



DISSERTATION

**BEMESSUNG VON STAHLBETONPLATTEN
MIT NICHTLINEAREN FINITE-ELEMENT BERECHNUNGEN**

DOCTORAL THESIS

**DESIGN OF REINFORCED CONCRETE SLABS
WITH NONLINEAR FINITE ELEMENT METHODS**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Rossitza Popov
Matrikelnummer 94 27 444
Weißes-Kreuz-Gasse 93/6/4, 2340 Mödling,
Österreich

Referent: O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.-Ing. Johann Kollegger, M.Eng.
Institut für Stahlbeton- und Massivbau, Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/E212, 1040 Wien, Österreich

Koreferent: Univ.-Prof. i. R. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Gerhard Mehlhorn
Fachbereich Bauingenieurwesen, Universität Kassel
Eichholzweg 7, 34132 Kassel, Deutschland

Wien, im Oktober 2003

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Universitätsassistentin am Institut für Stahlbeton- und Massivbau an der Technischen Universität Wien. Sie beschäftigt sich mit der Bemessung von Stahlbetonplatten mit Hilfe der nichtlinearen Finite-Element Methode.

Herrn Professor Dr.-Ing. Johann Kollegger, Vorstand des Instituts für Stahlbeton- und Massivbau an der Technischen Universität Wien danke ich recht herzlich für seine fachliche Unterstützung und hilfreiche Betreuung sowie die Übernahme des ersten Gutachtens.

Bei Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Gerhard Mehlhorn, Universität Kassel bedanke ich mich für sein Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme des zweiten Gutachtens.

Bei meinen beiden Dissertationsvätern möchte ich mich an dieser Stelle noch einmal für die zahlreichen Anregungen und Ratschläge bei der Anwendung der Finite-Element-Methode im Stahlbetonbau bedanken. In Form von interessanten Vorlesungen und Diskussionen haben sie mein Interesse am Thema der vorliegenden Dissertation geweckt und vertieft.

Allen meinen Kollegen am Institut danke ich herzlich für die gute Zusammenarbeit und die Mithilfe, die sie mir in den vergangenen Jahren geleistet haben. Weiters danke ich allen meinen Diplomanden für ihre Mitarbeit. Ganz besonders möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Clemens Preisinger für seine programmbezogene Unterstützung und gute Zusammenarbeit bei unseren gemeinsamen Veröffentlichungen bedanken. Bei meinem Kollegen Dr. Bernhard Gaubinger bedanke ich mich ganz herzlich für die redaktionelle Bearbeitung der Dissertation.

Letztendlich gebührt ein besonderer Dank meiner Familie, meinen Eltern und insbesondere meiner Tochter Vidina für ihre fortlaufende Unterstützung und ihr entgegengebrachtes Verständnis. Aus diesem Grund widme ich ihr diese Arbeit.

Wien, im Oktober 2003

Rossitza Popov

KURZFASSUNG

Im Rahmen dieser Arbeit werden Stahlbetonplatten aus dem Hochbau unter Anwendung der nichtlinearen Finite-Element Methode untersucht und bemessen. Diese Methode ermöglicht die Erfassung der nichtlinearen Stahlbetoneigenschaften im Nachrissbereich unter wirklichkeitsgetreuer Simulation der lastabhängigen Steifigkeit des Tragwerks.

Im ersten Kapitel werden die allgemeinen Grundlagen der Plattentheorie sowie die Berechnung der auftretenden Schnittgrößen in einem Plattenelement unter gleichmäßig verteilter Flächenlast behandelt. Infolge der Überlagerung von Biege- und Membranspannungszustand können die Platten eine höhere Traglast als unter reiner Biegebeanspruchung aufnehmen. Das Bemessungsmodell mit orthogonalen Bewehrungsnetzen sowie das Sandwichmodell werden in diesem Kapitel auch kurz behandelt. Hier wird das zur Idealisierung in der Finite-Element Berechnung verwendete geschichtete Schalenelement näher beschrieben.

Im Anschluss daran folgt die Beschreibung der Nachweisformate nach den neuen europäischen Normenwerken für die Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit.

Im dritten Kapitel werden zuerst die bestehenden Algorithmen zur Bemessung von Stahlbetonflächentragwerken erläutert und danach wird auf die zwei elementaren Dimensionierungskonzepte, die Schnittgrößen- und Traglastiteration, näher eingegangen. Besondere Aufmerksamkeit wurde dabei auf den nichtlinearen Algorithmus zur automatischen Traglastiteration und Erhöhung der Bewehrungsflächen gelegt, der eine Neuentwicklung auf dem Gebiet der nichtlinearen Bemessungsmöglichkeiten für Stahlbetonplatten darstellt.

Die darauffolgenden numerischen Beispiele zeigen Prinzip und Aufbau dieses Algorithmus, der auch im nichtlinearen Finite-Element Programm SEGNID implementiert wurde, bei der Bewehrungsermittlung in einer Stahlbetonplatte.

Der hier vorgestellte computergestützte Algorithmus zur Traglast- und Bewehrungsermittlung stellt eine weitere Möglichkeit zur effizienten Ausnutzung der Bewehrung in Stahlbetonplatten dar und kann sowohl für die Bemessung von neu zu errichtenden Tragwerken als auch bei der Traglastberechnung bestehender Flächentragwerke eingesetzt werden.

ABSTRACT

In this doctoral thesis the behaviour of reinforced concrete slabs is studied and a designed procedure by the use of the nonlinear finite element method is presented. This method allows to consider the nonlinear behaviour of reinforced concrete after cracking for a realistic simulation of the structure stiffness during loading.

In the first chapter the basics of the theory of plates and the calculation of the section forces in a plate element are addressed for uniformly distributed loads. Due to interaction of bending and membrane stresses the ultimate load of slabs is higher than for pure bending only. The design of two perpendicular layers of reinforcement, as well as the sandwich model are also briefly described. Additionally the layered shell element used for the calculations is discussed in closer detail.

In the following the design rules for the ultimate limit state and the serviceability limit state used in the European design codes for concrete structures are described.

In the third chapter algorithms for the design of concrete shell structures are explained, with special emphasis on the two elementary design concepts, namely the interaction of sectional forces and the ultimate limit load iteration. The nonlinear algorithm for the automatic determination of the ultimate load and the automatic increase of the reinforcement areas represent new concepts in the field of nonlinear design for reinforced concrete slabs.

The following examples show the principle and the composition of the algorithm used for the design of the reinforcement in concrete slabs. This algorithm was implemented in the nonlinear finite element program SEGNID.

The described algorithm for the calculation of the ultimate limit state and the determination of reinforcement content is an efficient tool for high exploitation of reinforcement used in plates and may be used for the design of new structures as well as the assessment of existing structures.

INHALTVERZEICHNIS

VORWORT	1
KURZFASSUNG.....	2
ABSTRACT	3
KAPITEL 1 PLATTENBEMESSUNG UND MODELLIERUNG	6
1.1 Einführung.....	6
1.2 Auszüge aus der Plattentheorie	6
1.3 Bemessung von Stahlbetonplatten	12
1.4 Das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken	15
1.5 Die Finite-Element Modellierung der Stahlbetonplatte	16
1.5.1 Grundlagen der Finite-Element Methode	16
1.5.2 Geschichtetes Flächentragwerkselement.....	19
1.5.3 Betonschicht.....	22
1.5.4 Stahlschicht	25
1.6 Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme	26
KAPITEL 2 NACHWEISFORMAT NACH EUROPÄISCHEN NORMEN.....	29
2.1 Anforderungen an die Stahlbetontragwerke.....	29
2.2 Nachweis der Tragsicherheit	30
2.2.1 Grundsätze und Einwirkungskombinationen	30
2.2.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung	32
2.3 Nachweis der Gebrauchstauglichkeit	39
KAPITEL 3 ALGORITHMEN ZUR BEWEHRUNGSERMITTLUNG	41
3.1 Allgemeines	41
3.2 Bemessung von Flächentragwerkselementen anhand linear - elastisch ermittelter Schnittgrößen.....	42
3.3 Bemessung und Analyse nach der Plastizitätstheorie	45
3.4 Bemessung anhand nichtlinear ermittelter Schnittgrößen	47
3.4.1 Konzept der Schnittgrößeniteration	48
3.4.1.1 Allgemeine Betrachtungen.....	48
3.4.1.2 Implementierung ins FE-Programm SEGNID	50
3.4.2 Methode der Traglastiteration.....	52
3.4.3 Nichtlinearer Algorithmus zur automatischen Traglastiteration und Erhöhung der Bewehrungsflächen	54

KAPITEL 4 NUMERISCHE BEISPIELE	63
4.1 Einleitung.....	63
4.2 Punktförmig gestützte Decke.....	64
4.3 Quadratplatte.....	68
4.3.1 Geometrie und Materialeigenschaften.....	68
4.3.2 Bewehrungsoptimierung mit der Schnittgrößeniteration.....	70
4.3.2.1 Optimierung anhand linear-elastisch berechneter Schnittgrößen	70
4.3.2.2 Optimierung anhand der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung.....	71
4.3.3 Bewehrungsoptimierung mit der Traglastiteration	73
4.4 Plattenstreifen über ein Feld.....	79
4.4.1 Geometrie, Materialeigenschaften und Belastung.....	79
4.4.2 Verlauf des Ermittlungsprozesses	80
4.4.3 Parameterstudie für die C_2 -Werte	83
4.5 Plattenstreifen über zwei Felder.....	87
4.5.1 Geometrie und Materialeigenschaften.....	87
4.5.2 Bewehrungsermittlung unter Volllast	88
4.5.3 Bewehrungsermittlung mit unsymmetrischer Belastung.....	92
4.6 Praxisbeispiel (Cardington)	94
4.6.1 Geometrie, Materialeigenschaften und Belastung.....	95
4.6.2 Netzteilung und Bewehrungsgruppen	98
4.6.3 Nichtlineare Bewehrungsermittlung	101
4.6.4 Vergleich der Ergebnisse der nichtlinearen Berechnungen.....	107
 KAPITEL 5 SCHLUSSBEMERKUNGEN, AUSBLICK	 111
 LITERATUR	 115

KAPITEL 1

PLATTENBEMESSUNG UND MODELLIERUNG

1.1 Einführung

Die Bemessung von Stahlbetonplatten stützt sich üblicherweise auf die lineare Plattentheorie. Das Tragverhalten eines Plattenelements unter Flächenbelastung, die angreifenden Spannungen und die sich daraus ergebenden Schnittgrößen werden in diesem Kapitel kurz beschrieben. Zunächst werden die Grundsätze für die linear ermittelte Netzbewehrung sowie das Sandwichmodell für den Lastabtrag bei Platten erläutert.

Die Finite-Element Modellierung von Flächentragwerken erfolgt mit geschichteten Schalenelementen. Zu diesem Zweck wird das Schalenelement über die Querschnittsdicke in Betonschichten unterteilt und die Bewehrung durch Stahlschichten in das Betonelement eingebettet. Jeder Schicht können dabei unterschiedliche Materialmodelle zugewiesen werden. Das ausgeprägte nichtlineare Verhalten der Stahlbetontragwerke, welches hauptsächlich durch die physikalische Nichtlinearität wie das Reißen des Betons oder das Fließen der Bewehrung hervorgerufen wird, muss für die realitätsnahe Berechnung berücksichtigt werden.

1.2 Auszüge aus der Plattentheorie

Platten sind zweidimensionale Tragwerke, welche senkrecht zur Mittelebene belastet werden. Infolge der daraus entstehenden Formänderungen wird die Mittelebene ver-

krümmt. Dünne homogene Platten sind durch geringe transversale Schubnachgiebigkeit gekennzeichnet. Wenn die Durchbiegungen gegenüber der Plattendicke klein gehalten werden, darf eine Linearisierung der geometrischen Beziehungen vorgenommen werden [M1]. Bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes liegt eine physikalisch lineare Theorie vor.

Die Theorie der schubstarrten Platte auch als Kirchhoffsche Plattentheorie bezeichnet - geht von den Annahmen aus, dass Punkte auf einer Normalen zur unverformten Mittelebene nach der Formänderung auf einer Geraden zu liegen kommen, die ebenfalls normal auf die verformte Mittelebene gerichtet ist. Die Spannungen in Plattendickenrichtung sind sehr klein und können vernachlässigt werden. Dies entspricht einem näherungsweise ebenen Spannungszustand. Die Biegefläche einer Platte unter Flächenbelastung und Berücksichtigung der Randbedingungen kann durch folgende lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichung vierter Ordnung beschrieben werden:

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{K} \quad (1.1)$$

wobei w in dieser Gleichung (1.1) die Verschiebungen normal zur Plattenmittelebene, p eine verteilte Oberflächenbelastung und K die Biegesteifigkeit der Platte, die sich zu

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

ergibt, bedeuten. Die Lösung der Differenzialgleichung für w setzt sich aus einem partikulären Anteil w_p , der die rechte Seite der Gleichung (1.1) erfüllt, und einem homogenen Anteil w_h , der aus der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ hervorgeht, zusammen.

$$w = w_p + w_h \quad (1.3)$$

Das partikuläre Integral wird über die Belastung der Platte bestimmt. Für eine Platte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast erhält man als partikulären Lösungsansatz

$$w_p = \frac{p}{8K} x^2 y^2 \quad (1.4)$$

Der homogene Anteil dient zur Anpassung der Lösung an die gegebenen Verschiebungsrandbedingungen und lässt sich nicht in geschlossener Form angeben. Bild 1.1 zeigt die der partikulären Lösung entsprechende Biegefläche einer quadratischen Platte.

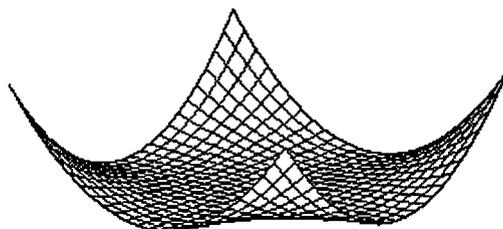


Bild 1.1: Partikuläre Lösung der Kirchhoffschen Plattengleichung für Gleichlast [P5]

Üblicherweise werden die Spannungen in der Plattentheorie zu einer Resultierenden über die Plattendicke zusammengefasst. Die so erhaltenen Spannungsergebnisse stellen auf die Längeneinheit bezogene Schnittgrößen dar. Bild 1.2 zeigt die an den Seitenflächen eines infinitesimalen Plattenelements angreifenden Spannungen und die sich daraus ergebenden Schnittgrößen.

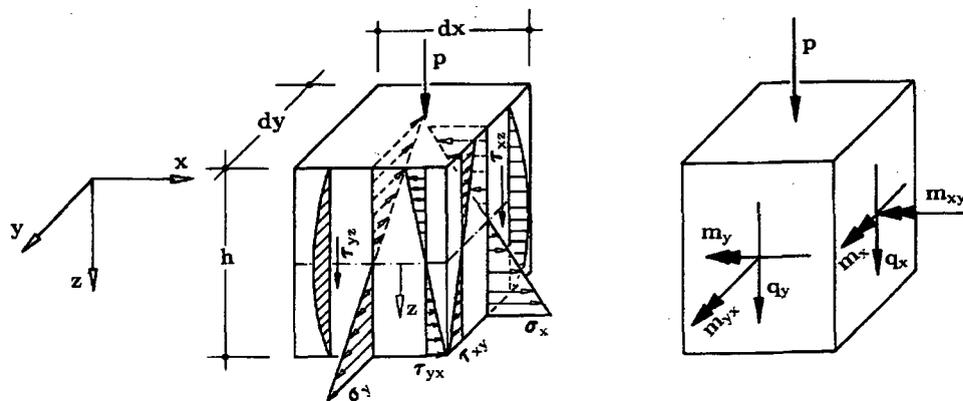


Bild 1.2: Spannungen und Schnittgrößen [M1]

Längs jeder der vier Randstrecken (Bild 1.2) des Plattenelements greifen vier Schnittgrößen an. Allgemein ergeben sich für ein Plattenelement die Biege- m_x und m_y und Drillmomente $m_{xy} = m_{yx}$

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (1.5)$$

die Querkräfte q_x und q_y

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz \qquad q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zy} dz \qquad (1.6)$$

und die Membrankräfte n_x, n_y und $n_{xy} = n_{yx}$

$$n_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \qquad n_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \qquad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \qquad (1.7)$$

In einer ungerissenen Platte herrscht ein reiner Biegespannungszustand mit Biege- und Drillmomenten sowie Querkräften. In einer gerissenen Platte wirken zusätzlich die Scheibenschnittgrößen n_x, n_y und $n_{x,y}$.

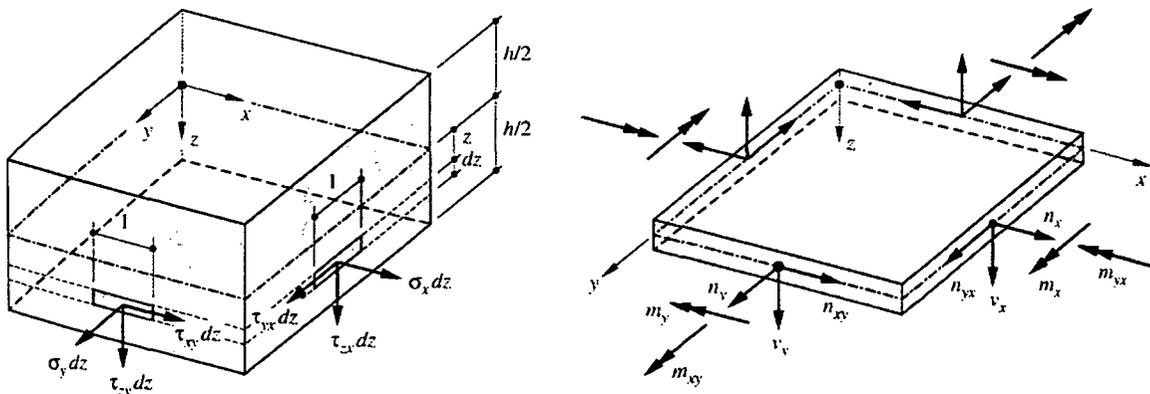


Bild 1.3: Spannungen und Spannungsergebnisse in einem Schalenelement [M2]

Die drei Schnittgrößen m_x, m_y und $m_{x,y}$ stehen bei der Platte mit den äußeren Kräften und Momenten im Gleichgewicht. Betrachtet man die Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Plattenelement mit den Abmessungen dx und dy , welches mit einer gleichmäßig verteilten Belastung $p(x,y)$ beansprucht wird, so ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = p \qquad (1.8)$$

und aus den Momentengleichgewichtsbedingungen um die x- bzw. y-Achse

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (1.9)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

Setzt man die Querkräfte aus den Gleichungen (1.9) in (1.8) ein, so kann die Gleichgewichtsbedingung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = p \quad (1.10)$$

Die in Gleichung (1.7) definierten Membrankräfte bilden den Membranspannungszustand. Stahlbetonplatten weisen im gerissenen Zustand auch Dehnungen in der Mittelebene auf (Bild 1.4).

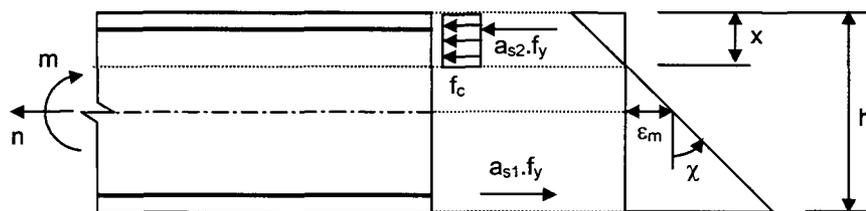


Bild 1.4: Verlängerungen in Mittelebene bei Momentenbeanspruchung

Die resultierenden Verformungen erfüllen nur in den seltensten Fällen die Verträglichkeitsbedingungen gemäss der Theorie dünner elastischer Platten, wodurch Membrankräfte in der Platte erzeugt werden [M2]. Schon bei kleinen Verformungen einer Stahlbetonplatte entstehen in den gerissenen Bereichen Membrandruckkräfte. Es bildet sich in der Platte ein flaches Gewölbe aus (Bild 1.5), was eine Überlagerung des Biege- und Membranspannungszustands zur Folge hat. Daraus resultiert eine höhere Traglast als unter reiner Biegebeanspruchung.

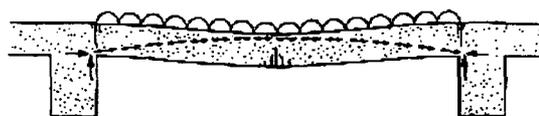


Bild 1.5: Bildung des flachen Gewölbes [O1]

Die Größe der entstehenden Membrandruckkräfte ist sehr stark von der Steifigkeit der Randabstützungen, der Geometrie des Tragwerks und dem Bewehrungsgrad der Platte abhängig. Das Last-Verformungs-Verhalten einer quadratischen Platte mit seitlicher Membranstützung ist in Bild 1.6 qualitativ dargestellt.

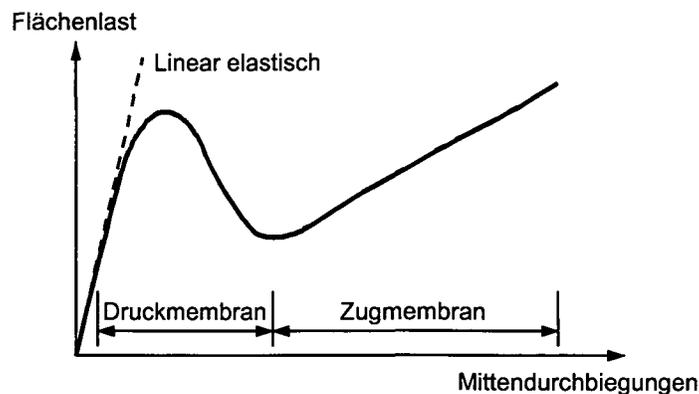


Bild 1.6: Last-Verformungsverhalten einer zweiachsig gespannten Stahlbetonplatte

Für kleine Flächenlasten verhält sich die ungerissene Platte annähernd linear-elastisch. Mit beginnender Rissbildung nimmt die Mittendurchbiegung überproportional zu; infolge der Verzerrungen der Plattenmittelfläche bauen sich Membrandruckkräfte auf, bis schließlich ein erstes Maximum der Flächenlast erreicht wird. Nach Überschreiten dieses Maximums werden die Spannungen in der Druckmembran bei zurückgehender Belastung abgebaut. Anschließend kann die Last bei großen Mittendurchbiegungen durch die Zugmembranwirkung aufgenommen werden. Bei Erreichen der Tragfähigkeit der Zugmembran versagt die Platte, wobei die Bruchlast oft deutlich über dem ersten Lastmaximum liegt. Das Tragverhalten im Bereich der Zugmembranwirkung kann nur durch eine Gleichgewichtsbetrachtung in der verformten Lage erklärt werden. Bei ausfallender Membranstützung stellt sich ein Gleichgewicht zwischen den Kräften aus der Beton- und der Stahlmembran ein. Die Membranwirkung ist somit aufgehoben. Bei einer ausreichenden Membranstützung kann hingegen auch das Tragverhalten einer unbewehrten Platte erklärt werden.

Die induzierte Membrandruckkraft in der Platte hat eine Erhöhung der Biegesteifigkeit des Plattenquerschnitts zur Folge, wie in einem typischen Momenten-Normalkraft-Interaktionsdiagramm in Bild 1.7 zu sehen ist.

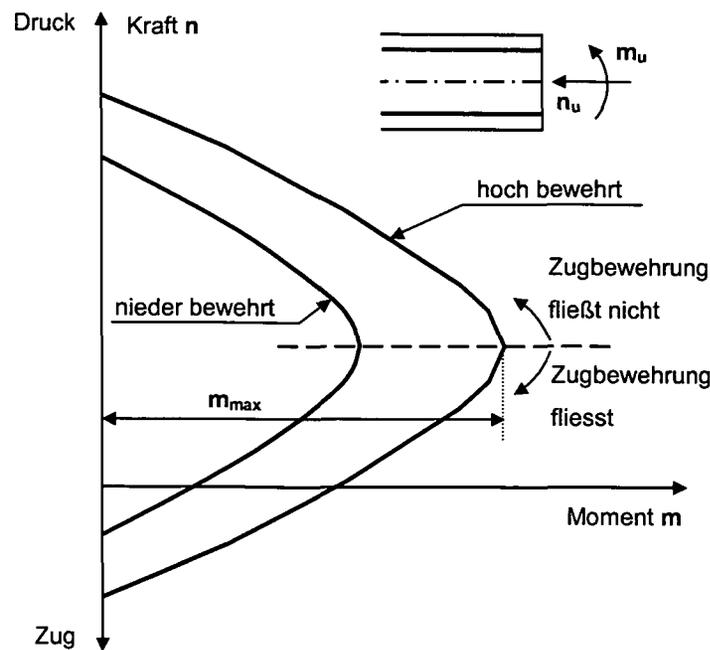


Bild 1.7: Momenten-Normalkraft Interaktionsdiagramm für einen symmetrisch bewehrten Querschnitt

Für den Fall einer starren Membranstützung und eines ideal plastischen Materialverhaltens kann die maximale Biegesteifigkeit m_{max} gemäß Bild 1.7 in Rechnung gestellt werden.

1.3 Bemessung von Stahlbetonplatten

In Flächentragwerken aus Stahlbeton sind die Hauptzugspannungen durch ein Netz von Bewehrungsscharen aufzunehmen. Maßgebend für die Plattenbemessung sind die Hauptmomente. Unter Annahme einer Rissefreiheit der Stahlbetonplatte (Homogenität) und gleicher Steifigkeit in allen Richtungen (Isotropie) lassen sich die Schnittgrößen von zweiachsig gespannten Platten dem zweidimensionalen Spannungszustand entsprechend mit der Plattentheorie ermitteln. Im Allgemeinen wird ein Plattenelement durch die auf die Längeneinheit bezogenen Hauptmomente m_1 und $m_2 = k \cdot m_1$ beansprucht. Die aus den Biegemomenten m_x und m_y bzw. Drillmomenten $m_{xy} = m_{yx}$ zugehörigen Hauptmomente ergeben sich wie folgt:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left[(m_x + m_y) \pm \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4 \cdot m_{x,y}^2} \right] \quad (1.11)$$

Die Bestimmung der Hauptmomente ist analog zur Ermittlung der Hauptspannungen $\sigma_{1,2}$ aus den Spannungskomponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} aufgebaut. Damit können im

Prinzip die Drillmomente mit den Schubspannungen verglichen werden und in ähnlicher Weise als Rechenhilfsgrößen für die Richtungsabweichungen der Hauptmomente aus dem x - y -Koordinatensystem herangezogen werden.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot m_{xy}}{m_x - m_y} \tag{1.12}$$

m_1 bezeichnet das dem Betrag nach größere der beiden Hauptmomente ($|k| < 1$). Erzeugt m_2 nicht an den gleichen Plattenseiten Biegedruck und Biegezug wie m_1 , dann erhält es ein negatives Vorzeichen ($k < 0$). Ein solches Moment m_2 erzeugt in der Biegedruckzone (aus m_1) Zugspannungen und in der Biegezugzone (aus m_1) Druckspannungen. Die Biegezugzone kann dabei als Scheibe behandelt werden (Bild 1.8), wenn man die Längskräfte über einen mittleren Hebelarm aus den Momenten errechnet und auf die Scheibe einwirken lässt.

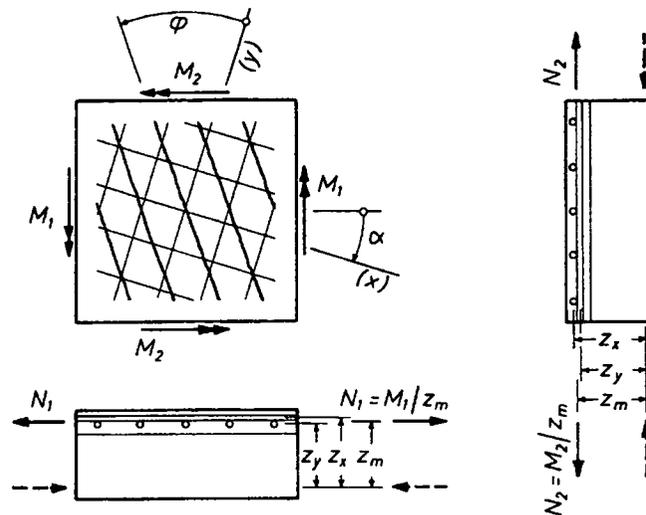


Bild 1.8: Beanspruchung einer gerissenen Stahlbetonplatte durch die Hautmomente [B1]

Auf diese Art und Weise können die auf ein Plattenelement einwirkenden Schnittgrößen über ein Sandwichmodell (Bild 1.9) aufgenommen werden. Die Biege- und Drillmomente sowie allfällige Membrankräfte werden dabei den Sandwichdeckeln zugewiesen, während die Querkräfte dem Sandwichkern zugeordnet werden (Bild 1.9) [M2]. In den beiden Sandwichdeckeln herrscht damit ein ebener Spannungszustand, womit sie als Scheibenelemente behandelt und bewehrt werden können.

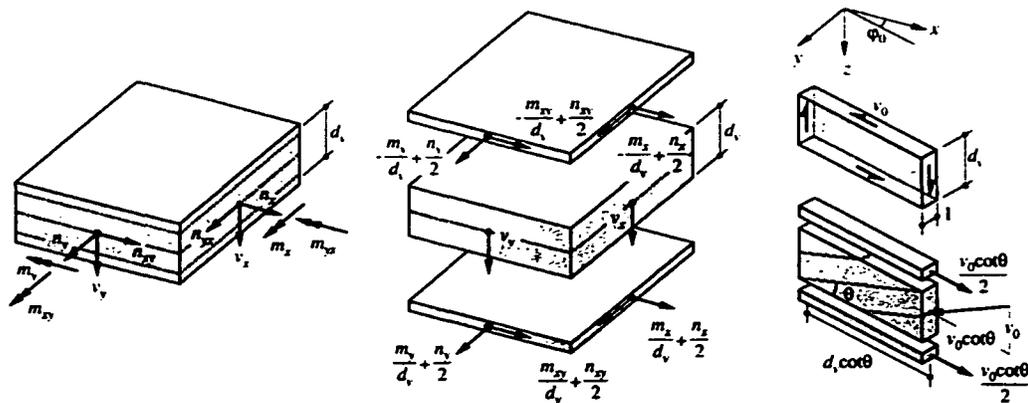


Bild 1.9: Sandwichmodell [M2]

Die optimale Bewehrung von Stahlbetonplatten ist diejenige, die sich dem Verlauf der Spannungstrajektorien genau anpasst. Dies ist jedoch praktisch nicht ausführbar. Bei einer erheblichen Abweichung der Bewehrungs- von den Hauptrichtungen wird nicht nur der Stahlverbrauch erhöht, sondern auch die Bruchlast vermindert. Aus praktischen Gründen werden schiefwinklige oder rechtwinklige (orthogonale) Bewehrungsnetze, die nicht in den Hauptrichtungen der Kräfte verlegt sind, zum Bewehren von Stahlbetonplatten und -Scheiben angewendet.

Leitz [L2 bis L6] hat sich mit der Bemessung einer solchen Bewehrung und der rechnerischen Herleitung von Gleichungen zur Bestimmung des erforderlichen Stahlquerschnitts von rechtwinkligen Bewehrungsnetzen, die nicht in den Hauptrichtungen verlegt sind, beschäftigt. Später hat Scholz [S2] seinen Beitrag zur Bemessung von schiefwinkligen Bewehrungsnetzen veröffentlicht. Unter weiteren Autoren, die sich mit diesem Thema befasst haben, sind noch Kuyt [K6] und insbesondere Baumann [B1 und B2] zu erwähnen. In [B1] sind kritische Anmerkungen zu den damals bestehenden Theorien und angewandten Bemessungsverfahren für Netzbewehrungen zu finden. Die Bemessungsgleichungen für die praktische Bemessung sowohl von orthogonalen als auch zwei- und dreibahnigen Bewehrungsnetzen in beliebiger Richtung hat Baumann 1972 veröffentlicht. Baumann geht davon aus, dass bei der Bemessung von Flächentragwerken aus Stahlbeton (Scheiben und Platten) die Druckkräfte dem Beton und die auftretenden Zugkräfte vollständig der Bewehrung zugewiesen werden. Bei wachsender Beanspruchung und Übergang vom linearen in den nichtlinearen Arbeitslinienbereich von Beton und Stahl erfolgt eine Kraftumlagerung im Element und eine daraus resultierende Drehung der Hauptdehnungsrichtungen.

Das Verfahren mit rotierenden Rissen wurde von Baumann vorgeschlagen und darauf basierende Werkstoffmodelle mit veränderlicher Hauptdehnungsrichtung (rotating crack model) mittlerweile in mehreren nichtlinearen Finite-Element Programmen zur Berechnung von Flächentragwerken aus Stahlbeton implementiert [z.B. D2, T1].

1.4 Das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken

Stahlbetontragwerke weisen ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf, welches hauptsächlich durch die physikalische Nichtlinearität der Baustoffe wie das Reißen des Betons oder das Fließen der Bewehrung hervorgerufen wird. Infolge großer Verformungen weisen Stahlbetontragwerke auch ein geometrisch nichtlineares Tragwerksverhalten auf. Das typische Tragverhalten von Stahlbetonkonstruktionen kann mit Hilfe des Last-Verformungs-Diagramms in Bild 1.10 (Linie 1) illustriert werden. Üblicherweise wird das tatsächliche Tragverhalten durch eine Berechnung mit ungerissen elastischem Werkstoffverhalten (Linie 2), gerissen elastischem Werkstoffverhalten (Linie 3) oder durch eine Traglastberechnung (Linie 4) gut approximiert [M2].

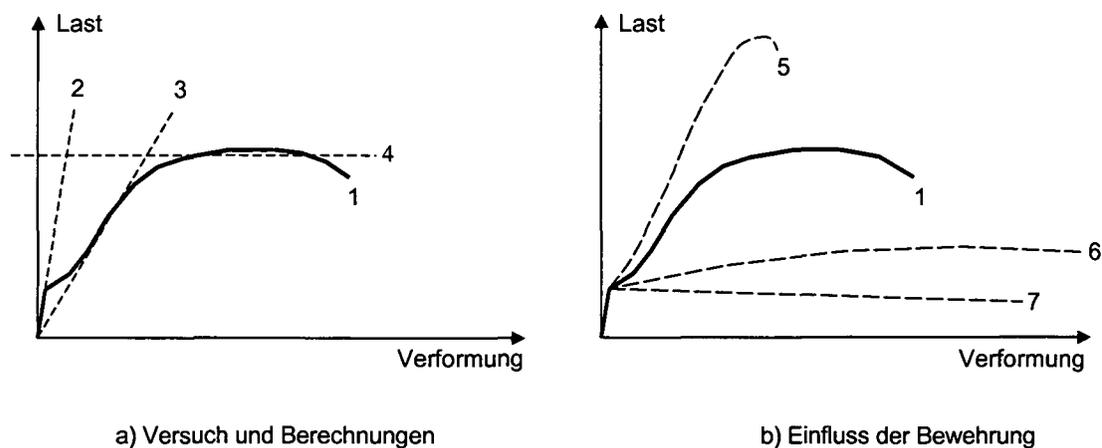


Bild 1.10: Last-Verschiebungs-Diagramm der Stahlbetontragwerke

Der Einfluss der Bewehrung auf das Tragverhalten ist in Bild 1.10 b) gezeigt. Die Linien 5 und 6 veranschaulichen den Einfluss höherer bzw. niedrigerer Bewehrungsgrade auf das Verformungsvermögen. Tragwerke mit einem höheren Bewehrungsgrad können eine viel größere Traglast erreichen, wobei das Versagen durch Betonzerrückung infolge Einschnürung der Betondruckzone verursacht wird. Ganz unterschiedlich verhält sich das Versagen bei Stahlbetontragwerken mit niedrigeren Be-

wehrungsgraden. Ihr Tragwiderstand wird durch das Fließen der Bewehrung bestimmt. Dabei kommt es ohne Erhöhung der Belastung zu einer Zunahme der Verformungen. Schließlich zeigt die Linie 7 das entfestigende Verhalten für den Fall, dass die Mindestbewehrung nicht vorhanden ist und die beim Reißen des Betons freigesetzten Zugkräfte nicht umgelagert werden können.

