzt folgendes Beispiel: Sei $\mathcal{B}$ die Boolesche Algebra, die aus den endlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und ihren Komplementärmengen besteht und bezeichne $\mathbb{N}_g$ die Menge der geraden und $\mathbb{N}_u$ die Menge der ungeraden Zahlen. Ist I das Ideal, das alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_g$ enthält, so besteht I^* genau aus den endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_u$ und $I^{**} = I$. Für $J = I$ besteht $J \vee I^* = I \vee I^* = I^{**} \vee I^*$ genau aus den endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, während klarerweise $I * J = B$ gilt. Dieses Beispiel zeigt also insbesondere, daß $J^{**} \vee I^* < I * J$ gelten kann.

Betrachten wir andererseits irgendein J mit $J < J^{**}$ (z.B. J besteht aus den endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$) und setzen $I = J^{**}$, so gilt $I * J < J^{**} \vee I^* = J^{**} \vee J^*$, denn $I \wedge (J^{**} \vee I^*) = J^{**} \not\leq J$.

Also stimmt keines der Elemente $J \vee I^*$, $J^{**} \vee I^*$, $(J \vee I^*)^{**}$ mit dem relativen Pseudokomplement $I * J$ in jedem Fall überein.

2.3 Zusammenhang zwischen den einzelnen Kongruenzklassen

Nun wenden wir uns konkreten Kongruenzen zu und betrachten die einzelnen Kongruenzklassen näher.

Zunächst betrachten wir den Fall, daß das p -Ideal ein Hauptideal ist. Was die Kongruenzklassen betrifft, verhalten sich diese Kongruenzrelationen wie im Falle einer Booleschen Algebra:

Proposition 2.22 *Sei $c \in C(\mathcal{L})$, θ die dem p -Ideal $I = [0, c]$ entsprechende Kongruenz. Dann gilt:*

$$[a]\theta = [a \wedge c', a \vee c]$$

und alle Kongruenzklassen sind – mit der von $\mathcal{L}$ auf Intervalle induzierten orthomodularen Struktur – zueinander isomorph, konkret ist

$$\varphi_a : \begin{cases} I & \rightarrow [a]\theta \\ x & \mapsto (a \wedge c') \vee x \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $a \in L$ beliebig; nach Lemma 2.6.5 in [Ka] gilt $a\theta b \Leftrightarrow a \triangle b \in I$, also folgt daraus:

$$b\theta a \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \leq c \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a' \wedge b') \geq c',$$

woraus sich durch Bilden des Supremums jeder Seite der ersten Ungleichung mit a ergibt: $a \vee c \geq a \vee b \geq b$, also folgt $a \vee c = \max[a]\theta$ wegen $(a \vee c)\theta a$.

Durch Bilden des Infimums jeder Seite der zweiten Ungleichung mit a erhält man: $a \wedge c' \leq a \wedge b \leq b$, also folgt $a \wedge c' = \min[a]\theta$ wegen $(a \wedge c')\theta a$.

Da jede Kongruenzklasse einen konvexen Unterverband darstellt, ergibt sich $[a]\theta = [a \wedge c', a \vee c]$.

Nun zeigen wir, daß φ_a ein Isomorphismus ist:

- 1) φ_a ist wohldefiniert: Für $x \in I$ gilt $((a \wedge c') \vee x)\theta((a \wedge 1) \vee 0)$, also $(a \wedge c') \vee x \in [a]\theta$.
- 2) φ_a ist surjektiv: Sei $b \in [a]\theta$, d.h. $b\theta a$, dann gilt $a \wedge c' = \min[a]\theta = \min[b]\theta = b \wedge c'$, also folgt $b = (b \wedge c') \vee (b \wedge c) = (a \wedge c') \vee (b \wedge c)$ und $b \wedge c \in I$, d.h. $\varphi_a(b \wedge c) = b$.
- 3) φ_a ist injektiv: Aus $b = (a \wedge c') \vee x$ folgt durch Schneiden beider Seiten mit c unter Ausnützung des orthomodularen Gesetzes, daß $b \wedge c = x$ ist, also ist x eindeutig bestimmt.
- 4) φ_a ist mit den Operationen verträglich: Bezeichne $*$ die von $\mathcal{L}$ auf $[a \wedge c', a \vee c]$ induzierte Komplementbildung und $^\perp$ jene auf $[0, c]$, also

$$\begin{aligned} z^* &= (a \wedge c') \vee (z' \wedge (a \vee c)), \\ z^\perp &= z' \wedge c, \end{aligned}$$

dann erhält man $(\varphi_a(x))^* = (a \wedge c') \vee (x' \wedge (a' \vee c) \wedge (a \vee c)) = (a \wedge c') \vee (x' \wedge c) = \varphi_a(x^\perp)$.

Klarerweise gilt $\varphi_a(x) \vee \varphi_a(y) = \varphi_a(x \vee y)$, und da $\wedge$ aus Komplementbildung und $\vee$ mit Hilfe der de Morganschen Regeln zusammengesetzt werden kann, ist damit alles gezeigt.

□

Bemerkungen:

1. Die zu $[0, c]$ gehörige Kongruenz θ kann auch wie folgt charakterisiert werden:

$$a\theta b \Leftrightarrow a \vee c = b \vee c \Leftrightarrow a \wedge c' = b \wedge c'.$$

2. Die Umkehrabbildung zu φ_a ist gegeben durch $\varphi_a^{-1}(y) = y \wedge c$, und mittels der Komposition $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}(x) = (x \wedge c) \vee (b \wedge c')$ erhält man einen Isomorphismus von $[a]\theta$ nach $[b]\theta$.

3. Die Abbildung $\tilde{\varphi}_a : I \rightarrow [a]\theta$, $\tilde{\varphi}_a(x) = (a \vee c) \wedge x'$ ist ein dualer Isomorphismus.
4. Mit $c \in C(\mathcal{L})$ gilt $\mathcal{L} = [0, c] \times [0, c']$, und der Homomorphismus

$$\varphi : \begin{cases} [0, c] \times [0, c'] \rightarrow [0, c'] \\ (x, y) \mapsto y \end{cases}$$

hat den Kern $[0, c] \times \{0\}$; es gilt also $\mathcal{L}/[0, c] \cong [0, c']$.

Beweis: Zu 1.: Wenn $a \vee c = b \vee c$, dann folgt $a\theta(a \vee c)$, $(b \vee c)\theta b$, also $a\theta b$. Die umgekehrte Richtung ist bereits in der vorigen Proposition bewiesen worden. Entsprechend geht man bei der zweiten Äquivalenz vor.

Zu 2.: Für $x \leq c$ gilt $(x \vee (a \wedge c')) \wedge c = x \wedge c = x$, woraus die Behauptung sofort folgt.

3. folgt aus $\tilde{\varphi}_a(x) = (\varphi_a(x))^*$, 4. ist mit Satz 1.3.1 aus [Ka] unmittelbar einsichtig.

□

Nun kommen wir zum Fall, daß ein beliebiges p -Ideal vorliegt. Es sei bzgl. der Notation nochmals daran erinnert, daß Operationen wie $\wedge$, $\vee$, $'$ oder Δ angewendet auf Teilmengen von L (bei einelementigen Mengen werden die Mengenklammern weggelassen) das Komplexprodukt mit diesen Operationen bezeichnen.

Proposition 2.23 *Sei θ eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{L}$ und I das zugehörige p -Ideal, dann gilt für alle $a \in L$*

$$\begin{aligned} [a]\theta &= (a \vee I) \wedge I' \\ &= (a \wedge I') \vee I. \end{aligned}$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Darstellung $[a]\theta = (a \vee I) \wedge I'$, die zweite Gleichung kann auf analoge Weise erhalten werden.

⊇ Für $i, j \in I$ gilt $((a \vee i) \wedge j')\theta((a \vee 0) \wedge 1)$, d.h. $((a \vee i) \wedge j')\theta a$.

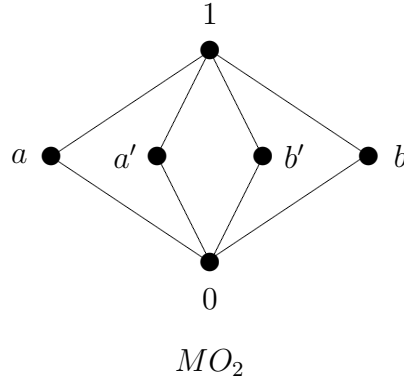
⊆ Gelte $a\theta b$, dann erhält man durch zweimalige Anwendung des orthomodularen Gesetzes

$$b = (a \vee b) \wedge (b \vee (a' \wedge b')) = (a \vee ((a \vee b) \wedge a')) \wedge (b \vee (a' \wedge b')) \in (a \vee I) \wedge I', \text{ denn } ((a \vee b) \wedge a')\theta((a \vee a) \wedge a') \text{ und } (b \vee (a' \wedge b'))\theta(b \vee (b' \wedge b')).$$

□

Bemerkung: In Booleschen Algebren hat man die Darstellung $[a]\theta = a\Delta I$.

Diese ist im allgemeinen im orthomodularen Fall nicht möglich, wie das Beispiel des 6-elementigen orthomodularen Verbandes MO_2 (siehe Diagramm) zeigt:



Sei θ die Allrelation, also $I = L$, und seien a, b erzeugende Elemente von MO_2 , dann gilt $a \triangle I = \{0, a, a', 1\} \neq [a]\theta$.

Auch im allgemeinen Fall kann man das zur Kongruenzrelation gehörende p-Ideal aus einer beliebigen Kongruenzklasse zurückgewinnen.

Proposition 2.24 *Sei θ eine Kongruenzrelation von $\mathcal{L}$ und I das zugehörige p-Ideal, dann gilt für alle $a \in L$*

$$I = ([a]\theta) \triangle ([a]\theta).$$

Beweis: $\supseteq$ Wenn $a\theta b$, dann erhält man $a \triangle b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \theta (a \vee a) \wedge (a' \vee a')$, also $(a \triangle b)\theta 0$.

$\subseteq$ Für $i \in I$ ist $b := a \vee i \in [a]\theta$, weiters gilt $(b \triangle i)\theta(b \triangle 0)$, d.h. $(b \triangle i)\theta b$, also $b \triangle i \in [a]\theta$; nun erhält man $b \triangle (b \triangle i) = b \triangle (b \wedge i') = b \wedge (i \vee b') = i$, also $i \in ([a]\theta) \triangle ([a]\theta)$.

□

Im folgenden soll charakterisiert werden, welche Teilmengen eines orthomodularen Verbandes Kongruenzklassen darstellen können. Für Ideale ist diese Aufgabe mit Satz 2.2 erledigt, und für Filter folgt durch Dualisieren unmittelbar:

Proposition 2.25 *Für einen Filter F in einem orthomodularen Verband sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $F = [1]\theta$ für eine Kongruenzrelation θ ,

2. F ist perspektiv abgeschlossen,
3. für alle $a \in F$ und $x \in L$ gilt $x \vee (a \wedge x') \in F$.

Liegt ein Filter F mit diesen Eigenschaften vor, so kann eine Kongruenzrelation θ wie folgt festgelegt werden:

$$x\theta y \Leftrightarrow x \nabla y' \in F.$$

Auch diese Aussage erhält man direkt aus der bekannten Bedingung für Ideale (vgl. Satz 2.1).

Für Intervalle läßt sich die folgende Charakterisierung angeben:

Proposition 2.26 *Seien $a, b \in L$ mit $a \leq b$. Dann gilt: Das Intervall $[a, b]$ ist genau dann Klasse einer Kongruenzrelation, wenn $b \wedge a'$ ein zentrales Element ist.*

Beweis: Ist $[a, b]$ Kongruenzklasse und I das zugehörige p-Ideal, so folgt aus Proposition 2.24 $I = [a, b] \triangle [a, b]$. Für $x, y \in [a, b]$ gilt $x \triangle y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \leq b \wedge a'$ und $b \wedge a' \in I$, folglich ist $b \wedge a'$ das größte Element von I und daher notwendigerweise ein zentrales Element (siehe Lemma 2.9).

Gilt umgekehrt, daß $c := b \wedge a'$ ein zentrales Element ist, so erhält man $a \wedge c' = a \wedge (a \vee b') = a$ und $a \leq b$ impliziert $a \vee c = a \vee (b \wedge a') = b$. Also ist $[a, b] = [a \wedge c', a \vee c]$ nach Proposition 2.22 eine Kongruenzklasse.

□

Nun aber zu beliebigen Kongruenzklassen. Es ist klar, daß jede Kongruenzklasse ein konvexer Unterverband sein muß. Für Boolesche Algebren ist diese Bedingung bekanntlich auch hinreichend, was für orthomodulare Verbände, wie schon die Ergebnisse für Ideale und Filter zeigen, nicht der Fall ist. Vorerst sollen zwei Hilfssätze bewiesen werden.

