

DIPLOMARBEIT

MASTER'S THESIS

Numerische Berechnung der dreidimensionalen Beanspruchung einer Tunnelschale mit Schalen- bzw. Kontinuumselementen mittels FLAC^{3D}

Numerical calculation of a three-dimensional load on a tunnel lining
using shell- or continuum elements with FLAC^{3D}

ausgeführt zum Zwecke der
Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

a.o. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. tech. Rainer POISEL
und
Univ.-Ass. Dipl.-Ing. Dr. tech. Alexander PREH

E203
Institut für Ingenieurgeologie

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von
Stefan RESCH
Währingerstrasse 170

1180 Wien

Wien, im November 2004

Stefan RESCH

Ende und Gründe zu finden, ist uns versagt, aber wir bedürfen ihrer auch nicht, um zu unseren konkreten Resultaten zu gelangen.

Gustav Kirchhoff

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Kurzfassung | 4 |
| Abstract | 5 |
| 1 Einleitung | 6 |
| 1.1 <i>Abgrenzung der Begriffe Simulation und Modell</i> | 7 |
| 1.2 <i>Zielsetzungen von numerischen Modellierungen</i> | 10 |
| 1.3 <i>Aufgabenbereiche der numerischen Modellierung</i> | 11 |
| 1.4 <i>Numerische Lösungsverfahren</i> | 12 |
| 1.4.1 <i>Finite Elemente Methode (FEM)</i> | 12 |
| 1.4.2 <i>Finite Differenzen Methode (FDM)</i> | 15 |
| 1.4.3 <i>Randwertwert Methode (Boundary Element Method, BEM)</i> | 15 |
| 2 Numerische Berechnungen mit der Software FLAC^{3D} | 17 |
| 2.1 <i>Trennflächen und ausgewählte Konstruktive Elemente in FLAC^{3D}</i> | 17 |
| 2.1.1 <i>Trennflächen (Interfaces)</i> | 18 |
| 2.1.2 <i>Schalenelemente (Shells)</i> | 20 |
| 2.1.3 <i>Linerelemente (Liner)</i> | 25 |
| 3 Drei Bestandteile einer Modellierung | 26 |
| 3.1 <i>Geometrie</i> | 26 |
| 3.1.1 <i>Geometrieerstellung mit Grundkörpern und der Freiverformung in FLAC^{3D}</i> | 28 |
| 3.1.2 <i>Verwendungsbereiche von Primitive Shapes und Freiverformung</i> | 31 |
| 3.2 <i>Material</i> | 31 |
| 3.3 <i>Randbedingungen</i> | 32 |
| 3.3.1 <i>Grenzen der Randbedingungsmodelle</i> | 32 |
| 4 Studien | 33 |
| 4.1 <i>Analytisches und numerisches Werkzeug</i> | 33 |
| 4.2 <i>Zielsetzung der Studien</i> | 33 |
| 4.2.1 <i>Anwendbarkeit von Schalenelementen zur Modellierung der Tunnelschale</i> | 34 |
| 4.2.2 <i>Untersuchung des Verhaltens des Systems Gebirge - Tunnel</i> | 34 |
| 4.3 <i>Studie 1 - Balken auf zwei Stützen</i> | 36 |
| 4.3.1 <i>Aufgabenstellung</i> | 36 |
| 4.3.2 <i>Modellbeschreibung</i> | 36 |
| 4.3.3 <i>Ergebnisse</i> | 36 |
| 4.3.4 <i>Schlussfolgerungen</i> | 60 |
| 4.4 <i>Studie 2 - Balken auf elastischer Bettung</i> | 63 |
| 4.4.1 <i>Aufgabenstellung</i> | 63 |
| 4.4.2 <i>Modellbeschreibung</i> | 63 |
| 4.4.3 <i>Ergebnisse</i> | 65 |
| 4.4.4 <i>Schlussfolgerung</i> | 69 |
| 4.5 <i>Studie 3 - Untersuchung eines Tunnels in einem elastischen Medium</i> | 70 |
| 4.5.1 <i>Aufgabenstellung</i> | 70 |
| 4.5.2 <i>Modellbeschreibung</i> | 70 |
| 4.5.3 <i>Ergebnisse</i> | 72 |
| 4.5.4 <i>Schlussfolgerung</i> | 91 |
| 5 Zusammenfassung | 92 |
| 6 Literaturverzeichnis | 95 |
| 7 Internetverzeichnis | 95 |

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die Grenzen der Anwendbarkeit von Schalenelementen zur Modellierung von Tunnelschalen mittels FLAC^{3D} (Fast Lagrangian Analysis for Continua in 3 Dimensions) der Itasca Consulting Group untersucht. FLAC^{3D} ist ein kontinuumsmechanisches Programm, das auf der Theorie der Finiten Differenzen aufgebaut.

In drei Studien wurden die Spannungsverteilung im Bauteil sowie das Verhalten des Systems Gebirge - Ausbau unter Verwendung von Schalen- und Kontinuumselementen ermittelt und verglichen.

In der Studie „Balken auf zwei Stützen“ wurde die Balkenhöhe variiert und der Momenten- und Spannungsverlauf ermittelt. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass die Schalenelemente ab einer Schlankheit von $h/l = 0,2$ falsche Spannungsverteilungen über den Querschnitt liefern.

Anhand des „Balkens auf elastischer Bettung“ wurde das Interaktionsverhalten zwischen den konstruktiven Elementen und dem Untergrund beurteilt. Bei dieser Studie wurden für die Trennfläche zwischen Balken und Untergrund die Grenzfälle „vollkommene Gleitung“ und „vollkommen gesperrte Gleitung“ betrachtet. Beide Konstruktionselemente zeigten bei „vollkommen gesperrter Gleitung“ eine geringere Momentenbeanspruchung als bei „vollkommener Gleitung“. Die Größenordnung der ermittelten Momentenbeanspruchung wurde mit dem Bettungsmodulverfahren auf Plausibilität überprüft.

Abschließend wurde ein Tunnelausbruch im elastischen Medium untersucht. Die Tunnelschale wurde mit Kontinuumselementen sowie mit Schalenelementen bei „vollkommener Gleitung“ in der Trennfläche zwischen Tunnel und Gebirge modelliert.

Analog zur Balkenuntersuchung wurde die Schalendicke variiert und der Momentenverlauf und die Normalkraftverteilung ermittelt und das Systemverhalten untersucht. Bei schlanken Schalen zeigen sowohl die numerischen Modelle als auch die analytische Berechnung übereinstimmende Ergebnisse. Da die Schalenelemente eine lineare Spannungsverteilung voraussetzen, beginnen ihre Ergebnisse ab einer Schlankheit von $d/D = 0,05$ von denen der Kontinuumselemente abzuweichen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Modellierung von Bauteilen mittels Schalenelementen einfacher ist, aber bei großen Dicken falsche Ergebnisse liefert sowohl was die Verteilung der Spannungen in der Tunnelschale als auch was das Verhalten des Systems Gebirge – Ausbau betrifft.

Abstract

The subject of this paper is a research on the limits of the applicability of shell-elements, which are for example used to model a tunnel-lining. The software used is FLAC^{3D} (Fast Lagrangian Analysis for Continua in 3 Dimension), developed by Itasca Consulting Group, which is based on theory of finite differences.

Three studies were made to investigate the distribution of stresses in certain construction elements. In addition, the behaviour of the system “rock – lining” was analysed and the differences between models generated with shell-elements on the one hand and with continua-elements on the other hand were determined.

The aim of the first study - single-span beam - was to find out the limits of the applicability of these structure-elements. For this, the beam-height was varied in order to get the results of bending moments and the distribution of the normal forces. Over a certain limit, the beam theory is unable to model thick constructions.

The second study - bar on flexible bedding – was used to investigate the typical ground-structure interaction. The two extreme conditions at the interface, full slip (no shear stress transmission) and no slip (no relative shear displacement), were analysed.

Both numerical models (shell-elements vs. continua-elements) showed us that the magnitude of the bending-moments in the beam was lower under the condition of “no slip” than under the condition “full slip”. The plausibility of the results was checked by a reference-calculation made with the Bedding-module-method.

At last a Lined Circular Tunnel in an Elastic Medium with Isotropic Stresses was analysed. The lining was generated again with continua-elements and with shell-elements in comparison. Both variants were made under the condition “full slip”. Similarly to the research on the single-span beam the beam-height was varied. The results of the bending-moments and the distribution of the normal forces were calculated for every parameter case. Shells with a low slenderness ratio showed results consistent with the analytical “Einstein”-calculation of the model. If the shell-elements are thin in comparison to the other measurements the normal stresses vary linearly (plate theory). Therefore the results of the two models of the tunnel lining with a slenderness ratio d / D above 0,05 are very different.

As a conclusion, it can be said that modelling is (in most cases) more convenient with shell-elements. However, if they are used to model “thick constructions” they show wrong results in the distribution of stresses and they do not accurately represent the behaviour of the system “rock-lining”.

1 Einleitung

Die fortschreitende Computerentwicklung macht die numerischen Verfahren zu einem immer besser werdenden Instrument, mit dessen Hilfe man die Umwelt besser interpretieren lernen kann. Sie ermöglichen einen Blick in die Objekte hinein. Es werden Prozesse im Modellinneren transparenter gemacht.

Ein maßgeblicher Grund für die große Verbreitung und die Attraktivität der numerischen Verfahren im Ingenieurwesen ist ihr allgemein formulierter Theoried Hintergrund. Dieser macht die universale und breite Anwendung in vielen Branchen erst möglich.

Die Aufgaben reichen von einer Untersuchung bezüglich der Materialfestigkeit eines Werkstücks über eine dynamische Untersuchung zur Feststellung der Schwingungsanfälligkeit eines Bauwerks bis zu Untersuchungen, um einen effektiven Lärmschutz im Infrastrukturbau zu ermöglichen.

In dieser Arbeit wurden Analysen bezüglich des Tragverhalten bzw. der effizienten Modellierung von Tunnelschalens durchgeführt. Dazu wurde das numerische kontinuumsmechanische Programm FLAC^{3D} (Fast Lagrangian Analysis for Continua in 3 Dimensions) der Itasca Consulting Group, das auf der Theorie der Finiten Differenzen Methode (FDM) aufbaut, verwendet.

Die vorliegende Arbeit umfasst eine theoretischen Auseinandersetzung mit den Begriffen System und Modell, eine Charakterisierung der drei geläufigen numerischen Lösungsverfahren, die Vorstellung des Softwarepaketes FLAC^{3D} mit der Beschreibung der notwendigen Schalenelement- und Trennflächenmodelle, eine Analyse eines numerischen Modellierungsprozesses und drei Studien über die Grenzen der Anwendbarkeit von Schalenelementen zur Modellierung von Tunnelschalen bzw. das theoretische Tragverhalten von Tunnelschalen.

1.1 Abgrenzung der Begriffe Simulation und Modell

Der Begriff „Simulation“ wird nach der VDI-Richtlinie 3633 (Verein Deutscher Ingenieure) folgendermaßen definiert:

„Simulation ist das Nachbilden eines Systems mit seinen dynamischen Prozessen in einem experimentierfähigen Modell, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind.“

Als **System** versteht man die Summe von einander abhängigen Elementen, die in Wechselwirkung miteinander stehen und gemeinsam mittels der Systemgrenze gegen andere Räume abtrennbar sind. Bei der Untersuchung von Systemen sollte man immer im Auge behalten, dass es sich bei Systembildungen nicht um wirkliche Gebilde, sondern um vom Menschen geschaffene Denkstützen handelt.

Somit existiert nie „ein System“, sondern ein nach konkreten Kriterien bestimmter Ausschnitt, dessen Elemente in Wechselwirkung mit dem Außenraum stehen. Können Einflüsse von Außenelemente bezogen auf die vorliegende Untersuchung vernachlässigt werden, spricht man von einem *geschlossenem System*, zeigen Elemente außerhalb der Systemgrenze Wirkung auf Systemelemente spricht man von einem *offenen System*.

In Verbindung mit Systemen werden oft folgende Begriffe verwendet:

| | |
|---|---|
| offen: es bestehen Wechselwirkungen mit der Systemumgebung | abgeschlossen: es bestehen keine relevanten Wechselwirkungen mit der Systemumgebung |
| dynamisch: Systemgrößen verändern sich im Laufe der Zeit | statisch: Systemgrößen sind über die Zeit unveränderlich |
| kontinuierlich: Systemgrößen ändern sich kontinuierlich, d.h. in unendlich kleinen Schritten | diskret: Systemgrößen ändern sich unstetig, d.h. in endlich kleinen Schritten |
| determiniert: unter identischen Bedingungen sind identische Folgezustände reproduzierbar | stochastisch: auch bei identischen Bedingungen sind Folgezustände nur durch Wahrscheinlichkeitsaussagen beschreibbar |
| stabil: Nach einer Störwirkung auf das im Gleichgewicht stehende System stellt sich die Ausgangslage wieder ein | instabil: Nach einer Störwirkung auf das im Gleichgewicht stehende System stellt sich die Ausgangslage nicht wieder ein |

Tabelle 1: häufige Kategorisierungen von Systemen

Ein **Prozess** ist die Transformation einer Eingangsgröße (Input) zu einer Antwortgröße (Output).

Das Deutsches Institut für Normung e.V. (DIN) definiert Prozesse folgendermaßen:

„Ein Prozess ist eine Gesamtheit von aufeinander einwirkender Aktivitäten in einem System, durch die Materie, Energie oder Information umgeformt, transportiert oder gespeichert werden.“

Der erste Schritt einer Simulation ist die Systembildung als logische und, für ein konkretes Untersuchungsziel, zweckmäßige Abgrenzung zur Umwelt. Im Systemraum befinden sich theoretisch endlich viele (praktisch überschaubar viele) Elemente, die über Prozesse miteinander verbunden sind.

Darüber hinaus kann über das System nichts weiter ausgesagt werden. Eine Studie am System selbst kann nicht durchgeführt werden, da keine Operatoren zur Verfügung stehen. Eine Erforschung kann nur anhand eines **Modells** durchgeführt werden. In diesem in zweiter Stufe erarbeiteten Modell stehen Operatoren zur Verfügung, die die Systembestandteile in Interaktion setzen.

Ein Modell ist eine Nachbildung einer Wirklichkeit. Das Wort Modell entstand im Italien der Renaissance (*modello*, hervorgegangen aus *modulo*, dem Maßstab in der Architektur) und gehörte bis ins 18. Jahrhundert der Fachsprache der bildenden Künstler an. Um 1800 verdrängte *Modell* im Deutschen das ältere, direkt vom lateinischen *modulus* entlehnte *Model* (Muster, Form, z.B. Kuchenform), das noch im Verb *ummodelln* fortlebt. (<http://de.wikipedia.org/wiki/Modell>, Zugriff, 2004).

Baut man z.B. ein Bauwerk maßstabsverkleinert nach, um aerodynamische Untersuchungen durchzuführen, hat man ein sog. „**physikalisches Modell**“ geschaffen.

Als Operatoren wirken hier die Naturgesetze. Die Übertragbarkeit der Modellergebnisse auf das wirkliche Objekt ist durch die gleichartige Wirkung der Naturgesetze gegeben. Eventuelle Unschärfen und Bedingtheiten der Schlussfolgerungen bezüglich der Wirklichkeit ergeben sich hier aus Verzerrungen infolge von Maßstabeffekten. Werden die wirkenden physikalischen Effekte mathematisch beschrieben, somit nicht nur das Modell sondern auch die Operatoren vom Menschen abgebildet, spricht man von einem „Gedankenmodell“ oder einem „**mathematischen Modell**“. Hier erweitern sich die möglichen Fehlerquellen vom Bereich des Modells, wie im Fall von „physikalischen Modellen“, bis zu den Operatoren. Es

existieren auf jeder Modellstufe Fehlerpotentiale. Das Computermodell hat somit das höchste Fehlerpotential aller Modelle. Am Weg zum Computermodell können Fehler im physikalischen Bereich (Unzutreffende Interpretation von Naturphänomenen, usw.), im mathematischen Bereich (Unzutreffende mathematische Beschreibung, usw.) und im numerischen Bereich (Datenunschärfen, usw.) anfallen.

Ein so genanntes „**Computermodell**“ ist nichts anderes als ein mathematisches Modell, das mit dem Computer ausgewertet wird.

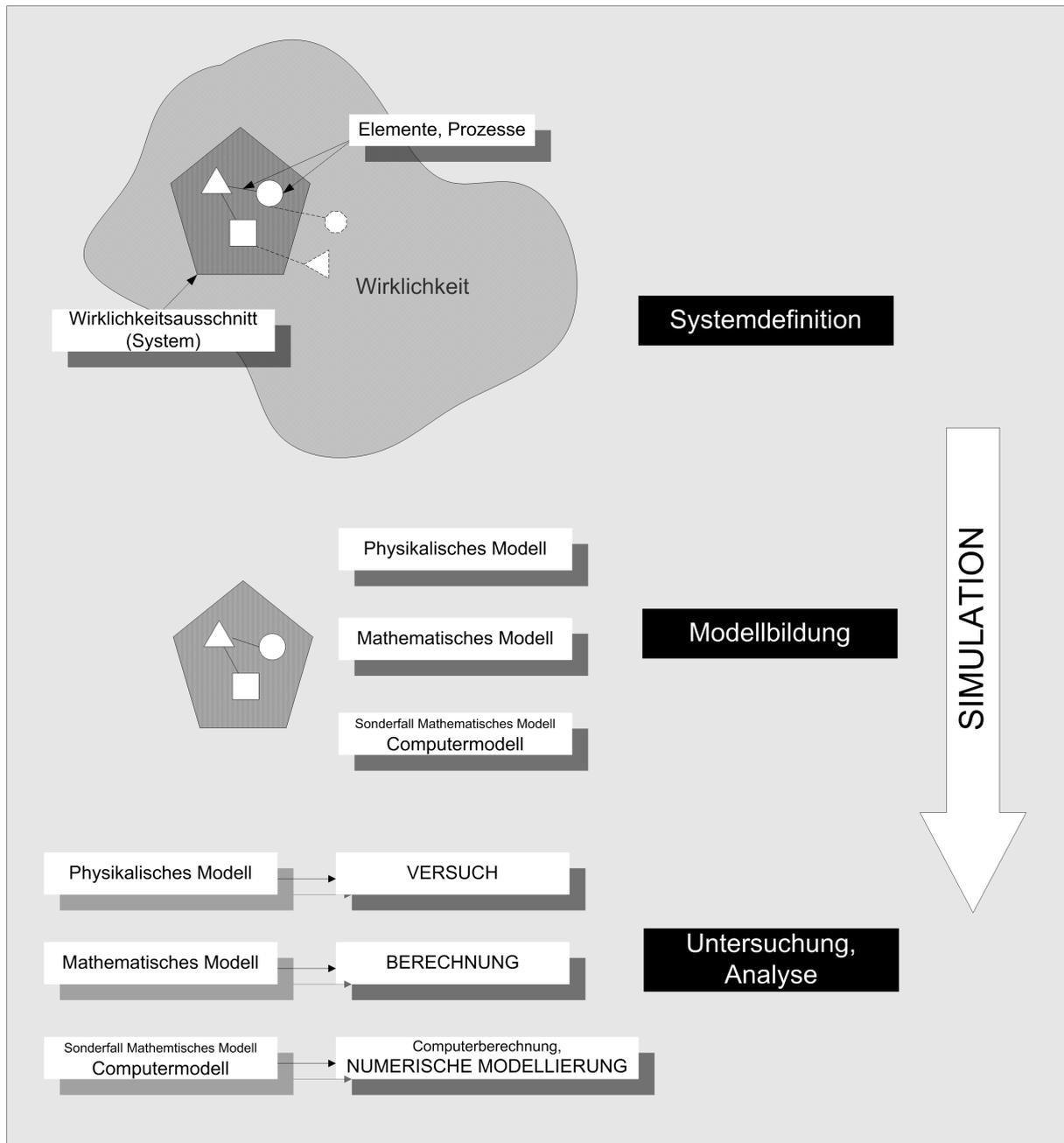


Abbildung 1: Ablauf Simulation; Systemdefinition und Modellbildung

Die Systembildung ist Voraussetzung einer Modellierung und die Systembildung ist unabhängig von der Modellbildung. Modellierung heißt, ein System erst untersuchbar zu machen.

Im Weiteren wird nur mehr das Computermodell (Sonderfall des mathematischen Modells) behandelt.

1.2 Zielsetzungen von numerischen Modellierungen

Mit numerischen Modellierungen (Abk. Modellierungen) werden in der Regel nachfolgenden Ziele angestrebt:

- Unbekanntes Szenario vorhersagen (Prognose)
- Bekanntes Szenario verstehen (Parameteridentifikation)
- Bekanntes Szenario optimieren (Produktentwicklung).

Für den Maschinenbau stellt zum Beispiel die Produktentwicklung ein Kerngebiet der Modellierung dar. Dort werden Serienprodukte mit hohen Stückzahlen vor Beginn der Produktion sehr genau untersucht und optimiert. Der im Vergleich zum Bauwesen hohe Aufwand für eine Modellierung wird kostenmäßig auf die große Produktzahl umgelegt und somit wirtschaftlich vertretbar.

Einerseits werden im Bauwesen Prognosen durchgeführt, um Einwirkungen infolge von Verschiebungen und Verformungen abzuschätzen (z.B. Abschätzung einer Beanspruchung infolge von Lagersenkungen).

Andererseits werden Prognosen durchgeführt, um Verformungen und Verschiebungen infolge von Einwirkungen vorherzusagen (z.B. Vorhersage der Verformung eines Hochhauses infolge Windlast). Die Untersuchung wird deshalb anhand von Modellierungen durchgeführt, weil unter Umständen regelmäßige Erfahrungswerte für bestimmte Lastfälle fehlen oder es aus Kosten- oder technischen Gründen unmöglich ist, Großversuche durchzuführen bzw. eine bestimmte Bemessungssituation herbeizuführen, da einerseits die Einwirkung zerstörend wirken würde bzw. die Auftretenswahrscheinlichkeit zu gering ist.

Im Bereich der Forschung stellen numerische Rechenverfahren ein ideales Werkzeug zur Untersuchung von Problemen dar. Oft ist es um einiges leichter, Parameterstudien am numerischen Modell durchzuführen als im Laborversuch. Wobei anzumerken ist, dass das Instrument der numerischen Modellierung klassische Laborversuche nicht ablösen kann, sondern als Kontrolle bzw. Ergänzung dienen soll.

1.3 Aufgabenbereiche der numerischen Modellierung

Tabelle 2 zeigt eine Übersicht über die klassischen Einsatzgebiete der numerischen Modellierung.

Tabelle 2: klassische Aufgabengebiete der numerischen Modellierung (Rolf Steinbuch, 2004)

| Gebiet | Anwendungen |
|-------------------|---|
| Statik, Dynamik | Untersuchungen bezüglich Materialfestigkeit, Standsicherheit, Schwingungsanfälligkeit |
| Potentialprobleme | Wärmeleitung, wirbelfreie Strömung, Feldanalysen |
| Elektrodynamik | elektromagnetische Verträglichkeit, Schutzeinrichtungen |
| Strömung | Fluidmechanik, Luftwiderstand, Klimatisierung, Wetter |
| Akustik | Geräuschereduktion, Lärmschutz, Erschütterungsschutz |
| Kontaktanalysen | Unfallsimulation, Umformvorgänge |
| Biomechanik | Implantate, Tomografie |
| Werkstofftechnik | Schadens- und Versagensmodelle, Fügen, Umwandlungen |

1.4 Numerische Lösungsverfahren

Nach den mathematischen Lösungsansätzen unterscheidet man:

- Finite Elemente Methode (FEM)
- Finite Differenzen Methode (FDM)
- Randelemente Methode (BEM)

Jede dieser Methoden ist ein numerisches Näherungsverfahren, d.h. es wird nie eine exakte Lösung erreicht, sondern immer nur Annäherungen. Der Umstand, dass in vielen Problemfällen (partielle Differentialgleichungen) nur in Ausnahmefällen exakte analytische Lösungen existieren, zeigt, dass ein genähertes Resultat keine Einschränkung, sondern oft der einzige Weg zu einer Lösung ist.

Die Bedeutung dieser Methoden (zur Zeit ist die FEM am weitesten verbreitet) beruht auf dem für verschiedene Probleme einheitlichen Konzept. So ist der Lösungsweg für ein-, zwei- und dreidimensionale Tragwerke grundsätzlich der selbe, womit auch eine einheitliche Behandlung beliebig zusammengesetzter Strukturen aus unterschiedlichen Formen möglich wird (Mehlhorn, 1995).

1.4.1 Finite Elemente Methode (FEM)

Bei dieser Methode wird das physikalische Problem mit Hilfe einer differentiellen Gebietsbeschreibung gelöst, d.h. die zu berechnende Struktur wird in eine endliche Anzahl einzelner Elemente (Finite Elemente) zerlegt, die in Knotenpunkten verbunden sind.

Die Struktur ist also die Summe aller finiten Elemente. Ursprüngliche Formen der finiten Elemente für Untersuchungen von Flächentragwerken waren einfache ebene Polygone, wie z.B. 3-Eck oder 4-Eck. In Abbildung 2 sind ausgewählte Finite Grundelemente dargestellt (Mayr / Thalhofer, 1993).

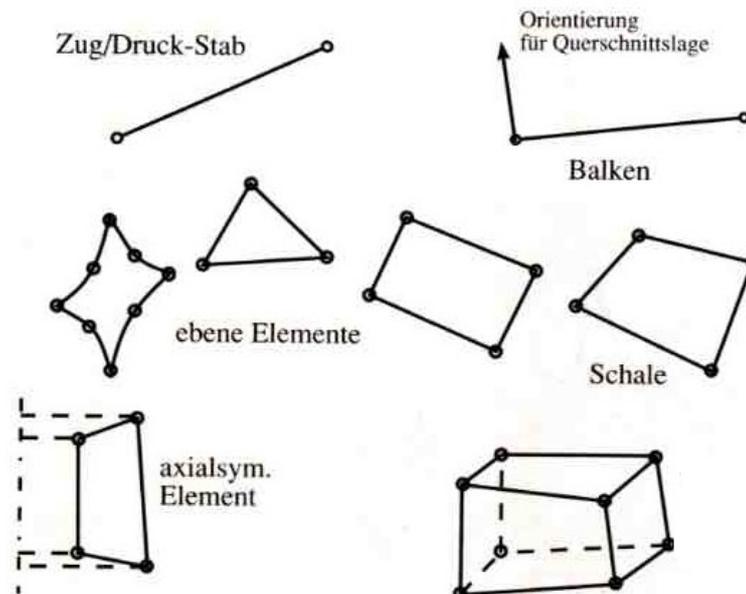


Abbildung 2: ausgewählte finite Grundelemente (Mayr / Thalhofer, 1993).

Einfachstes Finites Element ist der Zug/Druckstab mit der Kraft-Weg Beziehung $KU = F$ und der Steifigkeit $K = \frac{l}{E.A}$.

Vereinfacht ausgedrückt wird bei einer Struktur mit gegebener Steifigkeit und gegebenen Randbedingungen (Kräfte, Wege) das Gleichungssystem über die Kraft-Weg Beziehung gelöst.

Die einfachste Form der FE-Analyse kennt man in der klassischen Fachwerksberechnung, wo Knoten und Elemente (=Stäbe) definiert werden und das Gleichungssystem anschließend gelöst wird. Für die vielfältigen Anwendungen (1D, 2D, 3D) benötigt man auch sehr unterschiedliche finite Elemente. Je allgemeiner ein FE-Softwarepaket einsetzbar sein soll, um so vielfältiger muss die Elementbibliothek ausfallen (Mayr / Thalhofer, 1993).

Abbildung 3 zeigt Baustrukturen als Summe von finiten Elementen.

Je nach Bauteil werden 1D (Stab-), 2D (Flächen-) oder 3D (Volumen-) Elemente verwendet.

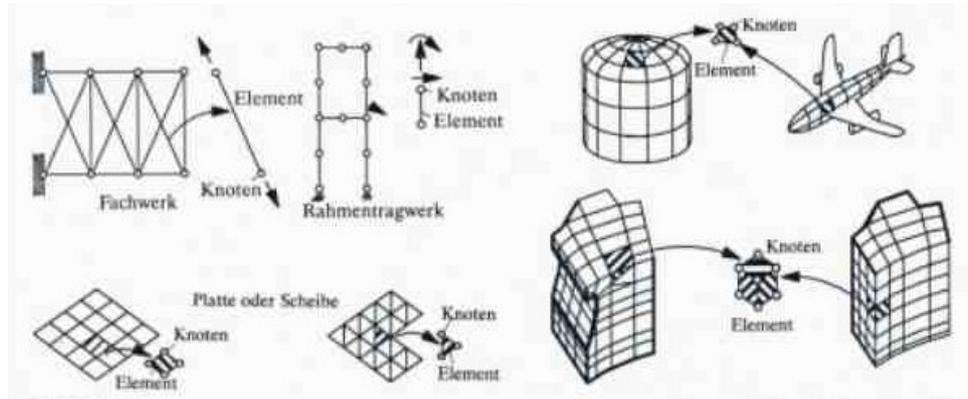


Abbildung 3: Struktur als Summe von Elementen (Mehlhorn, 1995).

Allgemein läuft eine FE – Analyse folgendermaßen ab:

1. Definieren einer FE-Struktur (*Diskretisierung*)
2. Berechnung der Elementsteifigkeiten
3. Addition der Elementsteifigkeiten zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix
4. Festlegen der Randbedingungen
5. Lösen des Gleichungssystems ergibt Verschiebungen
6. Rückrechnen der inneren Kräfte und Spannungen

1.4.2 Finite Differenzen Methode (FDM)

Die FDM ist älter als die Finite Elemente Methode und die Randelemente Methode. Das kommt daher, dass sie direkt bei der Differentialrechnung ansetzt. Die den physikalischen Problemen zugrunde liegenden Differentialgleichungen wurden schon früh gefunden. So hat z.B. Euler 1744 die kritische Last bei zentrisch gedrückten Stäben formuliert. Die Differentialgleichung $w'' + \frac{N \cdot w}{EI} = 0$ beschreibt den idealisierten zentrisch gedrückten Knickstab.

Die Schwierigkeiten treten beim Versuch der exakten Lösung der Differentialgleichungen für praktisch relevante Geometrien und Randbedingungen auf. Man löst diese Differentialgleichungen daher näherungsweise, d.h. der Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ wird durch den Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ersetzt. Ebenso verfährt man mit höheren Ableitungen.

Allgemein läuft eine FD – Analyse folgendermaßen ab:

(Mayr / Thalhofer, 1993)

1. Definieren einer FD-Struktur (*Diskretisierung*)
2. In der Differentialgleichung werden die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt. Aus der Differentialgleichung wird somit eine algebraische Gleichung.
3. Festlegen der notwendigen Randbedingungen zur Bestimmung des Gleichungssystems
4. Lösen des Gleichungssystems

1.4.3 Randwertwert Methode (Boundary Element Method, BEM)

„Die Grundidee ist die integrale Problembeschreibung. Man erhält damit eine um eine Dimensionsstufe niedrigere Problemformulierung, die eine vorteilhafte Ausgangsbasis für das anschließende numerische Lösungsverfahren darstellt. Es braucht nur der Rand diskretisiert zu werden und man kommt in der Regel mit einer erheblich geringeren Anzahl von

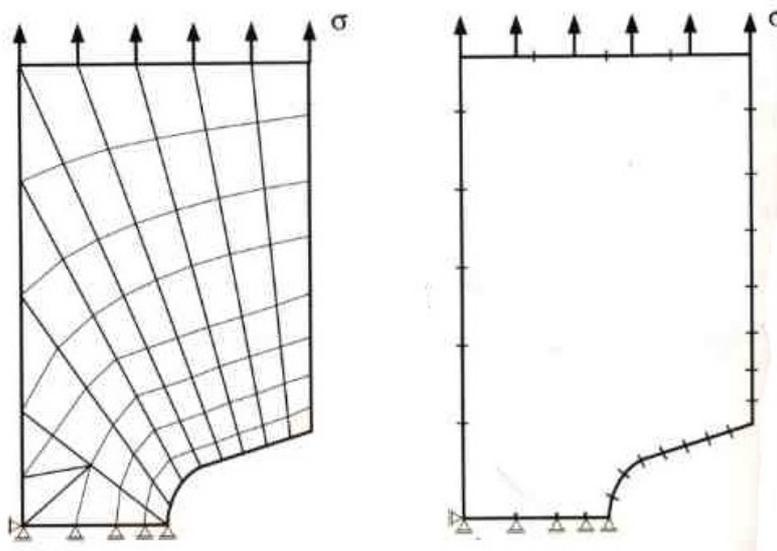
Freiheitsgraden aus. Der Aufwand an Datenaufbereitung sinkt und das Gleichungssystem reduziert sich entsprechend. Allerdings kann daraus nicht automatisch auch auf einen geringeren Rechenzeitbedarf geschlossen werden. Im Gegensatz zur FEM ist bei der BEM nämlich das sich ergebende Gleichungssystem voll besetzt, nicht symmetrisch und auch nicht positiv definit“ (Bausinger, 1987).

Die Genauigkeit ist, auf die gleiche Rechenzeit bezogen, im allgemeinen höher als bei FEM-Programmen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass Fehler nur am bearbeiteten Rand entstehen und nach innen schnell abklingen.

Die BEM ist besonders effektiv bei Spannungskonzentrations- und Rissproblemen, da - bei gleicher Rechenzeit wie bei FEM - eine sehr genaue Diskretisierung um die Lasteinleitung herum gemacht werden kann und für die Diskretisierung des Bauteilinneren, wo die Ergebnisse nicht interessieren, die Randkurven stark vereinfacht werden.

Für einen optimalen Einsatzbereich sollte das untersuchte Bauteil kompakt sein, also im 3D-Fall (z. B. Grundwasserströmungskörper) eine kleine Oberfläche im Verhältnis zum Volumen oder im 2D-Fall (z. B. konzentrierte Lasteinleitung in einen Halbraum) einen kleinen Umfang im Verhältnis zur Fläche besitzen (Mayr / Thalhofer, 1993).

Die Abbildung 4 zeigt den Unterschied der Diskretisierung eines Bauteils anhand einer polygonalen Scheibe.



**Abbildung 4: Unterschied eines FEM-Netzes (links) und eines BEM-Netzes (rechts),
(Mayr / Thalhofer, 1993).**

2 Numerische Berechnungen mit der Software FLAC^{3D}

FLAC^{3D} ist ein Softwarepaket, welches auf der Methode der Finiten Differenzen unter Anwendung expliziter Zeitintegration basiert. Das bedeutet, dass die zur Lösung eines Problems notwendigen Differentialgleichungen in Differenzgleichungen umgewandelt werden und mit Hilfe von inkrementellen Zeitschritten berechnet werden.

Über das vorhandene Kontinuumsmodell wird ein Gitter (grid) gelegt. Die so entstandenen diskreten Elemente werden Zonen genannt und die Eckpunkte Gitterpunkte (gridpoints).

In FLAC^{3D} werden keine globalen Steifigkeits- und Massenmatrizen aufgebaut, im Gegensatz zu der Finiten Elemente Methode. Es werden die Grundgleichungen an jedem Gitterpunkt bzw. Gitterzone angeschrieben und schrittweise über eine fiktive Zeit gelöst. In jedem Zeitschritt wird zunächst, ausgehend von den Bewegungsgleichungen, aus Spannungen und Kräften neue Geschwindigkeiten und Verschiebungen der Gitterpunkte errechnet. Danach werden aus den Geschwindigkeiten der Gitterpunkte Dehnungsgeschwindigkeiten in der Zone berechnet und über konstitutive Beziehungen neue Spannungen bestimmt. Bei jedem Durchlauf des Berechnungskreislaufes werden alle Gittervariablen neu berechnet, ausgehend von den Werten zu Beginn des Berechnungskreislaufes.

FLAC^{3D} löst das Gleichungssystem explizit. Der Vorteil dieser expliziten Methode im Gegensatz zu einer impliziten Methode wie der FEM ist, dass z.B. dynamische Aufgabenstellungen, nichtlineare Probleme oder große Verformungen leicht berechnet werden können.

(Roth, 1999)

Alle folgenden numerischen Berechnungen wurden mit dem Programmpaket FLAC^{3d}, Ver. 2.10 durchgeführt.

2.1 Trennflächen und ausgewählte Konstruktive Elemente in FLAC^{3D}

Trennflächen (Klüfte, Fugen, usw.) bestimmen gemeinsam mit den Materialeigenschaften der Substanz das Bruch- und Verformungsverhalten von Fels.

Bei Bauteilen, die mit der Erdscheibe verbunden sind, welche besonders im Bereich der Geotechnik behandelt werden, müssen die Fugen zwischen Bauteil und umgebenden Material bzw. deren Eigenschaften berücksichtigt werden.

Deshalb stellt FLAC^{3D} ein Trennflächenmodell zur Verfügung.