1.5 Die Finite-Element Modellierung der Stahlbetonplatte

Die Idealisierung der Stahlbetonstruktur erfolgt mit Hilfe einer Unterteilung in finite Elemente, die durch gemeinsame Knoten miteinander verbunden sind. Für die Finite-Element Modellierung von Stahlbetonplatten haben sich speziell die geschichteten Schalenelemente bewährt.

1.5.1 Grundlagen der Finite-Element Methode

Die Finite-Element Methode setzt eine Unterteilung der Tragstruktur, z.B. Balken, Flächentragwerke, dreidimensionale Tragwerke in endlich begrenzte Teilbereiche (Elemente) und die Verbindung dieser Teilbereiche in gemeinsamen Knoten voraus. Das elastische Verhalten jedes Teilbereichs der Struktur wird durch vorgegebene Ansatzfunktionen beschrieben, die die Verzerrungen, Spannungen und Verschiebungen in dem jeweiligen Teilbereich beschreiben. Wählt man die Ansatzfunktionen so, dass sie den Verschiebungszustand im Teilbereich (Element) beschreiben, erhält man die Matrizenverschiebungsmethode bzw. die auf dem Weggrößenverfahren aufbauende Finite-Element Methode. Durch den Ansatz von Verschiebungsfunktionen im Element ist auch der Verzerrungszustand im Inneren des Elements eindeutig in Abhängigkeit von den Verschiebungen der Knotenpunkte beschrieben. Aus den Verzerrungen können dann mit Hilfe der Materialgleichungen die Spannungen im Element bestimmt werden [M3].

Dabei werden die Verschiebungen und deren Ableitungen in den Knotenpunkten in die einzelnen Elemente als Freiheitsgrade eingeführt. Weiterhin wird angenommen, dass Kräfte und Momente nur in den Knotenpunkten angreifen und den Freiheitsgraden in den Knotenpunkten entsprechen.

Das Gleichgewicht im Element wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen abgeleitet. Dabei muss die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte δW_a mit der inneren virtuellen Arbeit δW_i im Gleichgewicht stehen:

$$\delta W_a = \delta W_i \quad (1.13)$$

$$\delta W_a = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \quad (1.14)$$

$$\delta W_i = \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV \quad (1.15)$$

$$\delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} = \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV \quad (1.16)$$

Die dabei verwendeten Bezeichnungen bedeuten:

$\delta \mathbf{u}$ - Vektor der virtuellen Verschiebungen der Knotenpunkte

$\delta \boldsymbol{\epsilon}$ - Vektor der virtuellen Verzerrungen im Element

\mathbf{F} - Vektor der wahren äußeren Kräfte

$\boldsymbol{\sigma}$ - Vektor der wahren inneren Elementspannungen

Die innere virtuelle Arbeit δW_i kann noch mit Hilfe der Materialformulierung $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, wobei \mathbf{E} der Elastizitätsmatrix bedeutet, ausgedrückt werden:

$$\delta W_i = \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV = \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot dV \quad (1.17)$$

Unter der Voraussetzung, dass die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ infinitesimal klein sind, gilt zwischen den Knotenpunktverschiebungen \mathbf{u} und den Elementverzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$ ein linearer Zusammenhang, der durch

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (1.18)$$

beschrieben werden kann. Dabei stellt die Matrix \mathbf{B} eine Verknüpfung zwischen den im Elementinneren auftretenden Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$ und den Knotenpunktverschiebungen \mathbf{u} des Elements her. In dieser Matrix \mathbf{B} sind die Differenzialoperatoren zur Er-

mittlung der Verzerrungen aus den Verschiebungen und die Formfunktion zur Beschreibung des Verschiebungsverlaufes im Element enthalten.

Beim Einsetzen von Gl. (1.18) in Gl. (1.17) und Gl. (1.16) ergibt sich:

$$\delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} = \int_{(V)} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \cdot dV \quad (1.19)$$

Kürzt man den gemeinsamen Faktor $\delta \mathbf{u}^T$, der eine beliebige virtuelle Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{u}$ darstellt, aus der Gleichung heraus, erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen dem Vektor der Knotenkräfte \mathbf{F} und dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} :

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot dV \cdot \mathbf{u} \quad (1.20)$$

Das Integral wird physikalisch als Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k} bezeichnet.

$$\mathbf{k} = \int_{(V)} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \cdot dV \quad (1.21)$$

Aufgrund der Tatsache, dass für die Elastizitätsmatrix \mathbf{E} keine einschränkende Voraussetzungen getroffen wurden, kann sie sowohl für ein lineares als auch nichtlineares Materialverhalten verwendet werden. Damit kann die Finite-Element Methode auch zur Erfassung eines physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens angewendet werden. Dabei können in den verschiedenen Elementen in Abhängigkeit vom jeweiligen Verzerrungs- und Spannungszustand unterschiedliche Materialsteifigkeiten angewendet werden. Die Berechnung einer Tragstruktur unter schrittweise steigender Belastung erfolgt in aufeinanderfolgenden Berechnungsabschnitten, wobei die Materialsteifigkeitsmatrix elementweise in jedem Lastschritt iterativ bestimmt wird.

Bei der Anwendung der nichtlinearen Finite-Element Modelle wird die Berechnung von Stahlbetonstrukturen auf drei Ebenen angenähert. Die erste Ebene beschreibt das Materialverhalten, das durch die verwendeten Werkstoffmodelle für Beton, Stahl und Verbund sowie ihre gegenseitigen Beeinflussung beschrieben wird. Dabei werden die inkrementellen Spannungen $\Delta \sigma$ mit den inkrementellen Verzerrungen $\Delta \varepsilon$ über die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{E} verknüpft (Gl. 1.22).

$$\Delta\sigma = \mathbf{E} \cdot \Delta\epsilon \quad (1.22)$$

Die zweite Ebene stellt das Verhalten des finiten Elements durch die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k} dar. Sie hängt von den angenommenen Verschiebungsfunktionen und der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{E} ab (siehe Gl. 1.21).

Die dritte und letzte Ebene wird auf Basis der Gesamtstruktur aufgebaut und durch die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} beschrieben (Gl. 1.23). Ihr Einfluss auf das Berechnungsergebnis hängt von der Art der Diskretisierung, dem gewählten Elementnetz, dem gewählten Lösungsalgorithmus und von den Konvergenzbedingungen ab.

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (1.23)$$

Damit ist die Genauigkeit der Berechnung einer Tragstruktur mit Hilfe der nichtlinearen Finite-Element Methode von der Formulierungsart auf allen drei Ebenen abhängig.

Stahlbetonplatten werden sehr oft mit Hilfe von geschichteten Schalenelementen aus Beton diskretisiert, in denen der Stahl als verschmierte Schicht in das Element eingebettet wird. Die Beschreibung des Elements und der einzelnen Modelle für Beton und Stahl erfolgen in den Abschnitten 1.5.2 bis 1.5.4.

1.5.2 Geschichtetes Flächentragwerkselement

Ein geschichtetes Element aus einem Stahlbetonflächentragwerk ist in Bild 1.11 dargestellt. Das Schalenelement wird über die Querschnittsdicke t in n_c Betonschichten unterteilt und die Bewehrung durch n_s Stahlschichten in das Betonelement eingebettet. Die Verminderung des Betonvolumens durch die Bewehrung ist sehr klein und daher vernachlässigbar.

Wie bei biegebeanspruchten Trägern wird üblicherweise in jeder Schicht ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt. Der Spannungszustand jeder einzelnen Schicht wird darüber hinaus als konstant angenommen und daher nur an einer Stelle ermittelt.

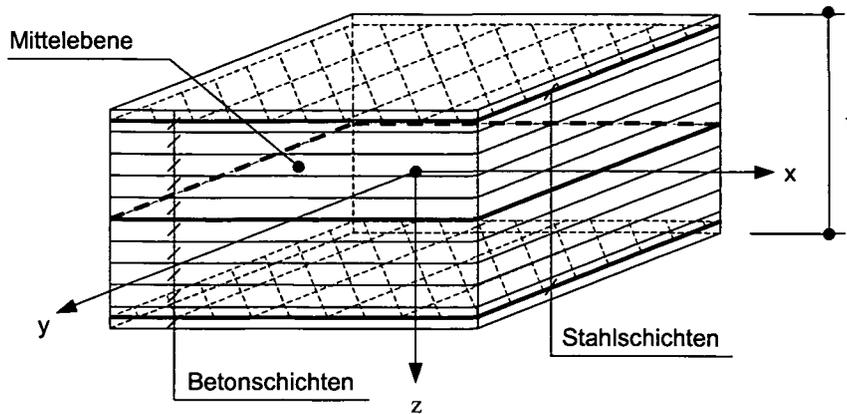


Bild 1.11: Geschichtetes Flächentragwerkselement

Die Betonspannungen werden in der Mitte jeder einzelnen Betonschicht und die Spannungen der Bewehrung jeweils im Schwerpunkt der einzelnen Stahlschicht berechnet. Unter Annahme einer linearen Verzerrungsverteilung über die Querschnittshöhe und eines proportionalen Zuwachses mit dem Abstand von der Dehnungsnulllinie (Hypothese von Bernoulli) können die Verzerrungen der Schicht k durch folgende Formel beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}(k) &= \varepsilon_{xx} + \chi_{xx} \cdot z(k) \\
 \varepsilon_{yy}(k) &= \varepsilon_{yy} + \chi_{yy} \cdot z(k) \\
 \gamma_{xy}(k) &= \gamma_{xy} + \chi_{xy} \cdot z(k) \cdot 2
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Die Verzerrungen ε_{xx} , ε_{yy} , γ_{xy} und Verkrümmungen χ_{xx} , χ_{yy} , χ_{xy} werden in Bild 1.12 definiert. Mit $z(k)$ wird der Abstand der Schicht k von der Plattenmittelebene definiert.

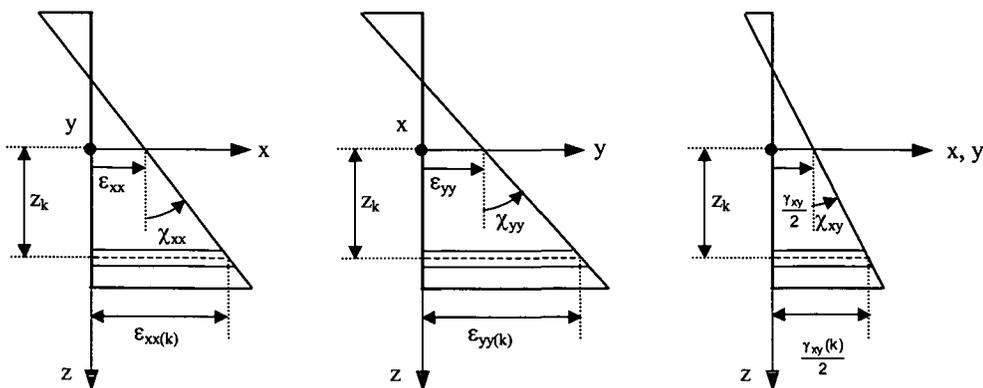


Bild 1.12: Definition der Verzerrungen und Verkrümmungen am Schalenelement

Die positive Orientierung der inneren Normalkräfte und Momente ist in Bild 1.13 festgelegt.

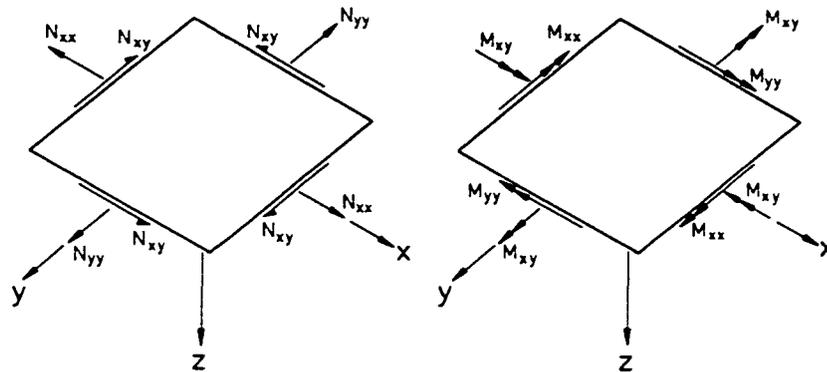


Bild 1.13: Bezeichnung der Normalkräfte und Momente am Schalenelement [K1]

Die inneren Schnittgrößen (Normalkräfte und Momente) ergeben sich durch die Aufsummierung der Anteile aus den n_c Betonschichten und n_s Stahlschichten im Querschnitt:

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cxx}(k) \cdot t_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{sxx}(k) \cdot A_s(k) \\
 N_{yy} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cyy}(k) \cdot t_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{syy}(k) \cdot A_s(k) \\
 N_{xy} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cxy}(k) \cdot t_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{sxy}(k) \cdot A_s(k)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cxx}(k) \cdot t_c(k) \cdot z_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{sxx}(k) \cdot A_s(k) \cdot z_s(k) \\
 M_{yy} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cyy}(k) \cdot t_c(k) \cdot z_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{syy}(k) \cdot A_s(k) \cdot z_s(k) \\
 M_{xy} &= \sum_{k=1}^{n_c} \sigma_{cxy}(k) \cdot t_c(k) \cdot z_c(k) + \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_{sxy}(k) \cdot A_s(k) \cdot z_s(k)
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

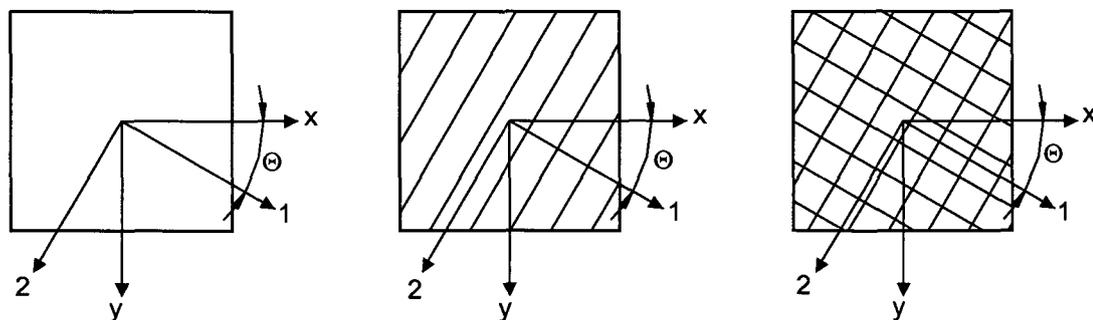
Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des geschichteten Elements wird aus der Summe der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Betonschichten $\mathbf{D}_c(k)$, der Drehsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{D}_\theta(k)$ und der Stahlsteifigkeitsmatrix $\mathbf{D}_s(k)$ gebildet.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = & \sum_{k=1}^{n_c} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_c(k) & \mathbf{D}_c(k) \cdot z_c(k) \\ \mathbf{D}_c(k) \cdot z_c(k) & \mathbf{D}_c(k) \cdot z_c^2(k) \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{k=1}^{n_c} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\theta(k) & \mathbf{D}_\theta(k) \cdot z_c(k) \\ \mathbf{D}_\theta(k) \cdot z_c(k) & \mathbf{D}_\theta(k) \cdot z_c^2(k) \end{bmatrix} + \\
 & + \sum_{k=1}^{n_s} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s(k) & \mathbf{D}_s(k) \cdot z_s(k) \\ \mathbf{D}_s(k) \cdot z_s(k) & \mathbf{D}_s(k) \cdot z_s^2(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Betonschichten $\mathbf{D}_c(k)$ und der Drehsteifigkeitsmatrix $\mathbf{D}_\theta(k)$ in Abhängigkeit von ihrer Zustandsform sowie der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Stahlschichten $\mathbf{D}_s(k)$ wird in den Abschnitten 1.5.3 und 1.5.4 erläutert.

1.5.3 Betonschicht

In jeder beanspruchten Betonschicht kann sich eine der drei in Bild 1.14 dargestellten Zustandsformen einstellen: ungerissen, einfach gerissen oder zweifach gerissen. Unter der Voraussetzung, dass der Beton nur Druckkräfte aufnimmt und die auftretenden Zugkräfte vollständig der Bewehrung zugewiesen werden, werden in der Betonschicht keine Zugspannungen berücksichtigt.



a) ungerissen

b) einfach gerissen

c) zweifach gerissen

Bild 1.14: Zustandsformen einer Betonschicht

Im ungerissenen Beton (Bild 1.14 a) treten keine Zugspannungen, die sonst für die Rissbildung im Beton verantwortlich sind, auf. Die Betonschicht befindet sich somit in einem zweiachsigen Druckzustand, wobei $-\sigma_{c_2} < -\sigma_{c_1}$ gilt. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{D}_{c_{12}}$ für den ungerissenen Beton im hauptdehnungsorientierten Koordinatensystem lautet:

$$\mathbf{D}_{c_{12}} = \begin{bmatrix} E_{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

wobei E_{c_1} und E_{c_2} die Tangentenmoduli der Betonarbeitslinie in den Hauptverzerrungsrichtungen 1 und 2 sind.

Vor der Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} gemäß Gleichung (1.27) ist die Betonsteifigkeitsmatrix $\mathbf{D}_{c_{12}}$ in das globale kartesische Koordinatensystem zu transformieren. Die Materialsteifigkeitsmatrix für eine ungerissene Betonschicht im globalen Koordinatensystem lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_c = E_{c_1} & \begin{bmatrix} \cos^4 \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & \sin^4 \theta & \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \cos^3 \theta & \sin^3 \theta \cdot \cos \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \end{bmatrix} + \\ & + E_{c_2} \begin{bmatrix} \sin^4 \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & -\sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & \cos^4 \theta & -\sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ -\sin^3 \theta \cdot \cos \theta & -\sin \theta \cdot \cos^3 \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Die Steifigkeitsmatrix für den einfach gerissenen Beton (Bild 1.14 b) im hauptverzerrungsorientierten Koordinatensystem ergibt sich zu

$$\mathbf{D}_{c_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

und die zugehörige Drehsteifigkeitsmatrix \mathbf{D}_θ , die auch für den ungerissenen Beton im kartesischen Koordinatensystem nach [K1] ihre Gültigkeit besitzt, zu

$$\mathbf{D}_\theta = \frac{-\sigma_{c2}}{\sqrt{2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}} \begin{bmatrix} \sin^2 2\theta & -\sin^2 2\theta & -\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta \\ -\sin^2 2\theta & \sin^2 2\theta & \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta & \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta & \cos^2 2\theta \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Zweifach gerissener Beton (Bild 1.14 c)) ist spannungsfrei und weist daher keine Steifigkeiten auf.

Für Druckspannungen kleiner als etwa 30 ÷ 40% der einachsigen Druckfestigkeit verhält sich der Beton annähernd linear.

1.5.4 Stahlschicht

In einem geschichteten Schalenelement ist die Bewehrung durch n_s Stahlschichten eingebettet. Jede Stahlschicht wird durch ihre Fläche A_s , den Abstand z_s von der Mittelebene des Schalenelements und durch den Winkel α zwischen der x -Achse und der Bewehrungsrichtung definiert (Bild 1.16).

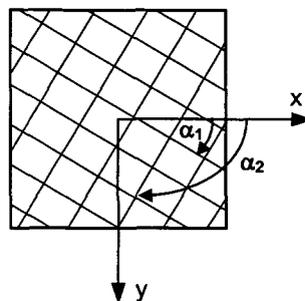


Bild 1.16: Stahlschicht

Die Materialsteifigkeit einer Stahlschicht im kartesischen Koordinatensystem kann durch Gleichung (1.32) ausgedrückt werden:

$$\mathbf{E}_s = E_s \cdot A_s \cdot \begin{bmatrix} \cos^4 \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta & \sin^4 \theta & \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \cos^3 \theta & \sin^3 \theta \cdot \cos \theta & \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Die Tangentensteifigkeit E_s und die Stahlspannung σ_s ergeben sich für eine bekannte Verzerrung aus dem einachsigen Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Die Arbeitslinie für Stahl ist in Bild 1.17 dargestellt.

Für Stahl wird im Druck- wie auch im Zugbereich ein elastisch-plastischer Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang mit linearer isotroper Verfestigung angenommen. Nach dem Überschreiten der Fließgrenze wird ein Verfestigungsmodul E_h gleich einem Hundertstel des Elastizitätsmoduls in Rechnung gestellt, um numerische Schwierigkeiten bei der iterativen Lösung zu vermeiden.

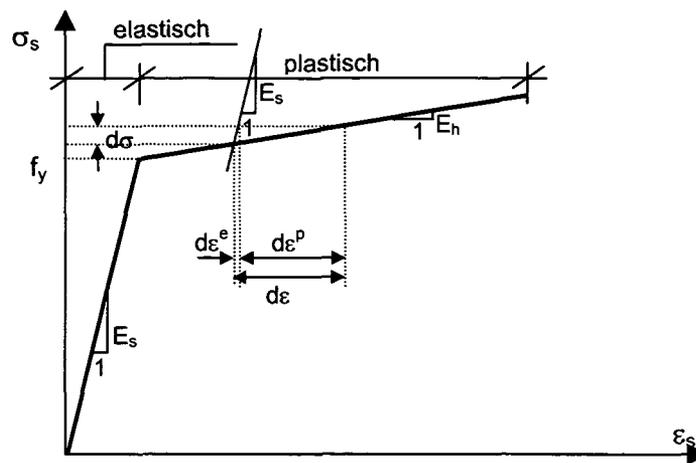


Bild 1.17: Idealierte Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls

1.6 Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme

Die geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten des diskretisierten Stahlbetontragwerks werden mit Hilfe von algebraischen Gleichungen beschrieben. Bei der Berechnung werden meistens verschiedene Lösungsarten wie die inkrementelle, iterative oder kombinierte Methode verwendet.

Bezeichnet man die Summe der äußeren Kräfte mit F_a , den Vektor der inneren Kräfte mit F_i und die Steifigkeitsmatrix mit K , kann die resultierende Gleichgewichtsbedingung folgendermaßen beschrieben werden:

$$K \cdot \Delta a = F_a - F_i \quad (1.33)$$

In der Gleichgewichtslage verschwindet die Differenz zwischen äußeren und inneren Kräften, was zum Verschwinden des Verschiebungsinkrementenvektors Δa führt.

Eine Aufbringung der gesamten äußeren Last F_a wäre in einem einzigen Lastschritt möglich, aber nicht vernünftig. Einerseits entsteht eine große Differenz zwischen äußeren und inneren Kräften, wodurch zahlreiche Iterationsschritte erforderlich werden. Andererseits ist das Werkstoffmodell meist wegabhängig, weshalb keine eindeutige Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen existiert [B3]. Deswegen ist es sinnvoll, bei der Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme die gesamte Last in kleinen Schritten ΔF_a (oder Inkrementen) aufzubringen. Dabei ist zu bemerken, dass eine rein inkrementelle Strategie auch wieder zu falschen Ergebnissen führt. Die

Systemsteifigkeitsmatrix wird nur am Anfang eines Lastinkrements ermittelt und die sich bis zum Ende des Inkrements einstellenden Steifigkeitsänderungen bleiben unberücksichtigt. In einem solchen Fall entfernt sich die numerische Lösung immer weiter vom tatsächlichen Gleichgewichtspfad und liefert eine Überschätzung der Traglast. Anstelle eines inkrementellen Verfahrens werden inkrementell-iterative Verfahren herangezogen, um das Abdriften der numerischen Lösung vom tatsächlichen Verhalten zu verhindern oder zu vermeiden. Bild 1.18 zeigt die inkrementell-iterative Methode.

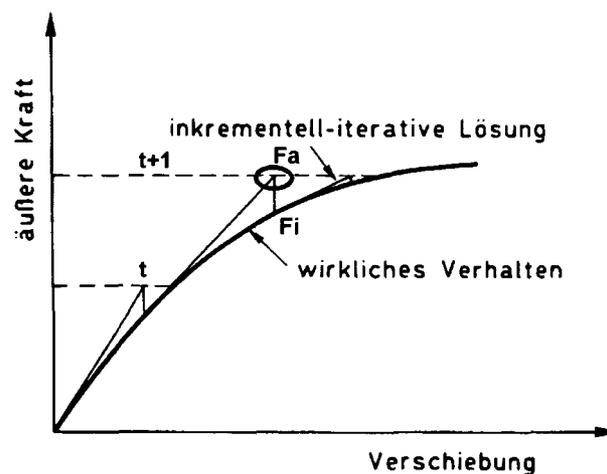


Bild 1.18: Inkrementell - iterative Methode [B3]

Unter Verwendung des ersten abgeschätzten Verschiebungsinkrements $\Delta \mathbf{a}^1$ kann man eine erste Approximation des inkrementellen Verzerrungsvektors $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^1$ erzielen. Mit dem Stoffgesetz wird das Spannungsinkrement $\Delta \boldsymbol{\sigma}^1$ bestimmt. Die inneren Kräfte, die aus diesen Spannungen ermittelt werden, stehen im Allgemeinen mit den äußeren Kräften nicht im Gleichgewicht. Deshalb wird ein zusätzliches Verschiebungsinkrement $d\mathbf{a}^2$ eingeführt, um die gesamte Verschiebung $\Delta \mathbf{a}^2$ aus dem Anfangs- ($\Delta \mathbf{a}^1$) und dem zusätzlichen Verschiebungsinkrement zusammensetzen:

$$\Delta \mathbf{a}^2 = \Delta \mathbf{a}^1 + d\mathbf{a}^2 \quad (1.34)$$

In ähnlicher Weise wie bei der ersten Iteration wird das Verzerrungsinkrement $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2$ und das Spannungsinkrement $\Delta \boldsymbol{\sigma}^2$ ermittelt. Es wird solange iteriert, bis ein Gleichgewichtszustand mit hinreichender Genauigkeit erzielt wird. Danach erfolgen weitere Lastinkremente, bis die Systemtraglast erreicht wird. Als Konvergenzkriterien lassen

sich der Betrag der Verschiebungsinkremente, der Ungleichgewichtskräfte oder der Veränderung der inneren Energie heranziehen.

Wird am Anfang einer neuen Iteration nicht nur der innere Kräftevektor neu gebildet, sondern auch eine neue Tangentensteifigkeitsmatrix konstruiert, spricht man von einer Newton-Raphson-Iteration. Die Konvergenz eines solches Verfahrens ist dabei sehr schnell, aber gleichzeitig auch mit einem großen Rechenaufwand in jeder Iteration verbunden. Im Gegensatz dazu wird bei der modifizierten Newton-Raphson-Iteration die Steifigkeit jeweils nur in der ersten Iteration einer Laststufe gebildet und zerlegt und bei den nachfolgenden Iterationen weiterhin verwendet.

KAPITEL 2

NACHWEISFORMAT NACH EUROPÄISCHEN NORMEN

2.1 Anforderungen an die Stahlbetontragwerke

Die Bemessungskonzepte für Stahlbetontragwerke nach den neuen europäischen Normen wie Eurocode 2 [E2], CEB-FIP MC 90 [C2], DIN 1045-1 [D1] und ÖNORM B4700 [Ö1] sind sowohl auf die Anforderungen an die Tragsicherheit und Dauerhaftigkeit als auch auf die Gebrauchstauglichkeit ausgerichtet. Im Allgemeinen ist nachzuweisen, dass für die gewählten Querschnittsabmessungen und die Bewehrungsanordnung eine ausreichende Sicherheit gegen ein Versagen der Konstruktion besteht. Um eine solche Zuverlässigkeit zu gewährleisten, muss dieses Tragwerk oder Bauteil die Anforderungen sowohl im Gebrauchszustand als auch im Grenzzustand der Tragfähigkeit erfüllen. Dieser Grenzzustand kann durch den Bruch kritischer Querschnitte oder durch den Verlust des Systemgleichgewichts eintreten und ein Versagen des einzelnen Konstruktionsteils oder des gesamten Systems hervorrufen. Darüber hinaus ist der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zu überprüfen, um die an das Bauwerk geforderten Funktionen sicherzustellen und das Auftreten von Schäden an Ausbauteilen, die das Aussehen bzw. die Dauerhaftigkeit des Tragwerks stark beeinträchtigen, zu verhindern [V1]. Dies kann durch große Verformungen, erhebliche Rissbildungen, Schwindanfälligkeit oder Undichtwerden verursacht werden.

Zu den Forderungen, denen ein Stahlbetontragwerk entsprechen muss, zählen neben der Tragsicherheit und der Gebrauchstauglichkeit auch die Wirtschaftlichkeit.

2.2 Nachweis der Tragsicherheit

2.2.1 Grundsätze und Einwirkungskombinationen

Der Nachweis der Tragsicherheit wird durch die Gegenüberstellung der Schnittgrößen infolge äußerer Einwirkungen S und des vom Bauwerk geleisteten Widerstands R geführt. Die Bemessungsgleichung lautet:

$$R \geq S \quad \text{bzw.} \quad Z = G(X) = R - S \geq 0 \quad (2.1)$$

Die Einwirkungen S und die Widerstände R sind keine deterministischen, sondern streuende Größen mit entsprechenden Verteilungsdichten $f_R(r)$ bzw. $f_S(s)$. Ihre Charakterisierung erfolgt durch die Angabe des jeweiligen Mittelwerts und der Standardabweichung. Durch einen Vergleich der beiden Verteilungsdichten kann die Bauwerkszuverlässigkeit angegeben werden. Da R und S statistische Verteilungen darstellen, gelten dieselben Regeln auch für die Grenzzustandsfunktion $G(X)$, die von den Zufallsvariablen X_i der Einwirkungs- und Widerstandsseite abhängt. Beim Erreichen des Grenzzustands gilt

$$R = S \quad \text{bzw.} \quad Z = G(X) = 0 \quad (2.2)$$

Die Ungleichung (2.1) kann also nur mit einer gewissen Zuverlässigkeit $1 - p_f$, wobei p_f die Versagenswahrscheinlichkeit definiert, eingehalten werden [P4]. Die Größe der Versagenswahrscheinlichkeit ist vor allem von der Nutzungsdauer des Bauwerks abhängig. Nach Eurocode 1 liegt dieser Wert für den Grenzzustand der Tragfähigkeit für eine theoretische Nutzungsdauer von 50 Jahren bei 10^{-6} .

Die Bemessung der Stahlbetontragwerke nach den neuen Normenwerken basiert auf einem semi-probabilistischen Ansatz. Zur Beschreibung des Tragverhaltens der Konstruktion wurde der früher verwendete globale Sicherheitsbeiwert durch die Verwendung mehrerer Teilsicherheitsfaktoren ersetzt. Damit wird ein Teil der gesamten Sicherheit sowohl der Seite der Einwirkungen (γ_G, γ_Q) als auch der Seite des Widerstands (γ_C, γ_S) zugeordnet, woraus

$$S_d(\gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k) \leq R_d = R \left(\frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \right) \quad (2.3)$$

folgt. S_d ist der Bemessungswert der maßgebenden Einwirkungskombination und R_d der Bemessungswert des Tragwiderstands.

Zur Ermittlung der maßgebenden Einwirkungskombination ist eine ausreichende Anzahl von Lastfällen zu untersuchen, um die kritischen Bemessungsbedingungen für alle Querschnitte im betrachteten Tragwerk oder Tragwerksteil zu ermitteln [P6]. Der Bemessungswert der Beanspruchung ist dabei für das entsprechende Lastniveau L_d zu berechnen, wobei folgende Lastkombinationen zu berücksichtigen sind:

➤ Grundkombination

$$L_d = \sum_j (\gamma_{G,j} \cdot G_{k,j}) + \gamma_{Q,i} \cdot \sum_{i=1}^n Q_{k,i} \quad (2.4)$$

➤ Außergewöhnliche Kombination

$$L_d = \sum_j G_{k,j} + \sum_i (\psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}) + F_{ex} \quad (2.5)$$

Die in den Formeln (2.4) und (2.5) verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:

$\gamma_{G,j}$ - Teilsicherheitsbeiwerte für ständige Einwirkungen, wobei für ungünstige Auswirkungen $\gamma_{G,j}$ mit 1,35 und für günstige Auswirkungen mit 1,00 anzusetzen ist.

$\gamma_{Q,i}$ - Teilsicherheitsbeiwerte für veränderliche Einwirkungen. Bei Vorhandensein einer einzigen veränderlichen Einwirkungsart ist mit $\gamma_{Q,1} = 1,50$ zu rechnen und bei mindestens zwei voneinander unabhängigen, veränderlichen Einwirkungsarten ist $\gamma_{Q,i} = 1,35$ anzusetzen.

$\psi_{2,i}$ - Kombinationsbeiwerte zur Berücksichtigung des quasiständigen Anteils der veränderlichen Einwirkungen

$G_{k,j}$ - charakteristische Werte der ständigen Einwirkungen

$Q_{k,i}$ - charakteristische Werte der veränderlichen Einwirkungen

F_{ex} - außergewöhnliche Einwirkungen.

Der Grenzwiderstand der Tragfähigkeit ist aus den planmäßigen Abmessungen und den charakteristischen Werten der Materialfestigkeiten zu bestimmen. Der Tragsicherheitsnachweis kann sowohl auf der Querschnitts- als auch auf der Systemebene geführt werden, wobei verschiedene Festigkeitswerte in Rechnung zu stellen sind. Im Allgemeinen erfolgt dieser Nachweis jedoch auf der Querschnittsebene. Der Bemessungswert des Widerstands R_d berechnet sich als Quotient aus dem charakteristischen Grenzwiderstand R_k und dem Teilsicherheitsbeiwert γ_R für den Widerstand, wobei der Teilsicherheitsbeiwert für den Betonwiderstand ($\gamma_R = \gamma_c$) 1,5 für die Grundkombination und 1,3 für die außergewöhnliche Kombination beträgt. Für den Stahlwiderstand ($\gamma_R = \gamma_s$) ist mit 1,15 in der Grundkombination und mit 1,0 in der außergewöhnlichen Kombination zu rechnen.

Der Grenzzustand der Tragfähigkeit liegt vor, wenn in einem beliebigen Querschnitt des Tragwerks die kritischen Stahlspannungen oder die kritischen Betonverzerrungen oder am Gesamtsystem bzw. Teilen davon der kritische Zustand des indifferenten Gleichgewichts erreicht wird [D1]. In statisch bestimmten Systemen führt die Verletzung der Gleichung (2.3) in einem Querschnitt bereits zum Versagen des ganzen Systems. Bei statisch unbestimmten Tragwerksstrukturen, zu denen auch die Stahlbetonplatten gehören, überschreiten die Systemversagensgrenzen hingegen deutlich die jeweiligen Querschnittsversagensgrenzen. Das Versagen einzelner Querschnitte führt solange zu einer Schnittgrößenumlagerung in die benachbarten Querschnitte, bis die Traglast der gesamten Struktur erreicht wird.

2.2.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung

Das tatsächliche Trag- und Verformungsverhalten der Flächentragwerke und seine ausreichende Erfassung erfordert eine wirklichkeitsnahe Modellierung der Stahlbetoneigenschaften im Nachrissbereich. Aus diesem Grund lassen die neuen europäischen Normen für die Eurocode-nahe Berechnung, Bemessung und konstruktive Durchbildung für die Schnittgrößenermittlung die Verwendung

- der linearen Elastizitätstheorie ohne und mit anschließender Schnittgrößenumlagerung,
- der Plastizitätstheorie
- von nichtlinearen Verfahren

zu.

Die lineare Berechnung ohne und mit anschließender Schnittgrößenumlagerung ist weiterhin das in der Praxis am häufigsten angewandte Verfahren. Die nichtlinearen Verfahren mit Hilfe der Finite-Element Methode ermöglichen hingegen die wirklichkeitsnähere Erfassung der Plattentragfähigkeiten und die nichtlinearen Stahlbetoneigenschaften im Nachrissbereich. Bei dieser Berechnung wird die lastabhängige Steifigkeit des Tragwerks und deren Verteilung über das gesamte System in jedem Rechenschritt realitätsnahe beschrieben. Als Ergebnis erhält man die Systemtraglast, die allerdings von den verwendeten Baustoffeigenschaften abhängig ist.