Lemma 2.27 *Ist V ein konvexer Unterverband von $\mathcal{L}$, so ist $V \triangle V$ ein Ideal.*

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in V$. Da $v_1 \triangle v_2 = (v_1 \vee v_2) \triangle (v_1 \wedge v_2)$ gilt, kann jedes Element von $V \triangle V$ in der Form $v_1 \wedge v_2'$ mit $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \geq v_2$, dargestellt werden.

Zunächst zeigen wir, daß $V \triangle V$ ein Ordnungsideal ist: Sei $x \leq v_1 \wedge v_2'$, $v_1 \geq v_2$. Daraus ergibt sich

$$v_2 = v_1 \wedge (v_2 \vee v_1') \leq v_1 \wedge x' = v_1 \triangle x \leq v_1,$$

also ist $v_1 \Delta x \in V$. Weiters erhält man

$$v_1 \Delta (v_1 \Delta x) = v_1 \Delta (v_1 \wedge x') = v_1 \wedge (x \vee v'_1) = x,$$

folglich gilt $x \in V \Delta V$.

Für $v_1 \geq v_2$ und $v_3 \geq v_4$ gilt

$$(v_1 \Delta v_2) \vee (v_3 \Delta v_4) = (v_1 \wedge v'_2) \vee (v_3 \wedge v'_4) \leq (v_1 \vee v_3) \wedge (v'_2 \vee v'_4) = (v_1 \vee v_3) \Delta (v_2 \wedge v_4),$$

also ist $V \Delta V$ nach Obigem auch bzgl. $\vee$ abgeschlossen und damit ein Ideal. $\square$

Lemma 2.28 *Sei V ein konvexer Unterverband von $\mathcal{L}$, $v \in V$ und $I = V \Delta V$. Dann gilt $V = (v \vee I) \wedge I'$.*

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in V$. Wegen $v \leq v \vee (v_1 \Delta v_2) \leq v \vee v_1 \vee v_2$ gilt $v \vee I \subseteq V$, und aus $v \wedge v_1 \wedge v_2 \leq v \wedge (v_1 \Delta v_2)' \leq v$ folgt schließlich $(v \vee I) \wedge I' \subseteq V$.

Ist umgekehrt $u \in V$, dann erhalten wir $u \Delta (u \wedge v) = u \wedge (u' \vee v') \in I$, also $v \vee (u \wedge (u' \vee v')) = u \vee v \in v \vee I$. Weiters ist $(u \vee v) \wedge u' = (u \vee v) \Delta u \in I$, folglich $u \vee (u' \wedge v') \in I'$ und damit $u = (u \vee v) \wedge (u' \wedge v') \in (v \vee I) \wedge I'$. $\square$

Mit diesen Ergebnissen kann jetzt folgende Charakterisierung angegeben werden:

Proposition 2.29 *Ein konvexer Unterverband V von $\mathcal{L}$ ist genau dann die Klasse einer Kongruenzrelation von $\mathcal{L}$, wenn für alle $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \geq v_2$ und $x \in L$ gilt:*

$$v_1 \vee (x \wedge (x' \vee (v_1 \wedge v'_2))), v_1 \wedge (x \vee (x' \wedge (v_2 \vee v'_1))) \in V.$$

Beweis: Mit Hilfe der Substitutionseigenschaft von Kongruenzen zeigt man sofort, daß die angegebenen Bedingungen notwendig sind.

Für das Hinreichen muß auf Grund der beiden Lemmata und Proposition 2.23 nur noch gezeigt werden, daß $I = V \Delta V$ perspektiv abgeschlossen ist.

Sei $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \geq v_2$ und $x \in L$. Dann gilt nach Voraussetzung $v_3 := v_1 \vee (x \wedge (x' \vee (v_1 \wedge v'_2)))$, $v_4 := v_1 \wedge (x' \vee (x \wedge (v_2 \vee v'_1))) \in V$, also $v_3 \Delta v_4 = v_3 \wedge v'_4 \in I$. Weil $v_3 \wedge v'_4 \geq x \wedge (x' \vee (v_1 \wedge v'_2))$, folgt damit aus Lemma 2.27 $x \wedge (x' \vee (v_1 \wedge v'_2)) \in I$, also ist I ein p-Ideal. $\square$

2.4 Kongruenzvertauschbarkeit, -regularität, -uniformität

In der universalen Algebra wird eine Varietät $\mathcal{V}$ kongruenzregulär genannt, wenn für jede Algebra $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle \in \mathcal{V}$ und Kongruenzrelationen $\theta, \psi \in \text{Con}(\mathcal{A})$ aus der Gleichung $[a]\theta = [b]\psi$ für $a, b \in A$ folgt, daß $\theta = \psi$ gilt, also mit anderen Worten jede Kongruenzklasse die Kongruenzrelation eindeutig festlegt.

$\mathcal{V}$ heißt kongruenzuniform, wenn unter den gleichen Voraussetzungen wie oben $|[a]\theta| = |[b]\theta|$ für alle $a, b \in A$ gilt (siehe z.B. [Bt]).

$\mathcal{V}$ heißt kongruenzvertauschbar, wenn stets $\theta \circ \psi = \psi \circ \theta$ gilt, wobei $\circ$ hier das Relationenprodukt bezeichnet. Die letzte Bedingung ist bekanntlich zu $\theta \vee \psi = \theta \circ \psi$ äquivalent. Gilt zusätzlich zur Kongruenzvertauschbarkeit, daß der Kongruenzverband distributiv ist, so nennt man $\mathcal{V}$ arithmetisch.

Es ist bekannt, daß der Kongruenzverband eines Verbandes distributiv ist. Da die Kongruenzen eines orthomodularen Verbandes $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ mit den Kongruenzen des Verbandes $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ übereinstimmen (vgl. [Ka], S 74, Bemerkung vor Lemma 1), ist auch der Kongruenzverband eines orthomodularen Verbandes distributiv. Weiters folgt aus Satz 3.6 in [Ha], daß orthomodulare Verbände auch kongruenzregulär und kongruenzvertauschbar, also insbesondere arithmetisch sind.

Diese Resultate und die Kongruenzuniformität für orthomodulare Verbände können auch in einfacher Weise aus den in Abschnitt 2.3 angegebenen Darstellungen der Kongruenzklassen abgeleitet werden. Dies soll jetzt durchgeführt werden.

Proposition 2.23 in Verbindung mit Proposition 2.24 zeigt, daß jede beliebige Kongruenzklasse die Kongruenzrelation eindeutig bestimmt, also gilt:

Satz 2.30 *Die Varietät der orthomodularen Verbände ist kongruenzregulär.*

Die Darstellung der Kongruenzklassen und die Aussagen über das Rechnen mit p-Idealen liefern auch die Grundlage für den folgenden Satz:

Satz 2.31 *Die Varietät der orthomodularen Verbände ist arithmetisch.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, wie einfach die Distributivität des Kongruenzverbandes eines orthomodularen Verbandes mit Hilfe von p-Idealen einzusehen ist: Seien I, J, K p-Ideale. Es ist zu beweisen, daß $I \wedge (J \vee K) \subseteq (I \wedge J) \vee (I \wedge K)$; die

inverse Relation gilt ja stets. Sei $i \in I \wedge (J \vee K)$, also $i \in I$ und $i = j \vee k$ für entsprechendes $j \in J, k \in K$. Daraus folgt $i \vee j' = i \vee k' = 1$, also $j = j \wedge (i \vee j') \in I \wedge J$ und $k = k \wedge (i \vee k') \in I \wedge K$, woraus sich schließlich $i = j \vee k \in (I \wedge J) \vee (I \wedge K)$ ergibt.

Nun zur Vertauschbarkeit: Seien θ, ψ Kongruenzen und bezeichne allgemein I_ϕ das zur Kongruenzrelation ϕ gehörende p-Ideal. Zu zeigen ist $\theta \vee \psi = \theta \circ \psi$. Da $\theta \vee \psi \supseteq \theta \circ \psi$ immer gilt, reicht es, die umgekehrte Inklusion nachzuweisen:

Für $(x, y) \in \theta \vee \psi$, d.h. $y \in [x](\theta \vee \psi)$ folgt nach Proposition 2.23 die Existenz von $i, j \in I_{\theta \vee \psi} : y = (x \vee i) \wedge j'$; da nach Satz 2.5 $I_{\theta \vee \psi} = I_\theta \vee I_\psi$ gilt, folgt

$$\exists i_1, j_1 \in I_\theta, i_2, j_2 \in I_\psi : i = i_1 \vee i_2, j = j_1 \vee j_2.$$

Daraus ergibt sich

$$(x \vee i_1 \vee i_2) \wedge (j'_1 \wedge j'_2) \psi (x \vee i_1 \vee 0) \wedge (j'_1 \wedge 1) \theta (x \vee 0) \wedge 1.$$

Der Ausdruck ganz links stimmt mit y überein, der ganz rechts mit x , und wir erhalten $(x, y) \in \theta \circ \psi$, also $\theta \vee \psi \subseteq \theta \circ \psi$. □

Jetzt wird die Kardinalität der einzelnen Kongruenzklassen untersucht.

Satz 2.32 *Die Varietät der orthomodularen Verbände ist kongruenzuniform.*

Beweis: Bezeichne θ eine beliebige Kongruenzrelation und I das zu θ gehörige p-Ideal.

1. Fall – $|I|$ ist endlich: Dann ist I nach Lemma 2.9 ein Hauptideal $[0, c]$ mit $c \in C(\mathcal{L})$, und für diesen Fall wurde die Gleichmächtigkeit der Kongruenzklassen schon in Proposition 2.22 nachgewiesen.

2. Fall – $|I|$ ist unendlich: Sei $a \in L$, dann gilt wegen $[a]\theta = (a \vee I) \wedge I'$ die Ungleichung $|[a]\theta| \leq |I|^2 = |I|$, und aus $I = ([a]\theta) \triangle ([a]\theta)$ erhält man $|I| \leq |[a]\theta|^2$, woraus insgesamt $|[a]\theta| = |I|$ folgt. □

Die Eigenschaft einer Varietät arithmetisch zu sein, kann bekanntlich auch durch die Existenz gewisser Termfunktionen charakterisiert werden (siehe z.B. Satz 6.4.8 in [Ih]):

Eine Varietät $\mathcal{V}$ ist genau dann arithmetisch, wenn ein dreistelliger Term $p(x, y, z)$ (im folgenden Pixley–Term genannt) existiert, sodaß in allen Algebren von $\mathcal{V}$ die

Gleichungen

$$p(x, x, y) = p(y, x, y) = p(y, x, x) = y$$

gelten.

Für Boolesche Algebren lautet der einfachste Pixley–Term

$$p(x, y, z) = (x \wedge y') \vee (x \wedge z) \vee (y' \wedge z).$$

Für orthomodulare Verbände wurden in [Ka] in Bemerkung 3 auf Seite 83 zwei Pixley–Terme angegeben:

$$\begin{aligned} p_3(x, y, z) &= (((z \wedge (x \vee y')) \vee (x \wedge y')) \wedge ((x \wedge y) \vee (x' \wedge y')))) \vee \\ &\quad (((x \wedge (z \vee y')) \vee (z \wedge y')) \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y')) \\ p_4(x, y, z) &= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee (x' \wedge y')) \wedge (z \vee (y' \wedge z')) \end{aligned}$$

Hier wird ein weiterer Pixley–Term angegeben.

Proposition 2.33 *Der Term*

$$p(x, y, z) = (z \wedge ((x \wedge z) \triangle (y' \vee z'))) \vee (x \wedge (x' \vee y'))$$

ist für orthomodulare Verbände ein Pixley–Term.

Beweis: Die geforderten Identitäten werden nachgerechnet:

$$p(x, x, z) = (z \wedge ((x \wedge z) \triangle (x' \vee z'))) \vee (x \wedge x') = (z \wedge 1) \vee 0 = z.$$

$$p(x, z, z) = (z \wedge ((x \wedge z) \triangle z')) \vee (x \wedge (x' \vee z')) = (z \wedge ((x \wedge z) \vee z')) \vee (x \wedge (x' \vee z')) = (x \wedge z) \vee (x \wedge (x' \vee z')) = x.$$

$$p(x, y, x) = (x \wedge (x \triangle (x' \vee y'))) \vee (x \wedge (x' \vee y')) = (x \wedge (x' \vee (x \wedge y))) \vee (x \wedge (x' \vee y')) = (x \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y')) = x.$$

□

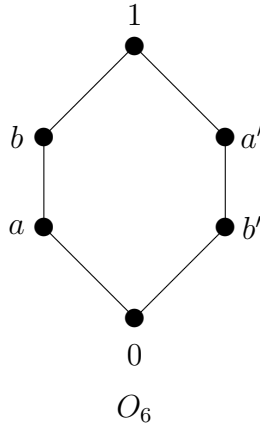
In Proposition 3.18 wird mit Hilfe der in diesem Abschnitt besprochenen symmetrischen Differenzen ein Term mit ähnlichen Eigenschaften angegeben.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß das orthomodulare Gesetz die zentrale Rolle für die Herleitung von Kongruenzvertauschbarkeit, -regularität und -uniformität spielt. Betrachtet man Orthoverbände, also beschränkte Verbände mit einer involutorischen Komplementbildung $'$, die den de Morganschen Gesetzen genügt, so gilt für diese Varietät keine der drei genannten Eigenschaften.