Fest- oder Lockergestein wird bearbeitet, muss stabilisiert werden oder es wird selbst aktiv als armiertes Bauelement verwendet. Die Aufgabe der Stabilisierung und Armierung übernehmen je nach Bauelement und Randbedingung verschiedene *Konstruktionselemente*, wie z.B. Anker, Spritzbeton, Bodennägel, Geotextilien, Pfähle, usw.

2.1.1 Trennflächen (Interfaces)

Folgende Gegebenheiten können die Verwendung von Interfaces erforderlich machen:

- Klüfte, Risse und Störungen im geologischen Medium
- Fuge zwischen Fundament oder Bauteil und Boden
- Klassische Kontaktprobleme

FLAC^{3D} stellt Trennflächen zur Verfügung, die eine definierte Zug- und Scherfestigkeit besitzen. Die Scherfestigkeit wird dabei mit Hilfe des Mohr-Coulomb'sche Reibungsgesetzes beschrieben.

Modelliert werden Trennflächen beliebiger Lage und Form durch die Summe von dreieckigen Trennflächenelementen mit dazugehörigen Trennflächenknotenpunkten. Die Generierung einer Trennfläche erfolgt immer durch eine paarweise Aufprägung von zwei dreieckigen Interface-Elementen auf eine viereckige Zonenoberfläche.

Treffen ein Interface-Element und eine andere Zonenoberfläche (Kontaktfläche) zusammen, werden die Kontaktkräfte in den zugehörigen Knotenpunkten aufgebaut.

$$F_n^{(t+\Delta t)} = k_n u_n A + \sigma_n A \quad (2.1)$$

$$F_{si}^{(t+\Delta t)} = F_{si}^{(t)} + k_s \Delta u_{si}^{(t+(1/2)\Delta t)} A + \sigma_{si} A \quad (2.2)$$

Gleichung 2.1 beschreibt die Normalkraft zum Zeitpunkt $t+\Delta t$, wobei k_n die Normalsteifigkeit, u_n die Penetration (Normalverformung), A die gewichtete Fläche des untersuchten Knotens und σ_n die in A wirkende Normalspannung ist.

Gleichung 2.2 beschreibt die Scherkraft im Knotenpunkt zum Zeitpunkt $t+\Delta t$, wobei k_s die Schersteifigkeit, Δu_{si} die im Zeitschritt entstandene Scherverformung und σ_s die Scherspannung ist.

Modelllogik:

1.) Solange die Bruchfestigkeit, entweder die Normalfestigkeit *oder* die Scherfestigkeit, nicht überschritten wird, also die Verbindung noch nicht gerissen ist treten ausschließlich elastische Verformungen auf.

2.) Die Verbindung wird als gebrochen angesehen, wenn entweder die Normalfestigkeit *oder* die Scherfestigkeit überwunden wird. In diesem Fall kann die Trennfläche keine Normalkräfte mehr übertragen und die Tragfähigkeit in Scherrichtung wird durch das Reibungsgesetz bestimmt.

$$F_{smax} = cA + \tan \phi (F_n - pA) \quad (2.3)$$

In Gleichung 2.3 ist F_{smax} die höchste mögliche übertragbare Scherkraft, c die Kohäsion, A die Scherfläche, ϕ der Reibungswinkel, F_n die Knotennormalkraft und p der Porendruck.

Abbildung 5 zeigt das Trennflächenmodell zwischen Interface und Kontaktpunkt P.

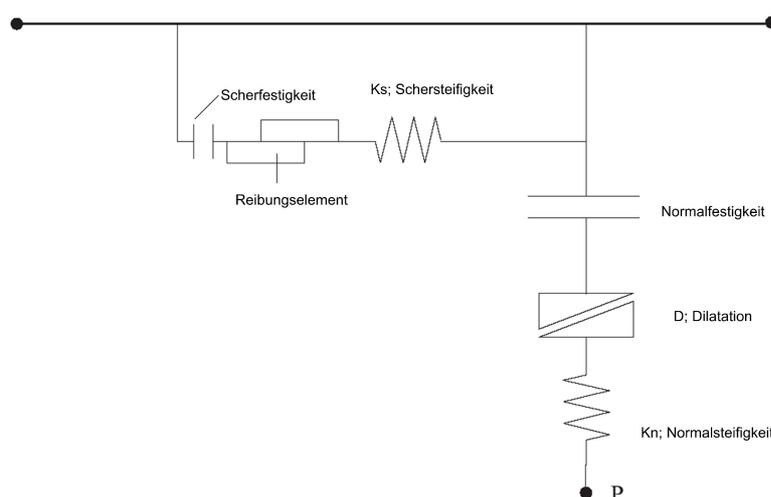


Abbildung 5: Trennflächenmodell zwischen Interface(oben) und einem Kontaktpunkt P

2.1.2 Schalenelemente (Shells)

Ein gesamtes Flächentragwerk wird gebildet durch die Summe der miteinander verbundenen Schalenelemente. Das Tragverhalten des Flächentragwerks kann geteilt werden in das Tragverhalten der Schale selbst und der Interaktion zwischen Schale und angrenzendem Netz. Abbildung 6 zeigt zwei vertikale Bauteile, links eine Stützmauer gegen das Erdreich und rechts eine Wandscheibe zur Abtragung vertikaler Lasten.

Die Stützmauer stellt ein typisches Beispiel für ein Bauteil dar, bei dem in der Regel die Interaktion zwischen Bauteil und Erdreich nicht vernachlässigt werden darf. Hier bietet sich die Möglichkeit der Modellierung mit Liner-Elementen an.

Die Wandscheibe stellt ein typisches Beispiel für ein Bauteil dar, bei dem in der Regel die Interaktion zwischen Bauteil und Erdreich vernachlässigt werden bzw. vereinfacht in die Modellgesetze eingehen kann. Hier besteht die Möglichkeit der Modellierung mit Shell-Elementen.

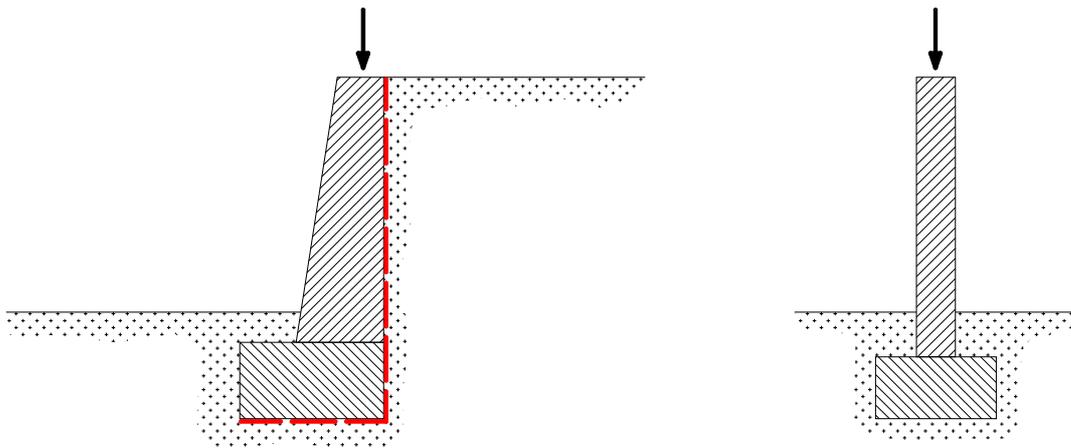


Abbildung 6: links: Bauteil mit Interaktion zum Baugrund ; rechts: Bauteil ohne Interaktion

Jedes finite Schalenelement wird definiert durch die geometrischen Eigenschaften und die Materialeigenschaften. Jedes Schalenelement wird als dreieckige Fläche mit drei Knoten geometrisch definiert. $FLAC^{3D}$ sieht homogenes Material (keine Fugen bzw. Störungen) mit anisotroper oder isotroper elastischer Spannungs-Dehnungsbeziehung vor.

Shell-Elemente werden mit dem angrenzenden Netz starr verbunden. Bei Liner-Elementen kann das Interaktionsverhalten zwischen Tragwerk und angrenzendem Netz gesteuert werden.

„Es ist unter bestimmten Randbedingungen möglich, die Lastabtragung nur durch Dehnungs- (Spannungs)zustände in der Mittelfläche zu beschreiben, also ohne Aktivierung von Biegeanteilen. Man bezeichnet diese Tragwirkung als Membranverhalten. Der Druckvektor wirkt dabei senkrecht zur Hülle, die aufgrund ihrer Dicke und ihrer mechanischen Eigenschaften keine Biegung aufnehmen kann. Dennoch können mit diesen Konstruktionen Lasten abgetragen werden. Auch das Gegenstück ist denkbar.

Bei der sog. Theorie der dehnungslosen Verbiegung erfolgt die Lastabtragung ausschließlich über die Aktivierung der Biegeanteile.“ (Mehlhorn, Gerhard, 1995 S. 194 ff).

Die Lastabtragung als **reine Membran** einerseits und die Lastabtragung als **reine Biegung** andererseits stellen beide Sonderformen dar.

Im Normalfall werden Mischformen auftreten, bei denen beide Mechanismen Tragwirkungen übernehmen.

Reine Biegung

Es sei ein Koordinatensystem xyz gegeben, wobei x und y orthogonal zu einander sind und z normal auf die Ebene xy steht. Die Plattendicke t wird in z Richtung aufgetragen.

Die Belastung wird quer zu xy aufgebracht. Die Lastabtragung erfolgt über die Momentenwirkung, wobei $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ bei $z = 0$. Die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} variieren linear über die Plattendicke, σ_{zz} ist klein im Vergleich zu σ_{xx} und σ_{yy} . σ_{zy} und σ_{zx} verlaufen quadratisch über die Dicke t .

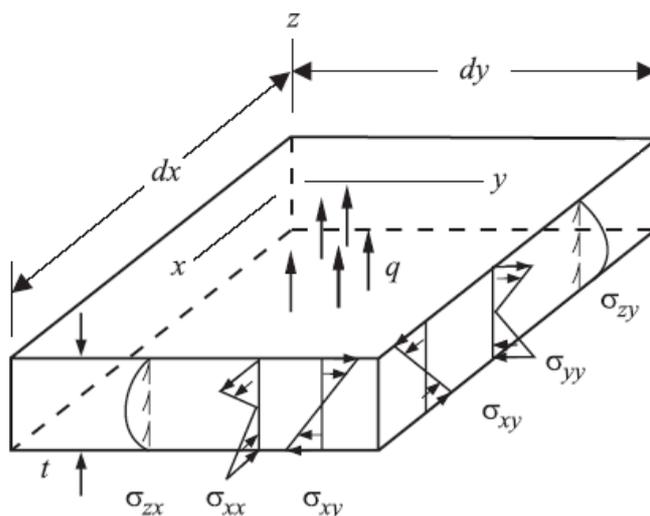


Abbildung 7; reine Biegung (Spannungsverteilung)

Biegemomente ergeben sich mit

$$M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{xx} z \, dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{yy} z \, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{xy} z \, dz$$

Querkräfte ergeben sich mit

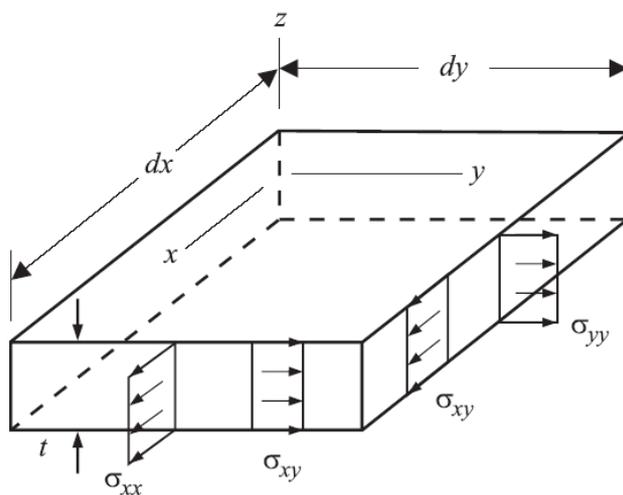
$$Q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{zx} \, dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{zy} \, dz$$

Membrane

Es sei ein Koordinatensystem xyz gegeben, wobei x und y orthogonal zu einander sind und z normal auf die Ebene xy steht. Die Plattendicke t wird in z Richtung aufgetragen.

Die Belastung wird in der Ebene xy aufgebracht. Die Lastabtragung erfolgt über die Membranwirkung. Normalspannung und Scherspannung sind über die Dicke t gleich verteilt, σ_{xx} , σ_{yy} und $\sigma_{xy} = \text{const.}$



Normalkräfte ergeben sich mit

$$N_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{xx} dz$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{yy} dz$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_{xy} dz$$

Abbildung 8; Membrane (Spannungsverteilung)

Allgemeine Schale

Allgemeine Schalen zeigen beide Spannungen, infolge reiner Biegung und infolge Membranwirkung.

Durch Superposition werden folgende Spannungskomponenten ermittelt.

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{t} + \frac{12M_x z}{t^3}$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{N_y}{t} + \frac{12M_y z}{t^3}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{3Q_x}{2t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} + \frac{12M_{xy} z}{t^3}$$

$$\sigma_{zy} = \frac{3Q_y}{2t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

Elementtypen

Für die Berechnung nach der FEM stehen verschiedene Dreieckselementtypen zur Verfügung. Zur Umsetzung der Membrantheorie werden CST (constant strain triangle) Elemente verwendet. Diese sind ebene Dreieckselemente mit 6 Freiheitsgraden, an jedem Knotenpunkt ($j=3$) bestehen 2 translatorische Freiheitsgrade (u_j, v_j).

Zur Modellierung der Biegetheorie stehen DKT (Diskrete Kirchhoff Theorie) Elemente zur Verfügung. Diese sind ebene Dreieckselemente mit 9 Freiheitsgraden, an jedem Knotenpunkt ($j=3$) bestehen 2 rotatorische Freiheitsgrade $\theta_{y_j}, \theta_{x_j}$ und 1 translatorischer Freiheitsgrad w_j .

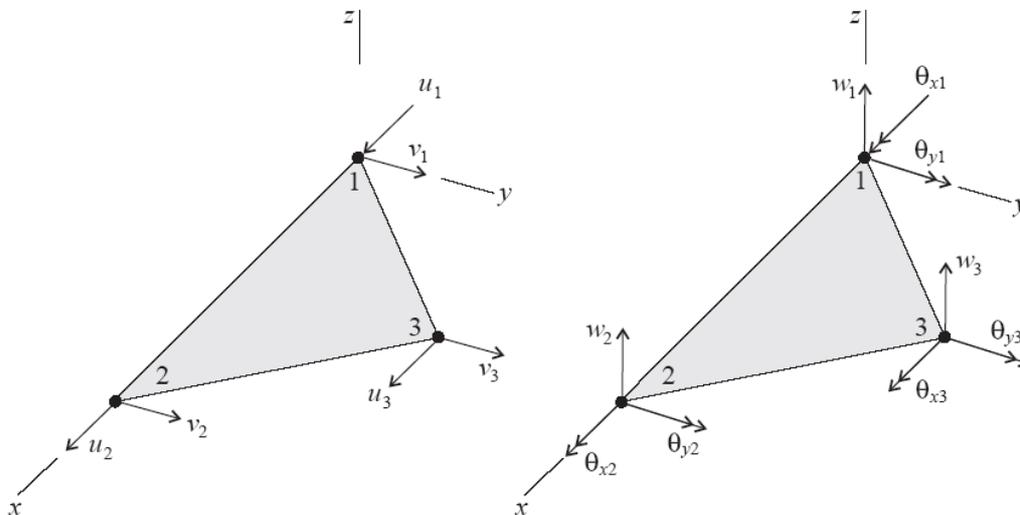


Abbildung 9; links: ein CST-Element zur Umsetzung der Membrantheorie; rechts: ein DKT-Element zur Umsetzung der Biegetheorie

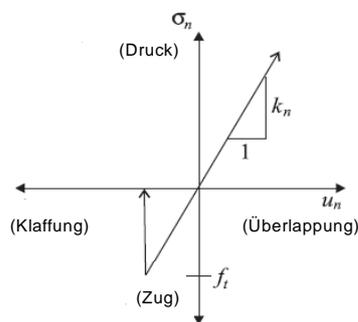
Für die Umsetzung der allgemeinen Schalentheorie werden, in $\text{FLAC}^{3\text{D}}$ standardmäßig, DKT-CST Elemente verwendet, bei denen je Knoten 5 Freiheitsgrade (3 Translationen und 2 Rotationen), also 15 Freiheitsgrade je Element, existieren.

2.1.3 Linerelemente (Liner)

Bezüglich Spannungsermittlung gelten für Liner-Elemente analoge Bestimmungen wie für Shell-Elemente.

Shell-Elemente werden mit dem angrenzenden Netz starr verbunden. Bei Liner-Elementen kann zusätzlich das Interaktionsverhalten zwischen Tragwerk und angrenzendem Netz gesteuert werden.

Dies geschieht in Scherrichtung über das Coloumb'sches Reibungsgesetz. In Normalrichtung kann Zug und Druck aufgenommen werden. Die Verbindung reißt also bei Überschreiten der möglichen aufnehmbaren Zugkraft und es entsteht eine Klaffung, bei bestimmter Laständerung, die wieder zur Schließung der Klaffung führt, tritt das Interaktionsmodell wieder voll in Kraft. Die Abbildungen 10 und 11 zeigen diese Zusammenhänge.



Das Verhalten in Normalrichtung wird über die Normalsteifigkeit k_n und die Normalfestigkeit f_t , das Verhalten in Scherrichtung über die Kohäsion c , Restkohäsion c_r , Reibungswinkel φ , Schersteifigkeit k_s und die wirkende Normalspannung σ_n gesteuert.

Typische Bauteile, die mit Liner modelliert werden, sind Spritzbetonwände oder Spritzbetontunnelschalen.

Abbildung 10: Spannungs-Verformungsdiagramm in der Kontaktebene (Normalspannung)

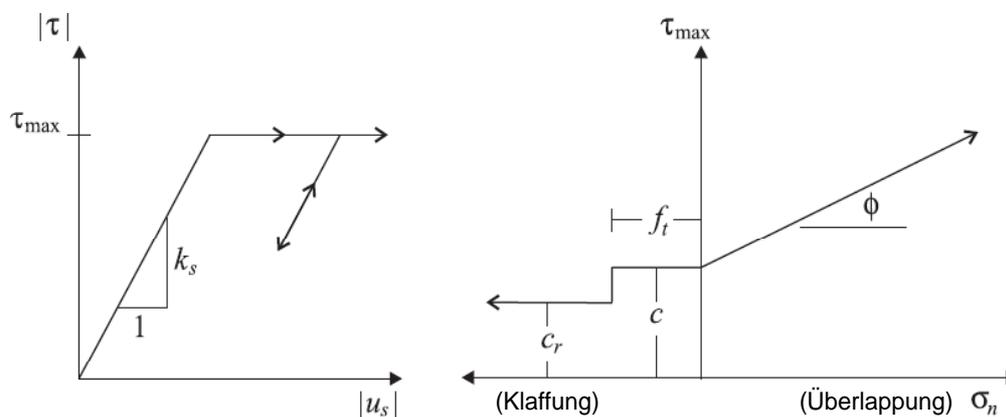


Abbildung 11: Links: Spannungs-Verformungsdiagramm in der Kontaktebene (Scherspannung); Rechts: Schubspannung infolge Normalspannung (Coloumb'sches Reibungsgesetz)

3 Drei Bestandteile einer Modellierung

3.1 Geometrie

Der geometrische Raum, den ein bestimmtes Problem einnimmt, muss in definierter Form vorliegen, meist als 2D-, 3D-Drahtgittermodell oder 3D-Solidmodell.

In der Regel wird die Geometrie im CAD-System definiert. Im nächsten Schritt wird diese Geometrie für die Berechnung vernetzt. Vernetzen bedeutet, einen Raum, eine Oberfläche oder einen Rand mit finiten Volumina, finiten Elementen oder Boundary Elementen auszufüllen.

In der Abbildung 12 ist der Ablauf des Prozesses der Geometrieerstellung dargestellt

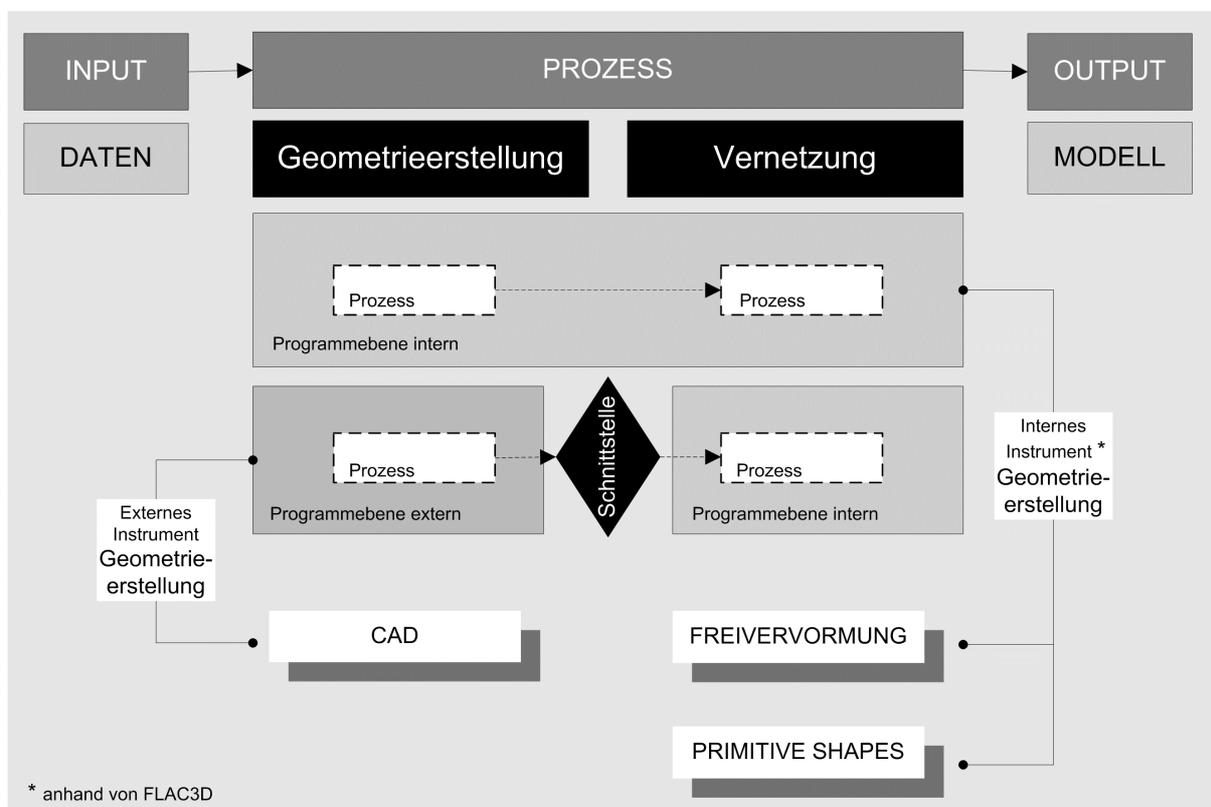


Abbildung 12: Ablauf der Geometrieerstellung und der Vernetzung des Modells

Vernetzen ist kein Bestandteil der Geometrieerstellung, sondern eigentlich dem Berechnungsprozess zuzuordnen bzw. ein Bestandteil der numerischen Methoden.

Zum Zweck der Übersichtlichkeit für den Ingenieur wird dieser Prozess trotzdem dem ersten Schritt (Geometrieerstellung) zugeordnet.

Berechnungsprogramme enthalten Module zur Geometrierstellung. Bei komplexen Bauteilen, z.B. im Fahrzeugbau, reichen diese implementierten Module in der Regel nicht aus um die notwendigen Geometrien zu generieren. Es muss auf externe CAD-Programme zurückgegriffen werden. Voraussetzung für diese zweistufige Vorgehensweise (1. externe Geometrierstellung, 2. interne Vernetzung) ist eine Schnittstelle nach Außen um Daten zu importieren.

Anhand eines Beispiels sollen im Folgenden die Möglichkeiten der internen Geometrierstellung in FLAC^{3D} gezeigt werden.

FLAC^{3D} stellt einen Katalog von geometrischen Grundkörpern zur Verfügung um Bauteile zu modellieren. (siehe Abbildung 13)

Für *praktische Aufgabenstellungen* erreicht man mit den **Grundelementen (Primitive Shapes)** schnell die Grenzen des Möglichen. Eine Erweiterung der Modellierungsmöglichkeiten stellt die sog. **Freiverformung** dar. Hier werden einzelne Knoten einer Grundfigur verzerrt und so eine neue Geometrie erstellt.

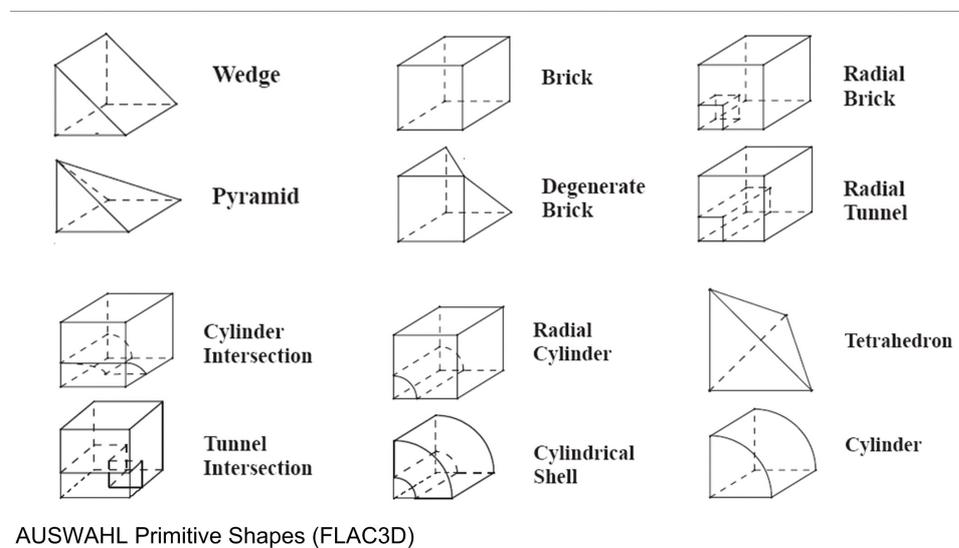


Abbildung 13: Grundelemente in FLAC^{3D}

In der Regel geht man davon aus, dass die Knotenanzahl groß ist. Somit kann die Freiverformung nicht mehr mit Hilfe einer manuellen Koordinateneingabe durchgeführt werden, sondern man verwendet Routinen, um konkrete Bauformen zu erzeugen.

3.1.1 Geometrieerstellung mit Grundkörpern und der Freiverformung in FLAC^{3D}

Ein Vergleich der Modellierungsmöglichkeiten von Grundelementen (Primitive Shapes) und einer Freiverformung wird anhand eines allgemeinen Tunnelquerschnitts durchgeführt.

Die Erstellung eines Grundelements wird mittels definierten Parametern gesteuert. Zur Modellierung eines Tunnelquerschnitts wird hier ein „Radial Cylinder“ (siehe Abbildung 13) verwendet. Die Generierung ist mittels Eingabefunktionen, wie z.B. hier Tunnelradius und Netzdicke, etc., leicht steuerbar und geht in der Regel schnell.

Die Abbildung 14 zeigt das Ergebnis der Funktion „Radial Cylinder“ .

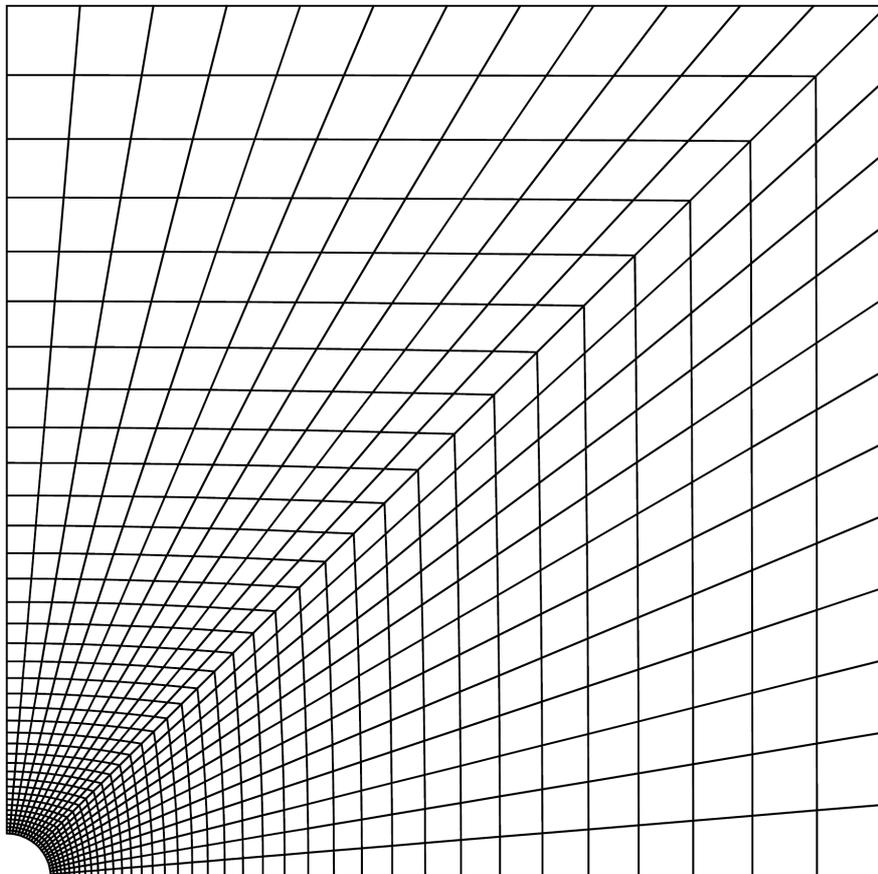


Abbildung 14: Frontalansicht einer Tunnelgeometrie erstellt mit dem Primitive Shape "Radial Cylinder"

Soll z. B. bei dem in Abbildung 14 dargestellten Modell ein mehrschichtiger horizontaler Untergrundaufbau oder ein Grundwasserspiegel definiert werden, ergeben sich Schwierigkeiten aufgrund der radialen Netzerstellung bei der Funktion Radial Cylinder.

Für Untersuchungen von allgemeinen Tunnelquerschnitten ist der Radial Cylinder ebenfalls nicht geeignet.

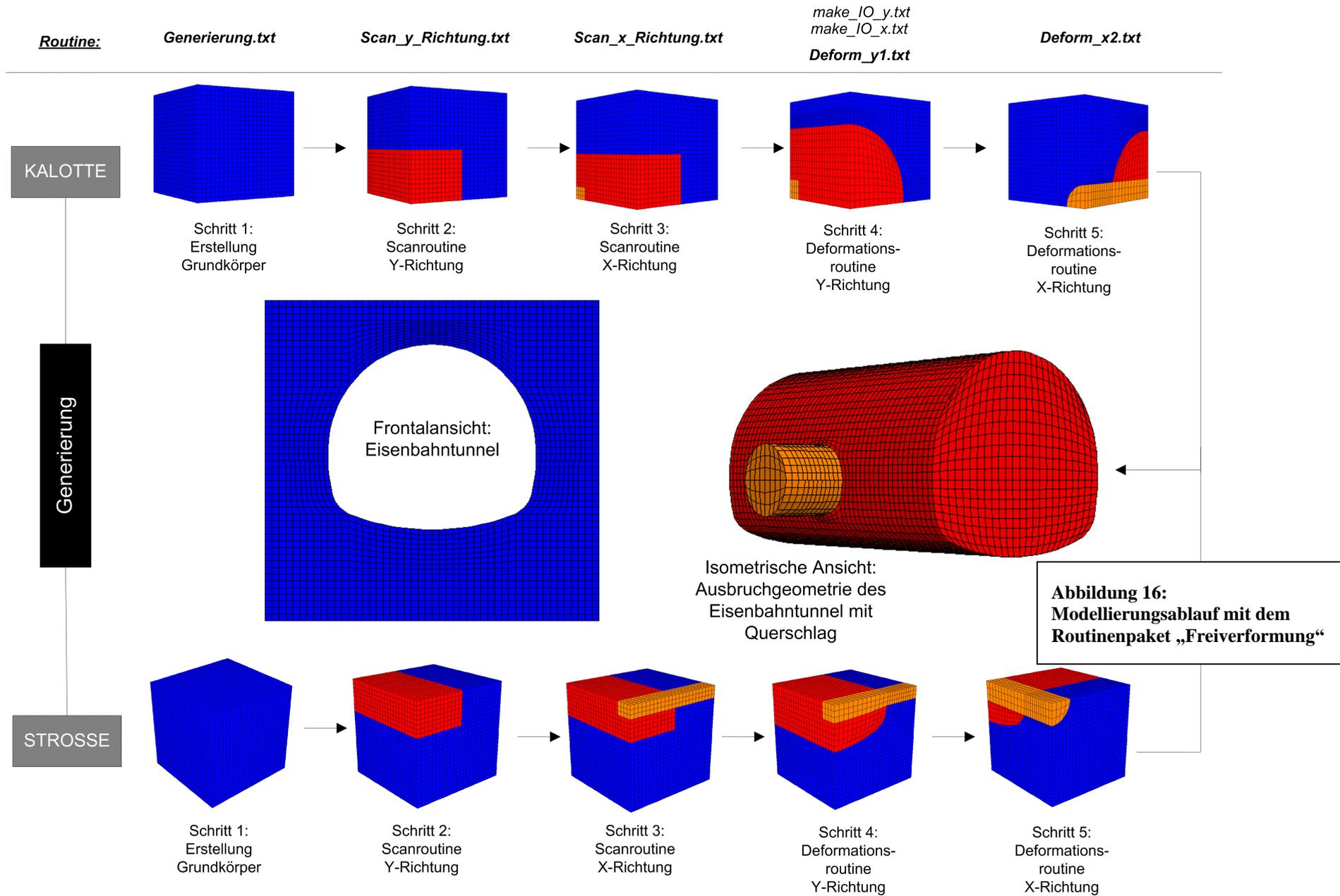


Abbildung 16:
Modellierungsablauf mit dem
Routinenpaket „Freiverformung“

3.1.2 Verwendungsbereiche von Primitive Shapes und Freiverformung

In Tabelle 3 sind die prinzipiellen Einsatzbereiche der Primitive Shapes und der Freiverformung bei Unterscheidung nach Art der Aufgabe dargestellt.

| Verwendungsmatrix Primitive Shapes Freiverformung | | Aufgabenstellung | |
|---|-----------------|--|--|
| | | idealisiert – vereinfachte Aufgabenstellung | komplex - praktische Aufgabenstellung |
| Geometrie- generierung | Primitiv Shapes | optimal | schlecht möglich |
| | Freiverformung | möglich – eventuell nicht optimal | optimal |

Tabelle 3: Verwendungsmatrix Primitive Shapes – Freiverformung

3.2 Material

In der makroskopischen Werkstoffkunde beschreiben Materialparameter die Effekte als Folge von Wechselwirkungen auf atomarer oder molekularer Ebene. Dementsprechend sind ingenieurtechnische Werkstoffmodelle immer grobe Vereinfachungen komplexer mikromechanischer Interaktionen und deshalb theoretisch immer anfechtbar (Rolf Steinbuch, 2004).

Es wurden und werden eine Unzahl von ingenieurtechnischen Werkstoffmodellen ent- bzw. weiterentwickelt. Je nach Einsatzgebiet, Materialeigenschaften und verfolgten Untersuchungszielen sind jeweils geeignete Werkstoffmodelle auszuwählen.

Alle hier durchgeführten Untersuchungen legen ihr Hauptaugenmerk nicht auf nichtlineare bzw. plastische Materialeffekte, sondern auf

- die Geometrieerstellung in FLAC3D,
- die Interaktion zwischen Gebirge und Tunnelschale,
- den Einfluss der Dicke einer Tunnelschale auf das elastische Tragverhalten eines Tunnels.

Das Materialmodell wurde in allen Versuchen linear elastisch festgelegt.

3.3 Randbedingungen

Es liegt eine systemtheoretisch nicht eindeutige (siehe Kapitel 1), aber technisch eindeutige Abgrenzung zwischen einem Bauteil und den Einwirkungen auf das Bauteil vor. Dieser Sachverhalt findet sich im Vorgehen bei der Abgrenzung vom Bauraum und den darauf einwirkenden Randbedingungen wieder.

In der Bautechnik unterscheidet man verformungs- und kraftorientierte Randbedingungen.

Zu den kraftorientierten Randbedingungen zählen Gewichtskräfte, Erdbebenkräfte, Anprallkräfte, etc.

Zu den wegorientierten Randbedingungen zählen Lagersenkungen, Bodenverformungen, Quellen, Schwinden und Temperatur bei Zwangslage, etc.