Die in Eurocode 2 und auch in der ÖNORM B 4700 zugelassene nichtlineare Tragwerksbemessung erfordert für die Bemessungswerte der Einwirkungen eine Schnittgrößenermittlung am Gesamtsystem mit anschließender Querschnittsbemessung. Für diese getrennten Nachweise kommen zwei unterschiedliche Materialbeschreibungen zur Anwendung. Bei der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung sind die Arbeitslinien mit den Mittelwerten der jeweiligen Baustofffestigkeiten zu verwenden. Die Spannungs-Stauchungs-Linie des Betons kann durch Gleichung (2.6) beschrieben werden:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (2.6)$$

wobei

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

mit

ε_{c1} - Stauchung beim Höchstwert der Betondruckspannung

und

$$k = 1,1 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

mit

E_{cm} - mittlerer Elastizitätsmodul als Sekante

f_{cm} - Mittelwert der Zylinderdruckfestigkeit des Betons

bedeutet. Die Arbeitslinie ist in Bild 2.1 graphisch dargestellt, wobei die mittleren Betonkennwerte mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad [N/mm^2] \quad (2.7)$$

$$f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{(2/3)} \quad (2.8)$$

$$E_{cm} = 22 \cdot [(f_{cm}) / 10]^{0,3} \quad (f_{cm} \text{ in } N/mm^2) \quad (2.9)$$

Die oben verwendeten Betonkennwerte sind in Abhängigkeit von der Betonfestigkeitsklasse in Tabelle 3.1 des Eurocode 2 [E2] angegeben.

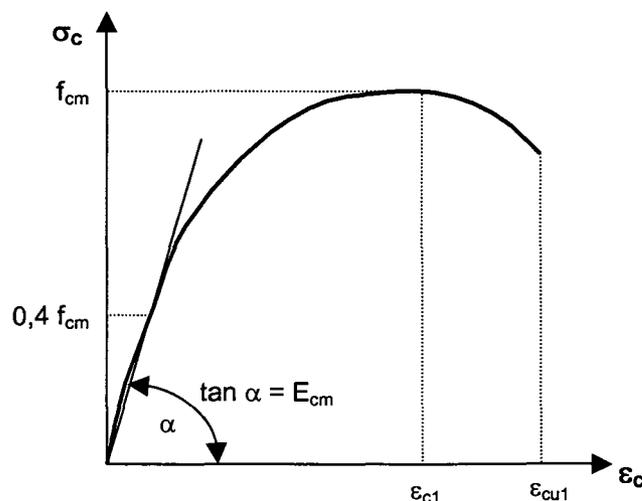


Bild 2.1: Spannungs-Dehnungs-Linie für die Schnittgrößenermittlung mit nichtlinearen Verfahren

Der Bemessungswert der Betondruckfestigkeit f_{cd} , der bei der Querschnittsbemessung zu verwenden ist, wird durch den Quotienten aus charakteristischer Dauerstandsfestigkeit f_{ck} und Teilsicherheitsbeiwert des Betonwiderstands mit $\gamma_c = 1,50$ zu

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.10)$$

ermittelt. Neben den Bemessungswerten der Materialfestigkeiten kommt bei der Querschnittsbemessung die Arbeitslinie für Beton unter Druck das in Bild 2.2 dargestellte Parabel-Rechteck-Diagramm zur Anwendung.

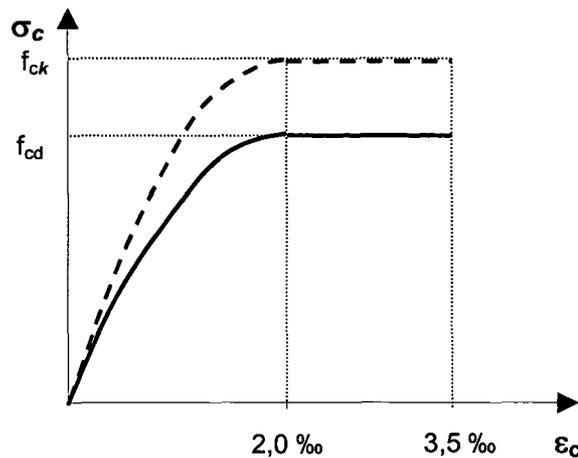


Bild 2.2: Rechnerische Spannungs-Verzerrungs-Linie des Betons unter Druck für die Querschnittsbemessung

Der Mittelwert der Streckgrenze von Bewehrungsstahl wird nach Formel (2.11) in Eurocode 2 und in ÖNORM B 4700 in ähnlicher Weise nach Formel (2.12) festgelegt.

$$f_{ym} = f_{yk} \cdot 1,1 \quad (2.11)$$

$$f_{ym} = f_{yk} + 10,0 \text{ N / mm}^2 \quad (2.12)$$

Analog zu Beton wird auch der Bemessungswert f_{yd} der Streckgrenze des Bewehrungsstahls f_{yd} berechnet. Der Teilsicherheitsbeiwert des Stahlwiderstands beträgt $\gamma_s = 1,15$. Der Bemessungswert ergibt sich damit zu

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.13)$$

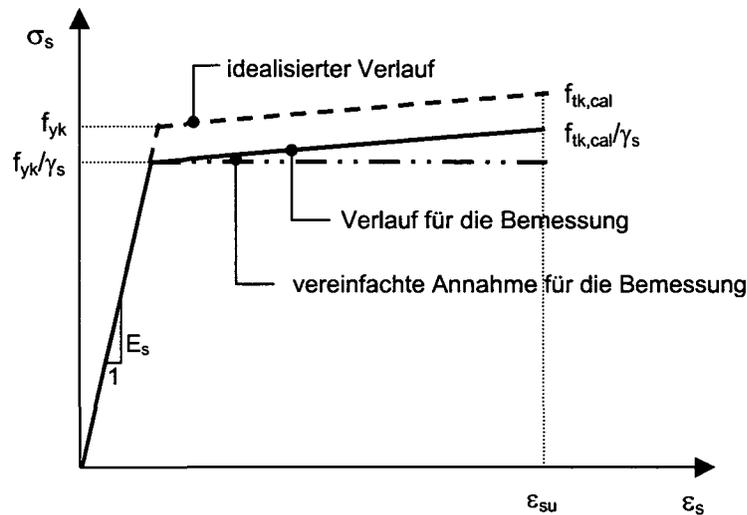


Bild 2.3: Rechnerische Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls für die Bemessung

Bei diesem geteilten Nachweis, einerseits der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung und andererseits der Querschnittbemessung, kommen somit unterschiedliche Materialkennwerte zur Anwendung. Nach einigen Iterationsschritten kommt man bereits zu einem Ergebnis, welches aufgrund der Querschnittsbemessung zu einem überdimensionierten Tragwerk führt und somit keine wirtschaftlichen Ergebnisse erzielt [K5].

Im Unterschied zu Eurocode 2 und ÖNORM B 4700 lässt nur die deutsche Norm DIN 1045-1 die Anwendung der so genannten Rechenfestigkeiten als Ersatz für die Mittelwerte der Materialeigenschaften zu. Grundidee dieses Vorschlages ist es, den Mittelwert der Betonfestigkeit mit einem Reduktionsfaktor vorweg abzumindern, so dass die Festlegung des Sicherheitsabstands für den Tragwerkswiderstand unabhängig von der Versagensart erfolgen kann [K5]. Wie im Aufsatz von König und Ahner nachgewiesen und in DIN 1045-1 zugelassen wurde, kann bei einer nichtlinearen Berechnung ein einheitlicher Teilsicherheitsbeiwert für ständige und vorübergehende Bemessungssituationen mit $\gamma_R = 1,30$ auf der sicheren Seite abgeschätzt werden. Diese Berechnungen dürfen dabei mit den folgenden Rechenfestigkeiten durchgeführt werden:

$$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} \quad (\text{bis C 50/60}) \quad (2.14)$$

Für den Beiwert α , der, solange keine Kurzzeitbelastung vorliegt, als Dauerstands-faktor gilt, ist bei Normalbeton $\alpha = 0,85$ und bei Leichtbeton $\alpha = 0,75$ anzunehmen.

Die rechnerischen Mittelwerte der Streckgrenze des Bewehrungsstahls sind für den Druck- als auch für den Zugbereich nachfolgend angegeben.

$$f_{yR} = 1,10 \cdot f_{yk} \quad (2.15)$$

$$f_{tR} = 1,08 \cdot f_{yR} \quad (\text{für hochduktilen Stahl}) \quad (2.16)$$

$$f_{tR} = 1,05 \cdot f_{yR} \quad (\text{für normalduktilen Stahl}) \quad (2.17)$$

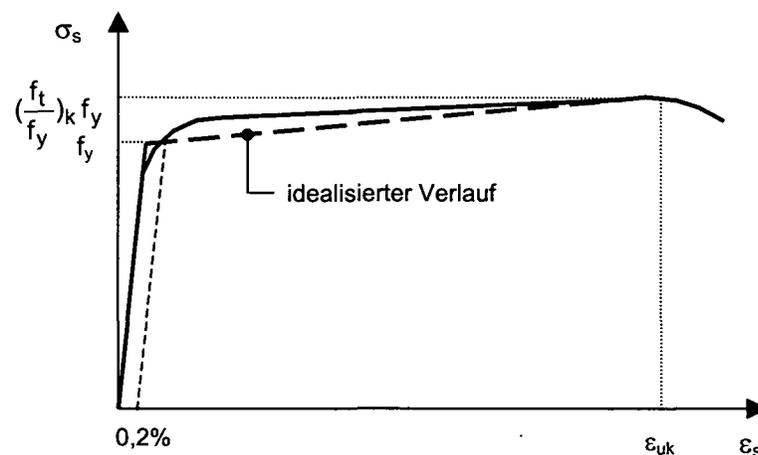


Bild 2.4: Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls für die Schnittgrößenermittlung

Der Beiwert $0,85$ bei der Rechenfestigkeit des Betons (Formel (2.14)) ergibt sich aus dem Verhältnis $\gamma_R / \gamma_C = 1,30 / 1,50 = 0,85$ [W1]. Der Beiwert $1,10$ bei der rechnerischen Stahlstreckgrenze (Formel (2.15)) wird analog aus dem Verhältnis $\gamma_R / \gamma_s = 1,30 / 1,15 = 1,10$ bestimmt.

Die Unterschiede bei den verwendeten Materialfestigkeiten bei der Bemessung auf Querschnittsebene und der nichtlinearen Bestimmung der aufnehmbaren Schnittgrößen auf Systemebene kann man als Querschnittssicherheit betrachten. Darunter versteht man jene Reserve, die ein Querschnitt nach Erreichen der Bemessungsschnittgrößen besitzt. Wie bei Wittek et al. gezeigt wird, kann diese Querschnittssicherheit als Verhältnis $S_u(f_{cR}, f_{yR}) / S_d(f_{cd}, f_{yd})$ in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad ausgedrückt werden. Ihr Wert ist konstant und beträgt etwa $1,30$. Mit den Beiwerten

0,85 für Beton und 1,10 für Stahl in den Formeln (2.14) und (2.15) wurden eigentlich die Rechenwerte so ermittelt, dass die Querschnittssicherheit immer konstant bleibt.

Gemäß den nichtlinearen Nachweisverfahren nach DIN 1045-1 wird der Grenzzustand der Tragfähigkeit erreicht, wenn in einem beliebigen Querschnitt des Tragwerks die zur maximalen Stahlspannung gehörende kritische Stahldehnung ε_{smu} , bzw. die zur größten Druckspannung gehörende kritische Betonstauchung des Betons ε_{cu} oder auch der kritische Zustand der Stabilität am Gesamtsystem oder Teilen davon erreicht ist. Die kritische Stahldehnung ist mit 25 ‰ und die Grenzstauchung des Betons mit 3,5 ‰ begrenzt.

Somit wird der Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit durch die Ermittlung einer ausreichenden Systemtraglast ersetzt. Dabei wird für die planmäßigen Abmessungen und die genaue Lage der Bewehrung unter den einwirkenden Bemessungslasten ein ausreichender globaler Sicherheitsabstand γ_R nachgewiesen. Die Bemessungsgleichung für die nichtlineare Tragwerksanalyse sieht dann folgendermaßen aus:

$$S_d(\gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k) \leq R_d = \frac{1}{\gamma_R} \cdot R_{sys} = \frac{1}{\gamma_R} \cdot R(f_{cR}, f_{yR}) \quad (2.18)$$

Im Rahmen einer nichtlinearen Berechnung wird der rechnerische Grenzzustand dann erreicht, wenn bei proportionaler Laststeigerung der erreichte Traglastfaktor λ_u der Bemessungslast S_d dem Systemteilsicherheitsbeiwert γ_R entspricht:

$$\lambda_u \leq \gamma_R \quad \text{bzw.} \quad \lambda_u \cdot S_d \leq R_{sys} \quad (2.19)$$

Der wesentliche Vorteil des in DIN 1045-1 zugelassenen Konzeptes für den nichtlinearen Nachweis der Tragfähigkeit ist, dass unabhängig von der Versagensart mit einem Teilsicherheitsbeiwert für den Bauteilwiderstand gerechnet werden darf. Somit ist auch die Führung eines zweigeteilten Nachweises auf Systemebene und Querschnittsebene nicht mehr notwendig.

Auf der Basis dieser unterschiedlichen Ansätze zur Berechnung und Bemessung des Tragverhaltens im sowohl ungerissenen als auch gerissenen Zustand wurden einige Algorithmen zur Bewehrungsoptimierung entwickelt. Grundsätzlich verläuft die Bewehrungsbestimmung bei statisch bestimmten Tragwerken viel einfacher, da mit Er-

reichen der Tragfähigkeit in den einzelnen maßgebenden Querschnitten gleichzeitig auch die Systemtraglast erreicht wird und keine Möglichkeit für Schnittgrößenumlagerungen gegeben ist. Bei statisch unbestimmten Konstruktionen, wie sie die Flächentragwerke darstellen, wird durch die Umlagerung der Schnittgrößen die Systemtraglast gegenüber der aufnehmbaren Querschnittslast wesentlich erhöht. Daher führt bei Stahlbetonplatten die genaue Erfassung und Modellierung im Nachrissbereich zu einer wirtschaftlicheren Ausnutzung des Betonstahls und entsprechenden Ersparnissen.

Die getrennten Verfahren zur Schnittgrößenermittlung und Querschnittsbemessung bilden die Grundlage des Algorithmus nach der Methode der Schnittgrößeniteration. Für die nichtlineare Berechnung sind die Bewehrungslage und -menge von entscheidender Bedeutung. Dabei kann der gesamte Iterationsprozess, der im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben wird, sowohl mit der mindesterforderlichen Bewehrung laut Norm als auch mit einer linear elastisch berechneten Stahlfläche als Startbewehrung erfolgen.

Die Methode der Traglastiteration stützt sich auf dem in DIN 1045-1 vorgeschlagenen Konzept mit einem globalen Sicherheitsfaktor und rechnerischen Mittelwerten für die Baustofffestigkeiten. Als Ausgangspunkt für eine nichtlineare Analyse des Tragwerks stellt sich wiederum die Frage nach der Startbewehrung. Wie in den Beispielen in Kapitel 4 zu sehen ist, liefert das Einlegen einer Mindestbewehrung als Startbewehrung in Züge des Ermittlungsprozesses durchaus brauchbare Ergebnisse.

2.3 Nachweis der Gebrauchstauglichkeit

Die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit dienen der Überprüfung des Tragverhaltens unter Gebrauchslast, um die vorgesehene Nutzung sicherzustellen [Ö1]. In der Regel reichen dazu die Rissbreiten- und Verformungsbeschränkungen aus. Unter Berücksichtigung der Langzeiteinwirkungen lässt sich die Dauerlast als Summe aus ständigen Einwirkungen und quasi-ständig wirkenden Anteilen der veränderlichen Lasten nach Formel (2.20) berechnen.

$$L_D = \sum_j G_{k,j} + \sum_i (\psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}) \quad (2.20)$$

Im Allgemeinen weisen die Stahlbetonplatten für diese im Unterschied zur Traglastberechnung geringeren Lastniveaus kein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf. Obwohl Eurocode 2 auch für die Schnittgrößenermittlung nichtlineare Verfahren im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zulässt, kann man mit hinreichender Genauigkeit diesen Grenzzustand nach der Elastizitätstheorie untersuchen. Die Begrenzung der Durchbiegungen auf $1/250$ der Stützweite unter Dauerlast wird, sofern der Anteil der ständigen Einwirkungen nicht mehr als 70% der Gesamtlast beträgt, in der Regel nicht benötigt, solange die festgelegten Grenzschlankheiten nicht überschritten werden. Die rechnerische Rissbreite $w_k = 0,3 \text{ mm}$ unter Dauerlast gilt als nachgewiesen, wenn eine risseverteilende Bewehrung, die nicht kleiner als die vorgeschriebene Mindestbewehrung ist, am Zugrand angeordnet wird und ihr Stabdurchmesser den festgelegten Grenzdurchmesser d_{sg} nicht überschreitet. Die durch den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit erforderliche Bewehrung stellt eine untere Schranke und gleichzeitig auch eine geeignete Startbewehrung für die nichtlineare Ermittlung der erforderlichen Stahlfläche dar.

KAPITEL 3

ALGORITHMEN ZUR BEWEHRUNGSERMITTLUNG

3.1 Allgemeines

Platten sind die am weitesten verbreiteten Tragelemente des Stahlbetonbaus. Sie werden im Hoch- und Industriebau vor allem bei Deckensystemen eingesetzt. Ihr Anteil am verarbeiteten Betonvolumen beträgt etwa 60%. Auch das kostenintensivste Element des Rohbaus sind die Geschossdecken einschließlich der Unterzüge. Dabei ist zu bemerken, dass der Anteil der Geschossdecken an den auf die Gesamtgeschossfläche bezogenen Rohbaukosten für niedriggeschossige Gebäude bei fast 100 % und bei Hochhäusern bei ca. 50 % liegt [Z1]. Die Materialkosten für den Bewehrungsstahl liegen bei etwa 2/3 und die Lohnkosten bei etwa 1/3 der Gesamtkosten, die für die Bewehrung aufzuwenden sind. Aus dieser Sicht kann eine wirtschaftliche Bewehrungsermittlung zu erheblichen Einsparungen an den Gesamtkosten des Tragwerks führen.

Heute werden Stahlbetonplatten in der Regel mit Hilfe elastischer Momentumlagerungen bemessen. Die Methode der finiten Elemente ermöglicht die Anwendung eines computerunterstützten Verfahrens zur Bemessung sowohl von einfach strukturierten Platten als auch von Konstruktionen mit komplizierter Geometrie.

Nach einem kurzen Überblick über die bestehenden Algorithmen zur Bewehrungsermittlung mittels linear-elastisch ermittelten Schnittgrößen und Plastizitätstheorie werden die Methoden der nichtlinearen Schnittgrößen- bzw. Traglastiteration vorge-

stellt. Mit der Bemessung anhand nichtlinear ermittelter Schnittgrößen und der Vorgehensweise bei dem nichtlinearen Algorithmus zur automatischen Traglastiteration wird ein neues Verfahren für die Bewehrungsermittlung in Stahlbetonplatten vorgestellt.

3.2 Bemessung von Flächentragwerkselementen anhand linear - elastisch ermittelter Schnittgrößen

Der iterative Algorithmus zur Berechnung von Flächentragwerken mit linear-elastisch ermittelten Schnittgrößen von Kollegger [K1] wird in dieser Arbeit zu einem praxistauglichen Bemessungsverfahren erweitert. Die Bestimmung der Traglast erfolgt mit Hilfe der Intervallhalbierung und der erforderlichen Erhöhung der Bewehrungsfläche. Die Bewehrungssinkremente werden dabei in Abhängigkeit von der berechneten Traglast gewählt. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte der Traglastberechnung für ein geschichtetes finites Element kurz erläutert.

Als erstes werden die Eingabewerte zur Berechnung eines geschichteten Schalenelements unter Belastung eingelesen. Hierzu gehören einerseits die Elementdicke, die Anzahl der Betonschichten und deren Materialkennwerte sowie andererseits die Stahlschichten mit ihrer Fläche A_s und ihrem Abstand z_s von der Mittelebene des Elements, dem Winkel α zwischen der x -Achse und der Bewehrungsrichtung und als auch die erforderlichen Stahlkennwerte.

Im zweiten Schritt wird die Anfangssteifigkeitsmatrix nach Formel (3.1) [M5] gebildet, wobei auf die Querdehnzahlen des Betons verzichtet wird.

$$K^0 = E_c \cdot t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{24} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Im folgenden dritten Schritt werden die äußeren Schnittgrößen \mathbf{S}_a eingelesen.

Danach wird ein Verzerrungszustand ε derart bestimmt, dass die Schnittgrößen \mathbf{S}_a aus den äußeren Einwirkungen mit den Schnittgrößen \mathbf{S}_i aus den inneren Kräften des Schalenelements im Gleichgewicht stehen. Auf diese Weise werden die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}^0 als Differenz zwischen den äußeren und inneren Schnittgrößen folgendermaßen gebildet:

$$\mathbf{R}^0 = \mathbf{S}_a - \mathbf{S}_i \quad (3.2)$$

Beim ersten Durchlauf ist für \mathbf{S}_i ein Nullvektor einzusetzen, weil das System noch unbelastet ist.

Ab diesem Zeitpunkt beginnt eine Iterationsschleife. Es wird ein Verzerrungszinkrement $\Delta\varepsilon^j$ als Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{K}^{j-1} \cdot \Delta\varepsilon^j = \mathbf{R}^{j-1} \quad (3.3)$$

bestimmt.

Der Schleifenindex j wird beim ersten Durchlauf gleich 1 gesetzt und bei jedem weiteren Durchlauf um 1 erhöht.

Mit dem so berechneten Verzerrungszinkrement $\Delta\varepsilon^j$ werden die Gesamtverzerrungen ε^j mit

$$\varepsilon^j = \varepsilon^{j-1} + \Delta\varepsilon^j \quad (3.4)$$

gebildet.

Für den im Iterationsschnitt j berechneten Verzerrungszustand ε^j eines Elements werden die inneren Normalkräfte (Gln. 1.25) und Momente (Gln. 1.26) sowie die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} (Gl. 1.27) unter Aufsummierung der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Beton- und Stahlschichten ermittelt.

Danach werden die Ungleichgewichtskräfte nach der Gleichung

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{S}_a - \mathbf{S}_i^j \quad (3.5)$$

berechnet und die Konvergenzkriterien für die Verzerrungen, Verkrümmungen, Ungleichgewichtskräfte und -momente mit den zulässigen Werten verglichen. Die Formeln für diese Konvergenzkriterien sind in [M5] angegeben. Wenn die vorgegebene Schranke für die erforderliche Genauigkeit der Konvergenzkriterien nicht erfüllt ist, wird die Iterationsschleife ab Gleichung (3.3) ein weiteres Mal durchlaufen. Für den Fall, dass diese Kriterien mit vorgegebener Genauigkeit erfüllt sind, wird für das Element ein hinreichend exakter Verzerrungszustand gefunden, bei dem ein Gleichgewichtszustand zwischen äußeren Einwirkungen und inneren Reaktionen des Tragsystems herrscht. Anschließend wird die Belastung gesteigert und ein entsprechender Verzerrungszustand für die nächste Laststufe gesucht. Wenn nach dem Erreichen einer maximal vorgegeben Anzahl von Iterationsschritten kein Gleichgewichtszustand zwischen äußeren und inneren Schnittgrößen gefunden werden kann, werden die Intervalle solange halbiert, bis der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten des Lastfaktors λ nach Bild 3.1 einen festgelegten Grenzwert unterschreitet [K1]. Mit dem Verfahren der Intervallhalbierung wird auf diese Weise automatisch die Traglast des Elements bestimmt.

Im zweiten Schritt, der im Anschluss an die Traglastbestimmung automatisch erfolgt, wird die Bewehrungsfläche erhöht bis der globale Sicherheitsbeiwert erreicht wird. Als Eingabewerte für die Bemessungsdurchführung werden die Mindestbewehrung, die Bewehrungsrichtung und die Abstände der beiden Bewehrungslagen von der Mittelebene der Platte herangezogen.

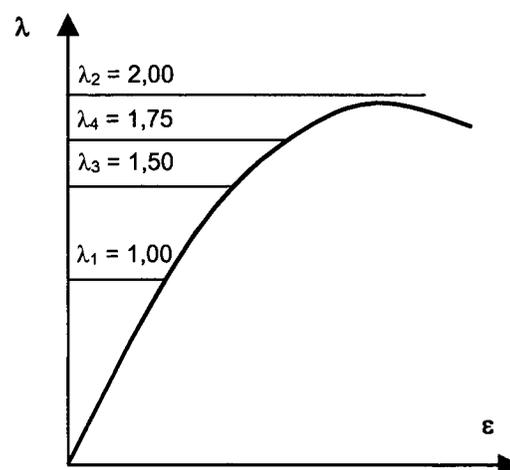


Bild 3.1: Methode der Intervallhalbierung

Im Anschluss an jede Traglastberechnung werden die Stahldehnungen überprüft. Die Bewehrungsfläche mit der größten Dehnung wird um ein vorgegebenes Bewehrungsincrement erhöht, wobei die Inkrementgröße in Abhängigkeit von der erreichten Systemtraglast zu wählen ist. Je nach Differenz zwischen berechnetem und erforderlichem Lastfaktor ergeben sich am Anfang größere Inkremente als vor dem Erreichen des geforderten Sicherheitsbeiwerts. Das von Kollegger in [K1] erläuterte Beispiel zur Bewehrungsbestimmung in einem Stahlbetonelement unter kombinierter Schub- und Biegebeanspruchung bestätigt, dass nach der Bewehrungsoptimierung mit Hilfe des oben beschriebenen Verfahrens die gleiche Traglast mit wesentlich weniger Bewehrung aufgenommen werden kann.

Der Algorithmus zur Traglastberechnung mittels Intervallhalbierung wurde in das nichtlineare Finite-Element Programm SEGNID implementiert. Dieses Programm ermöglicht eine nichtlineare Analyse von Stahlbetontragwerken und damit sowohl die Bestimmung der Traglast für jede gewählte Bewehrungskonfiguration als auch die automatische Bewehrungserhöhung bis der Sicherheitsabstand des Tragwerks gewährleistet ist. Eine ausführliche Betrachtung des nichtlinearen Optimierungsmodus zur Bewehrungsbestimmung erfolgt im Abschnitt 3.4.

3.3 Bemessung und Analyse nach der Plastizitätstheorie

Das Bemessungsverfahren nach Anderheggen, Steffen und Glanzer [A1] [A2] [G1] stellt eine Kombination der linearen Finite-Element Methode und der Plastizitätstheorie dar.

Bei der Bemessung eines Stahlbetontragwerks sind in der Regel die Nachweise der Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit zu führen. Die lineare Finite-Element Methode liefert im Allgemeinen eine für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit brauchbare elastische Lösung. Für den Nachweis der Tragsicherheit wird der untere bzw. statische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie verwendet, der das elastoplastische Materialverhalten von Beton und Stahl berücksichtigt [A1]. Aus der Bemessung erhält man eine Lösung auf der „sicheren“ Seite, wobei die Traglast unterschätzt wird. Darauf werden zwei neue Grundkonzepte aufgebaut – das finite Bemessungselement und die elastoplastische Optimierung. Im Konzept der finiten Bemessungselemente werden nun anstelle der Elementspannungen die Elementknotenkräfte be-

trachtet. Dies sind konzentrierte Kräfte, die von jedem Element auf seine Nachbarn übertragen werden und sich als Produkt der Elementsteifigkeitsmatrix und Knotenverschiebungen berechnen lassen [A1]. Jedes Element des Netzes repräsentiert eine unabhängige Bemessungseinheit, die durch entsprechende Knotenkräfte belastet wird. Die linearisierten Fließbedingungen für diese Knotenkräfte basieren auf der klassischen Johannsenschen Fließbedingung für Stahlbetonplatten [A1].

Der Ablauf einer Bemessung nach diesem Verfahren beginnt mit der Vorbemessung der Bewehrungsfelder nach der klassischen linearen Finite-Element Analyse. Als erstes werden die Geometrie, die Materialeigenschaften, die Lagerungsbedingungen und die Belastungen definiert, danach das Netz generiert und ein lineares Gleichgewichtssystem aufgestellt. Aus den resultierenden Knotenverschiebungen werden die Auflagerreaktionen, Durchbiegungen, Schnittgrößen und erforderlichen Bewehrungsgehalte für beide Grenzzustände ermittelt. Auf der Grundlage dieser elastischen Berechnung und unter Berücksichtigung konstruktiver Aspekte bestimmt der Ingenieur die Lage und Form von polygonalen Bewehrungsfeldern und die Ausdehnung bzw. Richtung von Bewehrungsstäben für die obere und untere Plattenbewehrung. Um zu überprüfen, ob der erforderliche Widerstand vorhanden ist, wird für jedes Bewehrungsfeld automatisch eine elastische Vorbemessung durchgeführt. Erst dann beginnt die lineare Optimierung, bei der ein minimales Gesamtgewicht für die erforderliche Bewehrung gesucht wird [A1].

Die elastisch ermittelte Bewehrung erfüllt den Tragsicherheitsnachweis, weist jedoch gleichzeitig ein hohes Bewehrungsgewicht auf.

Nach der elastischen Vorbemessung wird in einem zweiten Schritt die in der linear elastischen Berechnung ermittelte Bewehrung durch Umlagerung der Momente optimiert. Für ein statisch unbestimmtes Tragwerk unter Belastung (wie eine Platte) ist der elastische Spannungszustand nur einer von unendlich vielen möglichen Gleichgewichtszuständen [A1]. Die Bewehrung wird durch Überlagerung der elastischen Grenzwerte solange mit fiktiven Eigenspannungszuständen optimiert, bis das erforderliche Bewehrungsgewicht eine minimale Größe aufweist. Das Gesamtgewicht der Bewehrung G wird als lineare Funktion der unbekanntenen Bewehrungsflächen a_i mit den entsprechenden Gewichtsfaktoren g_i erfasst und kann somit als Zielfunktion minimiert werden [A1].

$$G = \sum_i g_i \cdot a_i \Rightarrow \text{minimal} \quad (3.6)$$

Der Optimierungsprozess wird automatisch in einem inkrementellen Verfahren durchgeführt, wobei der Benutzer am Anfang die Zonen definiert, in denen plastische Verkrümmungen zugelassen werden. Voraussetzung für das plastische Verhalten einer Stahlbetonplatte ist ihr duktiler Materialverhaltenszustand. Da die Duktilität des Bewehrungsstahls als Bemessungsgrundlage eine entscheidende Rolle bei der Anwendung der Plastizitätstheorie spielt, ist in diesem Optimierungsprozess noch der Duktilitätsbedarf für die Bewehrungsanordnung zu ermitteln. Anschließend wird noch eine Traglastanalyse durchgeführt.

Den maßgebenden Einfluss auf das Ergebnis dieser Bewehrungsoptimierung hat der Ingenieur. Aufgrund seiner Erfahrung gibt er die Anordnung der Bewehrungsfelder, der Zonen, in denen plastische Verkrümmungen eingeführt werden sollen und die Obergrenze der Stahlduktilität vor. Diese Angaben haben einen bedeutenden Einfluss auf das spätere Tragverhalten der Platte sowie den gesamten Optimierungsablauf.

Der Optimierungsalgorithmus nach Anderheggen, Steffen, Glanzer versucht mit Hilfe der Momentumlagerungen die Lastableitung in der Platte den vordefinierten Bewehrungsfeldern anzupassen, wobei der effektiv eingelegte Stahl optimal ausgenutzt werden soll. Dies führt in der Regel zu Stahleinsparungen, die oft zwischen 30 bis 60 % gegenüber einer herkömmlichen elastischen Bemessung liegen [A2].

3.4 Bemessung anhand nichtlinear ermittelter Schnittgrößen

Die neuen europäischen Normen für die Eurocode-nahe Berechnung, Bemessung und konstruktive Durchbildung lassen sowohl für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit als auch der Tragsicherheit die Anwendung von nichtlinearen Verfahren bei der Schnittgrößenermittlung zu. Dabei müssen Baustoffeigenschaften verwendet werden, mit denen die Steifigkeiten realistisch dargestellt werden können. Der durchgeführte Tragsicherheitsnachweis mit nichtlinear ermittelten Schnittgrößen kann dabei entweder auf der Querschnitts- oder Systemebene geführt werden. Der wesentliche Unterschied liegt dabei im Sicherheitsniveau für den jeweiligen Nachweis. Die nichtlineare Schnittgrößenermittlung im Tragwerk erfolgt mit den

Spannungs-Verzerrungs-Linien der Baustoffe und den Mittelwerten der Baustofffestigkeiten. Bei der anschließender Querschnittsbemessung hingegen sind nun die Bemessungswerte der Materialfestigkeiten heranzuziehen. Nur in der deutschen Norm DIN 1045-1 ist für den Nachweis der Tragsicherheit die Anwendung des nicht-linearen Verfahrens mit den rechnerischen Mittelwerten der Festigkeiten und einem einheitlichen Teilsicherheitsbeiwert für die ständige als auch vorübergehende Belastung erlaubt. Aufgrund dieser zwei Möglichkeiten zur Führung des Tragsicherheitsnachweises sind beide nachfolgend beschriebene Konzepte zur Bewehrungsbestimmung aufgebaut.

3.4.1 Konzept der Schnittgrößeniteration

3.4.1.1 Allgemeine Betrachtungen

Der Grenzzustand der Tragfähigkeit darf in keinem Querschnitt des Tragwerks überschritten werden. Dies bedeutet, dass die Bemessung gemäß Gleichung (2.3) auf der Querschnittsebene zu führen ist, wobei der Bemessungswert des aufnehmbaren Querschnittswiderstands R_d den Bemessungswert der einwirkenden Schnittgrößen S_d aus der maßgebenden Lastkombination L_d in keinem Querschnitt des gesamten Tragwerks unterschreiten darf. Für die Ermittlung der Schnittgrößen und die Bestimmung der Bewehrung wird nur zu Beginn das linear elastische Verfahren eingesetzt. Mit der linear ermittelten Bewehrungsfläche und ihrer genauen Lage im Betonquerschnitt wird eine nichtlineare Berechnung auf Systemebene durchgeführt. Bei dieser Berechnung wird das gesamte Tragsystem untersucht, wobei der Systemwiderstand mit den mittleren Materialfestigkeiten angesetzt wird. Dies entspricht einer wirklichkeitsnahen Modellierung unter Zugrundelegung des nichtlinearen Materialverhaltens des Verbundwerkstoffs Stahlbeton.

Das Konzept wurde ausführlich von Wittek, Meiswinkel und Lang in [W1] behandelt. Im Bild 3.2 sind die einzelnen Schritte dieses Optimierungsprozesses grafisch dargestellt.

Im ersten Schritt werden für die einwirkenden Bemessungslasten die Schnittgrößen $S_{d,L}$ in den maßgebenden Querschnitten nach dem linear-elastischen Verfahren berechnet. Mit Hilfe der Bemessungsgleichung (2.3) wird die erforderliche Bewehrungs-

fläche $a_{s,L}$ in den einzelnen Querschnitten bestimmt und ihre Anordnung festgelegt. Die so gewählte Bewehrung wird als Ausgangsbewehrung $a_{s,0} = a_{s,L}$ für den anschließenden Iterationsprozess herangezogen.

Im zweiten Schritt erfolgt unter Zugrundelegung des nichtlinearen Baustoffverhaltens von Beton eine Schnittgrößenberechnung mit der nach Größe und Lage linear festgelegten Bewehrung, bis die schrittweise gesteigerte Belastung die Bemessungslast L_d erreicht. Als Ergebnis dieser Berechnung erhält man die Schnittgrößen $S_{d,NL}$ in den maßgebenden Querschnitten. Mit den so ermittelten Schnittgrößen wird an den maßgeblichen Stellen eine zweite querschnittsgebundene Bemessung durchgeführt und die erforderliche Bewehrungsfläche $a_{s,1}$ neu bestimmt.

