TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

D I P L O M A R B E I T

Elliptische Funktionen und Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie

ausgeführt am Institut für
Analysis und Technische Mathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Ao. Univ-Prof. Dr. Rudolf Taschner

durch

Mathias Tausig

Schaumburgergasse 11/2/15
1040 Wien

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Ich habe mich bemüht die Voraussetzungen für diese Diplomarbeit möglichst niedrig zu halten. Neben den allgemeinen mathematischen Grundlagen benutze ich lediglich noch die funktionentheoretischen Grundlagen, wie sie in der Vorlesung *Komplexe Analysis B* an der TU-Wien vermittelt werden. Alles darüber hinausgehende wird möglichst genau erklärt und bewiesen.
Begriffe und Symbole die in der einschlägigen Literatur nicht immer einheitlich sind, sind im Anhang erläutert.

Der erste Teil dieser Arbeit trägt den Titel „Elliptische Funktionen“und beschäftigt sich mit eben Diesen. Elliptische Funktionen werden als doppeltperiodische, meromorphe Funktionen eingeführt und ihre grundlegendsten Eigenschaften, die vier Sätze von Liouville, gezeigt.
Neben einer historischen Herleitung von Weierstraß und einigen Eigenschaften der $\wp$-Funktion dreht sich ein gewichtiger Teil dieses Abschnitts schließlich um den Aufbau elliptischer Funktionen. Dieser wird von beiden Seiten beleuchtet, also die Darstellbarkeit einer bestehenden elliptischen Funktion, sowie die Konstruktionsmöglichkeit bei gewissen vorgegebenen Eigenschaften.

Im zweiten Teil untersuche ich zunächst Manigfaltigkeiten von äquivalenten Gittern. Dies führt auf die sogenannte Modulgruppe und die verschiedenen Arten der Modulformen, Abbildungen der oberen Halbebene mit einem gewissen Transformationsverhalten.
Deren Struktur und ihre Grundeigenschaften werden untersucht, wie bereits im ersten Abschnitt gipfelnd in einigen Struktursätzen.
Modulformen sind einerseits gewissermaßen das „Tor zur Welt“für die elliptischen Funktionen, sie erst ermöglichen die zahlentheoretischen Anwendungen. Andererseits erhält man aber auch wieder einiges zurück, konkret beweise ich einen wichtigen Satz über elliptische Integrale sowie eine sehr interessante Formel über die Nullstellen der $\wp$-Funktion.

Im abschließenden Teil dreht sich alles darum, das bisher gezeigte in den Dienst der Zahlentheorie zu stellen. Als weiteres Hilfsinstrument kommen noch die Thetareihen hinzu, als Resultate erwachsen schließlich zwei Sätze

über Partitionen von Zahlen.

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass sämtliche in der Entstehung dieser Arbeit verwendete Software freie Software ist. GNU Emacs und LaTeXauf einem GNU/Linux System waren meine „Begleiter“.

Teil I

Elliptische Funktionen

Kapitel 1

Allgemeines

1.1 Periodische Funktionen

In diesem Abschnitt bezeichnet f stets (sofern nicht anders angegeben) eine komplexe Funktion.

Definition 1 *Sei f eine Funktion. Jedes $p \neq 0$ welches die Bedingung*

$$f(z+p) = f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

erfüllt heißt eine Periode von f. f heißt periodisch, falls es eine Periode besitzt.

Unmittelbar aus dieser Definition erhält man folgende triviale Eigenschaft:

Satz 1.1.1 *Seien p_1 und p_2 Perioden von f. Dann ist auch für beliebiges $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ auch $np_1 + mp_2$ eine Periode von f.*

Beweis Da p_1 Periode von f ist, ist wegen

$$f(z+np_1) = f((z+(n-1)p_1)+p) = f(z+(n-1)p) = \cdots = f(z+p) = f(z)$$

auch np_1 Periode. Weiters gilt

$$f(z + (np_1 + mp_2)) = f((z + np_1) + mp_2) = f(z + np_1) = f(z)$$

□

Wenn man an periodische Funktionen denkt, so drängen sich zunächst die klassischen trigonometrischen Funktionen sin und cos auf, welche mit den Perioden $2k\pi$ ausgestattet sind. Es stellt sich also die Frage, wie „reichhaltig“die Menge der Perioden, bezeichnet durch

$$\Omega := \{p \in \mathbb{C} | p \text{ Periode von } f\},$$

bei „braven“Funktionen sein kann. Die Antwort darauf gibt der folgende

Satz 1.1.2 *Sei f eine nichtkonstante, meromorphe Funktion. Dann besitzt Ω keinen Häufungspunkt, ist also diskret.*

Beweis Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen p wäre ein solcher Häufungspunkt. Dann gibt es eine Folge von Perioden $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n \to p$. Es gilt:

$$g(z) := f(z) - f(p) \Rightarrow g(p_n) = 0$$

Die Nullstellen von g häufen sich also um p. Da mit f auch g meromorph ist, muss g die Nullfunktion sein woraus $f \equiv f(p)$ folgt. Widerspruch, da f als nichtkonstant vorausgesetzt war.

□

Die Menge der Perioden einer meromorphen Funktion liegt also diskret in der Gaußschen Zahlenebene. Aus diesem Grund bezeichnet man Ω meistens als *Periodengitter* von f.

Bemerkung Da ein zweidimensionales Zahlengitter durch $mp_1 + np_2$ definiert ist, muss man 0 in Ω aufnehmen um daraus ein richtiges Gitter zu machen. Da 0 aber ohnehin die Periodeneigenschaft $f(z+0) = f(z)$ besitzt stellt dies keine Probleme dar. In Zukunft bezeichnen wir daher mit Ω die Menge

$$\Omega := \{p \in \mathbb{C} | p \text{ Periode von } f\} \cup \{0\}$$

Unsere nächste Aufgabe ist aus diesem Gitter Basisperioden auszuwählen. In einer diskreten Menge finden wir sicher eine Periode p_1 mit minimalem Betrag. Da mit p_1 auch $-p_1$ Periode ist, ist diese Auswahl sicher nicht eindeutig, was aber nicht weiter stört. Nun muss man zwei Fälle unterscheiden:

1. $\Omega = \{mp_1 | m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
   f besitzt also außer den Vielfachen von p_1 keine weiteren Perioden mehr, ist also eine *Fourierreihe*. Mit diesem Fall wollen wir uns nicht weiter befassen

2. Ω besitzt noch weitere Perioden
   Unter diesen, von p_1 linear unabhängigen, Perioden existiert wieder ein p_2 von minimalem Betrag. Mit dieser Auswahl wollen wir nun weiterarbeiten

Lemma 1.1.3 $\frac{p_2}{p_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *d.h. p_2 und p_1 liegen nicht auf einer homogenen Geraden.*

Beweis Angenommen $p_2 = \lambda p_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $mp_1 + np_2 = p_1(m + n\lambda)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ Periode. Nun kann man aber m und n so wählen, dass $|m + n\lambda| < 1$ ist und daher $|mp_1 + np_2| < |p_1|$. Widerspruch zur Wahl von p_1.

□

Nun kann man p_2 sicherlich so wählen, dass die Bedingung $\Im(\frac{p_1}{p_1}) > 0$ erfüllt ist, die wollen wir auch tun.

Nun kann man noch versuchen weitere linear unabhängige Perioden zu suchen, dank des folgenden Lemmas wird man allerdings erfolglos bleiben.

Lemma 1.1.4

$$\Omega = \{mp_1 + np_2 | m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

Beweis Sei $p \in \Omega$ beliebig. Dann existiert eine Darstellung $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ mit reellen Konstanten λ_1, λ_2. Damit ist auch $p' := (\lambda_1 - [\lambda_1])p_1 + (\lambda_2 - [\lambda_2])p_2$ Periode und es gilt $|p'| > |p_2|$ (siehe Abbildung 1.1). Verschiebt man p' nun aber um p_1 und um p_2 so kommt der Punkt innerhalb des inneren Kreises zu liegen, also $|p' - p_1 - p_2| < |p_1|$. Widerspruch.

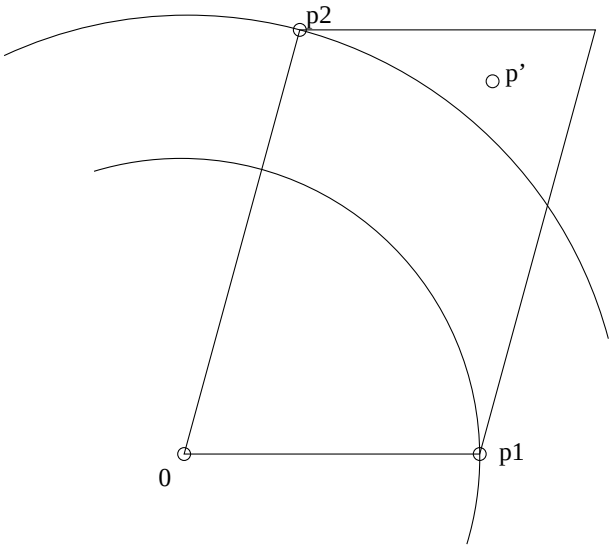


Abbildung 1.1: Keine weiteren Perioden möglich

□

Wir können diesen Abschnitt mit dem folgendem zusammenfassendem Satz beenden:

Satz 1.1.5 *Sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion. Dann gilt:*

- *f hat höchstens 2 linear unabhängige Perioden*
- *Es existiert ein sogenanntes primitives Periodenpaar (p_1, p_2), wobei p_1 minimalen Betrag unter allen Perioden hat und $\Im(\frac{p_2}{p_1}) > 0$ gilt.*

1.1.1 Periodentorus und Fundamentalbereich

Wir können nun auf der Gaußschen Zahlenebene folgende Äquivalenzrelation einführen:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x \equiv y \pmod{p_1, p_2}$$

Wenn wir im folgenden Funktionen welche periodisch zu einem Gitter Ω sind betrachten, wird es nicht notwendig sein dies auf ganz $\mathbb{C}$ zu tun, es genügt eine kleinere Menge, ein sogenannter *Fundamentalbereich* (entsprechend beispielsweise dem Intervall $[0; 2\pi]$ bei trigonometrischen Funktionen im eindimensionalen Fall).

Definition 2 *Eine Menge $R \subset \mathbb{C}$ heißt Fundamentalbereich einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf den komplexen Zahlen wenn gilt:*

- *R ist offen in $\mathbb{C}$*
- $\forall z \in \mathbb{C} : \exists \zeta \in \bar{R} : \zeta \sim z$
- $\forall a, b \in R : a \not\sim b$

Wenn man nun ein Zahlengitter Ω mit den primitiven Perioden p_1, p_2 betrachtet, dann ist die Menge

$$\mathcal{F} := \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in]0; 1[\}$$

trivialerweise ein Fundamentalbereich der vom Gitter induzierten Äquivalenzrelation. Diesen speziellen Fundamentalbereich, sowie die Gebiete der Form

$$\mathcal{F}_a = \mathcal{F} + a = \{a + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in]0; 1[\},\ a \in \mathbb{C}$$

nennt man außerdem eine *Grundmasche* oder ein *Periodenparallelogramm* des Gitters Ω bezüglich der Basis (p_1, p_2)

Bildet man nun die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\sim$ bzw. $\mathbb{C}/\Omega$, erhält man als Äquivalenzklassen eines Punktes z

$$[z] = \{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta - z \in \Omega\}$$

Diese Faktorgruppe wird üblicherweise als *Periodentorus* bezeichnet. Denn wenn man bei einem Periodenparallelogramm jeweils die gegenüberliegenden Seiten identifiziert, so erhält man einen Torus (diese Tatsache kann man sich leicht mit Hilfe eines Blattes Papier veranschaulichen).

1.2 Die Sätze von Liouville

Definition 3 *Eine Funktion f heißt elliptische Funktion* $:\Longleftrightarrow$

- *f ist meromorph*

- *f ist doppeltperiodisch*

Bemerkung In vielen Büchern (z.B. in Rühs (1962)) wird oft anstelle des Periodenpaares (p_1, p_2) mit den, ebenfalls öfters auftretenden, *Halbperioden* (ω_1, ω_2) (also $2\omega_1 = p_1, 2\omega_2 = p_2$) gearbeitet. Die Bequemlichkeit auf der einen Seite keine $\frac{1}{2}p_1$ schreiben zu müssen erkauft man sich aber auf der anderen Seite mit zahlreichen $2\omega_1$. Welche Variante man vorzieht ist freilich Geschmackssache, ich habe die erste gewählt, da sie mir natürlicher erscheint.

Satz 1.2.1 *Seien f und g elliptische Funktionen bezüglich der Perioden p_1, p_2. Dann sind auch $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (falls $g \not\equiv 0$) und f' elliptische Funktionen bezüglich derselben Perioden.*
Die elliptischen Funktionen bezüglich fester Perioden bilden folglich einen Körper.

Beweis Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Periodizität.

□

Satz 1.2.2 (1. Satz von Liouville) *Sei f eine elliptische Funktion. Wenn f in $\bar{\mathcal{F}}$ keine Pole besitzt, dann ist f konstant.*

Beweis Da f in $\bar{\mathcal{F}}$ keine Pole besitzt muss sie in diesem (kompakten) Bereich beschränkt sein. Aufgrund der doppelten Periodizität kann f daher auch außerhalb von $\bar{\mathcal{F}}$ keine Pole besitzen und ist auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus dem *Satz von Liouville* (aus der klassischen Funktionentheorie) folgt nun direkt, dass f konstant sein muss.

□

Bemerkung Liouville bewies diesen Satz 1847 direkt und folgerte später aus ihm seinen berühmten allgemeineren Satz.

Satz 1.2.3 (2. Satz von Liouville) *Sei f eine elliptische Funktion. Dann besitzt f nur endlich viele Pole modulo Ω, und darüberhinaus gilt*

$$\sum_c Res_f(c) = 0,$$

wobei c ein beliebiges Repräsentantensystem von Polen durchläuft.

Beweis Die Polstellen einer meromorphen Funktion liegen diskret, innerhalb einer beschränkten Menge (z.B. $\bar{\mathcal{F}}$) können also nur endlich viele liegen. Die Summe können wir mit Hilfe des Residuensatzes durch $2\pi i \sum Res_f(c) = \int_{\partial\mathcal{F}_a} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ berechnen, wobei a so gewählt ist, dass auf dem Rand von $\mathcal{F}_a$ keine Pole von f liegen.

$$\int_{\partial\mathcal{F}_a} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \big(\int_a^{a+p_1} + \int_{a+p_1}^{a+p_1+p_2} + \int_{a+p_1+p_2}^{a+p_2} + \int_{a+p_2}^{a}\big) f(\zeta)\mathrm{d}\zeta =$$

Substituiert man nun im zweiten Integral $u = \zeta + p_1$ und im drittem $v = \zeta + p_2$ so erhält man:

$$= \int_a^{a+p_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_a^{a+p_2} f(u+p_1)\mathrm{d}u + \int_{a+p_1}^{a} f(v)\mathrm{d}v + \int_{a+p_2}^{a} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Wegen der Periodizität von f heben sich nun das erste und das dritte, bzw. das zweite und das vierte Integral auf.

□

Satz 1.2.4 (3. Satz von Liouville) *Sei f eine nichtkonstante elliptische Funktion. Dann nimmt f innerhalb eines Fundamentalbereiches jeden Wert $z \in \bar{\mathbb{C}}$ gleich oft an (mit Vielfachheit gezählt).*

Beweis Aus der Funktionentheorie bekannt ist das *Null- und Polstellen zählende Integral* (siehe z.B. Freitag and Busam (2000) S.170):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = \#\text{Nullstellen - }\#\text{Polstellen}$$

(jeweils in G, mit Vielfachheit gezählt). Die Anwendung davon auf die Funktion $g := f(z) - \zeta$ liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g'}{g} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'}{f-\zeta} = \\ &= \#\zeta\text{ -Stellen von } f \text{ - }\#\text{Polstellen von } f\end{aligned}$$

Da jede konstante Abbildung elliptisch ist, ist mit f auch g und nach 1.2.1 sogar $\frac{g'}{g}$ eine elliptische Funktion. Nach dem 2. Satz von Liouville und dem obigen gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z &= 0 = \\ &= \#\zeta\text{ -Stellen von } f \text{ - }\#\text{Polstellen von } f\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \#\zeta\text{ -Stellen von } f = \#\text{Polstellen von } f \quad \forall\zeta \in \mathbb{C}$$

□

Lemma 1.2.5 *Sei f eine im Gebiet G meromorphe Funktion, g in ganz G holomorph. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\mathrm{d}z = \sum_{a\in G: f(a)=0} g(a) - \sum_{\substack{b\in G \\ b \text{ Pol von } f}} g(b)$$

Beweis Wenn a eine k-fache Nullstelle von f ist, dann lautet die Laurententwicklung von $\frac{f'}{f}$ um a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Multiplikation mit der Taylorreihe von g, $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$, liefert

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) &= \big[\frac{k}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\big]\cdot\big[\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n\big] = \\ &= \frac{a_0 k}{z-a} + \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

Also ist

$$Res_{\frac{f'}{f}g}(a) = k\times a_0 = kg(a)$$

Das selbe Verfahren liefert bei einem Pol b k-ter Ordnung von f

$$Res_{\frac{f'}{f}g}(b) = -kg(b).$$

Aus dem Residuensatz folgt nun die Behauptung.

□

Satz 1.2.6 (4. Satz von Liouville) *Sei f eine elliptische Funktion mit den Nullstellen $a_1,\ldots,a_n$ und den Polen $b_1,\ldots,b_n$ (jeweils ein Repräsentantensystem). Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \equiv 0 \pmod{p_1,p_2}$$

Beweis Es sei $\mathcal{F}_a$ wie oben ein Fundamentalbereich ohne Pole von f am Rand. Nach 1.2.5 gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} z\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_a^{a+p_1} + \int_{a+p_1}^{a+p_1+p_2} + \int_{a+p_1+p_2}^{a+p_2} + \int_{a+p_2}^{a}\Big)\frac{f'(z)}{f(z)} z\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+p_1} \Big(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{(z+p_2)f'(z+p_2)}{f(z+p_2)}\Big)\mathrm{d}z + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+p_2} \Big(\frac{(z+p_1)f'(z+p_1)}{f(z+p_1)} - \frac{zf'(z)}{f(z)}\Big)\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big[\int_a^{a+p_1} -p_2\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z + \int_a^{a+p_2} p_1\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z\Big] = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\big[-p_2 \ln(f(z))|_a^{a+p_1} + p_1 \ln(f(z))|_a^{a+p_2}\big]
\end{aligned}$$

Wegen der Periodizität von f, können sich die Logarithmen an der oberen und an der unteren Grenze lediglich um $2k\pi i$ unterscheiden.

□

Motiviert durch den 3. Satz von Liouville erweist sich die folgende Definition als sinnvoll

Definition 4 *Sei f ein elliptische Funktion. Dann bezeichnet als die Ordnung von f die Anzahl der Polstellen von f (mit Vielfachheit gezählt) in einem Fundamentalbereich.*

Kapitel 2

Die Weierstraßschen Funktionen

2.1 Die $\wp$-Funktion

Die vier Sätze von Liouville geben uns wichtige Aussagen über die grundlegende Struktur elliptischer Funktionen. Dennoch haben wir bis jetzt, abgesehen vom Sonderfall der konstanten Abbildungen, noch keine konkrete derartige Funktion zu Gesicht bekommen. Zunächst wird man versuchen, sich eine möglichst einfache Funktion zu konstruieren. Einfach bezieht sich in diesem Fall auf die Ordnung der Funktion. Ordnung 0 haben lediglich die konstanten Funktionen (wegen des 1. Liouvillschen Satzes), als nächstes würde Ordnung 1 kommen. Jedoch:

Satz 2.1.1 *Es gibt keine elliptische Funktion 1. Ordnung.*

Beweis Angenommen f wäre eine solche Funktion. Dann hat f genau einen Pol erster Ordnung (b) und genau eine Nullstelle ebenfalls erster Ordnung (a) in $\mathcal{F}$. Nach dem vierten Liouvillschen Satz ist

$$a - b \equiv 0 \pmod{p_1, p_2} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p_1, p_2}$$

Und da sowohl a als auch b in $\mathcal{F}$ liegen, muss $a = b$ gelten. Widerspruch.

□

Also muss das einfachste Beispiel einer nichtkonstanten elliptischen Funktion von Ordnung 2 sei. Hier hat man noch die Wahl zwischen einem Doppelpol oder zwei Einzelpolen. Wir werden im folgenden eine Funktion zum ersteren Fall konstruieren. Am naheliegendsten ist freilich die Reihe

$$\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

zu betrachten, doch ist diese leider nicht konvergent. Denn für den Fall $\Omega = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, \omega = m + ni$ wird ist bei $z = 0$ $|\frac{1}{(z-\omega)^2}| = \frac{1}{|m+ni|^2} = \frac{1}{m^2+n^2}$ und die Divergenz folgt aus folgendem

Lemma 2.1.2

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \text{ konvergent } \iff \alpha > 1$$

Beweis Nach dem Integralkriterium von Cauchy ist die Summe genau dann konvergent wenn das Integral

$$I = \int_{x^2+y^2\geq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

konvergiert. Substitution auf Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2\alpha}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_1^\infty \frac{2\pi}{r^{2\alpha-1}} \mathrm{d}r$$

Daher gilt: I konvergent $\iff 2\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 1$

□

Unsere Suche nach einer Funktion vom obigen Typ ist aber nicht hoffnungslos, denn der *Satz von Mittag-Leffler* garantiert uns die Existenz einer meromorphen Funktion mit Doppelpolen genau in den vorgegebenen Gitterpunkten. Wir müssen uns nur noch auf die Suche nach konvergenzerzeugenden Summanden machen.

Lemma 2.1.3 *Die Reihe*

$$\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{|\omega|^\alpha}$$

ist konvergent für $\alpha > 2$.

Beweis Wir betrachten die reelle Funktion $f(x,y) = \frac{|xp_1+yp_2|^2}{x^2+y^2}$. Dies ist eine *homogene Funktion* (da $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$), daher liegen ihre Minima, falls vorhanden, auf der Einheitskreislinie S^1. S^1 ist kompakt, f muss als stetige Funktion auf ihr daher ein Minimum annehmen, nennen wir dieses δ. Da f nur echtpositive Werte annimmt, muss auch $\delta > 0$ gelten. Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) \geq \delta > 0 &\Rightarrow |mp_1 + np_2|^2 \geq \delta(m^2+n^2) \\ &\Rightarrow \frac{1}{|mp_1+np_2|^2} = \frac{1}{|\omega|^2} \leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{m^2+n^2} \\ &\Rightarrow \sum \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{\delta} \sum \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \end{aligned}$$

Für $\alpha > 2$ bildet die rechte Summe nach dem vorigen Lemma eine konvergente Majorante.

□

Lemma 2.1.4 *Die Reihe*

$$\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} (\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2})$$

ist kompakt konvergent auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Beweis Für $z \in B_r(0)$ (und $z \notin \Omega$) und $|\omega| \geq 2r$ (also für fast alle ω) gilt:

$$\begin{aligned}
&|z - 2\omega| \leq |z| + 2|\omega| \leq 3|\omega| \\
&|\frac{z}{\omega}| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - \frac{z}{\omega}| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - \frac{z}{\omega}|^2 \geq \frac{1}{4} \\
&\quad \Rightarrow |\omega - z|^2 \geq \frac{1}{4}|\omega|^2 \\
&\Rightarrow |\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{w^2}| = \frac{|z||z-2\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} \leq \frac{|z|3|\omega|}{|\omega|^2\frac{1}{4}|\omega|^2} = |z|\frac{12}{|\omega|^3} \leq \frac{12r}{|\omega|^3}
\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also absolut für alle $z \notin \Omega$.

□

Definition 5 *Die Funktion*

$$\wp(z) = \wp(z; p_1, p_2) = \wp(z; \Omega) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} (\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2})$$

heißt die Weierstraßsche $\wp$*-Funktion zum Gitter* Ω.

Bemerkung Die beiden Perioden bzw. das Gitter im Argument müssen nur angegeben werden wenn Verwechslungsgefahr besteht. Üblicherweise ist das Gitter allerdings fest gegeben, und man kommt mit „$\wp(z)$“aus.