3.3.1 Grenzen der Randbedingungsmodelle

Die Einwirkungen, ob kraft- oder wegkontrolliert, gehen immer von dem Ideal der freigeschnittenen Struktur aus, an deren Oberfläche Kräfte oder Verschiebungen angreifen. Es kann jede Form von Belastung als Randbedingung gesehen werden. Realistischer ist eine Wechselwirkung zwischen benachbarten Elementen, seien es Festkörper oder Fluide. Beim Einsatz von Kraft- oder Weg-Randbedingungen ist dieses Berühren durch eine Annahme des Bearbeiters ersetzt. Natürlich wäre es häufig sinnvoll, die für den Lastfall relevante Umgebung mitzumodellieren. Dadurch entstehen aber wieder größere Modelle mit nichtlinearen Kontakten und Relativbewegungen und den korrespondierend gestiegenen Rechenzeiten bzw. Speicheranforderungen.

Hier abzugrenzen, was an Vereinfachung gerechtfertigt bzw. sinnvoll ist, erfordert Sachkenntnis und Erfahrung (Rolf Steinbuch, 2004).

4 Studien

4.1 Analytisches und numerisches Werkzeug

Es existiert eine Vielzahl von empirischen und analytischen Werkzeugen für die Untersuchung von Tunnelausbau. Daneben besteht die Möglichkeit, ein System numerisch zu modellieren und anschließend zu analysieren.

Jedes der analytischen und empirischen Modelle hebt je nach Untersuchungsschwerpunkt und Untersuchungsziel bestimmte Einflussfaktoren hervor. Analytische Theorien beschreiben konkrete und begrenzte Sachverhalte. Sollen neue Problembereiche untersucht werden, muss das Theoriengebäude gewechselt werden. Der Vorteil von numerischen Instrumenten gegenüber analytischen bzw. empirischen liegt darin, dass diese Werkzeuge zur Untersuchung von beliebigen Fragestellungen verwendet werden können. Allerdings sind numerische Lösungswege in der Regel zeit- und kostenaufwendiger als analytische Berechnungen.

Mit numerischen Berechnungsmethoden, wie z.B. mit der hier angewandten Finite-Differenzen Methode, verfügt man über ein relativ weit entwickeltes Instrument zur Untersuchung von beliebig komplexen Problemstellungen.

Auf der anderen Seite stehen entwickelte empirische und analytische Modelle für bestimmte Probleme zur Verfügung.

- Sie sind meist leicht und
- schnell anzuwenden und
- sind empirisch überprüft und haben sich eventuell in der Vergangenheit bewährt.

4.2 Zielsetzung der Studien

Ziel dieser Arbeit ist, einerseits die Beschreibung des theoretischen Tragverhaltens eines Tunnels als Interaktion zwischen Tunnel und Gebirge und andererseits die Anwendbarkeit von Schalenelementen als vereinfachte Modellierung der Tunnelschale zu untersuchen

4.2.1 Anwendbarkeit von Schalenelementen zur Modellierung der Tunnelschale

Der mathematischen Formulierung von Schalenelementen liegt die Schalentheorie zu Grunde. Es ist bekannt, dass diese bei großer Dicke der Schale zu falschen Ergebnissen führt. Daher wird anhand des Beispiels Balken auf zwei Stützen (Studie 1) untersucht, bis zu welchem Verhältnis von Dicke zur Balkenlänge Schalenelemente die tatsächliche Spannungsverteilung im Bauteil liefern.

4.2.2 Untersuchung des Verhaltens des Systems Gebirge - Tunnel

Einen analytischen Lösungsansatz, um das Tragverhalten des Systems Gebirge – Tunnel zu beurteilen, zeigt Herbert H. Einstein (1979) in der Arbeit „Simplified Analysis for Tunnel Supports“. Er nennt den Lösungsansatz die „Relative Stiffness Solution“. Einstein untersucht einerseits die Lastaufteilung zwischen Gebirge und Ausbau, andererseits den Einfluss der Eigenschaften der Fuge zwischen Gebirge und Ausbau. Seine Untersuchung zeigte, dass bei vollkommenem Verbund zwischen Schale und Gebirge die Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale geringer ist als bei vollkommen freier Gleitung.

Diese numerische Untersuchung am Modell Gebirge – Tunnel ist sehr zeitaufwendig und wird daher in Studie 2 am Modell „Balken auf elastischer Bettung“ untersucht.

Die in Abbildung 17 dargestellte Kennlinie zeigt, dass

1. eine Zunahme der Steifigkeit des Ausbaus eine Zunahme der Ausbaubelastung zur Folge hat.
2. eine prinzipiell angestrebte Abnahme der Ausbaubelastung eine Zunahme der Ausbauverformung mit sich bringt.

Der Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses auf die Tragwirkung des Tunnels wird in der Studie 3 - Untersuchung eines Tunnels in einem elastischen Medium – analysiert.

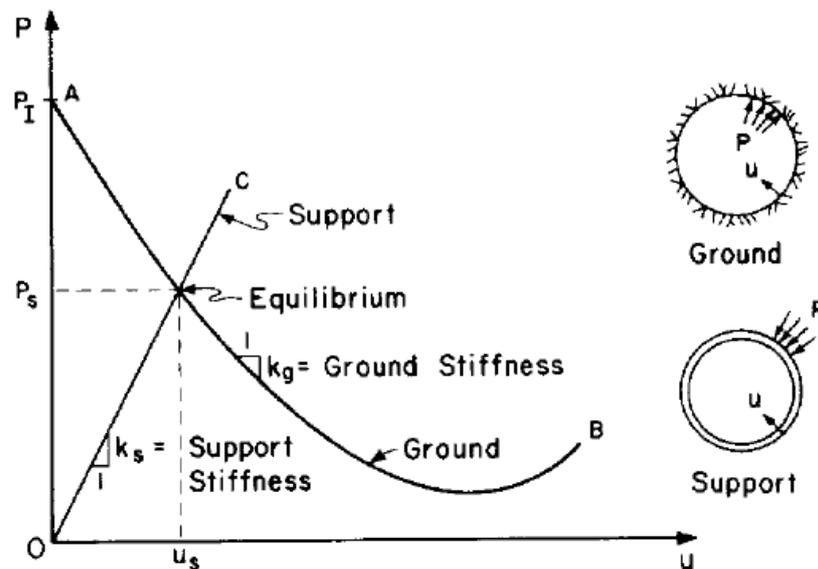


Abbildung 17: Gebirgskennlinie - Characteristic Curves (H. H. Einstein, 1979)

H. H. Einstein (1979) beschreibt den Effekt, den das Steifigkeitsverhältnis Gebirge – Ausbau auf das Tragverhalten des Tunnelausbaus hat, folgendermaßen:

„...Characteristic curves [an old engineering tool that had extensively used around the beginning of the century and has been reintroduced in tunnelling by Rabcewicz, Peck and Lombardi show very clearly the effect of different ground stiffnesses on the behaviour of the tunnel support: the stiffer the support is relative to the ground, the greater will be the support load. The effects of stiffness on shape changes of the support can readily be seen in the two limiting cases: an ideally flexible support in a nonuniform stress field will deform until the stresses acting on the support are uniform (no bending moment can occur), whereas an ideally rigid support will not change its shape and will have to support the original nonuniform stress fields (large bending moments can occur). ...”

4.3 Studie 1 - Balken auf zwei Stützen

4.3.1 Aufgabenstellung

Mit Schalenelementen können, je nach geometrischer Definition, linien- und flächenförmige Bauteile modelliert werden. Es besteht die Möglichkeit entweder ebene oder gekrümmte Bauteile zu generieren. Als Bedingung gilt nur, dass die Abmessung in Dickenrichtung klein gegenüber den Abmessungen in Tragrichtung ist.

In dieser Studie wird die Anwendbarkeit von Schalenelementen für die Modellierung eines linearen bzw. flächigen Bauteils untersucht. Dazu wird ein Balken auf zwei Stützen, bestehend aus einem elastischen Material, einerseits mittels Schalenelementen und andererseits mittels Kontinuums-elementen modelliert. Es werden zehn Variationsfälle mittels einer kontinuierlichen Erhöhung der Balkendicke von 10 cm bis 2,00 m erstellt. Anhand dieser Ergebnisse wird ein Vergleich der Schalen- und Kontinuums-elemente durchgeführt. Als zusätzliche Gegenüberstellung wird der betrachtete Balken mittels Balkentheorie berechnet.

4.3.2 Modellbeschreibung

Der Balken weist eine Stütz-länge von $l = 2,0$ m auf. Die Balken-höhe wird in einem Bereich von $d = 0,10$ m bis 2,00 m variiert. Die Balken-breite wird mit 1 m angenommen. Für den elastischen Balken verwendet man einen E-Modul von 32000 MPa (3200 KN/cm²) (~Beton). Die Querdehnzahl beträgt $\nu = 0,20$. Die Belastung wird proportional mit der Dicke gesteigert. Größenangaben befinden sich auf den jeweiligen Ergebnisblättern. Die definierten Parameter werden einerseits anhand eines Kontinuumsmodells und andererseits anhand eines Schalenmodells umgesetzt.

4.3.3 Ergebnisse

Es wird ein Vergleich der Biegemomentenverläufe und der Randnormalspannungen über die Trägerlänge durchgeführt (Abbildungen 18 bis 28). Weiters wird der Unterschied zwischen den Normalspannungsverläufen über die Bauteilhöhe untersucht (Abbildungen 29 bis 50).

Die Momentenverteilung bzw. die Randfasernormalspannungen bei der Verwendung von Schalen- und Kontinuums-elementen im Bereich der Balkenschlankheiten von $h/l=0,10$ bis $h/l=0,20$ stimmen gut überein (Gültigkeit der **Plattenmodelle** gemäß Pkt. 4.3.4 Z 3 bzw. Z 4).

Beim vorliegenden Untersuchungsgegenstand kann der Übergang zum hauptsächlich **Membrantragverhalten** des Systems mit einer Schlankheit $h/l \leq 0,05$ ungefähr festgelegt werden (siehe auch Pkt. 4.3.4 Z 1 bzw. Z 2).

Beim gegebenen Balken mit $h/l \geq 0,2$ weichen die Ergebnisse bezüglich Randfasernormalspannungen und Spannungsverteilung über die Trägerhöhe deutlich voneinander ab (siehe auch Pkt. 4.3.4 Z 5)

Abbildung 18: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|-----------|-------------|---|----------------------|
| h/l [] | 0,05 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,10 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,10 m |
| | | Eigengewicht g | 7,50 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 8333 cm ⁴ |

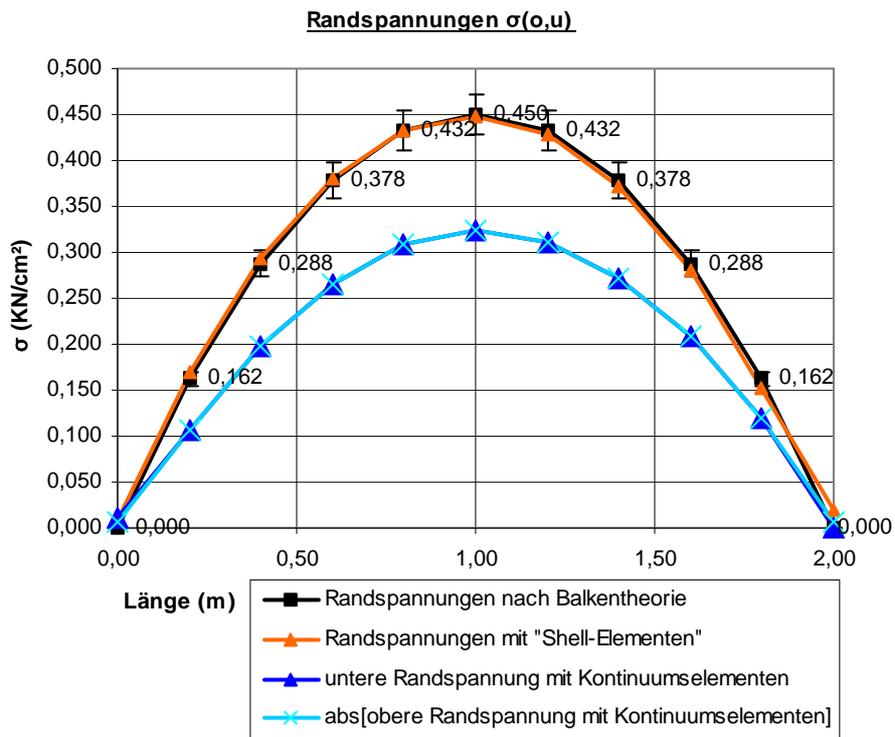
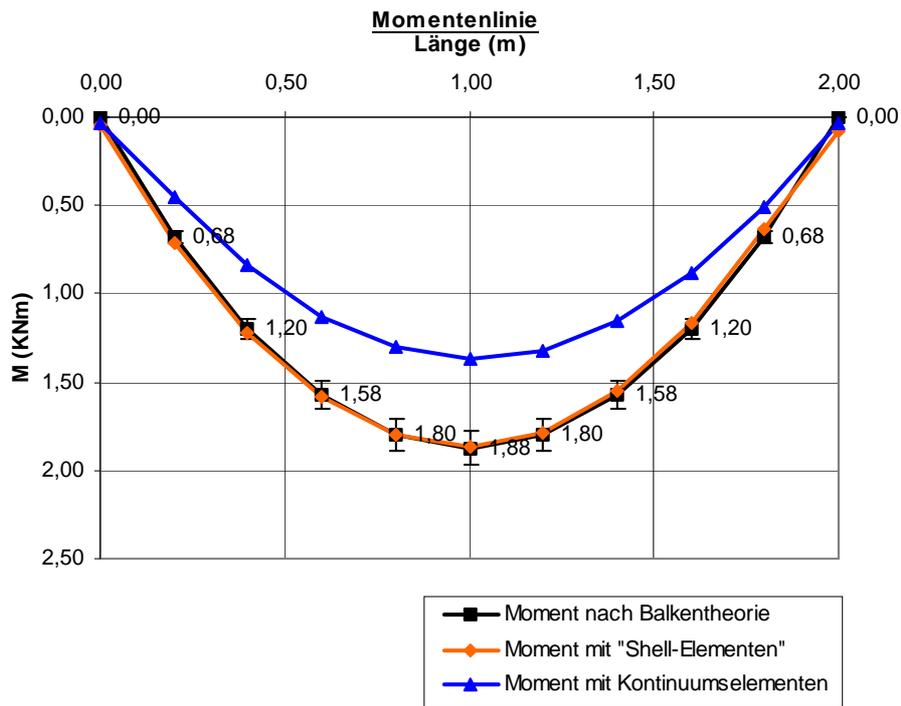
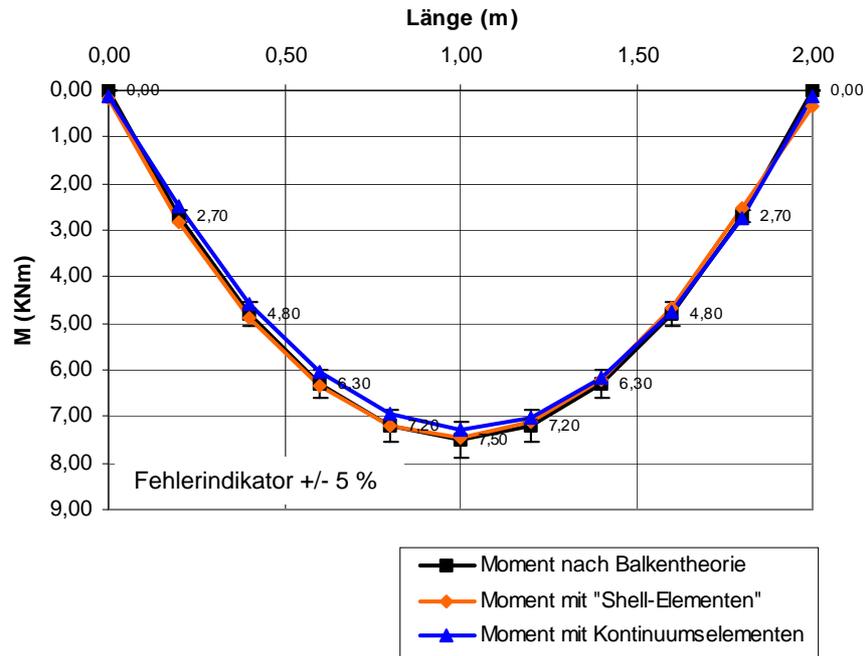


Abbildung 19: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|-----------|-------------|---|-----------------------|
| h/l [] | 0,10 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,20 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,20 m |
| | | Eigengewicht g | 15,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 66667 cm ⁴ |

Momentenlinie



Randspannungen $\sigma(\sigma,u)$

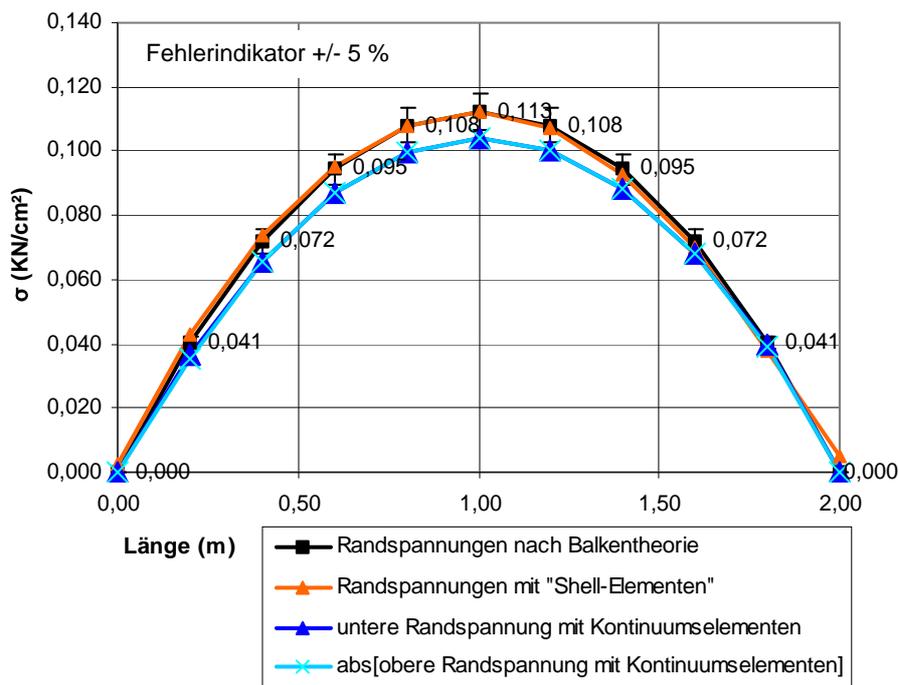


Abbildung 20: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|-----------|-------------|---|------------------------|
| h/l [] | 0,20 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,40 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,40 m |
| | | Eigengewicht g | 30,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 533333 cm ⁴ |

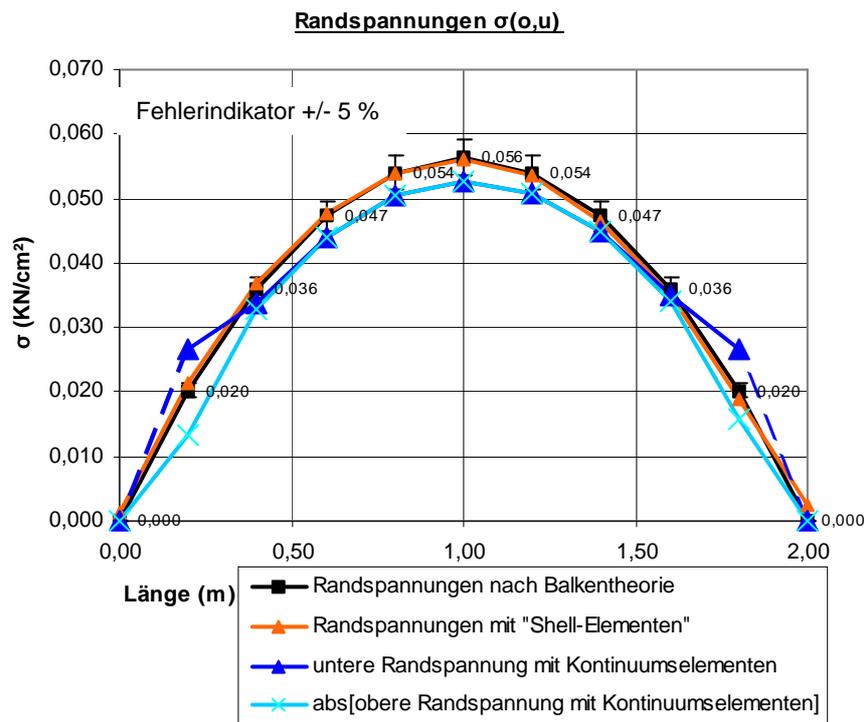
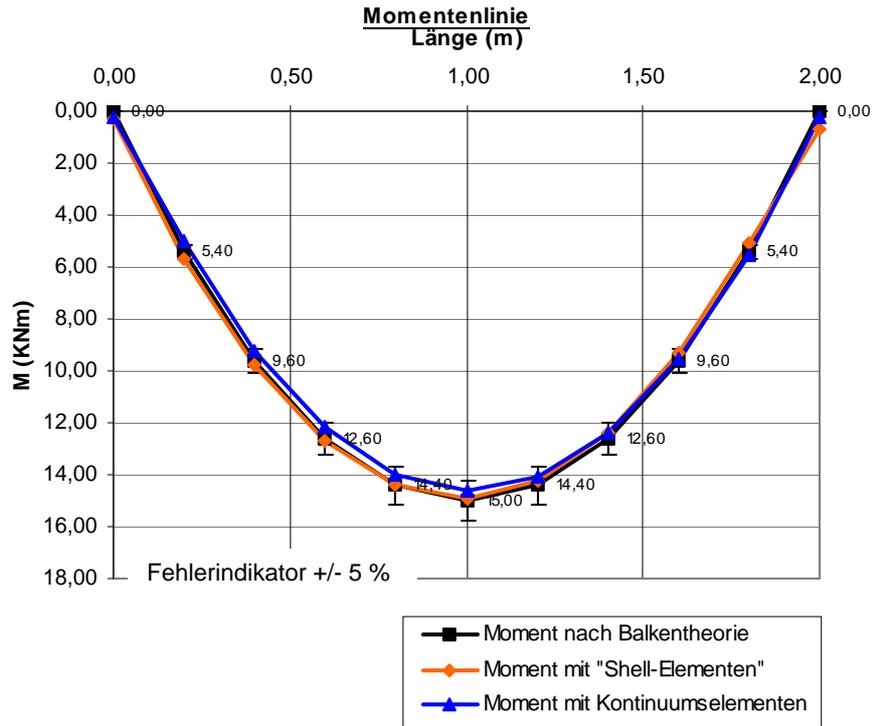


Abbildung 21: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,30 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,60 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,60 m |
| | | Eigengewicht g | 45,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 1800000 cm ⁴ |

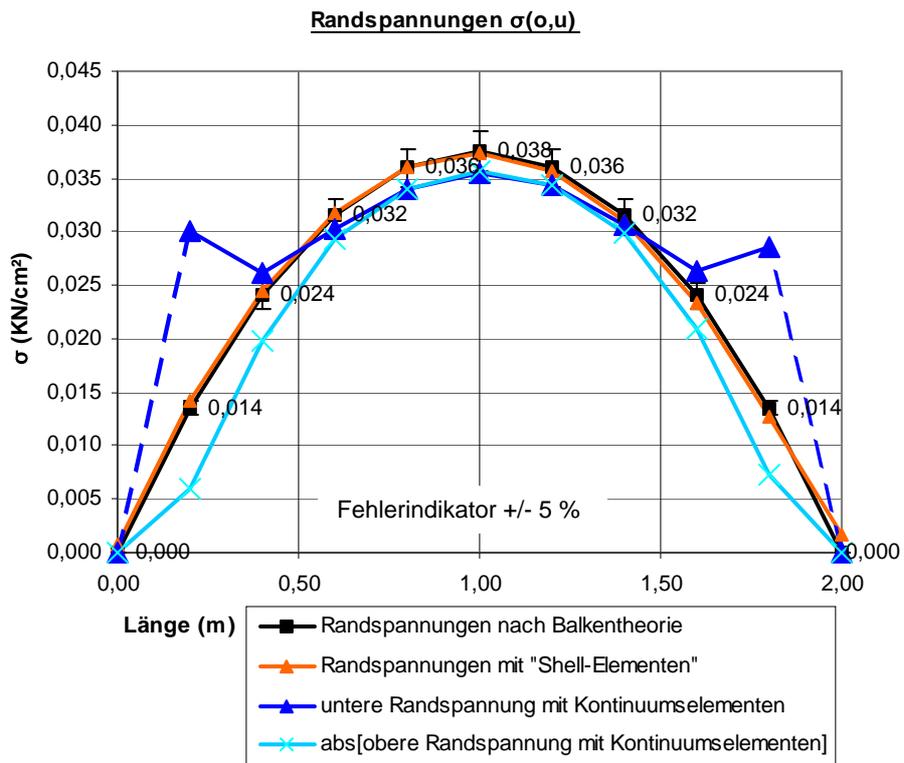
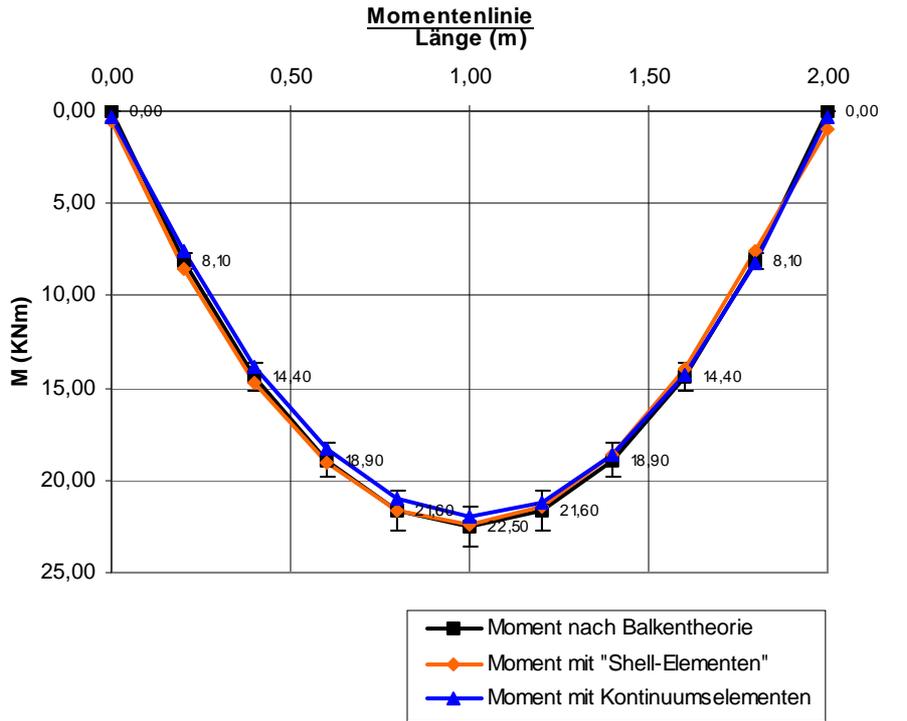


Abbildung 22: : Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,40 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,80 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,80 m |
| | | Eigengewicht g | 60,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 4266667 cm ⁴ |

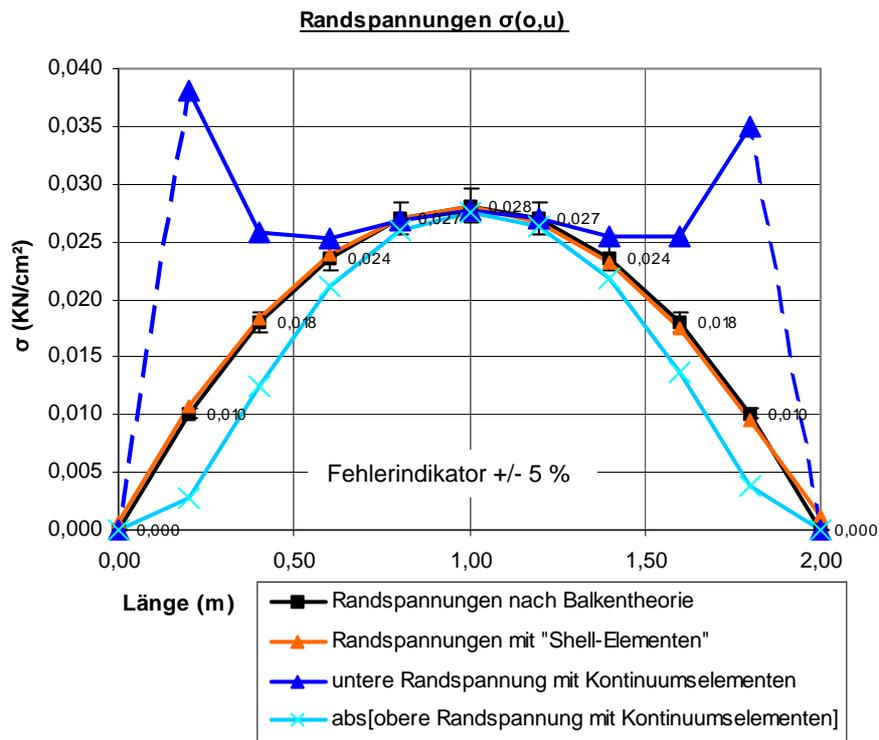
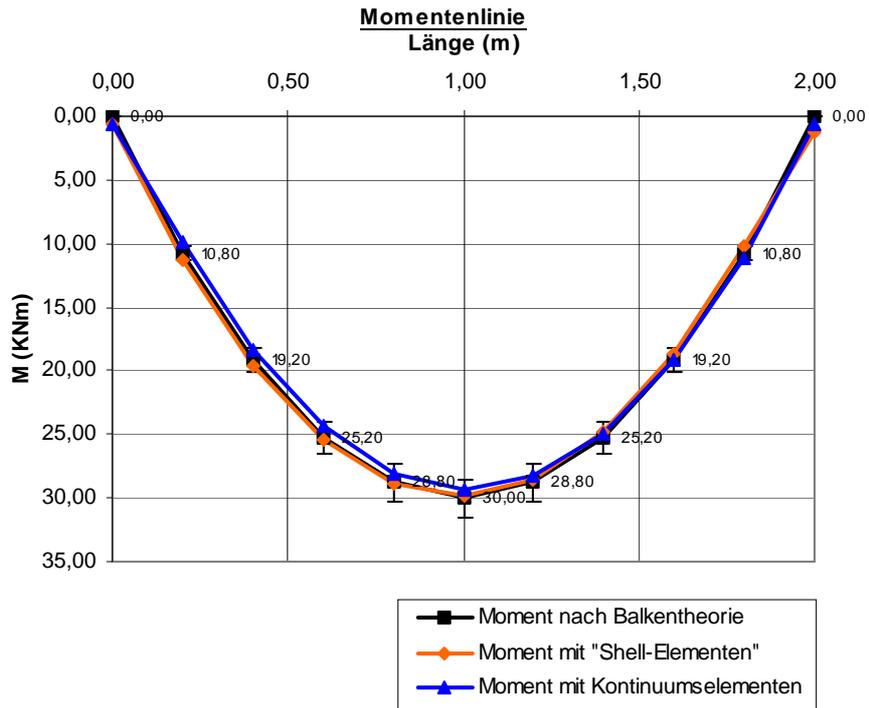


Abbildung 23: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,50 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,00 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,00 m |
| | | Eigengewicht g | 75,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 8333333 cm ⁴ |

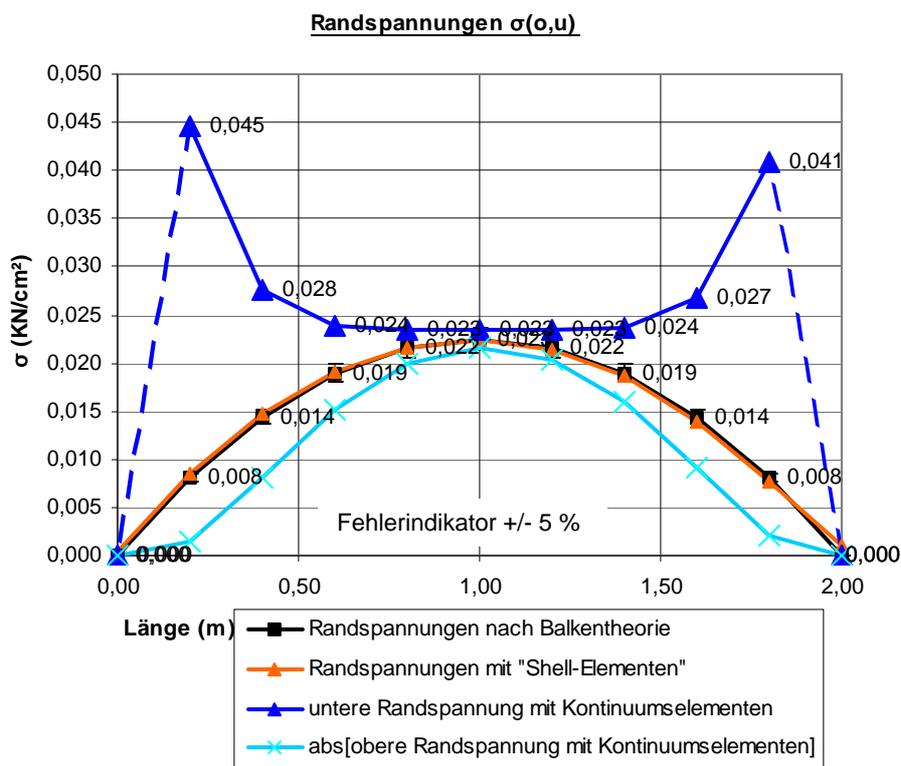
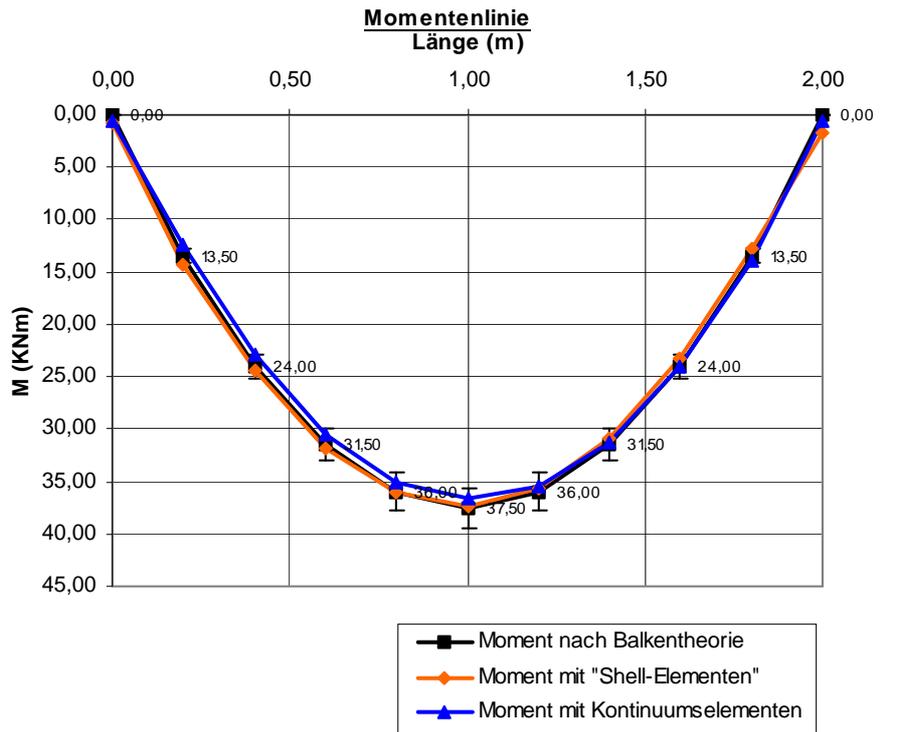


Abbildung 24: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,60 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,20 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,20 m |
| | | Eigengewicht g | 90,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J _{yy} | 14400000 cm ⁴ |