Satz 2.34 *Die Varietät der Orthoverbände ist weder kongruenzvertauschbar, noch kongruenzregulär oder -uniform.*

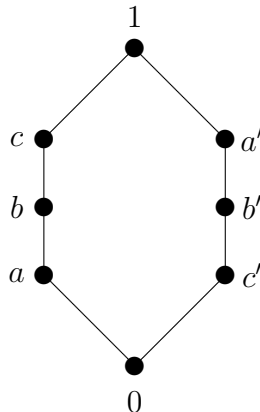
Beweis: Wir geben für jede der Eigenschaften einen Orthoverband an, der diese Eigenschaft nicht besitzt.

Zunächst betrachten wir O_6 , den kleinstmöglichen Orthoverband, der nicht orthomodular ist (siehe Diagramm).



Es seien a, b mit $a < b$ erzeugende Elemente von O_6 . Für die von (a, b) erzeugte Kongruenz θ gilt, wie man sofort einsieht, $[0]\theta = \{0\} = [0]\Delta$, wobei Δ die identische Relation bezeichnet, und $|[a]\theta| = |\{a, b\}| > |[0]\theta|$, was der Kongruenzregularität bzw. -uniformität widerspricht.

Als Gegenbeispiel zur Vertauschbarkeit betrachten wir den Orthoverband $L = \{0, a, b, c, a', b', c', 1\}$ mit $a < b < c$ (siehe Diagramm).



Sei θ die von (a, b) bzw. ψ die von (b, c) erzeugte Kongruenz. Dann gilt: $[a]\theta = \{a, b\}$, $[c]\theta = \{c\}$, $[a]\psi = \{a\}$ und $[c]\psi = \{b, c\}$, also folgt $(a, c) \in \theta \circ \psi$, aber $(a, c) \notin \psi \circ \theta$.

□

Zur Kongruenzregularität ist zu bemerken, daß in jedem komplementären Verband, insbesondere also in einem Orthoverband, für ein beliebiges Element a aus $[a]\theta = [a]\psi$ die Gleichung $[0]\theta = [0]\psi$ gefolgert werden kann (siehe [CE], Korollar 2.1), aber nicht umgekehrt, wie der letzte Satz zeigt.

Ein weiterer Unterschied zwischen Orthoverbänden und orthomodularen Verbänden besteht in der Tatsache, daß die Kongruenzrelationen eines Orthoverbandes $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ nicht mit den Kongruenzrelationen des Verbandes $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ übereinstimmen müssen, wie das Beispiel O_6 zeigt:

Seien wieder a, b mit $a < b$ erzeugende Elemente von O_6 , so entspricht der Partition $\{\{0\}, \{a, b\}, \{a'\}, \{b'\}, \{1\}\}$ eine Kongruenz des unterliegenden Verbandes nicht aber des Orthoverbandes.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß sich sehr viele wichtige Eigenschaften von Kongruenzrelationen von Booleschen Algebren auf orthomodulare Verbände übertragen. Bei Booleschen Algebren sind diese Eigenschaften, mit Ausnahme der Kongruenzdistributivität einfache Konsequenzen der Termäquivalenz zu Booleschen Ringen, eine Tatsache, auf die man bei orthomodularen Verbänden, wie man aus Satz 3.19 ersieht, nicht in vergleichbarer Weise zurückgreifen kann. In [Ch] und [DLM] wurden ringähnliche Varietäten angegeben, die termäquivalent sind zu orthomodularen Verbänden und einigen Verallgemeinerungen davon.

Kapitel 3

Die symmetrische Differenz auf orthomodularen Verbänden

3.1 Verschiedene Ausprägungen der symmetrischen Differenz

Die Operation der symmetrischen Differenz spielt in der Theorie der Booleschen Algebren eine große Rolle. So sind z.B. Eigenschaften wie Kongruenzvertauschbarkeit, -uniformität und -regularität eine unmittelbare Folge davon, daß die symmetrische Differenz als Termfunktion assoziativ, regulär und invertierbar ist.

Wenn man nun die symmetrische Differenz auf orthomodularen Verbänden untersuchen möchte, so fällt als erstes auf, daß verschiedene Terme, die in der Varität der Booleschen Algebren auf Grund der Distributivität von $\wedge$ und $\vee$ gleich sind, im orthomodularen Fall zu verschiedenen Termfunktionen führen. Betrachtet man die disjunktive und die konjunktive Normalform

$$\begin{aligned}x \nabla y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \\x \triangle y &= (x \vee y) \wedge (x' \vee y'),\end{aligned}$$

und berechnet diese Operationen auf MO_2 mit erzeugenden Elementen a, b , so gilt

$$a \nabla b = a \nabla b' = a' \nabla b = a' \nabla b' = 0, \quad a \triangle b = a \triangle b' = a' \triangle b = a' \triangle b' = 1,$$

für die übrigen Paare (Vertauschungen obiger natürlich ausgenommen) stimmen ∇ und $\triangle$ überein.

Eine erste Aufgabe ist es daher, festzustellen, wie viele verschiedene durch Terme induzierte Operationen es auf orthomodularen Verbänden gibt, die für Boolesche Algebren mit der symmetrischen Differenz übereinstimmen.

Satz 3.1 *Es gibt im freien orthomodularen Verband $\mathcal{F}(x, y)$ mit zwei freien Erzeugenden genau 6 verschiedene Elemente, die in jeder Booleschen Algebra die symmetrische Differenz als Termfunktion induzieren. Es sind dies:*

$$\begin{aligned}
x \nabla y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\
x +_l y &:= (x \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge y) = (x \vee (x' \wedge y)) \wedge (x' \vee y') \\
x +_{l'} y &:= (x \wedge y') \vee (x' \wedge (x \vee y)) = (x \vee y) \wedge (x' \vee (x \wedge y')) \\
x +_r y &:= (x \wedge y') \vee ((x' \vee y') \wedge y) = ((x \wedge y') \vee y) \wedge (x' \vee y') \\
x +_{r'} y &:= ((x \vee y) \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (x \vee y) \wedge ((x' \wedge y) \vee y') \\
x \triangle y &= (x \vee y) \wedge (x' \vee y').
\end{aligned}$$

Diese Elemente bilden in $\mathcal{F}(x, y)$ das Intervall $[x \nabla y, x \triangle y]$, welches isomorph zu MO_2 ist.

Beweis: Ein Term in zwei Unbestimmten x und y induziert genau dann in jeder Booleschen Algebra die symmetrische Differenz, wenn er dies für die freie Boolesche Algebra $\mathcal{F}_B(u, v)$ mit zwei freien Erzeugenden leistet. Betrachten wir den Homomorphismus

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}(x, y) & \rightarrow \mathcal{F}_B(u, v) \\ x & \mapsto u \\ y & \mapsto v \end{cases}.$$

Wir müssen also $\varphi^{-1}(u \nabla v) = [x \nabla y]_{\theta_\varphi}$, d.h. die Kongruenzklasse von $x \nabla y$ bzgl. der von φ induzierten Kongruenz θ_φ berechnen. Bezeichnet $c(x, y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x' \wedge y')$ den Kommutator von x und y , so gilt bekanntlich (siehe z.B. Abschnitt III.2 in [Be])

$$\mathcal{F}(x, y) \cong [0, c(x, y)] \times [0, c'(x, y)],$$

wobei $[0, c(x, y)] \cong \mathbf{2}^4$ (Boolesche Algebra mit 4 Atomen) und $[0, c'(x, y)] \cong MO_2$ ist. Da MO_2 einfach, $\mathcal{F}_B(u, v) \cong \mathbf{2}^4$ und jede Kongruenz auf einem direkten Produkt von Verbänden ein direktes Produkt von Kongruenzen ist (vgl. Satz I.13 in [Gr]), gilt $[0]_{\theta_\varphi} = [0, c'(x, y)]$ und folglich nach Proposition 2.22

$$[x \nabla y]_{\theta_\varphi} = [(x \nabla y) \wedge c(x, y), (x \nabla y) \vee c'(x, y)].$$

Proposition 2.22 liefert auch, daß die Zuordnung $t \mapsto t \vee ((x \nabla y) \wedge c(x, y))$ eine Bijektion zwischen $[0]\theta_\varphi$ und $[x \nabla y]\theta_\varphi$ ergibt. Nun ist

$$\begin{aligned} [0]\theta_\varphi = & \{0, x \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y'), x' \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y'), \\ & y \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y'), y' \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y), \\ & (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')\} \end{aligned}$$

und $(x \nabla y) \wedge c(x, y) = x \nabla y$, also erhält man der Reihe nach durch mehrfaches Anwenden des orthomodularen Gesetzes bzw. des Satzes von Foulis und Holland

$$\begin{aligned} t_1 &= x \nabla y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \\ t_2 &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')) = \\ & \quad (x' \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y')) = (x \vee (x' \wedge y)) \wedge (x' \vee y'), \\ t_3 &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x' \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y')) = \\ & \quad (x \wedge y') \vee (x' \wedge (x \vee y)) = (x \vee y) \wedge (x' \vee (x \wedge y')), \\ t_4 &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (y \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y')) = \\ & \quad (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')) = ((x \wedge y') \vee y) \wedge (x' \vee y'), \\ t_5 &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (y' \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y)) = \\ & \quad (x' \wedge y) \vee (y' \wedge (x \vee y)) = (x \vee y) \wedge ((x' \wedge y) \vee y'), \\ t_6 &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')) = \\ & \quad (x \wedge y') \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') = x \triangle y. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Im folgenden werden unter dem Sammelbegriff symmetrische Differenzen die im vorigen Satz angegebenen Terme bzw. in konkreten Algebren induzierten Termfunktionen verstanden.

In der nächsten Proposition werden einige Rechenregeln für die symmetrischen Differenzen zusammengefaßt.

Proposition 3.2 1. $a \triangle b = b \triangle a = a' \triangle b' = (a \vee b) \triangle (a \wedge b)$

2. $a \nabla b = b \nabla a = a' \nabla b' = (a \wedge b') \nabla (a' \wedge b)$

3. $a \triangle b = (a \nabla b')', a \nabla b = (a \triangle b')'$

4. $a +_l b = b +_r a = a' +_{l'} b' = b' +_{r'} a'$

5. $a +_l b = (a \wedge (a' \vee b')) +_l (a' \wedge b) = (a \vee (a' \wedge b)) +_l (a' \vee b')$

6. $(a +_l b)' = a' +_l b$

Alle Gleichungen können sehr einfach nachgerechnet werden. 4., 5. und 6. wurden nur für $+_l$ angeführt, entsprechende Gleichungen gelten natürlich auch für $+_r$, $+_{l'}$ und $+_{r'}$. 1., 2. und 5. und die äquivalenten Formulierungen für $+_r$, $+_{l'}$ und $+_{r'}$ zeigen insbesondere, daß für jede symmetrische Differenz $+$ das Element $a + b$ in der Form $x + y$ mit zwei kommutierenden Elementen x und y geschrieben werden kann. Da für (x, y) mit xCy alle symmetrischen Differenzen denselben Wert liefern, erhält man folgendes:

Korollar 3.3 *Jede symmetrische Differenz kann durch jede andere ausgedrückt werden, indem man die Argumente durch entsprechende Terme substituiert.*

Nun wird untersucht, inwieferne sich die symmetrischen Differenzen tatsächlich unterscheiden.

Satz 3.4 *Es sei $\mathcal{L}$ ein orthomodularer Verband und $a, b \in L$.*

Kommutieren die Elemente a und b , so stimmen für das Paar (a, b) alle symmetrischen Differenzen überein.

Kommutieren die Elemente a und b nicht, so stimmen keine zwei der symmetrischen Differenzen in (a, b) überein.

Beweis: Die erste Behauptung ist unmittelbar einsichtig, da unter der Voraussetzung aCb die von a und b erzeugte Unter algebra eine Boolesche Algebra ist.

Nun wird gezeigt: Führen irgendwelche zwei symmetrische Differenzen von a und b zum selben Ergebnis, so gilt aCb .