Aus dem bereits gezeigten folgt, dass $\wp(z)$ eine meromorphe Funktionen mit einem Doppelpol genau in den Gitterpunkten von Ω ist. Die Periodizität ist allerdings noch zu klären.

Satz 2.1.5 *Die Weierstraßsche* $\wp$*-Funktion ist eine elliptische Funktion mit Ordnung 2 bezüglich des Gitters* Ω.

Beweis Die Periodizität direkt aus der Reihendarstellung zu zeigen ist sehr aufwendig, einfacher ist es den Umweg über die Ableitung

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

zu gehen. Nun gilt aber für beliebiges $\omega_0 \in \Omega$:

$$\wp'(z+\omega_0) = -2\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{(z-\omega+\omega_0)^3} = \wp'(z).$$

$\wp'$ ist also eine ungerade elliptische Funktion 3. Ordnung. Als Stammfunktion muss $\wp$ daher gerade sein. Die Periodizität von $\wp'$ überträgt sich nun direkt auf $\wp$ da gilt:

$$\forall\omega_0 \in \Omega : (\wp(z+\omega_0) - \wp(z))' = 0 \Rightarrow \wp(z+\omega_0) - \wp(z) = c \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$$
$$z = -\frac{1}{2}\omega_0 \Rightarrow \wp(\omega_0) - \wp(-\omega_0) = 0 = c$$

$\wp$ ist also periodisch bezüglich des Gitters Ω.

$\wp$ hat einen Doppelpol in allen Gitterpunkten (folgt unmittelbar aus der Definition durch die Reihe), ist also mindestens von Ordnung 2. Nachdem die Reihe allerdings für alle übrigen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, müssen das auch bereits alle Pole sein. Damit ist klar, dass die $\wp$-Funktion von Ordnung 2 sein muss.

□

2.1.1 Die historische Herleitung der $\wp$-Funktion

Bemerkung Die Notation $\prod'_n$ bedeutet, dass der Index alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der 0 durchläuft. Bei $\prod'_{n,m}$ werden alle ganzzahligen Paare bis auf $(0,0)$ durchlaufen. Entsprechendes gilt auch für die Summennotationen $\sum'_n$, $\sum'_{n,m}$.

Die obige direkte Einführung der $\wp$-Funktion ist zwar sehr schön und unkomopliziert, entspricht aber nicht der historischen Wahrheit.

Die folgende Konstruktion habe ich Weierstraß (1893) und Weierstraß (1915) entnommen.

Als erstes definiert Weierstraß

$$\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}$$

die *Weierstraßsche σ-Funktion*. Er erklärt diese Definition als die einfachste ganze Funktion, die in allen Gitterpunkten verschwindet. Der Ursprung dieses Produktes beim Versuch eine doppeltperiodische Funktion zu konstruieren, ist auch naheliegend. Es ist dies nämlich eine Verallgemeinerung der Produktdarstellung des (einfachperiodischen) Sinus:

$$\sin(\pi x) = \pi x\prod'_n(1-\frac{x}{n})e^{\frac{x}{n}}$$

Weierstraß vergrößerte in diesem Produkt die Nullstellenmenge von den ganzen Zahlen auf ein beliebiges Zahlengitter und fügte noch die konvergenzerzeugenden Faktoren $e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}$ (laut *Produktsatz von Weierstraß*) hinzu.

Im folgenden schreiben wir die Perioden stets als $\omega = mp_1 + np_2$.

Zunächst bildet man nur das Produkt für Faktoren mit $n = 0$ und dem führenden z, also

$$z\prod_m{}'[(1-\frac{z}{mp_1})e^{\frac{z}{mp_1}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2p_1^2}}] \tag{2.1}$$

Nun versucht man das Produkt aufzuteilen. Es gilt:

$$\prod_m{}' e^{\frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2p_1^2}} = e^{\sum'_m \frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2p_1^2}} = e^{\frac{z^2}{2p_1^2}\sum'_m \frac{1}{m^2}} =$$

$$= e^{\frac{z^2}{p_1^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}} = e^{\frac{z^2}{p_1^2}\frac{\pi^2}{6}}$$

Aus der Produktdarstellung des Sinus folgt:

$$\sin\frac{z\pi}{p_1} = \frac{z\pi}{p_1}\prod_m{}'[(1-\frac{z}{mp_1})e^{\frac{z}{mp_1}}] \tag{2.2}$$

Wir können (2.1) also als

$$\prod_m{}' e^{\frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2p_1^2}}\cdot z\prod_m{}'[(1-\frac{z}{mp_1})e^{\frac{z}{mp_1}}] = \\ = e^{\frac{1}{6}(\frac{z\pi}{p_1})^2}\cdot\frac{p_1}{\pi}\sin\frac{z\pi}{p_1} \tag{2.3}$$

schreiben, die Aufteilung des Produktes ist zulässig, da beide Einzelprodukte konvergieren.

Nun müssen wir noch die Faktoren im Produkt der σ-Funktion mit $n \neq 0$ hinzufügen. Ersetzt man in (2.2) z durch $z - np_2$, erhält man

$$\frac{p_2}{\pi}\sin\frac{(z-np_2)\pi}{p_1} = (z-np_2)\prod_m{}'[(1-\frac{z-np_2}{mp_1})e^{\frac{z-np_2}{mp_1}}] \tag{2.4}$$

Setzt man hier $z = 0$, folgt

$$-\frac{p_2}{\pi}\sin\frac{(np_2)\pi}{p_1} = -(np_2)\prod_m{}'[(1+\frac{np_2}{mp_1})e^{\frac{-np_2}{mp_1}}] \tag{2.5}$$

Dividiert man nun (2.4) durch (2.5), erhält man

$$-\frac{\sin\frac{(z-np_2)\pi}{p_1}}{\sin\frac{(np_2)\pi}{p_1}} = (1-\frac{z}{np_2})\prod_m{}'[(1-\frac{z}{mp_1+np_2})e^{\frac{z}{mp_1}}] \tag{2.6}$$

Der Faktor auf der rechten Seite ist schon fast das gewünschte, nur die Exponentialfunktion muss noch angepasst werden. Hierzu verwenden wir wieder die Formel (2.2). Mit ihrer Hilfe erhalten wir, durch Differentiation von $\ln \sin \frac{z\pi}{p_1}$,

$$\frac{\pi}{p_1} \cot \frac{z\pi}{p_1} = \frac{1}{z} + \sum_m{}' \left(\frac{1}{z - mp_1} + \frac{1}{mp_1}\right) \tag{2.7}$$

und durch Einsetzen von $z = -np_2$ hier in

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{p_1} \cot \frac{-np_2\pi}{p_1} &= -\frac{1}{np_2} + \sum_m{}' \left(\frac{1}{-mp_1 - np_2} + \frac{1}{mp_1}\right) \\
\frac{\pi}{p_1} \cot \frac{np_2\pi}{p_1} &= \frac{1}{np_2} + \sum_m{}' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{mp_1}\right) \\
e^{\frac{z\pi}{p_1} \cot \frac{np_2\pi}{p_1}} &= e^{\frac{u}{np_2}} \prod_m{}' e^{\left(\frac{z}{\omega} - \frac{z}{mp_1}\right)}.
\end{aligned}$$

Nun muss man noch diese Gleichung mit (2.6) multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \frac{(np_2 - z)\pi}{p_1}}{\sin \frac{(np_2)\pi}{p_1}} e^{\frac{z\pi}{p_1} \cot \frac{np_2\pi}{p_1}} &= (1 - \frac{z}{np_2}) e^{\frac{z}{np_2}} \prod_m{}' [(1 - \frac{z}{\omega}) e^{\frac{z}{\omega}}] = \\
&= \prod_m [(1 - \frac{z}{\omega}) e^{\frac{z}{\omega}}]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Damit wäre der erste Teil des Exponenten angepasst, jetzt fehlt noch das $\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}$. Wir können die rechte Seite von (2.8) als

$$\prod_m \left[(1 - \frac{z}{\omega}) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}\right] \cdot \prod_m e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}$$

schreiben. Wenn wir nun das Produkt über alle ganzzahligen n bilden, müssen wir uns noch von der Konvergenz von

$$\prod_n{}' \prod_m e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}} \tag{2.9}$$

überzeugen. Zunächst wollen wir das Produkt umschreiben. Leitet man (2.7) ab so ergibt sich:

$$\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{z\pi}{p_1}} = \frac{1}{z^2} + \sum_m{}' \frac{1}{(z - mp_1)^2}$$

Wie oben setzt man jetzt $z = -np_2$ und wendet die Exponentialfunktion an.

$$\begin{aligned}(\frac{\pi}{p_1})^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{np_2\pi}{p_1}} &= \frac{1}{(np_2)^2} + \sum_m{}' \frac{1}{(mp_1 + np_2)^2} \\ &= \sum_m \frac{1}{\omega^2} \\ e^{\frac{1}{2}(\frac{u\pi}{p_1})^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{np_2\pi}{p_1}}} &= \prod_m e^{\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}\end{aligned}$$

Wir können (2.8) jetzt umformen:

$$\begin{aligned}\prod_n{}' \prod_m e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}} = \prod_n{}' e^{-\frac{1}{2}z^2 \sum_m \frac{1}{\omega^2}} = \prod_n{}' e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{z\pi}{p_1}}{\sin \frac{np_2\pi}{p_1}}\right)^2} = \\ = e^{-\frac{1}{2}(\frac{z\pi}{p_1})^2 \sum_n{}' \frac{1}{\sin^2 \frac{np_2\pi}{p_1}}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Unter Benutzung der Eulerschen Formeln

$$\sin \frac{np_2\pi}{p_1} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{np_2\pi i}{p_1}} - e^{-\frac{np_2\pi i}{p_1}}\right) = \frac{1}{2i}\left(h^n - h^{-n}\right)$$

(mit h=$e^{\frac{p_2\pi i}{p_1}}$) können wir die Summe zu

$$\begin{aligned}\sum_n{}' \frac{1}{\sin^2 \frac{np_2\pi}{p_1}} = \sum_n{}' \frac{-4}{(h^n - h^{-n})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(h^n - h^{-n})^2} = \\ = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(1 - h^{2n})^2} = \qquad (2.11) \\ = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{-2n}}{(1 - h^{-2n})^2} \qquad (2.12)\end{aligned}$$

umschreiben. Nun konvergiert aber (2.11) sicherlich für $|h| < 1$ und (2.12) für $|h| > 1$. Der letzte „gefährliche“Fall, nämlich $|h| = 1$, kann jedoch ausgeschlossen werden. Sieht man sich die Definition von h an, dann kann dieses nur dann auf dem Einheitskreis liegen wenn $\frac{p_2}{p_1}$ ein Vielfaches von 2 ist. Die primitiven Perioden waren aber so gewählt, dass $\Im(\frac{p_2}{p_1}) > 0$ gilt. (2.9) ist also konvergent. Hinzumultiplikation des Termes für $n = 0$ liefert uns also

$$\sigma(z) = \frac{p_1}{\pi} e^{\frac{1}{6}\frac{z^2\pi^2}{p_1^2}} \sin \frac{z\pi}{p_1} e^{\frac{1}{2}\frac{z^2\pi^2}{p_1^2} \sum_n{}' \frac{1}{\sin^2 \frac{np_2\pi}{p_1}}} \prod_n{}' \left[\frac{\sin \frac{(np_2 - z)\pi}{p_1}}{\sin \frac{np_2\pi}{p_1}} e^{\frac{z\pi}{p_1} \cot \frac{np_2\pi}{p_1}}\right]$$

Eine letzte Umformung, jeweils die Zusammenfassung der Terme für n und $-n$, liefert uns schließlich das gewünschte Resultat

$$\sigma(z) = \frac{p_1}{\pi} e^{g\frac{z^2\pi^2}{p_1^2}} \sin\frac{z\pi}{p_1} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin\frac{(np_2-z)\pi}{p_1} \sin\frac{(np_2+z)\pi}{p_1}}{\sin^2\frac{np_2\pi}{p_1}} \right] \tag{2.13}$$

unter Benutzung der Konstante

$$g = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sum_n{}' \frac{1}{\sin^2\frac{np_2\pi}{p_1}}$$

Zur Erinnerung: Wir sind dabei eine doppeltperiodische Funktion zu konstruieren. Mit dieser Darstellung sind wir jetzt endlich in der Lage, σ auf Periodizität zu untersuchen.

Satz 2.1.6

$$\begin{aligned} \sigma(z+p_1) &= -e^{ap_1+b} && a,b \in \mathbb{C} \\ \sigma(z+p_2) &= -e^{\tilde{a}p_1+\tilde{b}} && \tilde{a},\tilde{b} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Bemerkung In alter Literatur (z.B. in Burkhardt (1906)) werden meromorphe Funktionen die der obigen Funktionalgleichung genügen auch als *elliptische Funktionen 3. Art* bezeichnet.

Beweis Die erste Gleichung ergibt sich unmittelbar durch einsetzen in (2.13), die zweite ist daraus jedoch nicht ersichtlich. Wenn man die Herleitung dieser Identität betrachtet, so erkennt man, dass es kein Problem darstellt die Positionen von p_1 und p_2 zu vertauschen. Man erhält also eine modifizierte Version von (2.13) aus der der zweite Teil des Satzes folgt.

□

Korolar 2.1.7

$$\sigma(z+\omega) = e^{k\omega+d}\sigma(z) \quad \forall\omega \in \Omega, \tag{2.14}$$

wobei k und d von ω abhängen dürfen.

Beweis Iterierte Anwendung des eben bewiesenen Satzes (mp_1+np_2) liefert

$$\sigma(z+\omega) = \pm e^{\tilde{k}\omega+\tilde{d}}\sigma(z) \quad \forall\omega \in \Omega,$$

Sollte auf der rechten Seite ein Minus auftreten, dann kann dieses jedoch in der Form $-1 = e^{i\pi}$ gebracht werden und zur konstanten $\tilde{d}$ hinzugezählt werden

□

Wir haben also trotz aller Anstrengungen mit der σ-Funktion leider keine periodische Funktion gefunden. Die Mühen waren aber dennoch nicht umsonst, aus den eben gezeigten Transformationseigenschaften lässt sich leicht eine periodische Funktion bestimmen. Um die Exponentialfunktion loszuwerden wendet man zunächst auf (2.14) den Logarithmus an

$$\ln(\sigma(z+\omega)) = \ln(\sigma(z)) + k\omega + d$$

und differenziert diesen Ausdruck

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z+\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(z) + k \tag{2.15}$$

Die logarithmische Ableitung der σ-Funktion bezeichnet man auch als die *Weierstraßsche ζ-Funktion*

$$\zeta(z) := \frac{\sigma'}{\sigma}(z)$$

(nicht zu verwechseln mit der *Riemannschen ζ-Funktion*). Sie ist einer elliptischen Funktion schon sehr nahe.

Bemerkung Meromorphe Funktionen, die sich bei Addition eines Gitterpunktes nur um eine Konstante ändern (zur Erinnerung: die Konstante k in (2.15) ist nur von ω, nicht jedoch von z abhängig) nennt man *quasiperiodisch* oder manchmal auch *Elliptische Funktionen 2. Art.*

Nun sind wir schon so gut wie am Ziel, nochmaliges differenzieren von (2.15) lässt die Konstante verschwinden.

Satz 2.1.8 *Die Funktion* $(\ln(\sigma))''(z)$ *ist elliptisch.*

Sucht man nur eine elliptische Funktion dann kann man sich jetzt bereits entspannt zurücklehnen, wir wollen allerdings noch den Kreis zum bereits besprochenen schließen.

Satz 2.1.9

$$(\ln(\sigma))''(z) = \zeta'(z) = -\wp(z)$$

Beweis Um die Aussage zu beweisen, müssen wir die Potenzreihe der

zweiten logarithmischen Ableitung der σ-Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned}
\ln(\sigma(z)) &= \ln\left(z \prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} (1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}}\right) = \\
&= \ln z + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left[\ln(1-\frac{z}{\omega}) + \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}\right] \\
\Rightarrow \zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left[-\frac{\omega}{\omega-z} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right] \\
\Rightarrow \zeta'(z) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left[\frac{\omega}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right] \\
&= -\wp(z)
\end{aligned}$$

□

Der eben beschriebene Weg zur Konstruktion der $\wp$-Funktion ist nur noch von historischer Bedeutung. In allen halbwegs aktuellen Büchern wird zuerst die $\wp$-Funktion direkt eingeführt und dann die ζ-Funktion als deren Stammfunktion und in weiterer Folge die σ-Funktion als deren logarithmische Stammfunktion (unter passenden Nebenbedingungen) bestimmt. Dieser Weg ist (wie wir gerade gesehen haben) wesentlich kürzer und effizienter und wurde bereits von Weierstraß selbst in späteren Veröffentlichungen gegangen.

Die Laurententwicklung der $\wp$-Funktion

Betrachtet man die Funktion $f(z) := \wp(z) - \frac{1}{z^2}$, so stellt man zunächst fest, dass f bei $Z = 0$ eine Nullstelle besitzt (durch einsetzen die Reihe). Da f ebenso wie $\wp$ eine gerade Funktion sein muss, muss die Laurententwicklung von f um 0 also von der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

sein. Die Bestimmung der Taylorkoeffizienten führt auf:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \\
n > 1 : f^{(n)}(z) &= (-1)^n (n+1)! \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^{n+2}} \\
\Rightarrow a_{2n} &= \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^{2(n+1)}}
\end{aligned}$$

Die Reihe

$$G_n := \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-n} \quad , n \geq 3$$

bezeichnet man als die *n-te Eisensteinreihe*. Klarerweise ist G_n für ungerades n gleich 0. Wir erhalten also die Laurententwicklung:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} G_{2(n+1)}(2n+1)z^{2n}$$

Die Halbwerte

Satz 2.1.10 $\wp'(c) = 0 \iff c \notin \Omega \wedge 2c \in \Omega$

Beweis $\Leftarrow$ Sei c eine komplexe Zahl welche die der Bedingung genügt.

$$\Rightarrow \wp'(c) = \wp'(c - 2c) = \wp'(-c) = -\wp'(c) \Rightarrow \wp'(c) = 0$$

$\Rightarrow$ Aus dem bereits bewiesen folgt, dass die Stellen

$$\frac{1}{2}p_1, \ \frac{1}{2}p_2, \ \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Nullstellen von $\wp'$ innerhalb von $\mathcal{F}$ sind. Da $\wp'$ aber nur von Ordnung 3 ist, kann es keine weiteren Nullstellen geben und keine Nullstelle kann mehrfach sein.

□

Definition 6 *Die Zahlen*

$$e_1 := \wp(\frac{p_1}{2}), \ e_2 := \wp(\frac{p_2}{2}), \ e_3 := \wp(\frac{p_1 + p_2}{2})$$

heißen die Halbwerte der $\wp$-Funktion

Satz 2.1.11 *Die Halbwerte sind paarweise verschieden und hängen nicht von der Basis (p_1, p_2) des Gitters ab.*

Beweis Da $\wp'(\frac{1}{2}p_1) = 0$ gilt, wird e_1 zweifach angenommen. $\wp$ ist eine elliptische Funktion der Ordnung 2, sie nimmt also jeden Wert genau zweimal an. Der „Vorrat“von e_1 ist also bereits ausgeschöpft, die selbe Überlegung führt natürlich auch für e_2 und e_3 zum Ziel. Die Unabhängigkeit ergibt sich aus der Definition der Halbwerte und aus dem vorigen Satz.

□

2.2 Der Körper der elliptischen Funktionen

Im folgenden bezeichnet f stets, sofern nicht anders angegeben, eine elliptische Funktion.

Wir haben bereits festgestellt, dass die elliptischen Funktionen zu einem vorgegebenen Gitter Ω einen Körper bilden, d.h. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier elliptischer Funktionen sind wieder elliptisch.

Definition 7 *Der Körper der elliptischen Funktionen zum Gitter Ω wird mit $K(\Omega)$ bezeichnet.*

Im folgenden werden wir feststellen, dass dieser Körper eine sehr einfache Struktur besitzt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} \to K(\Omega) \\ &c \mapsto \text{Konstante Abbildung mit Wert } c \end{aligned}$$

ist ein injektiver Homomorphismus, also eine Einbettung der komplexen Zahlen in $K(\Omega)$. Wir werden in Zukunft (sofern keine Verwechslungsgefahr besteht) die Zahl c mit der ihr entsprechenden konstanten Funktion identifizieren, wir können $\mathbb{C}$ also als Unterkörper von $K(\Omega)$ betrachten.

Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom. Dann ist die Komposition $(P(f))(z)$ eine elliptische Funktion die nur dann identisch 0 sein kann, wenn entweder $P \equiv 0$ gilt, oder f konstant ist. Entsprechendes funktioniert auch für die rationale Funktion $R = \frac{P}{Q}$ mit $Q \neq 0$ und die Zusammensetzung $R(f)$.

Lemma 2.2.1 *Seien R und S rationale Funktionen dann gilt*

$$R(f) = S(f) \Rightarrow R = S$$

Beweis Jede elliptische Funktion ist surjektiv, damit auch f. D.h.

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \zeta \in \mathbb{C} : f(\zeta) = z$$

. Und da $R(f)$ und $S(f)$ übereinstimmen, stimmen auch R und S an allen Stellen $z \in \mathbb{C}$ überein.

□

Die Abbildung $R \mapsto R(f)$ mit festem f stellt also einen Isomorphismus vom Körper der rationalen Funktionen auf einen Unterkörper von $K(\Omega)$ dar. Diesen Unterkörper wollen wir im folgenden mit

$$\mathbb{C}(f) = \{g | g = R(f),\ R \text{ rationale Funktion}\}$$

bezeichnen. Wir werden jetzt Schritt für Schritt die Struktur der Funktionen aus $K(\Omega)$ bestimmen, beginnend mit dem einfachsten Fall.

Satz 2.2.2 *Sei $f \in K(\Omega)$ gerade und seien alle Polstellen von f in Ω enthalten. Dann ist f als Polynom in der $\wp$-Funktion darstellbar d.h.:*

$$f(z) = a_n \wp^n(z) + a_{n-1}\wp^{n-1}(z) + \dots a_1\wp(z) + a_0$$

Der Grad dieses Polynoms ist die halbe Ordnung von f, also $n = \frac{1}{2}Ord(f)$.

Beweis Falls f konstant ist, dann ist die Aussage trivial, wir können also annehmen, dass $f \not\equiv c$ gilt. 0 ist Pol von f, die Laurententwicklung lautet also

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

Der Beweis kann nun mit Induktion nach n geführt werden.

$$\begin{aligned}
\underline{n = 1:} \quad & f(z) = a_{-2}\frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + \dots \\
& \Rightarrow f(z) - a_{-2}\wp(z) \text{ ist eine elliptische Funktion ohne Pole} \\
& \Rightarrow f(z) = a_{-2}\wp(z) + c \\
\underline{n \Rightarrow n+1:} \quad & f(z) = a_{-2(n+1)}\frac{1}{z^2(n+1)} + a_{-2n}\frac{1}{z^{2n}} \\
& \Rightarrow f(z) - a_{-2(n+1)}\wp^{n+1}(z) \text{ hat Ordnung } \leq 2n \\
& \Rightarrow f(z) = a_{-2(n+1)}\frac{1}{z^2(n+1)} = P(\wp(z))
\end{aligned}$$

wobei P Polynom vom Grad n ist.

□

Wir bleiben noch beim Spezialfall der geraden Funktionen, lassen nun aber beliebige Pole zu.