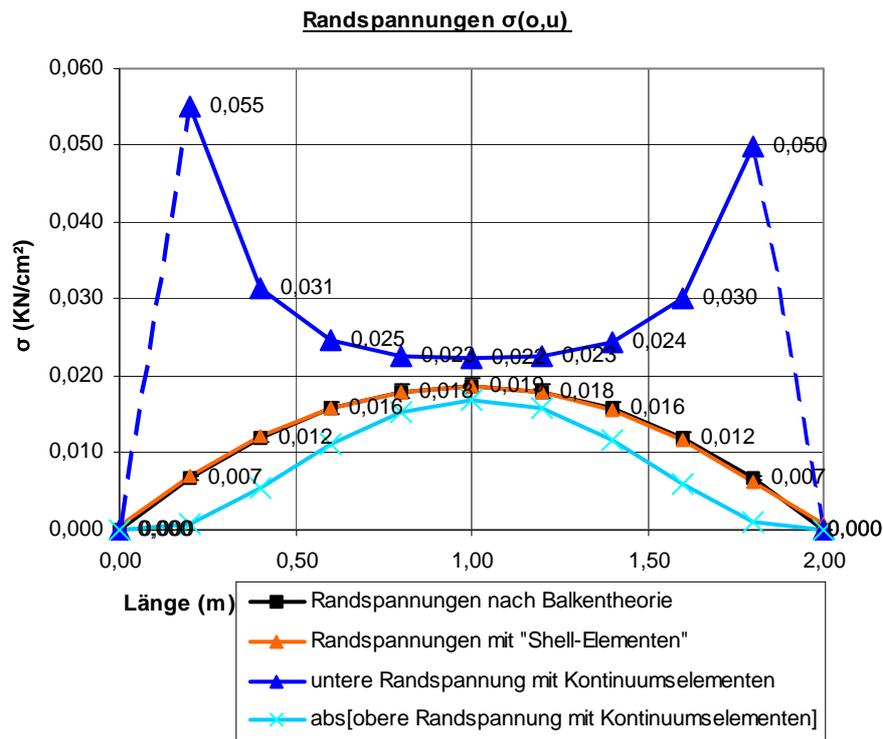
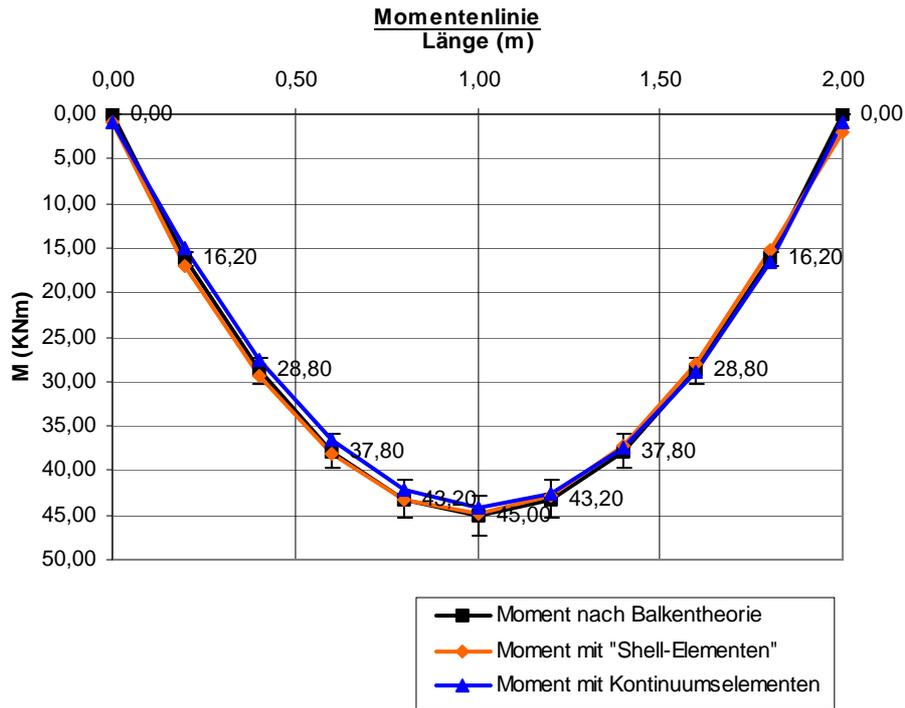


Abbildung 25: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,70 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,40 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,40 m |
| | | Eigengewicht g | 105,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 22866667 cm ⁴ |

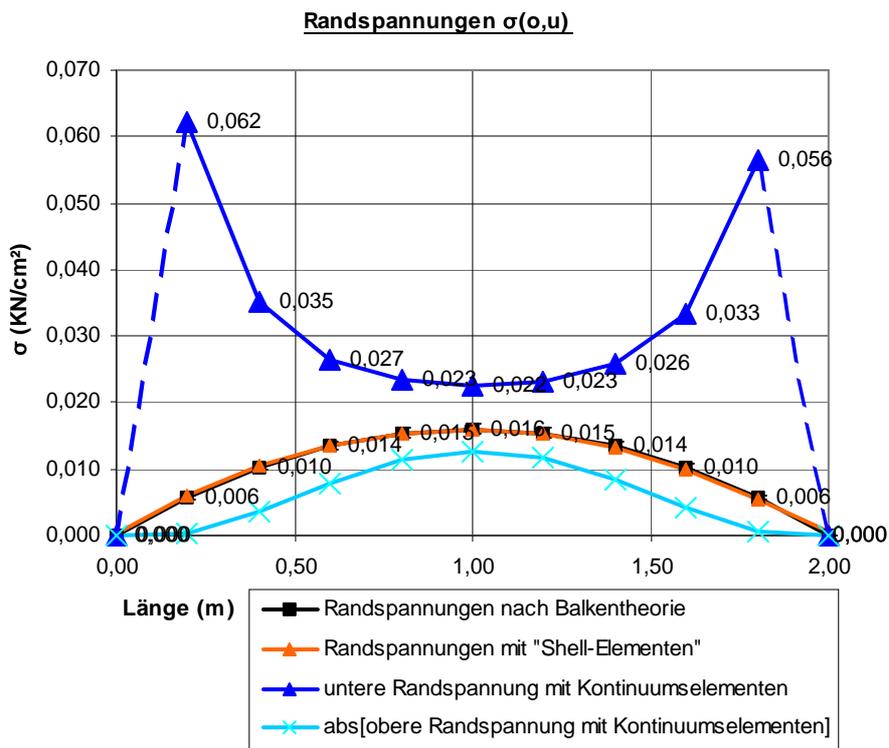
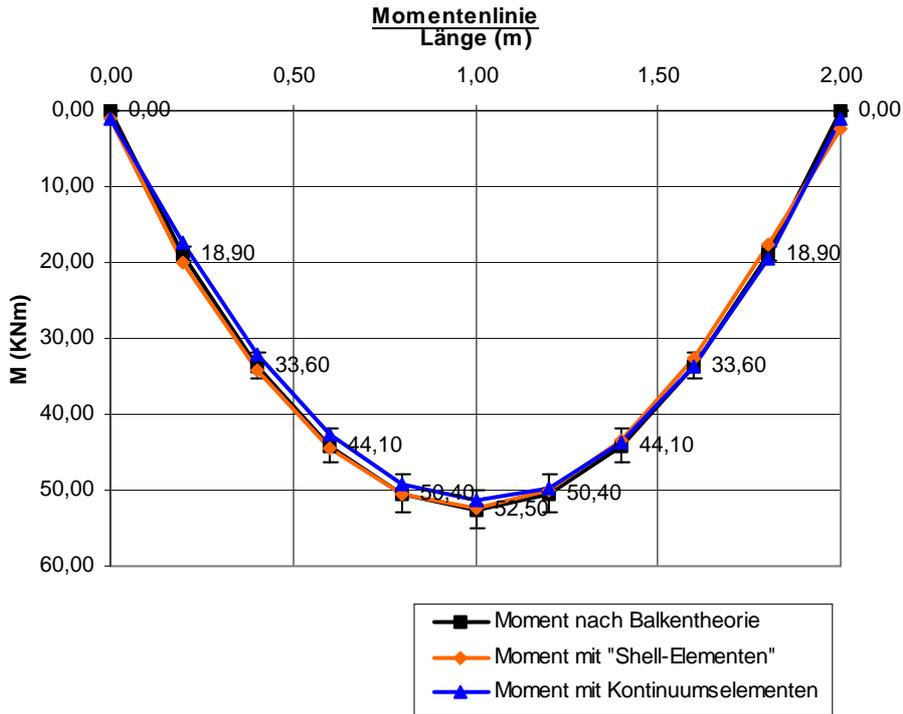


Abbildung 26: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,80 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,60 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,60 m |
| | | Eigengewicht g | 120,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 34133333 cm ⁴ |

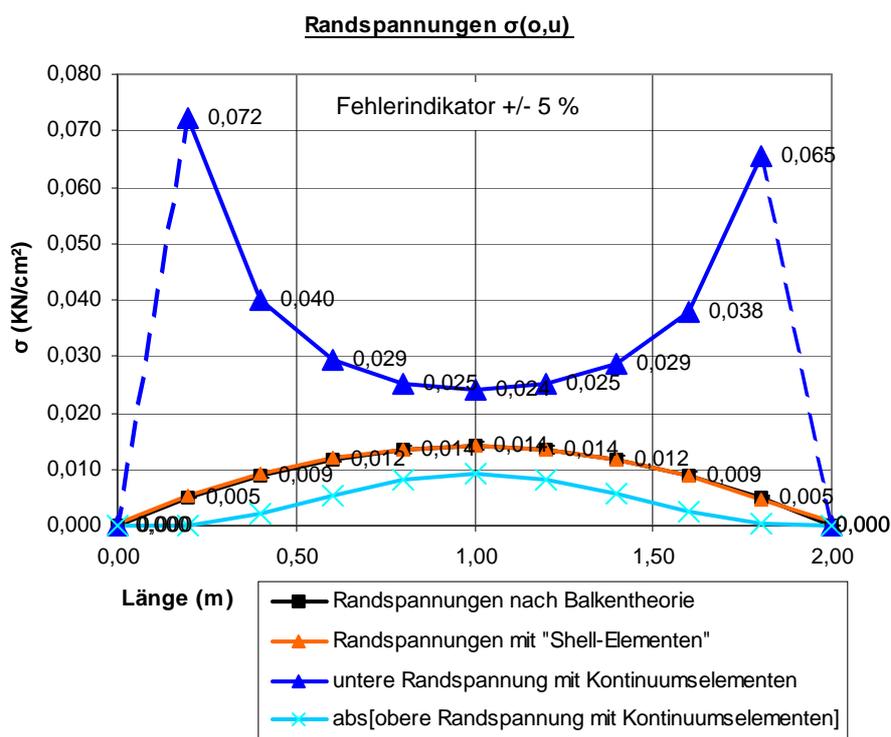
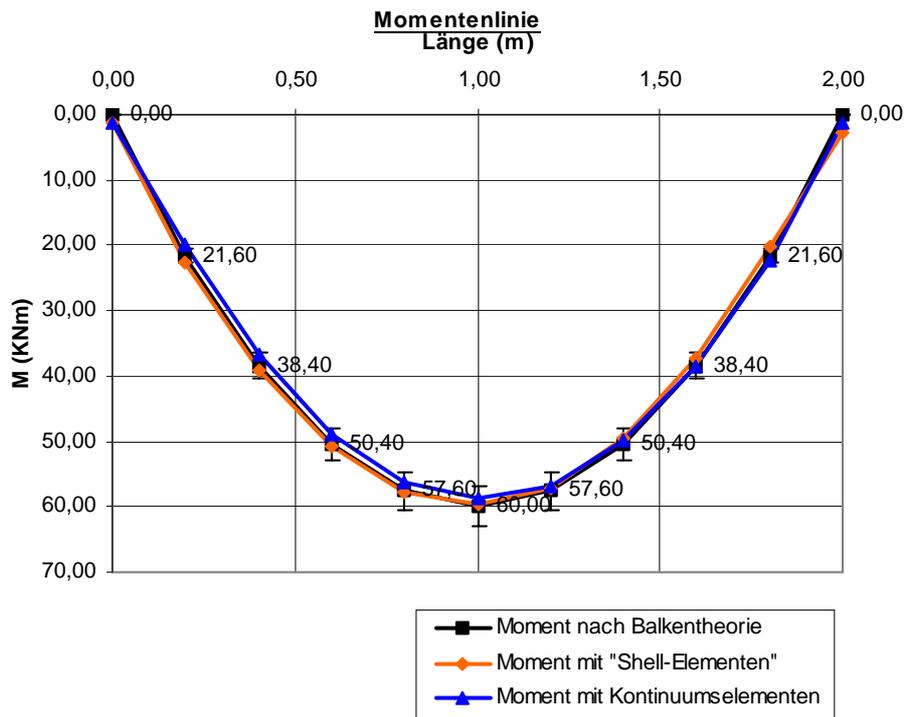


Abbildung 27: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalenelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,90 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,80 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,80 m |
| | | Eigengewicht g | 135,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 48600000 cm ⁴ |

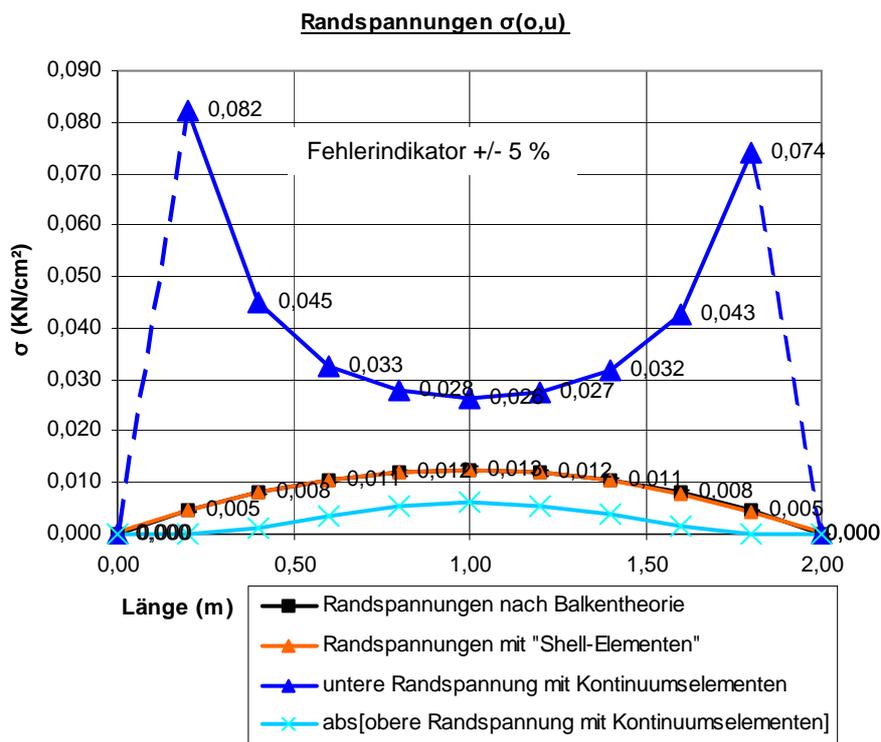
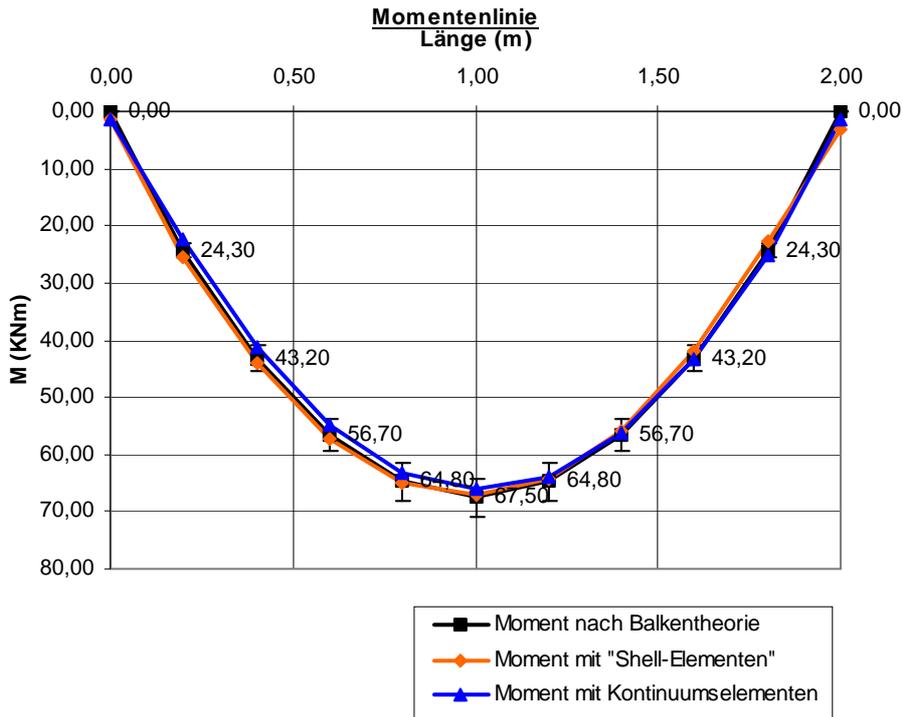
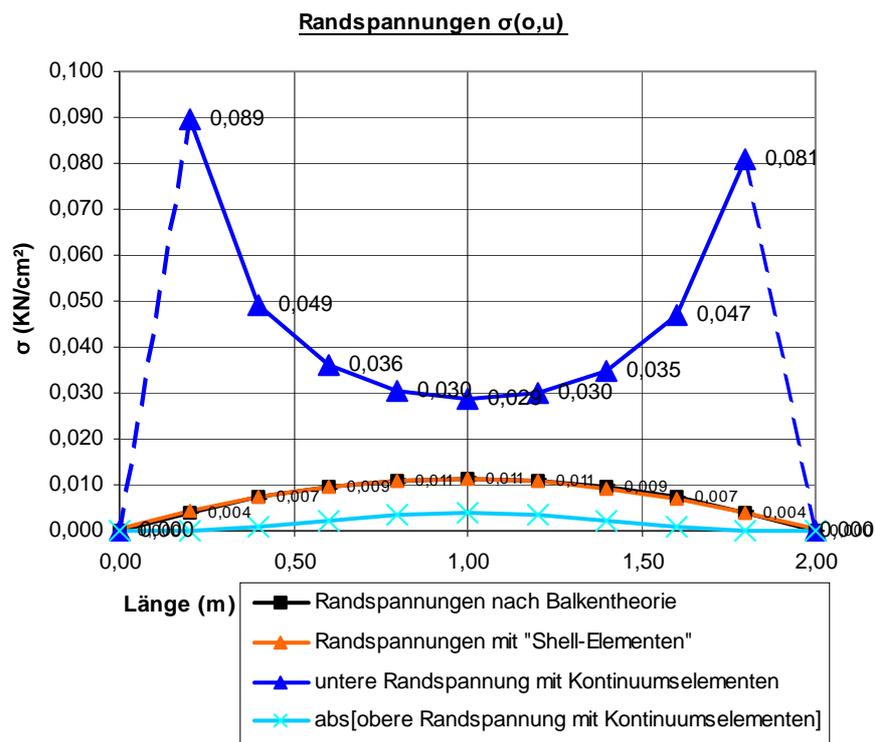
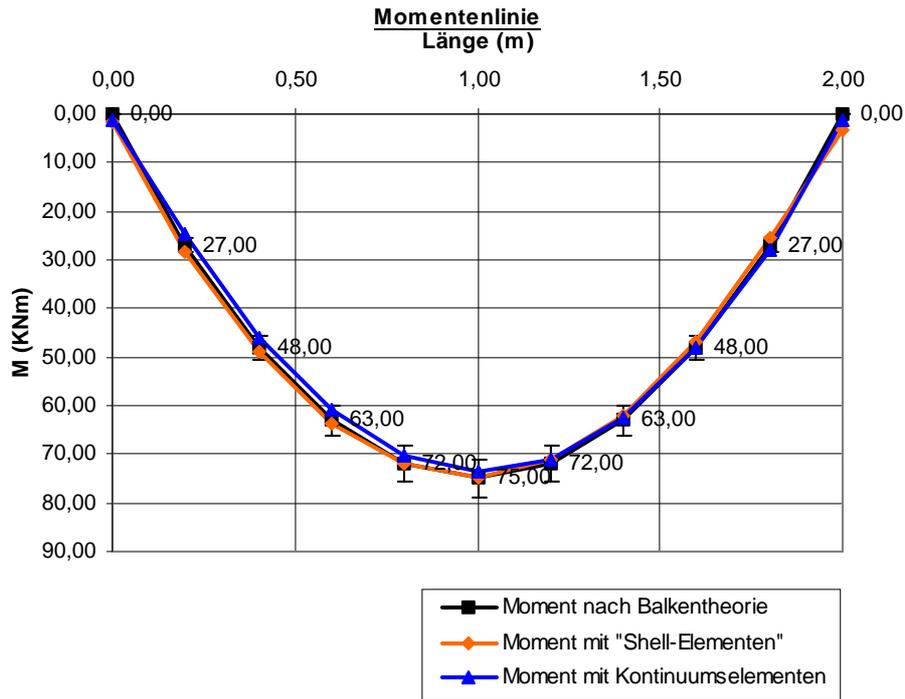


Abbildung 28: Darstellung der Momentenlinie und des Verlaufs der Randspannungen über die Trägerlänge im Vergleich zwischen der Modellierung mit Kontinuums- und mit Schalelementen

| | | | |
|----------------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 1,00 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 2,00 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 2,00 m |
| | | Eigengewicht g | 150,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 6666667 cm ⁴ |



| | | | |
|-----------|-------------|---|----------------------|
| h/l [] | 0,05 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,10 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,10 m |
| | | Eigengewicht g | 7,50 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 8333 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

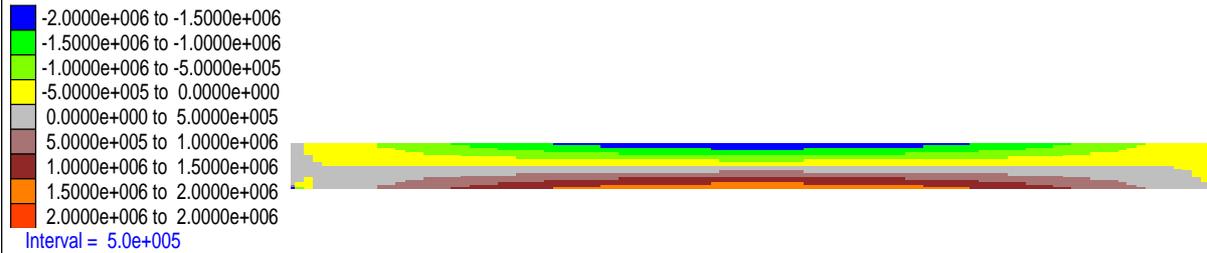


Abbildung 29: Trägeransicht mit *Blockkonturplot* der Spannung S_{xx} (ohne Darstellung der Netzeinteilung)

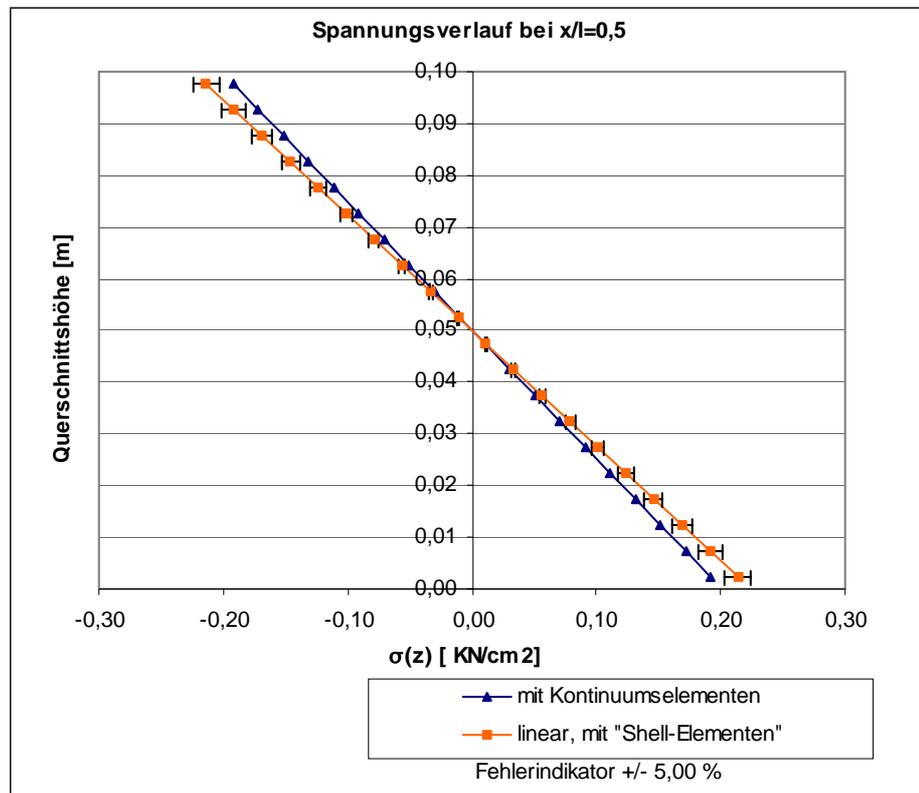


Abbildung 30: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|-----------------------|
| $h/l []$ | 0,10 | Systemlänge l | 2,00 m |
| $h [m]$ | 0,20 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,20 m |
| | | Eigengewicht g | 15,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 66667 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

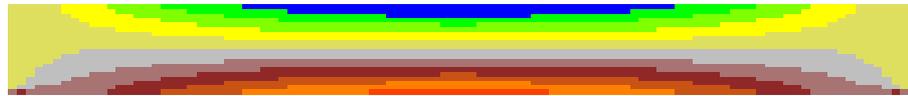
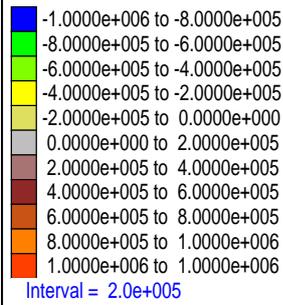


Abbildung 31: Trägeransicht mit *Blockkonturplot* der Spannung S_{xx} (ohne Darstellung der Netzeinteilung)

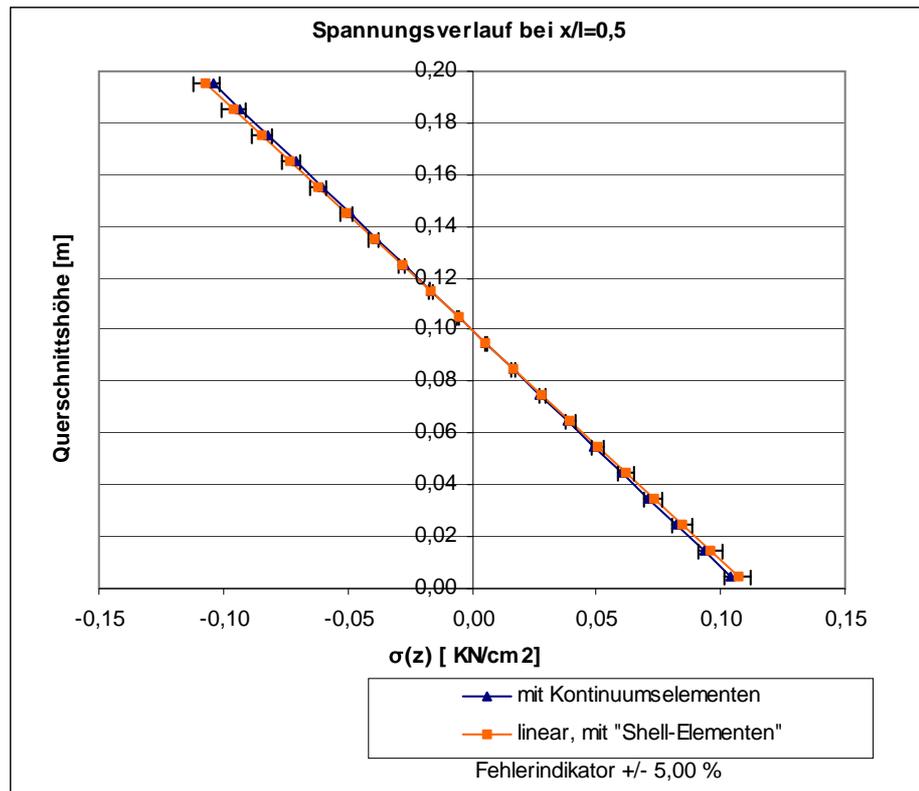


Abbildung 32: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|------------------------|
| $h/l []$ | 0,20 | Systemlänge l | 2,00 m |
| $h [m]$ | 0,40 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,40 m |
| | | Eigengewicht g | 30,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 533333 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

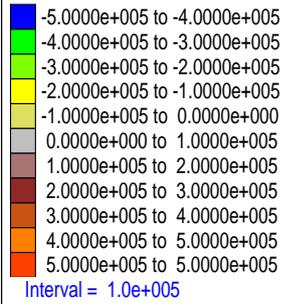


Abbildung 33: Trägeransicht mit Blockkonturplot der Spannung S_{xx} (ohne Darstellung der Netzeinteilung)

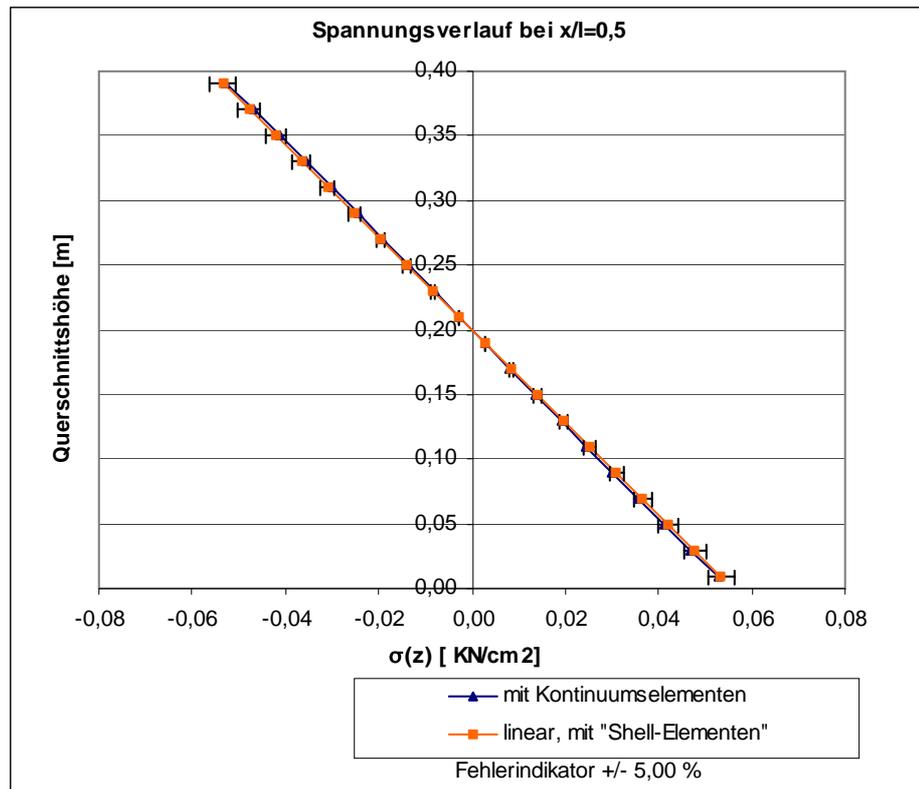


Abbildung 34: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,30 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,60 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,60 m |
| | | Eigengewicht g | 45,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 1800000 cm ⁴ |

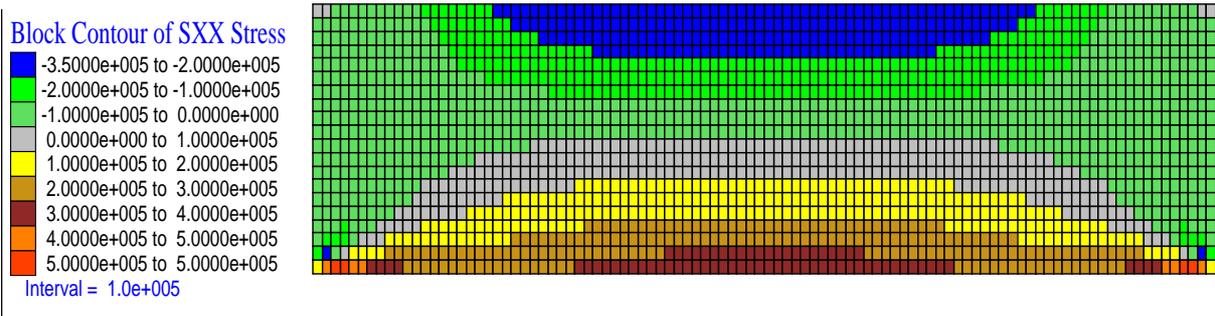


Abbildung 35: Trägeransicht mit *Blockkonturplot* der Spannung S_{xx} (mit Darstellung der Netzeinteilung)

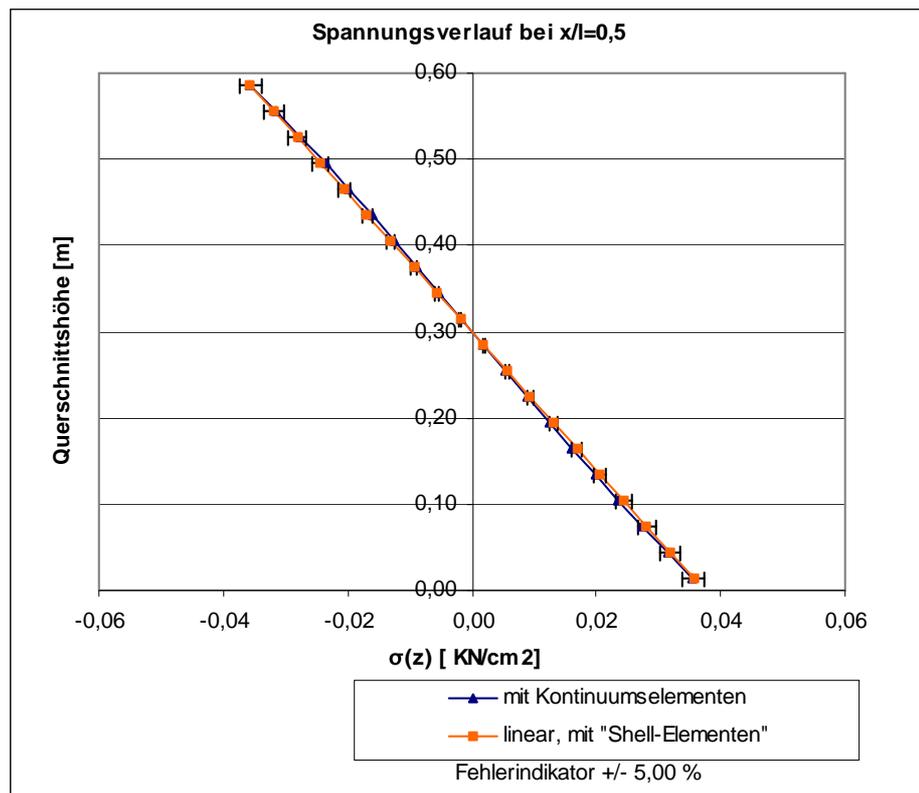


Abbildung 36: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,40 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 0,80 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 0,80 m |
| | | Eigengewicht g | 60,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 4266667 cm ⁴ |

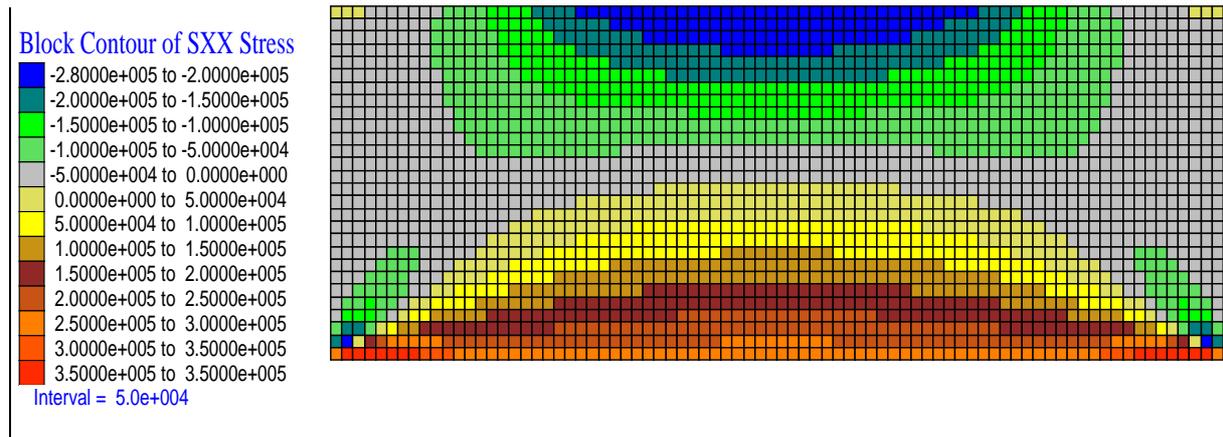


Abbildung 37: Trägeransicht mit Blockkonturplot der Spannung S_{xx} (mit Darstellung der Netzeinteilung)