Ist $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (a \wedge (a' \vee b')) \vee (a' \wedge b)$, so folgt durch Bilden des Supremums mit a' die Gleichung $a' \vee (a \wedge b') = a' \vee (a \wedge (a' \vee b')) = a' \vee b'$, und daraus $b' \wedge (a' \vee (a \wedge b')) = (a' \wedge b') \vee (a \wedge b') = b'$, also aCb . Aus Symmetriegründen $(a \nabla b = b \nabla a = a' \nabla b' = b' \nabla a')$ gilt diese Implikation auch, wenn man die rechte Seite der Ausgangsgleichung durch $+_r$, $+_{l'}$ oder $+_{r'}$ ersetzt. Alle anderen Fälle lassen sich durch Bilden des Infimums beider Seiten der Ausgangsgleichung mit einer entsprechend gewählten symmetrischen Differenz auf einen dieser Fälle zurückführen.

□

Bemerkung: Der zweite Teil dieses Satzes ist im wesentlichen eine Konsequenz aus der Einfachheit von MO_2 .

Korollar 3.5 *Stimmen für einen orthomodularen Verband $\mathcal{L}$ irgendwelche zwei der symmetrischen Differenzen überein, so ist $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra.*

Beweis: Weil aCb für alle $a, b \in L$ äquivalent dazu ist, daß $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra ist, folgt diese Behauptung sofort aus dem letzten Satz. □

Die Gleichungen in 4. von Proposition 3.2 liefern in Kombination mit Korollar 3.5 unmittelbar das folgende Resultat:

Korollar 3.6 *Ist irgendeine der Operationen $+_l$, $+_r$, $+_{l'}$ oder $+_{r'}$ kommutativ, so ist $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra.*

3.2 Regularität der symmetrischen Differenzen

In diesem und den folgenden Abschnitten werden die in 3.1 gefundenen symmetrischen Differenzen in orthomodularen Verbänden auf Eigenschaften wie Assoziativität, Regularität oder Invertierbarkeit hin untersucht, die in Booleschen Algebren stets gelten.

Als erstes wird die Regularität behandelt. Eine binäre Operation $\circ$ auf einer Menge A heißt linksregulär oder linkskürzbar bzw. rechtsregulär oder rechtskürzbar, wenn für alle $a, b, c \in A$ aus $a \circ b = a \circ c$ bzw. $b \circ a = c \circ a$ die Gleichung $b = c$ folgt. Ist $\circ$ links- und rechtsregulär, so heißt $\circ$ regulär. Ein Element a heißt regulär bzgl. $\circ$, wenn für das Element a obige Implikationen für alle $b, c \in A$ gelten.

Es stellt sich heraus, daß ein direkter Zusammenhang zwischen Kürzbarkeit bzgl. Δ und ∇ und der Perspektivitätsrelation $\sim$ besteht:

Satz 3.7 *Es seien a und b beliebige Elemente in L . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $a \sim b$
2. $\exists x \in L : a \Delta x = b \Delta x$
3. $\exists x \in L : a \vee x = b \vee x, a \wedge x = b \wedge x$
4. $\exists x \in L : a \nabla x = b \nabla x$

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenz der ersten drei Aussagen, die vierte Aussage folgt dann leicht aus der Gleichung $(y\Delta z)' = y\nabla z'$.

Zur Äquivalenz $1 \Leftrightarrow 2$:

$\Rightarrow$ Wenn $a \sim b$, dann leistet das gemeinsame Komplement c das Gewünschte: $a\Delta c = b\Delta c = 1$.

$\Leftarrow$ Zunächst nehmen wir an, es existiert $x \in L$: $a\Delta x = b\Delta x = 1$. Dann ist x klarerweise ein gemeinsames Komplement von a und b , also gilt $a \sim b$.

Den allgemeinen Fall führen wir jetzt auf den soeben besprochenen Sonderfall zurück: Gilt $a\Delta x = b\Delta x$ mit einem $x \in L$, dann wählen wir $\bar{x} = (a\Delta x)' \Delta x = (b\Delta x)' \Delta x$ und formen um:

$$\bar{x} = ((a \wedge x) \vee (a' \wedge x') \vee x) \wedge (((a \vee x) \wedge (a' \vee x')) \vee x') = (x \vee (a' \wedge x')) \wedge (a' \vee x') = (x \wedge (a' \vee x')) \vee (a' \wedge x').$$

Bei Verwendung der letzten beiden Ausdrücke für $\bar{x}$ erhält man

$$a\Delta \bar{x} = (a \vee (x \wedge (a' \vee x')) \vee (a' \wedge x')) \wedge (a' \vee (x' \wedge (a \vee x)) \vee (a \wedge x)) = ((a \vee x) \vee (a' \wedge x')) \wedge ((a' \vee x') \vee (a \wedge x)) = 1.$$

Analog zeigt man $b\Delta \bar{x} = 1$, also gilt wie oben $a \sim b$.

Zur dritten Aussage ist zu bemerken, daß aus $a\Delta x = b\Delta x$, d.h. $(a \vee x) \wedge (a' \vee x') = (b \vee x) \wedge (b' \vee x')$ durch Bilden des Supremums mit x bzw. x' die Gleichung $a \vee x = b \vee x$ bzw. $a' \vee x' = b' \vee x'$, d.h. also $a \wedge x = b \wedge x$ folgt. Die Umkehrbarkeit dieses Schlußes ist offensichtlich.

□

Die Äquivalenz $1 \Leftrightarrow 2$ ist Inhalt von Proposition 3.4 in [DDL].

Man kann das Wesentliche der Aussage von Satz 3.2 auch so formulieren: Die Perspektivitätsrelation in einem orthomodularen Verband ist ein Maß dafür, inwieweit die symmetrischen Differenzen Δ und ∇ regulär sind.

Proposition 3.8 *Ein Element ist genau dann regulär bzgl. Δ oder ∇ , wenn es ein zentrales Element ist.*

Beweis: Sei c ein zentrales Element. Nehmen wir an es gilt $c\Delta a = c\Delta b$ für Elemente $a, b \in L$. Bilden wir auf beiden Seiten die symmetrische Differenz Δ mit c , so können wir auf beiden Seiten das Assoziativgesetz anwenden, denn auf der linken Seite rechnet man in der von a und c erzeugten Booleschen Unteralgebra, rechts in der von b und c erzeugten. Man erhält also $(c\Delta c)\Delta a = (c\Delta c)\Delta b$, also

$a = b$. Da in diesem Beweis die Operation $\triangle$ immer auf kommutierende Elemente angewendet wurde, kann $\triangle$ stets durch ∇ ersetzt werden, ohne daß sich am Ergebnis etwas ändert. Damit ist gezeigt, daß c regulär bzgl. $\triangle$ und ∇ ist.

Ist c nicht zentral und kommutiert x nicht mit c , so ist $y := (x \vee (c' \wedge x')) \wedge (x' \vee c')$ ein Komplement von c , das mit x kommutiert und folglich verschieden von c' ist. Daher gilt $c \triangle y = c \triangle c' = 1$ und $c \nabla y' = c \nabla c = 0$, also ist c nicht regulär bzgl. $\triangle$ und ∇ . □

Wesentlich verschieden zu den Operationen $\triangle$ und ∇ verhalten sich die übrigen symmetrischen Differenzen. Wir behandeln die Operation $+_l$ im Detail, die Aussagen über die restlichen drei Operationen lassen sich dann sofort über die Gleichungen aus Proposition 3.2 daraus ableiten.

Satz 3.9 *Die Operation $+_l$ ist rechtsregulär, im allgemeinen aber nicht linksregulär. Bezüglich der Linkskürzbarkeit gilt für $x, y, z \in L$:*

$$x +_l y = x +_l z \Leftrightarrow x \wedge y = x \wedge z \text{ und } x' \wedge y = x' \wedge z.$$

Beweis: Zuerst zeigen wir die Rechtsregularität: Es ist also aus $y +_l x = z +_l x$ zu folgern, daß $y = z$ gilt. Dazu leiten wir aus $y +_l x = z +_l x$ die Gleichungen

$$y \wedge x = z \wedge x, \quad y \wedge x' = z \wedge x', \quad y \wedge (y' \vee x) \wedge (y' \vee x') = z \wedge (z' \vee x) \wedge (z' \vee x')$$

her, woraus dann wegen

$$\begin{aligned} y &= (y \wedge x) \vee (y \wedge x') \vee (y \wedge (y' \vee x) \wedge (y' \vee x')) \\ z &= (z \wedge x) \vee (z \wedge x') \vee (z \wedge (z' \vee x) \wedge (z' \vee x')) \end{aligned}$$

die Gleichung $y = z$ folgt.

Sei also $(y \wedge (y' \vee x')) \vee (y' \wedge x) = (z \wedge (z' \vee x')) \vee (z' \wedge x)$. Man beachte, daß $(y' \wedge x)C(y \wedge (y' \vee x'))$ gilt (Analoges für die rechte Seite). Daher kann man bei den folgenden Umformungen der Ausgangsgleichung immer das Distributivgesetz anwenden: Schneiden mit x' liefert $y \wedge x' = z \wedge x'$, bei Durchschnitt mit x erhält man $y' \wedge x = z' \wedge x$, weiters folgt bei Schnitt mit $(y \vee x') = (z \vee x')$ die Gleichung $y \wedge (y' \vee x') = z \wedge (z' \vee x')$, woraus durch Schneiden mit $(y' \vee x) = (z' \vee x)$ die dritte der gewünschten Beziehungen hergestellt ist.

Um schließlich die erste Gleichung zu erhalten, bilden wir die Vereinigung von x' mit der Ausgangsgleichung, wenden auf den linken Ausdruck das Distributivgesetz an, nützen das orthomodulare Gesetz aus und erhalten auf diese Weise $y' \vee x' = z' \vee x'$, also $y \wedge x = z \wedge x$.

Nun zur Linkskürzbarkeit: Wie zuvor bekommt man aus der Voraussetzung $x +_l y = x +_l z$, d.h.

$$(x \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge y) = (x \wedge (x' \vee z')) \vee (x' \wedge z)$$

(alle Terme kommutieren mit x) durch Schneiden mit x' die Gleichung $x' \wedge y = x' \wedge z$ und durch Vereinigung mit x' die Gleichung $x' \vee y' = x' \vee z'$, also $x \wedge y = x \wedge z$. Umgekehrt ist das Bestehen dieser beiden Gleichungen natürlich hinreichend für $x +_l y = x +_l z$.

Als Beispiel dafür, daß $+_l$ im allgemeinen nicht linkskürzbar ist, dient MO_2 mit den erzeugenden Elementen a, b . Es gilt, wie man leicht nachrechnet $a +_l b = a = a +_l 0$.

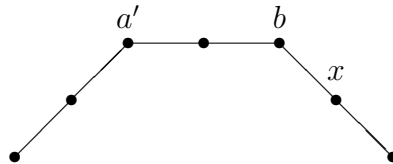
□

Man könnte vermuten, daß die bei der Linksregularität erhaltenen Bedingungen

$$x \wedge y = x \wedge z, \quad x' \wedge y = x' \wedge z \quad (3.1)$$

einen Zusammenhang mit der Perspektivitätsrelation $y \sim z$ aufweisen. Daß dies nicht der Fall ist, zeigen die beiden folgenden Beispiele. Zur Abkürzung bedeute $y \wr z$ die Existenz eines Elementes x , sodaß (3.1) gilt.

1. Betrachten wir MO_2 mit erzeugenden Elementen a, b . Dann gilt $a \sim b$, jedoch nicht $a \wr b$, denn $x \wedge a = x \wedge b$ hat $x \neq a, b, 1$ zur Folge und $x' \wedge a = x' \wedge b$ bewirkt $x \neq a', b', 0$.
2. Sei $\mathcal{L}$ der orthomodulare Verband mit nachfolgendem Greechie-Diagramm (siehe z.B. Abschnitt 4 in [Ka]) und bezeichnen a, b, x die im Diagramm angegebenen Elemente (a Koatom bzw. b, x Atome).



Dann gilt $x \wedge a = x \wedge b = 0$ und $x' \wedge a = x' \wedge b = b$, folglich $a \wr b$. Es gilt jedoch nicht $a \sim b$, weil in keinem der drei Blöcke ein gemeinsames Komplement von a und b existiert.

Was die Linksregularität eines einzelnen Elementes betrifft, erhält man ein zu Proposition 3.8 analoges Ergebnis.

Korollar 3.10 *Ein Element ist genau dann linksregulär bzgl. $+_l$, wenn es zentral ist.*

Beweis: Ist $x \in C(\mathcal{L})$, dann folgt aus (3.1) durch Bilden des Supremums der linken und rechten Seiten $y = z$.

Für $x \notin C(\mathcal{L})$, $y \not\subset x$ erhält man

$$\begin{aligned} x \wedge ((x \wedge y) \vee (x' \wedge y)) &= x \wedge y \\ x' \wedge ((x \wedge y) \vee (x' \wedge y)) &= x' \wedge y, \end{aligned}$$

aber $y \neq (x \wedge y) \vee (x' \wedge y)$, folglich ist x nicht links kürzbar.