Satz 2.2.3 *Jeder gerade elliptische Funktion ist als rationale Funktion in der $\wp$-Funktion darstellbar, also $f(z) = R(\wp(z))$.*

Beweis Sei a ein Pol der nicht in Ω enthalten ist. Dann gibt es ein N, so dass $(\wp(z)-\wp(a))^N f(z)$ in a eine hebbare Singularität besitzt. Da f aber nur endlich viele nichtäquivalente Pole besitzt und damit auch nur endlich viele außerhalb von Ω (bezeichnet durch $a_1, a_2, \dots, a_l$) gilt, dass die Funktion

$$f(z)\prod_{k=1}^{l}(\wp(z) - \wp(a_k))^{N_k}$$

keine Pole außerhalb von Ω besitzt. Nach dem letzten Satz gilt:

$$\begin{aligned}
f(z)\prod_{k=1}^{l}(\wp(z) - \wp(a_k))^{N_k} &= P(\wp(z)) \\
\Rightarrow f(z) = \frac{P(\wp(z))}{f(z)\prod_{k=1}^{l}(\wp(z) - \wp(a_k))^{N_k}} &=: R(\wp(z))
\end{aligned}$$

□

Korolar 2.2.4

$$\{f|f \in K(\Omega), f \text{ gerade}\} = \mathbb{C}(\wp)\tilde{=}\{R|R \text{ rational}\}$$

Die Gestalt aller geraden elliptischen Funktionen ist damit geklärt. Als nächstes kommen die ungeraden an die Reihe. Deren Aussehen lässt sich allerdings direkt aus dem bereits Bewiesenen ableiten, wie folgender Satz zeigt.

Satz 2.2.5 *Sei f eine ungerade elliptische Funktion zum Gitter Ω. Dann existiert eine rationale Funktion R, so dass $f = R(\wp)\wp'$ gilt.*

Beweis Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist gerade, insbesondere also $\frac{f}{\wp'}$. Diese gerade elliptische Funktion lässt sich also als rationale Funktion in der $\wp$-Funktion darstellen, Multiplikation mit $\wp'$ liefert das gewünschte.

□

Nun müssen wir das Bewiesene nur noch zusammenfügen, und erhalten so den

Satz 2.2.6 (Struktursatz für $K(\Omega)$) *Sei $f \in K(\Omega)$*

$$\Rightarrow \exists R, S \text{ rationale Funktionen} : f = R(\wp) + \wp' S(\wp)$$

Beweis Jede beliebige Funktion f kann in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$$

geschrieben werden, also als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

□

Korolar 2.2.7

$$K(\Omega) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\wp'$$

2.2.1 Die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion

Der eben bewiesene Struktursatz ist nicht nur wunderbar einfach, besonders schön ist, dass der Beweis höchst konstruktiv ist. Als Anwendung kann man also z.B. versuchen, eine Darstellung der Funktion $\wp'^2(z)$ zu finden. Dies ist eine gerade Funktion der Ordnung 6 deren Pole komplett innerhalb von Ω liegen. Sie muss daher eine Darstellung als Polynom 3. Grades in der

$\wp$-Funktion besitzen. Um diese Darstellung zu finden, betrachten wir die Laurententwicklungen von $\wp, \wp^2, \wp^3, \wp'$ und $\wp'^2$.

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_5 z^4 + \dots \\
&\overset{\text{differenzieren}}{\Longrightarrow} \wp(z)' = -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_5 z^3 + \dots \\
&\overset{\text{quadrieren}}{\Longrightarrow} \wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots \\
&\overset{\text{quadrieren von } \wp}{\Longrightarrow} \wp(z)^2 = z^{-4} + 6G_4 + 10G_5 z^2 + \dots \\
&\overset{\text{Multiplikation}}{\Longrightarrow} \wp(z)^3 = z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots
\end{aligned}$$

Nun können wir das induktive Beweisverfahren des letzten Abschnittes Schritt für Schritt nachbauen

$$\begin{aligned}
\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 &= -60G_4 z^{-2} - 140G_6 + \dots \\
\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) &= -140G_6 + \dots
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine polfreie elliptische Funktion, also eine Konstante welche gleich $-140G_6$ sein muss.

Satz 2.2.8 (Differentialgleichung der $\wp$-Funktion) *Mit den Festsetzungen*

$$\begin{aligned}
g_2 &= 60G_4 = 60 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-4} \\
g_3 &= 140G_6 = 140 \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-6}
\end{aligned}$$

gilt:

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich, dass jede beliebige Ableitung der $\wp$-Funktion durch eine algebraische Gleichung in $\wp$ und $\wp'$ ausgedrückt werden kann. Differenzieren und einfache Umformungen liefern etwa

$$\begin{aligned}
\wp''(z) &= \frac{1}{2}(12\wp(z)^2 - g_2) \\
\wp''(z) &= 12\wp(z)\wp'(z) \\
\wp^{(4)}(z) &= 120\wp(z)^3 - 18g_2\wp(z) - 12g_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Satz 2.2.9 *Die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion lässt sich in der Form*

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

schreiben, wobei e_1, e_2 und e_3 die Halbwerte der $\wp$-Funktion sind

Beweis Man kann die rechte Seite der Differentialgleichung als Polynom $p(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ schreiben, dieses muss genau an den Halbwerten verschwinden.

□

Bemerkung Die Diskriminante des Polynoms $4x^3 - g_2x - g_3$ ist $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$. Da die Halbwerte paarweise voneinander verschieden sind, muss sie ungleich 0 sein, eine Tatsache die im zweiten Teil von großer Bedeutung sein wird.

2.2.2 Das Additionstheorem

Satz 2.2.10 (Additionstheorem der Weierstraßschen $\wp$-Funktion) *Seien u_1 und u_2 komplexe Zahlen mit den Einschränkungen:*

- $u_1, u_2 \notin \Omega$
- $u_1 \not\equiv u_2 \pmod{\Omega}$
- $u_1 \not\equiv -u_2 \pmod{\Omega}$

Dann gilt:

$$\wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2 - \wp(u_1) - \wp(u_2)$$

Beweis Betrachten wir die Parametrisierung $(x, y) = (\wp(z), \wp'(z))$ so liefert uns die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion die kubische Kurve

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{2.16}$$

in der komplex-zweidimensionalen Ebene. Wir suchen nun die Verbindungsgerade der Punkte $P_1 = (\wp(u_1), \wp'(u_1))$ und $P_2 = (\wp(u_2), \wp'(u_2))$ in dieser Ebene, d.h man ermittelt Zahlen a, b so, dass

$$\begin{aligned}\wp'(u_1) &= a\wp(u_1) + b\\ \wp'(u_2) &= a\wp(u_2) + b\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden Zeilen erhält man:

$$\begin{aligned}\wp'(u_1) - \wp'(u_2) &= a(\wp(u_1) - \wp(u_2))\\ a &= \frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\end{aligned}$$

Aufgrund der 2. und 3. einschränkenden Bedingung für u_1 und u_2 sind die Werte von $\wp(u_1)$ und $\wp(u_2)$ sicherlich verschieden, die Zahlen a und b existieren also, die Punkte P_1, P_2 liegen auf der Geraden

$$y = ax + b \tag{2.17}$$

bzw. implizit $y - ax - b = 0$. Setzt man nun für (x, y) wieder $(\wp(z), \wp'(z))$ ein, so wird dies zu $\wp'(z) - a\wp(z) - b$. Dies ist eine elliptische Funktion 3. Ordnung mit Nullstellen in u_1, u_2 und Polen nur in den Gitterpunkten. Nach dem 4. Satz von Liouville muss für die fehlende dritte Nullstelle also

$$u_3 \equiv -(u_1 + u_2) \pmod{\Omega}$$

gelten, der Punkt $P_3 = (\wp(u_3), \wp'(u_3))$ muss ebenfalls auf der Geraden (2.17) liegen. Schneidet man nun die Gerade(2.17) mit der Kurve (2.16) so erhält man

$$4x^3 - g_2x - g_3 - (ax + b)^2 = 0$$

Als algebraische Gleichung betrachtet muss dies drei Nullstellen haben, diese sind klarerweise $\wp(u_1), \wp(u_2), \wp(u_3)$. Es gilt also die Faktorisierung

$$4x^3 - g_2x - g_3 - (ax + b)^2 = 4(x - \wp(u_1))(x - \wp(u_2))(x - \wp(u_3))$$

Der Vergleich des Koeffizienten von x^2 liefert

$$-a^2 = -4(\wp(u_1) + \wp(u_2) + \wp(u_3)),$$

Einsetzen der berechneten Werte von a und u_3 liefert uns schließlich die Behauptung.

□

Korolar 2.2.11 (Verdoppelungsformel)

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right) - 2\wp(z) = \frac{(\wp^2(z) + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp(z)}{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}$$

Beweis Setzt man im Additionstheorem $z := u_1$ und bildet den Limes $\lim_{u_2 \to z}$ dann erhält man den ersten Teil der Formel (in der Klammer steht, nach Erweiterung mit $(z - u_2)$, der Quotient zweier Differentialquotienten). Will man die zweite Ableitung der $\wp$-Funktion vermeiden, so kann man noch die Differentialgleichung einsetzen, und erhält so den zweiten Ausdruck.

□

2.2.3 Konstruktion elliptischer Funktionen

Bis jetzt haben wir Eigenschaften bestehender elliptischer Funktionen untersucht, in diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Konstruktion elliptischer Funktionen mit gewissen Eigenschaften beschäftigen. Konkret wird die die Frage beantwortet, wann eine elliptische Funktion zu vorgegebenen Null- und Polstellen existiert, der Existenzbeweis wird darüberhinaus konstruktiv geführt.

Ein beliebter Trick in der Theorie der elliptischen Funktionen ist es, Analogien zu den (zumindest ein bisschen) verwandten rationalen Funktionen zu ziehen.

Betrachtet man eine beliebige rationale Funktion, so lässt sich diese in der Form

$$f(z) = c\frac{(z-a_1)^{\nu_1}(z-a_2)^{\nu_2}\dots(z-a_n)^{\nu_n}}{(z-b_1)^{\mu_1}(z-b_2)^{\mu_2}\dots(z-b_m)^{\mu_m}} \quad ,\nu_i,\mu_j \in \mathbb{N}^*$$

darstellen. Führt man sich vor Augen, dass jeder Nullstelle a_i eine Polstelle in $z=\infty$ und umgekehrt jedem Pol b_j eine Nullstelle entspricht, so erkennt man, dass jede rationale Funktion auf der Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}}$ gleich viele Nullstellen und Polstellen besitzt. Diese Bedingung ist selbstverständlich auch hinreichend für die Existenz einer entsprechenden rationalen Funktion.

Wie sieht dies bei den elliptischen Funktionen aus? Da wir periodische Funktionen betrachten, müssen wir das Verhalten bei $z=\infty$ außen vor lassen, übrig bliebe also die Bedingung *f hat in $\mathbb{C}$ gleich viele Pole wie Nullstellen wenn man diese jeweils mit Vielfachheit zählt.*

Dies ist sicher notwendig (wegen des dritten Satzes von Liouville), hinreichend kann sie jedoch nicht sein (sonst müsste es eine Funktion erster Ordnung geben). Betrachtet man den 4. Liouvillschen Satz dann erkennt man eine stärkere notwendige Bedingung, nämlich

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{\Omega}$$

Dass dieses darüberhinaus auch hinreichend ist, wurde 1826 von Abel bewiesen.

Satz 2.2.12 (Abelsches Theorem) *Zu den vorgegebenen Nullstellen*

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

und Polstellen

$$b_1, b_2, \dots b_n$$

existiert dann und nur dann eine elliptische Funktion zum Gitter Ω wenn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{\Omega}$$

gilt, und die a_i und die b_k paarweise nicht kongruent sind.

Beweis Es bleibt noch zu beweisen, dass die Bedingung hinreichend ist. Betrachten wir noch einmal die rationalen Funktionen, dann sieht man, dass diese aus Faktoren $(z-a)$ aufgebaut sind. Diese Linearfaktoren haben die Eigenschaft, genau in a eine Nullstelle zu besitzen. Bei der Konstruktion einer elliptischen Funktion benötigt man jetzt ein entsprechendes Pendant mit Nullstellen in allen zu a äquivalenten Punkten. Eine derartige Funktion kennen wir aber bereits, nämlich die Weierstraßsche σ-Funktion. Die Funktion

$$f(z) := \frac{\prod_{k=1}^{n} \sigma(z-a_k)}{\prod_{k=1}^{n} \sigma(z-b_k)}$$

hat auf jeden Fall das gewünschte Null- und Polstellenverhalten. Wie ist es aber um die Periodizität bestellt? Wir haben bereits gezeigt, dass die σ-Funktion die Transformationseigenschaft $\sigma(z+\omega) = e^{c_\omega z + d_\omega}\sigma(z)$ (mit von z unabhängigen Zahlen c_ω, d_ω) besitzt. Daher ist für beliebige Gitterpunkte ω

$$\begin{aligned} f(z+\omega) &= \frac{\prod_{k=1}^{n} e^{c_\omega(z-a_k)+d_\omega}\sigma(z-a_k)}{\prod_{k=1}^{n} e^{c_\omega(z-b_k)+d_\omega}\sigma(z-b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} e^{-c_\omega a_k)}\sigma(z-a_k)}{\prod_{k=1}^{n} e^{-c_\omega b_k}\sigma(z-b_k)} = \\ &= \frac{e^{-c_\omega \sum_{l=1}^{n} a_k} \prod_{k=1}^{n} \sigma(z-a_k)}{e^{-c_\omega \sum_{l=1}^{n} b_k} \prod_{k=1}^{n} \sigma(z-a_k)} = \frac{e^{-c_\omega \sum_{l=1}^{n} a_k}}{e^{-c_\omega \sum_{l=1}^{n} b_k}} f(z). \end{aligned}$$

Aufgrund der Kongruenzbedingung muss der Bruch gleich 1 sein (da wir die Repräsentanten der Null- und Polstellen o.B.d.A. so wählen können, dass $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ gilt, und nicht nur „$\equiv$“), daher gilt

$$f(z+\omega) = f(z)$$

□

Teil II

Modulfunktionen

Kapitel 3

Die Modulgruppe

3.1 Äquivalente Gitter

Bis jetzt haben wir elliptische Funktionen zu einem bestimmten starren Gitter Ω betrachtet. Es liegt jedoch auf der Hand, dass die elliptischen Funktionen beispielsweise der Gitter

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad 2\mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z}$$

sich nicht sehr stark von einander unterscheiden. Dies führt dazu, Äquivalenzklassen von Gittern zu untersuchen.

Definition 8 *Zwei Gitter Ω, Ω' in der komplexen Zahlenebene heißen genau dann äquivalent, wenn sie durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen. D.h.:*

$$\Omega \sim \Omega' : \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \Omega = \lambda\Omega'$$

Satz 3.1.1 *Die oben definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis Trivial.

□

Satz 3.1.2 *Die elliptischen Funktionen zweier äquivalenter Gitter Ω, Ω' entsprechen einander eindeutig. D.h.:*

$$K(\Omega) = K(\Omega')$$

Beweis Sei $\Omega = \lambda\Omega'$. Dann entspricht jeder Funktion $f \in K(\Omega')$ die Funktion $g(z) := f(\lambda z) \in K(\Omega)$ und umgekehrt.

□

Da stets die Umformung

$$p_1\mathbb{Z} + p_2\mathbb{Z} = p_1(\mathbb{Z} + \frac{p_2}{p_1}\mathbb{Z})$$

möglich ist, ist jedes Gitter (p_1, p_2) äquivalent zu einem der Form $(1, \tau)$ mit $\tau := \frac{p_2}{p_1}$. Mehr noch: wenn wir uns erinnern, wie die Basisperioden im ersten Abschnitt gewählt wurden($\Im(\frac{p_2}{p_2}) > 0$), kann man sogar stets $\tau \in \mathbb{H}$ erreichen.

Es stellt sich also die Frage:

Wann sind zwei Gitter der Form $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ äquivalent?

Bemerkung Diese Frage mag auf den ersten Blick trivial scheinen. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass die Basis $(1, \tau)$ eines Gitters alles andere als eindeutig ist. So sind z.B. die von den Basen $(1, i)$ und $(1, 1+i)$ erzeugten Gitter sogar gleich und damit insbesondere auch äquivalent.
Laut Definition sind die Gitter genau dann äquivalent, wenn

$$\exists\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} = \lambda(\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z})$$

gilt. Um eine Kriterium dafür anzugeben, benötigen wir zuerst das folgende

Lemma 3.1.3

$$\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \subset \lambda(\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}) \iff \exists M \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix}\tau'\\1\end{pmatrix}$$

Beweis $\Leftarrow$ Da $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \subset \lambda(\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z})$ gilt, muss insbesondere

$$\tau = \lambda(a\tau' + b)$$
$$1 = \lambda(c\tau' + d)$$

gelten. Also ist

$$\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\tau'\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nun gilt nach Voraussetzung

$$\tau = \lambda(a\tau' + b)$$
$$1 = \lambda(c\tau' + d).$$

Daher gilt für jeden Gitterpunkt aus $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$:

$$x + y\tau = x\lambda(c\tau' + d) + y\lambda(a\tau' + b) = \lambda((xd + yb) + (xc + ya)\tau')$$

□

Sollen die beiden Gitter gleich sein, dann muss auch die umgekehrte Inklusion gelten, die dann gleichbedeutend ist mit

$$\lambda \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fügt man das zusammen, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} = \lambda(\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}) \iff \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} &= N \cdot M \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow N \cdot M &= I \\ \Rightarrow 1 = det(N \cdot M) &= det(N)det(M) \\ \Rightarrow det(N) = det(M) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Dividiert man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \tau &= \lambda(a\tau' + b) \\ 1 &= \lambda(c\tau' + d), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

Der Übergang von τ auf ein äquivalentes ist also eine spezielle *Möbiustransformation*. Die Untersuchung des Imaginärteils ergibt:

$$\begin{aligned} \Im(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \frac{1}{2i}(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} - \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d}) = \frac{1}{2i}\frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d) - (a\bar{\tau} + b)(c\tau + d)}{|c\tau + d|^2} = \\ = \frac{(ad - bc)(\tau - \bar{\tau})}{2i|c\tau + d|^2} = \frac{D\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}, \end{aligned}$$

wobei $D = (ad - bc)$ die Determinante ist. Da wir aber fordern, dass τ jedenfalls in der oberen Halbebene liegt, muss D positiv sein. Wir haben aber bereits bestimmt, dass die Determinanten der Transformationsmatrizen nur ± 1 sein können, es bleibt also als einzige Möglichkeit $+1$ übrig. Zusammenfassend erhalten wir also:

Satz 3.1.4 *Zwei Gitter $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn es eine ganzzahlige Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\tau' = M\tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ gibt, die darüberhinaus Determinante 1 hat.*

Das Äquivalentproblem ist damit gelöst, wir sind dabei auf einen speziellen Typ von Matrizen gestoßen, die Abbildungen der oberen Halbebene auf sich induzieren.

Definition 9 *Die Menge* $\Gamma = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | ad - bc = 1\}$ *heißt die Elliptische Modulgruppe*

Ob Γ tatsächlich eine Gruppe ist, bleibt freilich noch zu beweisen:

- Das Produkt zweier ganzzahliger Matrizen ist natürlich wieder eine ganzzahlige Matrix. Da die Determinantenbildung multiplikativ ist, bleibt auch diese unverändert 1. Γ ist also bezüglich der Multiplikation abgeschlossen, assoziativ ist sie ohnehin.
- Die Einheitsmatrix hat Determinante 1. Γ hat also ein neutrales Element
- Die Inverse von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ liegt ebenfalls in Γ, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bemerkung Die elliptische Modulgruppe Γ ist die aus der linearen Algebra bekannte*Special Linear Group* $SL(2, \mathbb{Z})$.

3.2 Eigenschaften der Modulgruppe

Bemerkung Da unser eigentliches Interesse nicht den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ an sich, sondern den von ihnen induzierten Abbildungen $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, den sogenannten *Elliptischen Modultransformationen*, gilt, wollen wir im folgenden die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{smallmatrix}\right)$ (welche derselben Abbildung entsprechen) miteinander identifizieren.

Satz 3.2.1 *Die elliptische Modulgruppe* Γ *wird von den beiden Matrizen*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Jede Matrix $A \in \Gamma$ *besitzt eine Darstellung* $A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots T^{n_{k-1}} S T^{n_k}$. *mit ganzzahligen* n_i

Bemerkung Diese Darstellung ist nicht eindeutig.
Beweis Zuerst wollen wir festhalten, dass die Potenzen von S und T die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$S^2 = -I, \qquad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ersteres ist trivial, zweiteres kann leicht mittels Induktion nachgewiesen werden). Wir können o.B.d.A $c \geq 0$ annehmen (da die einmalige Multiplikation mit $S^2 = -I$ einen Vorzeichenwechsel bewirkt). Nun gehen wir mittels vollständiger Induktion nach d vor:
$\underline{c = 0:}$ Wieder können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq 0$ gilt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} == T^b$$

$\underline{c = 1:}$

$$A = \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= T^a S T^d$$

$\underline{c \Rightarrow c+1:}$ Da $ad - bc = 1$ ist, müssen c und d teilerfremd sein. Division ergibt also

$$d = cq + r, \quad 0 < r < c.$$

Also gilt:

$$AT^{-q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix} -aq+b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}$$

Da r aber echt kleiner als c ist, können wir auf diese Matrix nun die Induktionsvoraussetzung anwenden.

□

Bemerkung Auf die Modultransformationen umgelegt bedeutet das, dass alle Abbildungen $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$ sich aus den beiden Funktionen $z \mapsto z + 1$ und $z \mapsto -\frac{1}{z}$ zusammensetzen lassen.

3.2.1 Ein Fundamentalbereich

Definition 10 *Eine Menge $R \subset \mathbb{H}$ heißt Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe Γ wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- *Je zwei verschieden Punkte aus R sind nicht äquivalent:*

$$\forall x, y \in R : x \neq y \Rightarrow x \not\sim y$$

- *Jeder Punkt der oberen Halbebene kann mittels einer Modultransformation in den Abschluss von R übergeführt werden bzw. der Durschnitt jeder Bahn mit $\bar{R}$ ist nicht leer, mit dem Inneren von R höchstens einelementig:*

$$\forall \tau \in \mathbb{H} \ : \ \exists \tau' \in \bar{\mathbb{R}} : \tau \sim \tau'$$

Es stellt sich natürlich die Frage wie ein derartiger Fundamentalbereich aussieht. Antwort gibt der folgende

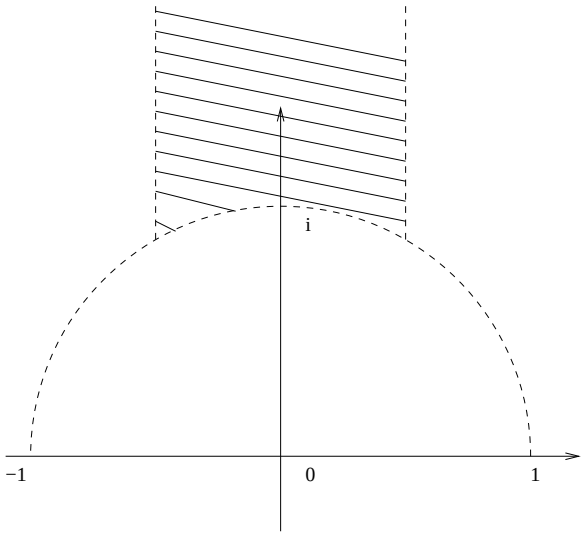


Abbildung 3.1: Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe

Satz 3.2.2 *Die Menge*

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} || \tau| > 1, -\frac{1}{2} < \Re(\tau) < \frac{1}{2}\}$$

ist ein Fundamentalbereich. (siehe Figur 3.2.1)

Beweis Zunächst zeigen wir, dass je zwei Punkte aus $\mathcal{F}$ nicht äquivalent sind:
Angenommen es gelte $\tau, \tau' \in \mathcal{F}, \tau' = A\tau = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\tau, A \in \Gamma$. Wir wissen bereits, dass $\Im(\tau') = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ gilt. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $c \neq 0$:

$$|c\tau + d|^2 = (c\tau + d)(c\bar{\tau} + d) = c^2|\tau|^2 + cd(\tau + \bar{\tau}) + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| =$$
$$= (|c| - |d|)^2 + |cd| \begin{cases} = |c|^2 \geq 1 & , d = 0 \\ \geq |cd| \geq 1 & , d \neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Im(\tau') < \Im(\tau)$$

Nun ist aber $\tau = A^{-1}\tau = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)\tau$ und daher

$$\Im(\tau) = \frac{\Im(\tau')}{|-c\tau' + a|^2} < \Im(\tau')$$

Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. $c = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau' = \tau \pm b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow A = I$$

τ und τ' sind also gleich.
Bleibt der zweite Teil: Es ist nun ein beliebiges $\tau' \in \mathbb{H}$ gegeben, wir bestimmen uns dazu ein äquivalentes $\tau \in \mathcal{F}$. Zunächst suchen wir uns zum Gitter $\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ zwei Basisperioden (p_1, p_2) und zwar nach demselben Prinzip wie bereits in ersten Abschnitt. Diese Perioden erfüllen dann die Ungleichungen

$$|p_1| \leq |p_2|, \quad |p_1 + p_2| \geq |p_2|, \quad |p_1 - p_2| \geq |p_2| \tag{3.1}$$

die letzten beiden deshalb, weil $p_1 \pm p_2$ auch Gitterpunkte sind und p_2 unter den von p_1 linear unabhängigen minimal gewählt wurde. Da die Gitter die von $(1, \tau')$ und (p_1, p_2) aufgespannt werden, gleich und damit natürlich auch äquivalent sind, existiert eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante eins, so dass $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt. Setzt man jetzt $\tau := \frac{p_2}{p_1}$, dann ist dieses wegen $\frac{p_2}{p_1} = M\tau'$ zu τ' äquivalent und es gilt (jeweils nach Division der Ungleichungen aus (3.1) durch $|p_1|$:

$$|\tau| \geq 1, \quad |\tau \pm 1| \geq |\tau| \iff \Re(\tau) \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$$

□

Kapitel 4

Modulfunktionen und -formen

4.1 Invariante Ausdrücke

4.1.1 Eisensteinreihen

Im ersten Abschnitt sind wir, im Zuge der Laurententwicklung der $\wp$-Funktion auf die Eisensteinreihen vom Gewicht k

$$G_k = \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}, \quad k \geq 3$$

gestoßen. Diese sind, genau genommen, Funktionen des betrachteten Gitters, also $G_k(\Omega)$. Mit der Festlegung

$$G_k(\tau) := G_k(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$$

erhält man eine Funktion von der oberen Halbebene in die komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} G_k : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ \tau &\mapsto \sum{}' \frac{1}{(m + n\tau)^k} \end{aligned}$$

Dieses Definition weckt die (trügerische) Hoffnung, der Ausdruck ändere sich beim Übergang zu einem äquivalenten Gitter nicht; man sieht jedoch leicht, dass

$$G_k(\lambda\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{(\lambda\omega)^k} = \lambda^{-k} G_k(\Omega)$$

gilt. Wir sind also auf Funktionen mit einem speziellen Transformationsverhalten gestoßen.