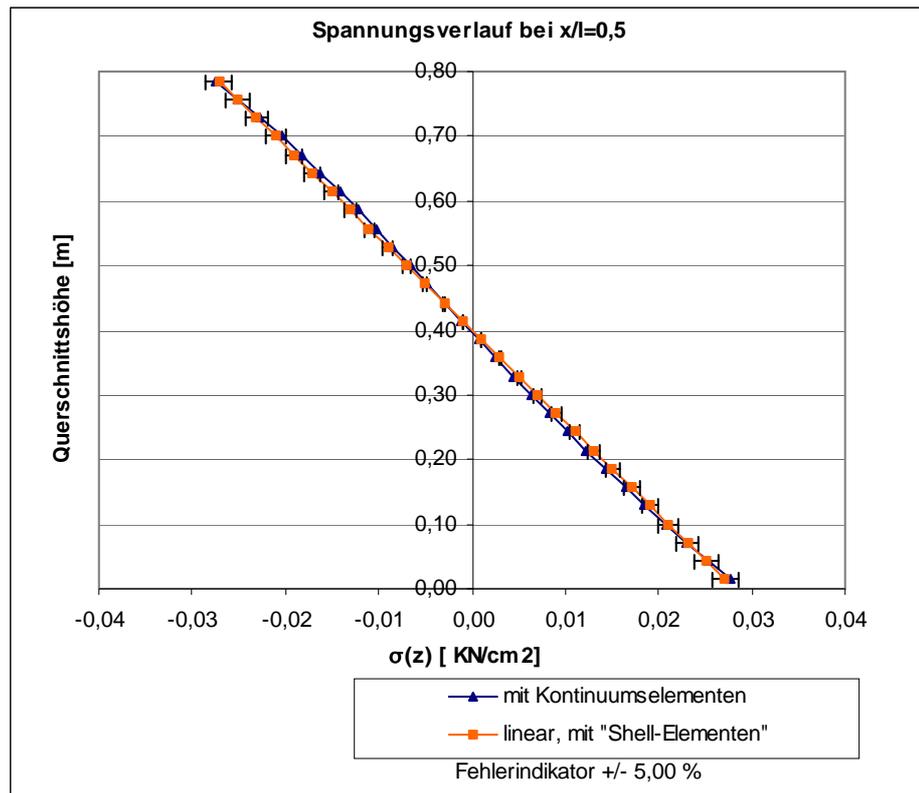


Abbildung 38: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|-------------------------|
| h/l [] | 0,50 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,00 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,00 m |
| | | Eigengewicht g | 75,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 8333333 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

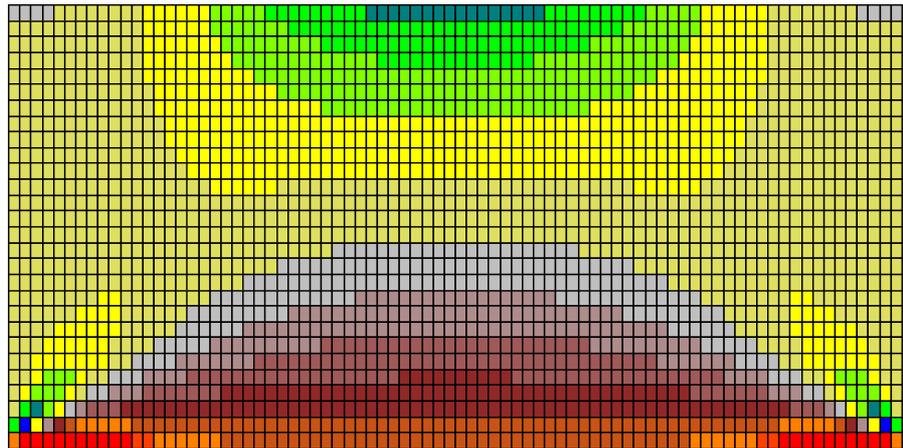
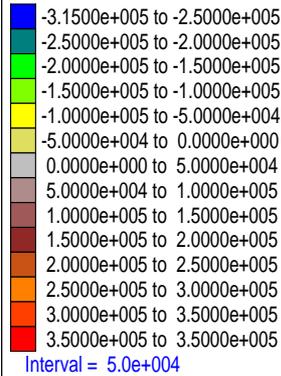


Abbildung 39: Trägeransicht mit Blockkonturplot der Spannung Sxx (mit Darstellung der Netzeinteilung)

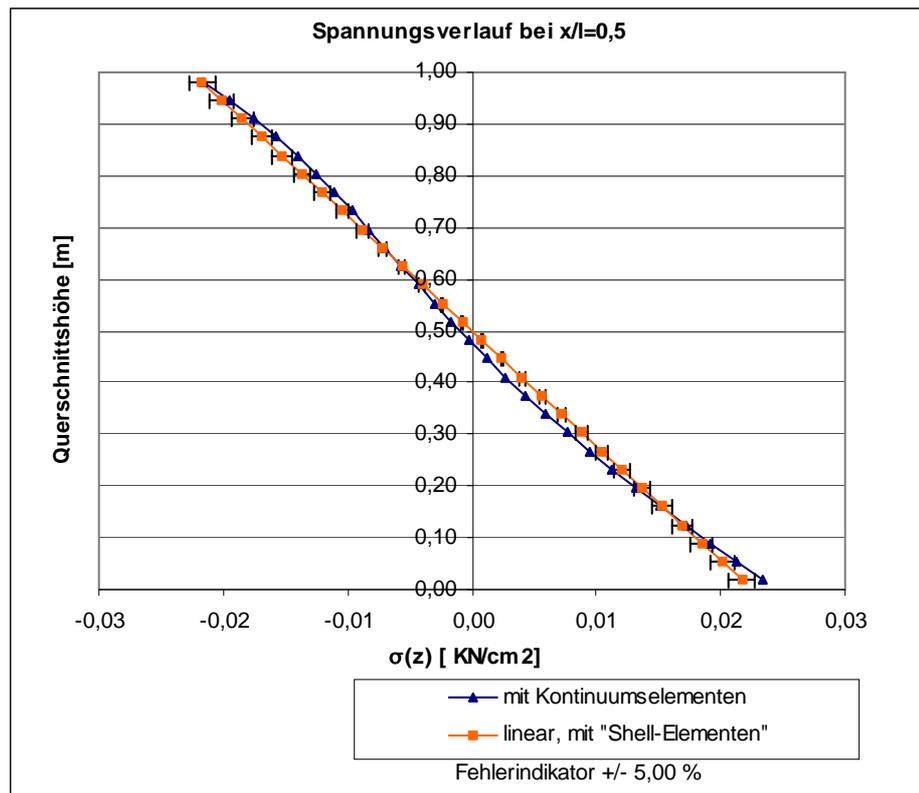


Abbildung 40: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,60 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,20 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,20 m |
| | | Eigengewicht g | 90,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 14400000 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

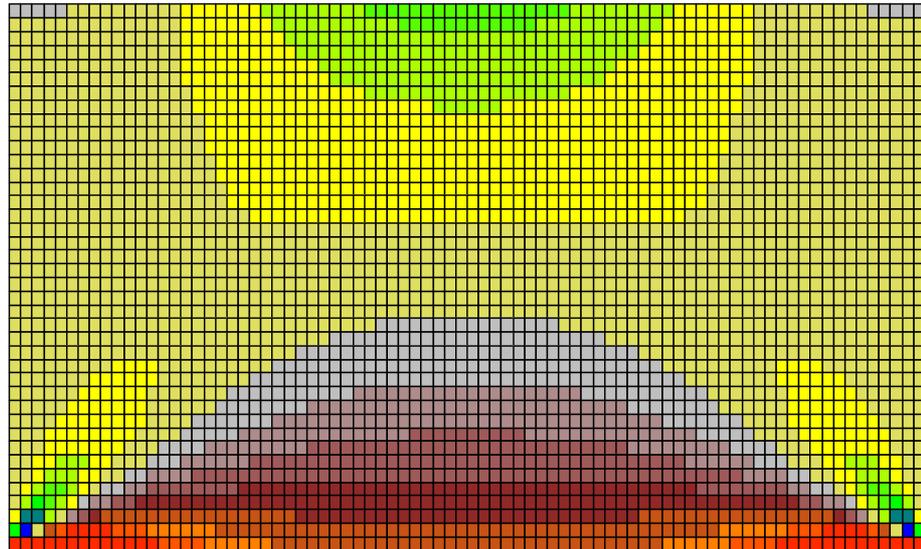
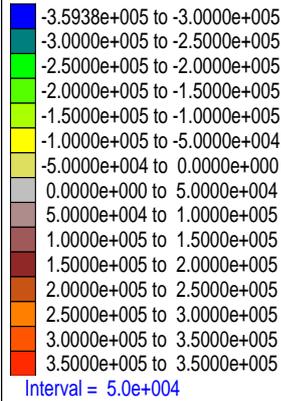


Abbildung 41: Trägeransicht mit Blockkonturplot der Spannung Sxx (mit Darstellung der Netzeinteilung)

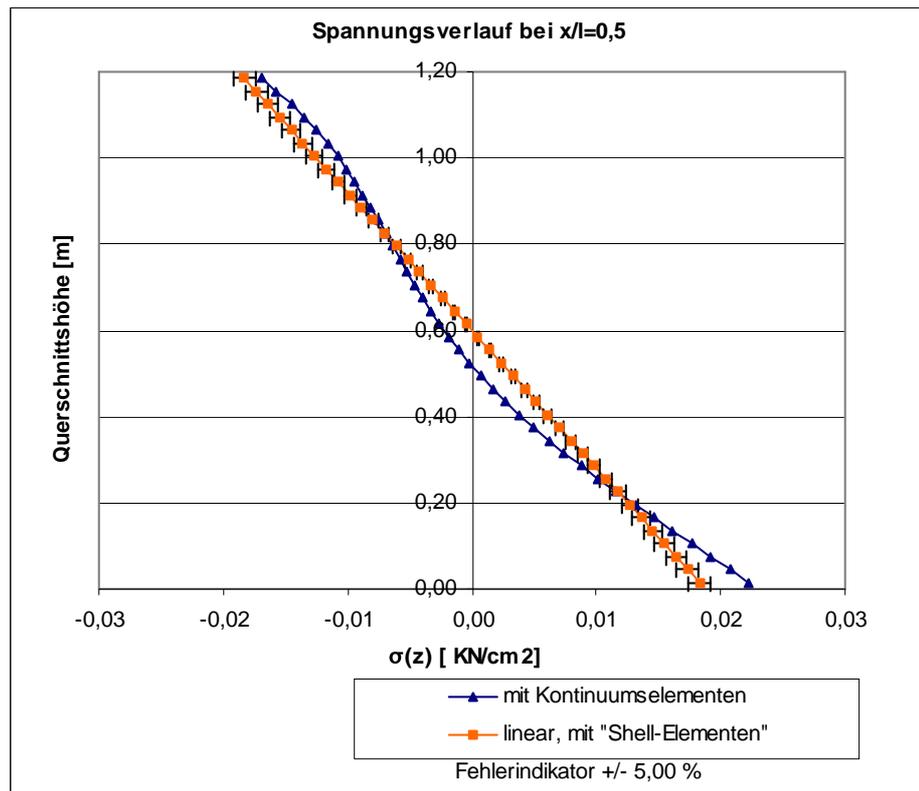


Abbildung 42: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|--------------------------|
| $h/l []$ | 0,70 | Systemlänge l | 2,00 m |
| $h [m]$ | 1,40 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,40 m |
| | | Eigengewicht g | 105,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 22866667 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

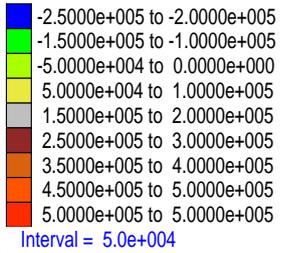


Abbildung 43:
 Trägeransicht mit Blockkonturplot der Spannung S_{xx} (mit Darstellung der Netzeinteilung)

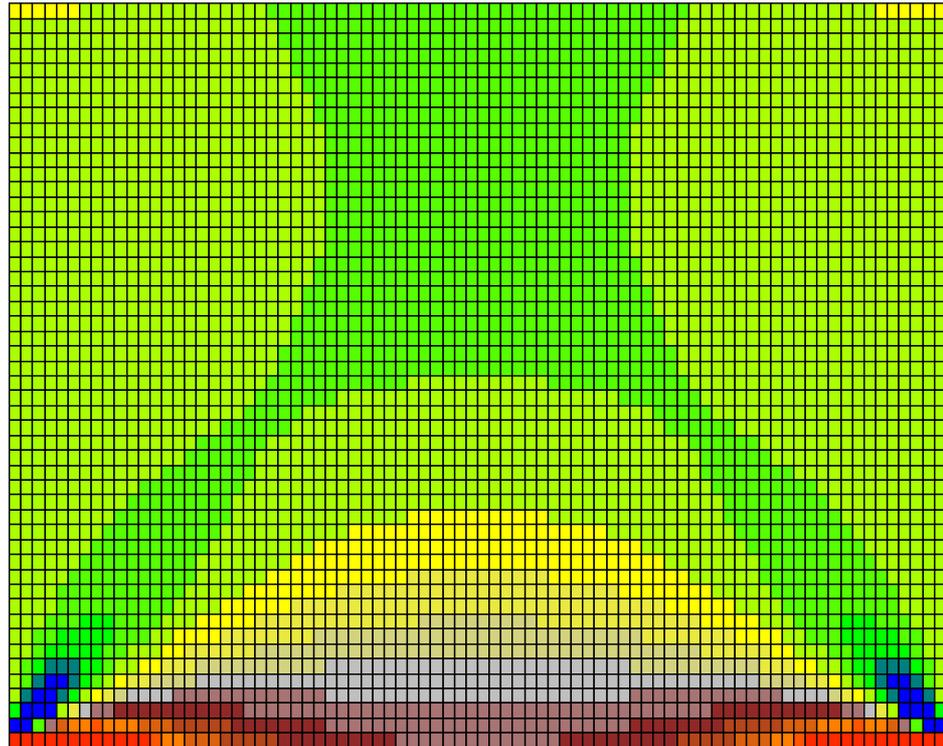


Abbildung 44:
 Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

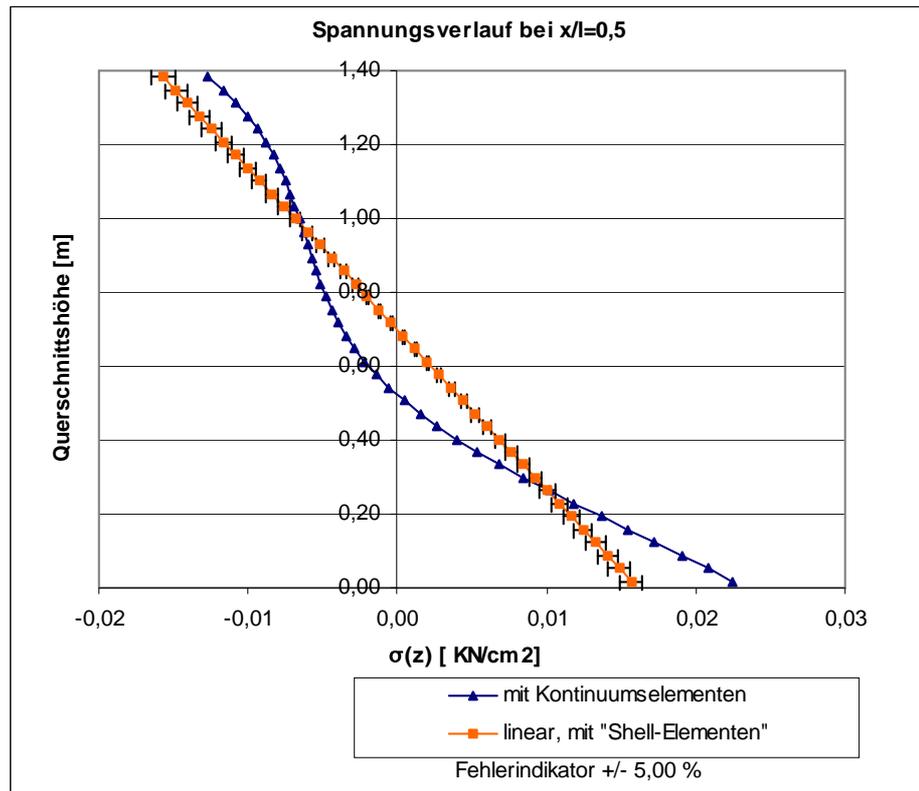


Abbildung 45: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,80 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,60 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,60 m |
| | | Eigengewicht g | 120,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 34133333 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

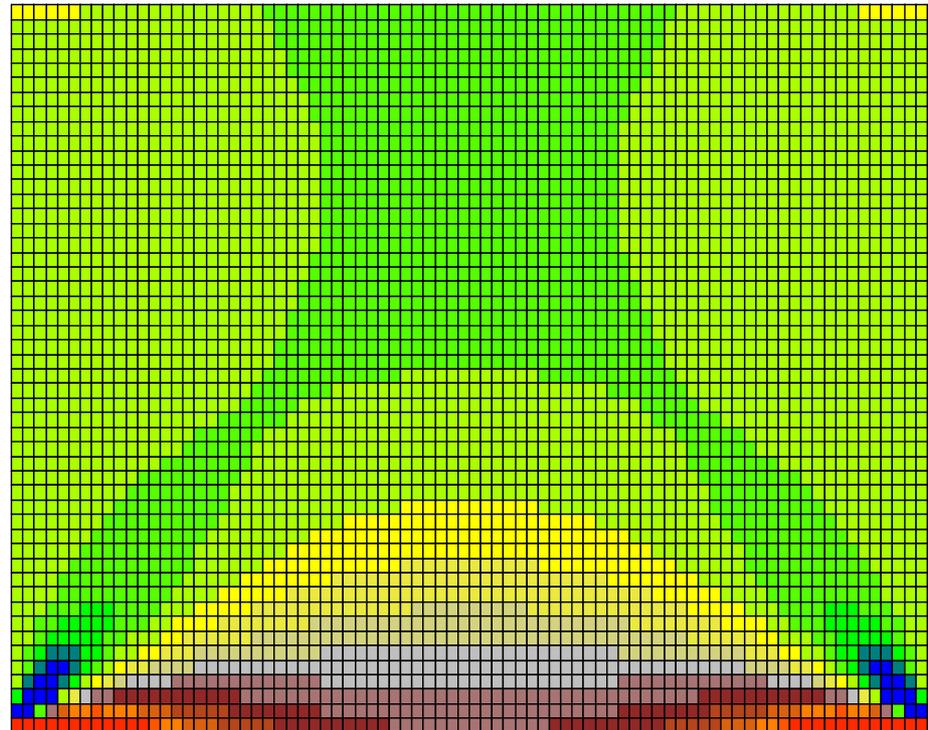
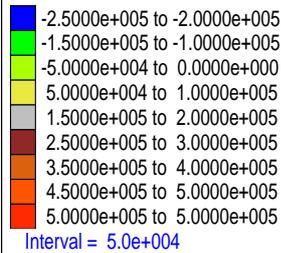


Abbildung 46: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

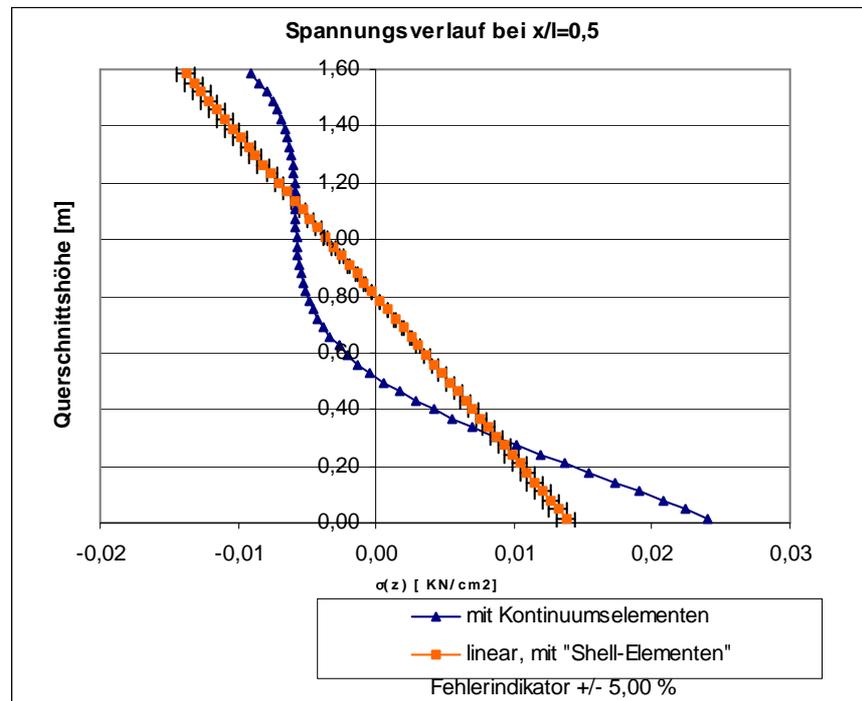


Abbildung 47: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|----------------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 0,90 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 1,80 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 1,80 m |
| | | Eigengewicht g | 135,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | Jyy | 48600000 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

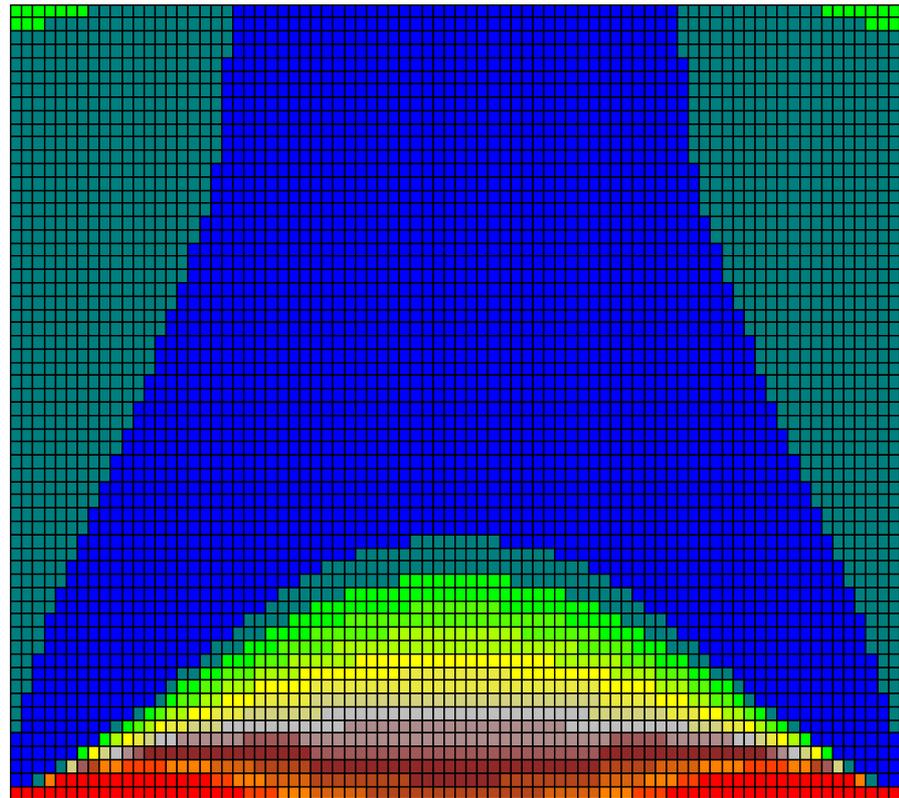
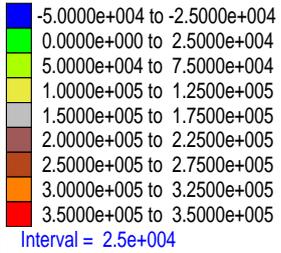


Abbildung 48: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

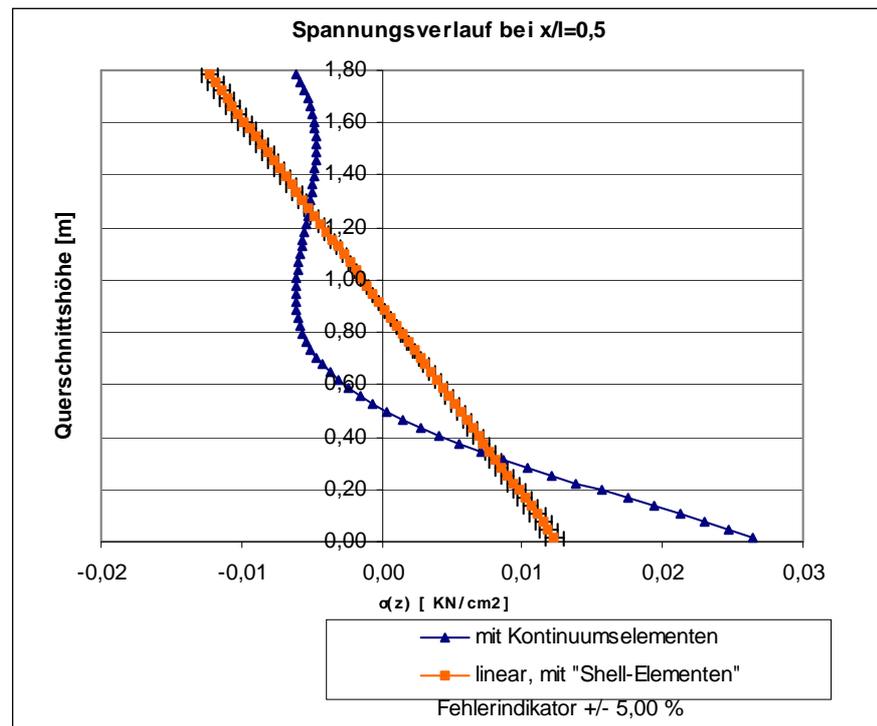


Abbildung 49: Vergleich der Spannungsverteilung über Trägerhöhe in Feldmitte $x/l=0,50$

| | | | |
|-----------|-------------|---|--------------------------|
| h/l [] | 1,00 | Systemlänge l | 2,00 m |
| h [m] | 2,00 | Querschnitt b | 1,00 m |
| | | Querschnitt h | 2,00 m |
| | | Eigengewicht g | 150,00 KN/m |
| | | Trägheitsmoment $J_{yy} = 1/12 \cdot b \cdot d^3$ | |
| | | J_{yy} | 66666667 cm ⁴ |

Block Contour of SXX Stress

| | |
|--|------------------------------|
| | -5.0000e+004 to -2.5000e+004 |
| | 0.0000e+000 to 2.5000e+004 |
| | 5.0000e+004 to 7.5000e+004 |
| | 1.0000e+005 to 1.2500e+005 |
| | 1.5000e+005 to 1.7500e+005 |
| | 2.0000e+005 to 2.2500e+005 |
| | 2.5000e+005 to 2.7500e+005 |
| | 3.0000e+005 to 3.2500e+005 |
| | 3.5000e+005 to 3.5000e+005 |

Interval = 2.5e+004

Abbildung 50:
Vergleich der
Spannungsverteilung
über Trägerhöhe in
Feldmitte $x/l=0,50$

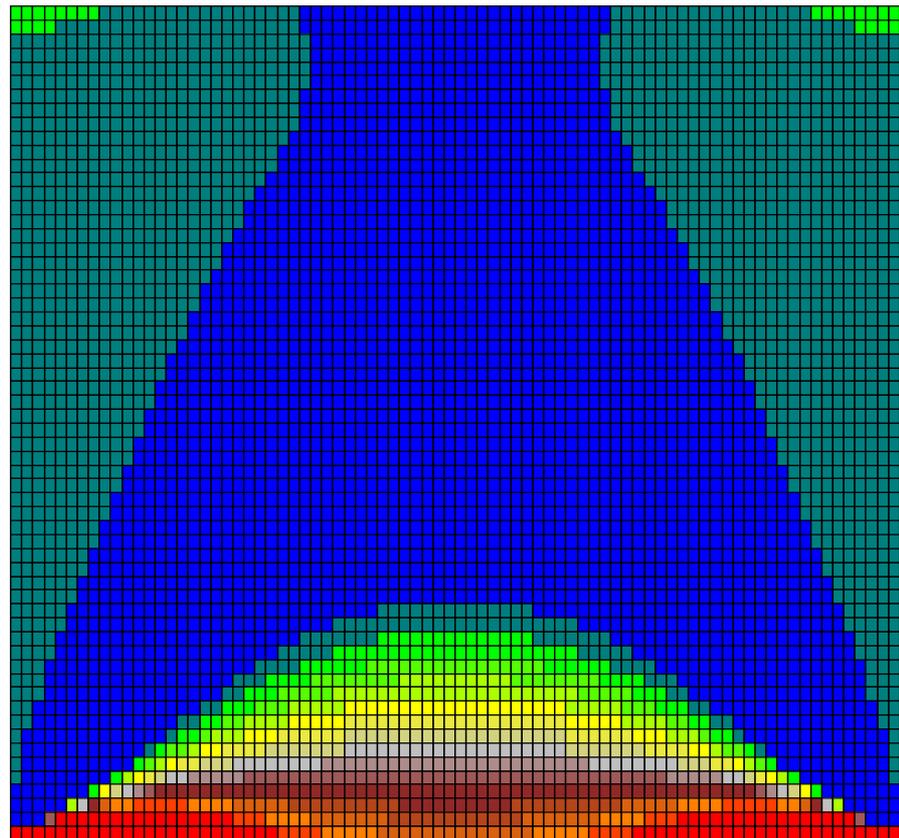
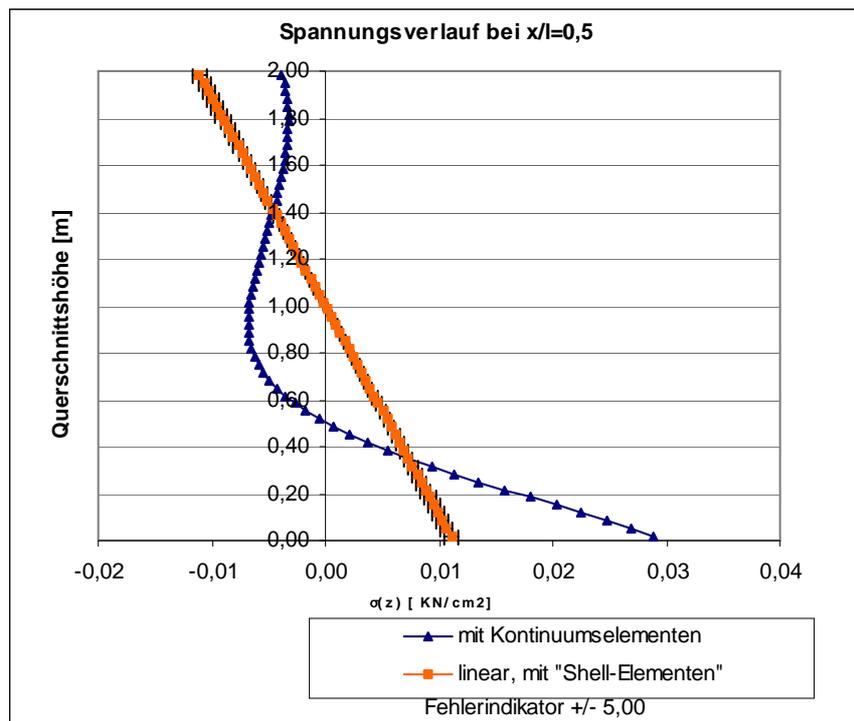


Abbildung 51:
Vergleich der
Spannungsverteilung
über Trägerhöhe in
Feldmitte $x/l=0,50$



4.3.4 Schlussfolgerungen

Altenbach (1998) listet folgende Plattenmodelle für Flächentragwerke auf:

1. Membrane
2. Dünne Platten mit großen Durchbiegungen
3. Dünne Platten mit kleinen Durchbiegungen – schubstarres Plattenmodell
4. Platten mittlerer Dicke – Schubelastisches Plattenmodell
5. Dicke Platten

Die Kategorisierung bezüglich eines geeigneten Einsatzgebiets erfolgt über die Durchbiegung im Verhältnis zur Dicke bzw. über die Schlankheit h / l . Das Einsatzgebiet für die Modellierung von Platten mit dem Kirchhoff'schen Modell ist nach folgender Kategorisierung mit einer Schlankheit von $h / l = 0,1$ beschränkt. Für Modellierungen von Platten mit einer größeren Schlankheitszahl ist die Theorie nach Reissner zu verwenden um ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Die Anwendung der Reissner – Theorie ist mit einer Schlankheit von $h / l = 0,2$ beschränkt. Für Plattendicken darüber hinaus sollte ein Kontinuumsmodell verwendet werden.

1. Membrane

Eine Membran ist der Grenzfall einer sehr dünnen Platte, bei der die Biegesteifigkeit vernachlässigt wird. Die Modellgleichungen sind nicht linear, die großen Durchbiegungen sind mit den Gleichungen für die Verschiebungen in der Mittelfläche gekoppelt. Das Membranmodell liefert nur Normalspannungen in der Mittelfläche und keine Schubspannungen. Dünne Platten, für die das Verhältnis von Durchbiegung zu Dicke $w/h > 5$ ist, können mit guter Näherung als Membran modelliert werden.

2. Dünne Platten mit großen Durchbiegungen

Für dieses Plattenmodell ist die Scheiben- und die Plattensteifigkeit zu berücksichtigen. Die Modellgleichungen sind nichtlinear, und der Scheiben- und der Plattenzustand ist gekoppelt. Es gibt Normal- und Schubspannungen. Die Modellgleichungen für dünne Platten großer Durchbiegung sind erstmals durch Kármán abgeleitet worden. Diese Kármán-Plattengleichungen gelten mit guter Näherung für Platten, deren Durchbiegung im Bereich $0,2 < w / h < 5$ liegt.

3. Dünne Platten mit kleinen Durchbiegungen – schubstarres Plattenmodell

Für dünne Platten mit kleinen Durchbiegungen können die Modellgleichungen stark vereinfacht werden. Wegen der Kleinheit der Durchbiegungen sind die Gleichungen geometrisch linear, Scheiben- und Plattenaufgabe können getrennt gelöst werden. Für dieses Plattenmodell wird näherungsweise angenommen, dass die Dehnungen und die Gleitungen in Dickenrichtung so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können. Das Plattenmodell ist somit in Dickenrichtung dehn- und schubstarr. Diese Annahmen haben zur Folge, dass die Normale zur unverformten Plattenmittelfläche auch nach der Verformung Normale zur Mittelfläche ist. Dieses Plattenmodell wird als **Kirchhoff-Modell** bezeichnet.

Der *Anwendungsbereich* wird im allgemeinen auf Durchbiegungen $w / h < 0,2$ beschränkt. Auch sollte das Verhältnis von Dicke h zur kleineren Grundrissabmessung $0,1$ nicht überschreiten. ($h / \text{Min}(l_x, l_y) < 0,1$).

4. Platten mittlerer Dicke – Schubelastisches Plattenmodell

Für Platten mittlerer Dicke, für die ein Wert $h / \text{Min}(l_x, l_y) < 0,2$ als Grenze angegeben werden kann, liefert das schubstarre Plattenmodell oft unzureichende Ergebnisse. Es kann aber in einer ersten Näherung durch die Einbeziehung der Schubverformungen auf die Plattenbeanspruchung verbessert werden. Um die Modellgleichungen möglichst einfach zu halten, wird die Schubverzerrung nur im Mittel, d.h. unter Annahme einer konstanten Verteilung über die Plattendicke, erfasst. Durch zusätzliche Schubkorrekturfaktoren werden die Modellergebnisse verbessert. Das schubelastische Plattenmodell wird eng mit dem Namen **Reissner** und Mindlin verknüpft

5. Dicke Platten

Ist die Plattendicke nicht mehr klein im Vergleich zu den anderen Abmessungen ($h / \text{Min}(l_x, l_y) > 0,2$), kann ein zweidimensionales Plattenmodell das Tragverhalten nicht mehr ausreichend genau beschreiben. Es müssen dann dreidimensionale Modellgleichungen herangezogen werden.

In FLAC^{3D} wird die Kirchhoff („thin-shell“) bzw. Reissner Theorie („thick-shell“) verwendet. (FLAC^{3D} Manual, Vers. 2.1)

Gemäß Altenbach (1998) ergeben sich bei $h / \text{Min}(l_x, l_y) > 0,2$ Ergebnisseinschränkungen bei der Verwendung der Theorien für dicke Schalen. Ab dieser Schlankheit sollen dreidimensionale Modellgleichungen zur Beschreibung herangezogen werden, d.h. es werden die Bauteile mit Kontinuumselementen nachgebildet.

Die Spannungen gemäß der Theorie der Schalenelemente verlaufen unabhängig von der Dicke des Bauteils linear über die Querschnittshöhe.

Die Versuche (Abbildungen 33 bis 55) zeigen dass, bis zu einer Balkendicke von 40 cm die Spannungsverläufe der beiden Modellierungen im Regelbereich des Bauteils gut übereinstimmen.

Ab einer Balkendicke von 40 cm treten Abweichungen in den Spannungsverläufen auf, die nicht mehr vernachlässigbar sind.

Infolge Scheibenwirkung beginnen die Randspannungen im Schalenmodell ab einer Balkendicke von 40 cm von den Auflagern aus signifikant von den tatsächlichen Randspannungen aus dem Kontinuumsmodell abzuweichen.

Die gegebene Belastung muss von beiden Systemen abgetragen werden. Es stellen sich dieselben Momentenverläufe ein. Das Systemverhalten unterscheidet sich durch die unterschiedliche Kraftverteilung im Querschnittsinneren.