□

Nun werden die Ergebnisse für die restlichen symmetrischen Differenzen zusammengefaßt. Sie lassen sich, wie bereits bemerkt, in einfacher Weise aus den Ergebnissen für $+_l$ ableiten.

Satz 3.11 *Die symmetrischen Differenzen $+_r$ und $+_{r'}$ sind linksregulär, $+_{l'}$ ist rechtsregulär. Was die Kürzbarkeit auf der jeweils anderen Seite betrifft, gelten die folgenden Bedingungen:*

$$\begin{aligned} y +_r x = z +_r x &\Leftrightarrow x \wedge y = x \wedge z \text{ und } x' \wedge y = x' \wedge z, \\ y +_{r'} x = z +_{r'} x &\Leftrightarrow x \vee y = x \vee z \text{ und } x' \vee y = x' \vee z, \\ x +_{l'} y = x +_{l'} z &\Leftrightarrow x \vee y = x \vee z \text{ und } x' \vee y = x' \vee z. \end{aligned}$$

3.3 Invertierbarkeit der symmetrischen Differenzen

Als nächstes kommen wir zur Eigenschaft der Invertierbarkeit. Eine binäre Operation $\circ$ auf einer Menge A heißt linksinvertierbar bzw. rechtsinvertierbar, wenn für alle $a, b \in A$ ein $c \in A$ existiert, sodaß $c \circ a = b$ bzw. $a \circ c = b$ gilt. Ist $\circ$ links- und rechtsinvertierbar, so heißt $\circ$ invertierbar. Ein Element a heißt invertierbar bzgl. $\circ$, wenn die Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ x = b$ für alle $b \in A$ lösbar sind.

Satz 3.12 *Für Elemente $a, b \in L$ ist die Gleichung $a \triangle x = b$ bzw. $a \nabla x = b$ genau dann lösbar, wenn aCb .*

Beweis: Da für beliebiges x die Elemente $a\Delta x$ und $a\nabla x$ mit a kommutieren, ist die Notwendigkeit der Bedingung klar.

Gilt andererseits aCb , so ist die von a und b erzeugte Unteralgebra eine Boolesche Algebra und folglich Δ eingeschränkt auf diese Menge assoziativ. Daraus folgt $a\Delta(a\Delta b) = (a\Delta a)\Delta b = b$. Für die Operation ∇ argumentiert man analog.

□

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Lemma 3.6 in [DDL].

Wie alle Lösungen der Gleichung $a\Delta x = b$ bzw. $a\nabla x = b$ im Fall aCb aussehen, werden wir in Satz 3.17 angeben.

Als unmittelbare Konsequenz aus dem letzten Satz ergibt sich folgendes:

Korollar 3.13 *Ein Element ist genau dann invertierbar bzgl. Δ oder ∇ , wenn es ein zentrales Element ist.*

Nach den Ergebnissen über die Regularität der symmetrischen Differenzen ist es nicht überraschend, daß auch hier die übrigen symmetrischen Differenzen ein anderes Verhalten zeigen.

Satz 3.14 *Die Operationen $+_l$ und $+_{l'}$ sind linksinvertierbar, $+_r$ und $+_{r'}$ rechtsinvertierbar. Weiters gilt für beliebige Elemente $a, b \in L$:*

$$\begin{aligned} aCb &\Leftrightarrow \exists x : a +_l x = b \Leftrightarrow \exists x : a +_{l'} x = b \Leftrightarrow \\ &\quad \exists x : x +_r a = b \Leftrightarrow \exists x : x +_{r'} a = b. \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen wieder nur die Behauptungen für $+_l$, alle übrigen können einfach daraus abgeleitet werden.

$+_l$ ist linksinvertierbar: Seien a und b beliebige Elemente aus L . Wir zeigen nun, daß die Gleichung $(b +_l a) +_l a = b$ gilt:

$$\begin{aligned} (b +_l a) +_l a &= ((b \wedge (a' \vee b')) \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge (b' \vee (\underline{a \wedge b}))) \wedge (a' \vee b))) \wedge \\ &\quad (a' \vee (b' \wedge (\underline{a' \vee b}))) \vee (a \wedge b) = \\ &= ((b \wedge (a' \vee b')) \vee (a \wedge b') \vee (((a \wedge b') \vee (\underline{a \wedge b})) \wedge (a' \vee b))) \wedge \\ &\quad (((a' \vee b') \wedge (a' \vee b)) \vee (\underline{a \wedge b})) = \\ &= ((b \wedge (a' \vee b')) \vee (a \wedge b') \vee (\underline{a \wedge b})) \wedge (a' \vee b) = \\ &= (b \vee (a \wedge b')) \wedge (a' \vee b) = b. \end{aligned}$$

Nun zur Implikation $a +_l x = b \Rightarrow aCb$: Da $(a +_l x)Ca$ für jedes $x \in L$, ist dies klar.

Kommutiert umgekehrt a mit b , so gilt nach Satz 3.4 $a +_l (a +_l b) = a \triangle (a \triangle b)$ und wie im Beweis von Satz 3.12 ausgeführt ist dann $a \triangle (a \triangle b) = b$, also kann $x = a +_l b$ gewählt werden.

□

Faßt man die Ergebnisse über Regularität und Invertierbarkeit zusammen, dann erhält man folgendes Resultat:

Satz 3.15 *Für beliebige Elemente $a, b \in L$ besitzt jede der Gleichungen*

$$x +_l a = b, \quad a +_r x = b, \quad x +_{l'} a = b, \quad a +_{r'} x = b$$

genau eine Lösung. Diese lautet für die ersten beiden Gleichungen $x = b +_l a = a +_r b$, und für letzten zwei Gleichungen $x = b +_{l'} a = a +_{r'} b$.

Beweis: Die Aussagen, die die Operation $+_l$ betreffen, wurden bereits in Satz 3.9 und im Beweis von Satz 3.14 hergeleitet. Beachtet man die Identität $u +_r v = v +_l u$, so erhält man daraus unmittelbar die Aussagen für $+_r$.

Nun rechnen wir $(b +_{l'} a) +_{l'} a = b$ nach, wobei wir die Identitäten $u +_{l'} v = u' +_l v'$ und $(u +_l v)' = u' +_l v$ (siehe Proposition 3.2) verwenden:

$$(b +_{l'} a) +_{l'} a = (b +_{l'} a)' +_l a' = (b' +_l a')' +_l a' = (b +_l a') +_l a' = b.$$

Unter Berücksichtigung von $u +_{r'} v = v +_{l'} u$ folgen die Behauptungen für $+_r$ sofort.

□

Vertauscht man die Argumente auf den linken Seiten in den im vorigen Satz angeführten Gleichungen, so besitzen die entstehenden Gleichungen wie auch die Gleichungen $a \triangle x = b$ und $a \nabla x = b$ genau dann eine Lösung, wenn a mit b kommutiert. Wie einfache Beispiele zeigen, sind diese Lösungenn jedoch im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt. Im folgenden werden alle Lösungen angegeben. Zunächst beweisen wir:

Lemma 3.16 *Unter der Voraussetzung aCb gilt:*

1. $a +_l x = b \Leftrightarrow x \wedge a = b' \wedge a$ und $x \wedge a' = b \wedge a'$.
2. $a \triangle x = b \Leftrightarrow x \wedge a = b' \wedge a$ und $x \vee a = b \vee a$.

Beweis: Zu 1.: Gilt $(a \vee (x \wedge a')) \wedge (a' \vee x') = b$, so erhält man daraus durch Schneiden bzw. Vereinigen mit a' und Anwendung des Distributivgesetzes $x \wedge a' = b \wedge a'$ bzw. $a' \vee x' = b \vee a'$, also $x \wedge a = b' \wedge a$. Gelten umgekehrt diese beiden Gleichungen, so bekommt man sofort durch Einsetzen unter Beachtung von aCb die Beziehung $a +_l x = b$.

Zu 2.: Wie im Beweis zu 1. erhält man aus $(a \vee x) \wedge (a' \vee x') = b$ durch Vereinigung mit a bzw. a' die behaupteten Gleichungen. Auch die Umkehrung kann analog zu 1. bewerkstelligt werden.

□

Satz 3.17 Seien $a, b \in L$ gegeben, und gelte aCb .

1. Man erhält sämtliche Lösungen der Gleichung $a +_l x = b$ bzw. der dazu äquivalenten Gleichung $x +_r a = b$ nach der Formel

$$x = y \wedge (a \vee b \vee y') \wedge (a' \vee b' \vee y'),$$

wobei y alle Elemente größer gleich $a \triangle b$ durchläuft.

2. Man erhält sämtliche Lösungen der Gleichung $a +_{l'} x = b$ bzw. der dazu äquivalenten Gleichung $x +_{r'} a = b$ nach der Formel

$$x = y \vee (a \wedge b' \wedge y') \vee (a' \wedge b \wedge y'),$$

wobei y alle Elemente kleiner gleich $a \nabla b$ durchläuft.

3. Man erhält sämtliche Lösungen der Gleichung $a \triangle x = b$ nach der Formel

$$x = (y \wedge (a' \vee b' \vee y')) \vee (a' \wedge b \wedge y') = (y \vee (a' \wedge b \wedge y')) \wedge (a' \vee b' \vee y'),$$

wobei y alle Elemente im Intervall $[a \wedge b', a \vee b]$ durchläuft.

4. Man erhält sämtliche Lösungen der Gleichung $a \nabla x = b$ nach der Formel

$$x = (y \wedge (a \vee b \vee y')) \vee (a \wedge b' \wedge y') = (y \vee (a \wedge b' \wedge y')) \wedge (a \vee b \vee y'),$$

wobei y alle Elemente im Intervall $[a' \wedge b, a' \vee b']$ durchläuft.

Beweis: Wir werden 1. und 3. im Detail beweisen, 2. und 4. folgen dann in einfacher Weise aus den Formeln $a +_{l'} x = x +_{r'} a = a' +_l x'$ und $a \nabla x = (a' \triangle x)'$.

Zu 1.: Sei $y \geq a \triangle b$ und $x = y \wedge (a \vee b \vee y') \wedge (a' \vee b' \vee y')$. Nach Lemma 3.16 ist zu zeigen: $x \wedge a = b' \wedge a$ und $x \wedge a' = b \wedge a'$.

$$x \wedge a = y \wedge a \wedge (b' \vee (a' \vee y')) = y \wedge ((\underline{a \wedge b'}) \vee (a \wedge (a' \vee y'))).$$

Um erneut das Distributivgesetz anwenden zu können, zeigen wir, daß der unterstrichene Term mit beiden übrigen kommutiert: $(a \wedge b')Cy$ gilt wegen $y \geq a \triangle b \geq a \wedge b'$. Aus $y' \leq (a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$ folgt nach einfacher Rechnung $a \wedge (a' \vee y') \leq (a \wedge b)'$, also gilt $(a \wedge b')C(a \wedge (a' \vee y'))$.

$$x \wedge a = \underbrace{(y \wedge a \wedge b')}_{=a \wedge b'} \vee \underbrace{((y \wedge a) \wedge (a' \vee y'))}_{=0} = a \wedge b'.$$

Ganz ähnlich wie oben erhält man:

$$\begin{aligned} x \wedge a' &= y \wedge a' \wedge (b \vee (a \vee y')) = y \wedge ((\underline{a' \wedge b}) \vee (a' \wedge (a \vee y'))) = \underbrace{(y \wedge a' \wedge b)}_{=a' \wedge b} \vee \\ &\underbrace{((y \wedge a') \wedge (a \vee y'))}_{=0} = a' \wedge b. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß alle angegebenen Elemente Lösungen der Gleichung $a +_l x = b$ sind. Jetzt muß noch sichergestellt werden, daß jede Lösung in dieser Form dargestellt werden kann.