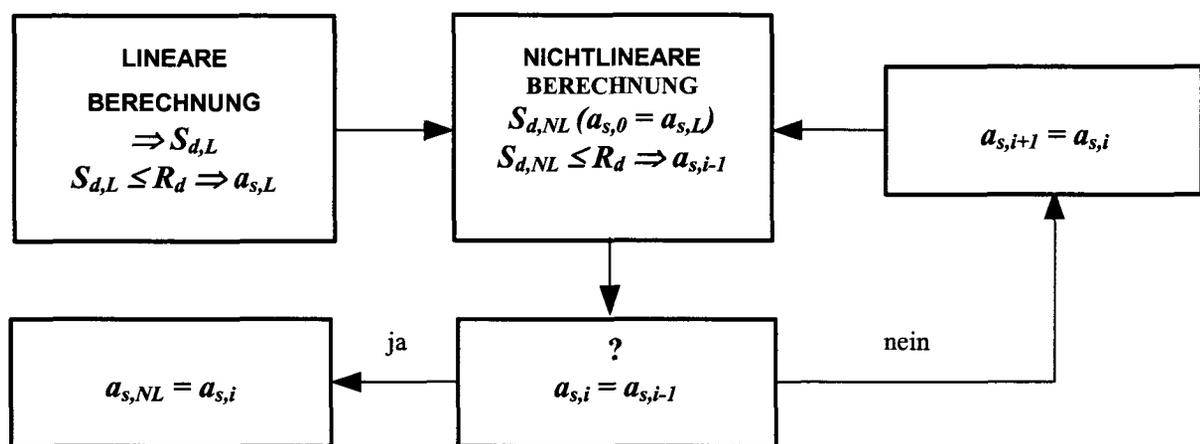


Bild 3.2: Ablauf der Schnittgrößeniteration

Im nächsten Schritt erfolgt eine neuerliche nichtlineare Berechnung des Tragwerks. Ähnlich wie im vorangegangenen Schritt werden die Schnittgrößen bei Erreichen der Bemessungslast abgelesen und die Bewehrungsfläche neu bestimmt. Diese Iterationsschleife wird so oft wiederholt, bis die erforderliche Bewehrung $a_{s,i}$ im Schritt $n = i$ mit hinreichender Genauigkeit gleich der Ausgangsbewehrungsfläche $a_{s,i-1}$ für den Schritt i ist.

Das in den betreffenden Abschnitt beschriebene Verfahren entspricht dem Nachweiskonzept im Zustand der Tragsicherheit gemäß Bemessungsgleichung (2.3). Ausgehend von den konventionellen linear elastischen Verfahren wird zunächst eine querschnittsgebundene Bemessung durchgeführt. Mit einer hinsichtlich Größe und Lage festgelegten Bewehrung erfolgt anschließend die nichtlineare Analyse des Tragwerks. Das physikalisch nichtlineare Werkstoffverhalten beeinflusst das Trag-

verhalten der Gesamtstruktur, was bei innerlich statisch unbestimmten Stahlbetonplatten von großer Bedeutung ist. Unter schrittweise steigender Belastung wird der Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand genauer und damit die Verminderung der Steifigkeiten infolge Rissbildung für die einzelnen Lastschritte besser erfasst. Die mögliche Schnittgrößenumlagerung in die benachbarten Bereiche wird dabei ebenso berücksichtigt.

Trotz dieser Vorteile ergeben sich beim Algorithmus der Schnittgrößeniteration nach [W1] auch einige Nachteile.

➤ Unterschiedliche Werkstoffgesetze

Bei der Querschnittsbemessung werden die Bemessungswerte der Materialfestigkeiten f_{cd} und f_{yd} eingesetzt. Die Zugfestigkeit des Betons wird vernachlässigt und die Zugkräfte werden ausschließlich der Bewehrung zugewiesen. Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird nicht berücksichtigt. Damit legt die querschnittsgebundene Bemessung den ungünstigsten Fall zugrunde. Bei der nichtlinearen Betrachtung der Gesamtstruktur und der Schnittgrößenermittlung hingegen werden die Arbeitslinien für die Mittelwerte der Baustofffestigkeiten f_{cm} und f_{ym} herangezogen.

➤ Lastniveau für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung

Die Berechnung für die Schnittgrößeniteration muss nicht bis zum Traglastniveau geführt werden. Für die Bewehrungsoptimierung ist eigentlich nur jenes Lastniveau von Bedeutung, welches der Bemessungslast entspricht. Im Allgemeinen liegt dieses Niveau deutlich unterhalb der Traglast der Gesamtstruktur, womit die Tragkapazität von Platten nicht zur Gänze ausgenutzt wird.

3.4.1.2 Implementierung ins FE-Programm SEGNID

Das Konzept der Schnittgrößeniteration wurde im Finite-Element Programm SEGNID implementiert und zusätzliche Neuerungen eingeführt.

Als Startbewehrung $a_{s,0}$ wird entweder die Mindestbewehrung $a_{s,min}$ oder jene Bewehrungsfläche, die sich aus der linearen Berechnung $a_{s,L}$ ergibt, verwendet. Unter Zugrundelegung des physikalischen Materialverhaltens und der zugehörigen Mittelwerte beider Baustofffestigkeiten wird die Systemtraglast berechnet. In den maßge-

benden Querschnitten werden die Schnittgrößen $S_{d,i-1}$ vom Traglastniveau nach Formel (3.7) auf das Lastniveau, das der Bemessungslast L_d entspricht, reduziert.

$$S_{d,i-1,red} = S_{d,i-1} \cdot \frac{\lambda_{Ziel}}{\lambda_{u,i-1}} \quad (3.7)$$

Der Ziellastfaktor λ_{Ziel} definiert jenen Lastfaktor, bei dem der Grenzzustand der Tragfähigkeit erreicht wird.

Von weiterem Interesse ist das Lastniveau für die Querschnittsbemessung. Beim Lastniveau, das dem Lastfaktor $\lambda_{Ziel} = 1,0$ entspricht, ist der Grenzzustand der Tragfähigkeit in der Regel noch nicht erreicht. Deswegen kann der Faktor λ_{Ziel} höher als 1,0 gewählt werden, um die Nichtlinearitäten für höhere Lastniveaus auszunutzen [W1]. In Wittek et al. wird ein Faktor von $\lambda_{Ziel} = 1,15$ vorgeschlagen, der mit dem Tragsicherheitsbeiwert des Bewehrungsstahls übereinstimmt. Dadurch wird der Bemessung eine Schnittgrößenverteilung zugrunde gelegt, die sich näher am Versagenszustand befindet. Um die Sicherheit bei der Bemessung nicht doppelt in Rechnung zu stellen, müssen die maßgebenden Schnittgrößen durch entsprechend höhere Lastfaktoren dividiert werden.

Mit den so ermittelten Schnittgrößen $S_{d,i-1,red}$ wird die Bewehrungsoptimierung nach dem in Bild 3.2 dargestellten Ablaufschema fortgesetzt. Zum Unterschied zwischen dem in [W1] angewendeten Verfahren, wird die nichtlineare Berechnung mit dem Finite-Element Programm SEGNIID bis zur Systemtraglast geführt und nicht in eine getrennte Bewehrungsoptimierung und Traglastberechnung unterteilt.

Die Methode der Schnittgrößeniteration wird im Kapitel 4 anhand einer punktförmig gestützten Platte (Beispiel 4.2) und einer vierseitig eingespannten Quadratplatte (Beispiel 4.3) veranschaulicht.

Die Schnittgrößenumlagerung bei statisch unbestimmten Konstruktionen und die damit verbundene Aktivierung der noch nicht ausgenutzten plastischen Reserven können nur im Konzept der Traglastiteration, das im Kapitel 3.4.2 ausführlich behandelt wird, in vollem Umfang berücksichtigt werden.

3.4.2 Methode der Traglastiteration

Der auf dem globalen Sicherheitskonzept nach DIN 1045-1 beruhende Bemessungsvorgang mittels Traglastiteration zielt auf die Erfüllung der Bedingung ab, dass der Systemtraglastfaktor mit dem globalen Sicherheitsfaktor identisch ist ($\lambda_u = \gamma_R$). Im Gegensatz zur Schnittgrößeniteration bedient sich dieses Konzept nicht mehr der Anwendung des statischen (oder unteren) Grenzwertsatzes, sondern der Stahldehnungen im betrachteten Querschnitt. Als maßgebendes Kriterium dienen sie zur Anpassung der einen Schritt zuvor angenommenen Bewehrungsflächen bis der gezielte Traglastfaktor erreicht wird. Als Anfangsbewehrung für die Iteration kann dabei ähnlich wie bei der Schnittgrößeniteration entweder eine in einer linearen Berechnung ermittelte Bewehrungsfläche oder die erforderliche Mindestbewehrung für die Stahlbetonplatte eingesetzt werden. Für beide Varianten wird jene Bewehrungsfläche gesucht, bei der die Belastung des Tragwerks einem Systemtraglastfaktor gleich der Systemsicherheit $\lambda_u = 1,3$ entspricht.

Die lineare Startbewehrung erfolgt mit den Bemessungswerten der Baustofffestigkeiten und einem linear elastischen Materialverhalten der Baustoffe. Der Iterationsablauf mit der auf diese Weise bestimmten Anfangsbewehrung ist in Bild 3.3 dargestellt.

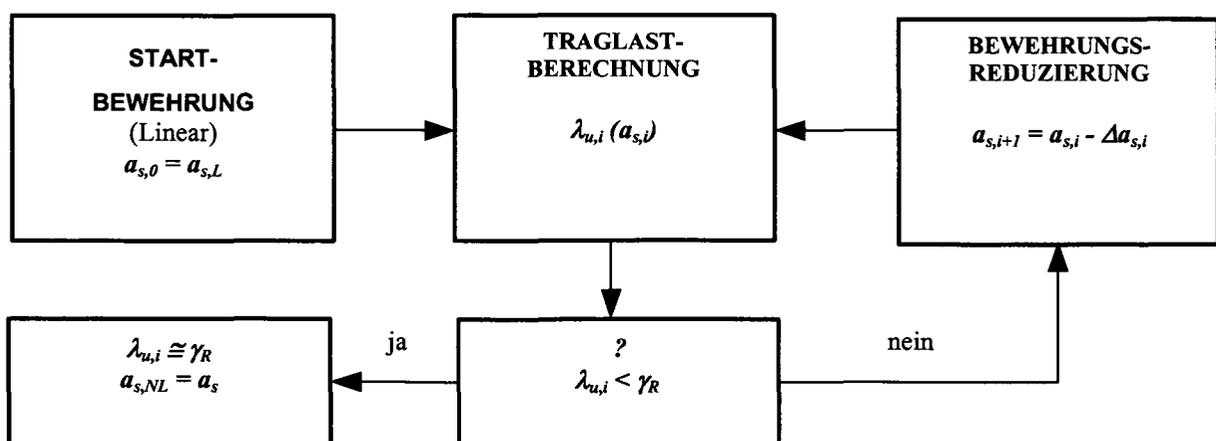


Bild 3.3: Ablauf der Traglastiteration mit aus Bemessung für linear elastisch ermittelte Schnittgrößen Startbewehrung

In diesem Fall liefert die erste nichtlineare Traglastberechnung meistens einen höheren Traglastfaktor als die erwünschte Systemsicherheit von $\gamma_R = 1,30$. Um den numerischen Aufwand zu minimieren und Rechenzeit einzusparen reicht es im Allgemei-

nen aus, im Zuge der nichtlinearen Analyse die Bemessungslast nur bis zum Niveau $\lambda \cdot L_d$ zu steigern, wobei $\lambda = \gamma_R = 1,30$ ist.

Im ersten Iterationsschritt werden die Stahldehnungen bei Erreichen dieses Niveaus kontrolliert. In jenen Bereichen, in denen betragsmäßig die kleinste Stahldehnung auftritt, wird die Bewehrungsfläche um ein vorgegebenes Bewehrungsinkrement reduziert, wobei aber gleichzeitig die Mindestbewehrung nicht unterschritten werden darf. Mit der so erhaltenen Bewehrungsmenge wird eine neue nichtlineare Tragwerksanalyse durchgeführt, wobei die Belastung bis zum gewünschten Faktor gesteigert wird. Die Stahldehnungen werden dabei wieder überprüft und in den Bereichen, in denen der Bewehrungsstahl die kleinste Dehnung aufweist, die Bewehrungsfläche neuerlich reduziert. Dieser Iterationsprozess wird so oft wiederholt, bis der Traglastfaktor λ_u die geforderte Systemsicherheit γ_R hinreichend genau erreicht.

Bei der zweiten Variante (Bild 3.4) wird die Mindestbewehrung als Anfangsbewehrung gewählt. In einem ersten nichtlinearen Berechnungsschritt erhält man im Vergleich zur vorgeschriebenen Systemsicherheit einen niedrigeren Traglastfaktor ($\lambda < \gamma_R = 1,30$). Die Stahldehnungen werden wiederum überprüft und in den Bereichen, in denen der Betonstahl der Fließgrenze am Nahesten ist, wird eine Erhöhung der Bewehrungsfläche vorgenommen. Mit dieser vergrößerten Bewehrungsfläche wird eine neuerliche Berechnung durchgeführt. Ähnlich wie bei der ersten Variante wird die Iterationsschleife dann abgebrochen, wenn der erreichte Traglastfaktor der gewählten Systemsicherheit entspricht.

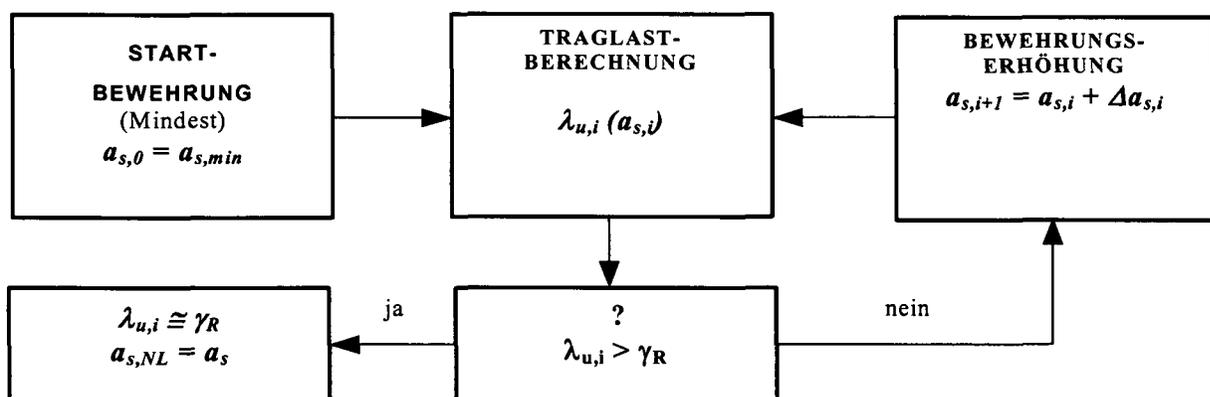


Bild 3.4: Ablauf der Traglastiteration mit Mindestbewehrung als Startbewehrung

Der wesentliche Unterschied beider Varianten liegt in der Höhe der Laststeigerung. Bei der ersten Variante wird in jedem Iterationsschritt die Traglastanalyse nur bis zum Erreichen der vorgegebenen Systemsicherheit γ_R geführt, wobei die Systemtraglast selbst eigentlich nicht von Bedeutung ist. Bei der zweiten Variante ist für jeden Iterationsschritt eine vollständige Traglastanalyse bis zum Systemversagen durchzuführen. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis die erzielte Systemsicherheit erreicht ist.

Im Vergleich zum Konzept der Schnittgrößeniteration hat dieses Konzept einige Vorteile. Die nichtlineare Analyse des Tragsystems wird auf einem höheren Systemsicherheitsniveau geführt, das die planmäßige Ausnutzung von Systemreserven ermöglicht. Insbesondere bei Stahlbetonplatten, welche hochgradig unbestimmt sind und einem physikalisch stark nichtlinearen Lastabtragungsmechanismus unterliegen, werden mit diesem Konzept die Systemreserven besser erfasst. Die zweiteilige Nachweisführung, bei der Schnittgrößeniteration wird bei der Traglastiteration durch einen einzigen Nachweis ersetzt. Die nichtlineare Analyse am Gesamtsystem wird unter Berücksichtigung der rechnerischen Mittelwerte der Baustoffe bis zum Erreichen der globalen Sicherheit von 1,30 am Gesamtsystem durchgeführt.

Im nächsten Abschnitt wird ein im Finite-Element Programm SEGNID eingearbeiteter Algorithmus zur automatischen Bewehrungserhöhung mit Hilfe der Methode der Traglastiteration vorgestellt.

3.4.3 Nichtlinearer Algorithmus zur automatischen Traglastiteration und Erhöhung der Bewehrungsflächen

Der von Kollegger in [K1] vorgestellte Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerken mit automatischer Traglastiteration basiert auf einer linearen Schnittgrößenberechnung. Dabei werden die 1,0-fachen Schnittgrößen eingelesen und im Anschluss die Traglast über die Methode der Intervallhalbierung automatisch bestimmt. Im nächsten Schritt des Algorithmus folgt die automatische Erhöhung der Bewehrungsflächen. Dazu werden nach der Traglastbestimmung die Stahldehnungen für den berechneten Zustand überprüft und mit den Stahlfließdehnungen verglichen. Die Bewehrungsfläche mit der größten Dehnung wird um ein vorgegebenes Beweh-

rungsinkrement erhöht [K1]. Die Bewehrungsinkremente selbst werden in Abhängigkeit von der berechneten Traglast angesetzt, wobei sie am Anfang größer und in der Nähe des Traglastfaktors kleiner gewählt werden. Für den Fall, dass die Stahldehnungen des zuletzt berechneten Traglastzustands kleiner als die zulässigen Fließdehnungen sind, wird die Bewehrung mit der größten Stauchung um ein Bewehrungsinkrement erhöht. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt bis der gewünschte Traglastfaktor erreicht ist.

Das Konzept der Traglastiteration und der Algorithmus zur Bemessung von Flächen-tragwerken mittels automatischer Traglastiteration wurde in das nichtlineare Finite-Element Programm SEGNID implementiert. Dabei wird der gesamte Optimierungsablauf mit der Mindestbewehrungsfläche gestartet. Die Modellierung der Bewehrung erfolgt durch eine verschmierte Stahlschicht. In einem geschichteten Betonelement lassen sich so je Stahlschicht zwei Bewehrungsscharen mit beliebigen Winkeln zum globalen Koordinatensystem vorgeben [D2].

Um die rechnerisch äußerst aufwändige und praktisch nicht ausführbare elementweise Bewehrungsbestimmung zu vermeiden, werden mehrere Elemente zu einer Gruppe (Feld) zusammengefasst. Mit dieser Gruppierung der Elemente wird eine betragsmäßig einheitliche Bewehrungserhöhung aller Elemente innerhalb einer Gruppe erzielt. Eine solche Gruppierung erweist sich besonders bei der Dimensionierung großer Strukturen oder bei der Bemessung einzelner kritischer Punkte im Tragwerk als günstig. Die Zusammenfassung der Elemente soll nach dem zu erwartenden Tragwerksverhalten erfolgen. Dies gilt zum Beispiel für Stützenbereiche in Flachdecken oder für Ränder bei eingespannten Platten, wo Momentenextrema zu erwarten und somit im Vergleich zu anderen Plattenbereichen größere Bewehrungsflächen erforderlich sind. Auch die Verwendung von Bewehrungsmatten, welche in der Praxis zur Bewehrung von Stahlbetonplatten häufig eingesetzt werden, kann auf diese Weise in der Finite-Element Rechnung berücksichtigt werden. Somit wird für die gesamte Gruppe eine gleichmäßige Bewehrungsanpassung erzielt. Die Vergrößerung der verschmierten Bewehrungsfläche erfolgt gruppenweise (oder elementweise, wenn jedes Element als Gruppe betrachtet wird) unter der Annahme, dass die Bewehrungslage im Querschnitt in Bezug auf ihre geometrische Lage unverändert bleibt.

Die Erhöhung der Fläche wird für jede Bewehrungsschar innerhalb der Gruppe (Element) vollkommen unabhängig voneinander vollzogen.

Wie zuvor bereits erwähnt wurde, startet die Bewehrungsoptimierung mit dem Mindestbewehrungsquerschnitt eines biegebeanspruchten Bauteils. Für die Mindestbewehrung in Haupttragrichtung von Plattentragwerken gilt [Ö1]:

$$a_{s,min} \geq 1,22 \cdot \frac{b_t \cdot h_t}{f_{yd}} \geq 0,0028 \cdot b_t \cdot h_t \quad (f_{yd} \text{ in } N/mm^2) \quad (3.8)$$

wobei b_t die mittlere Breite der Betonzugzone und h_t die Höhe der Zugzone für biegebeanspruchte Bauteile ohne Normalkraft im Zustand I bedeuten. Für Stahlbetonplatten sind somit b_t mit 100 cm und h_t mit $h/2$ anzusetzen.

Als oberer Grenzwert für die Fläche einer Bewehrungsschar dürfen 4% der Betonfläche A_c in Rechnung gestellt werden.

Nach dem Festlegen der Startbewehrung und ihrer genauen Lage im geschichteten Schalenelement erfolgt die eigentliche nichtlineare Analyse der Platte. Ziel dieser Berechnung ist die Bestimmung des Traglastfaktors λ , der das Verhältnis zwischen der vom Bauwerk aufnehmbaren Traglast und der Bemessungslast L_d beschreibt. In der Berechnung wird das nichtlineare Baustoffverhalten von Beton und Stahl unter Zugrundelegung der rechnerischen Mittelwerte gemäß DIN 1045-1 eingeführt. Die Plattenanalyse mit Mindestbewehrung liefert einen Traglastfaktor λ , der zunächst kleiner als der Teilsicherheitsbeiwert für den Systemwiderstand $\gamma_R = 1,30$ ist. Neben der Ermittlung des Traglastfaktors ist jene Stahlfläche zu finden mit der die Platte eine Traglast, die der um γ_R vergrößerten Bemessungslast entspricht, aufnehmen kann. Um die Bewehrung möglichst wirtschaftlich auszunutzen, wird die Bewehrungserhöhung nur in jenen Bereichen der Stahlbetonplatte erfolgen, in denen der Stahl am meisten statisch beansprucht wird.

Im nächsten Schritt des Optimierungsprozesses folgt eine inkrementelle Erhöhung der Mindestbewehrung. In Abhängigkeit vom Abstand zwischen dem zuletzt erreichten und dem erzielten Traglastfaktor einerseits und der Anzahl der gewünschten Iterationsschritte andererseits werden die Bewehrungsinkremente für die einzelnen Gruppen bestimmt. Bei einer elementweisen Erhöhung der Bewehrung, wie sie bei

Kollegger vorgenommen wurde, werden die Stahldehnungen des zuletzt berechneten Traglastzustands überprüft und die Bewehrung mit der größten Stahldehnung um ein vorgegebenes Bewehrungsinkrement erhöht [K1]. Sind mehrere Elemente zu einer Gruppe zusammengefasst, ist die Erhöhung der Bewehrung auf diese Art und Weise nicht mehr sinnvoll. Für den Fall, dass in einer Gruppe mit einer gewissen Anzahl von Elementen nur in einem einzigen Element (Gaußpunkt) die Stahlfließdehnung überschritten wird, hat dies somit eine Vergrößerung der Bewehrung für alle Elemente in der gesamten Gruppe zur Folge. Um dies zu vermeiden, wird als Vergleichswert im betrachteten Bewehrungsfeld anstelle der Stahldehnung die plastische Arbeit bezogen auf das Stahlvolumen überprüft.

Nach jeder Traglastermittlung durchläuft der Optimierungsalgorithmus bei einer gruppenweisen Vergrößerung der Bewehrungsfläche folgendes Schema:

- Das Programm ermittelt elementweise für alle Bewehrungsscharen die größten, auftretenden Stahldehnungen $\varepsilon_{s(i)}$, die in weiterer Folge als Ausgangswert für die Berechnung der plastischen Arbeit herangezogen werden. Als Grundlage werden die Dehnungszustände in den Gaußpunkten der jeweiligen Elementschicht ermittelt.

So lange unter der Traglast die Stahldehnung (= positive Verzerrungen) in keinem einzigen Gaußpunkt die Fließgrenze erreicht, erfolgt keine Verstärkung der Bewehrung. Um diese Bedingung überprüfen zu können, wird vom Programm die Anzahl der Gaußpunkte ermittelt, in denen ein Fließen der Bewehrung in Richtung einer Bewehrungsschar im Zugbereich auftritt.

- Die aktuelle Dicke der Stahlschicht $a_{s(i)}$ innerhalb einer Bewehrungsgruppe j wird aufbauend auf der Stahlmenge des vorangegangenen Iterationsschrittes $a_{s(i-1)}$ und dem Bewehrungsinkrement $\Delta a_{s(i)}$ aus derselben Gruppe für jede Bewehrungsschar mittels folgender Beziehungen ermittelt:

$$a_{s(i)}^j = a_{s(i-1)}^j + \Delta a_{s(i)}^j \quad (3.9)$$

Aus dem Index i innerhalb der Klammer ist der Traglastiterationsschritt ($i = 1 \div n$) ersichtlich, wobei die Anfangsbewehrung mit $a_{s(0)}$ als Startwert ein-

zusetzen ist. Der Index j bezieht sich auf die Bewehrungsgruppe und kann jeden Wert zwischen 1 und m annehmen.

Das Bewehrungsinkrement $\Delta a_{s(i)}^j$ für die jeweilige Gruppe j lässt sich aus dem Bewehrungsinkrement für das gesamte Tragwerk $\Delta a_{s(i)}^G$ und dem Parameter $f_{1(i)}^j$ nach Formel (3.10) bestimmen.

$$\Delta a_{s(i)}^j = \Delta a_{s(i)}^G \cdot \frac{f_{1(i)}^j}{\sum_{j=1}^m f_{1(i)}^j} \quad (3.10)$$

Das Bewehrungsinkrement $\Delta a_{s(i)}^G$ für das gesamte Tragwerk wird mit Formel (3.11) berechnet.

$$\Delta a_{s(i)}^G = a_{s(i),plast}^G \cdot \frac{\lambda_{Ziel} - 1}{C_1 \lambda_{i-1}} \quad (3.11)$$

$a_{s(i),plast}^G$ bezeichnet dabei die gesamte Stahlmenge innerhalb der Struktur, die sich für den jeweiligen Iterationsschritt im Fließbereich befindet.

Darüber hinaus ist die Größe des Bewehrungsinkrements vom Quotienten aus erzielttem λ_{Ziel} und erreichtem λ_{i-1} Traglastfaktor abhängig. Die Inkremente werden umso kleiner, je geringer der Wert dieses Quotienten ausfällt. Falls es im Zuge der Traglastiteration zu einer Überschreitung des Zieltraglastfaktors λ_{Ziel} kommt, wird die Ermittlungsprozess als erreicht angenommen. Das Verhältnis $\lambda_{Ziel} / \lambda_{i-1}$ ist letztendlich auch für das Abbruchkriterium im Optimierungsprozess maßgebend:

$$\left| \frac{\lambda_{Ziel}}{\lambda_{i-1}} \right| \geq 1 + \lambda_{TOL} \quad (3.12)$$

Der Eingabewert λ_{TOL} variiert mit der gewünschten Genauigkeit in der Bewehrungsermittlung. Sobald der erreichte Traglastfaktor λ_{i-1} die Ungleichung

(3.12) nicht mehr erfüllt, ist das Ziel der Bemessung erreicht und die Traglastiteration wird abgebrochen. Wird der Ziellastfaktor genau erreicht ($\lambda_{i-1} \cong \lambda_{Ziel}$), folgt aus Formel (3.11) für das Bewehrungsinkrement des Gesamttragwerks $\Delta a_{s(n)}^G \approx 0$, womit keine Erhöhung der Bewehrungsfläche mehr vorzunehmen ist.

Der im Finite-Element Programm SEGNID implementierte Eingabewert C_1 zur Bestimmung des Bewehrungsinkrements für das Gesamttragwerk $\Delta a_{s(i)}^G$ (Gl. 3.11) zur Steuerung der Größe von $\Delta a_{s(i)}^j$ hat in weiterer Folge auch Einfluss auf die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte. Als Anhaltspunkt bei der Wahl von C_1 sei festgehalten, dass eine große Differenz zwischen dem in Schritt $i-1$ erreichten Lastfaktor λ_{i-1} und dem Ziellastfaktor λ_{Ziel} ebenfalls zu großen Bewehrungsinkrementen mit positiven Vorzeichen führt.

Die Größe des Bewehrungsinkrements $\Delta a_{s(i)}^j$ für jede Gruppe j wird neben dem jeweiligen Bewehrungsinkrement für das gesamte Tragwerk auch noch vom Parameter $f_{1(i)}^j$ bestimmt. Die Größe dieses Parameters bezieht sich auf die Gruppe und wird gemäß Formel (3.13) bestimmt.

$$f_{1(i)}^j = \left(\frac{f_{2(i)}^j}{\max f_{2(i)}} \right)^{C_2} \quad (3.13)$$

wobei

$$f_{2(i)}^j = \frac{\sum f_y \cdot (\varepsilon_{s(i),max}^j - \varepsilon_y) \cdot V_s^j}{V_s^j} \quad (3.14)$$

Der neu eingefügte Parameter $f_{2(i)}^j$ wird sowohl für die entsprechende Bewehrungsgruppe j als auch für jede weitere definierte Gruppe separat berechnet, um den maximal auftretenden Wert $\max f_{2(i)}$ im Tragwerk zu bestimmen.

Dabei wird in Abhängigkeit von den maximalen Stahldehnungen $\varepsilon_{s(i),max}^j$ in der betrachteten Gruppe die sich daraus ergebende plastische Arbeit im Element berechnet. Die in Formel (3.14) verwendete Bezeichnung V_s^j entspricht dem dem Gaußpunkt zugewiesenen Stahlvolumen.

Mit dem eingeführten Exponenten C_2 in der Formel (3.13) lässt sich die Aufteilung der Bewehrungszuschläge in Abhängigkeit von der spezifischen plastischen Energie steuern.

Mit der Eingabe größerer Werte für C_2 ($C_2 \geq 1$) erfolgt eine Bewehrungserhöhung in jenen Bereichen, in denen die größte Stahldehnung ($\varepsilon_{s(i),max}$) im Tragwerk auftritt. Zwar werden auf diese Weise Teile der Struktur wirksam versteift, genau dieser Umstand zieht aber gerade in statisch unbestimmten Systemen die inneren Kräfte an, die in weiterer Folge zu lokalen Überlastungen der Betondruckzone führen [P4].

Durch die Wahl kleinerer Werte von C_2 ($0 < C_2 < 1$) erhält man eine gleichmäßigere Verteilung der Bewehrungszuschläge auf die einzelnen Bewehrungsscharen, die durch Dehnungsbereiche mit $\varepsilon_y < \varepsilon_{s(i)} < \varepsilon_{s(i),max}$ gekennzeichnet sind. Dies führt zu einem duktileren Tragwerksverhalten und unter Umständen auch zu größeren Gesamtbewehrungsmengen.

Im Zuge dieser Arbeit wird eine Parameterstudie über den Einfluss der Größe des Exponenten C_2 auf die Bewehrungsverteilung innerhalb der Struktur anhand einer vierseitig eingespannten Quadratplatte durchgeführt (Beispiele 4.3, 4.4 und 4.5).

- Jede neue Traglastberechnung mit der so modifizierten Bewehrungsmenge $a_{s(i)}$ setzt voraus, dass die den System- und Materialzustand unter Traglast beschreibenden Parameter auf die Werte der unbelasteten Ausgangskonfiguration zurückgesetzt werden.
- Diese Iterationsschleife wird so oft wiederholt, bis die vom Tragwerk mit modifizierter Bewehrungsfläche aufnehmbare Traglast den Bemessungswert der Einwirkungen mit genügend großem Abstand überschreitet und dem Teilsicherheitsbeiwert für den Systemwiderstand ($\lambda_{u(n)} = \gamma_R = 1,30$) entspricht.

Die Ergebnisse einer Studie über den Einfluss der Eingabewerte C_1 und C_2 auf den Bewehrungsermittlungsprozess sind im Bild 3.5 für einen Plattenstreifen angegeben. Die Bewehrungsfaktoren sind für die einzelnen Schritte des Optimierungsverfahrens dargestellt und beschreiben das Verhältnis zwischen Anfangsbewehrung und der für den jeweiligen Optimierungsschritt erforderlichen Bewehrungsfläche. Der errechnete Bewehrungsfaktor in letzten Schritt beträgt sowohl für $C_1 = 10$ als auch für $C_1 = 20$ jeweils ca. 1,40. Dies zeigt, dass die ermittelte Stahlfläche für diese gewählten Eingabewerte von C_1 unabhängig ist.

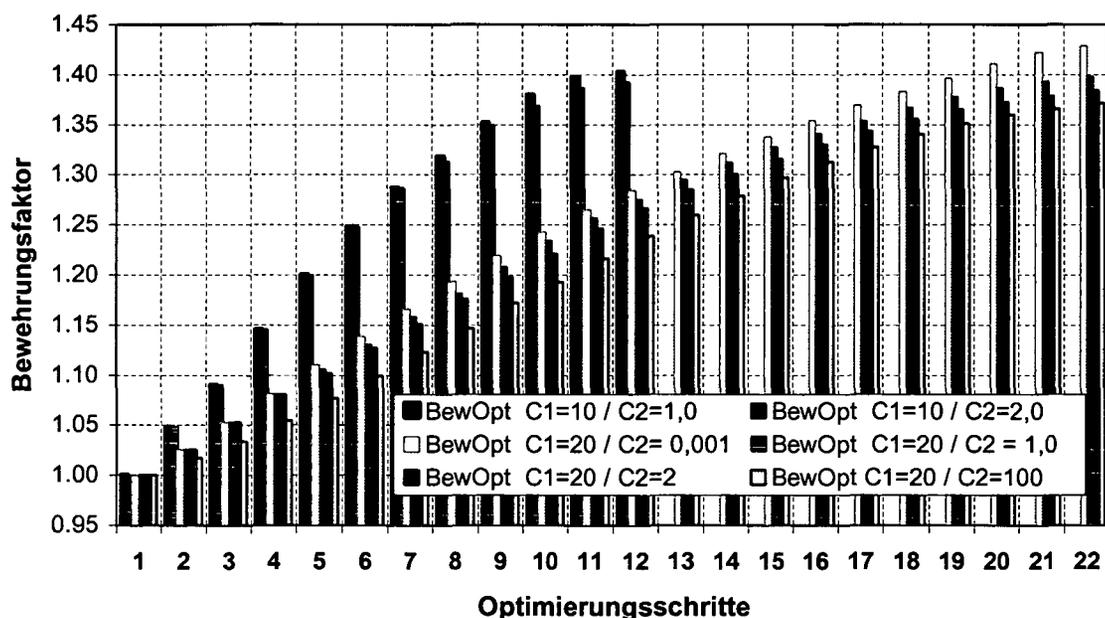


Bild 3.5: Verlauf der Optimierungsprozesse für unterschiedliche C_1 - und C_2 -Werte

Die Streuung der Ergebnisse wird in erster Linie durch die Wahl des zweiten Parameters C_2 beeinflusst. Kleinere C_2 -Werte (z. B. $C_2 = 0,001$) rufen eine Vergrößerung der Stahlfläche über einen breiteren Bereich hervor. Größere C_2 -Werte (z.B. $C_2 = 100$) bewirken zwar eine betragsmäßig größere Steigerung der Bewehrung, die jedoch auf einen kleineren Bereich beschränkt ist. Daher ist die berechnete Gesamtbewehrungsfläche mit größeren C_2 -Werten insgesamt geringer als mit kleineren C_2 -Werten.