Eine Balkendicke von 40 cm entspricht, bei der gegebenen Trägerlänge, einer Schlankheit von $h / l = 0,2$. Dieser Wert wird von Altenbach als Grenzwert für die Verwendung der Theorie nach Reissner angegeben. Die numerischen Ergebnisse bestätigen die Aussagen von Altenbach (1998).

Die Abbildung 51 und 52 zeigen den qualitativen Spannungsverlauf über die Trägerhöhe für Balken und wandartige Träger.

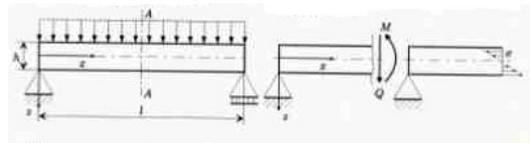


Abbildung 52: Qualitativer Verlauf der Normalspannung in Trägermitte bei Balken (Altenbach, 1998)

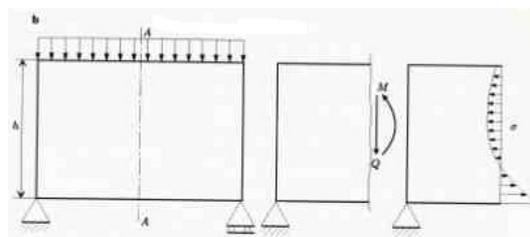


Abbildung 53: Qualitativer Verlauf der Normalspannung in Trägermitte bei wandartigen Trägern (Altenbach, 1998)

Bei den oben beschriebenen Plattentheorien beginnt ab einer Schlankheit von $h / \text{Min}(l_x, l_y) = 0,2$ der Spannungsverlauf von einem linearen zu einem nicht linearen Verlauf überzugehen.

4.4 Studie 2 - Balken auf elastischer Bettung

4.4.1 Aufgabenstellung

Die Interaktion zwischen einem Bauteil und dem Untergrund hat Einfluss auf das Tragverhalten des Bauteils. Diese Interaktion tritt bei Tunnelschalen ebenso auf wie bei Fundamentplatten.

Ganz allgemein wird unter *vertikaler Interaktion* die Abtragung vertikaler Bauwerkslasten über das Zusammenspiel von Gründung und Baugrund mit den daraus resultierenden Sohlnormalspannungen verstanden. Die dabei auftretenden Sohlschubspannungen (*horizontale Interaktion*) sind im allgemeinen klein und werden daher in der Regel vernachlässigt.

Anhand eines „Balkens auf elastischer Bettung“ werden die Interaktionseffekte zwischen einem Bauteil und dem Untergrund untersucht.

Dazu wird einerseits die Platte mittels Schalenelementen und andererseits mit Kontinuumselementen modelliert. Die Variation der Reibungseigenschaften der Fuge zwischen Balken und Untergrund führt zu der Untersuchung der beiden Grenzzustände

1. vollkommene Gleitung zwischen Balken und Untergrund (full-slip)
2. vollkommen gesperrte Gleitung zwischen Balken und Untergrund (no-slip).

Die Interaktion wird über das Mohr-Coulomb'sche Reibungsgesetz bestimmt.

Zusätzlich wird zum Zweck der Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse eine Referenzrechnung mittels dem Bettungsmodulverfahren durchgeführt.

4.4.2 Modellbeschreibung

Es sei elastischer Balken auf elastischer Bettung gegeben. Der Balken weist eine Länge von $l = 2,0$ m auf. Die Balkenhöhe beträgt 20 cm. Die Balkentiefe wurde mit 1 m angenommen.

Für den elastischen Halbraum wurde ein E-Modul von 40 MPa und eine Querdehnzahl von $\nu = 0,25$ gesetzt. Für den Balken (Beton) wurde ein E-Modul von 32000 MPa (3200 KN/cm²) verwendet. Die Querdehnzahl für Beton beträgt $\nu = 0,20$. Das System wird vertikal mit einer Gleichlast von 150 kN/m belastet.

Die definierten Parameter werden einerseits anhand eines Kontinuumsmodells und andererseits anhand eines Schalenmodells umgesetzt. Der elastische Halbraum ist in beiden Modellen aus Kontinuumselementen aufgebaut. Bei der Modellierung mittels Schalenelementen wird die Interaktion über eigene Funktionen gesteuert (siehe Kapitel 2.1.3 Linerelemente).

Beim Kontinuumsaufbau wird mittels der Funktion „Interface“ eine Trennfläche zwischen Balken und Untergrund eingebaut (siehe Kapitel 2.1.1 Interfaces).

Bei der Untersuchung betrachtet man die Grenzzustände einer vollkommen freien Gleitung und einer vollkommen gesperrten Gleitung zwischen Balken und Halbraum

Da in der Kontaktebene x-y das Finite-Differenzen Netz des Balkens und des Halbraums mit den selben Maschenweiten erstellt wurde, könnte der Parameterfall „Voller Verbund“ durch direkte Verbindung der Zonen erstellt werden.

Abbildung 53 zeigt die Zoneneinteilung und die Position der Interface-Elemente (rot) des Modells K/K. Abbildung 54 zeigt die Zoneneinteilung des Modells FE/K und die Position des Balkens modelliert mittels Liner-Elemente. Abbildung 55 zeigt die Systembeschreibung für die stabstatische Vergleichsrechnung.

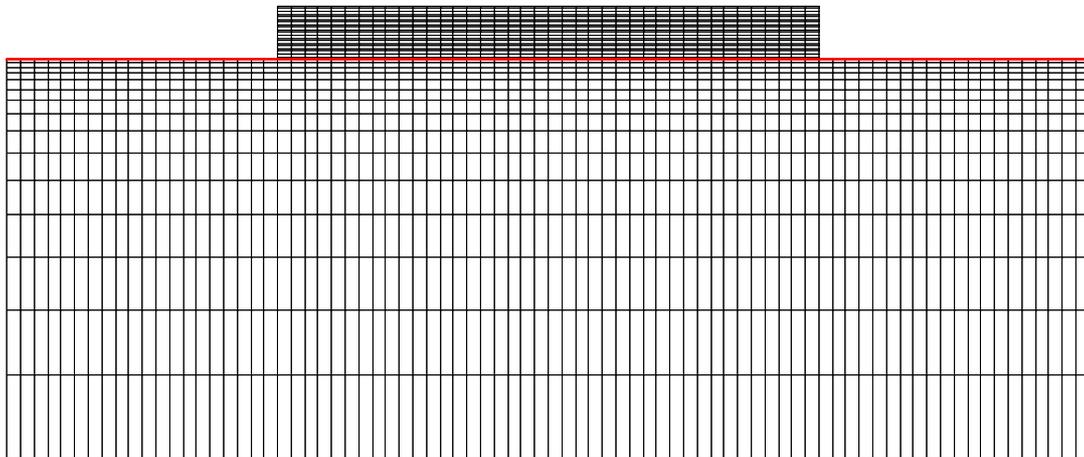


Abbildung 54: Vernetzung des Modells K/K mit Darstellung (Rot) der Interface-Elemente

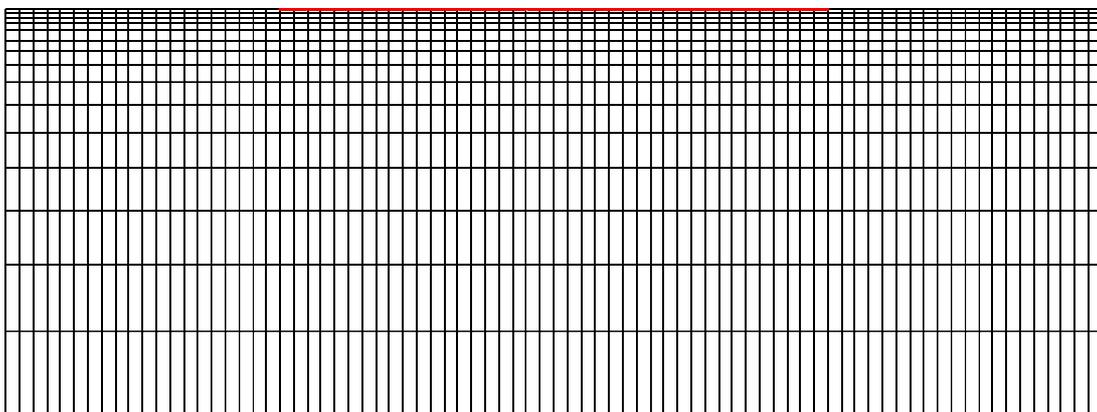


Abbildung 55: Vernetzung des Modells FE/K mit Darstellung (Rot) des Balkens modelliert mittels FE-Elemente (Liner-Elemente)

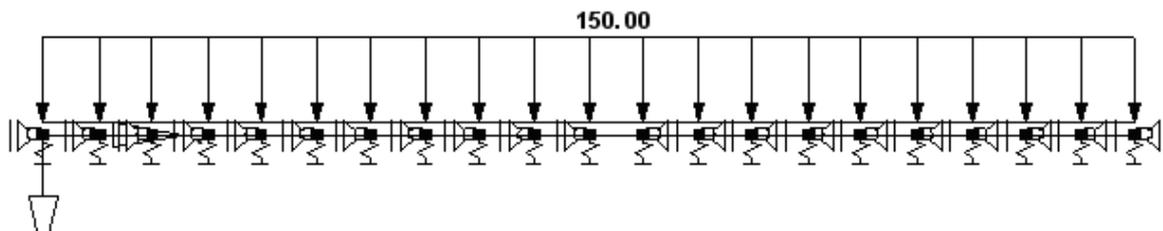


Abbildung 56: System des Modells B/M mit Darstellung der Belastung (kN/m)

4.4.3 Ergebnisse

Es wurden folgende Modellvarianten untersucht:

| | | Bauteil | |
|-----------------------|-------------|-------------------------|--------------------|
| | | Balken | Halbraum |
| Modellierung mittels: | Modell K/K | Kontinuumselemente | Kontinuumselemente |
| | Modell FE/K | Finite Elemente (Liner) | Kontinuumselemente |
| | Modell BM | Bettungsmodulverfahren | |

Tabelle 4: Übersicht über die durchgeführten Modellvarianten mit Angabe des Versuchsnamens

Für das Modell K/K und FE/K wurden die zwei Grenzfälle der Interaktion untersucht:

1. vollkommen freie Gleitung und
2. vollkommen gesperrte Gleitung.

Zusätzlich wurde zum Zweck der Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse eine Referenzrechnung mittels dem Bettungsmodulverfahren gerechnet.

In Smolczyk, U. (2001) steht zur Frage der klassischen Berechnungsmethoden Bettungsmodul- bzw. Steifemodulverfahren folgendes:

„Im allgemeinen führt das Steifemodulverfahren zu wirklichkeitsnäheren Ergebnissen, da hier im Gegensatz zum klassischen Bettungsmodulverfahren mit konstantem Modul das realistische Baugrundverhalten mit gegenseitiger Beeinflussung benachbarter Lastwirkungen berücksichtigt wird. Aus einer Vielzahl gerechneter Beispiele hat sich gezeigt, dass bei den vorrangig interessierenden Biegemomenten des Gründungskörpers eine relativ gute Übereinstimmung beider Verfahren nur bei weichen Gründungskörpern auf steifem Baugrund mit Einzellasten in größeren Abständen gegeben ist. Ansonsten treten erhebliche

Unterschiede auf, wobei sich nach dem Bettungsmodulverfahren ausgeglichene Sohldruckverteilungen ergeben und die danach bestimmten Momentenverläufe unter Einzellasten gegenüber denen nach dem Steifemodulverfahren stets „nach oben“ verschoben sind. Durch bereichsweise iterative Veränderung des Bettungsmoduls können Ergebnisse des Bettungsmodulverfahrens denen des Steifemodulverfahrens gut angenähert werden. Als vereinfachte Näherung wird im üblichen Hochbau hierzu oft eine lineare Zunahme des Bettungsmoduls bis zum doppelten Wert in den Randzonen der Gründung vorgenommen. ...“

Die Vergleichskurve „Stabstatik_1“ (Abbildung 56), als untere Grenze des Plausibilitätsbereich, zeigt die Ergebnisse der Bettungsmodulberechnung mit konstantem Modul.

Die Vergleichskurve „Stabstatik_2“ (Abbildung 57), als obere Grenze des Plausibilitätsbereich, zeigt die Ergebnisse der Bettungsmodulberechnung mit um 30% erhöhtem Modul an den Randbereichen..

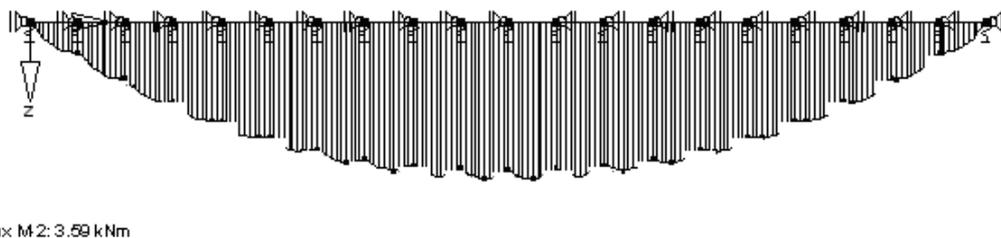


Abbildung 57: Momentenlinie „Stabstatik_1“ des punktwise elastisch gelagerten Balkens . (konstante Module)

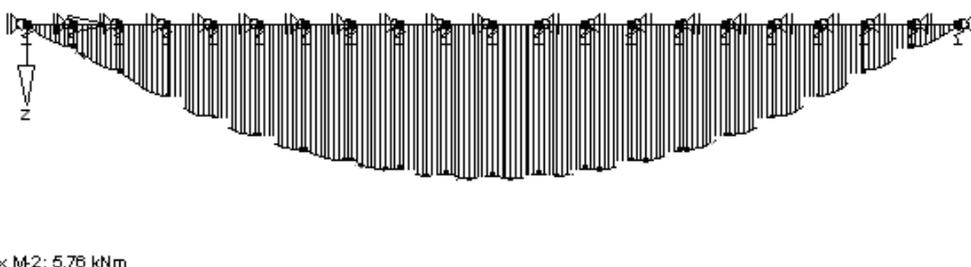


Abbildung 58: Momentenlinie „Stabstatik_2“ des punktwise elastisch gelagerten Balkens. (30% Modulerhöhung an 20 cm Randstreifen)

Im der Abbildung 58 wird eine überlagerte Darstellung der Momentenverläufe aus den verschiedenen Berechnungen dargestellt.

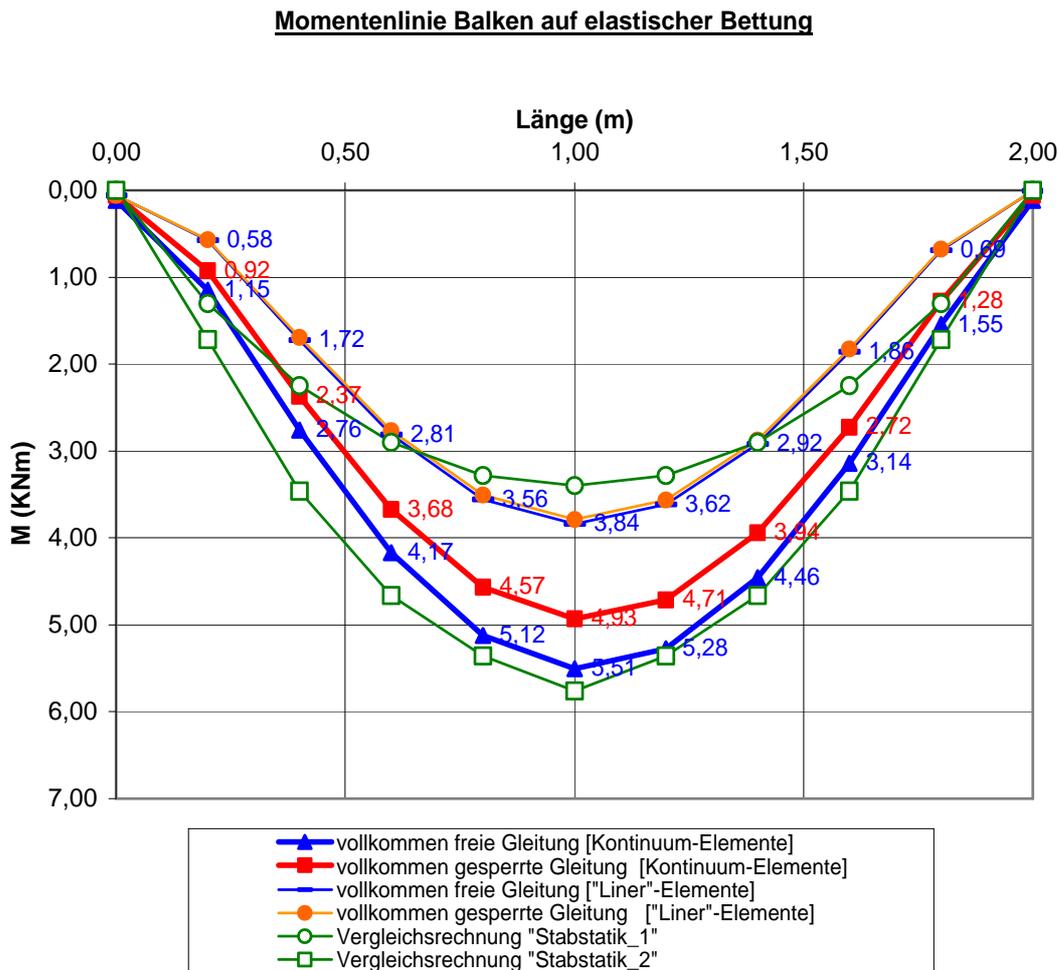


Abbildung 59: Vergleich der Momentenlinien von verschiedenen Modellen

Abbildung 59 zeigt den Vergleich der Randspannungen an der Balkenunterseite und Abbildung 60 zeigt einen Vergleich der Randspannungen an der Balkenoberseite für die untersuchten Grenzzustände „vollkommene“ und „vollkommen gesperrte“ Gleitung.

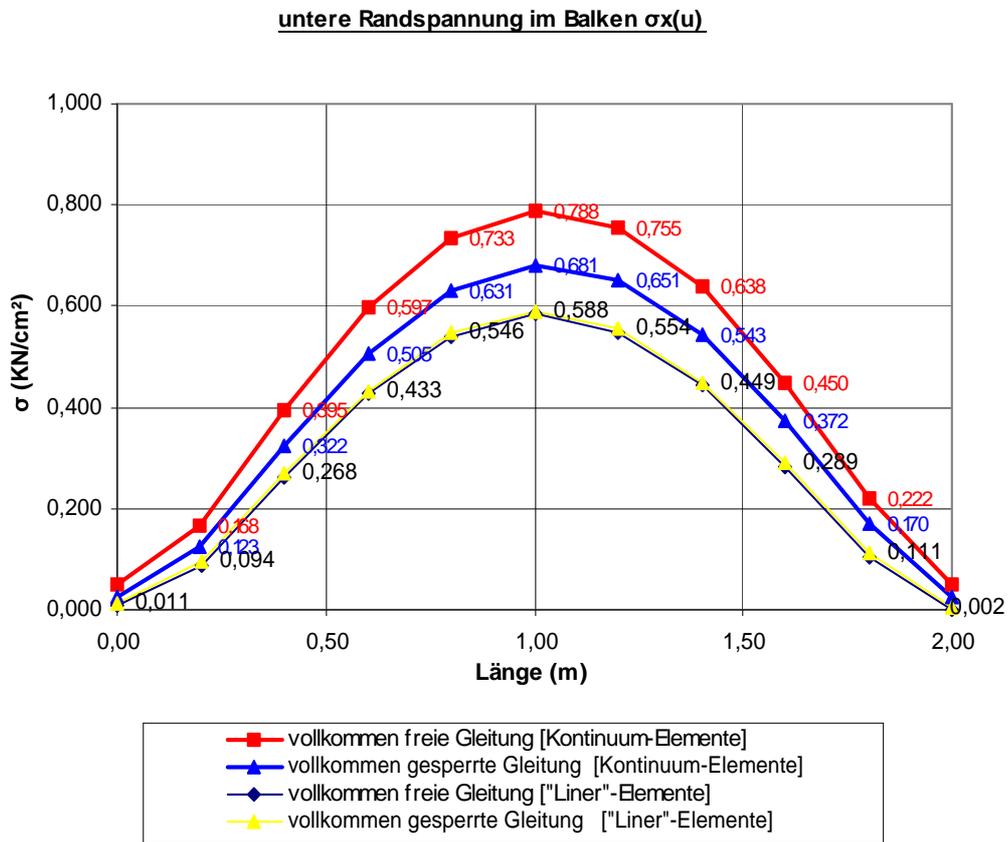


Abbildung 60: Vergleich der Randspannungen an der Balkenunterseite der verschiedenen Modelle

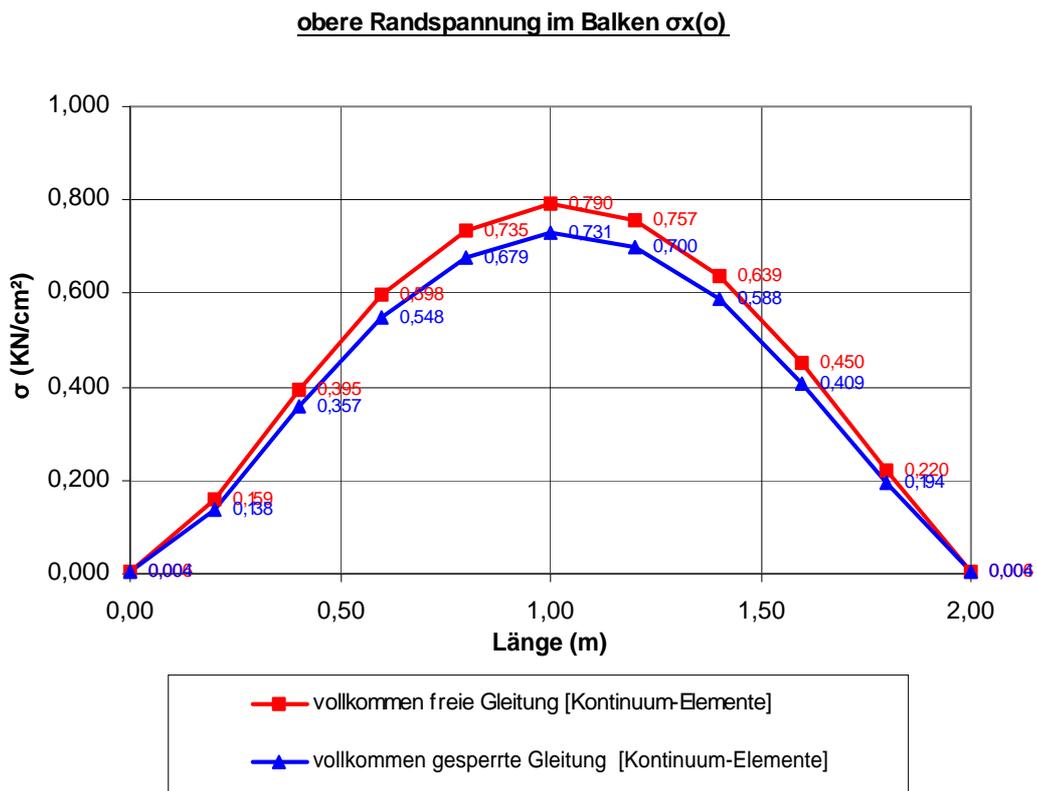


Abbildung 61: Darstellung der oberen Randspannungen beim Modell K/K

4.4.4 Schlussfolgerung

Alle numerischen Ergebnisse liegen innerhalb des, durch das Bettungsmodulverfahren definierten Plausibilitätsbereiches. Die Modellierung mittels Schalenmodell liefert kleinere Randnormalspannungen und kleinere Biegemomente im Vergleich zum Kontinuumsmodell.

Die Behinderung der freien Verformung an der Trägerunterseite, also eine verringerte Dehnung an der Trägerunterseite, führt mit zugehöriger Spannung bei Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese zu einer Reduktion des Balkenmoments, zusätzlich dazu entsteht infolge Zwängung eine Normalkraft im Querschnitt.

Bei Erhöhung der Reibung verringert sich bei diesen Randbedingungen das Biegemoment.

4.5 Studie 3 - Untersuchung eines Tunnels in einem elastischen Medium

4.5.1 Aufgabenstellung

Zur Untersuchung der Wirkungsweise von Schalen- und Kontinuumselementen bei der Modellierung von Tunnelschalen wird ein kreisrunder Tunnelausbruch in einem linear elastischen, homogenen Medium modelliert. Dabei wird die Tunnelschale zeitgleich mit dem Ausbruch des kreisrunden Tunnels installiert. Der Tunnel wird als gerades, unendlich langes Linienbauwerk betrachtet (räumlicher Spannungszustand, ebener Verzerrungszustand).

Die Parameterstudie beinhaltet die Variation der Schalendicke ausgehend von einem Minimalwert von 20 cm bis zu einer Dicke von 1,60 m, in Schritten von 20cm. Es wird eine vollkommene Gleitung zwischen Tunnel und Gebirge angenommen.

Neben der Untersuchung der Wirkungsweise und Anwendbarkeit von verschiedenen Konstruktionselementen, wird anhand dieses idealisierten Beispiels das theoretische Tragverhalten eines Tunnels untersucht, welches beeinflusst wird durch die Interaktion zwischen Tunnel und Gebirge. Die Interaktion wird einerseits charakterisiert durch das relative Steifigkeitsverhältnis zwischen Tunnelschale und Gebirge und andererseits durch die Schubverbindung in der Fuge zwischen Tunnel und Gebirge.

Einen analytischen Lösungsansatz, um das Tragverhalten des oben beschriebenen Systems zu beurteilen, zeigt Herbert H. Einstein (1979) in seinem Paper „Simplified Analysis for Tunnel Supports“. Er nennt den Lösungsansatz die „Relative Stiffness Solution“.

Dieser Ansatz besagt, dass bei einer Zunahme der Steifigkeit des Ausbaus eine Zunahme der Ausbaubelastung die Folge ist bzw. eine Abnahme der Steifigkeit des Ausbaus eine Zunahme der Ausbauverformung mit sich bringt.

4.5.2 Modellbeschreibung

Es wird eine quadratische, 28 x 28 , große Scheibe, bestehend aus einem linear elastischen Material, modelliert. Die Scheibe wird mit einer Vertikalspannung von 20 Mpa und einer Horizontalspannung von 10 Mpa beansprucht. Anschließend wird ein zentrisch kreisrundes Loch mit einem Durchmesser von 8,0 m ausgenommen. Die Scheibentiefe wird mit einem Meter festgelegt.

Das Gebirge wird mit einem E-Modul von 15 000 MPa definiert. Die Tunnelschale (Beton) mit einem E-Modul von 32000 MPa (3200 KN/cm²) modelliert. Die Querdehnzahl für Beton beträgt $\nu=0,20$.

Bei gegebener Vertikal- und Horizontalspannung und der Beziehung $\sigma_h = \sigma_v \cdot \frac{\nu}{1-\nu}$ ergibt sich für das Gebirge eine Querdehnzahl von $\nu=0,33$.

Bei der Generierung der Tunnelschale mit Kontinuums-elementen wird ein Kreisring, bestehend aus Kontinuums-elementen mit einer gewissen Dicke generiert. Entlang der Kontaktfläche zwischen Kreisring (Tunnelschale) und Scheibe werden Interface-Elemente aufgeprägt.

Im Fall der Verwendung von Schalenelementen zur Generierung der Tunnelschale werden anstatt der Interface-Elemente die Schalenelemente, zur Nachbildung der Tunnelschale, direkt auf das umgebende Material aufgeprägt.

Die Schalenelemente modellieren den Tunnelausbau und die Interaktion Tunnel-Gebirge (siehe Kapitel 2.1.3 Linerelemente).

In Abbildung 61, links, ist das beschriebene Modell dargestellt, Abbildung 61, rechts, zeigt die Vernetzung des Modells und die Modellierung der Tunnelschale mit Kontinuums-elementen. Zwischen Tunnelschale und elastischem Medium ist das Interface geschaltet (dargestellt in Rot).

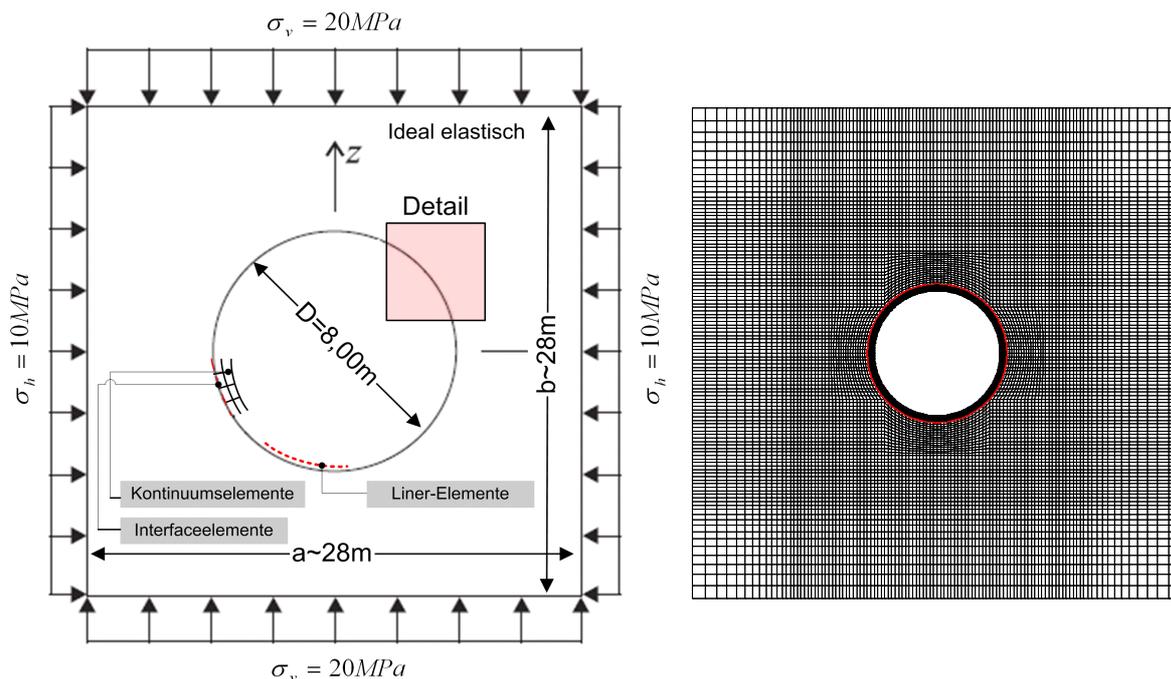


Abbildung 62: Modellaufbau des Tunnel in einem elastischen Material (links), Vernetzung des Modells mit Darstellung der Interface-Elemente (Rot).

4.5.3 Ergebnisse

Die untersuchten Modellvarianten sind in Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 5: Übersicht der verschiedenen verwendeten Untersuchungsmodelle

| | | Bauteil | |
|---------------------|-------------|---|--------------------------------|
| | | Ausbau (Tunnelschale) | Anstehendes Material (Gebirge) |
| Berechnung mittels: | Modell K/K | Kontinuumselemente | Kontinuumselemente |
| | Modell FE/K | Finite Elemente (Liner) | Kontinuumselemente |
| | Analytik | „Simplified Analysis for Tunnel Supports“ nach H. H. Einstein | |

Die numerischen Berechnungen (Modelle K/K und Modell FE/K) wurden mit einer vollkommen freien Gleitung („full slip“) durchgeführt. Analytisch gelöst wurde einerseits mit einer vollkommen gesperrten Gleitung („no slip“) und andererseits mit einer vollkommenen Gleitung („full slip“) nach einer Arbeit von Einstein (1979). Die Abbildungen 66 bis 81 zeigen die Verläufe der Spannungen und Momente über die abgewinkelte Tunnelachse je nach Dicke der Tunnelschale. Die Abwicklung beginnt mit 0° und endet mit 360° am rechten Ulmenpunkt.

In Abbildung 62 bis 65 werden die Normalspannungsplots für die Grenzwerte der Parameter, nämlich $d = 20\text{cm}$ und $d = 160\text{ cm}$ dargestellt werden. Gut zu sehen ist in den Bildern 64 und 65 das starke Abweichen des Normalspannungsverlaufs zwischen Schalenmodellierung und Kontinuumsmodellierung in Dickenrichtung der Schale. Im Vergleich dazu stimmt bei schlanken Schalen das Ergebnis aus Kontinuumsmodell und Schalenmodell gut überein (Abbildung 62 und 63).