Sei also $a +_l x = b$, d.h. $x \wedge a = b' \wedge a$ und $x \wedge a' = b \wedge a'$. Daraus folgt $x \geq (x \wedge a) \vee (x \wedge a') = a \triangle b$ und wir können x in der gewünschten Gestalt darstellen, wenn wir x an Stelle von y in die Formel einsetzen:

$$x \wedge (a \vee b \vee x') \wedge (a' \vee b' \vee x') = x \wedge (b \vee \underbrace{(a \vee x')}_{=a \vee b'}) \wedge (b' \vee \underbrace{(a' \vee x')}_{=a' \vee b}) = x.$$

Zu 3.: Sei $y \in [a \wedge b', a \vee b]$ und $x = (y \wedge (a' \vee b' \vee y')) \vee (a' \wedge b \wedge y') = (y \vee (a' \wedge b \wedge y')) \wedge (a' \vee b' \vee y')$. Nach Lemma 3.16 ist zu zeigen: $x \wedge a = b' \wedge a$ und $x \vee a = b \vee a$. Um $x \vee a$ zu berechnen, verwenden wir die erste Darstellung von x , für $x \wedge a$ die zweite.

$$x \vee a = (a \vee (y \wedge (\underline{a' \vee b' \vee y'}))) \vee (a' \wedge b \wedge y') = y \vee a \vee (a' \wedge b \wedge y') = y \vee ((\underline{a \vee b}) \wedge (a \vee (a' \wedge y'))).$$

Wie vorher zeigt man, daß aus der Bedingung $y \in [a \wedge b', a \vee b]$ die Vertauschbarkeitsrelationen folgen, welche zur Anwendung des Distributivgesetzes benützt werden.

$$x \vee a = \underbrace{(a \vee b \vee y)}_{=a \vee b} \wedge \underbrace{((a \vee y) \vee (a' \wedge y'))}_{=1} = a \vee b.$$

$$x \wedge a = (a \wedge (y \vee (\overbrace{a' \wedge b \wedge y'}^{=a \wedge b'}))) \wedge (a' \vee b' \vee y') = y \wedge a \wedge (a' \vee b' \vee y') = y \wedge ((\overbrace{a \wedge b'}^{=a \wedge b'}) \vee (a \wedge (a' \vee y'))) = \underbrace{(a \wedge b' \wedge y)}_{=a \wedge b'} \vee \underbrace{((a \wedge y) \wedge (a' \vee y'))}_{=0} = a \wedge b'.$$

Schließlich muß wieder gezeigt werden, daß mit dieser Formel jede Lösung dargestellt werden kann.

Sei $a \triangle x = b$. Dann folgt aus Lemma 3.16 $x \wedge a = b' \wedge a$, $x \vee a = b \vee a$ und damit $x \in [a \wedge b', a \vee b]$. Setzen wir in der ersten Formel für die Lösungen $y = x$ ein, so erhalten wir:

$$(x \wedge (a' \vee b' \vee x')) \vee (a' \wedge b \wedge x') = (x \wedge (b' \vee (\underbrace{a' \vee x'}_{=a' \vee b}))) \vee (b \wedge (\underbrace{a' \wedge x'}_{=a' \wedge b'})) = x.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Im Unterabschnitt 2.4 haben wir Pixley–Terme für orthomodulare Verbände angegeben (siehe Proposition 2.33). Ein dreistelliger Term $m(x, y, z)$ heißt Maltsev–Term für eine Varietät $\mathcal{V}$, wenn in allen Algebren von $\mathcal{V}$ die Gleichungen

$$m(x, x, y) = m(y, x, x) = y$$

gelten. Die Existenz eines Maltsev–Termes ist äquivalent zur Kongruenzvertauschbarkeit (siehe z.B. Satz 6.4.2 in [Ih]). Mit Hilfe von $+_l$ läßt sich ein Maltsev–Term sehr einfach aufbauen:

Proposition 3.18 *In der Varietät der orthomodularen Verbände ist der Term*

$$m(x, y, z) = (x +_l y) +_l z$$

ein Maltsev–Term aber kein Pixley–Term.

Beweis: Die Gleichung $m(x, x, y) = y$ ist wegen $(x +_l x) +_l y = 0 +_l y = y$ erfüllt. Weiters gilt $m(y, x, x) = (y +_l x) +_l x = y$ nach Satz 3.15.

Es ist $m(x, y, z)$ aber kein Pixley–Term:

$$\begin{aligned} m(x, y, x) &= (x +_l y) +_l x = ((x \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge y)) +_l x = \\ &= ((x \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge y) \vee ((x' \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee y') \wedge x)) \wedge \\ &= ((x' \wedge (x \vee y')) \vee (x \wedge y) \vee x') = \\ &= ((x \wedge (x' \vee y')) \vee (x' \wedge y) \vee ((x' \vee (x \wedge y)) \wedge x)) \wedge ((x \wedge y) \vee x') = \\ &= ((x' \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee x') = (x' \wedge y) \vee (x \wedge ((x \wedge y) \vee x')) = \\ &= (x' \wedge y) \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

Kommutiert also x nicht mit y , so gilt $m(x, y, x) \neq y$.

□

Die Operation $+_l$ ist rechtsregulär und linksinvertierbar. Es stellt sich die Frage, ob nicht auch (beidseitig) reguläre oder invertierbare Termfunktionen in orthomodularen Verbänden existieren. Der nächste Satz beantwortet dies negativ.

Satz 3.19 *In der Varietät der orthomodularen Verbände gibt es keinen Term in zwei Unbestimmten, der in jedem orthomodularen Verband eine reguläre oder invertierbare Operation induziert.*

Beweis: Sei t ein beliebiger Term in zwei Unbestimmten und werde auch die von t im orthomodularen Verband MO_2 induzierte Termfunktion mit t bezeichnet. Weiters seien a und b erzeugende Elemente von MO_2 und bezeichne $\varphi_a, \varphi_b : MO_2 \rightarrow MO_2$ die Transpositionen $(a \ a')$ und $(b \ b')$. φ_a, φ_b sind Automorphismen von MO_2 und daher mit t verträglich.

Ist $t(a, b) \notin \{a, a'\}$, dann gilt $t(a, b) = \varphi_a(t(a, b)) = t(\varphi_a(a), \varphi_a(b)) = t(a', b)$.

Ist $t(a, b) \notin \{b, b'\}$, dann gilt $t(a, b) = \varphi_b(t(a, b)) = t(\varphi_b(a), \varphi_b(b)) = t(a, b')$.

Da einer dieser beiden Fälle eintreten muß, ist t entweder nicht rechtsregulär oder nicht linksregulär und, weil MO_2 endlich ist, auch entweder nicht linksinvertierbar oder nicht rechtsinvertierbar.

□

Dieser Satz entstammt der Arbeit [DDL] (Satz 3.8).

3.4 Assoziativität der symmetrischen Differenzen

Nun gehen wir dazu über, die symmetrischen Differenzen auf Assoziativität zu prüfen.

Proposition 3.20 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. aCb
2. $(a \triangle b) \triangle b = a$
3. $(a \nabla b) \nabla b = a$

$$4. \quad a +_l (a +_l b) = b$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen: Wenn aCb , so rechnen wir in einer Booleschen Unteralgebra, und es gilt $(a\triangle b)\triangle b = a\triangle(b\triangle b) = a\triangle 0 = a$.

Zum Beweis der Umkehrung berechnen wir: $(a\triangle b)\triangle b = (((a \vee b) \wedge (a' \vee b')) \vee \underline{b}) \wedge ((a \wedge b) \vee (a' \wedge b') \vee b') = (a \vee b) \wedge ((a \wedge b) \vee b')$. Ist dieser Ausdruck gleich a , so erhalten wir durch Schneiden mit a und Anwenden des Distributivgesetzes $(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a$ und damit aCb .

Die Äquivalenz von 2. und 3. erhält man sofort aus der Gleichung $(a\triangledown b)\triangledown b = ((a'\triangle b)\triangle b)'$.

Zu $1 \Leftrightarrow 4$: Wenn aCb , so ergibt sich so wie oben die Gültigkeit von 4. Umgekehrt berechnen wir wieder: $a +_l (a +_l b) = (\underline{a} \vee (a' \wedge (a \vee (a' \wedge b))) \wedge (a' \vee b')) \wedge (a' \vee (a' \wedge (a \vee b'))) \vee (a \wedge b) = (a \vee (a' \wedge b)) \wedge (\underline{a'} \vee (a \wedge b)) = (\underline{a} \wedge (a' \vee (a \wedge b))) \vee (a' \wedge b) = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$. Stimmt dieser Ausdruck mit b überein, so gilt aCb .

□

Die Aussage $1 \Leftrightarrow 2$ ist in Lemma 3.1 in [DDL] enthalten.

Für die übrigen symmetrischen Differenzen können natürlich zu 4. verwandte Gleichungen angegeben werden, die zu aCb äquivalent sind. Damit erhält man sofort:

Satz 3.21 *Ist irgendeine der symmetrischen Differenzen in $\mathcal{L}$ assoziativ, so ist $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra.*

Wir wollen nun auch einige hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß für einzelne Elemente das Assoziativgesetz angewendet werden kann.

Proposition 3.22 *Wenn b mit a und c kommutiert, dann gelten die Gleichungen*

$$a\triangle(b\triangle c) = (a\triangle b)\triangle c, \quad a\triangledown(b\triangledown c) = (a\triangledown b)\triangledown c.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst die erste Gleichung. Da alle auftretenden Elemente mit b kommutieren, reicht es hin zu zeigen, daß das Infimum der linken Seite mit b bzw. b' mit dem Infimum der rechten Seite mit b bzw. b' übereinstimmt. Die linke Seite lautet:

$$(a \vee ((b \vee c) \wedge (b' \vee c'))) \wedge (a' \vee (b' \wedge c') \vee (b \wedge c)).$$

Schneiden mit b liefert: $((a \wedge b) \vee (b \wedge c')) \wedge ((a' \wedge b) \vee (b \wedge c))$.

Schneiden mit b' ergibt: $((a \wedge b') \vee (b' \wedge c)) \wedge ((a' \wedge b') \vee (b' \wedge c'))$.

Die rechte Seite hat die folgende Gestalt:

$$(((a \vee b) \wedge (a' \vee b')) \vee c) \wedge ((a' \wedge b') \vee (a \wedge b) \vee c').$$

Durch Schnitt mit b erhält man daraus: $((a' \wedge b) \vee (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c'))$.

Schneiden mit b' führt zu $((a \wedge b') \vee (b' \wedge c)) \wedge ((a' \wedge b') \vee (b' \wedge c'))$.

Da die entsprechenden Ausdrücke übereinstimmen, ist damit die erste Gleichung gezeigt. Mit Hilfe der Umformung

$$a \nabla (b \nabla c) = (a \triangle (b \nabla c)')' = (a \triangle (b' \triangle c))'$$

kann man die Gültigkeit der zweiten Gleichung auf die der ersten Gleichung zurückführen.

□

Ein anderer Beweis für diesen Satz wurde in [La], Satz 4.2 angegeben.

Bemerkungen:

1. Die für beliebige a, b gültige Gleichung $a \triangle (b \triangle a) = (a \triangle b) \triangle a$ zeigt, daß die Implikation in der letzten Proposition nicht umgekehrt werden kann.
2. Aus derselben Voraussetzung wie in der letzten Proposition kann im allgemeinen nicht $a +_l (b +_l c) = (a +_l b) +_l c$ gefolgert werden, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $\mathcal{L} = MO_2 \times \mathbf{2}^1$, seien x und y erzeugende Elemente von MO_2 , $a = (x, 0)$, $b = (1, 0)$ und $c = (y, 0)$. Dann rechnet man leicht nach, daß zwar bCa, c , aber $a +_l (b +_l c) = a$ und $(a +_l b) +_l c = (x', 0) \neq a$ gilt.

Es gibt jedoch auch für $+_l$ und die übrigen symmetrischen Differenzen ein Proposition 3.22 vergleichbares Ergebnis.

Proposition 3.23 *Wenn a mit b und c kommutiert, dann gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned} a +_l (b +_l c) &= (a +_l b) +_l c, & a +_{l'} (b +_{l'} c) &= (a +_{l'} b) +_{l'} c, \\ (c +_r b) +_r a &= c +_r (b +_r a), & (c +_{r'} b) +_{r'} a &= c +_{r'} (b +_{r'} a). \end{aligned}$$

Beweis: Die Beweismethode ist dieselbe wie in Proposition 3.22, lediglich mit vertauschten Rollen für a und b . Wieder beweisen wir nur die erste Gleichung, die übrigen folgen unmittelbar daraus. Die linke Seite dieser Gleichung lautet:

$$(a \vee (a' \wedge (b \vee (b' \wedge c))) \wedge (b' \vee c')) \wedge (a' \vee (b' \wedge (b \vee c')) \vee (b \wedge c)) = \\ (a \vee ((b \vee (b' \wedge c)) \wedge (b' \vee c'))) \wedge (a' \vee (b' \wedge (b \vee c')) \vee (b \wedge c)).$$

Durch Schnitt mit a erhält man:

$$a \wedge (a' \vee (b' \wedge (b \vee c')) \vee (b \wedge c)) = (a \wedge b' \wedge (b \vee c')) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

Schneiden mit a' ergibt:

$$a' \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee (b' \wedge c))) \wedge (b' \vee c')) = ((a' \wedge b) \vee (a' \wedge b' \wedge c)) \wedge ((a' \wedge b') \vee (a' \wedge c')).$$

Die rechte Seite lautet:

$$((a \wedge (a' \vee b')) \vee (a' \wedge b) \vee ((a' \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b') \wedge c)) \wedge ((a' \wedge (a \vee b')) \vee (a \wedge b) \vee c') = \\ ((a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \vee ((a' \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge c) \wedge ((a' \wedge b') \vee (a \wedge b) \vee c').$$

Schneidet man den letzten Ausdruck mit a , so erhält man:

$$((a \wedge b') \vee (a \wedge b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c')) = a \wedge (b' \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c') = \\ a \wedge ((b' \wedge (b \vee c')) \vee (b \wedge c)) = (a \wedge b' \wedge (b \vee c')) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

Schneiden mit a' liefert: $((a' \wedge b) \vee (a' \wedge b' \wedge c)) \wedge ((a' \wedge b') \vee (a' \wedge c'))$.