Zunächst aber wollen wir einen für alle äquivalenten Gitter invarianten Ausdruck suchen. Dazu beweisen wir als erstes, dass die Eisensteinreihen analytische Funktionen auf der oberen Halbebene sind.

Lemma 4.1.1 *Für die kompakte Menge $K \subset \mathbb{H}$ mit $K = \{z \in \mathbb{H} \mid |\Re(z)| \leq \delta, \Im(z) \geq \delta'\}$ mit beliebigen $\delta, \delta' > 0$ gilt:*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}, \tau \in K : |x + y\tau| \geq \varepsilon |x + iy| = \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beweis Für $(x, y) = (0, 0)$ ist die Ungleichung trivial, diesen Fall können wir im folgenden also ausschließen. Wir können x und y sogar noch weiter einschränken, nämlich $x^2 + y^2 = 1$ verlangen (da die Ungleichung beim Übergang $(x, y) \to (tx, ty)$ unverändert bleibt. Die Ungleichung vereinfacht sich daher zu

$$|x + y\tau| \geq \varepsilon.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |x + y\tau|^2 &= (x + y\Re(\tau))^2 + (y\Im(\tau))^2 \geq (x + y\Re(\tau))^2 + (y\delta')^2 = \\ &= |x + y(\Re(\tau) + i\delta')|^2 \end{aligned}$$

Die Funktion

$$f(x, y, c) = |x + y(c + i\delta')|$$

ist stetig, nimmt also auf der kompakten Menge, definiert durch

$$x^2 + y^2 = 1, \ |c| \leq \delta,$$

ein positives Minimum ε an.

□

Wir können die Eisensteinreihen also gleichmäßig in K abschätzen:

$$\sum{}' \frac{1}{(m + n\tau)^k} \leq \sum{}' \frac{1}{(\varepsilon(m + in))^k} = \varepsilon^{-k} G_k(i)$$

Da jede kompakte Teilmenge in $\mathbb{H}$ von einem Bereich K umschlossen wird, ist die Reihe kompakt konvergent und es gilt:

Satz 4.1.2 *Die Eisensteinreihe vom Gewicht k mit $k \geq 3$, definiert durch*

$$\begin{aligned} G_k : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ \tau &\mapsto \sum{}' \frac{1}{(m + n\tau)^k} \end{aligned}$$

ist eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene.

Im Zuge der Bestimmung der algebraischen Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion sind wir auf die Konstanten $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$ gestoßen. Im neuen Licht dieses Abschnittes, in dem die Eisensteinreihen keine Konstanten, sondern Abbildungen auf der oberen Halbebene sind, können wir diese nun ebenfalls als Funktionen betrachten:

$$g_2(\tau) := 60G_4(\tau)$$
$$g_3(\tau) := 140G_6(\tau)$$

Beim Übergang zu einem äquivalenten Gitter haben diese dann die Eigenschaft

$$g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4}g_2(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\Omega)$$

Um die unterschiedlichen Potenzen bei der Transformation dieser beiden Funktionen in den Griff zu bekommen, betrachtet man ein Linearkombination aus $g_2(\tau)^3$ und $g_3(\tau)^2$. Hier bietet sich die, ebenfalls im Zuge der Differentialgleichung aufgetretene *Diskriminante*

$$\Delta(\tau) := g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$$

mit

$$\Delta(\lambda\Omega) = \lambda^{-12}\Delta(\Omega)$$

an. Nun sind wir dem gesuchten invarianten Ausdruck schon sehr nahe. Die durch

$$j(\tau) := \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$$

definierte *Absolute Invariante* bzw. *Kleinsche j-Funktion* erfüllt

$$j(\lambda\Omega) = j(\Omega) \quad \forall\lambda \neq 0.$$

Satz 4.1.3 *Die Funktionen $g_2(\tau), g_3(\tau), \Delta(\tau), j(\tau)$ sind analytische Funktionen auf der oberen Halbebene.*

Beweis Die Funktionen $g_2(\tau), g_3(\tau)$ und $\Delta(\tau)$ gehen durch Linearkombination aus Potenzen der holomorphen Funktionen $G_k(\tau)$ hervor, müssen also selbst holomorph auf $\mathbb{H}$ sein. Bei der j-Funktion könnte noch „Gefahr“von Seiten des Nenners herrühren. $\Delta(\tau)$ ist jedoch die Diskriminante der Gleichung

$$x^3 - g_2x - g_3 = 0,$$

wobei g_2, g_3 die Konstanten zum Gitter $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ sind. Und diese ist, das haben wir in Kapitel 2.2.1 festgestellt, ungleich 0.

□

4.2 Fixpunkte unter Modultransformationen

Definition 11 *Eine komplexe Zahl $p \in \mathbb{H}$ heißt Elliptischer Fixpunkt dann und nur dann, wenn es eine Matrix M aus der Modulgruppe Γ gibt mit $M \neq \pm I$ und $Mp = p$. Die Menge $\Gamma_p := \{M \in \Gamma | Mp = p\}$ heißt der Stabilisator von p. Die Ordnung von $p \in \mathbb{H}$ ist definiert durch*

$$e(p) = \frac{1}{2}\#\Gamma_p$$

Bemerkung Das $\frac{1}{2}$ in der Definition von $e(p)$ ist deshalb sinnvoll, da M und $-M$ ja dieselben Transformationen implizieren, die Menge Γ_p also immer eine gerade Kardinalität besitzt, es gilt also $e(p) \in \mathbb{Z}$ (sofern sie endlich ist, was noch zu zeigen ist). Da jedes $p \in \mathbb{H}$ Fixpunkt von I und $-I$ ist, gilt immer $e(p) \geq 1$

Wir wollen im folgenden die Ordnung aller Punkte der oberen Halbebene studieren. Um uns ein wenig Arbeit zu ersparen, zeigen wir zunächst folgendes

Lemma 4.2.1 $\forall M \in \Gamma, p \in \mathbb{H} : e(p) = e(Mp)$.

Beweis Sei $N \in \Gamma_p$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Np &= p \\ N(M^{-1}M)p &= p \\ M(NM^{-1}M) &= Mp \\ (MNM^{-1})(Mp) &= Mp \end{aligned}$$

für alle $M \in \Gamma$. Daher ist $\Gamma_{Mp} = M\Gamma_p M^{-1}$, und da M regulär ist, muss $\#\Gamma_p = \#\Gamma_{Mp}$ gelten.

□

Die Ordnung aller unter Γ äquivalenter Punkte ist also gleich, wir können uns also darauf beschränken, die Punkte aus dem Repräsentantensystem $\mathcal{F}$ zu betrachten. Dazu fangen wir zunächst mit dem charakteristischen Punkt $\varrho = e^{\frac{1}{3}i\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (dies ist der Schnittpunkt der rechten Geraden und des Kreisbogens in der Modulfigur) an, und fragen uns, für welche Modultransformationen er Fixpunkt ist, d.h. wann

$$\varrho = \frac{a\varrho + b}{c\varrho + d}$$

gilt. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\varrho^2 = -\bar{\varrho} = \varrho - 1$$

gilt. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}\frac{a\varrho+b}{c\varrho+d}=\varrho &\iff a\varrho+b=c\varrho^2+d\varrho\\ &\iff a\varrho+b=c\varrho-c+d\varrho=(c+d)\varrho-c\\ &\iff a=c+d\wedge b=-c\end{aligned}$$

(die letzte Zeile ergibt sich durch Vergleich von Real- und Imaginärteil). Folglich ist

$$M=\begin{pmatrix}c+d & -c\\ c & d\end{pmatrix}$$

und

$$detM=1=c^2+d^2+cd.$$

Die einzigen ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned}(c,d)&=\pm(-1,1)\\ (c,d)&=\pm(1,0)\\ (c,d)&=\pm(0,1)\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

Lemma 4.2.2

$$M\varrho=\varrho \iff M\in\{\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\pm I\}=\Gamma_\varrho$$

Die direkte Folgerung davon ist:

Lemma 4.2.3

$$\begin{aligned}M\varrho=\varrho^2 &\iff M\in\{\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}\\ M\varrho^2=\varrho &\iff M\in\{\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\}\\ M\varrho^2=\varrho^2 &\iff M\in\{\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\pm I\}\end{aligned}$$

Beweis Es gilt die Identität $\varrho^2 = -\frac{1}{\varrho} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\varrho$ Folglich gilt:

$$\begin{aligned} M\varrho = \varrho^2 &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M\varrho = \varrho \\ M\varrho^2 = \varrho &\iff M\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\varrho = \varrho \\ M\varrho^2 = \varrho^2 &\iff M\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\varrho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\varrho \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\varrho = \varrho \end{aligned}$$

Die Aussage ergibt sich jetzt durch einfache Matrizenmultiplikation.

□

Die Lösung für unser Problem gibt uns schließlich der folgende

Satz 4.2.4 *Sei $M \in \Gamma$ und die Menge $R(M) = M\bar{\mathcal{F}} \cap \bar{\mathcal{F}}$ sei nichtleer. Dann tritt einer der folgenden 4 Fälle ein:*

1. $M = \pm I$ *($R(M) = \bar{\mathcal{F}}$)*
2. $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *oder* $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *($R(M)$ ist die rechte bzw. linke Kante von $\mathcal{F}$)*
3. $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *($R(M)$ ist der Kreisbogen von $\mathcal{F}$)*
4. $R(M) = \{\varrho\}$ *oder* $R(M) = \{\varrho^2\}$. *Die zugehörigen Matrizen kann man den beiden vorigen Lemmata entnehmen für $M\varrho = \varrho, M\varrho^2 = \varrho$ bzw. $M\varrho = \varrho^2, M\varrho^2 = \varrho^2$.*

Beweis Es gilt o.B.d.A. $c \neq 0$ (sonst ist $M = \pm I$, und wir befinden uns im Fall 1). Für alle Paare von ganzen Zahlen (c, d) ungleich $(0, 0)$, also insbesondere für die untere Zeile einer Modulmatrix M und alle $z \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 = (cz + d)(c\bar{z} + d) &= c^2|z|^2 + 2cd\Re(z) + d^2 \geq \\ &\geq c^2 + d^2 + 2cd\Re(z) \geq \\ &\geq \begin{cases} c^2 + d^2 + 2cd = (c + d)^2 & , cd \leq 0 \\ c^2 + d^2 - 2cd & , cd \geq 0 \end{cases} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Nun muss aber zusätzlich auch noch Mz in $\bar{\mathcal{F}}$ liegen, und daher

$$\begin{aligned} M^{-1}(Mz) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}(Mz) &\in \bar{\mathcal{F}} \\ \Rightarrow |-cMz + a| = |-c\frac{az + b}{cz + d} + a| &= |\frac{1}{cz + d}| \geq 1 \\ \Rightarrow |cz + d| &\leq 1 \end{aligned}$$

gelten. Zusammengefasst ergibt sich also

$$z \in \bar{\mathcal{F}} \wedge Mz \in \bar{\mathcal{F}} \Rightarrow |cz + d| = 1$$

Mit der Bezeichnung $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 \\ \Rightarrow 0 &= c^2x^2 + 2cdx + d^2 + c^2y^2 - 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- $d \neq 0$:

$$\begin{aligned} (4.1) &= c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 - 1 \geq c^2 + d^2 - 1 + 2cdx \geq \\ &\geq \begin{cases} cd \geq 0: & c^2 + d^2 - 1 - cd \\ cd \leq 0: & c^2 + d^2 - 1 + cd \end{cases} \geq \\ &\geq \begin{cases} (c-d)^2 + cd - 1 & \geq cd - 1 \\ (c+d)^2 - cd - 1 & \geq -cd - 1 \end{cases} \geq \\ &\Rightarrow \begin{cases} cd \leq 1 & \Rightarrow cd = 1 \\ -cd \leq 1 & \Rightarrow -cd = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow c = \pm 1, d = \pm 1 \end{aligned}$$

- $d = 0$:

$$c^2x^2 + c^2y^2 - 1 \geq c^2 - 1 \Rightarrow c^2 \leq 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

Die beiden Matrixeinträge c und d sind also sicherlich aus $\{-1, 0, 1\}$. Da wir dieselbe Argumentation wie oben auch für die inverse Matrix $M^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ führen können, muss auch $a \in \{-1, 0, 1\}$ gelten. Offen ist damit nur noch b. Betrachtet man die Determinantengleichung $ad - bc = 1$, so erkennt man, dass b nur aus der Menge $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ stammen kann. Wäre $b = \pm 2$, dann kommen (wieder aufgrund der Determinantengleichung) nur die Matrizen $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right), \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ in Frage. Untersucht man die davon induzierten Abbildungen, erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \Re(\frac{z+2}{-z-1}) = \Re(-1 - \frac{1}{z+1}) = -1 - \Re(\frac{1}{z+1}) = -1 - \frac{\Re z + 1}{|z+1|^2} \leq -1 \\ \Re(\frac{z-2}{z-1}) = \Re(1 - \frac{1}{z-1}) = 1 - \Re(\frac{1}{z-1}) = -1 - \frac{\Re z - 1}{|z-1|^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Diese beiden Transformationen haben also sicherlich eine leere Menge $R(M)$. Folglich kommen als mögliche Einträge für a, b, c, d nur noch 0, 1 und -1 in Frage. Stellt man alle möglichen Matrizen mit diesen Einträgen und Determinante eins auf, dann erhält man genau die im Satz angegebenen.

□

Mögliche elliptische Fixpunkte müssen also durch diese Transformationen entstehen. Die Untersuchung von möglichen Fixpunkten liefert:

1. Die identische Transformation.
2. Verschiebung um ± 1 hat natürlich keine Fixpunkte
3. $-\frac{1}{z} = z \iff -1 = z^2 \iff z = i(\Re z > 0)$
4. Hier haben wir klarerweise die Fixpunkte ϱ und ϱ^2 mit jeweils zwei nichttrivialen Transformationen.

Zusammenfassend erhalten wir also:

Korolar 4.2.5 *Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen (unter der Modulgruppe) von elliptischen Fixpunkten, nämlich $[i]$ und $[\varrho]$. Außerdem gilt $\forall \tau \in \mathbb{H}$:*

$$e(\tau) = \begin{cases} 3, & \tau \sim \varrho \\ 2, & \tau \sim i \\ 1, & sonst \end{cases}$$

4.3 Meromorphe Modulformen

Sei

$$f : \mathbb{H}_C \to \mathbb{C}(bzw.\bar{\mathbb{C}})$$

eine holomorphe Funktion mit Periode p. Dann existiert bekanntlich eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi}{p} inz},$$

der unter der Festsetzung $q = e^{\frac{2\pi i z}{p}}$ die Laurententwicklung

$$g(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

in der punktierten Kreisscheibe mit Radius $e^{-\frac{2\pi C}{p}}$ entspricht. Nun können wir die folgenden Begriffe einführen:

Definition 12 *f hat eine außerwesentliche Singularität bei $i\infty$: $\iff$ g hat eine außerwesentliche Singularität bei 0.*
f ist regulär in $i\infty$: $\iff$ g hat in 0 höchstens eine hebbare Singularität

Definition 13 *f heißt meromorphe Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ dann und nur dann, wenn:*

- *$f : \mathbb{H} \to \bar{\mathbb{C}}$ ist eine meromorphe Funktion.*
- *Die Bedingung $f(MZ) = f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ ist $\forall z \in \mathbb{H}, \forall M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ erfüllt.*
- *Es existiert eine reelle Konstante $C > 0$, so dass f im Bereich $\mathbb{H}_C$ holomorph ist.*
- *f hat eine außerwesentliche Singularität bei $i\infty$.*

Unmittelbar aus der Definition lassen sich die folgenden Eigenschaften ableiten:

Satz 4.3.1 *Sei f eine meromorphe Modulform vom Gewicht k. Dann gilt:*

1. *f ist 1-periodisch.*
2. *f besitzt eine Fourierentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

mit $q = e^{2\pi i z}$ und nur endlich vielen $a_n \neq 0$ für $n < 0$.

3. *Wenn k ungerade ist, dann verschwindet f identisch.*
4. *Falls $f \not\equiv 0$ gilt, dann besitzt f nur endlich viele Null- und Polstellen.*

Beweis

1.
$$f(z+1) = f(\frac{z+1}{0z+1}) = 1^k f(z) = f(z)$$

2. Die Entwicklung folgt aus 1. Da f bei $i\infty$ nur eine außerwesentliche Singularität besitzt, können für negatives n nur endlich viele a_n ungleich 0 sein ($min\{n|a_n \neq 0\} = ord(f; i\infty)$)

3.
$$f(z) = f(\frac{-z+0}{0z-1}) = (-1)^k f(z) \Rightarrow f(z)(1 + (-1)^{k+1}) = 0$$

4. Mit $z = x + iy$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i z n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi n(-y+ix)}$$

Nun muss es ein $D > 0$ geben, sodass f in $\mathbb{H}_D$ keine Nullstellen besitzt (andernfalls würden sich die Nullstellen von $f(q)$ um 0 häufen und f wäre identisch Null). Die Menge $\{z \in \bar{\mathcal{F}} | \Im(z) \leq max(C, D)\}$ ist kompakt und enthält daher nur endlich viele Pole und Nullstellen, außerhalb können jedoch auch keine weiteren mehr liegen.

□

4.3.1 Die k/12-Formel

Bei der Erforschung der elliptischen Funktionen haben wir mit den wichtigen Struktursätzen, den Sätzen von Liouville, begonnen. Im 2. Satz haben wir, um einen ersten Eindruck von der Verteilung der Null- und Polstellen zu gewinnen, das *Null- und Polstellenzählende Integral* auf ein Fundamentalparallelogramm angewandt.
Dies war ein beschränkter Bereich, der von jeder Klasse äquivalenter Punkte genau einen Repräsentanten (abgesehen vom Rand) enthält. Es ist naheliegend dasselbe Verfahren jetzt auch auf eine Modulform anzuwenden. Nun betrachten wir aber Modultransformationen, die im Gegensatz zur Periodenverschiebung nicht kommutativ ist.
Diese Tatsache hatte zur Folge, dass der von uns konstruierte Fundamentalbereich der Modulgruppe, die Modulfigur, unbeschränkt ist. Der letzte Satz hilft uns an dieser Stelle aber weiter, da wir nun wissen, dass die Imaginärteile aller Null- und Polstellen beschränkt bleiben. Wir können also entlang der Kurve γ (siehe 4.3.1) das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \mathrm{d}\zeta \tag{4.2}$$

berechnen, sofern wir voraussetzen, dass f auf γ keine Pole und keine Nullstellen besitzt, abgesehen von vielleicht i, ϱ und ϱ^2. Die kleinen Kreisbögen um ϱ, ϱ^2 und i haben Radius $\varepsilon > 0$. Lässt man ε gegen 0 streben, dann konvergiert das Integral 4.2 gegen

$$\sum_a ord(f; a)$$

wobei a ein einen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse unter Γ durchläuft, abgesehen von $[i]$ und $[\varrho]$. Es bleibt uns also noch, den Wert des Integrals zu berechnen:

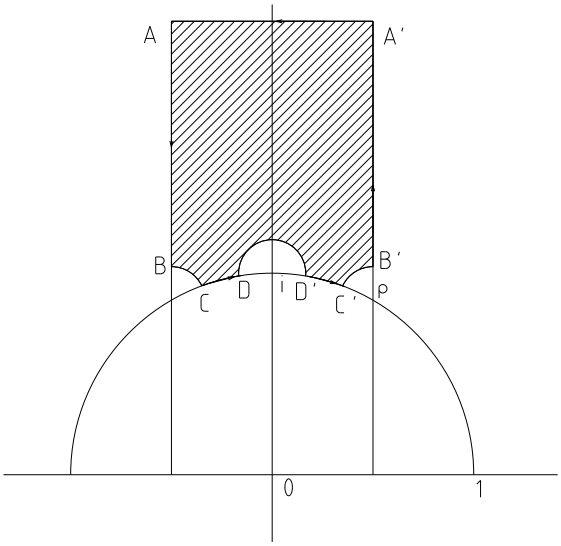


Abbildung 4.1: Integrationsweg γ

- Die Kante von A' nach A:
  Unter der Substitution $q = e^{2\pi i\zeta}$ wird aus dem Integrationsweg $A' \to A - 1$ der in negativer Richtung durchlaufene Kreis $B_{e^{-2\pi\Im(A)}}(0)$. f besitzt die Fourierentwicklung

$$f(\zeta) = \sum a_n e^{2\pi i\zeta} = \sum a_n q^n = g(q),$$

  und wegen

$$f'(\zeta) = g'(q)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\zeta} \Rightarrow f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta = g'(q)\mathrm{d}q \Rightarrow \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \frac{g'(q)}{g(q)}\mathrm{d}q$$

  folgt:

$$\int_{A'}^{A} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = -\int_{B_{e^{-2\pi\Im(A)}}(0)} \frac{g'(q)}{g(q)}\mathrm{d}q. \tag{4.3}$$

  Und da $\Im(A)$ so groß gewählt ist, dass innerhalb dieses Kreises, abgesehen vom Ursprung, keine Null- oder Polstellen von g mehr liegen, ist

$$(4.3) = -2\pi i(ord(g;0) - 0) = -2\pi i\, ord(f;i\infty)$$

- Die beiden Vertikalkanten:
  f ist 1-periodisch und die Kanten werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Die beiden Integralteile heben sich also, genau wie beim Beweis des zweiten Satzes von Liouville, gegenseitig auf.