Beim nichtlinearen Nachweiskonzept nach DIN 1045-1 [D1], das als Grundlage für die Traglastiteration herangezogen wird, gilt der Grenzzustand der Tragfähigkeit bei Erreichen der kritischen Stahl- oder Betonverzerrungen als erfüllt. Im Unterschied

dazu wird beim Finite-Element Programm SEGNID angenommen, dass ein Traglastgrenzzustand dann vorliegt, wenn entweder die Determinante der Systemsteifigkeitsmatrix kleiner oder gleich null ist, oder die festgelegte Maximalanzahl der benötigten Gleichgewichtsiterationen innerhalb eines Lastinkrements überschritten wird.

KAPITEL 4

NUMERISCHE BEISPIELE

4.1 Einleitung

Anhand von vier Beispielen soll gezeigt werden, wie mit Hilfe der nichtlinearen Finite-Element Analyse Stahlbetonplatten bemessen werden können.

Das erste Beispiel behandelt eine punktförmig gestützte und unendlich ausgedehnte Platte, bei der die linear berechnete Bewehrungsfläche über das Konzept der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung optimiert wird. Durch die Ausbildung flacher Gewölbe in der Platte werden die Biegespannungen mit zusätzlichen Längsdruckspannungen überlagert. Im Vergleich zur Biegebemessung kann mit diesem Konzept im Endeffekt eine Bewehrungsreduktion erzielt werden.

Im zweiten Beispiel wird eine quadratische Platte untersucht. Der Optimierungsprozess wird über Schnittgrößen- und Traglastiteration, mit Hilfe des Finite-Element Programms SEGNID durchgeführt. Dabei soll der Einfluss der Anfangsbewehrung und Eingabewerte für die beiden Parameter C_1 und C_2 , auf die Ermittlung überprüft werden.

Das dritte Beispiel behandelt einen zweifeldrigen Plattenstreifen, bei dem zur nichtlinearen Bewehrungsoptimierung das Konzept der Traglastiteration mit Mindestbewehrung als Anfangsbewehrung gewählt wurde. Zu diesem Zweck wird die erforderliche Stahlfläche für zwei unterschiedliche Lastfälle - Vollast und einseitige Nutzlast - ermittelt.

Das vierte und letzte Beispiel beschäftigt sich mit der nichtlinearen Bewehrungsermittlung einer gesamten Geschossdecke. Für diese Berechnung wurde ein in Cardington, England, durchgeführtes Experiment mit einem 6-stöckigen 1:1 Modell eines Bürogebäudes, gewählt. Die Bewehrung wird in diesem Beispiel wieder mit Hilfe der Traglastiteration berechnet. Bei diesem Beispiel wird die Bewehrungserhöhung betragsmäßig über mehrere Elemente, die in einer Gruppe (Feld) zusammengefasst sind, in gleichem Maße vorgenommen.

4.2 Punktförmig gestützte Decke

Die Methode der Schnittgrößeniteration wird im folgenden Beispiel veranschaulicht. Zu diesem Zweck wird eine 25 cm dicke, punktförmig gestützte und unendlich ausgedehnte Platte mit 8,40 m Spannweite in beiden Richtungen nichtlinear untersucht (Bild 4.1).

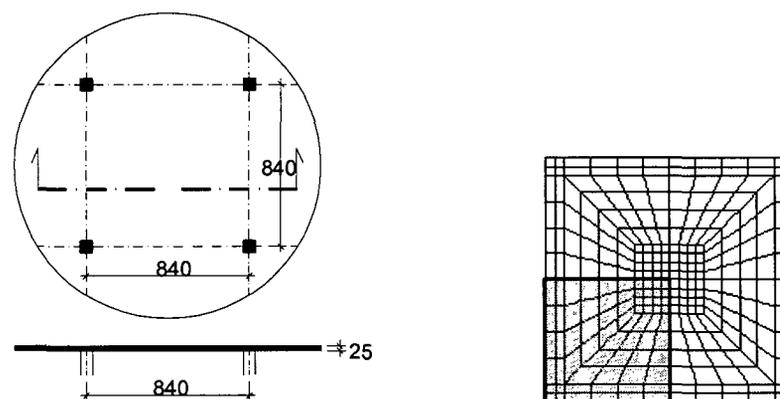


Bild 4.1: Geometrie und Netz der punktförmig gestützten Platte

Die Modellierung der Stahlbetonplatte erfolgt mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Die Berechnung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie für das im Bild 4.1 (rot eingerahmt) dargestellte Plattenquartier. Für die Analyse der Flachdecke wird ein achtknotiges geschichtetes Schalenelement des Typs CQ40L (Bild 4.2) verwendet. Dieses Element ist in zehn Schichten geteilt, wobei dem Beton acht und dem Stahl zwei Schichten zugewiesen werden.

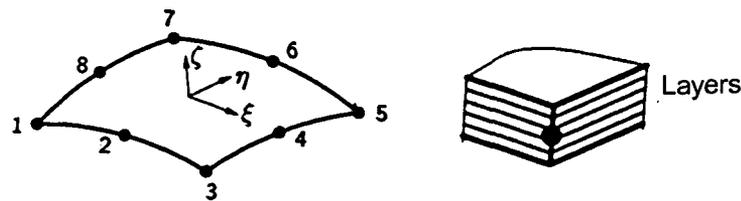


Bild 4.2: Geschichtetes Schalenelement CQ40L [T1]

Im Bild 4.3 sind die Arbeitslinien für Beton im Druckbereich und für Stahl angegeben. Zur Berechnung der Betondruckkraft wird das Parabel-Rechteck-Diagramm nach ÖNORM B4700 verwendet, wobei für die Bestimmung der Bewehrungsfläche der Bemessungswert der Druckfestigkeit und für die nichtlineare Ermittlung der Schnittgrößen ihr Mittelwert herangezogen wird. Die Betonstauchung darf dabei den Grenzwert $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ nicht überschreiten. Nach Erreichen der Betonzugfestigkeit wird im anschließenden Zugbereich mit einem spröden Materialverhalten des Betons weitergerechnet.

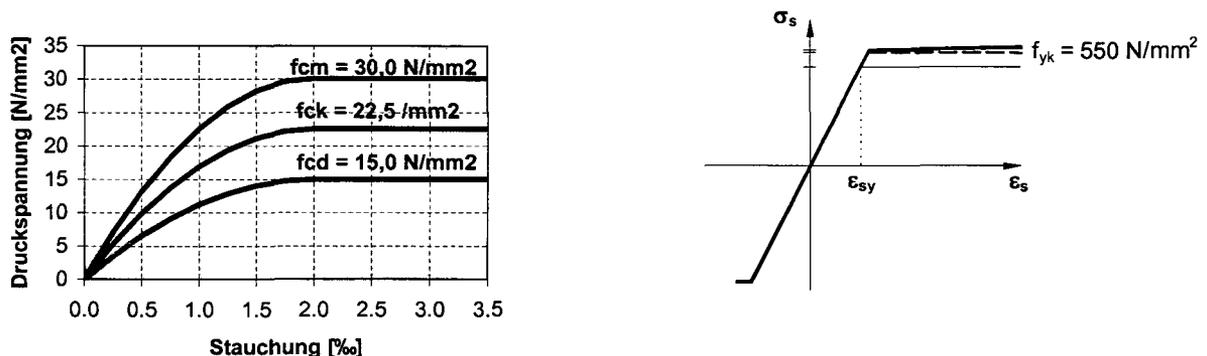


Bild 4.3: Arbeitslinien für Beton C 25/30 im Druckbereich (links) und Bewehrungsstahl BSt 550 (rechts)

Für die Bemessung der Stahlbetonplatte wurden folgende Lasten in Rechnung gestellt:

- ständige Last G_1 infolge Eigenlast der Platte mit einer Betonwichte von $\rho_c = 25 \text{ kN/m}^3$ und $G_2 = 1,5 \text{ kN/m}^2$ infolge Deckenausbau,
- veränderliche Last $Q_1 = 4,0 \text{ kN/m}^2$ als Nutzlast.

Der Bemessungswert der Belastung wird sowohl für die lineare als auch für die nichtlineare Berechnung unter Berücksichtigung der entsprechenden Teilsicherheitsfaktoren nach Formel (4.1) bestimmt.

$$L_d = \sum_j (\gamma_{G,j} \cdot G_{k,j}) + \gamma_{Q,i} \cdot \sum_{i=1}^n Q_{k,i} = 1,35 \cdot (25 \cdot 0,25 + 1,50) + 1,50 \cdot 4,00 = 16,46 \text{ kN/m}^2 \quad (4.1)$$

Die erforderliche Bewehrung aus der linear-elastischen Berechnung ergibt sich an der Stütze zu $a_{s,St} = 30,79 \text{ cm}^2/\text{m}$ und im Feld zu $a_{s,F} = 5,92 \text{ cm}^2/\text{m}$. Diese Bewehrung wird als Startbewehrung für die Schnittgrößeniteration herangezogen. Die Schnittgrößen (Biegemomente und Normalkräfte) für die Querschnittsbemessung und die zugehörigen linear ermittelten Bewehrungsflächen sind für den Stützen- und Feldbereich in der Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Nach Einbezug der physikalischen und geometrischen Nichtlinearität bleiben die Biegemomente dennoch praktisch unverändert. Im Unterschied dazu entstehen jedoch Druckkräfte, die im Vergleich zur linearen Bemessung zu einer Verminderung der erforderlichen Bewehrung führen. Diese Verminderung der Bewehrungsfläche sollte allerdings nur dann berücksichtigt werden, wenn die horizontale Unverschieblichkeit der Platte an den Rändern tatsächlich gewährleistet ist. Mit den nichtlinear ermittelten Schnittgrößen wird eine querschnittbezogene Bemessung durchgeführt. Die reduzierte Bewehrungsfläche für den 1. Iterationsschritt ist in der Tabelle 4.1 eingetragen.

$L_d =$ $= 16,46 \text{ kN/m}^2$	Stützenbereich			Feldbereich		
	m_{St}	n_{St}	$a_{s,St}$	m_F	n_F	$a_{s,F}$
	[kNm/m]	[kN/m]	[cm ² /m]	[kNm/m]	[kN/m]	[cm ² /m]
Linear	235,0	0	30,79 (Ø 14 / 5 cm)	-58,7	0	5,92 (Ø 14 / 26 cm)
1. Schritt	239,2	-461,1	27,99 (Ø 14 / 5,5 cm)	-42,0	-426,9	4,40 (Ø 14 / 35 cm)
Mindestbewehrung			4,40 (Ø 14 / 35 cm)			4,40 (Ø 14 / 35 cm)

Tabelle 4.1: Schnittgrößen und Querschnittsbewehrung

Im Anschluss erfolgt eine weitere nichtlineare Analyse der Stahlbetonplatte nach denselben Kriterien. Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn die nach dem I-

Iterationsschritt ermittelte Bewehrung mit der Startbewehrung aus demselben Rechenschritt übereinstimmt.

Bei der nichtlinearen Analyse der Platte wird auch der Traglastfaktor des Gesamtsystems für verschiedene Bewehrungsmengen ermittelt. Im Bild 4.4 sind die Lastverschiebungskurven für drei unterschiedliche Plattenbewehrungen und eine unbewehrte Platte dargestellt. Die Schnittgrößenermittlung und Traglastberechnungen sind im Unterschied zur Querschnittsbemessung mit den Mittelwerten der Materialparameter durchgeführt worden.

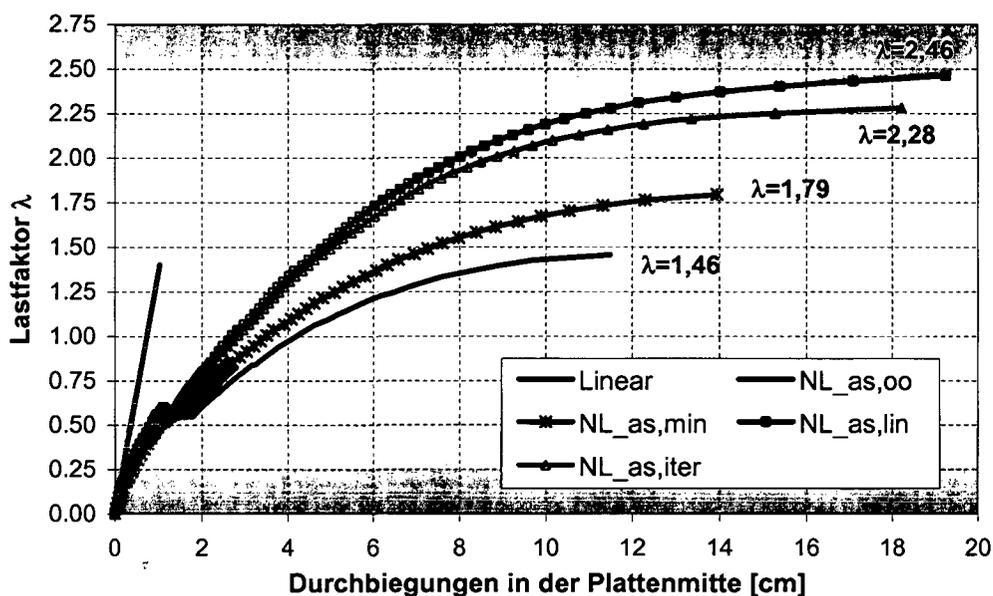


Bild 4.4: Last-Verschiebungsdiagramm

Es zeigt sich, dass auch bei der unbewehrten Platte die Last bis zu einem Traglastfaktor von $\lambda = 1,46$ (Kurve NL_as,oo) gesteigert werden kann. Dieser Effekt lässt sich folgendermaßen erklären: nach Erreichen der Betonzugfestigkeit ist mit einem Aufreißen der Platte zu rechnen. In diesem Fall handelt es sich um ein Innenfeld (unendlich ausgedehnte Platte), wobei die horizontalen Verschiebungen durch die benachbarten Felder in Abhängigkeit von ihrer Steifigkeit in horizontaler Richtung begrenzt sind. Die anschließenden Randplatten wirken als elastische Widerlager, welche die Verschiebungen der Endquerschnitte des Innenfeldes behindern. Als Reaktion entstehen Längskräfte, die zur Ausbildung flacher Gewölbe führen. Die Gewölbewirkung setzt unmittelbar nach dem Auftreten der ersten Risse an der Oberseite

entlang der Plattenränder ein [S1]. Dabei werden die Membrankräfte aktiviert, die der Rissbildung solange entgegenwirken, bis die auftretenden Druckspannungen die zulässige Betondruckfestigkeit erreichen. Das Versagen des Systems erfolgt durch einen Betonbruch im Stützenbereich.

Der Traglastfaktor einer Platte, die die nach ÖNORM B 4700 erforderliche Mindestbewehrungsfläche von $a_{s,min} = 4,40 \text{ cm}^2/\text{m}$ enthält, beträgt $\lambda = 1,79$ (Kurve NL_ $a_{s,min}$). Das Lastverschiebungsdiagramm (Kurve NL_ $a_{s,iter}$) für die Flachdecke mit infolge Schnittgrößeniteration reduzierter Bewehrungsfläche weist einen Traglastfaktor von $\lambda = 2,28$ auf.

Es zeigt sich, dass die Schnittgrößeniteration eine sinnvolle Möglichkeit zur Bewehrungsreduktion darstellt. Bei diesem Verfahren können die Tragreserven in den Innenfeldern durchlaufender Platten relativ gut ausgenutzt werden und Bewehrung im Vergleich zur reinen Biegebemessung eingespart werden. Die Biegespannungen werden durch die Ausbildung flacher Gewölbe mit zusätzlichen Längsdruckspannungen überlagert. Die entstehende Längskraft darf allerdings nur dann in Rechnung gestellt werden, wenn die Abstützung der flachen Gewölbe in den anschließenden Randfeldern gesichert ist und eine spätere eventuell auftretende Nutzungsänderung zu keiner Verminderung der Steifigkeiten führt.

4.3 Quadratplatte

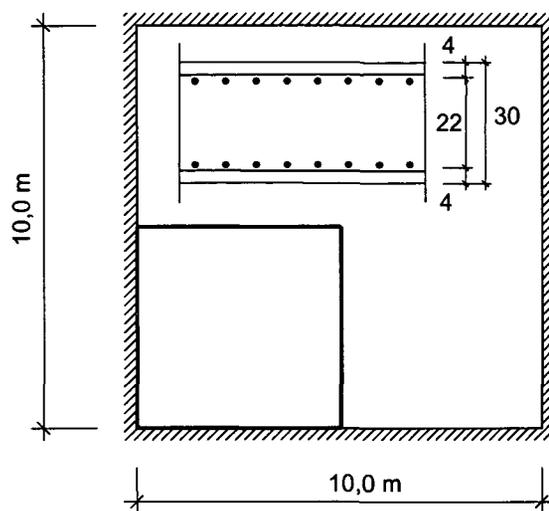
Das Konzept der Schnittgrößeniteration und die Methode der Traglastiteration werden nun anhand einer vierseitig eingespannten Quadratplatte veranschaulicht. Die Bewehrungsoptimierung wird automatisch mit dem Optimierungsmodus des Finite-Element Programms SEGNID durchgeführt. Zum Vergleich der Ergebnisse werden beide Methoden mit jeweils zwei unterschiedlichen Anfangsbewehrungen gestartet. Darüber hinaus wird auch bei der Traglastiteration eine Parameterstudie mit Variationen der Parameter C_1 und C_2 für die Bewehrungsermittlung durchgeführt.

4.3.1 Geometrie und Materialeigenschaften

Die geometrischen Abmessungen der Quadratplatte sind im Bild 4.5 dargestellt. Die Spannweiten der 30 cm dicken Platte betragen in beiden Richtungen 10 m.

Um den Rechenaufwand zu reduzieren wird wiederum mit Hilfe der Symmetrie nur ein Viertel der Platte mit 25 neunknotigen geschichteten Schalenelementen modelliert (Bild 4.5 links, rot eigerahmt). Außer den Horizontalverschiebungen sind alle Freiheitsgrade an den Rändern gesperrt.

Die Materialeigenschaften für Beton C 25/30 und Bewehrungsstahl BSt 500 sind in der Tabelle des Bilds 4.5 angegeben.



Beton C 25/30	Stahl BSt 500
$E_{cm} = 30.500 \text{ N/mm}^2$	$E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$
$E_{cd} = 16.670 \text{ N/mm}^2$	$E_T = 1.236 \text{ N/mm}^2$
$f_{ck} = -25,00 \text{ N/mm}^2$	$f_{yk} = 500,0 \text{ N/mm}^2$
$f_{cm} = -33,00 \text{ N/mm}^2$	$f_{ym} = 550,0 \text{ N/mm}^2$
$f_{cd} = -16,67 \text{ N/mm}^2$	$f_{yd} = 434,8 \text{ N/mm}^2$
$f_{cR} = -18,06 \text{ N/mm}^2$	$f_{yR} = 550,0 \text{ N/mm}^2$

Bild 4.5: Geometrie und Materialkennwerte der Quadratplatte

Es wurden einige Überlegungen bezüglich des Elastizitätsmoduls für Beton auf verschiedenen Sicherheitsniveaus wie Bemessungswert, Mittelwert und Rechenwert angestellt. Für die Querschnittsbemessung werden wiederum die Bemessungswerte der Materialparameter in Rechnung gestellt. Zur Berechnung der Betondruckkraft wird das Parabel-Rechteck-Diagramm herangezogen, wobei sich der E-Modul aus folgender Formel ergibt:

$$E_{cd} = 2 \cdot f_{cd} / \varepsilon_{c2} \quad (4.2)$$

Somit erhält man mit dem Bemessungswert der Betondruckfestigkeit $f_{cd} = -16,67 \text{ N/mm}^2$ und der Betonstauchung $\varepsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰}$ einen Bemessungswert des E-Moduls von $E_{cd} = 16.670 \text{ N/mm}^2$.

Nimmt man für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung das Spannungs-Stauchungs-Diagramm unter Zugrundelegung der rechnerischen Mittelwerte der Betonfestigkeit

bis $\sigma_c = 0,4 \cdot f_{cR}$ als linear elastisch an, so lässt sich der E-Modul nach Formel (4.3) bestimmen:

$$E_{cR} = (2 \cdot (f_{cR} - \sigma_c) + \sigma_c) / \varepsilon_{c1} \quad (4.3)$$

Für den rechnerischen Mittelwert der Druckfestigkeit von $f_{cR} = -18,06 \text{ N/mm}^2$ und $\varepsilon_{c1} = 2,2 \text{ ‰}$ ergibt sich der rechnerische Elastizitätsmodul zu $E_{cR} = 13.135 \text{ N/mm}^2$. Dieser beträgt somit weniger als die Hälfte des Elastizitätsmoduls für die Betonfestigkeitsklasse C 25/30. Die Verwendung eines niedrigen E-Moduls führt zu größeren Durchbiegungen und einer Unterschätzung der Traglast. Damit ergibt sich eine größere Bewehrungsfläche bei der Optimierung.

Zur besseren Darstellung der Optimierungsberechnung und ihrer Ergebnisse wurde auf der Quadratplatte eine Flächenlast mit einem Bemessungswert von 60 kN/m^2 angeordnet.

4.3.2 Bewehrungsoptimierung mit der Schnittgrößeniteration

4.3.2.1 Optimierung anhand linear-elastisch berechneter Schnittgrößen

Im Bild 4.6 sind die Ergebnisse aus der Bewehrungsoptimierung mit linear-elastischen Schnittgrößen gemäß Eurocode 2 oder DIN 1045-1 für ein Plattenviertel dargestellt. Zu diesem Zweck wurden die Bewehrungsflächen für die oberen und unteren Lagen in x - und y -Richtung aufsummiert und ober- und unterhalb der Plattenmittelfläche (Beschriftung - obere Bewehrung blau, untere Bewehrung rot) säulenförmig aufgetragen. Das gesamt erforderliche Stahlgewicht beträgt nach der Optimierung 497 kg . In Bezug auf die Bemessungslast wird ein Traglastfaktor von $\lambda = 1,63$ erreicht.

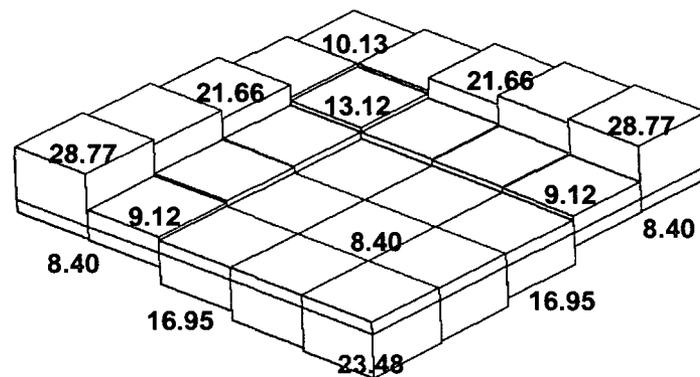


Bild 4.6: Bewehrungsfläche für linear elastisch ermittelte Schnittgrößen

4.3.2.2 Optimierung anhand der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung

➤ Mindestbewehrung als Startbewehrung

Bei dieser Variante wird für die Schnittgrößeniteration die Mindestbewehrung für biegebeanspruchte Bauteile von $a_{s,min} = 4,20 \text{ cm}^2/\text{m}$ als Startbewehrung gewählt. Die Ergebnisse sind im Bild 4.7 analog zur vorangegangenen Berechnung dargestellt.

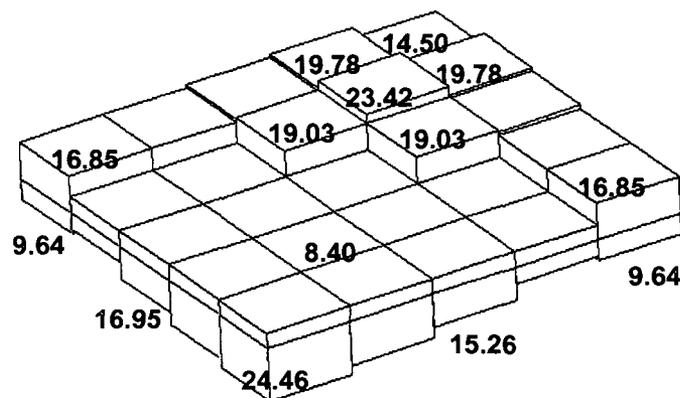


Bild 4.7: Bewehrungsfläche nach der Schnittgrößeniteration mit Mindestbewehrung als Startbewehrung

Die Bewehrungsverteilung in der oberen Lage unterscheidet sich deutlich von der mit Hilfe der linear-elastisch ermittelten Schnittgrößen (Abschnitt 4.3.2.1) ermittelten Bewehrungsanordnung. In diesem Fall ist die Plattenbewehrung viel gleichmäßiger über die Plattenränder und in der Ecke verteilt. Die gleichmäßige Verteilung wird durch die Umlagerung der Schnittgrößen nach Erreichen der Fließgrenze im Stahl

erzielt. Das Fließen beginnt dabei in der Plattenmitte und dehnt sich fortlaufend auf die Ecken der Platte aus. Mit wachsender Stahldehnung wird die Betondruckzone in den Querschnitten, die parallel zu den Rändern angeordnet sind, so lange verkleinert bis der Betondruckbruch eintritt. In der Nähe der Systemversagenslast erreichen die Schnittgrößen an den Plattenrändern ihr Maximum und führen so zu größeren Bewehrungsflächen in diesen Bereichen. Da der Winkel zwischen den einzelnen Bewehrungslagen und den Hauptmomentenrichtungen ungefähr 45° beträgt, wird die eingelegte Bewehrung nicht effizient ausgenutzt und im Vergleich zur vorangegangenen Berechnung zwangsläufig erhöht. Sie beträgt für das untersuchte Plattenviertel 515 kg .

➤ Linear elastisch ermittelte Bewehrung als Startbewehrung

Bei dieser Variante wird eine linear-elastisch ermittelte Bewehrung als Startfläche eingeführt. Die Ergebnisse sind im Bild 4.8 dargestellt und unterscheiden sich qualitativ nur wenig von der linear elastischen Optimierung dargestellt im Bild 4.6 im Abschnitt 4.3.2.1. Die Bewehrungskonzentration in der Ecke ist nicht mehr vorhanden. Die erforderliche Stahlmenge für die Viertelplatte beträgt 401 kg .

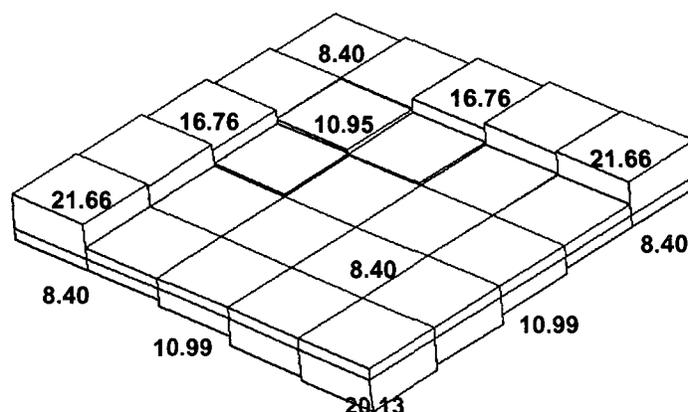


Bild 4.8: Bewehrungsfläche nach der Schnittgrößeniteration mit Startbewehrung aus Bemessung für linear elastisch ermittelte Schnittgrößen

In den letzten beiden Berechnungen wird der Einfluss der Startbewehrung auf den Optimierungsprozess ersichtlich. Generell ist das nichtlineare Verfahren der Schnittgrößenermittlung von der Größe und Lage der Bewehrung im Querschnitt abhängig. Da sich von Belastungsbeginn an ein stets unveränderter, gleichbleibender Lastab-

tragungsmechanismus einstellt, ist die richtige Wahl der Startbewehrung bei der Bewehrungsoptimierung nach der Methode der Schnittgrößeniteration von entscheidender Bedeutung, um optimale Ergebnisse zu erhalten.

4.3.3 Bewehrungsoptimierung mit der Traglastiteration

Nach dem deutschen Normenwerk DIN 1045-1 darf beim Nachweis der Tragfähigkeit mit dem nichtlinearen Verfahren unter Zugrundelegung der rechnerischen Mittelwerte der Materialfestigkeiten ein einheitlicher Tragsicherheitsbeiwert von $\gamma_R = 1,30$ in Rechnung gestellt werden. Auf dieses Nachweisformat stützt sich die Bewehrungsoptimierung mit Traglastiteration, die in den Kapiteln 3.4.2 und 3.4.3 ausführlich beschrieben wurde, ab. Im Anschluss werden einige Berechnungen angeführt, in denen jeweils die mindestens erforderliche Bewehrung als Startbewehrung angesetzt wird. Der Eingabewert C_1 zur Steuerung der Inkrementgröße und Anzahl der Iterationsschritte wird für alle Vergleichsberechnungen mit $C_1 = 10,0$ festgelegt. Eine Parameterstudie bezüglich der Wahl des Exponenten C_2 , der die Aufteilung der Bewehrungsinkremente in der Platte und deren Einfluss auf den Optimierungsprozess steuert, wurde anhand dieser vierseitig eingespannten Quadratplatte untersucht. Insgesamt werden acht Parallelberechnungen mit unterschiedlichen C_2 -Werten durchgeführt. Ihre Ergebnisse sind im Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagramm im Bild 4.9 darstellt. Auf der Abszisse ist der Bewehrungsfaktor, der das Verhältnis zwischen ermittelter Bewehrung und mindestens erforderlicher Bewehrung angibt, aufgetragen. Auf der Ordinate ist der Traglastfaktor, der das Verhältnis zwischen erreichter Systemtraglast und gewählter Bemessungslast beschreibt, dargestellt. Als Zieltraglastfaktor wird $\lambda_u = 1,30$ nach DIN 1045-1 angenommen. Der Optimierungsprozess wird automatisch bei Erreichen dieses Grenzwerts in der Struktur abgebrochen. Die dargestellten Verläufe enden daher alle bei diesem Traglastfaktor.

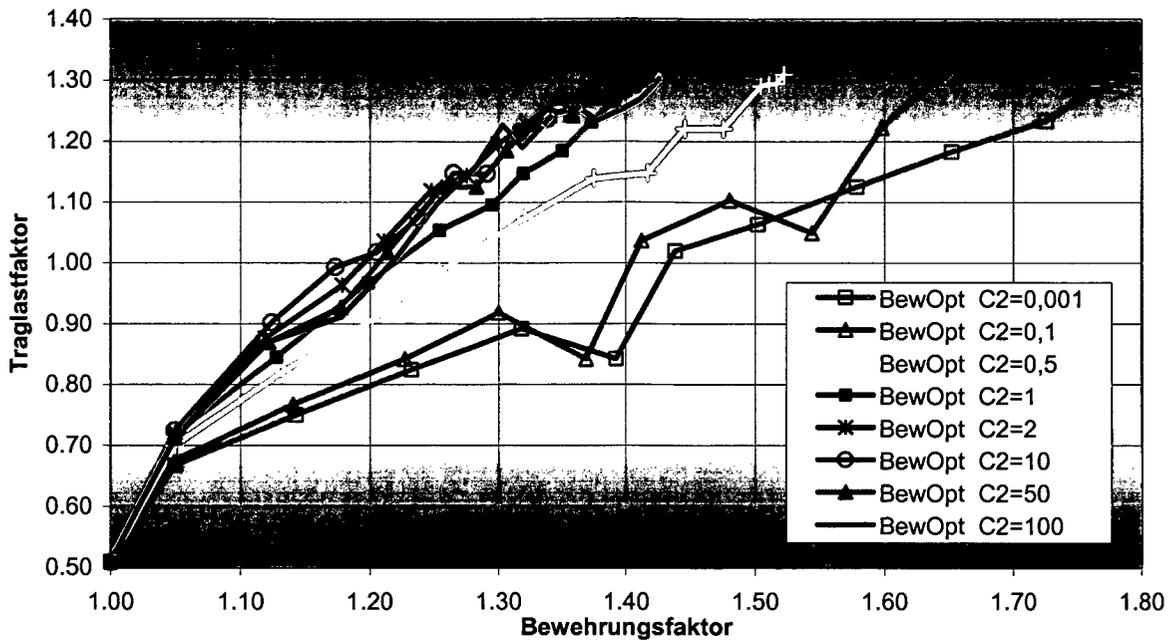


Bild 4.9: Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagramm für unterschiedliche C_2 -Werte

Mit Hilfe des Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagramms kann über den Einfluss der C_2 -Werte folgende Aussage getroffen werden:

- C_2 -Werte mit $C_2 \geq 1$, bei denen sich eine Bewehrungserhöhung auf Stahleinlagen, deren Dehnungen im Bereich von $\epsilon_{S(i),max}$ liegen auswirkt, ergeben sich sehr ähnliche Verläufe und kleinere Stahlmengen bei Erreichen des Zieltraglastfaktors. Der Bewehrungsfaktor dabei beträgt etwa 1,4. Dies bedeutet, dass die Bewehrung um ca. 40% im Vergleich zur Anfangsbewehrung zu vergrößern ist. Die Durchbiegungen sind gleichzeitig geringer und quantitativ ähnlich. Die Ergebnisse dieser Parameterstudie bezüglich des Einflusses des C_2 -Werts auf die Bewehrungsermittlung sind in der Tabelle 4.2 zusammengefasst.

C_2	$C_1 = 10.0$								
	0,001	0,1	0,5	1,0	2,0	10,0	50,0	100,0	
Traglastfaktor	1,305	1,303	1,310	1,304	1,301	1,306	1,300	1,303	
Bewehrungsfaktor	1,794	1,644	1,522	1,417	1,381	1,392	1,402	1,426	
max. Durchbiegungen	0,39	0,33	0,23	0,14	0,12	0,12	0,11	0,11	

Tabelle 4.2: Studie für die Variation des Werts C_2

- Für C_2 -Werte mit $0 < C_2 < 1$, bei denen eine gleichmäßigere Verteilung der Bewehrungszuschläge auf die Bewehrungsscharen in den durch $\varepsilon_y < \varepsilon_{s(i)} < \varepsilon_{s(i),max}$ gekennzeichneten Dehnungsbereichen erzielt werden, weisen die Kurven unstetige Bereiche in der Traglastberechnung und ein Absinken der Systemtraglast trotz Zulage von Bewehrung auf. Die zum Erreichen der Zieltraglast erforderliche Bewehrungsmenge ist dabei nicht nur qualitativ unterschiedlich verteilt, sondern auch analog wie die Durchbiegungen quantitativ größer.

Um den Einfluss des C_2 -Eingangswerts auf den Ermittlungsprozess besser zu veranschaulichen, sind im Folgenden die Verläufe mit zwei unterschiedlichen Größen dieser Werte abgebildet. In Abhängigkeit von den gewählten Größe von C_2 erfolgt die Bewehrungserhöhung in unterschiedlichen Plattenbereichen, wodurch auch unterschiedliche Bewehrungsmengen benötigt werden. Beiden Berechnungen ist die Mindestbewehrung als Startbewehrung und ein C_1 -Wert von 10 zugrundegelegt. Der Optimierungsverlauf mit Darstellung von Bewehrungs- (Säulen) und Traglastfaktor (Kurve) und die maximalen Durchbiegungen in der einzelnen Optimierungsschritten für den Parameter $C_2 = 2,00$ ist im Diagramm in Bild 4.10 zu sehen. Die Bewehrungsoptimierung erfolgt in 14 Schritten. Da die Berechnung mit der Mindestbewehrung gestartet wird, ergibt sich für den ersten Optimierungsschritt ein Bewehrungsfaktor von $a_{s,vorh}/a_{s,min} = 1,00$. Mit dieser Startbewehrung wird bei physikalisch nichtlinearem Materialverhalten ein Traglastfaktor von $\lambda = 0,51$ erreicht. Die Bewehrung wird in den darauf folgenden Schritten solange kontinuierlich vergrößert, bis der Traglastfaktor des Systems einem Zielfaktor von 1,30 entspricht. Wie in diesem Diagramm zu sehen ist, wird im Zuge des letzten Optimierungsschrittes die Mindestbewehrung um ca. 38 % vergrößert.