Damit ist $a +_l (b +_l c) = (a +_l b) +_l c$ gezeigt.

□

Bemerkungen:

1. Auch hier ließe sich mit der in Satz 4.2 in [La] verwendeten Methode ein etwas kürzerer Beweis angeben.
2. Wieder lassen sich einfache Beispiele dafür finden, daß diese Implikation nicht umgekehrt werden kann und daß sie in dieser Form für Δ und ∇ nicht gilt. Ganz wesentlich für die Anwendung des Assoziativgesetzes für symmetrische Differenzen unter den im Satz angegebenen Voraussetzungen ist also die Position des Elementes, welches mit den beiden übrigen Elementen kommutiert: Während dieses Element bei Δ und ∇ in der Mitte stehen muß, hat es bei $+_l$ und $+_{l'}$ links zu stehen, bei $+_r$ und $+_{r'}$ rechts.

3.5 Verschiedene Schnittoperationen und Distributivität

Unter einer Schnittoperation wollen wir im folgenden nicht nur die fundamentale Operation $\wedge$, sondern auch alle jene durch zweistellige Termfunktionen induzierten Operationen verstehen, die in allen Booleschen Algebren mit der Operation $\wedge$ übereinstimmen. Unser Ziel ist dann die Beantwortung der Frage, ob in einem orthomodularen Verband eine der Schnittoperationen distributiv bzgl. einer symmetrischen Differenz ist.

Zunächst werden alle Schnittoperationen ermittelt.

Satz 3.24 *Es gibt im freien orthomodularen Verband $\mathcal{F}(x, y)$ mit zwei freien Erzeugenden genau 6 verschiedene Elemente, die in jeder Booleschen Algebra als Termfunktion die Durchschnittsoperation $\wedge$ induzieren. Es sind dies:*

$$\begin{aligned} x \wedge y & \\ x \wedge_1 y &:= x \wedge (x' \vee y) \\ x \wedge_2 y &:= (x \vee y') \wedge y \\ x \wedge_3 y &:= (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \\ x \wedge_4 y &:= (x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee y') \\ x \wedge_s y &:= (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \end{aligned}$$

Diese Elemente bilden in $\mathcal{F}(x, y)$ das Intervall $[x \wedge y, x \wedge_s y]$, welches isomorph zu MO_2 ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.1. Verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie in jenem Beweis, so gilt es, die Elemente in $\varphi^{-1}(u \wedge v) = [x \wedge y]\theta_\varphi$ zu berechnen, wobei die Zuordnung $t \mapsto t \vee ((x \wedge y) \wedge c(x, y))$ eine Bijektion zwischen $[0]\theta_\varphi$ und $[x \wedge y]\theta_\varphi$ liefert. Es ist $(x \wedge y) \wedge c(x, y) = x \wedge y$ und folglich erhalten wir die durch die folgenden Termfunktionen induzierten Schnittoperationen:

$$\begin{aligned} t_1 &= (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y, \\ t_2 &= (x \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')) = x \wedge (x' \vee y) \\ t_3 &= (x \wedge y) \vee (y \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y')) = (x \vee y') \wedge y \\ t_4 &= (x \wedge y) \vee (x' \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y')) = (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y)) \\ t_5 &= (x \wedge y) \vee (y' \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y)) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee y') \\ t_6 &= (x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \wedge (x' \vee y')) = \\ &\quad (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y) \end{aligned}$$

Daher ist die Menge der Schnittoperationen gegeben durch $[x \wedge y, x \wedge_s y]$ und $[x \wedge y, x \wedge_s y] \cong MO_2$.

□

Wie bei den symmetrischen Differenzen kann in bezug auf die Verschiedenheit der Schnittoperationen folgendes ausgesagt werden:

Satz 3.25 *Es sei $\mathcal{L}$ ein orthomodularer Verband und $a, b \in L$.*

Kommutieren die Elemente a und b , so stimmen für das Paar (a, b) alle Schnittoperationen überein.

Kommutieren die Elemente a und b nicht, so stimmen keine zwei der Schnittoperationen in (a, b) überein.

Beweis: Kommutieren a und b , so ist die von $\{a, b\}$ erzeugte Unteralgebra eine Boolesche Algebra, woraus die Gleichheit aller Schnittoperationen folgt.

Gilt $a \wedge b = a \wedge (a' \vee b)$ oder $a \wedge b = (a \vee b) \wedge (a \vee b') \wedge (a' \vee (a \wedge b))$, so folgt durch Bilden des Supremums mit b in beiden Fällen (im zweiten Fall ist zu beachten, daß $(a \vee b) \wedge (a \vee b')$ sowohl mit b als auch mit $a' \vee (a \wedge b)$ kommutiert) $b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b)$, also gilt aCb . Alle übrigen Fälle lassen sich wie im Beweis von Satz 3.4 darauf zurückführen.

□

Wir geben einige unmittelbar einsichtige Eigenschaften der Schnittoperationen an, die in den nachfolgenden Rechnungen verwendet werden.

Lemma 3.26 *Für alle $x, y \in L$ gilt:*

1. $x \wedge_s y = y \wedge_s x$, $x \wedge_1 y = y \wedge_2 x$, $x \wedge_3 y = y \wedge_4 x$.
2. $x \wedge y$ und $x \wedge_s y$ kommutieren mit x und y .
3. $x \wedge_1 y$ und $x \wedge_3 y$ kommutieren mit x , im allgemeinen aber nicht mit y .
4. $x \wedge_2 y$ und $x \wedge_4 y$ kommutieren mit y , im allgemeinen aber nicht mit x .

Die Schnittoperationen $\wedge$ und $\wedge_s$ wurden bereits in [La] auf Distributivität bzgl. $\triangle$ und ∇ untersucht. Wir werden diese Resultate auf alle möglichen Schnittoperationen $\odot$ und symmetrische Differenzen $+$ verallgemeinern. Zu beachten ist dabei, daß die Operationen $\wedge_1, \wedge_2, \wedge_3$ und $\wedge_4$ nicht kommutativ sind und daher die Gleichungen $x \odot (y + z) = (x \odot y) + (x \odot z)$ und $(x + y) \odot z = (x \odot z) + (y \odot z)$ gesondert zu untersuchen sind.

Proposition 3.27 Für $x, y \in L$ ist jede der unter 1.-3. angegebenen Gleichungen äquivalent zu $x \odot y$:

1. $\odot \in \{\wedge, \wedge_s, \wedge_1, \wedge_3\}$ und $+$ eine beliebige symmetrische Differenz:

$$x \odot (y + (x \vee y)) = (x \odot y) + (x \odot (x \vee y))$$

2. $\odot \in \{\wedge_1, \wedge_3\}$ und $+$ $\in \{\nabla, +_l, +_{r'}, \Delta\}$:

$$(y + (x \vee y)) \odot x = (y \odot x) + ((x \vee y) \odot x)$$

3. $\odot \in \{\wedge_1, \wedge_3\}$ und $+$ $\in \{+_r, +_{l'}\}$:

$$((x \vee y) + y) \odot x = ((x \vee y) \odot x) + (y \odot x)$$

Beweis: Wenn x mit y kommutiert, dann stimmen alle Schnittoperationen mit $\wedge$ und alle symmetrischen Differenzen mit Δ überein. Alle angegebenen Gleichungen sind dann Spezialfälle des Distributivgesetzes für $\wedge$ bzgl. Δ in der von x und y erzeugten Booleschen Unteralgebra und liefern den Wert $x \wedge y'$.

Wir werden nun der Reihe nach die linken und rechten Seiten (im folgenden zur Abkürzung mit L und R bezeichnet) der Gleichungen in 1., 2., und 3. ausrechnen und dabei sehen, daß wir das Resultat jeweils in der Form $x \odot y'$ darstellen können. Aus der Gleichheit von L und R folgt dann mit Satz 3.25 stets $x \odot y$.

Vorweg noch eine Bemerkungen: Da x mit $x \vee y$ kommutiert, gelten für eine beliebige symmetrische Differenz $+$ und für eine beliebige Schnittoperation $\odot$ folgende Beziehungen:

$$y + (x \vee y) = (x \vee y) + y = (x \vee y) \wedge y', \quad x \odot (x \vee y) = (x \vee y) \odot x = x$$

(siehe Satz 3.4 und Satz 3.25).

Zu 1.: Die rechte Seite der Gleichung lautet (gemäß obiger Bemerkung) $(x \odot y) + x$. Da für $\odot \in \{\wedge, \wedge_s, \wedge_1, \wedge_3\}$ gilt, daß $x \odot y$ mit x kommutiert (siehe Lemma 3.26), liefert $(x \odot y) + x$ für jede symmetrische Differenz $+$ den gleichen Wert. Nun der Reihe nach zu den einzelnen Schnittoperationen:

$$\boxed{\odot = \wedge} \text{ L lautet } x \wedge (y + (x \vee y)) = x \wedge ((x \vee y) \wedge y') = x \wedge y'.$$

R ergibt $(x \wedge y) + x = x \wedge (x' \vee y') = x \wedge_1 y'$.

$$\boxed{\odot = \wedge_s} \text{ L: } x \wedge_s ((x \vee y) \wedge y') = (x \vee (y' \wedge (x \vee y))) \wedge (x \vee y \vee (x' \wedge y')) \wedge \\ (x' \vee (y' \wedge (x \vee y))) = (x \vee y') \wedge (x \vee y) \wedge 1 \wedge (x' \vee y') = \\ x \wedge_s y'.$$

$$\text{R: } (x \wedge_s y) + x = ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y)) \triangle x = \\ (\underline{x} \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y))) \wedge (x' \vee (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge y')) = \\ (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y')) = x \wedge_3 y'.$$

$$\boxed{\odot = \wedge_1} \text{ L: } x \wedge_1 ((x \vee y) \wedge y') = x \wedge (x' \vee (y' \wedge (x \vee y))) = x \wedge (x' \vee y') = x \wedge_1 y'.$$

$$\text{R: } (x \wedge_1 y) + x = (x \wedge (x' \vee y)) + x = x \wedge (x' \vee (x \wedge y')) = x \wedge y'.$$

$$\boxed{\odot = \wedge_3} \text{ L: } x \wedge_3 ((x \vee y) \wedge y') = \\ (x \vee (y' \wedge (x \vee y))) \wedge (x \vee y \vee (x' \wedge y')) \wedge (x' \vee (x \wedge y' \wedge (x \vee y))) = \\ (x \vee y') \wedge (x \vee y) \wedge 1 \wedge (x' \vee (x \wedge y')) = x \wedge_3 y'.$$

$$\text{R: } (x \wedge_3 y) + x = ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y))) \triangle x = \\ (\underline{x} \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge y)))) \wedge \\ (x' \vee (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y'))) = \\ (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee (x \wedge (x' \vee y'))) = (x \vee y') \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y') = \\ x \wedge_s y'.$$

In jedem Fall ergeben die linke und die rechten Seite Schnittoperationen, welche voneinander verschieden sind.

Zu 2.: In den unter diesem Punkt angegebenen Fällen ist für eine feste Schnittoperation $\odot$ zwar die linke Seite $(y + (x \vee y)) \odot x$ für alle symmetrischen Differenzen + identisch, die rechte Seite $(y \odot x) + ((x \vee y) \odot x) = (y \odot x) + x$ muß jedoch für jede symmetrische Differenz separat behandelt werden, da für $\odot \in \{\wedge_1, \wedge_3\}$ das Element $y \odot x$ im allgemeinen nicht mit x kommutiert (siehe Lemma 3.26).

$$\boxed{\odot = \wedge_1} \text{ L: } (y + (x \vee y)) \wedge_1 x = ((x \vee y) \wedge y') \wedge_1 x = \\ ((x \vee y) \wedge y') \wedge ((x' \wedge y') \vee y \vee x) = (x \vee y) \wedge y' = x \wedge_2 y'.$$

$$\text{R für } \boxed{+ = \nabla}: (y \wedge_1 x) \nabla x = (y \wedge (y' \vee x)) \nabla x = \\ (y \wedge (y' \vee x) \wedge x') \vee ((y' \vee (y \wedge x')) \wedge x) = x \wedge y'.$$

$$\text{R für } \boxed{+ = +_l}: (y \wedge (y' \vee x)) +_l x = \\ (y \wedge (y' \vee x) \wedge (y' \vee (y \wedge x') \vee x')) \vee ((y' \vee (y \wedge x')) \wedge x) = \\ (\underline{y} \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y')) \vee (x \wedge y') = \\ (y \vee (x \wedge y')) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y') = x \wedge_4 y'.$$

$$\text{R für } \boxed{+ = +_{r'}}: (y \wedge (y' \vee x)) +_{r'} x = x' +_l (y' \vee (y \wedge x')) = \\ (x' \vee (x \wedge (y' \vee (x' \wedge y)))) \wedge (x \vee (y \wedge (x \vee y'))) = \\ (x' \vee (x \wedge y')) \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y') = x \wedge_3 y'.$$

R für $\boxed{+ = \triangle}$: $(y \wedge (y' \vee x)) \triangle x = (x \vee (y \wedge (y' \vee x))) \wedge (x' \vee y' \vee (x' \wedge y)) =$
 $(x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y') = x \wedge_s y'.$

Keine der in diesem Fall zu betrachtenden rechten Seiten stimmt also mit der linken Seite überein.