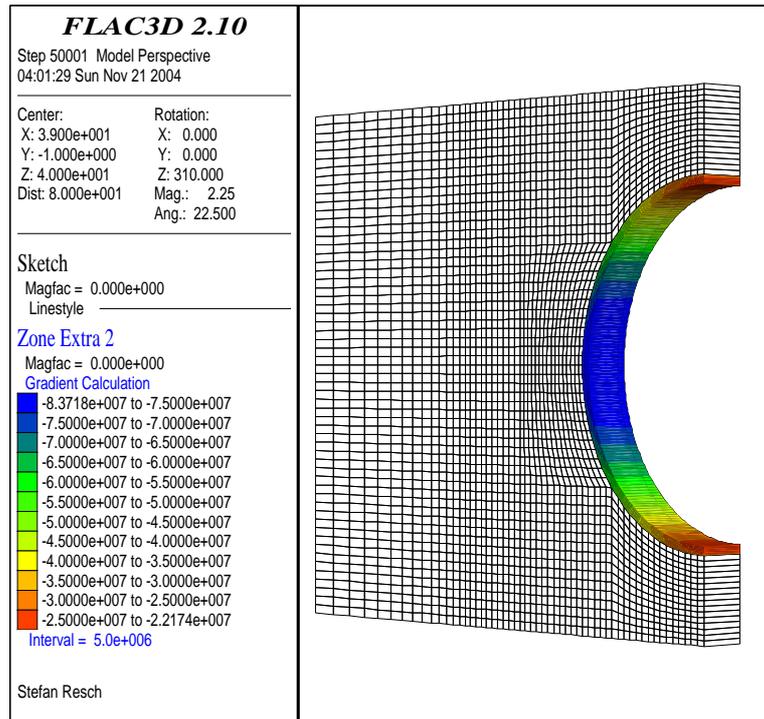


Abbildung 63: Modellausschnittes mit Darstellung der Normalspannung in der Tunnelschale (Modell K/K); Schalendicke $d = 0,20$ m

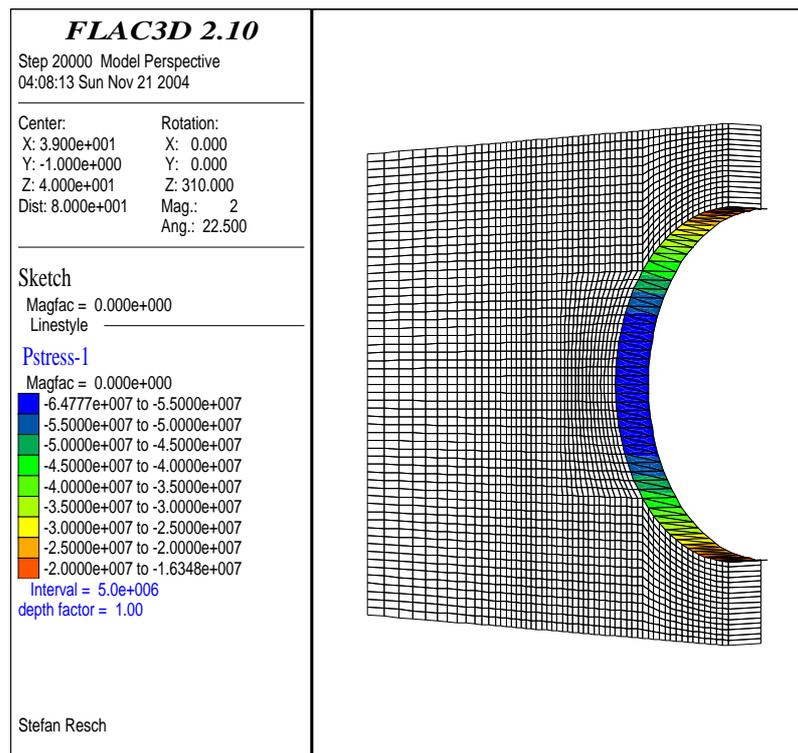


Abbildung 64: Modellausschnittes mit Darstellung der Normalspannung in den Linerelementen (Modell K/K); Schalendicke $d = 0,20$ m

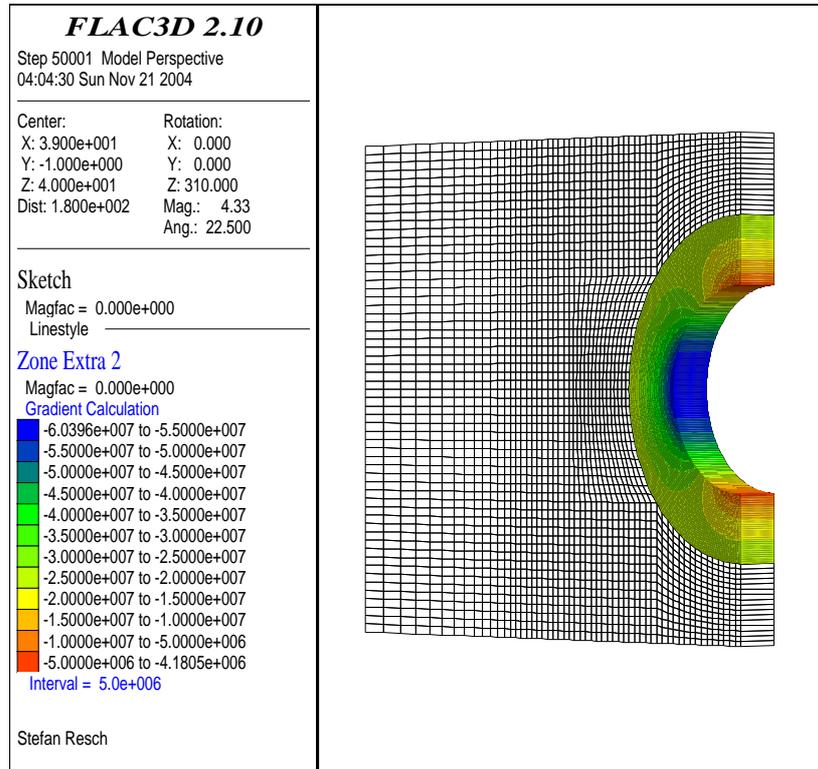


Abbildung 65: Modellausschnittes mit Darstellung der Normalspannung in der Tunnelschale (Modell K/K); Schalendicke $d = 1,60$ m

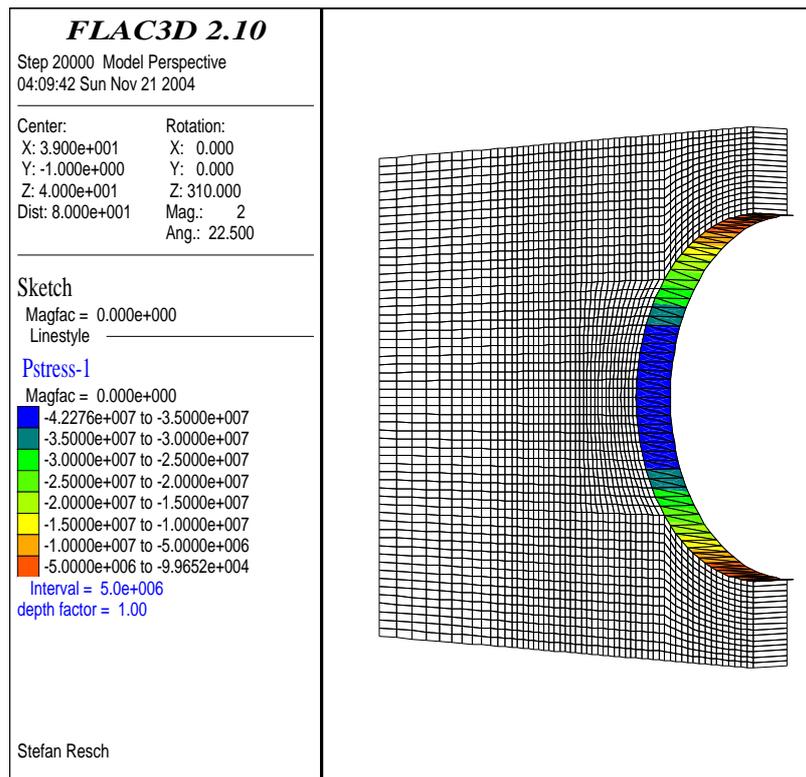


Abbildung 66: Modellausschnittes mit Darstellung der Normalspannung in den Linerelementen (Modell K/K); Schalendicke $d = 1,60$ m

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| $d/D []$ | 0,025 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| $d [m]$ | 0,20 | Schalendicke d | 0,20 m |

Vergleich von Normalspannungen in der Tunnelschale

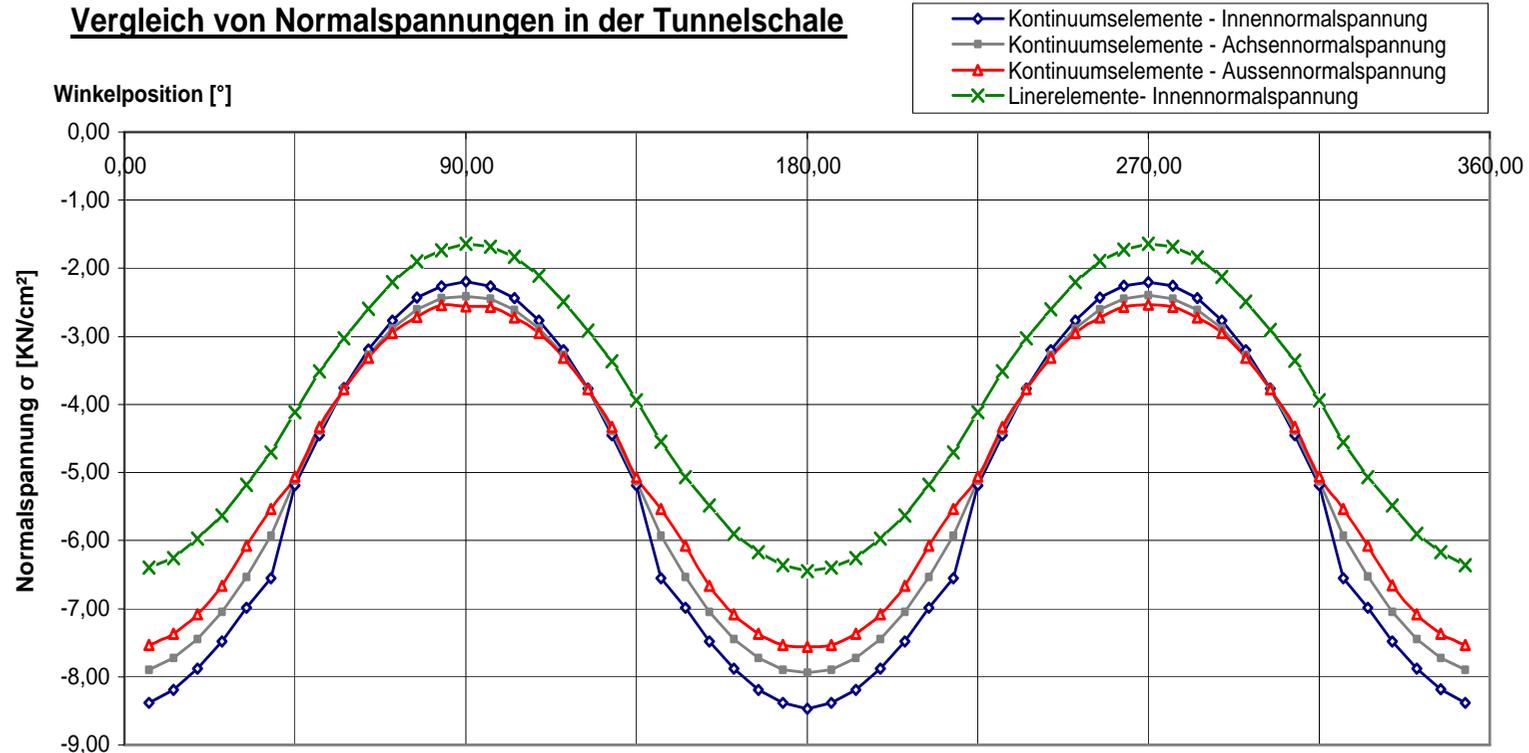


Abbildung 67: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| $d/D []$ | 0,050 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| $d [m]$ | 0,40 | Schalendicke d | 0,40 m |

Vergleich von Normalspannungen in der Tunnelschale

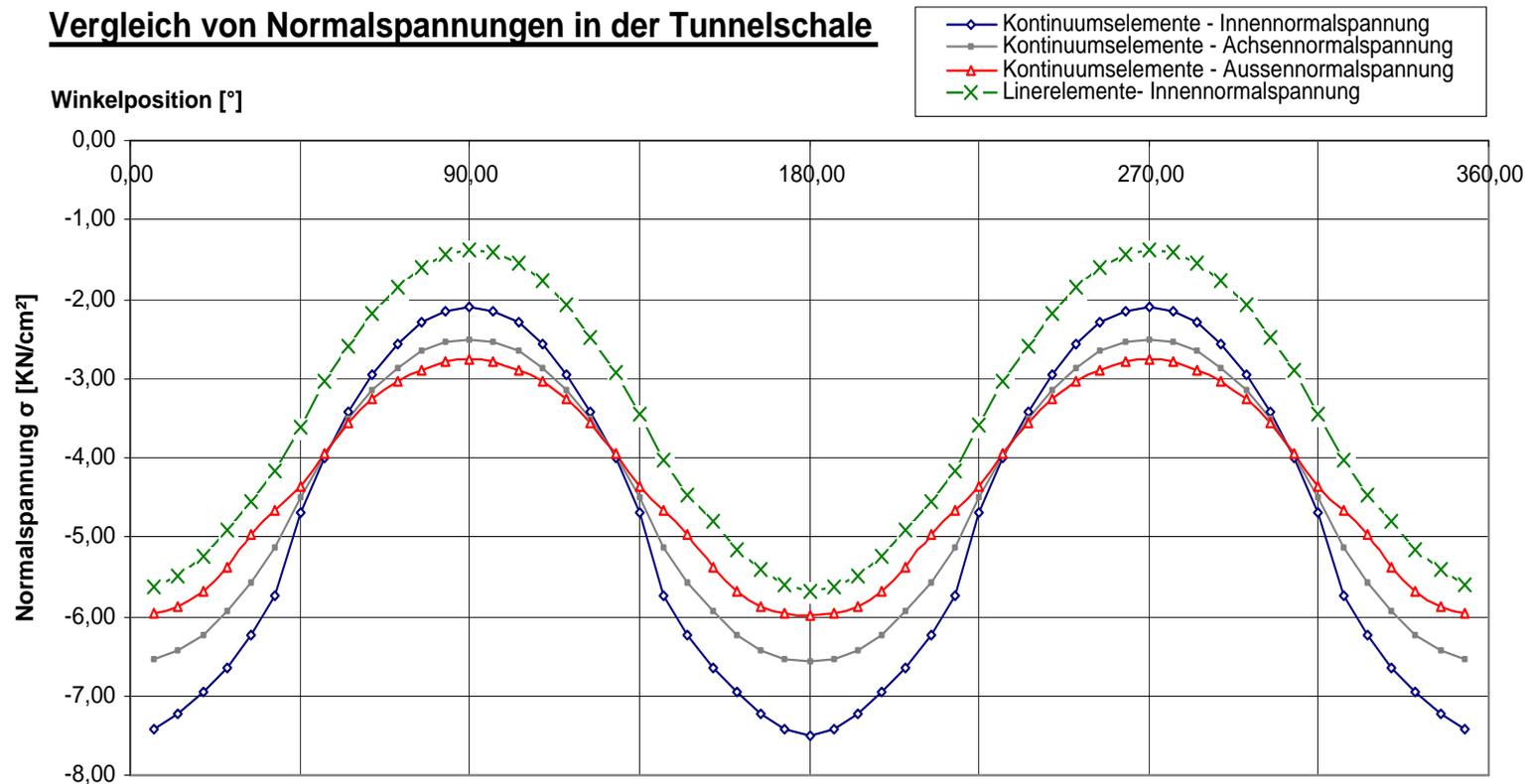


Abbildung 68: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsenormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,075 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 0,60 | Schalendicke d | 0,60 m |

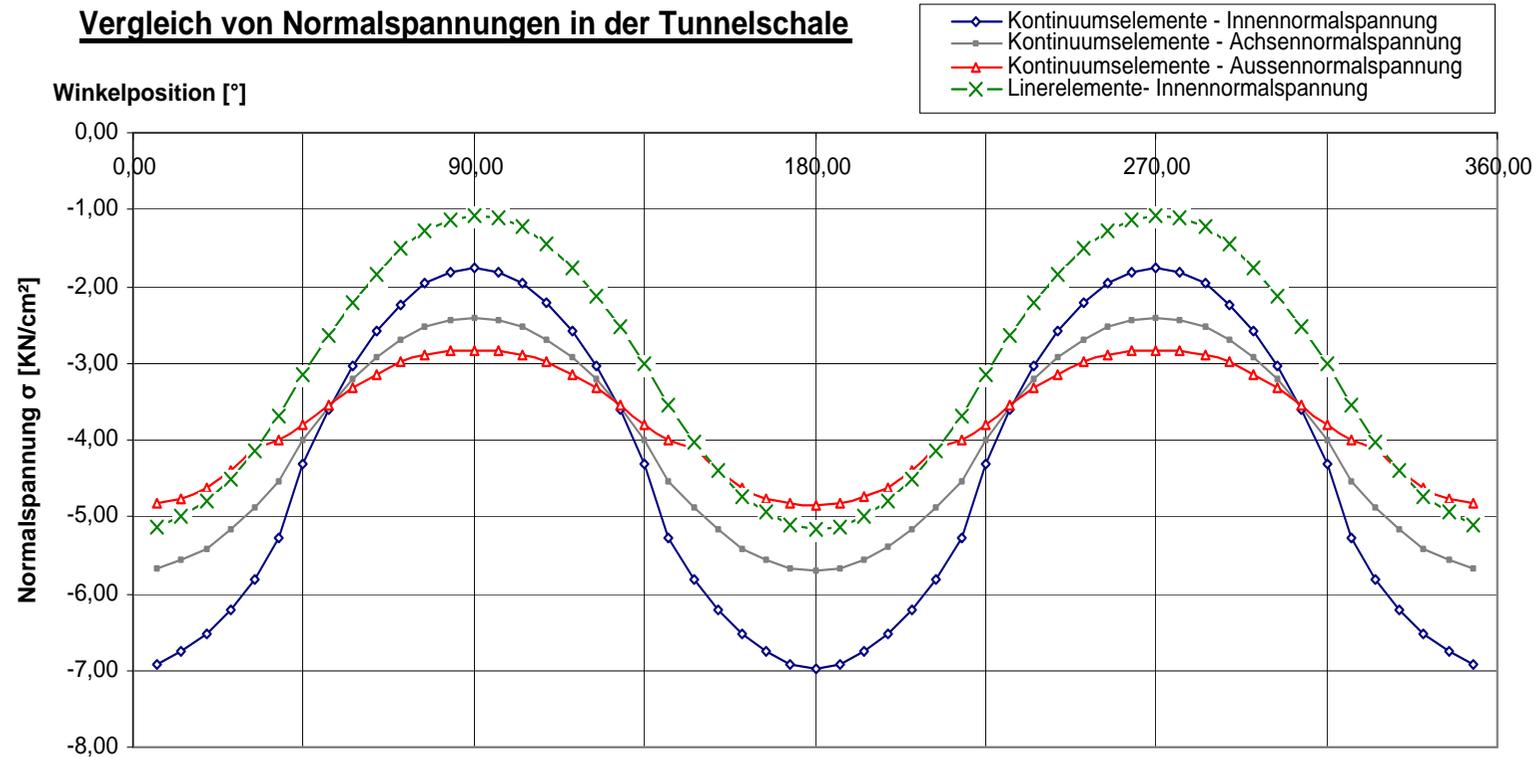


Abbildung 69: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,100 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 0,80 | Schalendicke d | 0,80 m |

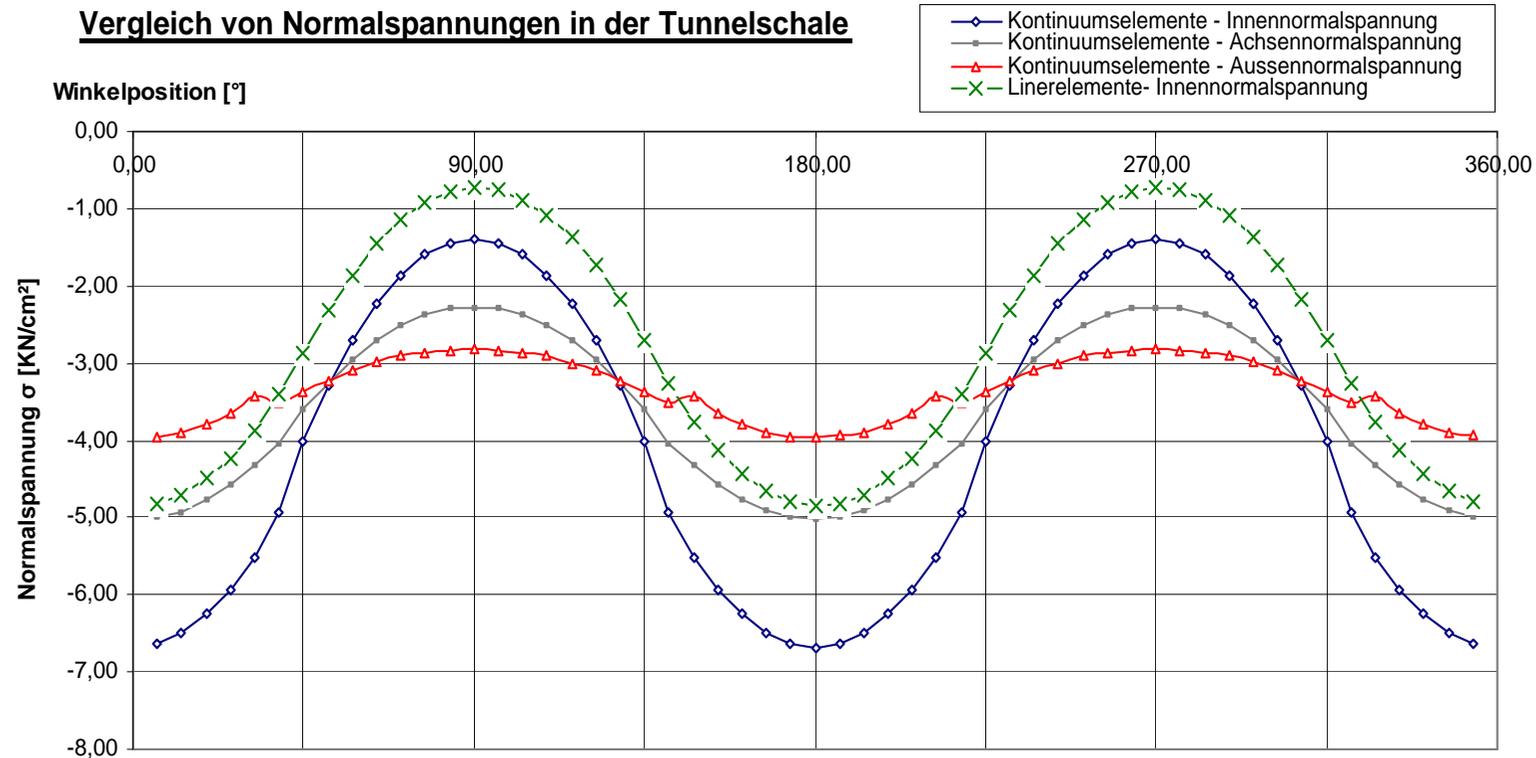


Abbildung 70: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,125 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,00 | Schalendicke d | 1,00 m |

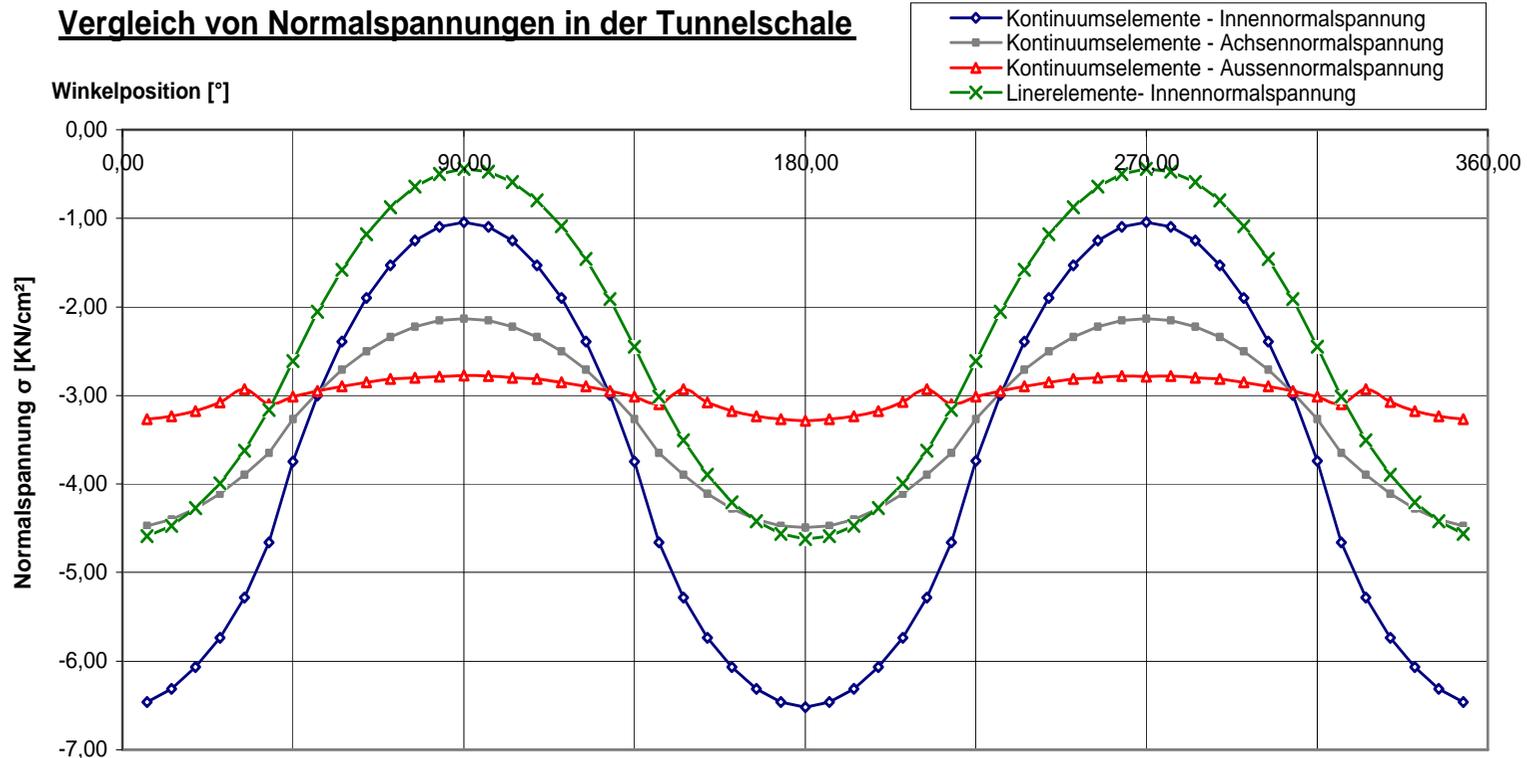


Abbildung 71: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,150 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,20 | Schalendicke d | 1,20 m |

Vergleich von Normalspannungen in der Tunnelschale

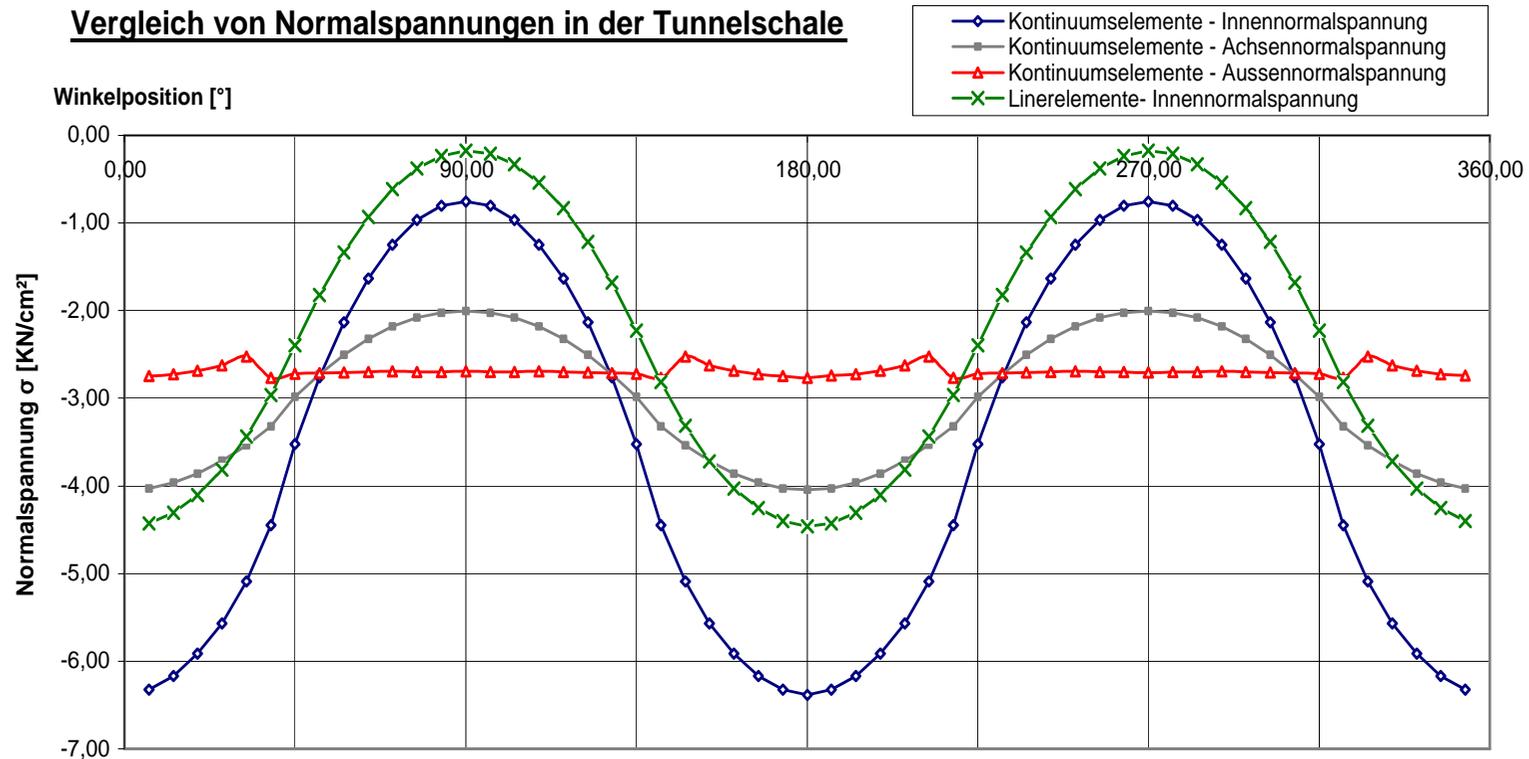


Abbildung 72: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| $d/D []$ | 0,175 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| $d [m]$ | 1,40 | Schalendicke d | 1,40 m |

Vergleich von Normalspannungen in der Tunnelschale

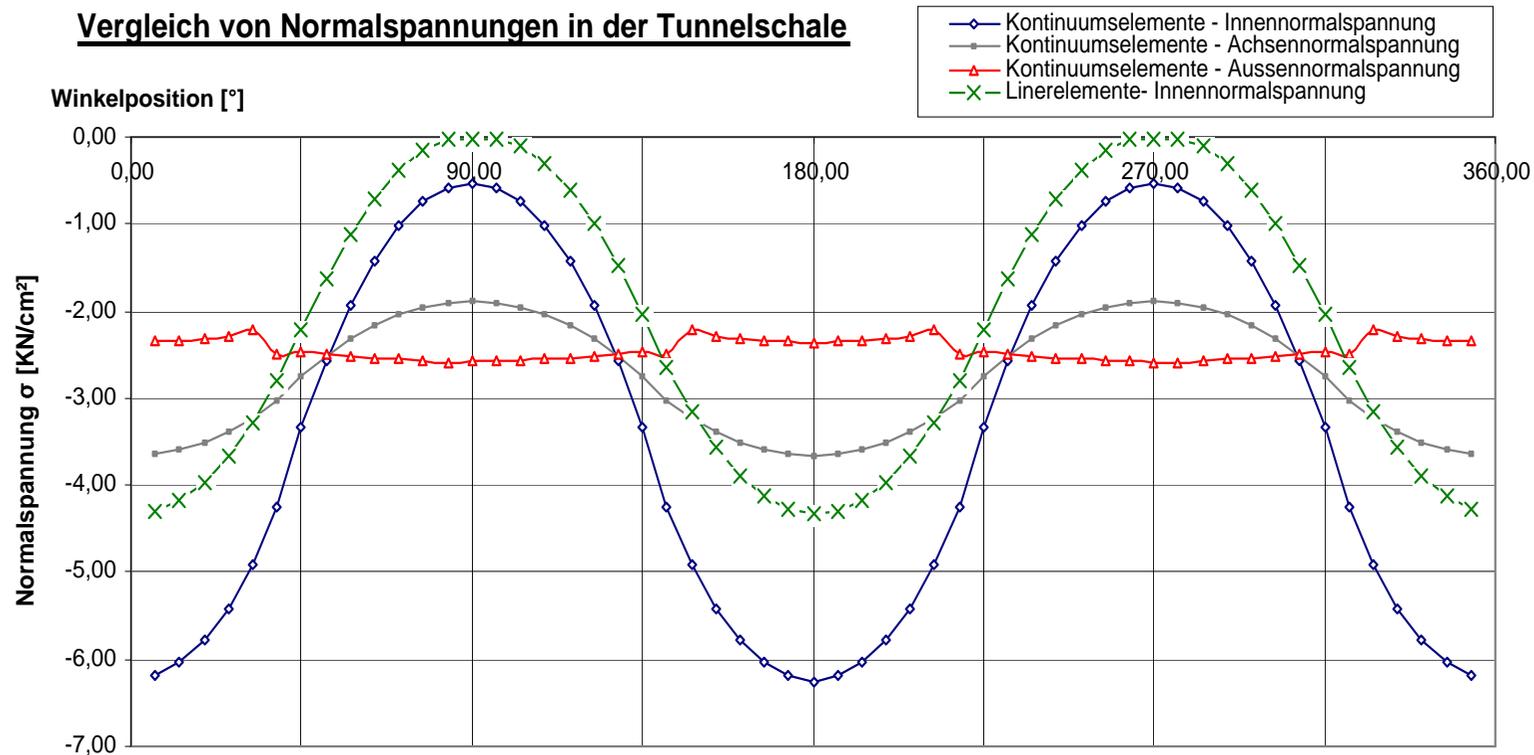


Abbildung 73: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,200 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,60 | Schalendicke d | 1,60 m |

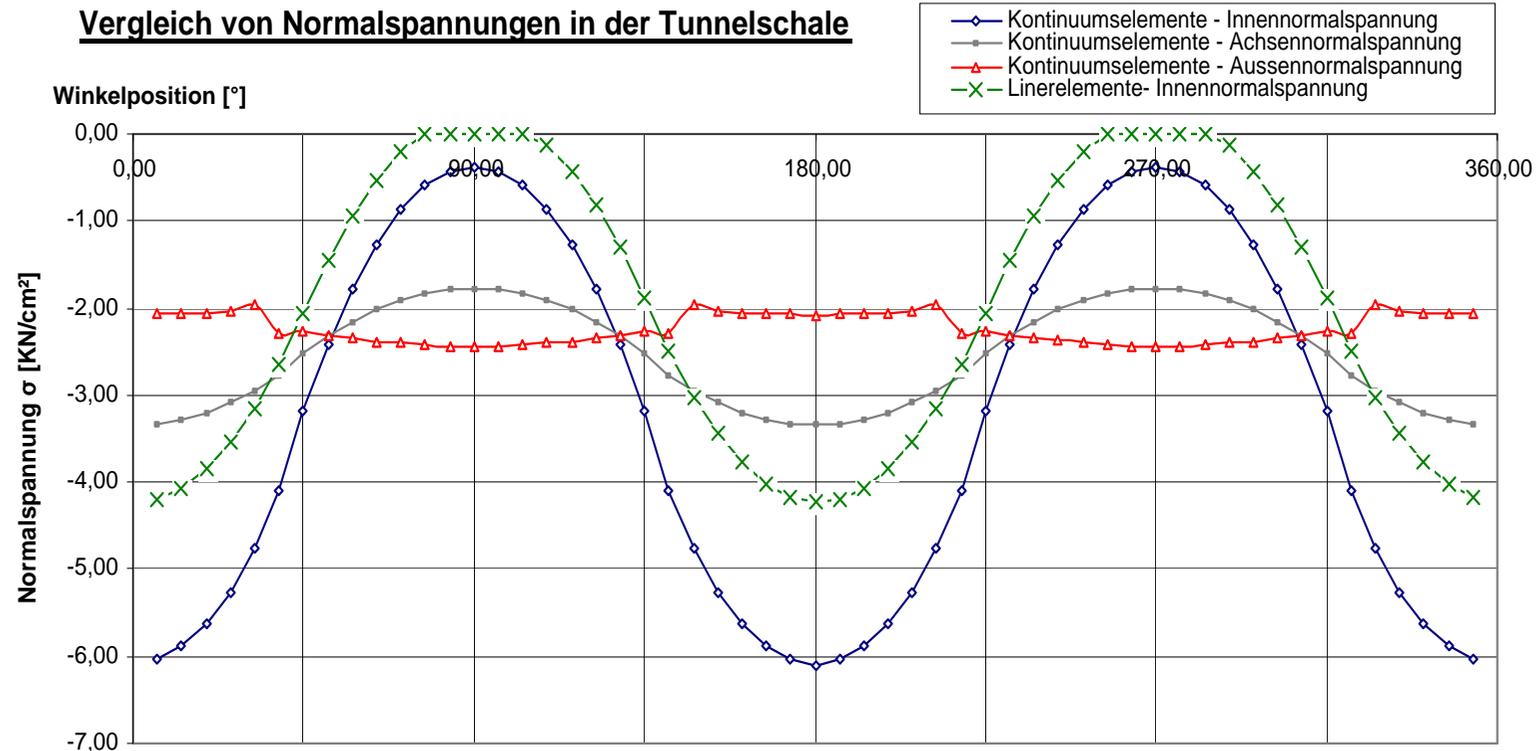


Abbildung 74: Darstellung der Innenrandnormal-, Außenrandnormal- und Achsennormalspannung aus dem Modell K/K und Innenrandnormalspannung aus dem Modell FE/K der Tunnelschale

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,025 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 0,20 | Schalendicke d | 0,20 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

Winkelposition [°]

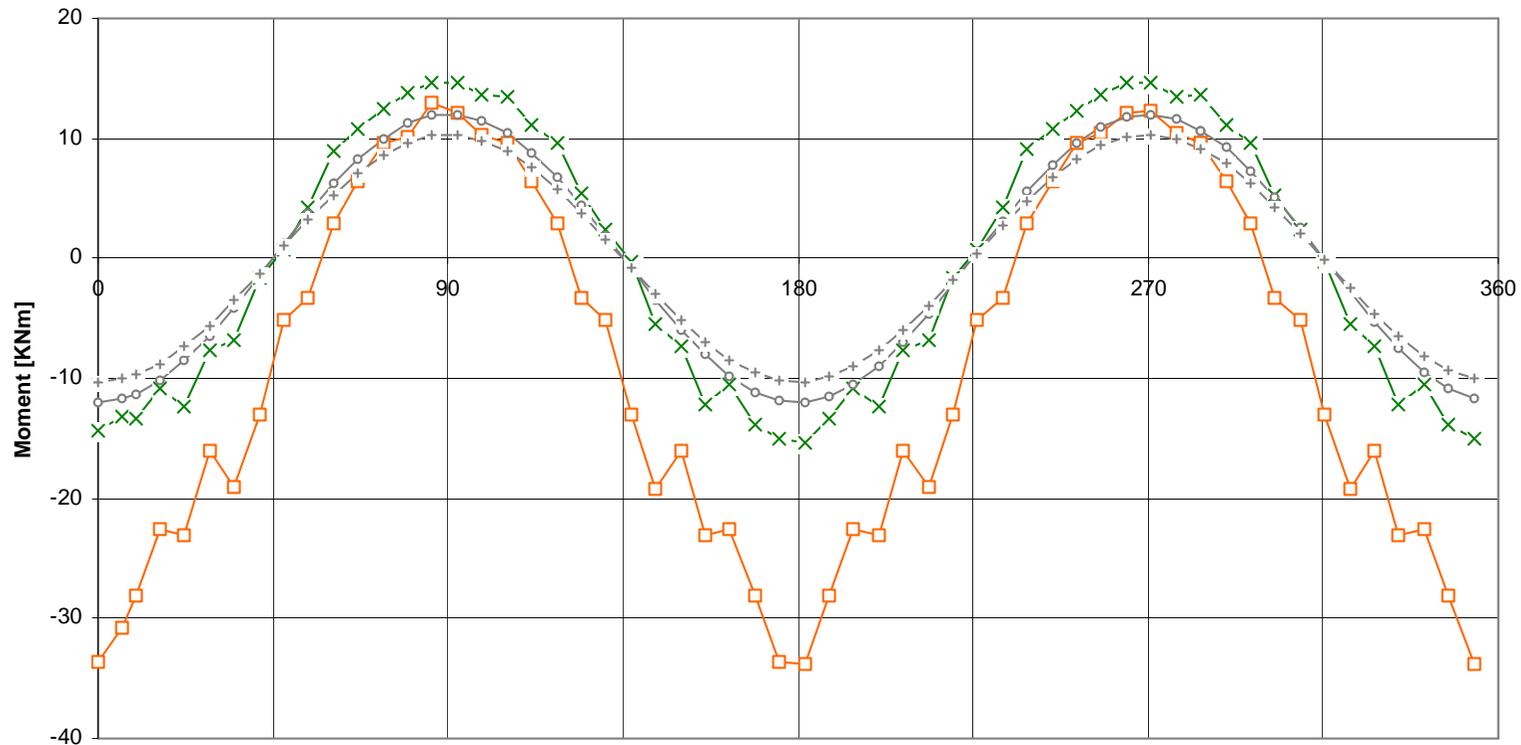


Abbildung 75: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| $d/D []$ | 0,050 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| $d [m]$ | 0,40 | Schalendicke d | 0,40 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