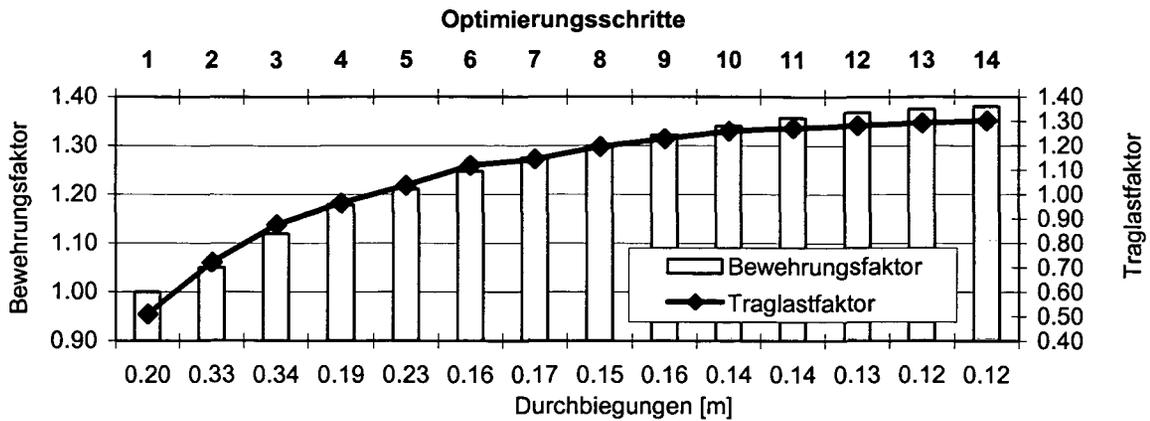


Bild 4.10: Optimierungsverlauf für $C_2 = 2,00$

Die Optimierung mit dem kleineren Wert für den Parameter $C_2 = 0,001$ zeigt bereits einige Unterschiede zu dem oben gezeigten Verlauf. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind im Bild 4.11 dargestellt. Für die dafür benötigten 15 Schritte bis zum Erreichen des Systemtraglastfaktors von $1,30$ wird im Vergleich zum vorangegangenen Optimierungsverlauf eine größere Bewehrungsmenge erforderlich. Im letzten Optimierungsschritt ergibt sich der Bewehrungsfaktor zu ca. $1,8$, was eine Vergrößerung der Mindestbewehrung um 80% bedeutet. Die maximalen Durchbiegungen betragen im Vergleich zum Optimierungsvorgang mit $C_2 = 2,00$ bereits mehr als den dreifachen Wert.

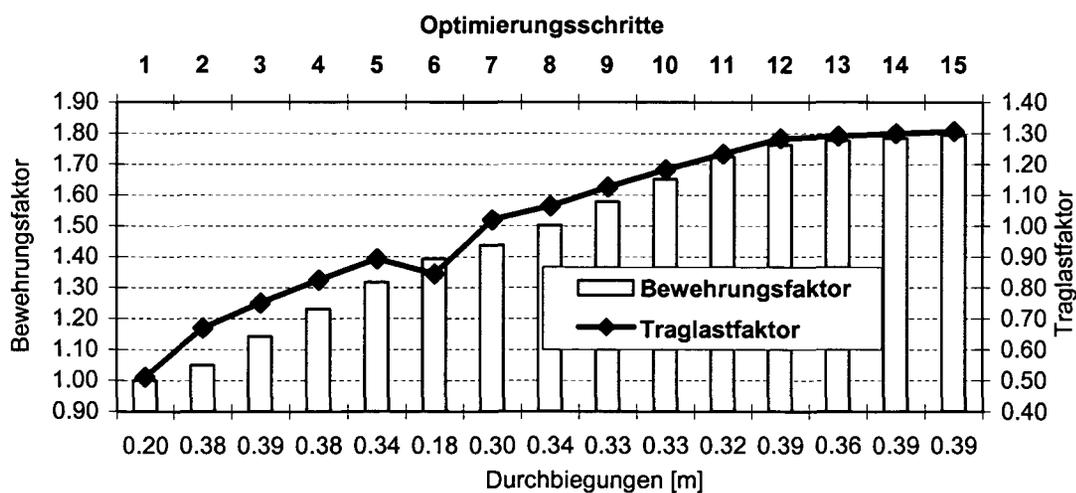


Bild 4.11: Optimierungsverlauf für $C_2 = 0,001$

Die Aufteilung der Bewehrungsfläche auf die einzelnen Elemente ist für beide Berechnungen im Bild 4.12 dargestellt. Auf der linken Seite ist das Ergebnis mit dem Parameter $C_2 = 2,00$ und auf der rechten Seite mit $C_2 = 0,001$ zu sehen. Bei größeren Werten von C_2 wirkt sich die Bewehrungserhöhung auf Stahldehnungen, die im Bereich von $\varepsilon_{S(i),max}$ liegen, aus. Die resultierende Bewehrungsaufteilung ist mit den Ergebnissen aus der Schnittgrößeniteration mit linearer Bewehrung als Startbewehrung (Bild 4.8) vergleichbar. Dennoch ist die untere Bewehrung mehr in der Plattenmitte und die obere Bewehrung mehr auf einen kleinen Bereich der Randmitte konzentriert. Bei dieser Berechnung beträgt das effektive Stahlgewicht für ein Plattenviertel 413 kg.

Legt man dem Parameter C_2 einen viel kleineren Wert mit $C_2 = 0,001$ zu Grunde, erhält man eine völlig andere Verteilung der Bewehrungsfläche (Bild 4.12 rechts). Durch die Wahl kleinerer positiver Werte von C_2 ergibt sich eine gleichmäßigere Verteilung bei geringeren Bewehrungszuschlägen über jene Elemente in den durch $\varepsilon_y < \varepsilon_{S(i)} < \varepsilon_{S(i),max}$ gekennzeichneten Dehnungsbereichen. Analog zur Optimierung nach Eurocode 2 mit der Mindestbewehrung als Startbewehrung (Bild 4.7) tritt auch hier eine Konzentration der Stahlfläche im Rand- und Eckbereich auf. Das Gewicht der insgesamt größeren Stahlmenge beträgt für ein Plattenviertel 550 kg.

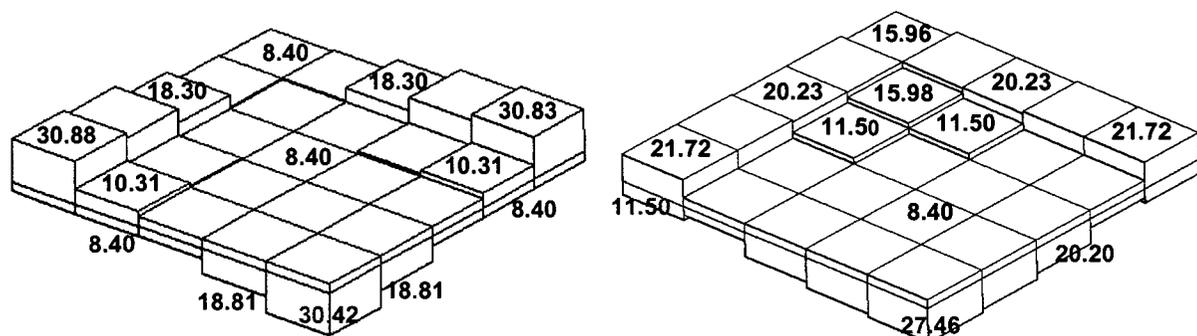


Bild 4.12: Bewehrungsfläche nach der Traglastiteration (links $C_2 = 2,00$ und rechts $C_2 = 0,001$)

Eine qualitative Darstellung der Bewehrungsverteilung in der Viertelplatte für die oben gewählten Parameter C_2 ist im nächsten Bild 4.13 zu sehen. Dabei markiert die blaue Farbe die Mindestbewehrungsfläche von $8,40 \text{ cm}^2/\text{m}$ (aufsummiert für beide Richtungen); die rote Farbe kennzeichnet die maximal erforderliche Bewehrungsfläche von $30,88 \text{ cm}^2/\text{m}$. Die Ergebnisse sind für die obere und untere Bewehrungslage

getrennt dargestellt. Auf der linken Seite sind die Ergebnisse für einen C_2 -Wert von 2,0 und auf der rechten Seite für einen C_2 -Wert von 0,001 aufgetragen.

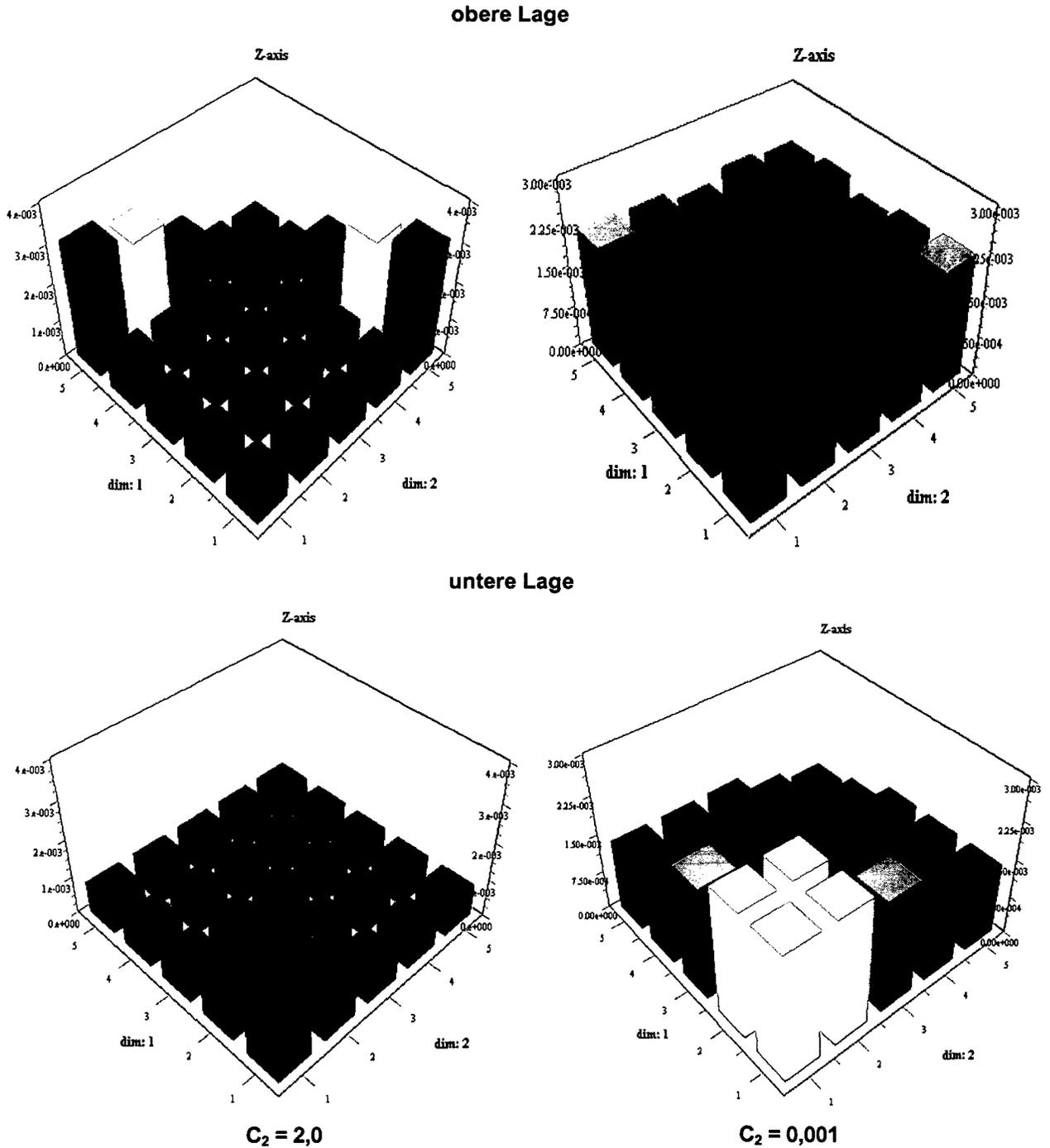


Bild 4.13: Bewehrungsflächen nach dem Optimierungsprozess für $C_2=2,00$ und $C_2=0,001$

4.4 Plattenstreifen über ein Feld

4.4.1 Geometrie, Materialeigenschaften und Belastung

In diesem Beispiel wird die Methode der Traglastiteration bei der Bewehrungsermittlung eines einfeldrigen Plattenstreifens angewendet. Zuerst wird der Ermittlungsprozess für einen festen C_2 -Wert in den einzelnen Schritten beschrieben. Im Anschluss wird der Einfluss unterschiedlicher Eingabewerte für den Parameter C_2 untersucht.

Die Spannweite des Plattenstreifens wurde mit 12 m und die Plattendicke im Hinblick auf seine Grenzschlankheit mit 50 cm festgelegt. Die Mindestbewehrung der Platte betrug damit

$$a_{s,min} = 0.0028 \cdot b_t \cdot h_t = 0,0028 \cdot 100 \cdot 50 / 2 = 7,00 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (4.4)$$

und wurde als Startbewehrung für die nichtlineare Bewehrungsermittlung gewählt. Sie wurde als verschmierte Schicht im Abstand $\pm 21,0\text{ cm}$ von der Plattenmittelebene auf der unteren bzw. oberen Seite des Streifens angeordnet.

Die Netzteilung des Streifens für die Finite-Element Analyse erfolgte mit 2×24 Elementen und ist in Bild 4.14 zu sehen.

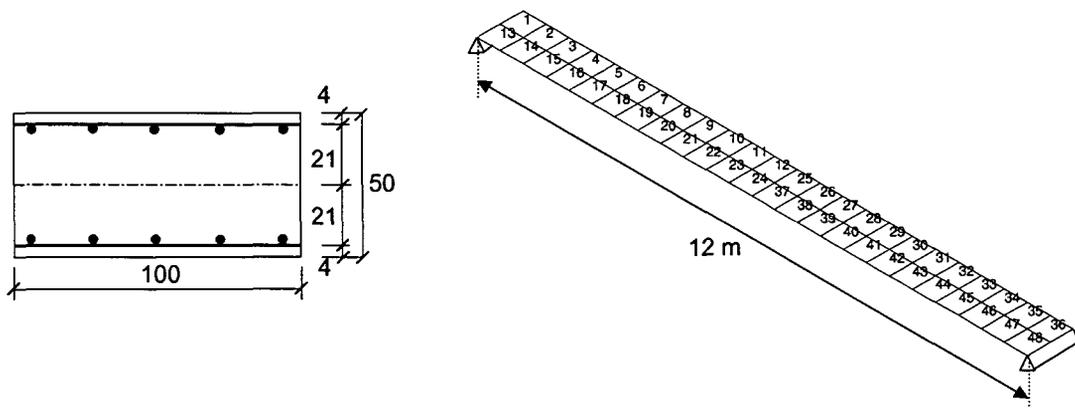


Bild 4.14: Geometrie und Diskretisierung des einfeldrigen Plattenstreifens

Die Belastung der Platte setzt sich aus einem ständigen Anteil infolge Platteneigenlast und einer Ausbaulast von sowohl $2,00\text{ kN/m}^2$ als auch einem veränderlichen Anteil aus Nutzlast von $3,00\text{ kN/m}^2$ zusammen. Die Bemessungslast L_d des Tragsicher-

heitsnachweises unter Berücksichtigung der entsprechenden Teilsicherheitsbeiwerte für die Einwirkungen betrug somit $24,1 \text{ kN/m}^2$.

$$L_d = 1,35 \cdot G_k + 1,50 \cdot Q_{k,i} = 1,35 \cdot (0,50 \cdot 25 + 2,00) + 1,50 \cdot 3,00 = 24,1 \text{ kN/m}^2 \quad (4.5)$$

Die Bewehrungsermittlung des Plattenstreifens erfolgte unter Zugrundelegung der rechnerischen Mittelwerte der Baustoffe für einen einheitlichen Teilsicherheitsbeiwert $\gamma_R = 1,30$ des Systemwiderstands nach DIN 1045-1. Die erforderlichen Materialkennwerte für die nichtlineare Finite-Element Berechnung sind in der Tabelle 4.3 eingegeben.

Beton C 25/30	Bewehrung BSt 500
$E_{cR} = 17.386 \text{ MN/m}^2$	$E_s = 200.000 \text{ MN/m}^2$
$f_{cR} = -19,125 \text{ MN/m}^2$	$E_h = 1.236 \text{ MN/m}^2$
$f_{ctm} = 0,10 \text{ MN/m}^2$	$f_{yk} = 500 \text{ MN/m}^2$
$\varepsilon_{c1} = 2,20 \text{ ‰}$	$f_{yR} = 550 \text{ MN/m}^2$
$\varepsilon_{cu}/\varepsilon_{c1} = 1,30$	$\varepsilon_{su} = 25 \text{ ‰}$

Tabelle 4.3 Baustoffkennwerte

4.4.2 Verlauf des Ermittlungsprozesses

Um den Ermittlungsprozess zu veranschaulichen, wurde die Bewehrungsfläche elementweise für die einzelnen Optimierungsschritte in Bild 4.15 dargestellt. Die Berechnung wurde mit dem Eingabewert für $C_1 = 10$, was einer Ermittlung über 10 Schritte entspricht, durchgeführt. Der Eingabewert C_2 wurde ebenfalls mit 10 angesetzt. Bei größeren C_2 -Werten ist eine betragsmäßig größere Steigerung der Bewehrung, die gleichzeitig jedoch auf einen kleineren Bereich beschränkt ist, zu erwarten.

Auf der Abszisse der nachfolgenden Diagramme im Bild 4.15 sind die Elementnummern und auf der Ordinate die zugehörigen Bewehrungsflächen in $[\text{m}^2/\text{m}]$ eingetragen.

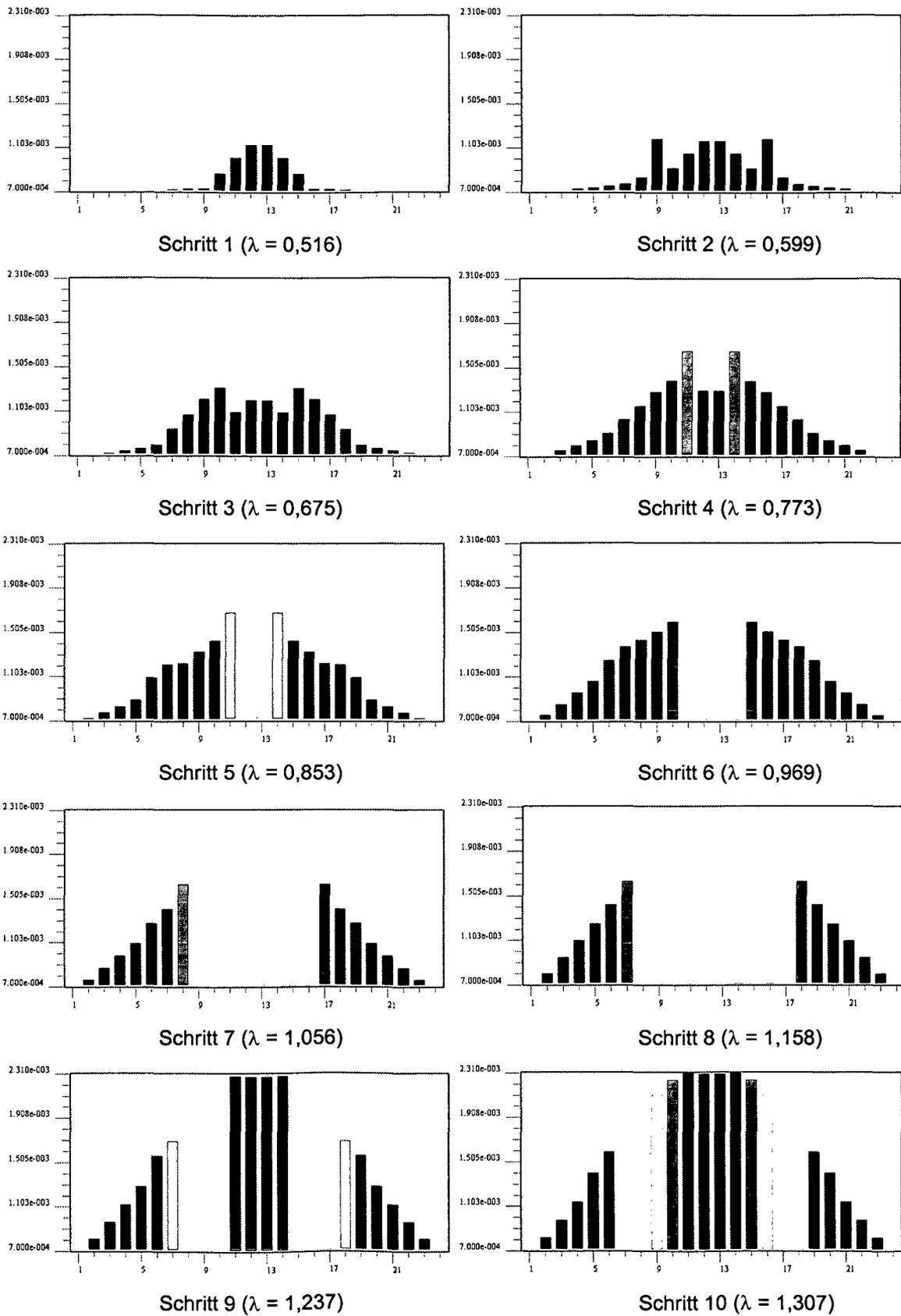
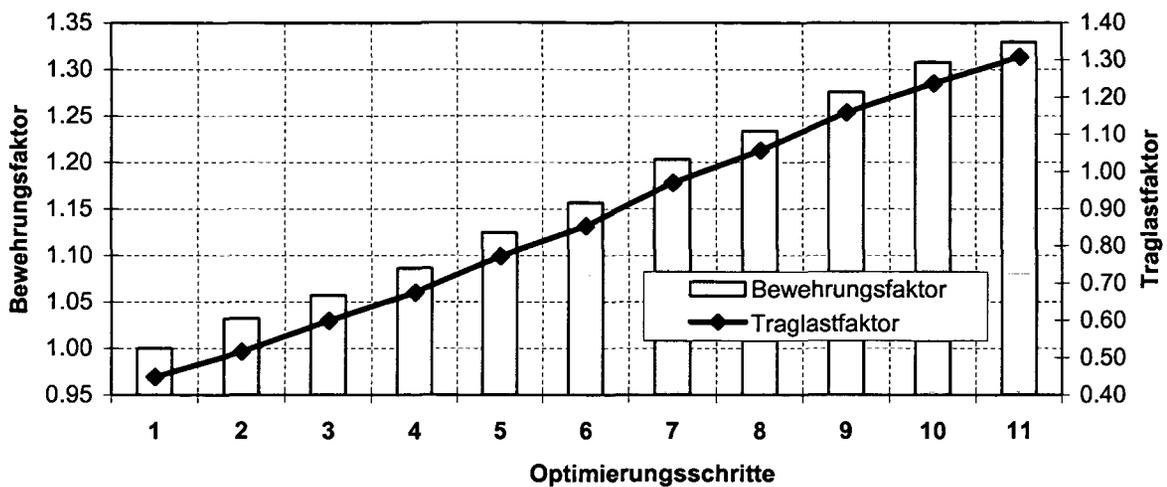


Bild 4.15: Bewehrungsflächen in den einzelnen Schritten des Ermittlungsprozesses für $C_2 = 10$

Mit der Mindestbewehrung von $7,00 \text{ cm}^2/\text{m}$ als Startbewehrung erzielte der Plattenstreifen einen Traglastfaktor von nur $\lambda = 0,449$. Die Bewehrung wurde an dieser Stelle in Abhängigkeit von dem gewählten Eingabewerten C_1 und C_2 soweit gesteigert, bis das System die 1,3 – fache Bemessungslast aufnehmen konnte. Bei dem Einfeldstreifen, bei dem das größte Feldmoment naturgemäß in der Mitte des Streifens eintritt, begann die Bewehrungszulage ebenfalls genau an diese Stelle (Bild 4.15 – Schritt 1).

Das erste Bewehrungsinkrement $\Delta a_{s(i)}^j$ in der Mitte (i - bezeichnet den Traglastiterationsschritt, j - bezieht sich auf die Elementnummer) ergab sich zu $\Delta a_{s(1)}^{12,13} = 4,38 \text{ cm}^2/\text{m}$ und der zugehörige Traglastfaktor zu $\lambda = 0,516$. Im zweiten Schritt wurde an dieser Stelle eine viel geringere Bewehrungserhöhung von $\Delta a_{s(2)}^{12,13} = 0,34 \text{ cm}^2/\text{m}$ im Vergleich zu den Bewehrungszulagen in den Elementen 9 und 16, wo es auch zu einer größeren Beanspruchung kam, vollzogen. Die Bewehrungsinkremente in diesen Elementen betrug jeweils $\Delta a_{s(2)}^{9,16} = 4,47 \text{ cm}^2/\text{m}$ bei einem erzielten Systemtraglastfaktor von $\lambda = 0,599$. In den nächsten Schritten verschob sich die größte Bewehrungszulage pro Optimierungsschritt immer um ein Element näher zur Streifenmitte; so etwa im 3. Schritt – bei den Elementen 10 und 15, und im 4. Schritt – bei den Elementen 11 und 14. Ab dem fünften Schritt bis zum Ende des Ermittlungsprozesses erfolgte die größte Bewehrungszunahme immer in der (am höchsten beanspruchten) Streifenmitte. Im letzten Schritt wurde an dieser Stelle eine Bewehrungsfläche von $23,13 \text{ cm}^2/\text{m}$ bei einem Zieltraglastfaktor von $\lambda = 1,307$ erreicht. Somit wurde in der nichtlinearen Bewehrungsermittlung die Startfläche (= Mindestbewehrung) im Endeffekt um das etwa 1,33-fache erhöht.

Im nachfolgenden Diagramm im Bild 4.16 ist der Verlauf des Ermittlungsprozesses unter Angabe des Traglast- und Bewehrungsfaktors, der das Verhältnis der ermittelten Bewehrung zur Mindestbewehrung beschreibt, für die einzelnen Optimierungsschritte dargestellt.

Bild 4.16: Optimierungsverlauf für $C_2 = 10$

4.4.3 Parameterstudie für die C_2 -Werte

Der Eingabewert C_2 tritt in den Formeln (3.12) als Exponent bei der Berechnung des Parameters $f_{1(i)}^j$ und damit bei der Bestimmung der Größe des Bewehrungszuschlages $\Delta a_{s(i)}^j$ auf. Mit diesem Wert lässt sich in Abhängigkeit von der spezifischen plastischen Energie die Aufteilung der Bewehrungszuschlüsse steuern. Mit der Eingabe größerer Werte für C_2 ($C_2 \geq 1$) erfolgt eine Bewehrungserhöhung in den Bereichen mit der größten Stahldehnungen. Durch die Wahl kleinerer Werte von C_2 ($0 < C_2 < 1$) erhält man eine gleichmäßigere Verteilung der Bewehrungszuschlüsse in den Dehnungsbereichen mit $\varepsilon_y < \varepsilon_{s(i)} < \varepsilon_{s(i),max}$. Dies führt zu einem duktileren Tragwerksverhalten und unter Umständen auch zu größeren Gesamtbewehrungsmengen.

Diese Aussagen werden auch durch die Untersuchung am einfeldrigen Plattenstreifen bestätigt, obwohl bei einem derartigen statisch bestimmten Tragwerk keine Möglichkeit zur Schnittgrößenumlagerung in benachbarte Felder existiert. Es wurden insgesamt fünf Parallelberechnungen mit einem konstanten C_1 -Wert von 10 und C_2 -Werten durchgeführt. Die Ergebnisse sind im unterstehenden Diagramm im Bild 4.17 dargestellt.

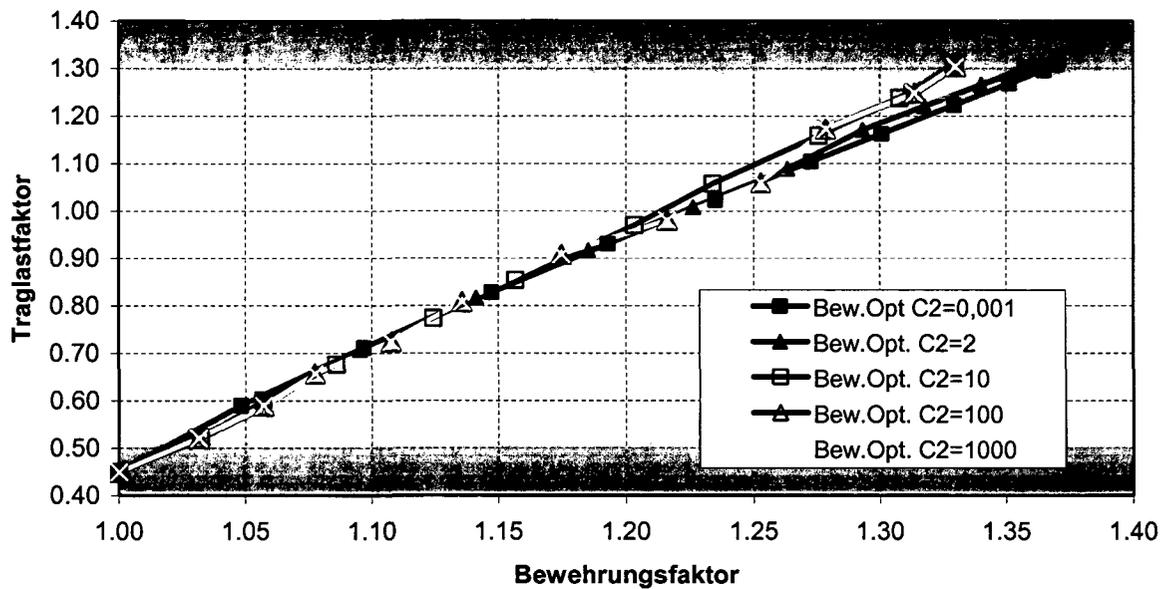


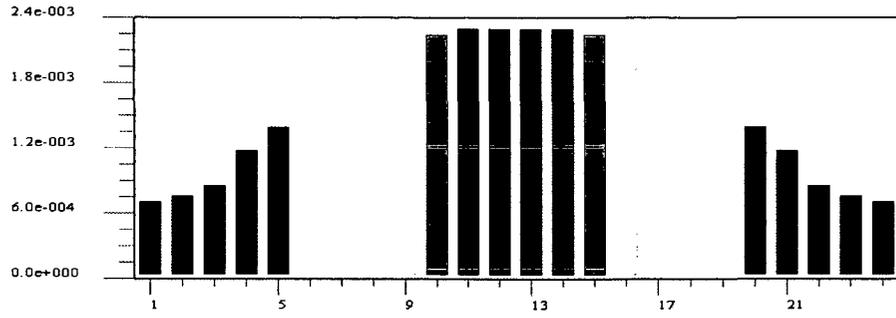
Bild 4.17: Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagramm für $C_1 = 10$ und unterschiedliche C_2 -Werte

Für jeden C_2 -Wert wurde der Verlauf des Bewehrungsfaktors dem erreichten Traglastfaktor gegenübergestellt. Bei C_2 -Werten zwischen $0,001$ und 10 und einem Zieltraglastfaktor von $\lambda \approx 1,30$ variiert der Bewehrungsfaktor zwischen $1,37$ und $1,33$. Größere C_2 -Werte zwischen 10 und 1000 weisen praktisch keinen Einfluss auf den Bewehrungsfaktor auf. Dabei ist noch zu bemerken, dass sich die Maximalwerte für die ermittelten Bewehrungsflächen in den einzelnen Berechnungen kaum voneinander unterscheiden. Bei jeder Berechnung erreichen sie praktisch den gleichen Wert von etwa $23 \text{ cm}^2/\text{m}$. Die Unterschiede beim Bewehrungsfaktor ergeben sich nur durch die Verteilung der einzelnen Bewehrungselemente. Bei kleineren C_2 -Werten kommt es in einem breiteren Bereich, in dem die Stahldehnungen größer als die Fließdehnung, sind zu einer Bewehrungserhöhung. Umgekehrt erfolgen für größer gewählte Eingabewerte die Bewehrungszulagen in einem relativ engen Bereich, in dem die größten Stahldehnungen auftreten. Die Ergebnisse aller fünf Berechnungen sind auch in der Tabelle 4.4 zu sehen. Die in Klammer eingefügten Werte entsprechen den skalierten Werten bei einem Traglastfaktor von genau $\lambda = 1,30$.

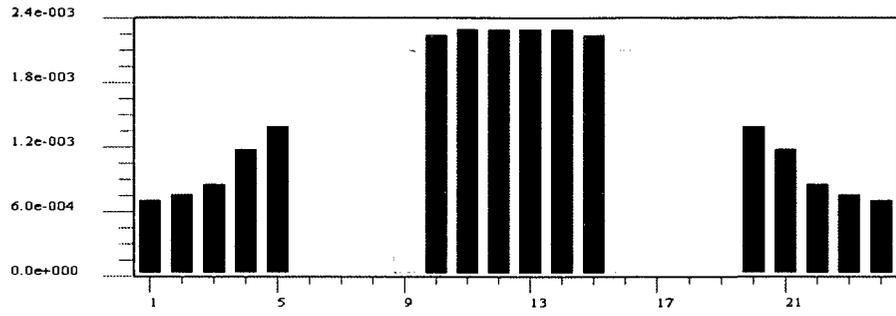
Bewehrungsangabe		Bewehrungsfläche	Traglastfaktor	Bew.Faktor
		max $a_{s, \text{Feld}}$	λ	
		[cm ² /m]	[-]	[-]
Mindestbewehrung		7,00	0,449	1,00
optimierte Bewehrung	$C_2 = 0,001$	23,09 (22,95)	1,308 (1,30)	1,37 (1,36)
	$C_2 = 2,00$	23,16 (22,95)	1,312 (1,30)	1,36 (1,35)
	$C_2 = 10,00$	23,13 (23,00)	1,307 (1,30)	1,33 (1,32)
	$C_2 = 100,0$	23,01 (22,94)	1,304 (1,30)	1,33 (1,33)
	$C_2 = 1000,0$	23,01 (22,94)	1,304 (1,30)	1,33 (1,33)
lineare Bewehrung		21,32		

Tabelle 4.4 Ermittelte Bewehrungsflächen für unterschiedliche C_2 – Werte

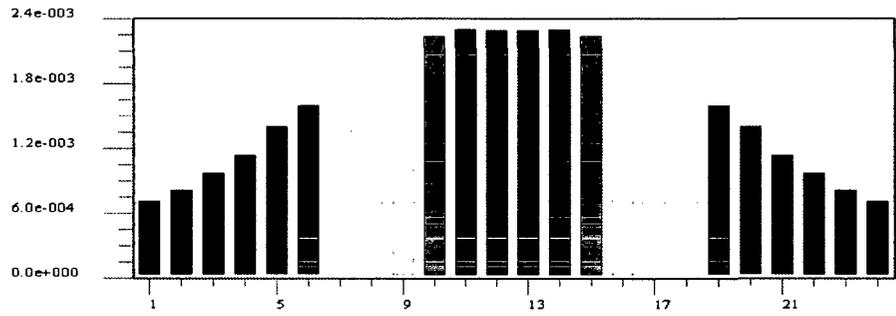
Um die unterschiedlichen Verläufe bei der Bewehrungserhöhung in Abhängigkeit von den jeweiligen C_2 -Werten mit einander zu vergleichen, sind die zugehörigen Optimierungsvorgänge elementweise in den Diagrammen im Bild 4.18 dargestellt.