$\boxed{\odot = \wedge_3}$ L: $(y + (x \vee y)) \wedge_3 x = ((x \vee y) \wedge y') \wedge_3 x =$
 $(x \vee (y' \wedge (x \vee y))) \wedge (x' \vee (y' \wedge (x \vee y)))$
 $\wedge (y \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y' \wedge (x \vee y))) =$
 $(x \vee y') \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \wedge (y \vee (x \wedge y') \vee (x' \wedge y')) =$
 $(x \vee y') \wedge (x' \vee y') \wedge (y \vee (x \wedge y')) = x \wedge_4 y'.$

R für $\boxed{+ = \nabla}$: $(y \wedge_3 x) \nabla x = ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))) \nabla x =$
 $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y)) \wedge x') \vee$
 $(x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')))) =$
 $((x \vee y) \wedge y' \wedge x') \vee ((x \wedge y') \vee (x \wedge y \wedge (x' \vee y'))) = x \wedge y'.$

Für nachfolgende Rechnungen halten wir noch ein Ergebnis fest, das bei der letzten Umformung gewonnen wurde:

$$a := x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y'))) = x \wedge y'$$

R für $\boxed{+ = +_l}$: $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))) +_l x =$
 $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y)) \wedge$
 $(x' \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')))) \vee$
 $(x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')))) =$
 $\underbrace{((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y)) \wedge$
 $((x \wedge y') \vee ((x' \vee y) \wedge (x' \vee y')))) \vee (x \wedge y')}_{=a=x \wedge y'}$
 $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y)) \wedge$
 $((x \wedge y') \vee ((x' \vee y) \wedge (x' \vee y')))) \vee (x \wedge y') =$
 $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y)) \wedge (x' \vee y')) \vee (x \wedge y') =$
 $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge y') \vee (x \wedge y') = (x \vee y) \wedge y' = x \wedge_2 y'.$

Für das Weitere halten wir zusätzlich fest:

$$b := x' \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')) = x' \vee y'$$

R für $\boxed{+ = +_{r'}}$: $((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))) +_{r'} x =$
 $(x \wedge ((x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')))) \vee$
 $\underbrace{(x' \wedge (x \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))))}_{=a=x \wedge y'}$
 $(x \wedge y') \vee (x' \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y' \vee (x \wedge y))) =$
 $(x \wedge y') \vee (x' \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y')) =$
 $(x' \vee (x \wedge y')) \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee y') = x \wedge_3 y'.$

Aus dieser Rechnung folgt insbesondere:

$$c := x \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))) = (x \vee y) \wedge (x \vee y')$$

$$\begin{aligned} \text{R für } \boxed{+ = \triangle}: \quad & ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))) \triangle x = \\ & \underbrace{(x \vee ((x \vee y) \wedge (x' \vee y) \wedge (y' \vee (x \wedge y))))}_{=c=(x \vee y) \wedge (x \vee y')} \wedge \\ & \underbrace{(x' \vee (x' \wedge y') \vee (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y')))}_{=b=x' \vee y'} = \\ & (x \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge (x' \vee y') = x \wedge_s y'. \end{aligned}$$

Zu 3.: Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} ((x \vee y) +_r y) \odot x &= (y +_l (x \vee y)) \odot x \\ ((x \vee y) \odot x) +_r (y \odot x) &= (y \odot x) +_l ((x \vee y) \odot x) \end{aligned}$$

für jede Schnittoperation $\odot$. Die Gleichheit der rechten Seiten dieser beiden Gleichungen wurde für $\odot \in \{\wedge_1, \wedge_3\}$ bereits in 2. untersucht, also gelten für die zu betrachtenden linken Seiten die gleichen Aussagen. Analoges gilt, wenn man $+_r$ durch $+_{l'}$ und $+_l$ durch $+_{r'}$ ersetzt.

Damit sind alle Behauptungen bewiesen. □

Bemerkung: In 2. erhält man in jedem der beiden Fälle $\odot = \wedge_1$ und $\odot = \wedge_3$ für die 6 verschiedenen symmetrischen Differenzen 6 verschiedene Ausdrücke für die rechte Seite $(y \odot x) + x$, jeweils in der Form $x \star y'$ mit $\star \in \{\wedge, \wedge_1, \wedge_2, \wedge_3, \wedge_4, \wedge_s\}$. Einer dieser Ausdrücke muß also mit der linken Seite übereinstimmen. Wie man leicht nachrechnet, gilt:

$$\begin{aligned} (y +_{l'} (x \vee y)) \wedge_1 x &= (y \wedge_1 x) +_{l'} x \\ (y +_{l'} (x \vee y)) \wedge_3 x &= (y \wedge_3 x) +_{l'} x \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Hauptsatz dieses Unterabschnittes beweisen:

Satz 3.28 *Gilt in einem orthomodularen Verband $\mathcal{L}$ für eine Schnittoperation $\odot$ und eine symmetrische Differenz $+$ eines der Distributivgesetze*

$$x \odot (y + z) = (x \odot y) + (x \odot z), \quad (x + y) \odot z = (x \odot z) + (y \odot z),$$

so ist $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra.

Beweis: Wir brauchen lediglich die Ergebnisse aus Proposition 3.27, die ja Spezialfälle der Distributivgesetze behandeln, anzuwenden: 1. zeigt die Behauptung für $\odot \in \{\wedge, \wedge_s\}$ und eine beliebige symmetrische Differenz.

Für $\odot \in \{\wedge_1, \wedge_3\}$ erhält man aus 1. die Aussage für die erste im Satz angegebene Gleichung, 2. und 3. induzieren dies für die zweite Gleichung mit beliebigem $+$. Wegen $u \wedge_2 v = v \wedge_1 u$ und $u \wedge_4 v = v \wedge_3 u$ folgen daraus sofort die Behauptungen für $\wedge_2$ und $\wedge_4$.

□

Literaturverzeichnis

- [Bi] G.BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXV, Providence, Rhode Island, 1967.
- [BD] R.BALBES, P.DWINGER, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.
- [Be] L.BERAN, *Orthomodular Lattices*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht–Boston, 1985.
- [Bt] E.BEUTLER ET AL., *Biduale Algebren*, Mathematik Arbeitspapiere Nr. 21, Universität Bremen, 1979.
- [Ch] I.CHAJDA, *Pseudosemirings induced by ortholattices*, Czech. Math. J. **46** (1996), 405–411.
- [CE] I.CHAJDA, G.EIGENTHALER, *A remark on congruence kernels in complemented lattices and pseudocomplemented semilattices*, Preprint.
- [Di] R.P.DILWORTH, *The structure of relatively complemented lattices*, Ann. of Math. **51** (1950), 348–359.
- [DDL] G.DORFER, A.DVUREČENSKIJ, H.LÄNGER, *Symmetric difference in orthomodular lattices*, Math. Slovaca **46** (1996), 435–444.
- [DLM] D.DORNINGER, H.LÄNGER, M.MACZYŃSKI, *The logic induced by a system of homomorphisms and its various algebraic characterisations*, Demonstr. Math. **30** (1997), 215–232.
- [Fi] P.D.FINCH, *Congruence relations on orthomodular lattices*, J. Austral. Math. Soc. **6** (1966), 46–54.
- [Gr] G.GRÄTZER, *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.

- [Ha] J.HASHIMOTO, *Congruence relations and congruence classes in lattices*, Osaka Math. J. **15** (1963), 71–86.
- [Ih] T.IHRINGER, *Allgemeine Algebra*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1988.
- [Ja] M.F.JANOWITZ, *Complemented congruences in complemented lattices*, Pacific J. Math. **73** (1977), 87–90.
- [Ka] G.KALMBACH, *Orthomodular Lattices*, Academic Press, London–New York, 1983.
- [Kt] T.KATRIŇÁK, *Die Kennzeichnung der distributiven pseudokomplementären Halbverbände*, J. Reine Angew. Math. **241** (1970), 160–179.
- [La] H.LÄNGER, *Generalizations of the correspondence between Boolean algebras and Boolean rings to orthomodular lattices*, Tatra Mt. Math. Publ. **15** (1998), 97–105.
- [PP] P.PTAK, S.PULMANNOVA, *Orthomodular Structures as Quantum Logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

Weitere Literatur:

Hier werden einige weitere Literaturzitate angeführt, die in der Arbeit nicht zitiert werden, jedoch einen Einfluß auf das Zustandekommen der Ergebnisse ausgeübt haben.

B.A.BERNSTEIN, *Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group*, Trans. Amer. Math. Soc. **26** (1924), 171–175.

G.BIRKHOFF, J. VON NEUMANN, *The logic of quantum mechanics*, Annals of Math. **37** (1936), 823–843.

D.DORNINGER, *Lattice operations between observables in axiomatic quantum mechanics*, Internat. J. Theoret. Phys. **24** (1985), 951–955.

D.DORNINGER, *Sublogics of ring-like quantum logics*, Tatra Mt. Math. Publ. **15** (1998), 75–83.

D.DORNINGER, H.LÄNGER, M.MACZYŃSKI, *On ring-like structures occuring in axiomatic quantum mechanics*, Sitzungsber. Abt. II **206** (1997), 279–289, Österreichische Akademie der Wissenschaften.

A.DVUREČENSKIJ, *Gleason's Theorem and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

A.DVUREČENSKIJ, H.LÄNGER, *Bell-type inequalities in orthomodular lattices I. Inequalities of order 2*, Internat. J. Theoret. Phys. **34** (1995), 995–1024.

O.FRINK, *Pseudo-complements in semi-lattices*, Duke Math. J. **29** (1962), 505–514.

G.GRÄTZER, E.T.SCHMIDT, *Ideals and congruence relations in lattices*, Acta Math. Acad. Hungar. **9** (1958), 137–175.

J.HARDING, *Irreducible orthomodular lattices which are simple*, Algebra Universalis **29** (1992), 556–563.

J.HASHIMOTO, *Direct, subdirect compositions and congruence relations*, Osaka Math. J. **9** (1957), 87–112.

G.W.MACKEY, *Mathematical Foundations in Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1963.

M.NAVARA, *On generating finite orthomodular sublattices*, Tatra Mt. Math. Publ. **10** (1997), 109–117.

J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Princeton University Press, Princeton, 1960.

E.PRUGOVEČKI, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, Academic Press, New York–London 1971.

S.PULMANNOVÁ, *Congruences in partial abelian semigroups*, Algebra Universalis **37** (1997), 119–140.

V.S.VARADARAJAN, *Geometry of Quantum Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1985.

Lebenslauf

19.10.1968	geboren in Friesach, Kärnten
1975 – 1979	Besuch der Volksschule in Oberwölz, Steiermark
1979 – 1983	Besuch der Hauptschule in Oberwölz
1983 – 1987	Besuch des Bundesoberstufenrealgymnasiums in Murau, Steiermark
Juni 1987	Absolvierung der Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
Oktober 1987	Beginn des Studiums der Technischen Mathematik an der TU Wien
September 1989	Absolvierung der 1. Diplomprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg
Oktober 1989 – Jänner 1992	Tutorentätigkeit am Institut für Analysis und am Institut für Algebra der TU Wien
Jänner 1992 – Juli 1992	Studienassistent am Institut für Algebra und Diskrete Mathematik, TU Wien
Juni 1992	Absolvierung der 2. Diplomprüfung des Studiums der Technischen Mathematik mit ausgezeichnetem Erfolg, Sponsion zum Diplom-Ingenieur
seit Juli 1992	Vertragsassistent am Institut für Algebra und Diskrete Mathematik an der TU Wien
Oktober 1995 – August 1996	Ableistung des Zivildienstes in Wien
seit September 1996	Lehrbeauftragter für Mathematik an der Fachhochschule St. Pölten