- Die beiden Kreisbögen um ϱ und ϱ^2:
  Es besteht die Laurententwicklung um ϱ:

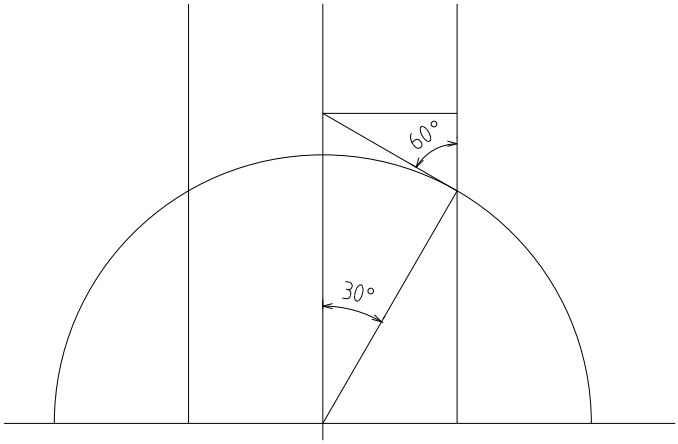
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = b_{-1}\frac{1}{(z-\varrho)} + b_0 + b_1(z-\varrho) + b_2(z-\varrho)^2 + \dots$$

  wobei $b_{-1} = ord(\frac{f'}{f};\varrho)$ ist. Nun ist $\frac{f'(z)}{f(z)} - b_{-1}\frac{1}{(z-\varrho)}$ in einer Umgebung von ϱ analytisch, im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ geht das Integral darüber also gegen 0. Folglich ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C'}^{B'} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} b_{-1}\int_{C'}^{B'} \frac{\mathrm{d}z}{z-\varrho}.$$

  Direkte Rechnung zeigt, dass das Integral $\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}$ entlang eines positiv durchlaufenen Kreissegmentes mit Öffnungswinkel ϕ gleich $i\phi$ ist. Wie

Abbildung 4.2:



  die Skizze 4.3.1 zeigt, ist der Grenzwert dieses Öffnungswinkels $\frac{\pi}{3}$. Insgesamt bedeutet dies:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}^{B'} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}(-i\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{6}ord(f;\varrho)$$

  Mit demselben Verfahren erhält man auch das Integral für den zweiten Kreisbogen, es ergibt sich sogar derselbe Wert, also

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{B}^{C} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}ord(f;\varrho^2)$$

- Der Kreisbogen um i:
  Auch hier kann dasselbe Schema wie eben angewandt werden. Diesmal ist der Winkel aber nicht $\frac{\pi}{3}$ sondern π, also erhält man:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_D^{D'}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}ord(f;i)$$

- Die beiden Kreissegmente CD und $D'C'$:
  Durch die Transformation $z \mapsto -\frac{1}{z}$ werden die beiden Kurventeile aufeinander abgebildet (mit jeweils vertauschter Durchlaufungsrichtung). D.h, wenn

$$\begin{aligned}\alpha : [0,1] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto \alpha(t)\end{aligned}$$

  eine Parametrisierung des Kreisbogens CD ist, dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} : [0,1] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto -\frac{1}{\beta(t)}\end{aligned}$$

  eine Parametrisierung des Kreisbogen $C'D'$. Um Vereinfachungen auszunützen, müssen wir die Transformation der Funktion $h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ unter dieser Transformation betrachten Es gilt:

$$\begin{aligned}f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z) \Rightarrow f'(-\frac{1}{z})\frac{1}{z^2} &= z^k f'(z) + kz^{k-1}f(z)\\ \Rightarrow h(-\frac{1}{z}) &= z^2 h(z) + kz\end{aligned}$$

  Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_C^D h(\zeta)\mathrm{d}\zeta &= \int_0^1 h(\alpha(t))\alpha'(t)\mathrm{d}t\\ \int_{D'}^{C'} h(\zeta)\mathrm{d}\zeta &= -\int_0^1 h(\tilde{\alpha}(t))\tilde{\alpha'}(t)\mathrm{d}t = \qquad (4.4)\\ &= -\int_0^1 h(\alpha(t))\alpha'(t)\mathrm{d}t =\\ &= -\int_0^1 (\beta^2(t)h(\beta(t)) + k\beta(t))\frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)}\mathrm{d}t = \qquad (4.5)\\ &= -\int_0^1 (\beta'(t)h(\beta(t)) + k\frac{\beta'(t)}{\beta(t)})\mathrm{d}t\\ &= -\int_C^D h(\zeta)\mathrm{d}\zeta - k\int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\mathrm{d}t\\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_C^D h(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{D'}^{C'} h(\zeta)\mathrm{d}\zeta\Big) &= -\frac{k}{2\pi i}(\log D - \log C) \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ gehen C und D gegen ϱ^2 respektive i. Bildet man also den Grenzwert des Integrals in (4.4), erhält man

$$-\frac{k}{2\pi i}(\log i - \log \varrho^2) = -\frac{k}{2\pi i}(i\frac{\pi}{2} - i\frac{2\pi}{3}) = \frac{k}{12}$$

Zusammengefasst erhält man daraus die

Satz 4.3.2 (k/12-Formel) *Sei f eine nichtverschwindende meromorphe Modulform vom Gewicht k. Dann gilt*

$$\sum_a \frac{ord(f;a)}{e(a)} + ord(f;i\infty) = \frac{k}{12}$$

wobei die Summe über ein Repräsentantensystem aller Null- und Polstellen (modulo Γ) von f läuft.

Beweis Fassen wir die bereits gezeigte Auswertung des Integrals zusammen, dann erhält man:

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \sum_{a,a\not\sim i,\varrho} ord(f;a) =$$
$$= -ord(f;i\infty) - \frac{1}{6}ord(f;\varrho) - \frac{1}{6}ord(f;\varrho^2) - \frac{1}{2}ord(f;i) + \frac{k}{12}$$

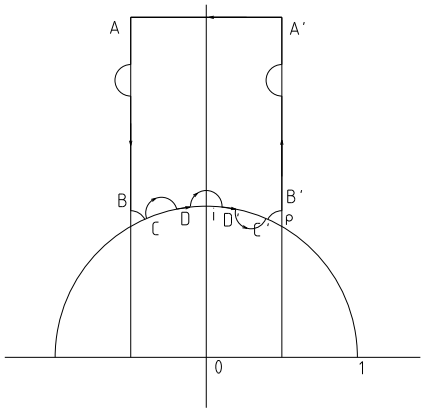
Da ϱ^2 durch die Transformation $z \mapsto \frac{-1}{z}$, unter der f invariant ist, aus ϱ hervorgeht, gilt $ord(f;\varrho) = ord(f;\varrho^2)$. Bringt man nun die „Ordnungssummanden“auf die Seite der Summe, dann erhält man die k/12-Formel.
Ganz fertig sind wir allerdings noch nicht. Wir haben bis jetzt unter der Voraussetzung gearbeitet, auf γ würden weder Null- noch Polstellen von f liegen. Tun sie das aber doch, dann ist das leicht zu beheben. Da mit jedem Pol (bzw. jeder Nullstelle) auf der Kurve auch eine entsprechende zweite Stelle „im Weg“ist (und es klarerweise nur endlich viele davon geben kann), können wir unseren Integrationsweg wie in Skizze 4.3.1 modifizieren. Die jeweils zusammengehörigen Kreise gehen durch die Transformationen $z \mapsto z+1$ bzw. $z \mapsto \frac{-1}{z}$, unter denen f invariant ist, hervor und werden in gegengesetzter Richtung durchlaufen. Die Integrale darüber heben sich also auf, unser Resultat bleibt unverändert.

□

4.4 Modulfunktionen

Definition 14 *Eine meromorphe Modulform f vom Gewicht 0 heißt Modulfunktion bzw. modular*

Abbildung 4.3: Modifizierter Integrationsweg für die k/12-Formel



„Gewicht 0“bedeutet die Invarianz unter Modultransformationen, und da die Modulgruppe bekanntlich von den beiden Matrizen S und T aufgebaut wird, ergibt sich folgende Charakterisierung:

Satz 4.4.1 *Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \bar{\mathbb{C}}$ ist modular dann und nur dann wenn:*

- *f ist meromorph*
- *$f(-\frac{1}{z}) = f(z)$ und $f(z+1) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{H}$*
- *Die Fourierentwicklung von f hat die Form*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$.

Beweis 1 und 2 sind klar, die Fourierentwicklung ist gleichbedeutend damit, dass f an $i\infty$ einen Pol der Ordnung k hat, sprich eine außerwesentliche Singularität.

□

Korolar 4.4.2 *Die Kleinsche j-Funktion ist eine Modulfunktion.*

Satz 4.4.3 *Sei f eine nichtverschwindende Modulfunktion. Dann hat f in $\mathbb{H}/\Gamma \cup \{i\infty\}$ gleich viele Nullstellen wie Pole, wenn man diese mit Vielfachheit zählt und mit der Gewichtung $\frac{1}{e(a)}$ versieht.*

Beweis Direkte Folgerung aus der k/12-Formel ($k = 0$).

□

Korolar 4.4.4 *Sei f eine nichtkonstante Modulfunktion. Dann nimmt f jeden komplexen Wert in $\mathbb{H}/\Gamma \cup \{i\infty\}$ (mit Vielfachheit und Gewichtung gezählt) gleich oft an.*

Beweis Mit f ist auch $f - c$ Modulfunktion. Wendet man Satz 4.4.3 auf $f - c$ an, dann erhält man die Aussage

□

Korolar 4.4.5 *Jede beschränkte Modulfunktion ist eine Konstante.*

Beweis Wenn f beschränkt ist, wird ein Wert nicht angenommen, was im Widerspruch zum eben Bewiesenen steht.

□

Bemerkung Anhand der Sätze 4.4.3 bis 4.4.5 wird nocheinmal die Verwandtschaft der $k/12$-Formel mit den Liouvillschen Sätzen offensichtlich.

4.4.1 Die Kleinsche j-Funktion

Zur Erinnerung: Wir haben die *Kleinsche j-Funktion* oder *Absolute Invariante* durch

$$j(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)}$$

eingeführt, und gezeigt, dass es sich dabei um eine in $\mathbb{H}$ polfreie Funktion handelt, die nicht nur unter Modultransformationen invariant ist, sondern sogar für alle äquivalenten Gitter konstant bleibt.

Die beiden Sätze geben uns für die Werteverteilung dieser Funktion nur noch zwei Möglichkeiten:

- $j(\tau)$ ist konstant.
- $j(\tau)$ ist surjektiv.

Um zweiteres zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $j(\tau)$ nicht beschränkt ist.

Lemma 4.4.6 *Für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ gilt:*

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$$

Bemerkung In dieser Formel handelt es sich bei ζ um die *Riemannsche ζ-Funktion.*

Beweis Im Beweis von 4.1.1 haben wir gezeigt, dass die Eisensteinreihen mit Gewicht ≥ 3 in Bereichen der Form

$$|\Re(\tau)| \leq C \quad \wedge \quad \Im(\tau) \geq D$$

gleichmäßig konvergieren. Wir können also den angegebenen Grenzübergang an der Summe $\sum' \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$ im Bereich

$$|\Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}, \quad \Im(\tau) \geq 1$$

gliedweise vollziehen. Für $m \neq 0$ gilt

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} \frac{1}{m+n\tau} = 0$$

und daher:

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} G_{2k}(\tau) = \lim_{\Im(\tau)\to\infty} \sum' \frac{1}{(m+0\tau)^{2k}} = \sum_{m\neq 0} m^{-2k} =$$
$$= 2\zeta(2k)$$

□

Lemma 4.4.7

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = 0$$

Beweis Für die Werte der Riemannschen ζ-Funktion an den geraden natürlichen Zahlen $2k \geq 2$ besteht die bekannte Formel

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}|B_{2k}|,$$

wobei B_k die *k-te Bernoullizahl* ist (siehe z.B. Drmota (2001)). Für uns ergibt sich daher (die Werte von B_4 und B_6 sind leicht zu errechnen):

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

und daher

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = (60 \cdot 2\frac{\pi^4}{90})^3 - 27(140 \cdot 2\frac{\pi^6}{945})^2 = 0$$

□

Satz 4.4.8 *Die Kleinsche j-Funktion ist surjektiv.*

Beweis Wegen

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} \Delta(\tau) = 0$$

muss

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} |j(\tau)| = \infty$$

gelten. $j(\tau)$ ist also nicht beschränkt, folglich nicht konstant. 4.4.4 tut dann das übrige.

□

4.4.2 Der Körper der Modulfunktionen

Dass die Modulfunktionen, genau wie die elliptischen Funktionen, einen Körper bilden (in dem die komplexen Zahlen über die konstanten Abbildungen eingebettet werden), ist offensichtlich. Genau wie bei den elliptischen Funktionen gibt es auch hier einen einfachen Struktursatz.

Satz 4.4.9 *Eine Funktion f ist genau dann modular, wenn sie eine rationale Funktion in der j-Funktion ist.*

Beweis Dass eine rationale Funktion der j-Funktion modular ist, ist klar, es bleibt die Umkehrung zu beweisen.
Sei f ein Modulfunktion und $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Vertretersysteme ihrer Null- bzw. Polstellen. Die Funktion

$$g(z) := \prod_{m=1}^{n} \frac{j(z) - j(a_n)}{(j(z) - j(b_n)}$$

hat die selben Null- und Polstellen wie f, folglich hat $\frac{f}{g}$ keines von beiden, ist also eine Konstante.

□

4.5 Ganze Modulformen

Definition 15 *Eine meromorphe Modulform f heißt Ganze Modulform, wenn f in allen Punkten $z \in \mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ regulär ist.*

Bemerkung Anstelle von „Ganze Modulform“sagt man oft auch einfach nur *Modulform.*

Beispielsweise sind die bereits bekannten Eisensteinreihen

$$G_k(\tau) = \sum{}'(m + n\tau)^{-k} \quad , k \geq 3$$

ganze Modulformen vom Gewicht k, die Diskriminante $\Delta(\tau)$ ist eine Modulform vom Gewicht 12.

Lemma 4.5.1 *Sei f eine Modulform vom Gewicht k. Dann gilt:*

1. $k < 0 \Rightarrow f \equiv 0$
2. $k = 0 \Rightarrow f \equiv c \in \mathbb{C}$

Beweis

1. Ist k negativ, dann steht auf der rechten Seite der $k/12$-Formel ein echtnegativer Wert, auf der linken Seite jedoch ein positiver (da f auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph ist und daher keine Pole besitzt, sind alle Summanden ≥ 0). Die Voraussetzung der $k/12$-Formel, $f \not\equiv 0$, kann also nicht erfüllt sein.

2. Man betrachte die $k/12$-Formel für den Fall $k = 0$. Da f keine Pole besitzt, stehen auf der linken Seite nur positive Summanden die sich zu Null aufaddieren, also selbst nicht von Null verschieden sein können. Folglich kann f keine Nullstellen besitzen.

   Wendet man dies nun auf die Funktion $g(z) = f(z) - f(a)$ ($a \in \mathbb{H}$ beliebig) an, die ebenfalls eine Modulform vom Gewicht 0 ist, dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder g verschwindet identisch (und f ist damit konstant) oder g hat in $\mathbb{H}$ keine Nullstellen, das heißt $\nexists z \in \mathbb{H} : f(z) = f(a)$, was klarerweise ein Unsinn ist.

□

Wenn wir im folgenden von einer Modulform mit Gewicht$\neq 0$ sprechen, dann sei die Nullabbildung stets ausgeschlossen.

Satz 4.5.2 *Jede ganze Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}^*$ besitzt in $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis Die Modulform f kann nicht konstant sein (sonst wäre ihr Gewicht 0). Angenommen f besitzt keine Nullstellen. Dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ eine ganze Modulform vom Gewicht $-k < 0$. Nach dem eben bewiesenen Lemma ist also $g \equiv 0$. Widerspruch.

□

Korolar 4.5.3 *Es gibt keine ganze Modulform vom Gewicht 2.*

Beweis Eine derartige Modulform müsste in $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ eine Nullstelle besitzen, sei diese mit ζ bezeichnet. Nach der k/12-Formel würde dann aber

$$\frac{k}{12} = \frac{1}{6} = \sum_a \frac{ord(f;a)}{e(a)} + ord(f;i\infty) \geq \frac{ord(f;\zeta)}{e(\zeta)} \geq \frac{1}{3}$$

gelten. (Für den Fall $\zeta = i\infty$, muss $e(i\infty) = 1$ gesetzt werden)

□

Für Modulformen von kleinem Gewicht lassen sich die Nullstellen einfach bestimmen.

Satz 4.5.4 *1. Alle Nullstellen der Modulformen vom Gewicht 4 sind einfach und an den (unter Γ) zu ϱ äquivalenten Punkten zu finden.*

2. Alle Nullstellen der Modulformen vom Gewicht 6 sind einfach und an den (unter Γ) zu i äquivalenten Punkten zu finden.

3. Alle Nullstellen der Modulformen vom Gewicht 8 sind doppelt und an den (unter Γ) zu ϱ äquivalenten Punkten zu finden.

4. Alle Nullstellen der Modulformen vom Gewicht 10 sind einfach und an den (unter Γ) zu ϱ und zu i äquivalenten Punkten zu finden.

Beweis Wieder kann man die Aussage einfach aus der k/12-Formel herleiten. Im Fall $k = 4$ muss sich $\frac{1}{3}$ als Summe von (positiven) Dritteln, Halben und Ganzen ergeben, die einzige Möglichkeit dafür ist der einzelne Summand $\frac{1}{3}$. Dieser Term ergibt sich aber nur im Fall $a = \varrho$ und Ordnung 1. Dasselbe Argument führt auch in den anderen Fällen zum Ziel.

□

Für $k \geq 12$ können aber bereits Nullstellen an beliebigen Orten der oberen Halbebene auftreten, eine Bestimmung aller Nullstellen ist mit dieser Methode also leider nicht mehr möglich. Sehr wohl kann man daraus allerdings noch folgendes ableiten:

Satz 4.5.5 *Sei f eine Modulform vom Gewicht k. Dann gilt*

- $3 \not| \, k \Rightarrow \forall \zeta \sim \varrho : f(\zeta) = 0$
- $4 \not| \, k \Rightarrow \forall \zeta \sim i : f(\zeta) = 0$

4.5.1 Darstellung ganzer Modulformen

Die Modulformen vom (festen) Gewicht k bilden einen Vektorraum über den komplexen Zahlen. Nachdem wir bereits für die elliptischen Funktionen und die Modulfunktionen sehr einfache Struktursätze erhalten haben, können wir hoffen, einen ebensolchen auch für die ganzen Modulformen zu erhalten. Die Stelle $i\infty$ bezeichnet man als *Spitze* einer Modulform.

Definition 16 *Eine Modulform f für die*

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} f(z) =: f(i\infty) = 0$$

gilt heißt Spitzenform

Die Spitzenformen bilden klarerweise einen Unterraum in den Modulformen. Ihre Bedeutung für die gesuchte Struktur zeigt der folgende

Satz 4.5.6 *Sei h eine beliebige Nichtspitzenform vom Gewicht k. Dann existiert für alle Modulformen f vom Gewicht k eine Spitzenform f_0 und eine Konstante c mit*

$$f(z) = f_0(z) + c \cdot h(z)$$

Beweis Die Festsetzung

$$f_0(z) := f(z) - \frac{f(i\infty)}{h(i\infty)} h(z)$$

definiert eine Spitzenform. Umgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0(z) + \frac{f(i\infty)}{h(i\infty)} h(z) \\ &= f_0(z) + c \cdot h(z) \end{aligned}$$

□

Bevor wir zum gewünschten Struktursatz kommen, noch ein vorbereitendes

Lemma 4.5.7 *Jede Spitzenform vom Gewicht k lässt sich als Produkt einer Modulform vom Gewicht $k-12$ mit der Diskriminante Δ darstellen.*

Beweis Wir haben in 4.4.7 bereits gezeigt, dass Δ in der Spitze verschwindet. Nach der $k/12$-Formel muss diese Nullstelle einfach sein, und es kann keine weiteren geben (bis auf Äquivalenz). Ist nun f eine Spitzenform vom Gewicht k, dann ist

$$g := \frac{f}{\Delta}$$

eine ganze Modulform vom Gewicht $k-12$.

□

Bemerkung Für $k < 12$ verschwinden alle Spitzenformen identisch (folgt aus der $k/12$-Formel), die Aussage gilt also auch dann.

Satz 4.5.8 *Die Menge*

$$M_k := \{G_4^a G_6^b | a, b \in \mathbb{N}, 4a + 6b = k\}$$

ist eine Basis des Vektorraumes der ganzen Modulformen vom Gewicht k. Das heißt: jede derartige Funktion f lässt sich in der Form

$$f = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N} \\ 4a+6b=k}} c_{a,b} G_4^a G_6^b$$

schreiben.

Beweis Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang für $k = 0$ ist trivial, da alle Modulformen vom Gewicht 0 konstant sind. Sei nun f eine Modulform vom Gewicht $k \geq 4$. Die gerade Zahl k lässt sich sicher in der Form $k = 4a + 6b$ darstellen. Nun ist $f - c \cdot G_4^a G_6^b$ für passendes $c \in \mathbb{C}$ sicher eine Spitzenform und lässt sich daher in der Form $\Delta \cdot g$ schreiben, wobei g eine Modulform vom Gewicht $k - 12$ ist. Für g existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Darstellung in der gewünschten Form. Das selbe gilt aber auch für $\Delta \cdot g$, da bekanntlich

$$\Delta = (60G_4)^3 - 27(G_6)^2$$

ist. Es gilt also

$$f = cG_4 a G_6^b + \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N} \\ 4\alpha+\beta=k-12}} c_{\alpha,\beta}(\Delta g) G_4^\alpha G_6^\beta$$

□

Korolar 4.5.9 *Der Vektorraum der ganzen Modulformen vom Gewicht k ist endlichdimensional.*

Kapitel 5

Folgerungen

5.1 Elliptische Integrale

In der Mathematik stößt man oft auf Integrale der Form

$$\int_a^z \frac{1}{\sqrt{a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0}} \mathrm{d}t$$

Sofern das im Nenner stehende Polynom keine mehrfachen Nullstellen aufweist, ist dieses Integral nicht elementar berechenbar, man bezeichnet es dann als *elliptisches Integral (erster Art)*. Bei der Untersuchung dieser Integrale hat man unter Anderem auch deren Umkehrfunktionen betrachtet und ist dabei auf eine interessante Eigenschaft gestoßen: Sie sind doppeltperiodisch. Dies ist der historische Ursprung der elliptischen Funktionen, dem sie zugleich ihren Namen verdanken. Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir zunächst präzisieren, was wir mit „Umkehrfunktion“meinen.

Definition 17 *Eine Funktion f heißt Umkehrfunktion des elliptischen Integrals erster Art*

$$\int_a^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{p(\zeta)}},$$

wenn:

$$\forall G \subset \mathbb{C}\, G \text{ Gebiet}, f \text{ auf } G \text{ umkehrbar}, g := f^{-1} \text{ auf } G$$
$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{p(z)}}$$

Lemma 5.1.1 *Sei f Umkehrfunktion des elliptischen Integrals $\int_a^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{p(\zeta)}}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det M = 1$ und g eine lokale Umkehrfunktion von f. Dann gilt:*

$$\tilde{g}(z) := g(\frac{az+b}{cz+d})$$

ist eine lokale Umkehrfunktion der elliptischen Funktion

$$\tilde{f}(z) := \frac{d \cdot f(z) - b}{-c \cdot f(z) + a},$$

welche Umkehrfunktion des elliptischen Integrals

$$\int_a^z \frac{1}{\sqrt{(c\zeta + d)^4 p(\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d})}} \mathrm{d}\zeta$$

ist.

Beweis Einfaches Einsetzen zeigt, dass $\tilde{f}^{-1} = g$ ist, Differenzieren liefert

$$\tilde{g}'(z) = \frac{1}{\sqrt{(cz + d)^4 p(\frac{az+b}{cz+d})}}$$

□

Lemma 5.1.2 *Sei $p(z)$ ein beliebiges Polynom 4. Grades ohne mehrfache Nullstellen. Dann existiert eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det M = 1$, so dass*

$$(cz + d)^4 p(\frac{az + b}{cz + d})$$

ein Polynom dritten Grades ohne quadratischen Term ist.