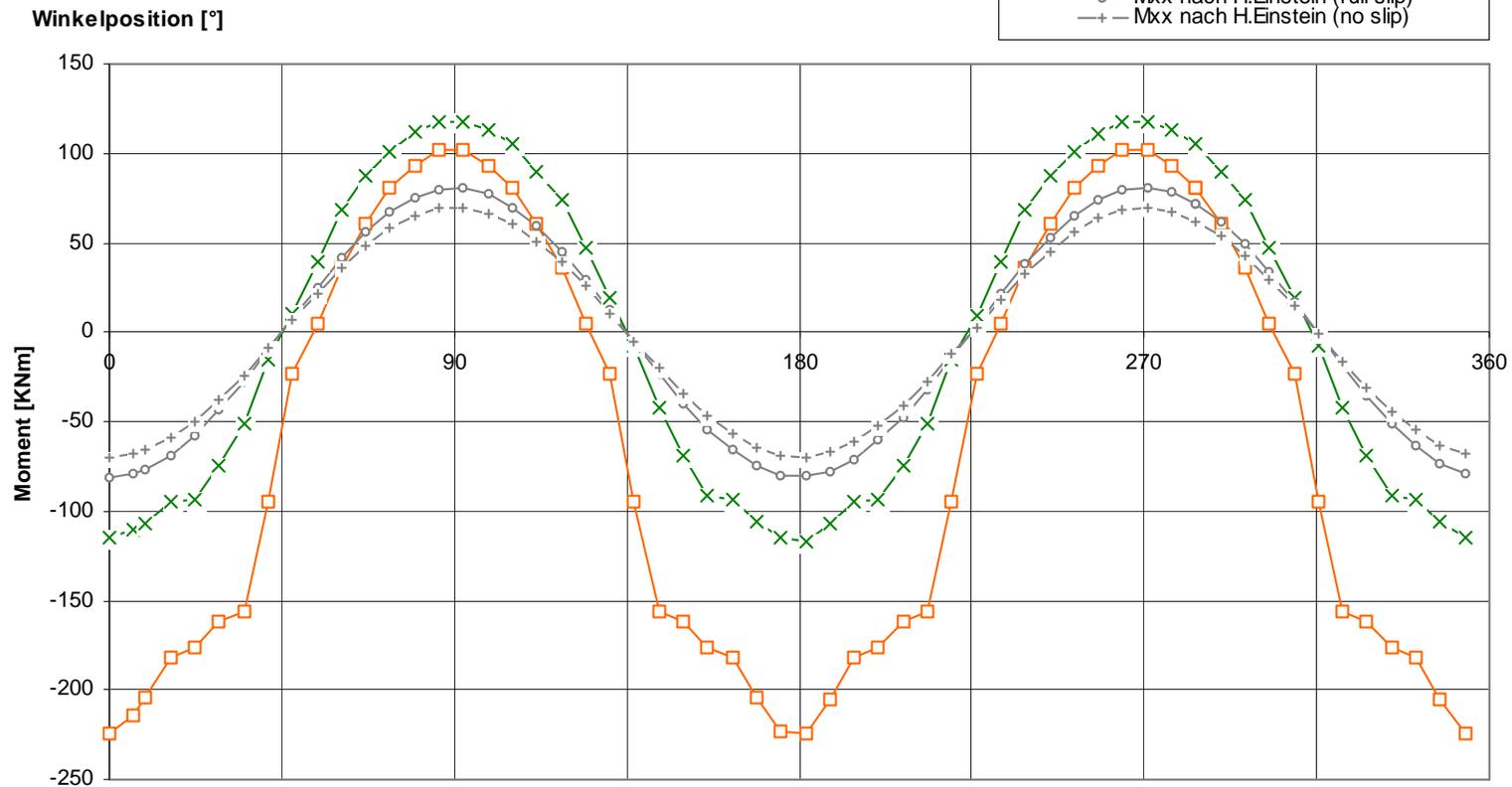


Abbildung 76: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,075 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 0,60 | Schalendicke d | 0,60 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

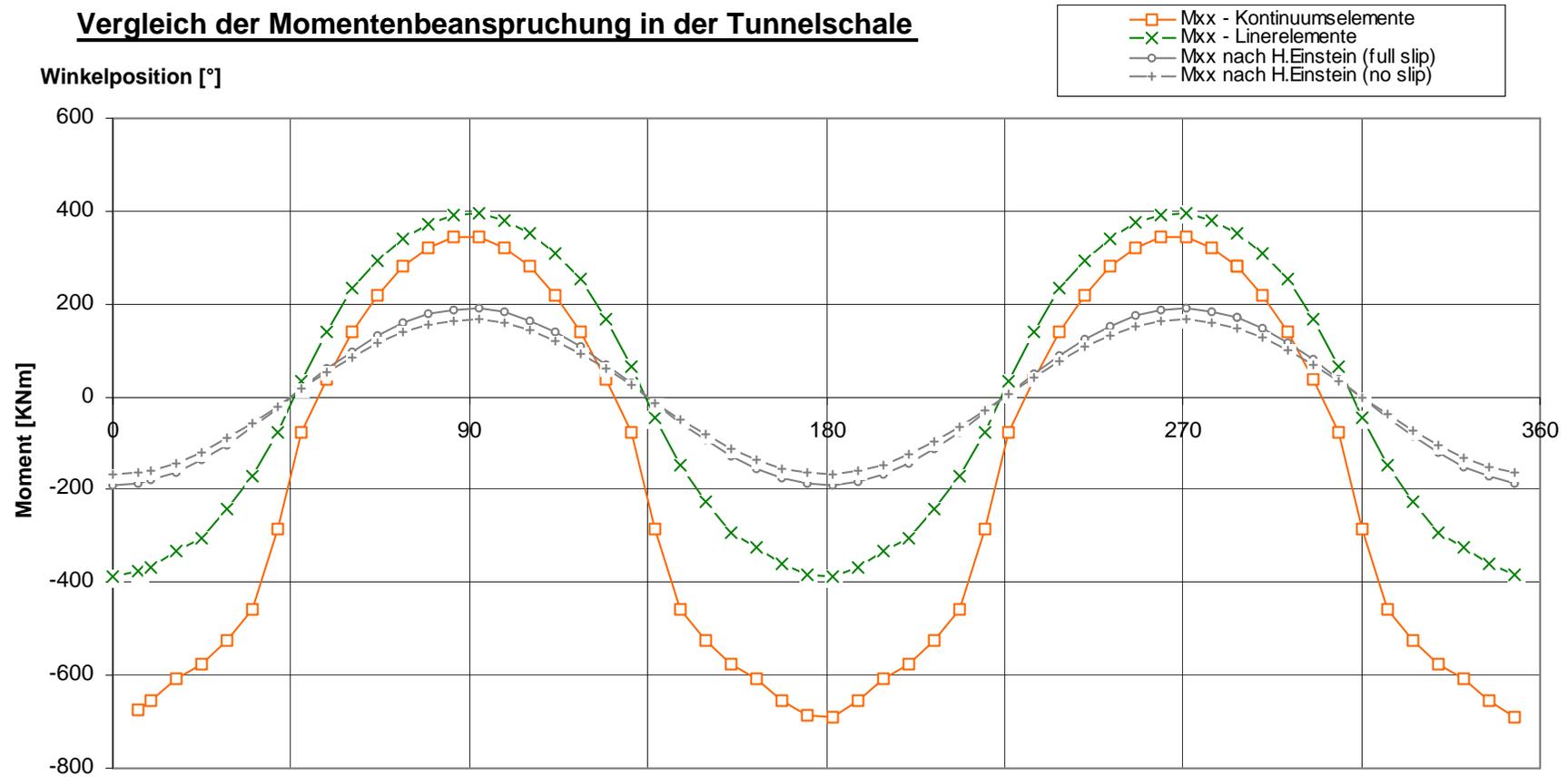


Abbildung 77: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,100 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 0,80 | Shalendicke d | 0,80 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

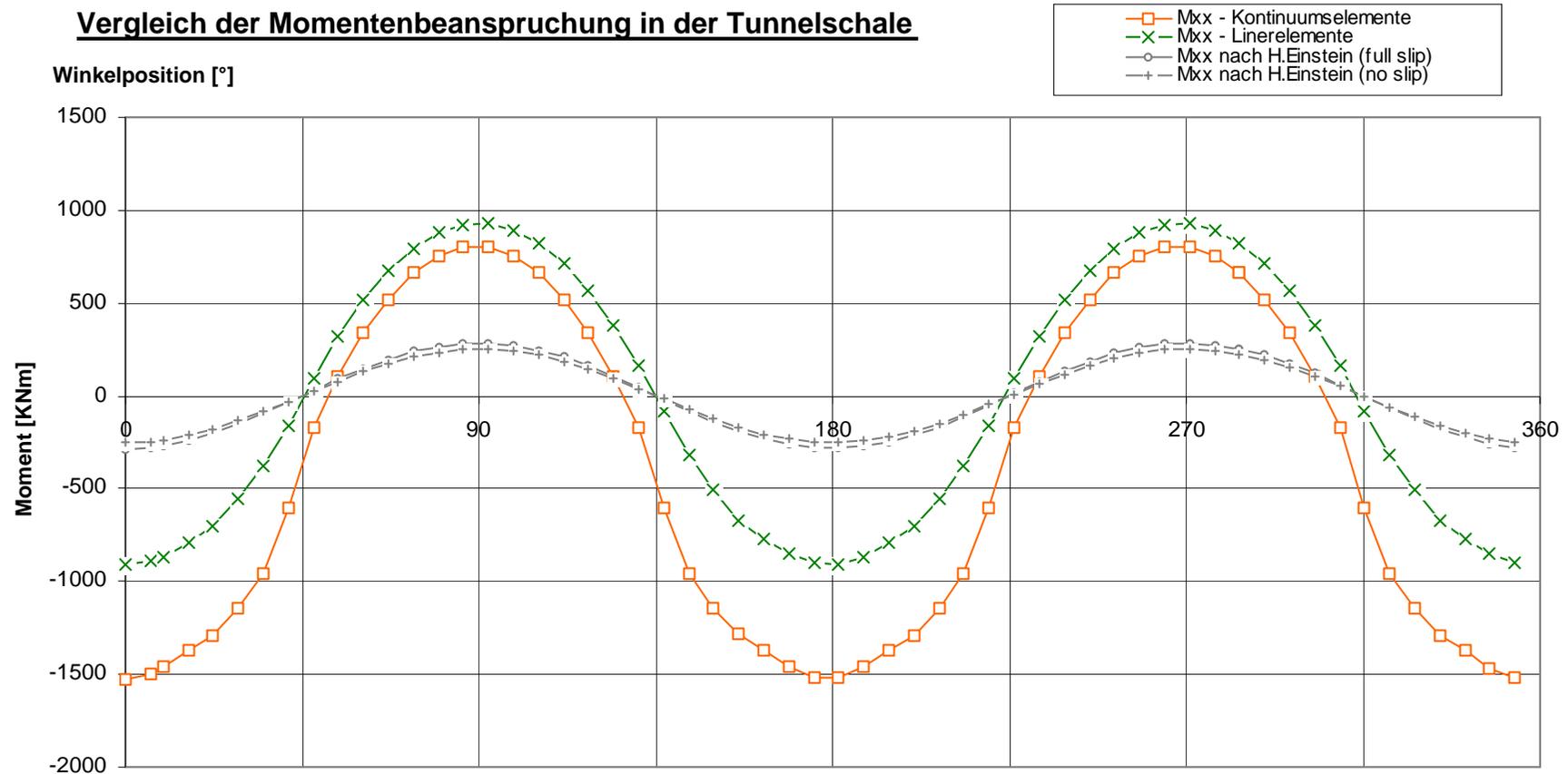


Abbildung 78: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|-------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,125 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,00 | Schalendicke d | 1,00 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

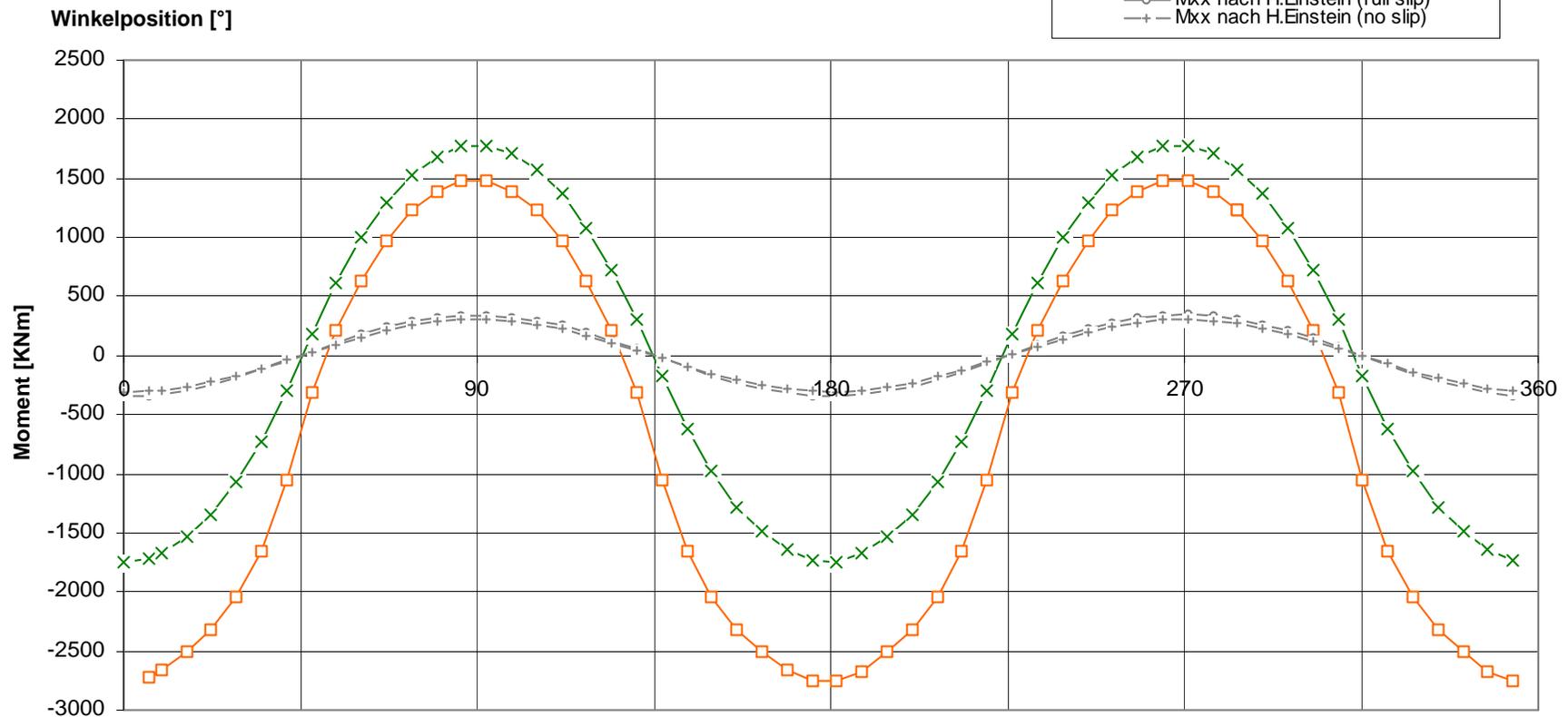


Abbildung 79: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|-------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,150 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,20 | Schalendicke d | 1,20 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

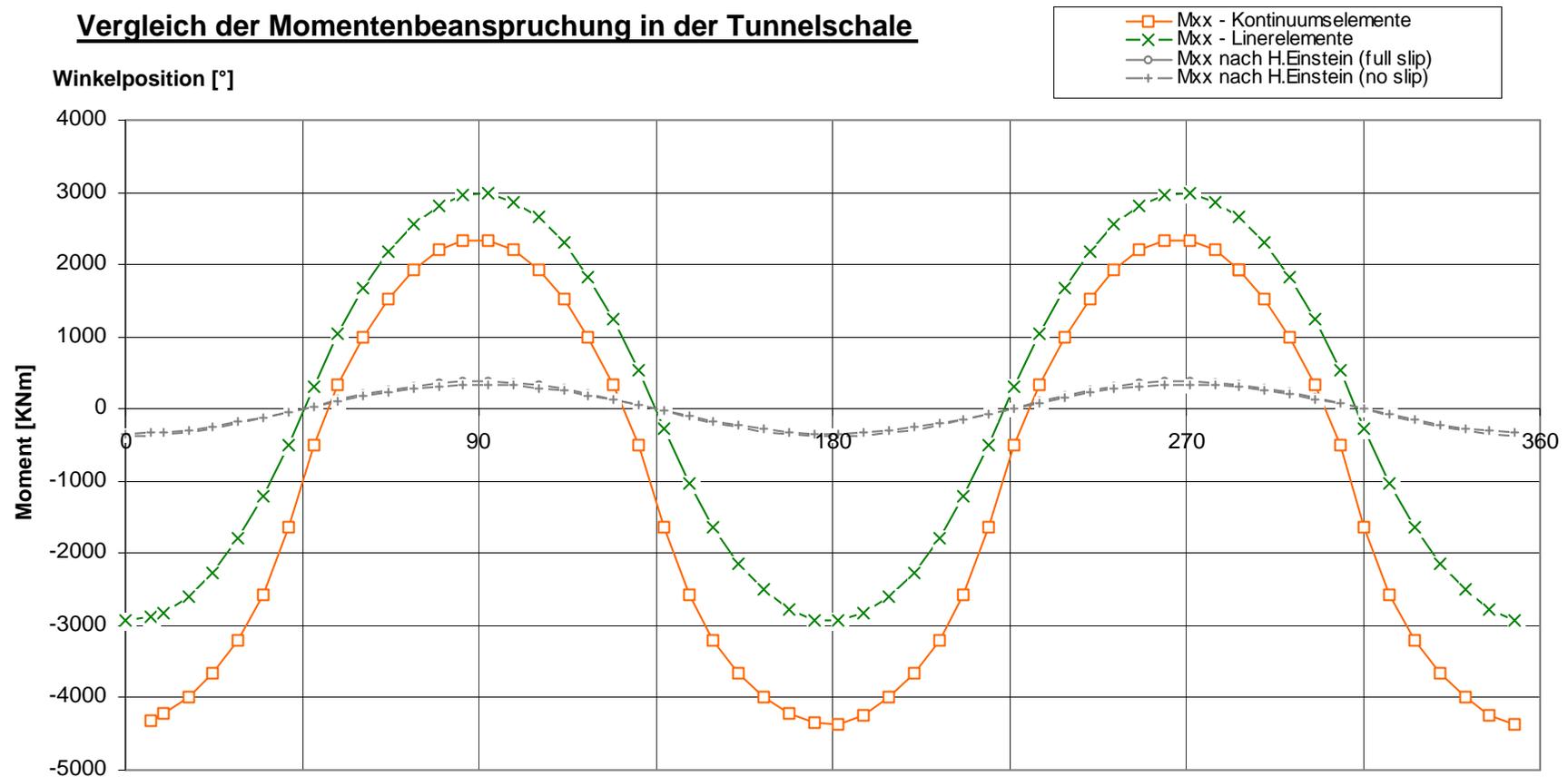


Abbildung 80: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|-------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,175 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,40 | Schalendicke d | 1,40 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

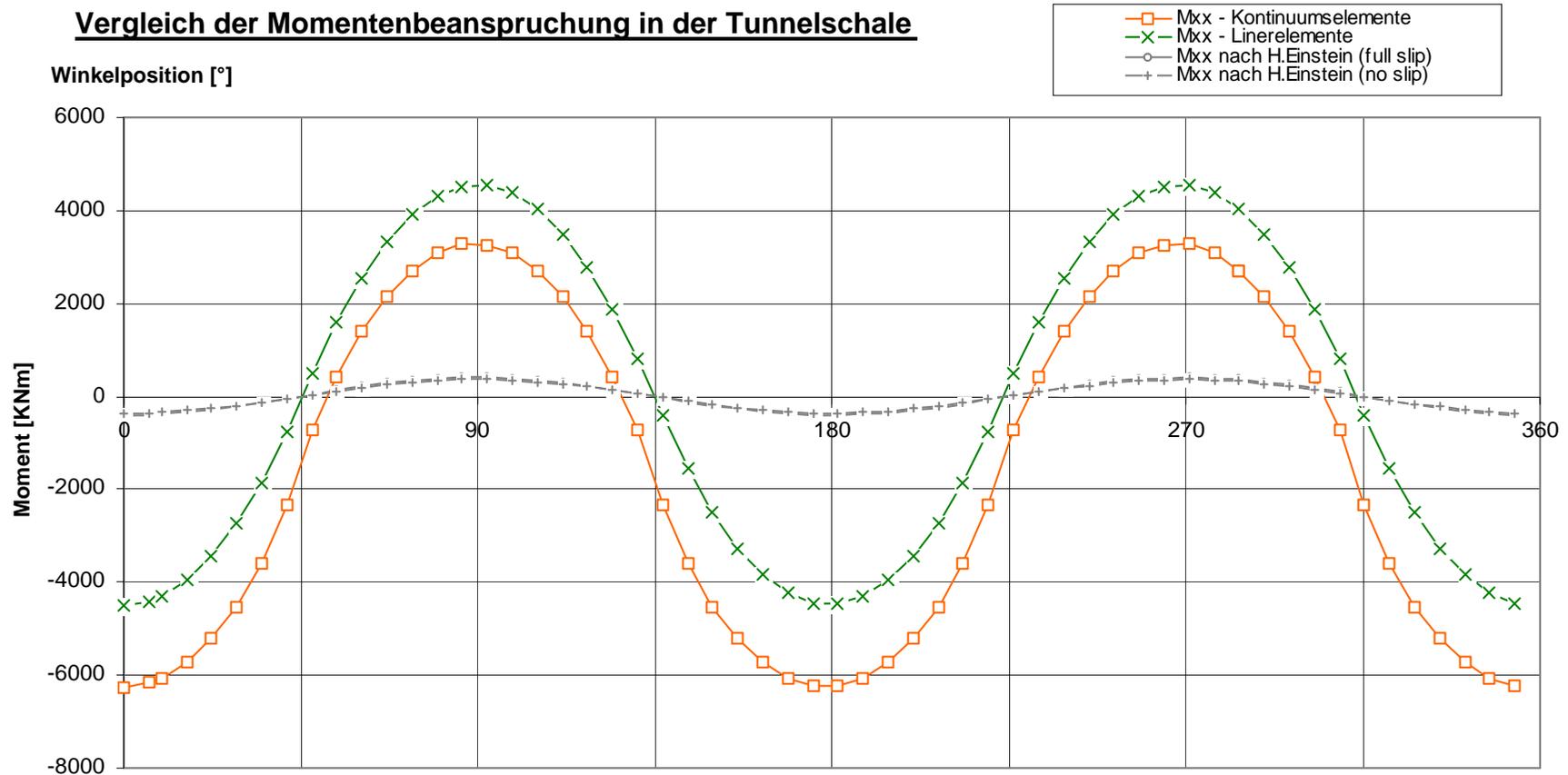


Abbildung 81: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

| | | | |
|-----------|--------------|-----------------------------|--------|
| d/D [] | 0,200 | Tunnelaussendurchmesser D | 8,00 m |
| d [m] | 1,60 | Schalendicke d | 1,60 m |

Vergleich der Momentenbeanspruchung in der Tunnelschale

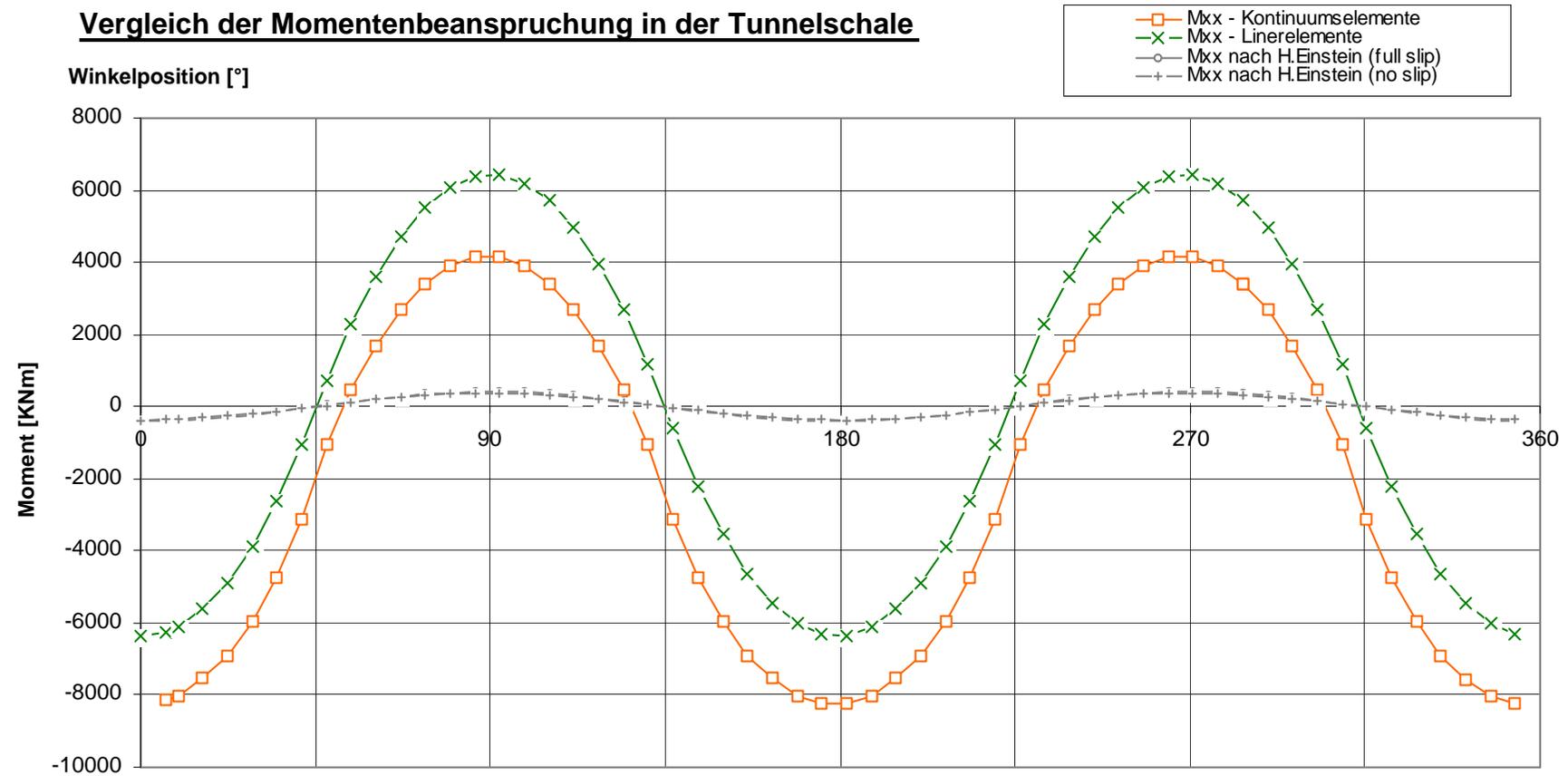


Abbildung 82: Darstellung der Momentenlinie aus dem Modell K/K, dem Modell FE/K und der analytischen Lösung nach H.H. Einstein (1979) für den Fall der vollkommenen Gleitung und für den Fall der vollkommen gesperrten Gleitung

4.5.4 Schlussfolgerung

Der Vergleich der Normalspannungen zeigt grundsätzlich geringere Werte bei der Modellierung der Tunnelschale mit Schalenelementen im Vergleich zum Modell mit Kontinuumselementen.

Das Tragmodell der Schalenelemente (siehe Pkt. 2.1.2) bedingt den linearen Verlauf der Normalspannung über die Querschnittshöhe.

Mit zunehmender Dicke kommt es zu einem Übergang von der „Theorie der dünnen Platten“ zur „Theorie der dicken Platten“ und somit zu einer Beschränkung der Anwendbarkeit der Schalenelemente bzw. zur Notwendigkeit der Verwendung von Kontinuumselementen zur Modellierung (siehe Pkt. 4.3.4 Z 5). Der lineare Spannungsverlauf modelliert mit Schalenelementen weicht vom Spannungsverlauf der dicken Kreisringscheibe maßgeblich ab. Für den Grenzfall einer „vollkommen gesperrten Gleitung“ zwischen Ausbau und anstehendem Material ergibt sich eine geringere Momentenbeanspruchung der Tunnelschale im Vergleich zum Fall „vollkommen freie Gleitung“.

Weiters fällt die Übereinstimmung der Momentenergebnisse bei der Anwendung der Schalenelemente (Modell FE/K) und aus der analytischen Lösung nach H.H. Einstein im Bereich der Schalendicke bis zu 40 cm (beim gegebenen Tunnelinnendurchmesser $D=8,00\text{m}$) auf.

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Grenzen der Anwendbarkeit von Schalenelementen zur Modellierung von Tunnelschalen mittels FLAC^{3D} (Fast Lagrangian Analysis for Continua in 3 Dimensions) der Itasca Consulting Group untersucht. FLAC^{3D} ist ein kontinuumsmechanisches Programm, das auf der Theorie der Finiten Differenzen aufgebaut.

In drei Studien werden die Spannungsverteilung im Bauteil sowie das Verhalten des Systems Gebirge - Ausbau unter Verwendung von Schalen- und Kontinuumselementen ermittelt und verglichen.

Balken auf zwei Stützen

In dieser Studie wird die Anwendbarkeit von Schalenelementen für die Modellierung eines linearen bzw. flächigen Bauteils untersucht. Dazu wird ein Balken auf zwei Stützen, bestehend aus elastischem Material, einerseits mittels Schalenelementen und andererseits mittels Kontinuumselementen modelliert. Als zusätzliche Gegenüberstellung wird der untersuchte Balken mittels Balkentheorie berechnet. Die Versuche zeigen, dass bis zu einer Schlankheit von 0,2 die Spannungsverläufe der beiden Modellierungen im Regelbereich des Bauteils gut übereinstimmen. Ab einer Schlankheit über 0,2 treten Abweichungen in den Spannungsverläufen auf, die nicht mehr vernachlässigbar sind. Dieser Wert wird von Altenbach als Grenzwert für die Verwendung der Theorie nach Reissner angegeben. Die numerischen Ergebnisse bestätigen also die theoretischen Aussagen von Altenbach (1998).

Balken auf elastischer Bettung

Anhand eines „Balkens auf elastischer Bettung“ werden die Interaktionseffekte zwischen einem Bauteil und dem Untergrund untersucht.

Dazu wird einerseits die Platte mittels Schalenelementen und andererseits mit Kontinuumselementen modelliert. Die Variation der Reibungseigenschaften der Fuge zwischen Balken und Untergrund führt zu der Untersuchung der beiden Grenzzustände

- vollkommene Gleitung zwischen Balken und Untergrund (full-slip)
- vollkommen gesperrte Gleitung zwischen Balken und Untergrund (no-slip).

Zusätzlich wird zum Zweck der Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse eine Referenzrechnung mittels dem Bettungsmodulverfahren gerechnet. Alle numerischen Ergebnisse liegen innerhalb eines Plausibilitätsbereichs gemäß der Berechnung mit dem

Bettungsmodulverfahren. Die Modellierung mittels Schalenmodell liefert kleinere Randnormalspannungen und kleinere Biegemomente im Vergleich zum Kontinuumsmodell. Bei Erhöhung der Reibung verringert sich bei diesen Randbedingungen das Biegemoment.

Untersuchung eines Tunnels in einem elastischen Medium

Zur Untersuchung der Wirkungsweise von Schalen- und Kontinuumselementen bei der Modellierung von Tunnelschalen wird ein kreisrunder Tunnelausbruch in einem linear elastischen, homogenen Medium modelliert. Dabei wird die Tunnelschale zeitgleich mit dem Aushub des kreisrunden Tunnels installiert. Der Tunnel wurde als gerades, unendlich langes Linienbauwerk betrachtet (räumlicher Spannungszustand, ebener Verzerrungszustand).

Neben der Untersuchung der Wirkungsweise und Anwendbarkeit von verschiedenen Konstruktionselementen wird anhand dieses idealisierten Beispiels das theoretische Tragverhalten eines Tunnels untersucht, welches beeinflusst wird durch die Interaktion zwischen Tunnel und Gebirge. Die Interaktion wird einerseits charakterisiert durch das relative Steifigkeitsverhältnis zwischen Tunnelschale und Gebirge und andererseits durch die Schubverbindung in der Fuge zwischen Tunnel und Gebirge.

Einen analytischen Lösungsansatz um das Tragverhalten des oben beschriebenen Systems zu beurteilen, zeigt Herbert H. Einstein (1979) in seinem Paper „Simplified Analysis for Tunnel Supports“. Er nennt den Lösungsansatz die „Relative Stiffness Solution“.

Dieser Ansatz besagt, dass bei einer Zunahme der Steifigkeit des Ausbaus eine Zunahme der Ausbaubelastung die Folge ist bzw. eine Abnahme der Ausbaubelastung eine Zunahme der Ausbauverformung mit sich bringt. Der Vergleich der Normalspannungen zeigt grundsätzlich geringere Werte bei der Modellierung der Tunnelschale mit Schalenelementen im Vergleich zum Modell mit Kontinuumselementen.

Mit zunehmender Dicke kommt es zu einem Übergang von der „Theorie der dünnen Platten“ zur „Theorie der dicken Platten“ und somit zu einer Beschränkung der Anwendbarkeit der Schalenelemente. Der lineare Spannungsverlauf modelliert mit Schalenelementen weicht vom Spannungsverlauf der dicken Kreisringscheibe maßgeblich ab.

Für den Grenzfall einer „vollkommen gesperrten Gleitung“ zwischen Ausbau und anstehendem Material ergibt sich eine geringere Momentenbeanspruchung der Tunnelschale im Vergleich zum Grenzfall „vollkommen freie Gleitung“.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Modellierung von Bauteilen mittels Schalenelementen einfacher ist, aber bei großen Bauteildicken falsche Ergebnisse liefert sowohl was die Verteilung der Spannungen in der Tunnelschale als auch was das Verhalten des Systems Gebirge – Ausbau betrifft.

6 Literaturverzeichnis

- Altenbach, H. (1998). *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag.
- Bausinger, Rolf (1987). *Die Boundary-Element-Methode*. Ehningen bei Böblingen, expert – Verlag
- Einstein, Herbert H. (1979). Simplified analysis for tunnel supports. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, vol. 105, Nr. GT4; pp. 499-518
- Itasca Consulting Group, Inc (2002). *FLAC3D Online Manual Ver. 2.1*.
- Mayr M. / Thalhoffer U. (1993). *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis FEM – BEM – FDM*. München Wien, Carl Hanser Verlag.
- Mehlhorn, Gerhard (1995). *Rechnerorientierte Baumechanik*; Kapitel: Die Methode der Finiten Elemente. Berlin, Verlag Ernst & Sohn.
- Roth, Werner (1999). *Ermittlung von Sicherheitsfaktoren mittels des kontinuumsmechanischen Finiten Differenzen – Codes FLAC*. Diplomarbeit am Institut für Ingenieurgeologie der TU-Wien.
- Smolczyk, Ulrich (2001). *Grundbau-Taschenbuch, Tl.3 Gründungen*. Berlin, Verlag Ernst & Sohn.
- Steinbuch, Rolf (2004). *Simulation im konstruktiven Maschinenbau*. Wien – München, Carl Hanser Verlag, pp. 32-34.

7 Internetverzeichnis

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Modell>. Letzter Zugriff am 24. Oktober 2004
(Die freie Enzyklopädie)

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.