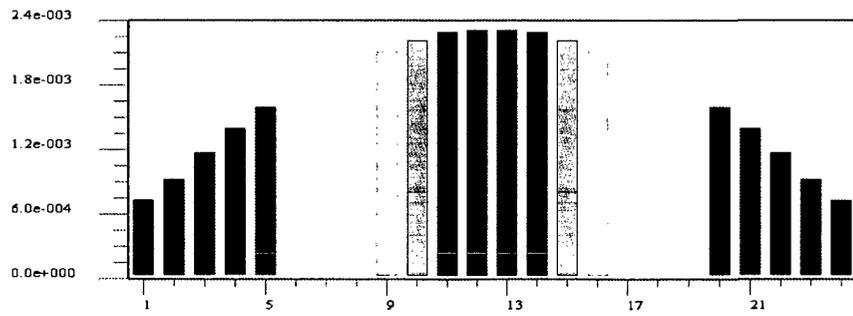
$C_2 = 1000$



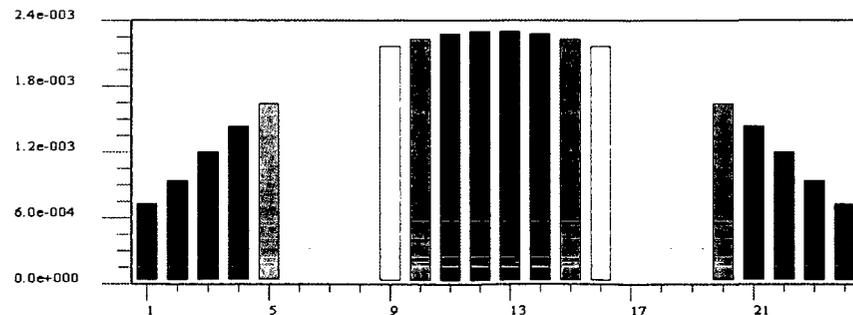
$C_2 = 100$



$C_2 = 10$



$C_2 = 2,0$



$C_2 = 0,001$

Bild 4.18: Bewehrungsflächen nach dem Ermittlungsprozess für unterschiedliche C_2 -Werte

4.5 Plattenstreifen über zwei Felder

4.5.1 Geometrie und Materialeigenschaften

Für die Bewehrungsermittlung mit Hilfe der Methode der Traglastiteration wurde ein Plattenstreifen von 1 m Breite über zwei Felder mit 6 m Spannweite gewählt. In Bezug auf die zulässigen Grenzschlankheiten wurde die Plattendicke mit 20 cm angenommen, weshalb eine explizite Durchbiegungsberechnung entfallen konnte.

Als Anfangsbewehrung wurde die Mindestbewehrung für biegebeanspruchte Bauteile gewählt, was in diesem Fall einer Bewehrungsfläche von $2,80\text{ cm}^2/\text{m}$ entsprach (Formel (4.6)).

$$a_{s,min} = 0,0028 \cdot b_t \cdot h_t = 0,0028 \cdot 100 \cdot 20 / 2 = 2,80\text{ cm}^2 / \text{m} \quad (4.6)$$

Diese Bewehrungsfläche wurde als verschmierte Bewehrung gleichmäßig jeweils auf der unteren und oberen Seite des Plattenstreifens eingelegt. Der mittlere Abstand zwischen der Plattenmittelfläche und dem Bewehrungsschwerpunkt betrug $\pm 6,5\text{ cm}$.

Für die Finite-Element Berechnung wurde die Netzteilung der Platte pro Feld mit je 2 Elementen in Querrichtung und 12 Elementen in Längsrichtung vorgenommen. Eine graphische Darstellung des Plattenstreifens mit seinen Abmessungen, seiner Netzteilung und der gewählten Bewehrungslage im Querschnitt ist im Bild 4.19 dargestellt.

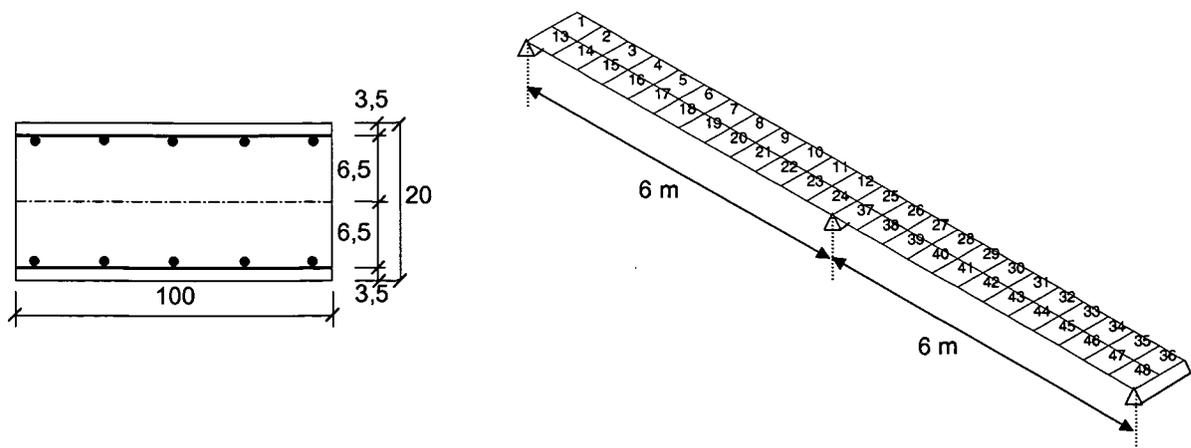


Bild 4.19: Geometrie und Diskretisierung der Plattenstreifen

Der Optimierungsprozess basiert auf der deutschen Norm DIN 1045-1 und wurde mit Hilfe des Finite-Element Programms SEGID durchgeführt. Die Bewehrungsermittlung erfolgte somit für einen einheitlichen Teilsicherheitsbeiwert von $\gamma_R = 1,30$ für den Systemwiderstand. Bei der Berechnung des Systemwiderstands wurden die rechnerischen Mittelwerte der Baustofffestigkeiten in Rechnung gestellt. Die Berechnung dieser Werte erfolgte nach den Formeln (2.14) und (2.15). Die so erhaltenen Ausgangsparameter der Baustoffe sind in der Tabelle 4.5 zusammengefasst.

Beton C 30/37	Bewehrung BSt 500
$E_{cR} = 16.420 \text{ MN/m}^2$	$E_s = 200.000 \text{ MN/m}^2$
$f_{cR} = -18,06 \text{ MN/ m}^2$	$E_h = 1.236 \text{ MN/m}^2$
$f_{ctm} = 0,10 \text{ MN/ m}^2$	$f_{yk} = 500 \text{ MN/ m}^2$
$\varepsilon_{c1} = 2,00 \text{ ‰}$	$f_{yR} = 550 \text{ MN/ m}^2$
$\varepsilon_{cu} = 3,50 \text{ ‰}$	$\varepsilon_{su} = 25 \text{ ‰}$

Tabelle 4.5 Kennwerte der Baustoffe

4.5.2 Bewehrungsermittlung unter Vollast

Der zweifeldrige Plattenstreifen wurde zuerst unter Vollast analysiert. Die ständigen und veränderlichen Lasten, ihre Teilsicherheitsfaktoren und die daraus resultierenden Bemessungswerte der Belastung für den Tragsicherheitsnachweis sind in der Tabelle 4.6 angegeben.

Belastung	g, g₁, q	γ_s	L_d
	[kN/m ²]	[-]	[kN/m ²]
Eigenlast	5,00	1,35	6,75
Ausbaulast	2,00		2,70
Σ Ständige Lasten	7,00		9,45
Nutzlast	3,00	1,50	4,50
Σ Veränderliche Lasten	3,00		4,50
Gesamtlast	10,00		13,95

Tabelle 4.6 Lastaufstellung

Bei der nichtlinearen Traglastberechnung wird die Belastung schrittweise mit Inkrementen von 5% der Gesamtbelastung aufgebracht, wobei in der Nähe des jeweiligen Traglastniveaus die Schrittgrößen automatisch halbiert werden.

Im ersten Teil der Berechnung wurde die Traglast für die zuvor beschriebene Mindestbewehrungsfläche ermittelt. Der erhaltene Traglastfaktor betrug $\lambda_{min} = 0,733$. Im zweiten Teil erfolgte die automatische Bewehrungserhöhung an jenen Stellen, an denen die Stahldehnung die Streckgrenze des Bewehrungsstahls überschritt. Die Vergrößerung der Bewehrung wurde bis zum Erreichen des vorgegebenen Zieltraglastfaktors von $\lambda_{Ziel} = 1,30$ durchgeführt. Der Eingabewert C_1 wurde mit 10 angesetzt. Die Bewehrungsermittlung erfolgte in 12 Schritten. Um den Einfluss aus der Wahl des Eingabewerts C_2 auf die Bewehrungsermittlung festzustellen, wurde die Berechnung mit vier unterschiedlichen C_2 - Werten durchgeführt. Die C_2 - Werte regulieren jene Bereiche, in denen eine Bewehrungssteigerung vorgenommen wird (vgl. Kap. 3.4.3). Die gewählten C_2 -Werte betragen 100, 10, 2,0 und 0,001. Die Ergebnisse aus den Berechnungen sind in Form von Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagrammen im Bild 4.20 dargestellt, wobei der abgebildete Bewehrungsfaktor das Verhältnis zwischen der ermittelten Bewehrungsfläche und der Mindestbewehrung kennzeichnet.

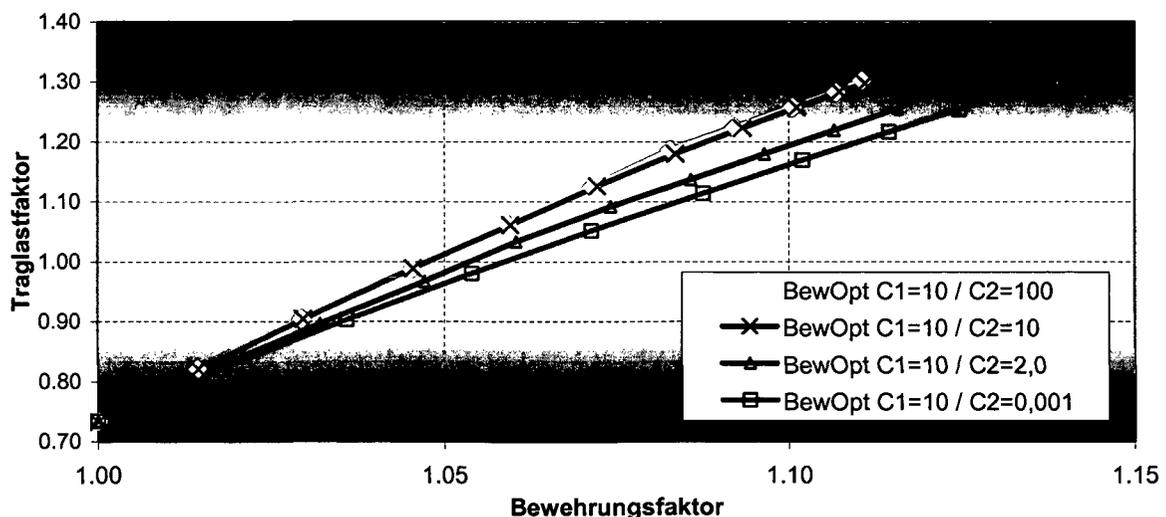


Bild 4.20: Bewehrungs-Traglastfaktor-Diagramm für $C_1 = 10$ und unterschiedliche C_2 -Werte

Bei Erreichen des Ziellastfaktors von $\lambda_{Ziel} = 1,30$ variierten die resultierenden Bewehrungsfaktoren aus den vier Berechnungen zwischen 1,10 und 1,14. Die Mindestbe-

wehrung wurde somit zwischen 11 % und 14 % vergrößert. In den Bildern 4.16 und 4.17 sind die ermittelten Bewehrungsflächen für einzelne Elemente bei $C_2 = 100$ bzw. $C_2 = 0,001$ dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Bewehrungserhöhung stets in denselben Bereichen erfolgt, und zwar an jenen Stellen, an denen die größten Biegemomente auftreten. Dabei können folgende Aussagen getroffen werden:

- Die Bewehrungserhöhung in der oberen Lage tritt in einem ziemlich engen Bereich über der Stütze, wo eigentlich die Momentenspitze unter Volllast eintritt, auf. Der größte Wert weist dabei eine ca. 2,6-fache Vergrößerung der Mindestbewehrung an der maßgebenden Stelle auf (Bild 4.21 oben).

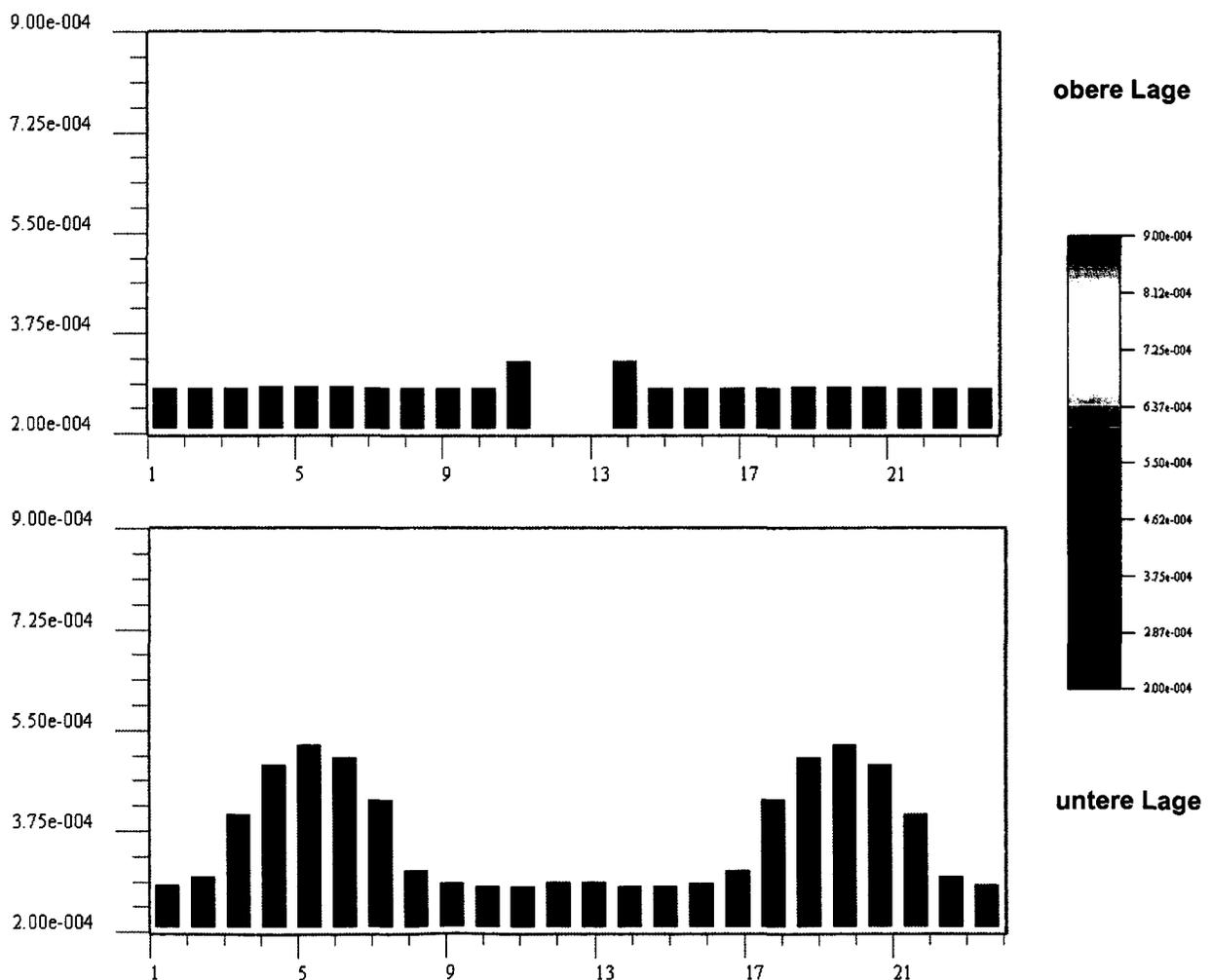


Bild 4.21: Bewehrungsflächen nach der Optimierung für obere(oben) und untere (unten) Bewehrungslagen ($C_1 = 10$; $C_2 = 100$)

- Die Bewehrungserhöhung für die untere Lage erfolgt in einem breiteren Bereich über mehrere Elemente hinweg. Dieser Effekt tritt in beiden Feldern in einer Entfernung entsprechend der 0,4-fachen Spannweite vom Endauflager auf, wo

unter Volllast betragsmäßig die gleichen Feldmomente hervorgerufen werden. Dabei wird eine ca. 1,86-fache Bewehrungserhöhung der Mindestbewehrung erzielt. Es ist noch anzumerken, dass die Bewehrungssteigerung in diesem Bereich ähnlich zur Momentlinie einen annähernd parabelförmigen Verlauf aufweist.

Im Gegensatz dazu ist im Bild 4.22 die Bewehrungsverteilung für einen gewählten Eingabewert $C_2 = 0,001$ dargestellt. In diesem Fall erfolgte die Bewehrungserhöhung in einem weiteren Bereich, in dem die Stahlfließdehnung die Dehnung bei Erreichen der Stahlfließspannung überschritt.

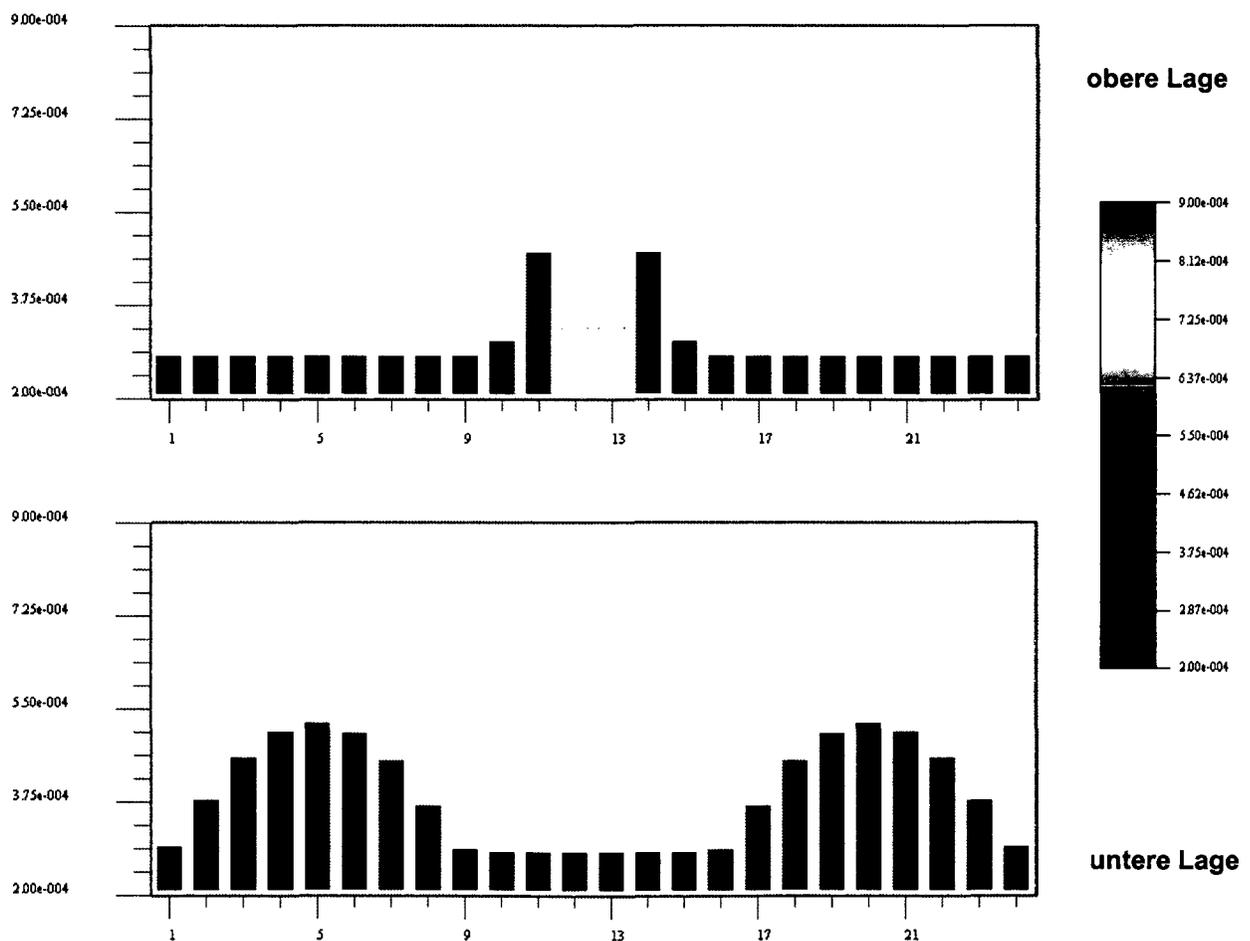


Bild 4.22: Bewehrungsflächen nach der Optimierung für obere(oben) und untere (unten) Bewehrungslagen ($C_1 = 10$, $C_2 = 0,001$)

Der Maximalwert der ermittelten Bewehrung ist im Vergleich zur Bewehrungsermittlung mit dem größeren C_2 – Wert geringer. Die erforderliche Gesamtmenge ist ins-

gesamt aber höher als beim größeren C_2 – Wert. Ein Vergleich Bilder 4.21 und 4.22 bestätigt diese Aussagen. In den Abbildungen kennzeichnet die blaue Farbe die Mindestbewehrung von $2,80 \text{ cm}^2/\text{m}$. Die rote Farbe entspricht einer Bewehrungsfläche von $9,00 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Die Ergebnisse aller vier Berechnungen und die daraus resultierenden Maximalwerte der erforderlichen Bewehrung sind sowohl für den Stützen- als auch für den Feldbereich in der Tabelle 4.7 angegeben. Der erreichte Traglastfaktor λ und die damit verbundenen Bewehrungsfaktoren sind ebenfalls in der Tabelle 4.7 angegeben.

Bewehrungsangabe		Bewehrungsfläche		Traglastfaktor	Bew.Faktor
		$a_{s,\text{Stütze}}$	$a_{s,\text{Feld}}$	λ	
		[cm^2/m]	[cm^2/m]	[-]	[-]
Mindestbewehrung		2,80	2,80	0,733	1,000
optimierte Bewehrung	$C_2 = 0,001$	6,90	5,22	1,309	1,140
	$C_2 = 2,00$	7,35	5,02	1,301	1,126
	$C_2 = 10,00$	6,88	5,29	1,312	1,114
	$C_2 = 100,0$	6,77	5,26	1,302	1,110
lineare Bewehrung		8,71	4,70		

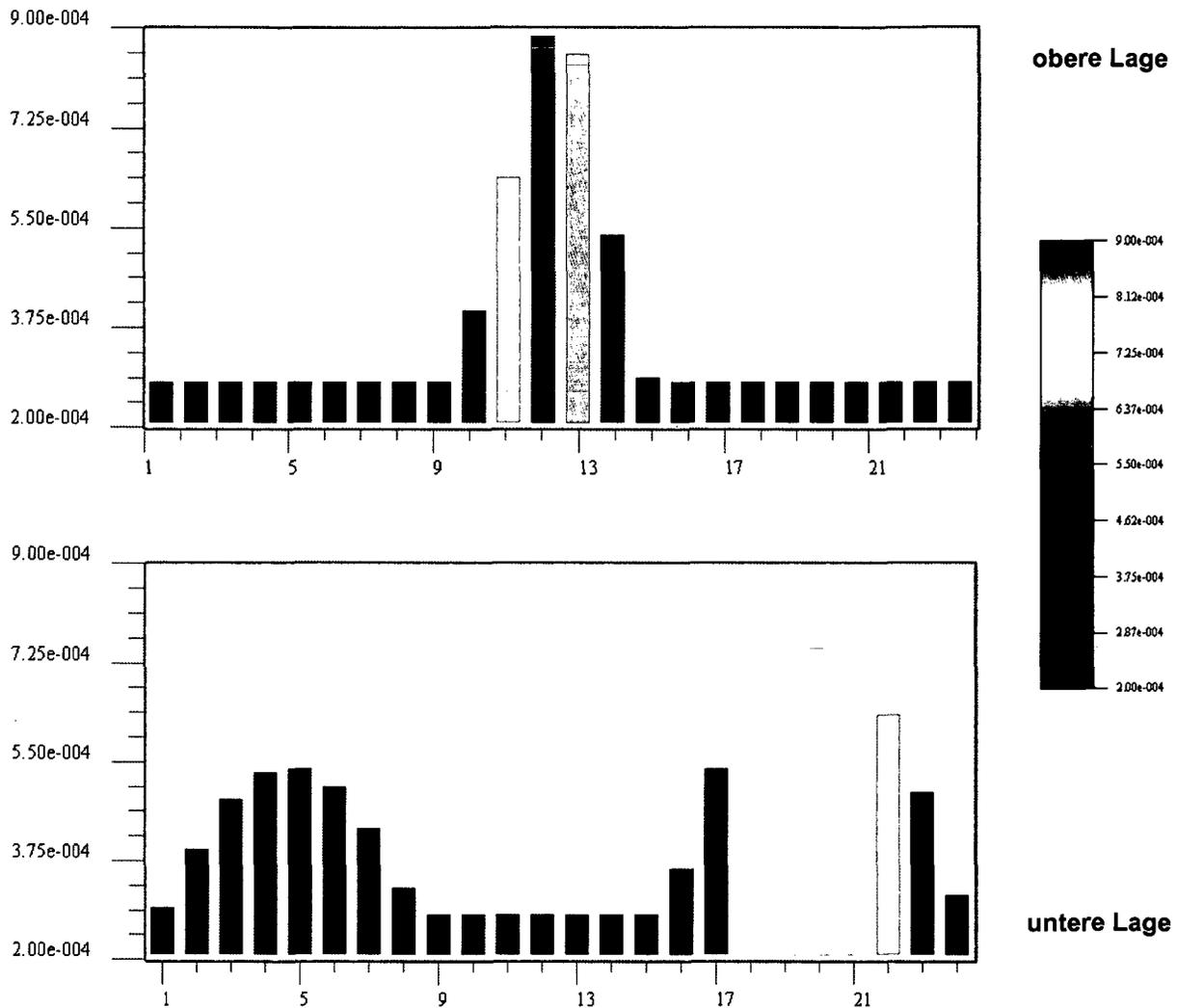
Tabelle 4.7 Bewehrungsflächen für unterschiedliche C_2 - Werte unter Volllast

Ein einfacher Vergleich zwischen der nichtlinear ermittelten Bewehrung und der linearen Bewehrung zeigt keinen großen Unterschied zwischen den Stahlflächen. Nur im Stützenbereich kommt es zu einer Ersparnis an erforderlicher Fläche. Bei einem Plattenstreifen unter Volllast gibt es nur begrenzte Möglichkeiten zur Schnittgrößenumlagerung von der Stütze in die beiden Felder.

4.5.3 Bewehrungsermittlung mit unsymmetrischer Belastung

Bild 4.23 stellt die erforderliche Stahlfläche unter unsymmetrischer Belastung dar, wobei die Nutzlast nur im rechten Feld aufgebracht wurde. Die Berechnung wurde mit den Eingabewerten $C_1 = 10$ und $C_2 = 0,001$ durchgeführt. In diesem Fall tritt im Feld, in dem die Nutzlast wirkt, das größte Moment auf. Demzufolge ist an dieser Stelle auch eine größere Bewehrungsfläche erforderlich (Bild 4.23 unten). Der Maxi-

malwert der erforderlichen Stahlfläche beträgt hier $7,49 \text{ cm}^2/m$. Im Bereich über der Stütze wird eine Bewehrung von $8,88 \text{ cm}^2/m$ benötigt.



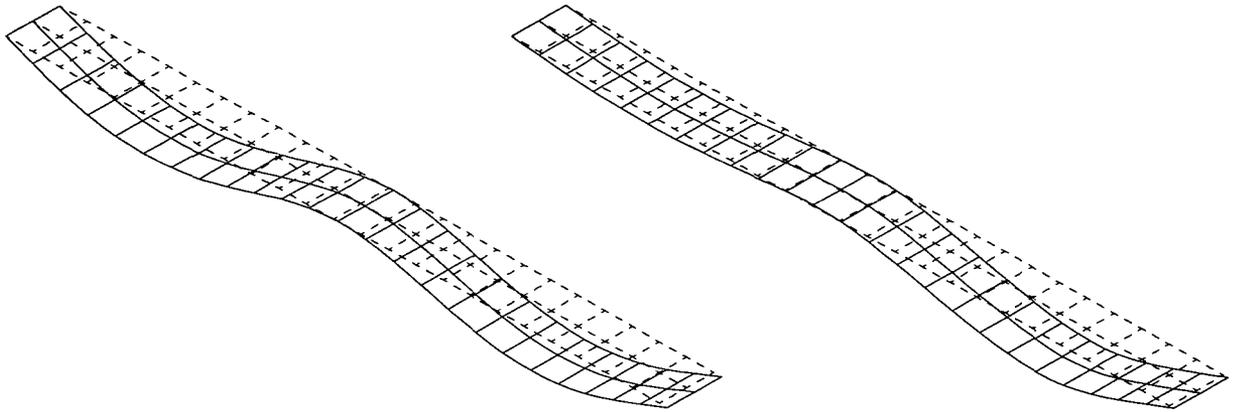


Bild 4.24: Verformungsplots der Plattenstreifen unter Vollast (links) und unsymmetrischer Belastung (rechts)

4.6 Praxisbeispiel (Cardington)

Der Algorithmus zur Bewehrungsoptimierung über die Traglastiteration wird anhand einer gesamten Geschossdecke demonstriert. Für diese Berechnung wird ein in Cardington, England durchgeführtes Experiment gewählt. Dabei handelt es sich um ein an Ort und Stelle betoniertes 6-stöckiges 1:1 Modell eines Bürogebäudes. Eine Ansicht des Modells in der Prüfhalle ist im Bild 4.25 gegeben.

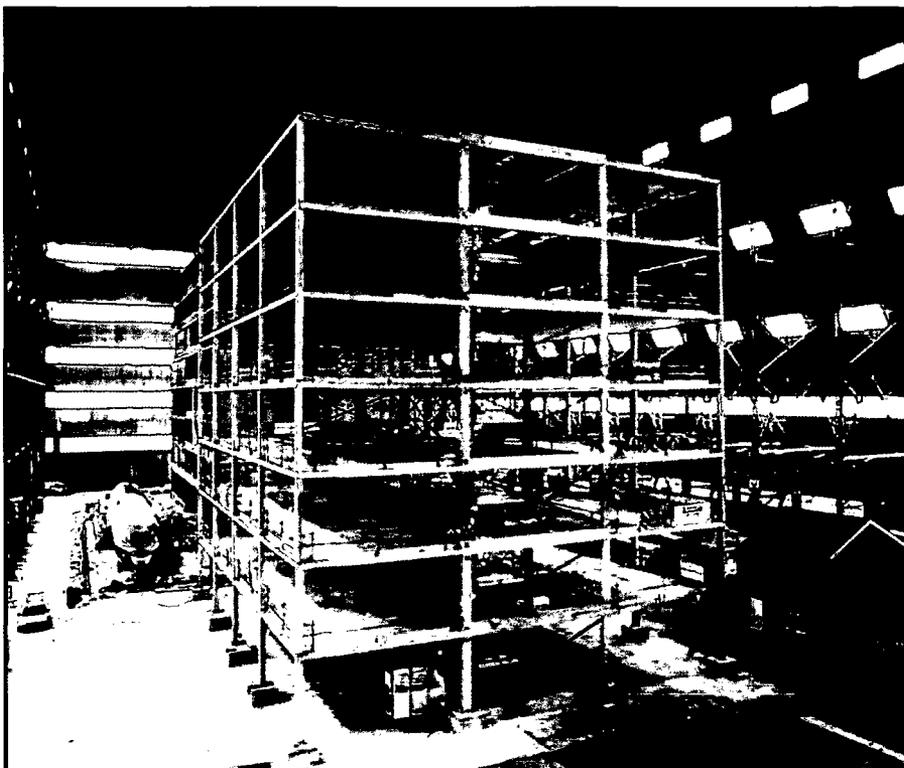


Bild 4.25 Bürogebäude im Labor von Cardington - 1:1 Modell [G2]

Eines der Ziele der an diesem Modell durchgeführten Untersuchungen, die gleichzeitig auch vom European Concrete Building Project [G2] unterstützt wurden, war die möglichst effektive Rationalisierung der erforderlichen Bewehrung in den punktförmig gestützten Platten. In der Regel stellen Flachdecken mit einem Marktanteil von 30 bis 50% einen sehr weit verbreiteten Deckentyp für mehrstöckige Gebäude dar. In diesem Projekt wurde die Bewehrungskonfiguration in jeder der sieben Flachdecken nach unterschiedlichen Bemessungsmethoden wie Elastizitätstheorie, Plastizitätstheorie und Finite-Element Methode berechnet. Das Ziel war es, die effizienteste Konstruktion in wirtschaftlicher und statischer Hinsicht zu finden. Einerseits sollten die eingebauten Bewehrungsmengen so gering wie möglich gehalten werden, andererseits sollte die Bewehrung so gewählt werden, dass sie einfach und rationell eingebaut werden konnte.

4.6.1 Geometrie, Materialeigenschaften und Belastung

Die Flachdecke im sechsten Stockwerk, die zur Bewehrungsoptimierung gewählt wurde, ist mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente berechnet und bemessen worden. Die Decke wurde mit orthogonalen Matten $\varnothing 12/15$ sowohl für die obere als auch für die untere Lage bewehrt. Für die gesamte Decke wurden 25 Tonnen Betonstahl verbraucht, wobei für die eingelegte Bewehrung ein Traglastfaktor von $\lambda_u = 1,51$ erreicht wurde. Der Grundriss des Regelgeschosses und ein Schnitt durch das Gebäude sind im Bild 4.26 dargestellt.

Die äußeren Abmessungen der Flachdecke betragen 30 m in Längsrichtung und $22,5\text{ m}$ in Querrichtung. Der Achsabstand der Stützen betrug in beiden Richtungen $7,50\text{ m}$ und unterteilte das Tragwerk in 12 Felder. Die Dicke der Flachdecke lag bei 25 cm . Die 20 Stützen sind monolithisch mit der Flachdecke verbunden. Die Abmessungen der Innenstützen betragen $40\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ und die Abmessungen der Rand- und Eckstützen $40\text{ cm} \times 25\text{ cm}$. Zusätzlich enthielt die Flachdecke Durchbrüche für ein mögliches Stiegenhaus und einen Aufzug.

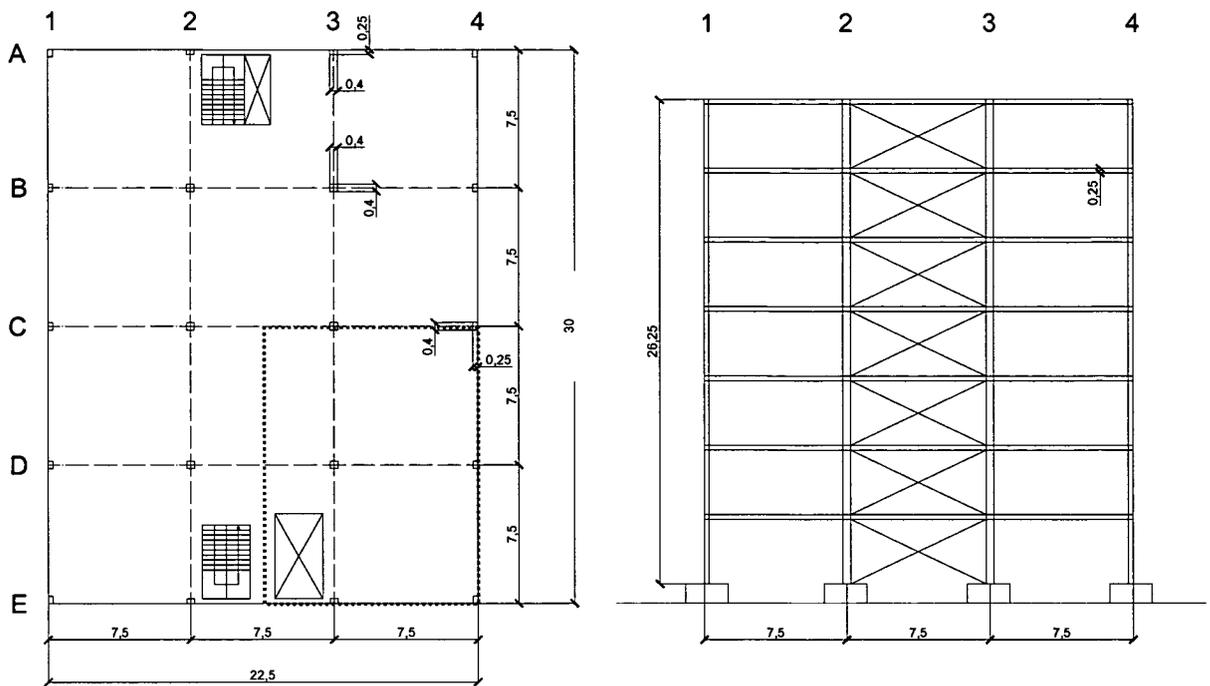


Bild 4.26 Grundriss des Regelschosses und Schnitt [K4]

Bei diesem Projekt wurde für die Decken Beton der Festigkeitsklasse C 30/37 verwendet, wobei nach 28 Tagen 12 Bohrkern pro Stockwerk entnommen wurden, um an ihnen Druckversuche durchzuführen. Die Ergebnisse dieser Messungen sind im Bild 4.27 zusammengefasst.