Bemerkung Die Matrix M muss keine ganzzahligen Einträge haben, stammt also üblicherweise nicht aus Γ.

Beweis Das Polynom p besitzt keine mehrfachen Nullstellen, verschwindet also sicher an einer Stelle $n \neq 0$. Die Anwendung der Matrix

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

auf den Linearfaktor $(z - n)$ liefert

$$\frac{nz}{z + \frac{1}{n}} - n = \frac{-1}{z + \frac{1}{n}},$$

nach Multiplikation mit $(z + \frac{1}{n})$ ergibt sich also eine Konstante, die übrigen drei Linearfaktoren liefern ein Polynom dritten Grades. Nun müssen wir noch den quadratischen Term zum Verschwinden bringen. Die Anwendung der Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf das Polynom $az^3 + bz^2 + cz + d$ liefert als Koeffizient des quadratischen Terms $3ak + b$. Wählt man nun $k = \frac{-b}{3a}$, dann verschwindet der quadratische Term ($a \neq 0$ muss gelten, da das ursprüngliche Polynom sonst eine (zumindest) doppelte Nullstelle bei n hätte).

□

Wir können also jedes Polynom $p(z)$ dritten oder vierten Grades mit lauter verschiedenen Nullstellen in die Form

$$k \cdot (cz+d)^4 p(\frac{az+b}{cz+d}) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

bringen (mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$), die sogenannte *Weierstraßsche Normalform.*

Lemma 5.1.3 *Seien g_2, g_3 beliebige komplexe Zahlen mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Dann existiert ein Gitter Ω mit $g_2 = g_2(\Omega)$ und $g_3 = g_3(\Omega)$.*

Beweis Zunächst definieren wir uns die Werte $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$ und $j := \frac{g_2^3}{\Delta}$ aus unseren gegebenen Werten. Da die Kleinsche j-Funktion surjektiv ist, existiert ein Gitter Ω_1 mit $j(\Omega_1) = j$. Setzt man

$$a := (\frac{\Delta}{\Delta(\Omega_1)})^{12}$$

dann gilt

$$\Delta(a\Omega_1) = a^{-12}\Delta(\Omega) = \Delta$$

Da j beim Übergang auf äquivalente Gitter invariant ist, haben wir damit ein Gitter $\Omega_2 := a \cdot \Omega_1$ gefunden mit

$$\Delta(\Omega_2) = \Delta \text{ und } j(\Omega_2) = j$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} j(\Omega_2) = \frac{g_2(\Omega_2)^3}{\Delta(\Omega_2)} &= \frac{g_2(\Omega_2)^3}{\Delta} \\ = j &= \frac{g_2^3}{\Delta} \\ \Rightarrow g_2^3 &= g_2(\Omega_2)^3 \end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned} g_2(\Omega_2)^3 - 27g_3(\Omega_2)^2 = \Delta(\Omega_2) = \Delta &= g_2^3 - 27g_3^2 \\ \Rightarrow g_3^2 &= g_3(\Omega_2)^2 \end{aligned}$$

Die Werte g_2, g_3 unterscheiden sich also nur noch höchstens um eine 3. bzw. 2. Einheitswurzel von ihren Pendants des Gitters Ω_2. Falls $g_3 = g_3(\Omega_2)$ können wir $\Omega_3 := \Omega_2$ unverändert lassen, im Falle $g_3 = -g_3(\Omega_2)$ liefert uns $\Omega_3 := i \cdot \Omega_2$ das gewünschte ($i^6 = -1$ und $g_2(\Omega_3)$ bleibt wegen $i^4 = 1$

unverändert). Multiplizieren wir das Gitter Ω_3 jetzt noch mit einer 6. Einheitswurzel w, ändert sich $g_3(w\cdot\Omega_3)$ nicht, jedoch ist $g_2(w\cdot\Omega_3) = w^{-4}g_2(\Omega_3)$. Mit w durchläuft w^{-4} sämtliche 3. Einheitswurzeln, es existiert also sicher ein passendes w, sodass mit $\Omega := w \cdot \Omega_3$

$$g_2(\Omega) = g_2 \text{ und } g_3(\Omega) = g_3$$

gilt.

□

Satz 5.1.4 *Sei $p(z)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades mit lauter verschiedenen Nullstellen. Dann existiert eine nichtkonstante elliptische Funktion f, die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals*

$$\int_a^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{p(\zeta)}}$$

ist.

Beweis Dank der beiden bereits bewiesenen Lemmata genügt es, den Satz für Polynome in der Weierstraßschen Normalform zu zeigen, wir können also o.B.d.A annehmen, dass $p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$ gilt. Da $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ sein muss (sonst hätte p mehrfache Nullstellen), existiert ein Gitter Ω mit $g_2(\Omega) = g_2$ und $g_3(\Omega) = g_3$. Die Behauptung lautet nun, dass die $\wp$-Funktion zu diesem Gitter Ω die gesuchte Umkehrfunktion ist. Denn wenn $g(z)$ eine lokale Umkehrfunktion von $\wp(z)$ ist, dann ist wegen der Differentialgleichung

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

der Weierstraßschen $\wp$-Funktion:

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{\wp'(g(z))}} = \frac{1}{\sqrt{4\wp^3(g(z) - g_2\wp(g(z)) - g_3}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{p(z)}}$$

□

5.2 Die Nullstellen der $\wp$-Funktion

Wir haben im ersten Teil die Weierstraßsche $\wp$-Funktion als „einfachste“elliptische Funktion eingeführt und tatsächlich haben wir sehr viele sehr einfache Eigenschaften an ihr finden können. Eines der ersten Probleme welches sich bei der Untersuchung von Funktionen stellt konnte bisher noch nicht beantwortet werden - die Nullstellen. Tatsächlich war dies eine sehr lange

ungelöste Frage, erst 1982 wurde in den Mathematischen Annalen (Zagier D. and Eichler M. (1982)) eine entsprechende Formel publiziert.
Der Einfachheit halber betrachten wir nur die kanonischen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse von Gittern, das heißt die $\wp$-Funktion zum Gitter $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Um Missverständnissen vorzubeugen werden wir auch den Parameter τ immer „mitschleppen“, wir schreiben also:

$$\wp(z,\tau)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\Big(\frac{1}{(z-(m+n\tau))^2}-\frac{1}{(m+n\tau)^2}\Big)$$

Die $\wp$-Funktion hat in jedem Fundamentalbereich genau 2 Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt), die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden. Wenn $z_0(\tau)$ also eine Nullstellen von $\wp(z,\tau)$ ist, dann ergibt sich klarerweise

$$\wp(z,\tau)=0 \iff z\equiv\pm z_0(\tau) \pmod{(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})}$$

$z_0(\tau)$ ist also eine mehrdeutige Funktion auf der oberen Halbebene, für die wir eine geschlossene Darstellung finden müssen. Die einzelnen Zweige von z_0 unterscheiden sich höchsten um das Vorzeichen sowie einen linearen Term. Den linearen Term wird man durch zweimaliges differenzieren los, das Vorzeichen durch quadrieren. Daraus folgt:

Satz 5.2.1 *$z_0''(\tau)^2$ ist eine eindeutige Funktion.*

5.2.1 Transformationsverhalten von z_0

Lemma 5.2.2

$$\wp\Big(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)=(c\tau+d)^2\wp(z,\tau)$$

Beweis

$$\begin{aligned}\wp\Big(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)&=\frac{1}{(\frac{z}{c\tau+d})^2}+\sum_{k\geq 0}(2k+1)G_{2k+2}\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)\Big(\frac{z}{c\tau+d}\Big)^{2k}=\\&=(c\tau+d)^2\frac{1}{z^2}+\sum_{k\geq 0}(2k+1)(c\tau+d)^{2k+2}\frac{z^{2k}}{(c\tau+d)^{2k}}=\\&=(c\tau+d)^2\wp(z,\tau)\end{aligned}$$

□

Satz 5.2.3 *Die Funktion $z_0''(\tau)^2$ ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht 6.*

Beweis Aus der Definition von z_0 und der Stetigkeit von $\wp(z,\tau)$ in beiden Argumenten folgt, dass $z_0''(\tau)^2$ zumindest meromorph ist, es bleibt also noch die Transformationseigenschaft zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z}{c\tau+d} \equiv \pm z_0(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) &\iff 0 = \wp(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2\wp(z,\tau)\\ &\iff \wp(z,\tau) = 0 \iff z \equiv \pm z_0(\tau)\\ &\Rightarrow z_0(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})(c\tau+d) \equiv \pm z_0(\tau) \Rightarrow z_0(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) \equiv \pm(c\tau+d)^{-1} z_0(\tau)\end{aligned}$$

Wenn wir nun die Äquivalenzrelation auflösen bekommen wir:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow z_0(\tau) = m + n\tau \pm (c\tau+d) z_0(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})\\ &\Rightarrow z_0'(\tau) = n \pm \left(c z_0(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) + (c\tau+d)^{-1} z_0'(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})\right)\\ &\Rightarrow z_0''(\tau) = \pm(c\tau+d)^{-3} z_0''(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})\\ &\Rightarrow z_0''(\tau)^2 = (c\tau+d)^{-6} z_0''(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})\end{aligned}$$

□

5.2.2 Überschneidungen

Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass $z_0''(\tau)^2$ nicht nur eine meromorphe, sondern sogar eine ganze Modulform handelt. Da diese jedoch aus einer mehrdeutigen Funktion erwachsen ist, muss man auf Überschneidungen der einzelnen Zweige achtgeben.

Die daraus entstehenden Probleme kann man sich z.B. an der einfacheren Funktion des arcsin überlegen. Auch er ist nur bis auf Vorzeichen und einen Summanden von $k\pi$ eindeutig. Die zugehörige Eindeutige Funktion $\arcsin'(x)^2$ besitzt jedoch offensichtlich einen Pol bei ± 1, den Schnittpunkten der einzelnen Zweige.

Satz 5.2.4 *Durch jede stelle $\zeta \in \mathbb{C}$ gehen höchstens zwei Zweige von z_0. Zwei Zweige treffen sich genau dann, wenn $\wp(\zeta,\tau)$ eine doppelte Nullstelle für passendes τ ist. Dieses τ muss unter der elliptischen Modulgruppe äquivalent zu i sein.*

Beweis Zunächst sieht man leicht, dass sich Zweige mit gleichem Vorzeichen nie treffen können (Aus $z_0(\tau) = z_0(\tau) + m + n\tau$ folgt $m = n = 0$). Bei unterschiedlichen Vorzeichen erhält man:

$$\begin{aligned}z_0(\tau) = -z_0(\tau) + m + n\tau &\iff z_0(\tau) = \frac{m+n\tau}{2}\\ &\iff \wp(\frac{m+n\tau}{2}, \tau) = 0\end{aligned}$$

Diese Nullstelle muss nach dem 4. Satz von Liouville doppelt sein. Für doppelte Nullstellen erhält man außerdem:

$$\begin{aligned}\wp(z,\tau) \text{ hat in } \zeta \text{ eine doppelte Nullstelle} &\Rightarrow \wp'(\zeta,\tau) = 0\\ &\Rightarrow 0 = \wp'(\zeta,\tau)^2 = 4\wp(\zeta,\tau)^3 - g_2(\tau)\wp(\zeta,\tau) - g_3(\tau) = -g_3(\tau)\\ &\Rightarrow g_3(\tau) = 0 \Rightarrow G_6(\tau) = 0 \Rightarrow \tau \sim i \pmod{(\Gamma)}\end{aligned}$$

Mehr als zwei Zweige können sich nie treffen, da sonst mindestens zwei Zweige mit gleichem Vorzeichen dabei wären.

□

Sei nun τ_0 ein solcher Schnittpunkt zweier Zweige. Dann erhält man aus der Struktur der zugehörigen Riemannschen Fläche die Reihenentwicklung

$$z_0(\tau) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\tau \pm \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\tau - \tau_0)^{k+\frac{1}{2}}, \quad c_0 \neq 0$$

Durch ableiten und quadrieren erhält man

$$z_0''(\tau)^2 = \sum_{k=-3}^{\infty} \tilde{c}_k(\tau - \tau_0)^k, \quad \tilde{c}_0 \neq 0$$

Damit bekommt man:

Satz 5.2.5 *$z_0''(\tau)^2$ besitzt genau für jene τ Pole, für die $\wp(z,\tau)$ doppelte Nullstellen besitzt. Diese Pole haben die Ordnung 3.*

Beweis Die angegebenen Pole haben wir eben gezeigt, weiter können trivialerweise nicht auftreten.

□

Eine einfache Darstellungsmöglichkeit kennen wir allerdings nur für ganze Modulformen, wir müssen also noch ein bisschen „tricksen“.

Satz 5.2.6 *Die Funktion $f(\tau) = (z_0''^2 G_6^3)(\tau)$ ist eine ganze Modulform vom Gewicht 24. Ihre einzige Nullstelle liegt in $i\infty$ und ist von Ordnung 2.*

Beweis Wir haben bereits gezeigt, dass die Pole von $z_0''^2$ mit den Nullstellen von G_6 zusammenfallen, diese Nullstellen von G_6 sind von Ordnung 1. Da $z_0''^2$ keine weiteren Pole besitzt, und auch G_6 in ganz $\mathbb{H}$ analytisch ist muss f eine holomorphe Abbildung der oberen Halbebene sein. Das korrekte Transformationsverhalten ist trivial, als Gewicht bekommt man $6 + 3 \cdot 6 = 24$.

Nach der $k/12$-Formel besitzt f daher in einem Fundamentalgebiet Nullstellen mit Gesamtordnung 2 (inklusive Vielfachheit und mit elliptischer Ordnung gewichtet). Wegen

$$\lim_{\Im(\tau)\to\infty} z_0''(\tau) = \lim_{\Im(\tau)\to\infty} \pm(c\tau+d)^3 z_0''(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) =$$
$$= 0 \cdot z_0''(\frac{a}{c}) = 0$$

besitzt f in $i\infty$ eine Nullstelle mit Ordnung ≥ 2. Mehr ist aber schon nicht mehr möglich.

□

Korolar 5.2.7 *Es gilt:*

$$z_0''(\tau) = \pm C_0 \frac{\Delta}{G_6^{\frac{3}{2}}}(\tau)$$

Beweis Die obige Funktion f besitzt die selben Nullstellen und das selbe Gewicht wie Δ^2, ihr Quotient ist also eine ganze Modulform vom Gewicht 0, also eine Konstante.

□

Lemma 5.2.8 *Sei $f(z)$ eine integrierbare Funktion mit Nullstelle in η. Dann gilt:*

$$f(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_z^\eta f(t)(t-z)\mathrm{d}t$$

Beweis Zweimaliges differenzieren nach Leibniz liefert:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_z^\eta f(t)(t-z)\mathrm{d}t = -\int_z^\eta f(t)\mathrm{d}t$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_z^\eta f(t)(t-z)\mathrm{d}t = 0 + f(z) = f(z)$$

□

Anwendung davon liefert schließlich:

Satz 5.2.9 *Für die Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion gilt:*

$$z_0(\tau) = C_1 + C_2\tau \pm C_0 \int_\tau^{i\infty} \frac{\Delta(t)}{G_6^{\frac{3}{2}}(t)}(t-\tau)\mathrm{d}t$$

5.2.3 Bestimmung der Konstanten

Satz 5.2.10 *Es gelten die Fourierentwicklungen:*

$$\frac{\Delta(\tau)}{G_6^{\frac{3}{2}}(\tau)} = \frac{-1}{4\pi^2}q + \mathcal{O}(q^2)$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\wp(z,\tau) = \frac{1}{\zeta - 2 - \frac{1}{\zeta}} + \frac{1}{12} + (\zeta - 2 - \frac{1}{\zeta})q + \mathcal{O}(q^2)$$

mit $q = e^{2\pi i t}$ *und* $\zeta = e^{2\pi i z}$.

Beweis

1. Im nächsten Abschnitt wird eine Fourierentwicklung für die Eisensteinreihen bestimmt, aus der diese Entwicklung leicht berechnet werden kann.

2. Ein weiterer Vorgriff auf den nächsten Abschnitt: Dort zeigen wir die Darstellung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{n\geq 1} n e^{2\pi i n z} = (2\pi i)^2 \frac{e^{2\pi i z}}{(1-e^{2\pi i z})^2}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\wp(z,\tau) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-(m+n\tau))^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} = \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-m)^2} - \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{m^2} + \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big[\frac{1}{((z+n\tau)-m)^2} - \frac{1}{(n\tau+m)^2}\Big] = \\
&= (2\pi i)^2 \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} - 2\frac{\pi^2}{6} + \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (2\pi i)^2 \Big(\sum_{k\geq 1} k e^{2\pi i (z+n\tau)k} - \sum_{k\geq 1} k e^{2\pi i n\tau k}\Big) = \\
&= (2\pi i)^2 \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (2\pi i)^2 \Big(\sum_{k\geq 1} k\zeta^k q^{nk} - \sum_{k\geq 1} k q^{nk}\Big) = \\
&= (2\pi i)^2 \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} - \frac{\pi^2}{3} + (2\pi i)^2 (\zeta - 2 - \frac{1}{\zeta})q + \mathcal{O}(q^2) = \\
&= (2\pi i)^2 \Big(\frac{1}{\zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}} - \frac{1}{12} + (\zeta - 2 - \frac{1}{\zeta})q\Big) + \mathcal{O}(q^2)
\end{aligned}$$

□

Wir müssen nun unsere Darstellung von $z_0(\tau)$ irgendwo auswerten. Doch dummerweise sind die die einzigen Werte von τ für die die Nullstellen einfach bestimmbar sind, genau die Pole von z_0. Also versuchen wir es mit $i\infty$. Aufgrund der Reihenentwicklung gilt:

$$\begin{aligned}
&\exists \lim_{\Im(\tau)\to\infty} z_0(\tau) \text{ für einen Zweig} \\
\iff &\lim_{\Im(\tau)\to\infty} \wp(z,\tau) = 0 \\
\iff &\zeta - 2 - \frac{1}{\zeta} = -12 \\
\iff &\zeta = -5 \pm 2\sqrt{6} = -(5+2\sqrt{6})^{\pm 1} =: -\varepsilon^{\pm 1} \\
\iff &z = \frac{1}{2\pi i}\log(-\varepsilon^{\pm 1}) = m + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}\ln\varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

wobei mit ln der Hauptzweig des natürlichen Logarithmus bezeichnet sei. Jeder dieser Werte z ist der Grenzwert eines Zweiges von $z_0(\tau)$ für $\tau \to i\infty$. Da $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + (\tau+1)\mathbb{Z}$ ist, ist $z_0(\tau)$ 1-periodisch und wir können für jeden dieser Zweige die Fourierentwicklung ermitteln:

$$z_0(\tau) = m + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}\ln\varepsilon + \tilde{A}q + \mathcal{O}(q^2) = m + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}(\ln\varepsilon + Aq + \mathcal{O}(q^2))$$

Der zugehörige ζ-Wert lautet:

$$\begin{aligned}
\zeta &= e^{2\pi i z_0(\tau)} = e^{2\pi i m} e^{\pi i}\left(e^{\ln\varepsilon + Aq + \mathcal{O}(q^2)}\right)^{\pm 1} = \\
&= -\varepsilon^{\pm 1}\left(e^{Aq+\mathcal{O}(q^2)}\right)^{\pm 1} = -\varepsilon^{\pm 1}(1 + Aq + \mathcal{O}(q^2))^{\pm 1}
\end{aligned}$$

Wobei man letztere Reihe erhält durch:

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to 0} e^{Aq+\mathcal{O}(q^2)} = 1 \\
&\lim_{q\to 0} \frac{e^{Aq+\mathcal{O}(q^2)} - 1}{q} = A
\end{aligned}$$

Dieses ζ müssen wir nun noch in unsere Entwicklung von $\wp$ einsetzen, Nullsetzen und ein Koeffizientenvergleich tut das übrige. Dazu verwenden wir noch ein kleines

Lemma 5.2.11

$$\frac{1}{a + bq + \mathcal{O}(q^2)} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}q + \mathcal{O}(q^2)$$

Beweis

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{a+bq+\mathcal{O}(q^2)}=\frac{1}{a}$$
$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\Big(\frac{1}{a+bq+\mathcal{O}(q^2)}-\frac{1}{a}\Big)=\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\Big(\frac{1-1-\frac{b}{a}q+\mathcal{O}(q^2)}{a+bq+\mathcal{O}(q^2)}\Big)=\frac{b}{a^2}$$

□

Nun setzen wir ein:

$$\begin{aligned}\zeta-2+\frac{1}{\zeta}&=-\varepsilon(1+Aq+\mathcal{O}(q^2))-2-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1+Aq+\mathcal{O}(q^2)}=\\&=-\varepsilon(1+Aq+\mathcal{O}(q^2))-2-\frac{1}{\varepsilon}(1-Aq+\mathcal{O}(q^2))=\\&=(-\varepsilon-2-\frac{1}{\varepsilon})+(-A\varepsilon+\frac{A}{\varepsilon})q+\mathcal{O}(q^2)=\\&=-12-4A\sqrt{6}q+\mathcal{O}(q^2)\\\Rightarrow\frac{1}{\zeta-2+\frac{1}{\zeta}}&=-\frac{1}{12}+\frac{A\sqrt{6}}{36}q+\mathcal{O}(q^2)\\\Rightarrow\wp(z,\tau)&=(-\frac{1}{12}+\frac{A\sqrt{6}}{36}q)+\frac{1}{12}+(-12-4A\sqrt{6})q+\mathcal{O}(q^2)=\\&=(\frac{A\sqrt{6}}{36}-12)q+\mathcal{O}(q^2)=0\\\Rightarrow\frac{A\sqrt{6}}{36}-12&=0\\\Rightarrow A&=72\sqrt{6}\end{aligned}$$

Der Faktor von τ ist bei diesen Zweigen offensichtlich 0, der Koeffizientenvergleich ergibt damit:

$$\begin{aligned}z_0(\tau)&=m+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\pi i}(\ln\varepsilon+72\sqrt{6}q+\mathcal{O}(q^2))=C_1\mp(\frac{C_0}{4\pi^2}q+\mathcal{O}(q^2))\\\Rightarrow C_1&=m+\frac{1}{2}\pm\frac{\ln\varepsilon}{2\pi i}\\C_0&=\mp\frac{72\sqrt{6}}{2\pi i}4\pi^2=\pm 144\sqrt{6}\pi i\end{aligned}$$

Da sich die einzelnen Zweige bekanntlich nur um einen linearen Term unterscheiden ergibt sich zusätzlich noch:

$$C_2=n\in\mathbb{Z}$$

Abschließend erhalten wir also unsere gewünschte Formel:

Satz 5.2.12 *Die Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zum Gitter $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ sind für $\tau \not\sim i$ (unter Γ) gegeben durch:*

$$z = \frac{1}{2} + m + n\tau \pm \big(\frac{1}{2\pi i}\ln(5+2\sqrt{6}) + 144\pi i\sqrt{6}\int_{\tau}^{i\infty} \frac{\Delta(t)}{G_6(t)^{\frac{3}{2}}}(t-\tau)\mathrm{d}t\big)$$

Im Fall von $\tau \sim i$ verschwindet $\wp(z,\tau)$ in den Stellen

$$z = \frac{2m+1}{2} + \frac{2n+1}{2}\tau, \quad m,n \in \mathbb{Z}$$

Teil III

Zahlentheorie

Kapitel 6

Hilfsmittel

6.1 Fourierentwicklungen

6.1.1 Fourierentwicklung der Eisensteinreihen

Die Eisensteinreihen

$$G_k(z) = \sum{}' \frac{1}{(m+nz)^k} \quad \forall k > 2$$

sind ganze Modulformen und daher sicherlich 1-periodisch und besitzen daher eine Fourierentwicklung der Form

$$G_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n, \quad q = e^{2\pi i z}$$

Um diese Entwicklung zu bestimmen, geht man den Umweg über Winkelfunktionen, die den Eisensteinreihen ähnliche Entwicklungen besitzen. Die (bekannte) Laurententwicklung des Kotangens liefert uns

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

Wenn wir also die Fourierreihe dieses Kotangens aufstellen können, so erhalten wir durch Differentiation jene der Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}$$

welche den Eisensteinreihen schon recht ähnlich sind.

Lemma 6.1.1 *Es gilt:*

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

mit $q = e^{2\pi i z}$ *für* $z \in \mathbb{H}$.

Beweis

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2}}{\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}} = \pi i \frac{q+1}{q-1} =$$

$$= \pi i - \frac{2\pi i}{1-q} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Da $z \in \mathbb{H}$ ist, ist $|q| < 1$, und die Reihe konvergiert absolut.

□

Durch mehrmaliges Differenzieren, erhält man aus dieser Darstellung nun

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

für $k \geq 2$ und schließlich:

Satz 6.1.2 *Für gerades k mit $k \geq 4$ gilt:*

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

Bemerkung Die im Satz auftretende Funktion σ_k ist die bekannte zahlentheoretische Funktion definiert durch

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \ ,$$

also die Summe der k-ten Potenzen aller Teiler von n.

Beweis

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\neq 0} \frac{1}{(m+nz)^k} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^k} \Big] =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2\pi i n m z} \Big] =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^{nm} =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n}} d^{k-1} \Big) q^n =$$

$$= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

□

6.1.2 Die Eisensteinreihe vom Gewicht 2

Wir haben festgestellt, dass die Reihe

$$\sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

nicht konvergiert (was auch aus der Tatsache ersichtlich ist, dass es keine ganze nichtverschwindende Modulform von Gewicht 2 gibt). Die oben verwendete Methode kann aber benutzt werden, um dennoch eine Eisensteinreihe vom Gewicht 2 zu definieren.

Satz 6.1.3 *Durch*

$$\begin{aligned} G_2(z) &:= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m+nz)^2} \Big] \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \end{aligned}$$

wird eine in der oberen Halbebene analytische Funktion, die Eisensteinreihe vom Gewicht 2, definiert.

Beweis Die gleichen Umformungen wie in Satz 6.1.2 führen auf

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m+nz)^2} \Big] \\ &= 2\zeta(2) + 2\frac{(2\pi i)^2}{(2-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2-1}(n) q^n \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \qquad (6.1) \end{aligned}$$

Um den Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass (6.1) gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{H}$, also gleichbedeutend für alle $q = e^{2\pi i z}$ mit $|q| < 1$, absolut konvergiert. (6.1) konvergiert genau dann absolut, wenn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |n q^{mn}|$$

konvergiert, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n}} d \Big) |q|^n \qquad (6.2)$$

konvergiert. Wegen

$$\sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n}} d \ < n$$

ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|q|^n$$

eine konvergente Majorante für (6.2).

□

Was für Eigenschaften hat nun diese eben eingeführte Funktion $G_2(z)$? Sie ist holomorph in ganz $\mathbb{H}$ und unmittelbar aus der Definition ist ersichtlich, dass

$$G_2(z+1) = G_2(z)$$

Andererseits kann G_2 aber keine Modulform vom Gewicht 2 sein, es gilt also sicher

$$G_2(-\frac{1}{z}) \neq z^2 G_2(z)$$

Wie transformiert also G_2 unter der zweiten elementaren Modultransformation? Es gilt:

$$\begin{aligned} G_2(-\frac{1}{z}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m-\frac{n}{z})^2} \Big] = \\ &= z^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz-n)^2} \Big] = \\ &= z^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^2} \Big] = \\ &=: z^2 G_2^*(z) \end{aligned}$$

wobei G_2^* der Reihe G_2 mit vertauschter Summationsreihenfolge entspricht.

Satz 6.1.4

$$G_2(z) - G_2^*(z) = \frac{2\pi i}{z}$$

Beweis Man betrachte die beiden Hilfsreihen

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0),(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big]$$

$$H^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0),(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big]$$

und die Differenz

$$\begin{aligned} H(z) - G_2(z) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0) \\ (m,n)\neq(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} - \frac{1}{(m+nz)^2} \Big] - \\ &- \frac{1}{(0z+1)^2} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0) \\ (m,n)\neq(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} \Big] - 1 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nun ist aber sicher $\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)} = \mathcal{O}(\frac{1}{(mz+n)^3})$, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum' \frac{\varepsilon}{(mz+n)^3}$, welche eine Majorante von (6.3) darstellt, haben wir bereits bewiesen. Wir können in (6.3) also die Summationsreihenfolge vertauschen und damit gilt:

$$\begin{aligned} G_2(z) - H(z) &= G_2^*(z) - H^*(z) \\ \Rightarrow G_2(z) - G_2^*(z) &= H(z) - H^*(z) \end{aligned}$$

Wir haben unser Problem also auf die Differenz zweier Teleskopreihen zurückgeführt, deren Summe wir uns relativ einfach ausrechnen können. Falls $m \neq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} &= \Big(\sum_{n=-\infty}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big) \Big(\frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big) = \\ &= \lim_{n\to-\infty} \Big(\frac{1}{mz+n-1} \Big) - \frac{1}{mz+0} + \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{1}{mz+n} \Big) + \frac{1}{mz+1-1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für $m = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq0 \\ n\neq1}}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} &= \Big(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \Big) \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Big) = \\ &= -\frac{1}{-1} + \frac{1}{2-1} = 2 \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$H(z) = 2.$$

Bei der Reihe H^* kann man die Teleskopeigenschaft nicht direkt ausnützen, ein wenig mehr Rechenaufwand ist hier vonnöten.

$$
\begin{aligned}
H^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0),(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big] = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N+1}^{N} \Big[\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0),(0,1)}}^{\infty} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big] = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{n=-N+1 \\ (m,n)\neq(0,0),(0,1)}}^{N} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big] = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \Big[\sum_{n=-N+1}^{N} \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n} \Big] + \\
&\quad + \Big(\sum_{n=-N+1}^{-1} + \sum_{n=2}^{N} \Big) \Big(\frac{1}{0z+n-1} - \frac{1}{0z+n} \Big) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \Big[\frac{1}{mz-N} - \frac{1}{mz+N} \Big] + \frac{1}{-N} - \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{N} = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \Big[\frac{1}{mz-N} - \frac{1}{mz+N} \Big] + 2 = \\
&= 2 + \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{mz-N} - \frac{1}{mz+N} \Big] = \\
&= 2 + \lim_{N\to\infty} \frac{2}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{m-\frac{N}{z}} - \frac{1}{m+\frac{N}{z}} \Big] = \\
&= 2 + \lim_{N\to\infty} \frac{2}{z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m-\frac{N}{z}} - \frac{1}{N} = \\
&= 2 + \lim_{N\to\infty} \frac{2}{z} \pi \cot(\pi \frac{-N}{z}) = 2 + \lim_{N\to\infty} \frac{2}{z} \pi i \frac{e^{-\frac{\pi N}{z}} + e^{\frac{\pi N}{z}}}{e^{-\frac{\pi N}{z}} - e^{\frac{\pi N}{z}}} = \\
&= 2 + \lim_{N\to\infty} \frac{2}{z} \pi i \Big(1 - \frac{2}{e^{\frac{2\pi N}{z}} - 1} \Big) = 2 - \frac{2\pi i}{z} \\
&\Rightarrow G_2(z) - G_2^*(z) = H(z) - H^*(z) = \frac{2\pi i}{z}
\end{aligned}
$$

□

6.2 Thetareihen

Wo immer die Rede von elliptischen Funktionen ist, treten notgedrungen Thetareihen auf. Die erste derartige Reihe wurde von Jacobi, dem eigentlichen „Schöpfer“der elliptischen Funktionen, in seinem berühmten Werk Jacobi (1829) in der Form

$$\frac{\Theta(\frac{2Kx}{\pi})}{\Theta(0)} = A\{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \dots\}$$

aufgestellt (genaugenommen ist das nicht die ganze Wahrheit, eingeführt wurde die Funktion über ein Integral, die Reihenentwicklung ist nur ein Resultat). Eine der heute üblichen Varianten ist es, die Reihen

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n z} \\
\vartheta_1(z,q) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\pi i (2n+1) z} \\
\vartheta_2(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{\pi i (2n+1) z} \\
\vartheta_3(z,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z}
\end{aligned}$$

(mit $q = e^{i\pi\tau}$ und $\tau \in \mathbb{H}$) zu betrachten. In diesem Bereich herrscht in der einschlägigen Literatur allerdings Wildwuchs. Wenn man n verschiedene Bücher hernimmt, wird man zumeist n verschiedene Definitionen der Thetareihen bekommen. Da sie jedoch stets mehr oder weniger von gleichen Typus sind, kann man sie stets (unter anderem) zu folgenden praktischen Dingen verwenden

- Darstellung elliptischer Funktionen
- insbesondere die Konstruktion der *Jacobischen Elliptischen Funktionen*
- Konstruktion von Modulformen
- numerische Berechnung von elliptischen Funktionen (die Thetareihen haben offensichtlich, eine schnelle Konvergenz, während die Reihe der $\wp$-Funktion nur kriechend konvergiert)

Diese (auch sehr interessanten Aspekte) werde ich im folgenden jedoch nicht behandeln, hierfür sei beispielsweise auf Rühs (1962), Whittaker and Watson (1902) oder Hurwitz and Courant (1925) verwiesen.

Im folgenden betrachten wir die Thetareihe

$$\tilde{\vartheta}(z,q)(=\tilde{\vartheta}(z,\tau)) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z}$$

und zwar speziell als Funktion von τ bei festem z.

Satz 6.2.1 *Die Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z}$$

ist kompakt konvergent für $(z,\tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$.

Beweis Sei τ aus dem Rechteck mit den Eckpunkten $-A+i\varepsilon, A+i\varepsilon, A+i\frac{1}{\varepsilon}, -A+i\frac{1}{\varepsilon}$ mit $A, \varepsilon > 0$ und $z \in B_R(0)$. Dann gilt sicher

$$|q^{n^2} e^{2\pi i n z}| \leq |q|^{n^2} e^{2\pi i R} \leq C \cdot (e^{-\pi\varepsilon})^{n^2}$$

Der rechte Ausdruck ist von z und τ unabhängig, und die Summe darüber ist eine Teilreihe der geometrischen Reihe.

□

Lemma 6.2.2 *Auch die Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+z)^2 \tau}$$

ist kompakt konvergent für $(z,\tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$.

Beweis Es gilt die Abschätzung

$$\Im((n+z)^2\tau) = \Re((n+z)^2)\Im(\tau) + \Im((n+z)^2)\Re(\tau) \geq Cn^2 + 0 \cdot \Re(\tau) = Cn^2$$

und damit

$$|e^{\pi i (n+z)^2 \tau}| = e^{\Re(\pi i (n+z)^2 \tau)} = e^{-\pi \Im((n+z)^2\tau)} \leq e^{-C\pi n^2}$$

□

Satz 6.2.3 (Jacobische Thetatransformationsformel) *Für alle* $(z,\tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ *gilt:*

$$\tilde{\vartheta}(z, -\frac{1}{\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \frac{-1}{\tau} n^2} e^{2\pi i n z} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+z)^2 \tau}$$

wobei die Wurzel durch den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist.

Beweis

1. Zunächst zeigen wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1}$$

Für den Fall $\tau = iy$ liefert die Substitution $t = x\sqrt{y}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (iy) \frac{t^2}{y}} \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{z}{i}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}$$

Da die beiden Seiten der Behauptung holomorphe Funktionen sind, genügt es nach dem Identitätssatz bereits, dass wir die Aussage für reinimaginäres τ bewiesen haben.

2. Die Funktion

$$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+z)^2 \tau}$$

(bei festem τ) ist offensichtlich 1-periodisch, wir können sie also in eine Fourierreihe der Form

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

entwickeln. Die Fourierkoeffizienten bestimmen sich durch

$$a_k = \int_0^1 g(x+iy) e^{-2\pi i k (x+iy)} \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{\pi i (n+(x+iy))^2 \tau - 2\pi i k (x+iy)} \mathrm{d}x =$$
$$= (\text{substituiere } u = x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-n}^{-n+1} e^{\pi i (u+iy)^2 \tau - 2\pi i k (u-n+iy)} \mathrm{d}u =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (z^2 \tau - 2kz)} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (z - \frac{k}{\tau})^2 - \frac{k^2}{\tau}} \mathrm{d}u =$$
$$= e^{-\pi i \frac{k^2}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (z - \frac{k}{\tau})^2} \mathrm{d}u = (\text{ Wähle } \Im(z) = \Im(\frac{k}{\tau})) =$$
$$= (\text{Translation von } u) = e^{-\pi i \frac{k^2}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau u^2} \mathrm{d}u =$$
$$= e^{\pi i \frac{-1}{\tau} k^2} \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}$$

□

Nun haben wir das nötige Rüstzeug um die für uns im nächsten Kapitel relevante spezielle Thetareihe

$$\vartheta(\tau) := \tilde{\vartheta}(0,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

zu charakterisieren. Zunächst stellen wir einige Eigenschaften der Thetareihe zusammen.

Lemma 6.2.4 *Die Thetareihe $\tilde{\vartheta}(z,\tau)$ hat die Transformationseigenschaften:*

1. $\tilde{\vartheta}(z+1,\tau) = \tilde{\vartheta}(z,\tau)$
2. $\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau) = e^{-i\pi\tau - 2\pi i z}\tilde{\vartheta}(z,\tau)$
3. $\tilde{\vartheta}(z,\tau) = 0 \iff z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau + m + n\tau,\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Beweis

1.

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(z+1,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n(z+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n(z)} e^{2\pi i n} = \\ &= \tilde{\vartheta}(z,\tau)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi i\tau} e^{2\pi i n(z+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi i\tau + 2\pi i n z + 2\pi i n\tau} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n+1)^2\pi i\tau + 2\pi i n z - \pi i\tau} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n+1)^2\pi i\tau + 2\pi i(n+1)z - \pi i\tau - 2\pi i z} = \\ &= e^{-i\pi\tau - 2\pi i z}\tilde{\vartheta}(z,\tau)\end{aligned}$$

Eine Nullstelle ist sicherlich durch $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau$ gegeben wegen:

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2 + i\pi n + i\pi\tau n} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau(n+\frac{1}{2})^2} = \\ &= e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

Und die Summanden a_n erfüllen wegen

$$((n-1)+\frac{1}{2})^2 = (n-\frac{1}{2})^2 = (-n+\frac{1}{2})^2$$

die Rekursion

$$a_{-n} = -a_{n-1}.$$

Die Summe verschwindet daher.

3. Elementares Differenzieren der Eigenschaft 2 liefert

$$\frac{\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau)} = \frac{\tilde{\vartheta}(z,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z,\tau)} - 2\pi i$$

Sei nun γ der positiv durchlaufene Rand des Parallelogramms mit den Eckpunkten $(a, a+1, a+1+\tau, a+\tau)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\tilde{\vartheta}(z,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z,\tau)}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+1}\left(\frac{\tilde{\vartheta}(z,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z,\tau)} - \frac{\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z+\tau,\tau)}\right)\mathrm{d}z + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a+\tau}^{a}\left(\frac{\tilde{\vartheta}(z,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z,\tau)} - \frac{\tilde{\vartheta}(z+1,\tau)'}{\tilde{\vartheta}(z+1,\tau)}\right)\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^{a+1} 2\pi i \mathrm{d}z = 1\end{aligned}$$

Da $\tilde{\vartheta}(z,\tau)$ in der ganzen oberen Halbebene analytisch ist, liegt in jedem solchen Parallelogramm genau eine Nullstelle, die Transformationseigenschaften sagen uns wo die restlichen liegen.

□

Satz 6.2.5 *Die Thetareihe $\vartheta(z)$ besitzt in der oberen Halbebene keine Nullstellen.*

Beweis Laut Definition ist $\vartheta(z) = \tilde{\vartheta}(0,z)$. Eine eventuelle Nullstelle müsste also wegen dem vorigen Lemma die Gestalt

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z + m + nz$$

haben, und damit müsste auch

$$\Im(0) = 0 = \Im(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z + m + nz) = \Im((n+\frac{1}{2})z) = (n+\frac{1}{2})\Im(z) > 0$$

gelten.

□

Satz 6.2.6 *Die Thetareihe $\vartheta(z) = \sum e^{\pi i n^2 z}$ hat die Eigenschaften:*

1. $\vartheta(z+2) = \vartheta(z)$
2. $\vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)$
3. $\lim_{\Im(z)\to\infty} \vartheta(z) = 1$
4. $\lim_{\Im(z)\to\infty} \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \vartheta(1-\frac{1}{z}) = 2$

Beweis

1. Trivial
2. Dies ist eine Spezialisierung der Thetatransformationsformel.
3. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können Grenzübergang und Summation vertauscht werden, alle Summanden bis auf den für $n = 0$ verschwinden.
4. $$\begin{aligned}\sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \vartheta(1-\frac{1}{z}) &= \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 (1-\frac{1}{z})} = \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2} e^{\pi i n^2 (-\frac{1}{z})} = \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n} e^{\pi i n^2 (-\frac{1}{z})} = \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} e^{\frac{-\pi i z}{4}} \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 z} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n^2+n) z}\end{aligned}$$

   Beim Grenzübergang liefern nur die Summanden für $n = 0$ und $n = -1$ einen Beitrag von jeweils 1.

□

$\vartheta(z)$ hat also einer Modulform nicht unähnliche Transformationseigenschaften. Es gibt zwei Möglichkeiten, den Begriff der meromorphen Modulform zu verallgemeinern:

1. Man verlangt die Transformationseigenschaften nur bezüglich einer Untergruppe von Γ.

2. Man erlaubt mehr Gewichte als ganzzahlige Werte (sogenannte *Halbganze Gewichte*)

In beiden Fällen wird die Situation rasch sehr kompliziert (siehe z.B. Freitag and Busam (2000)). Wir benötigen für unsere Zwecke zum Glück nur einen Spezialfall des ersten Punktes.

6.2.1 Die Thetagruppe

Definition 18 *Die Untergruppe Γ_ϑ der elliptischen Modulgruppe Γ welche von den beiden Matrizen*

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, heißt die Thetagruppe.

Bemerkung Die beiden erzeugenden Matrizen entsprechen den Transformationen

$$z \mapsto z + 2$$
$$z \mapsto -\frac{1}{z}$$

Satz 6.2.7 *Für jede Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\vartheta$ gilt, dass $a + b + c + d$ gerade ist.*

Beweis Die Matrizen S_2 (inklusive ihrer Potenzen) sowie

$$T_2^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{Z}$$

erfüllen die Geradheitsbedingung. Sei nun $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine Matrix mit $a + b + c + d = 2l$ dann gilt:

$$M \cdot T_2^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2ka + b \\ c & 2kc + d \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow a + (2ka + b) + c + (2kc + d) = a + b + c + d + 2k(a + c) \text{ gerade}$$
$$M \cdot S_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow a - a + d - c = a + b + c + d - 2(a + c) \text{ gerade}$$

Durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Matrizen ergibt sich daraus die Bedingung für alle Matrizen der Thetagruppe.

□

Korolar 6.2.8 *Die Thetagruppe ist eine echte Untergruppe der Modulgruppe.*

Beweis Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

kann wegen $1 + 1 + 0 + 1 = 3$ nicht in Γ_ϑ liegen.

□

Satz 6.2.9 *Ein Fundamentalbereich der Thetagruppe ist gegeben durch*

$$\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} || \tau| > 1 \wedge |\Re(\tau)| < 1\}$$

Beweis

1. Jedes τ ist äquivalent zu einem $\tau' \in \bar{\mathcal{F}}$:
   Durch Addition/Subtraktion von $2k$ kann man den Realteil in den Streifen $-1 \leq \Re \leq 1$ bringen. Falls der Betrag noch kleiner als 1 ist, wendet man noch einemal die Transformation $\tau \mapsto -\frac{1}{z}$ an, und man befindet sich in $\bar{\mathcal{F}}$

2. Je zwei Elemente aus $\mathcal{F}$ sind nicht äquivalent:
   Hier können genau dieselben Argumente, wie bei der vollen Modulgruppe verwendet werden.

□

Definition 19 *Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \bar{\mathbb{C}}$ heißt Modulfunktion zur Thetagruppe wenn:*

1.

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta$$

2. alle Pole von f einen beschränkten Imaginärteil haben.

3. f in $i\infty$ höchstens einen Pol hat.

4. f stetig nach 1 fortgesetzt werden kann.

Bemerkung Die letzte Bedingung ist äquivalent mit der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} f(1 - \frac{1}{z}).$$

Diese Existenz ist notwendig, da bei der Thetagruppe der Rand des Fundamentalbereichs bereits den Rand des Definitionsbereiches von f schneidet. Man nennt 1 und -1, ein Analogon zu $i\infty$, *Spitzen*.

Satz 6.2.10 *Sei $f \not\equiv 0$ eine Modulfunktion zur Thetagruppe. Dann gilt:*

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{H}/\sim \\ a \not\sim i}} ord(f;a) + \frac{1}{2} ord(f;i) + ord(f;i\infty) = 0$$

Bemerkung Hierbei handelt es sich (wie auch im Beweis offensichtlich wird) um eine Variante der $k/12$-Formel.

Beweis Wie im Beweis der $k/12$-Formel integrieren wir $g(z) = \frac{f'}{f}(z)$ über

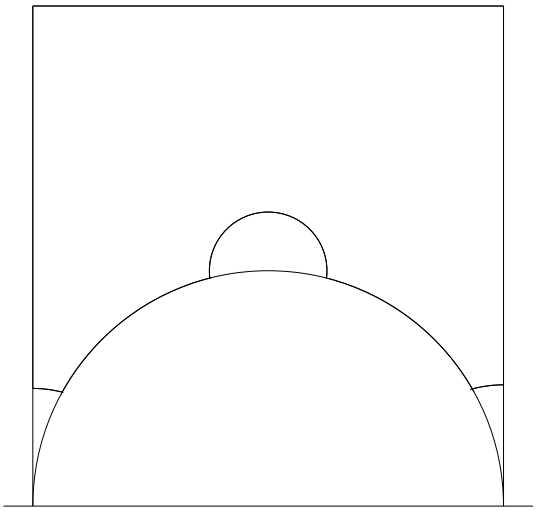


Abbildung 6.1: Integrationsweg

den positiv orientierten Rand von $\mathcal{F}$ mit kleinen Kreisen um $1, -1$ und i (siehe Skizze).

1. Die beiden Vertikalkanten:
   Wegen der 2-Periodizität von $g(z)$ heben sich die Integrale über dieses Kanten gegenseitig auf.

2. Die Horizontalkante:
   f und g besitzt eine Fourierentwicklung in der Form

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\pi i n z} \quad \text{bzw.} \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n e^{\pi i n z}$$

woraus sich für das Integral ergibt:

$$\begin{aligned}\int_A^{A-2} g(z)\mathrm{d}z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_A^{A-2} e^{\pi i n z}\mathrm{d}z = -2a_0 = \\ &= -2g(i\infty) \\ g(z) &= \frac{\sum_{n=-k}^{\infty} b_n e^{\pi i n z}}{\pi i \sum_{n=-k}^{\infty} n b_n e^{\pi i n z}} = \frac{\sum_{n=-k}^{\infty} b_n e^{\pi i (n+k) z}}{\pi i \sum_{n=-k}^{\infty} n b_n e^{\pi i (n+k) z}} \\ \Rightarrow \lim_{z\to i\infty} g(z) &= \frac{-k\pi i b_{-k}}{b_{-k}} = -k\pi i = ord(f; i\infty)\pi i\end{aligned}$$

3. Die Kreisbögen um 1 und -1:
   Wir können g in 1 bzw -1 hinein fortsetzen, deshalb können wir hier genauso verfahren wie mit den Kreisbögen um ϱ in der $k/12$-Formel. Da die Vertikalkanten Tangenten des Kreisbogens sind, geht der Öffnungswinkel mit dem Radius gegen 0, das Integral darüber damit auch.

4. Der Kreisbogen um i:
   Analog zum entsprechenden Integral bei der $k/12$-Formel erhält man hier
   $$-\pi i \cdot ord(f; i)$$

5. Die beiden Kreissegmente auf dem Einheitskreis:
   Die beiden Kreissegmente (bezeichnen wir sie mit γ und γ') werden durch die Transformation $z \mapsto -\frac{1}{z}$ ineinander übergeführt (bei vertauschter Orientierung). Durch Differenzieren erhält man $g(-\frac{1}{z}) = z^2 g(z)$. Sei $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung von γ. Dann folgt:
   $$\begin{aligned}\int_{\gamma'} g(z)\mathrm{d}z &= -\int_0^1 g(-\frac{1}{\beta(t)})(-\frac{1}{\beta(t)})'\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^1 g(\beta(t))\beta^2(t)\frac{1}{\beta^2(t)}\beta'(t)\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^1 g(\beta(t))\beta'(t)\mathrm{d}t = -\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$
   Die beiden Integrale heben sich also gegenseitig auf.

Fasst man diese Resultate zusammen, so erhält man die gewünschte Formel. Es kann nur noch der Sonderfall auftreten, dass auf dem Integrationsweg Pole oder Nullstellen liegen. Da dies höchstens endlich viele sein können (der Rand ist kompakt), können wir diese mit jeweils zwei Kreisen „umgehen“(vergleiche auch hier den entsprechenden Abschnitt beim Beweis der $k/12$-Formel.

□

Korolar 6.2.11 *Jede auf ganz $\mathbb{H}$ analytische Modulfunktion f zur Thetagruppe ist konstant.*

Beweis Sei f eine entsprechende Funktion. Sie kann wegen des eben Bewiesenen keine Nullstellen besitzen. Mit f ist auch $g(z) = f(z) - f(a)$, $a \in \mathbb{H}$ beliebig, eine analytische Modulfunktion zur Thetagruppe, sie besitzt daher auch keine Nullstellen, es existiert also keine Stelle $a' \in \mathbb{H}$ mit $f(a') = f(a)$. Da dies nicht stimmen kann, kann der obige Satz für $g(z)$ nicht gelten, es ist also $g \equiv 0$ und damit $f(z) \equiv c$.

□

Kapitel 7

Additive Zahlentheorie

Die *additive Zahlentheorie* ist jenes Teilgebiet der Zahlentheorie, welches sich mit Partitionen von Zahlen befasst. Das heißt, es wird gefragt, auf wie viele Arten sich eine natürliche Zahl n in der Form

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

schreiben lässt, wobei die a_i aus einer gewissen Klasse von Zahlen stammen.

7.1 Summe von Quadraten

Wir wollen uns im speziellen mit der Summe von Quadraten befassen, das heißt wir suchen die Zahlen der Form

$$A_k(n) := \#\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^k | a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = n\}$$

Hierbei handelt es sich Wohlgemerkt um eine sehr „großzügige“Art der Zählung. Verschiedene Reihenfolgen der Summanden, vorzeichenbehaftete Summanden sowie auftretende Nullen werden allesamt mitgezählt. So ist beispielsweise bereits

$$A_2(1) = \#\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} = 4$$

Der Trick den wir zur Berechnung dieser Zahlen (wenigstens zweier solcher Werte) anwenden wollen ist der folgende. Man betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{m^2}$$

bzw. deren Potenzen, die wir (im Falle gleichmäßiger Konvergenz) durch formales Ausmultiplizieren erhalten

$$\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{m^2}\Big)^k = \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{Z} \\ i=1,\ldots,k}} q^{m_1^2 + \cdots + m_k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) q^n$$

Dabei haben wir noch keinerlei Voraussetzungen für q gemacht, abgesehen von einer hinreichenden Konvergenz. Wohin der Weg führt, ist jetzt offensichtlich: Wir wählen

$$q = e^{\pi i z}$$

erhalten so eine Thetareihe und müssen „nur noch“die Fourierentwicklung von deren Potenzen bestimmen.

Satz 7.1.1 *Die Zahlen $A_k(n)$ sind die n-ten Fourierkoeffizienten von $\vartheta(z)^k$*

7.1.1 Potenzen der Thetareihe

Mit Hilfe des letzten Abschnittes, können wir diese Potenzen sehr gut charakterisieren:

Satz 7.1.2 *Sei $r \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph mit den Eigenschaften:*

- $f(z+2) = f(z)$
- $f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}^r f(z)$
- $\lim_{\Im(z)\to\infty} f(z) = C \in \mathbb{C}$
- $\exists \lim_{\Im(z)\to\infty} \sqrt{\frac{z}{i}}^{-r} e^{\frac{-\pi i r z}{4}} \vartheta(1-\frac{1}{z})$

Dann gilt:

$$f(z) = C \cdot \vartheta^r(z)$$

Beweis Die beiden Grenzwerte sichern das richtige Verhalten von h in den Spitzen, wegen den ersten beiden Eigenschaften hat

$$h(z) = \frac{f(z)}{\vartheta^r(z)}$$

die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} h(z+2) &= h(z) \\ h(-\frac{1}{z}) &= h(z), \end{aligned}$$

ist also eine Modulfunktion zur Thetagruppe. Da $\vartheta(z)$ (und damit auch $\vartheta^r(z)$) keine Nullstellen in $\mathbb{H}$ besitzt, ist $h(z)$ sogar holomorph auf $\mathbb{H}$, folglich eine konstante Abbildung. Diese Konstante muss gleich dem Ergebnis des Grenzwertes für $z \to i\infty$ sein.

□

7.1.2 Summen von 8 Quadraten

Unsere Aufgabe ist es also nun, eine Funktion f zu finden mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(z+2) &= f(z) \\ f(-\frac{1}{z}) &= z^4 f(z) \\ \exists \lim_{\Im(z)\to\infty} & f(z) \\ \exists \lim_{\Im(z)\to\infty} & e^{-2\pi i z} z^{-4} f(1-\frac{1}{z}) \end{aligned}$$

Erster Kandidat ist natürlich G_4, die Eisensteinreihe vom Gewicht 4. Die beiden Transformationsbedingungen sind erfüllt, auch der erste Grenzwert ist uns schon bekannt ($\lim_{\Im(z)\to\infty} G_4(z) = 2\zeta(4)$), doch beim zweiten Grenzwert haben wir kein Glück:

$$\begin{aligned} G_4(1-\frac{1}{z}) = G_4(-\frac{1}{z}) &= z^4 G_4(z) \\ \Rightarrow e^{-2\pi i z} z^{-4} G_4(1-\frac{1}{z}) &= e^{-2\pi i z} G_4(z) \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist für $\Im(z) \to \infty$ unbeschränkt.

Als zweiten Versuch betrachten wir die Funktion

$$\tilde{G}_4(z) := G_4(\frac{z+1}{2})$$

Lemma 7.1.3 *Es gilt:*

$$\tilde{G}_4(z) = 2^4 \sum_{\substack{(m,n)\neq(0,0) \\ m+n\in\mathbb{N}_g}} (m+nz)^{-4}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \tilde{G}_4(z) = G_4(\frac{1}{2}(z+1)) &= \sum{}' (m+\frac{z+1}{2}n)^{-4} = \\ &= 2^4 \sum{}' ((2m+n)+nz)^{-4} = \\ &= 2^4 \sum_{\substack{(m,n)\neq(0,0) \\ m-n\in\mathbb{N}_g}} (m+nz)^{-4} = \\ &= 2^4 \sum_{\substack{(m,n)\neq(0,0) \\ m+n\in\mathbb{N}_g}} (m+nz)^{-4} \end{aligned}$$

□

Untersuchen wir nun, ob $\tilde{G}_4$ unseren Ansprüchen genügt

1.
$$\tilde{G}_4(z+2) = G_4(\frac{z+3}{2}) = G_4(\frac{z+1}{2}+1) = \tilde{G}_4(z)$$

2.
$$\begin{aligned}\tilde{G}_4(-\frac{1}{z}) = G_4(\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}) = G_4(\frac{z-1}{2z}) = \\ = \sum{}'(m+n\frac{z-1}{2z})^{-4} = \\ = (2z)^4 \sum{}'((2m+n)z-n)^{-4} = \\ = (2z)^4 \sum_{\substack{(m,n)\neq(0,0)\\ m+n\in\mathbb{N}_g}} (m+nz)^{-k} = \\ = z^4\tilde{G}_4(z)\end{aligned}$$

3.
$$\lim_{\Im(z)\to\infty} \tilde{G}_4(z) = \lim_{\Im(z)\to\infty} G_4(z) = 2\zeta(4)$$

4.
$$\begin{aligned}\tilde{G}_4(1-\frac{1}{z}) = G_4(\frac{2z-1}{2z}) = G_4(-\frac{1}{2z}) = (2z)^4 G_4(2z) \\ \Rightarrow e^{-2\pi iz} z^{-4}\tilde{G}_4(1-\frac{1}{z}) = 2^4 e^{-2\pi iz} G_4(2z) \to \infty,\end{aligned}$$

wobei der lezte Grenzübergang für $\Im(z) \to \infty$ gebildet wird.
Also wieder nichts. Wo liegt denn genau das Problem? Diese beiden betrachteten Reihen besitzen den scheinbaren Nachteil, dass ihre Fourierentwicklung für
$$z^4 f(1-\frac{1}{z}) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots$$
einen nichtverschwindenden 0-ten Koeffizienten besitzt (bei der Grenzwertbildung multiplizieren wir ja noch mit q^{-1}). Des Rätsels Lösung ist es also eine passende Linearkombination dieser beiden Reihen zu verwenden, passend so, dass die Fourierentwicklung erst mit q^1 beginnt.

Satz 7.1.4 *Es existieren Konstanten λ, μ so, dass*
$$f(z) := \lambda G_4(z) + \mu\tilde{G}_4(z) = C \cdot \vartheta^8(z)$$
ist.

Beweis Zunächst ist offensichtlich, dass f die Transformationseigenschaften von G_4 und $\tilde{G}_4$ „erbt“. Wir müssen noch die Existenz der beiden kritischen Grenzwerte verifizieren. Der erste ist wieder kein Problem es gilt

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} f(z) = 2(\lambda+\mu)\zeta(4)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} f(1-\frac{1}{z}) &= z^4(\lambda G_4(z) + 16\mu G_4(2z)) \\ \Rightarrow e^{-2\pi i z} z^{-4} f(1-\frac{1}{z}) &= q^{-1}(\lambda G_4(z) + 16\mu G_4(2z)) = \\ &= q^{-1}(\lambda \sum_{n\geq 0} a_n q^n + 16\mu \sum_{m\geq 0} a_m q^{2m}) = \\ &= q^{-1}(\lambda a_0 + 16\mu a_0 + \mathcal{O}(q)) \end{aligned}$$

Unterwirft man also (λ, μ) der Einschränkung

$$\lambda + 16\mu = 0$$

dann verschwindet der 0-te Koeffizient der rechtsstehenden Fourierreihe, der gewünschte Grenzwert existiert.

□

Aus dieser großen Menge von passenden Faktoren wählen wir uns jetzt noch die geeignetsten aus:

Korolar 7.1.5

$$\vartheta^8(z) = \frac{48}{\pi^4} G_4(z) - \frac{3}{\pi^4} G_4\big(\frac{z+1}{2}\big)$$

Beweis Aus dem obigen Satz und unserer Charakterisierung wissen wir:

$$\begin{aligned} C\cdot\vartheta^8(z) &= \lambda G_4(z) + \mu G_4\big(\frac{z+1}{2}\big) \\ C &= \lim_{\Im(z)\to\infty} \lambda G_4(z) + \mu G_4\big(\frac{z+1}{2}\big) = 2(\lambda+\mu)\zeta(4) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dass $\lambda = -16\mu$ und $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ dann folgt

$$C = \frac{\pi^4}{3}(-\mu)$$

Setzt man nun beispielsweise $C = 1$ oder $\mu = -1$ dann erhält man daraus die übrigen Koeffizienten.

□

Nun kennen wir aber die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen bereits, es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vartheta^8(z) &= \frac{3}{\pi^4}(32\zeta(4) + 32\frac{16\pi^4}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz} - \\ &- 2\zeta(4) - 2\frac{16\pi^4}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{\pi in(z+1)}) = \\ &= 1 + 16^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz} - 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_3(n)e^{\pi inz}\end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Koeffizienten ablesen, dafür treffen wir eine Fallunterscheidung:

- $n = 0$:
  Einfacher Vergleich (oder direkte Überlegung) zeigt: $A_8(0) = 1$
- n ungerade:
  Ungerade Potenzen können nur in der rechten Summe auftreten, das ergibt:
  $$A_8(n) = -16\sigma_3(n)(-1)^n = 16\sigma_3(n)$$
- n gerade:
  Hier muss man beide Summen in Betracht ziehen.
  $$\begin{aligned}A_8(n) &= 16^2\sigma_3(\frac{1}{2}n) - 16\sigma_3(n) = 16(16\sum_{d|\frac{n}{2}}d^3 - \sum_{d|n}d^3) = \\ &= 16(2\sum_{d|\frac{n}{2}}(2d)^3 - \sum_{d|n}d^3) = 16(2\sum_{\substack{d|n\\ d\in\mathbb{N}_g}}d^3 - \sum_{d|n}d^3) = \\ &= 16(\sum_{\substack{d|n\\ d\in\mathbb{N}_g}}d^3 - \sum_{\substack{d|n\\ d\in\mathbb{N}_u}}d^3) = 16\sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^3\end{aligned}$$

Betrachtet man die Resultate der ersten beiden Fälle, dann erkennt man, dass diese ebenfalls die Formel für den geraden Fall erfüllt. Schlussendlich bekommt man:

Satz 7.1.6

$$A_8(n) = 16(-1)^n(\sum_{\substack{d|n\\ d\in\mathbb{N}_g}}d^3 - \sum_{\substack{d|n\\ d\in\mathbb{N}_u}}d^3) = \sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^3$$

für $n \geq 1$

7.1.3 Summen von 4 Quadraten

Hier gestaltet sich die Situation etwas komplizierter als im „8 Quadrate“-Fall. Das liegt daran, dass die für die Konstruktion unserer Funktion verwendete Reihe G_2 nicht so einfach zu behandeln ist wie die gewöhnlichen Eisensteinreihen. Interessant ist dieser Fall besonders wegen:

Satz 7.1.7 (Satz von Lagrange) *Jede Zahl ist als Summe von 4 Quadraten darstellbar. Mit kleineren Summen kann man nicht jede natürliche Zahl darstellen. Also formell:*

$$4 = \min\{k \in \mathbb{N}^* | \forall n \in \mathbb{N} : A_k(n) > 0\}$$

Beweis Dass jede Zahl als Summe von vier Quadraten darstellbar ist, werden wir am Ende dieses Abschnittes sehen.
Außerdem kann man durch einfaches Probieren feststellen, dass 7 nicht als Summe von einem, zwei oder drei Quadraten darstellbar ist.

□

Bemerkung Dies ist bereits ein sehr alter Satz. Er wurde erstmals im Jahr 1770 on Lagrange bewiesen.

Wir suchen also eine 2-periodische Funktion f mit

$$f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}^4 f(z) = -z^2 f(z)$$

für die die beiden Grenzwerte existieren. Wir erinnern uns, dass die von uns konstruierte Reihe G_2 unter $z \mapsto -\frac{1}{z}$ das Verhalten

$$G_2(-\frac{1}{z}) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z$$

besitzt. Damit fällt jedenfalls schon ein Ansatz wie im letzten Abschnitt der Form $\lambda G_2(z) + \mu G_2(\frac{z+1}{2})$ flach (wegen des falschen Vorzeichens). Wir müssen es daher mit einem anderen Ansatz versuchen.

Satz 7.1.8 *Es existieren Konstante λ, μ, mit:*

$$\vartheta^4(z) = \lambda G_2(\frac{z}{2}) + \mu G_2(2z)$$

Beweis Sei $f := \lambda G_2(\frac{z}{2}) + \mu G_2(2z)$
Wieder müssen wir die 4 Bedingungen durchrechnen:

1.

$$f(z+2) = \lambda G_2(\frac{z}{2} + 1) + \mu G_2(2z+4) = f(z)$$

2.

$$G_2(-\frac{1}{2z}) = 4z^2G_2(2z) - 4\pi iz$$
$$G_2(-\frac{2}{z}) = \frac{1}{4}z^2G_2(\frac{z}{2}) - \pi iz$$
$$\Rightarrow f(-\frac{1}{z}) = 4\lambda z^2G_2(2z) - 4\lambda\pi iz + \mu\frac{1}{4}z^2G_2(\frac{z}{2}) - \mu\pi iz =$$
$$= z^2(4\lambda G_2(2z) + \frac{\mu}{4}G_2(\frac{z}{2})) - (4\lambda + \mu)\pi iz$$

Um den linearen Term loszuwerden, muss man nun klarerweise $4\lambda = -\mu$ wählen. Setzt man diese Beziehung auch noch zweimal in den ersten Summanden ein, dann bekommt man:

$$f(-\frac{1}{z}) = z^2(4\frac{-\mu}{4}G_2(2z) + \frac{-4\lambda}{4}G_2(\frac{z}{2})) = -z^2(\mu G_2(2z) + \lambda G_2(\frac{z}{2})) =$$
$$= -z^2f(z)$$

Die Funktion

$$f(z) = \lambda(G_2(\frac{z}{2}) - 4G_2(2z))$$

hat also das gewünschte Transformationsverhalten.

3. Direkt aus Definition von G_2 erhalten wir

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} G_2(z) = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$$

und daraus

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} f(z) = -6\lambda\zeta(2) = -\lambda\pi^2$$

4. Und schlussendlich noch der kompliziertere Grenzwert:

$$G_2(2(1 - \frac{1}{z})) = G_2(-2\frac{1}{z}) = (\frac{z}{2})^2G_2(\frac{z}{2}) - \pi iz$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 2 & -1\end{smallmatrix}\right)$ liegt in Γ und damit liegt $\frac{z-1}{2z-1}$ in $\mathbb{H}$ falls $z \in \mathbb{H}$. Daher gilt:

$$G_2(\frac{z-1}{2z-1}) = (\frac{2z-1}{z-1})^2G_2(-\frac{2z-1}{z-1}) + 2\pi i\frac{2z-1}{z-1} =$$
$$= (\frac{2z-1}{z-1})^2G_2(-\frac{1}{z-1}) + 2\pi i\frac{2z-1}{z-1} =$$
$$= (2z-1)^2G_2(z-1) + 2\pi i\frac{2z-1}{z-1} - 2\pi i\frac{(2z-1)^2}{z-1} =$$
$$= (2z-1)^2G_2(z) - 2\pi i(4z-2)$$
$$z \to \frac{z+1}{2} \Rightarrow$$
$$G_2(\frac{1-\frac{1}{z}}{2}) = z^2G_2(\frac{z+1}{2}) - 4\pi iz$$

Fasst man diese zwei Resultate zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} z^{-2}f(1-\frac{1}{z}) &= z^{-2}\lambda(z^2G_2(\frac{z+1}{2}) - 4\pi iz - 4((\frac{z}{2})^2G_2(\frac{z}{2}) - \pi iz)) = \\ &= \lambda(G_2(\frac{z+1}{2}) - G_2(\frac{z}{2})) = \\ &= \lambda((a_0 - a_1h + \mathcal{O}(h^2)) - (a_0 + a_1h + \mathcal{O}(h^2))) = \\ &= \lambda(-2a_1h + \mathcal{O}(h^2)) \end{aligned}$$

wobei die a_i die Koeffizienten der Fourierreihe $G_2(z) = \sum a_n q^n$ sind, $q = e^{2\pi iz}$ und $h = e^{\pi iz}$. Für unseren Grenzwert ergibt sich also:

$$\lim_{\Im(z)\to\infty} z^{-2}e^{-\pi iz}f(1-\frac{1}{z}) = 2a_1 = 8\pi^2$$

Es ist also $f = C\vartheta^4$.

□

Korolar 7.1.9 *Es gilt:*

$$\vartheta^4(z) = \frac{1}{\pi^2}(4G_2(2z) - G_2(\frac{2}{2}))$$

Beweis Aus dem obigen Satz wissen wir:

$$\lambda(G_2(\frac{1}{2}z) - 4G_2(2z)) = C\vartheta^4(z)$$

Wählen wir nun $\lambda = 1$ und bilden für beide Seiten den Grenzwert für $\Im(z) \to \infty$ dann erhält man $C = -\pi^2$ und nach einmaligem Dividieren bekommt man die Aussage.

□

Jetzt müssen wir nur noch die Koeffizienten aus der Reihenentwicklung ablesen

$$\vartheta^4(z) = 1 + 8(\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)e^{\pi inz} - 4\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)e^{4\pi inz})$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

- $n = 0$:

$$A_4(0) = 1$$

- n ist nicht durch 4 teilbar:

$$A_4(n) = 8\sigma_1(n) = 8\sum_{d|n} d$$

- n ist durch 4 teilbar:

$$\begin{aligned} A_4(n) &= 8(\sigma_1(n) - 4\sigma_1(\frac{n}{4}) = 8(\sum_{d|n} d - 4\sum_{d|\frac{n}{4}} d) = \\ &= 8(\sum_{d|n} d - \sum_{d|\frac{n}{4}} (4d)) = 8(\sum_{d|n} d - \sum_{4d|n} (4d)) = \\ &= 8(\sum_{d|n} d - \sum_{\substack{d|n \\ 4|d}} d) = 8\sum_{\substack{d|n \\ 4\not|d}} d \end{aligned}$$

Wie man leicht überprüft gilt die letzte Formel auch für die ersten beiden Fälle, wir erhalten also:

Satz 7.1.10

$$A_4(n) = 8\sum_{\substack{d|n \\ 4\not|d}} d$$

für $n \geq 1$

Anhang A

Symbolverzeichnis

$\bar{\mathbb{C}}$	die *erweiterten komplexen Zahlen* (bzw. die Riemannsche Zahlenkugel), also $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{F}$	Fundamentalbereich eines Periodengitters
$ord(f;c)$	$ord(f;c) = \begin{cases} k & , c \text{ ist } k\text{-fache Nullstelle von } f \\ -k & , c \text{ ist } k\text{-fache Polstelle von } f \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$
$B_r(c)$	offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r
$\sum'_n$ bzw. $\prod'_n$	$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}}$ bzw. $\prod_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}}$
$\sum'_{n,m}$ bzw. $\prod'_{n,m}$	$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \\ n\neq(0,0)}}$ bzw. $\prod_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \\ n\neq(0,0)}}$
$\mathbb{H}$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, Die obere Halbebene
$\mathbb{H}_C$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > C\}$
$\wp(z)$	Weierstraßsche $\wp$ - Funktion
e_1, e_2, e_3	Halbwerte, $e_1 = \wp(\frac{1}{2}p_1)$, $e_2 = \wp(\frac{1}{2}p_2)$, $e_3 = \wp(\frac{p_1+p_2}{2})$
$G_k(\tau)$	Eisensteinreihe vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$
$g_2(\tau), g_3(\tau)$	Gitterkonstante, $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$
$\Delta(\tau)$	Diskriminante der Differentialgleichung der $\wp$ - Funktion, $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27G_3(\tau)^2$
$j(\tau)$	Kleinsche j - Funktion, $j(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}(\tau)$

Literaturverzeichnis

Apostol, Tom M. 1976. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

Burkhardt, Heinrich. 1906. *Funktionentheoretische Vorlesungen*, Vol. 2, Verlag von Veit & Comp., Leipzig.

Drmota, Michael. 2001. *Diskrete Methoden*.

Freitag, Eberhard and Rolf Busam. 2000. *Funktionentheorie 1*, Springer Verlag, Heidelberg.

Hurwitz, Adolf and R. Courant. 1925. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer Verlag, New York.

Jacobi, Carl Gustav Jacob. 1829. *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Sumtibus Fratrum Borntræger, Regiomonti.

Lang, Serge. 1987. *Elliptic Functions*, Springer Verlag, New York.

Rühs, F. 1962. *Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Serre, Jean-Pierre. 1973. *A Course in Arithmetic*, Springer Verlag, New York.

Weierstraß, Karl. 1893. *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, Springer Verlag.

———. 1915. *Mathematische Werke*, Vol. 5, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt.

Whittaker, E.T. and G.N. Watson. 1902. *A course in modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zagier D. and Eichler M. 1982. *On the zeroes of the Weierstrass $\wp$-Function*, Mathematische Annalen.