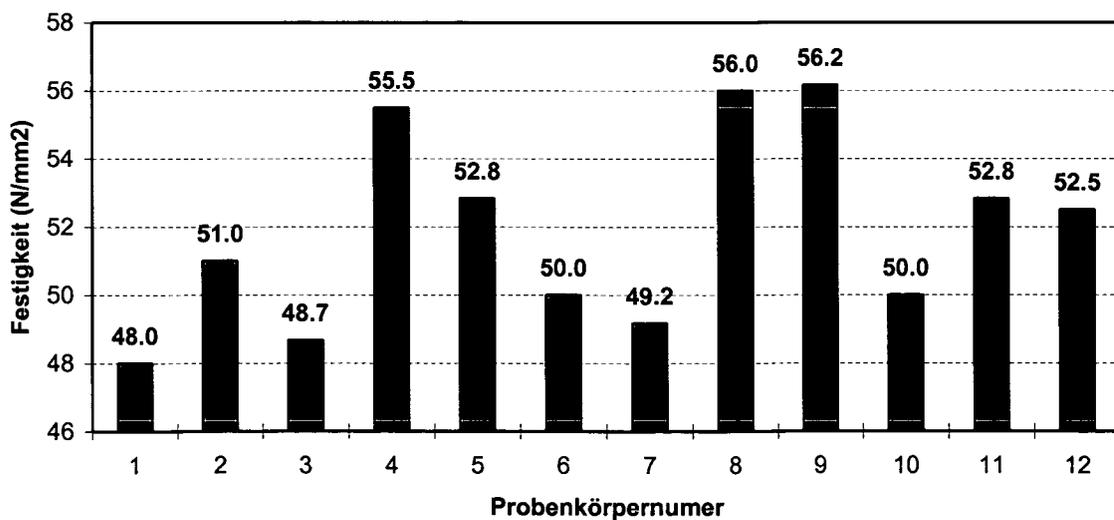


Bild 4.27 Gemessene Druckfestigkeiten des Betons im 6. Stockwerk nach 28 Tagen [G2]

Die in diesen Versuchen bestimmte mittlere Betondruckfestigkeit ergab im Vergleich zu dem in DIN 1045-1 angegebenen Wert mit 38 N/mm^2 eine deutlich höhere Festigkeit von $f_{cm} = 51,9 \text{ N/mm}^2$. Im Folgenden werden die für die nichtlineare Berechnung erforderlichen rechnerischen Werte der Betonfestigkeit und des E-Moduls des Betons mit dem höheren Mittelwert gemäß DIN 1045-1 bestimmt. Die Berechnung des rechnerischen Mittelwerts für den E-Modul von Beton erfolgt unter der Annahme, dass sich der Beton bis zu einer Spannung von $\sigma_c = 0,4 f_{cR}$ linear verhält und bei Erreichen einer Stauchung von $\varepsilon_{c1} = 2,0 \text{ ‰}$ anschließend in eine quadratische Parabel übergeht. Die kritische Betonstauchung ist mit $\varepsilon_{c1u} = 3,5 \text{ ‰}$ begrenzt. Der E-Modul wird somit über die Anfangstangente des Spannungs-Stauchungs-Diagramms über folgende Berechnung bestimmt:

$$f_{ck} = f_{cm} - 8,00 = 51,9 - 8,00 = 43,9 \text{ N/mm}^2 \quad (4.7)$$

$$f_{cR} = 0,85 \cdot f_{ck} = 0,85 \cdot 43,9 = 37,3 \text{ N/mm}^2 \quad (4.8)$$

$$\sigma_{cy} = 0,4 \cdot f_{cR} = 0,4 \cdot 37,3 = 14,9 \text{ N/mm}^2 \quad (4.9)$$

$$E_{cR} = \frac{2 \cdot (f_{cR} - \sigma_{cy}) + \sigma_{cy}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{2 \cdot (37,3 - 14,9) + 14,9}{0,002} = 29.850 \text{ N/mm}^2 \quad (4.10)$$

Im Zugbereich wird nur ein vernachlässigbar kleiner Wert der Betonzugfestigkeit in Rechnung gestellt. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird nicht berücksichtigt.

Als Bewehrungsstahl kommt Stahl BSt 500 zur Anwendung. Für den Stahl wird ein linear-elastisch ideal-plastisches Verhalten ohne Verfestigung angenommen. Der rechnerische Mittelwert für die Streckgrenze wird ebenfalls laut DIN 1045-1 nach Formel (2.11) bestimmt und mit 550 N/mm^2 begrenzt. Die kritische Stahldehnung beträgt $\varepsilon_{su} = 25 \text{ ‰}$.

$$f_{yR} = 1,1 \cdot f_{yk} = 1,1 \cdot 500 = 550 \text{ N/mm}^2 \quad (4.11)$$

Die Materialkennwerte, die bei der nichtlinearen Berechnung verwendet wurden sind in der Tabelle 4.8 zusammengefasst.

Beton C 30/37	Bewehrung BSt 500
$E_{cR} = 29850 \text{ MN/m}^2$	$E_s = 200.000 \text{ MN/m}^2$
$f_{cR} = -37,3 \text{ MN/m}^2$	$E_h = 0 \text{ MN/m}^2$
$f_{ctm} = 0,10 \text{ MN/m}^2$	$f_{yk} = 500 \text{ MN/m}^2$
$\epsilon_{c1} = 2,00 \text{ ‰}$	$f_{yR} = 550 \text{ MN/m}^2$
$\epsilon_{cu} = 3,50 \text{ ‰}$	$\epsilon_{su} = 25 \text{ ‰}$

Tabelle 4.8 Materialeigenschaften der Baustoffe

Die Belastung setzt sich aus der Eigenlast der Platte, einer Ausbaulast von $1,00 \text{ kN/m}^2$, einem Zwischenwandzuschlag von $1,00 \text{ kN/m}^2$ und einer Nutzlast für Bürogebäude von $2,50 \text{ kN/m}^2$ zusammen. Bei der Berechnung der Bemessungslast nach Goodchild in [G2] wurde die Ausbaulast zu den veränderlichen Lasten gezählt. Die Belastung der Decke wurde analog zu [G2] mit folgender Flächenlast angesetzt:

$$L_d = 1,35 \cdot G_k + 1,50 \cdot Q_{k,i} = 1,35 \cdot (0,25 \cdot 25) + 1,50 \cdot (1,0 + 1,0 + 2,5) = 15,19 \text{ kN/m}^2 \quad (4.12)$$

4.6.2 Netzteilung und Bewehrungsgruppen

Um den numerischen Aufwand einzuschränken wurden die Symmetrieeigenschaften der Platte ausgenutzt. Da die Decke doppelsymmetrische Eigenschaften besitzt, genügt es, nur ein Viertel der Platte in Rechnung zu stellen. Das einzige Problem dabei stellten die ungleich großen Deckendurchbrüche für die Stiegenaufgänge und Aufzüge dar. Für das untersuchte Viertel wurde dabei die größte Öffnung in der Flachdecke gewählt. Der untersuchte Plattenteil schloss den Bereich zwischen den Achsen C – E in Längsrichtung und zwischen Achsenmitte 2 – 3 und 4 in Querrichtung ein (Bild 4.25, rot eingerahmt).

Die Geometrie des FE - Netzes bzw. die Elementgröße wurde auf das Stützenraster und den Stützenquerschnitt abgestimmt, wobei die Stützen jeweils einem Element zugeordnet wurden. Das Finite-Element Netz des Viertels setzte sich aus 932 acht-

knotigen Elementen zusammen. Bild 4.28 zeigt die Netzteilung und die Randbedingungen des modellierten Deckenviertels.

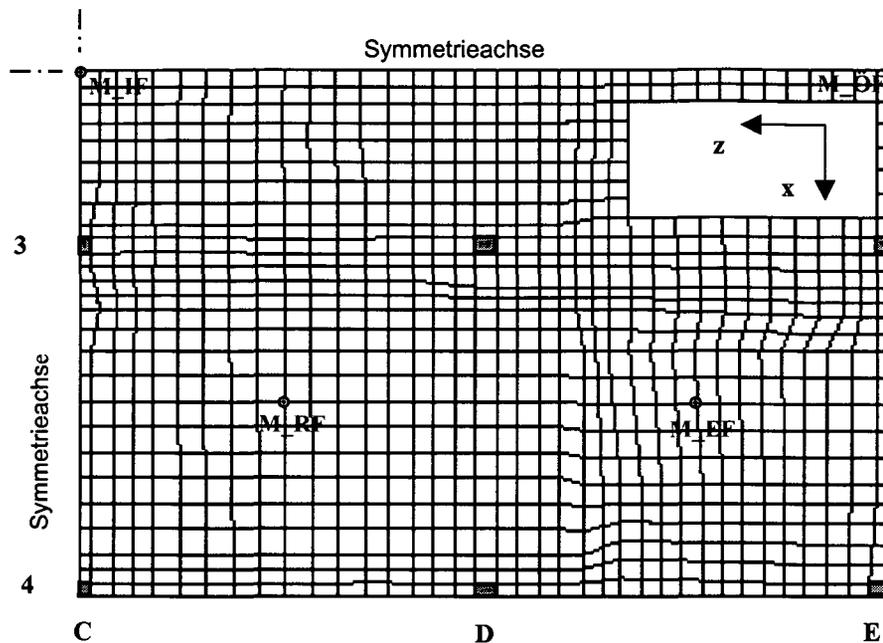


Bild 4.28 Netzteilung und Randbedingungen der Vierteldecke

Für die Berechnung wurden geschichtete isoparametrische Schalenelemente gewählt. Die Unterteilung der Plattenelemente über die Höhe erfolgte in 16 Schichten, von denen 14 dem Beton und 2 dem Stahl zugewiesen wurden.

Um die Modellierung einerseits der Bemessung anzunähern, und andererseits die Bereiche mit den zu erwartenden Schnittgrößenextrema entsprechend abzudecken, wurde die Plattenmittelfläche in 16 Bewehrungsfelder unterteilt. Davon entfielen 6 Felder auf die Bewehrung an der Oberseite und 10 Felder auf die Bewehrung an der Unterseite.

Zur Definition der Widmung der Bewehrungsfelder wurden jene Bereiche aus den Plänen ausgewählt, die als Zonen mit notwendigen und quantitativ erwähnenswerten Stahlzulagen ausgewiesen waren [V2]. Die Längen der Zulagen wurden um die jeweilige Verankerungslänge verkürzt, da Bereiche mit noch nicht voll verankerten Bewehrungsstäben für die Berechnung nicht berücksichtigt werden sollten. Eine schematische Darstellung der Bereiche mit den Zulagen in der oberen und unteren Lage für das Plattenviertel ist im Bild 4.29 zu sehen.

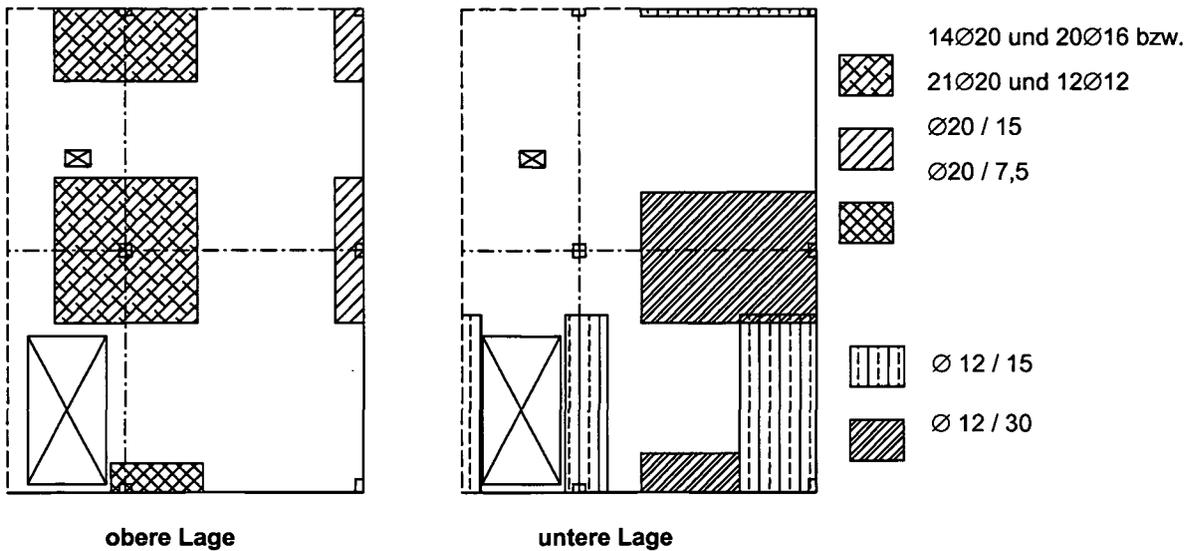


Bild 4.29 Bereiche mit Zulagen in der oberen und unteren Lage im Versuch [K4]

Die Festlegung der Bewehrungsfelder für den Optimierungsprozess entspricht den tatsächlichen Zulagebereichen für die obere und untere Bewehrungslage die in den Bildern 4.25 a) und b) dargestellt sind. Zur Vereinfachung wurden all jenen Bereichen, denen keine expliziten Zulagen zugewiesen wurden, eine einzige Bewehrungsgruppe zugeordnet. Die aufgrund der plastischen Verzerrungsmaxima erforderlichen Bewehrungsinckremente werden somit jedem Bemessungselement der Gruppe im gleichen Maße zugewiesen.

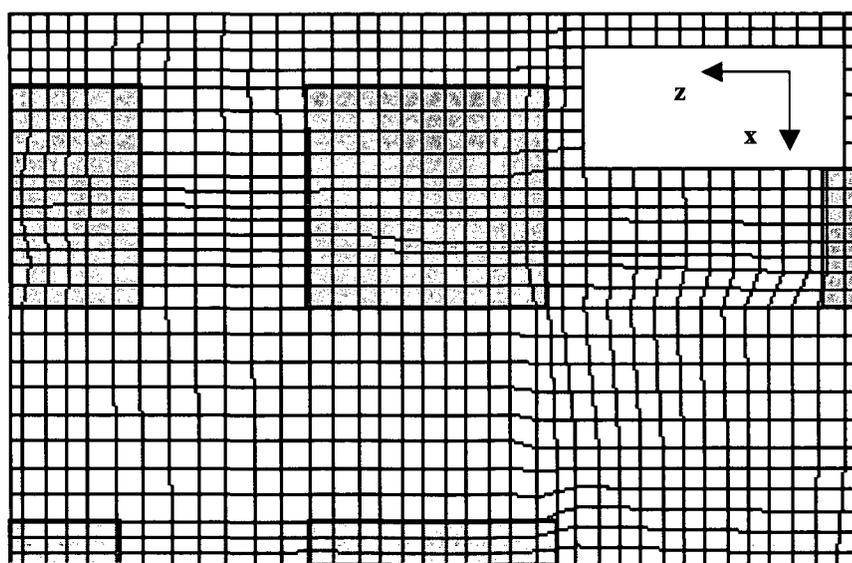


Bild 4.30: a) Festlegung der Bewehrungsfelder der obere Lage

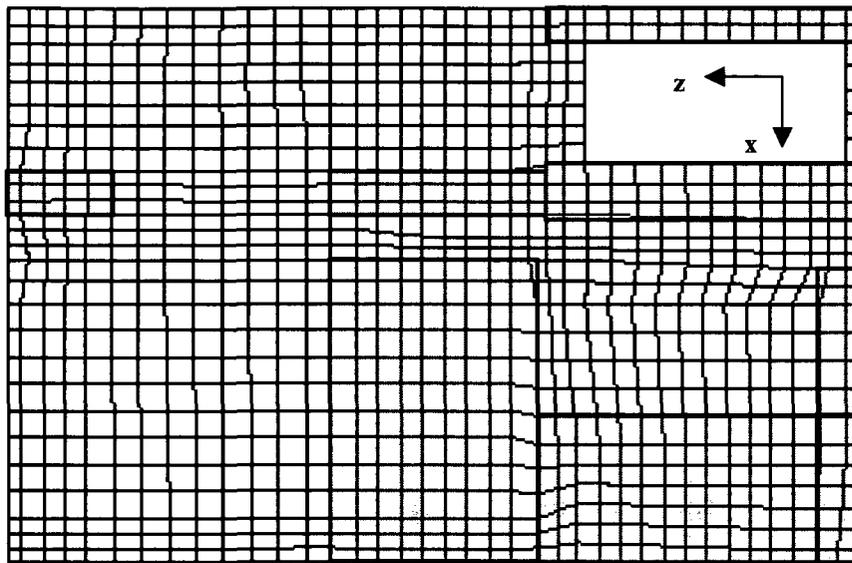


Bild 4.30: b) Festlegung der Bewehrungsfelder der unteren Lage

4.6.3 Nichtlineare Bewehrungsermittlung

Die Bewehrungsoptimierung der Cardington-Platte wurde mit der Methode der Traglastiteration durchgeführt. Die wichtigsten Eingangsdaten für den Optimierungsprozess sind die Anfangsbewehrung der Decke sowie die Parameter C_1 und C_2 für die Größe bzw. Aufteilung der einzelnen Bewehrungsinkremente.

Als Startbewehrung für die Traglastiteration wurde die Mindestbewehrung für auf Biegung beanspruchte Bauteile gewählt und nach Formel (2.19) berechnet. Diese Bewehrung betrug $3,50 \text{ cm}^2/\text{m}$ und wurde durch eine äquivalente Stahlschicht auf einer mittleren Höhe von $9,30 \text{ cm}$ über bzw. unter der Mittellinie der Platte je Lage und Richtung ersetzt.

Für den Eingabewert C_1 , der die Größe der Inkremente und die Anzahl der in Abhängigkeit von erreichten Traglastfaktor die notwendigen Iterationsschritte steuert, wurde ein Wert von $C_1 = -0,5$ gewählt. Diese Annahme sollte gewährleisten, dass je Iterationsschritt definitionsgemäß ziemlich hohe Beträge an Stahlinkrementen zugelegt werden sollten, um den angestrebten Zieltraglastfaktor $\lambda_{\text{Ziel}} = 1,30$ in einer, den Umständen entsprechend, akzeptablen Zeit zu erreichen.

Mit dem Parameter C_2 lässt sich die Aufteilung der Bewehrungsinkremente regulieren. Bei größeren Werten von C_2 ($C_2 \geq 1,0$) wirkt sich die Bewehrungserhöhung auf

jene Felder, in denen die Bereiche mit Stahldehnungen von $\varepsilon_{s(i),max}$ bezogen auf das Gesamtfeld ein Maximum aufweisen, aus. Für die Bewehrungsoptimierung der Geschosdecke wird ein Wert von $C_2 = 1$ gewählt.

Der Verlauf des Optimierungsprozesses inklusive Darstellung der entsprechenden bezüglich Optimierungsfaktoren und erreichten Traglastfaktoren für die einzelnen Optimierungsschritte ist im Diagramm im Bild 4.31 zu sehen: die Optimierungsrechnung wurde in 19 Schritten vollzogen; im Diagramm beschreibt der Bewehrungsfaktor (Säulen) das Verhältnis der in dem Schritt berechneten Bewehrungsfläche zur Mindestbewehrung; jeder Bewehrungsfläche entspricht gleichzeitig auch einem vom System erreichten Traglastfaktor (blaue Linie).

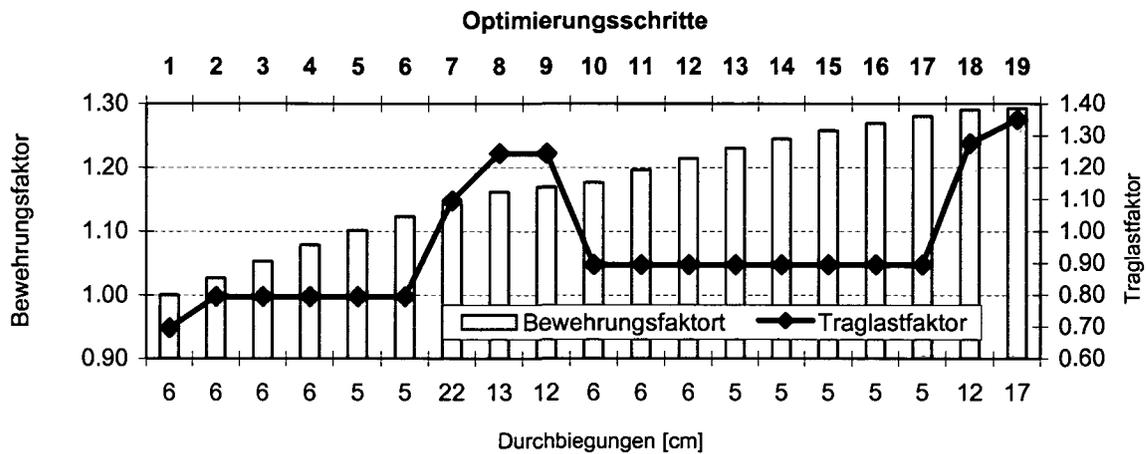


Bild 4.31: Verlauf des Optimierungsvorganges mit 3,5 cm²/m als Startbewehrung

Die Abhängigkeit des Optimierungsverlaufes von der Anfangsbewehrung ist in den nächsten Diagrammen in den Bildern 4.32 und 4.33 zu sehen. Das Diagramm im Bild 4.32 präsentiert die Optimierung der Bewehrung bei einem kleineren Wert für die Startfläche von 3,00 cm²/m.

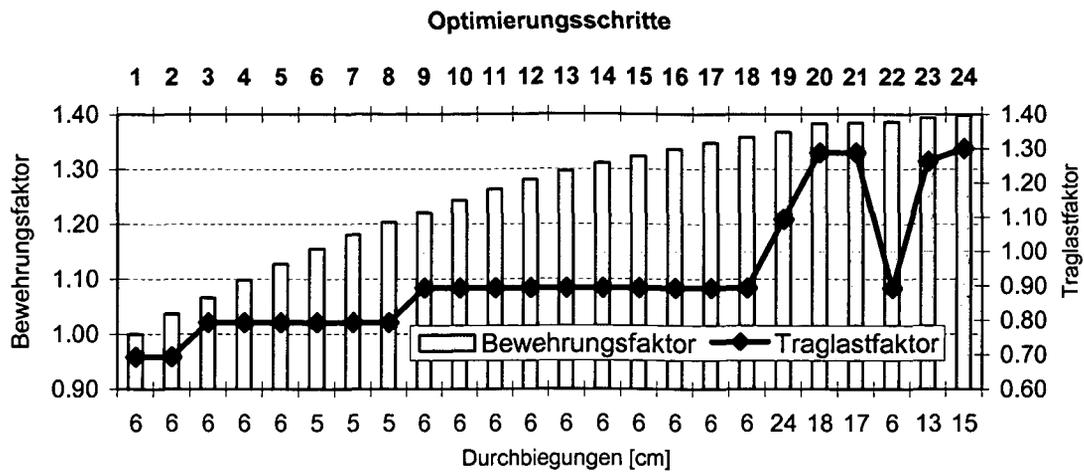


Bild 4.32: Verlauf des Optimierungsvorganges mit 3,0 cm²/m als Startbewehrung

Die Darstellung des berechneten Bewehrungsfaktors bezieht sich wieder auf den Anfangswert der Bewehrungsfläche. Der Bewehrungsprozess wird dabei nach Erreichen eines Lastfaktors größer oder gleich dem Zieltraglastfaktor $\lambda_{Ziel} = 1,30$ sofort abgebrochen. Für eine Startbewehrung von 3,00 cm²/m wurde die Optimierung bei einem Faktor von $\lambda = 1,30$ abgebrochen. Das erforderliche Bewehrungsgewicht lag bei 21,05 Tonnen. Die Bewehrungsoptimierung wurde genau beim Erreichen des Werts $\lambda = 1,35$ mit einer Anfangsbewehrung von 3,50 cm²/m abgebrochen. Das Gewicht der Bewehrung betrug in diesem Fall 22,34 Tonnen.

Eine Zusammenfassung der drei durchgeführten Berechnungen mit unterschiedlichen Startbewehrungsflächen für den Optimierungsprozess ist in der Tabelle 4.9. gezeigt.

Startbewehrungsfläche		3,00	3,50	[cm ² /m]
Startwerte	Traglastfaktor - λ	0,694	0,694	[-]
	Bew. Faktor	1,00	1,00	[-]
	Bew. Gewicht	15,06	17,28	[kN]
optimierte Werte	Traglastfaktor - λ	1,30	1,35	[-]
	Bew. Faktor	1,398	1,293	[-]
	Bew. Gewicht	21,05	22,34	[kN]
	Durchbiegung	14,61	16,97	[cm]

Tabelle 4.9: Zusammenfassung der Startwerte und optimierte Werte

Die qualitative und quantitative Darstellung der Bewehrungsverteilung in der Platte nach Erreichen des Zieltraglastfaktors bei der Optimierung mit Startbewehrung von $3,50 \text{ cm}^2/\text{m}$ ist im Bild 4.33 dargestellt. Die Bewehrungsflächen für die obere und untere Lage sind für beide Richtungen getrennt gezeigt, wobei die blaue Farbe die Mindestbewehrungsfläche von $3,50 \text{ cm}^2/\text{m}$ und die rote Farbe die maximal berechnete Bewehrungsfläche von $15,65 \text{ cm}^2/\text{m}$ charakterisiert. Der Vergleich zwischen der optimierten und der tatsächlich im Versuch ausgeführten Bewehrung lässt sich folgendermaßen beschreiben:

➤ Untere Bewehrungslage

In relativ großen Bereichen ist keine Verstärkung des Bewehrungsgrundnetzes, welches der Mindestbewehrung entspricht, aus Gründen der Tragsicherheit erforderlich. Die Bewehrungsmenge für die im Bild 4.30 b) definierten Bewehrungsfelder in der unteren Lage bleibt nach dem Optimierungsvorgang praktisch unverändert. Eine Ausnahme bildet nur das Feld direkt neben der Plattenöffnung. An diesem Rand befindet sich die Symmetrieachse, die auf eine weitere Öffnung (für das Stiegenhaus) in unmittelbare Nähe hindeutet. Die erforderliche Bewehrungsfläche beträgt an dieser Stelle $11,88 \text{ cm}^2/\text{m}$ und liegt damit etwas unter der tatsächlich im Versuch eingebauten Fläche von $14,5 \text{ cm}^2/\text{m}$. Eine Erhöhung der Mindestfläche kann nur durch die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit (Durchbiegungen, Rissbreitenbeschränkung) erforderlich werden.

➤ Obere Bewehrungslage

Wie in den oberen Diagrammen im Bild 4.33 zu sehen ist, kommt es bei der Bewehrungsoptimierung im Stützenbereich erwartungsgemäß zu einer Erhöhung der Mindestbewehrung. Die optimierte Fläche weist ihr Maximum bei der am stärksten belasteten Innenstütze C-3 mit $15,65 \text{ cm}^2/\text{m}$ (rot) auf. Die tatsächlich verlegte Bewehrungsfläche lag im Versuch bei $26,2 \text{ cm}^2/\text{m}$ bei allen Stützen. An der Innenstütze D-3 sind $13,67 \text{ cm}^2/\text{m}$ erforderlich. In den anderen Stützenbereichen wurde die Anfangsbewehrungsfläche um das ca. 2,5-fache erhöht.

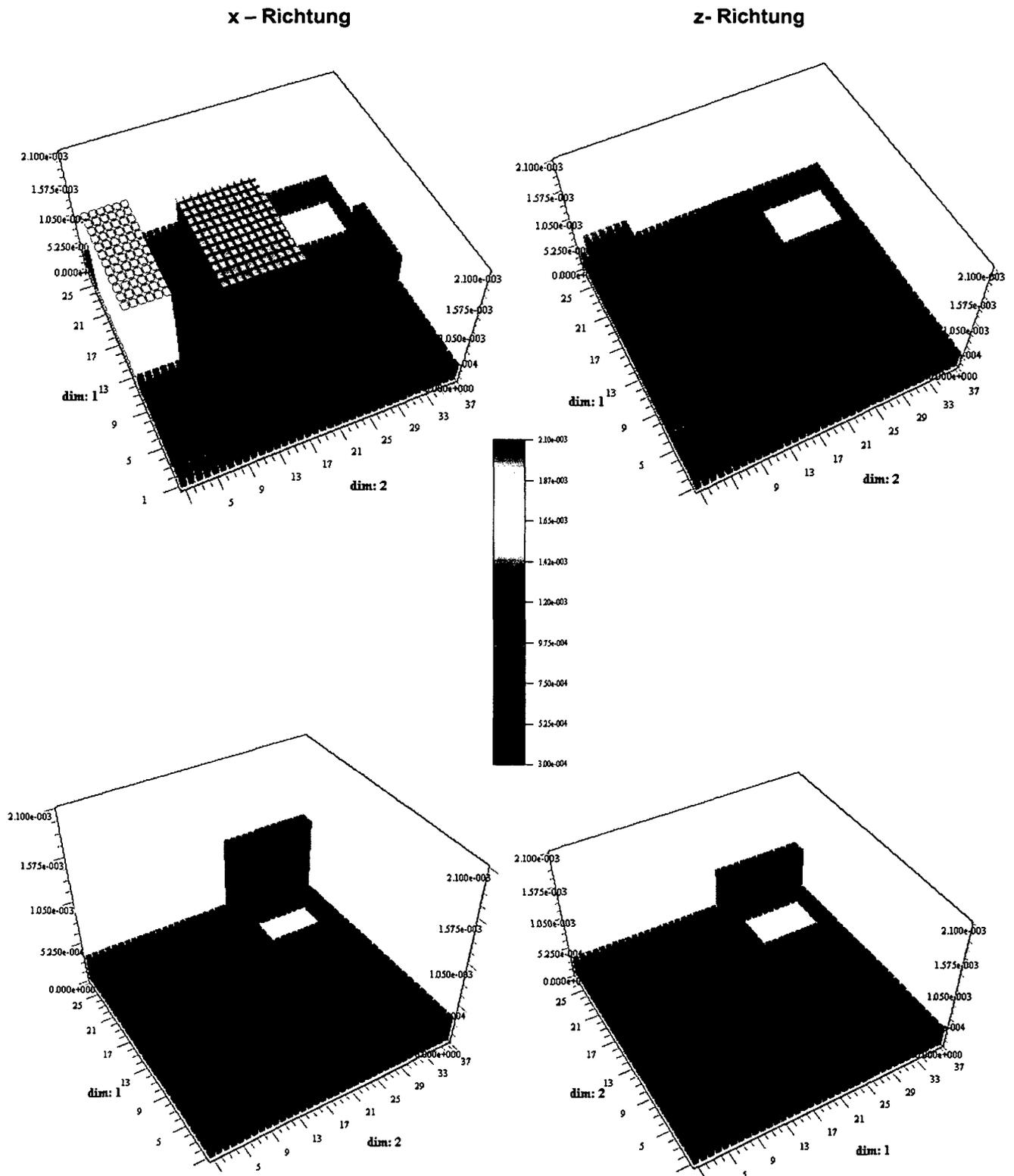


Bild 4.33: Optimierte Bewehrungsflächen für die obere Lage (oben) und untere Lage (unten) bei einer Startbewehrung von $3,5 \text{ cm}^2/\text{m}$

Eine Gegenüberstellung der Bewehrungsflächen nach der Optimierung mit der ausgeführten Decke ist für einige ausgewählte Bewehrungsfelder in der Tabelle 4.10 aufgelistet.

Bew. Lage	Richtung	obere					untere	
Bereich		D-3	C-3	C-4	D-4	E-4	gesamt	Öffnung
Opt. Bew. Fläche	x	13.67	15.65	3.50	8.87	7.81	3.5	11.88
	z	9.99	13.05	8.22	8.74	3.50	3.5	9.97
Tats. Bew. Fläche	x	26.20	26.20	7.54	7.54	45.20	7.54	7.54
	z	26.20	26.20	27.10	27.10	9.70	7.54	14.50

Tabelle 4.10: Gegenüberstellung der Aufteilung der Bewehrungsfläche [cm^2/m]

Eine qualitative Darstellung für die typische Rissverteilung in der Flachdecke unter gleichmäßiger Belastung zeigt das Bild 4.34. Die Darstellung entspricht dem Rissbild an der Plattenoberseite bei Erreichen eines Zieltraglastfaktors von $\lambda_{\text{Ziel}} = 1,30$.

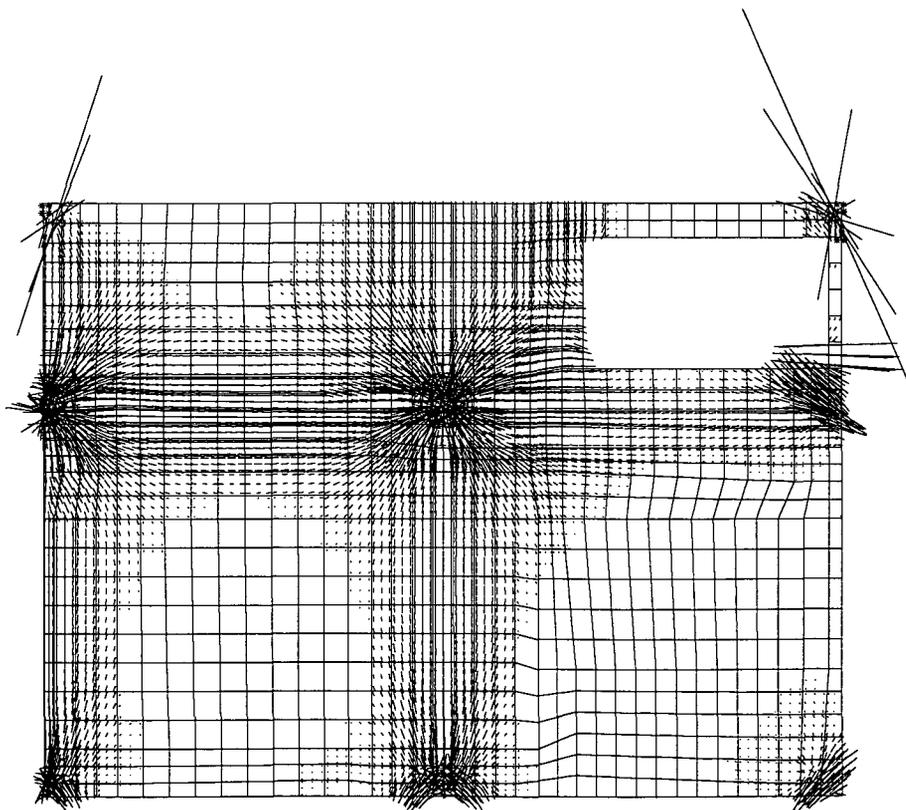


Bild 4.34: Rissbild der Plattenoberseite bei $\lambda_{\text{Ziel}} = 1,30$

Der Verformungsplot des Plattenviertels mit optimierter Stahlfläche ist für den Zieltraglastfaktor mit $\lambda = 1,30$ im Bild 4.35 dargestellt.

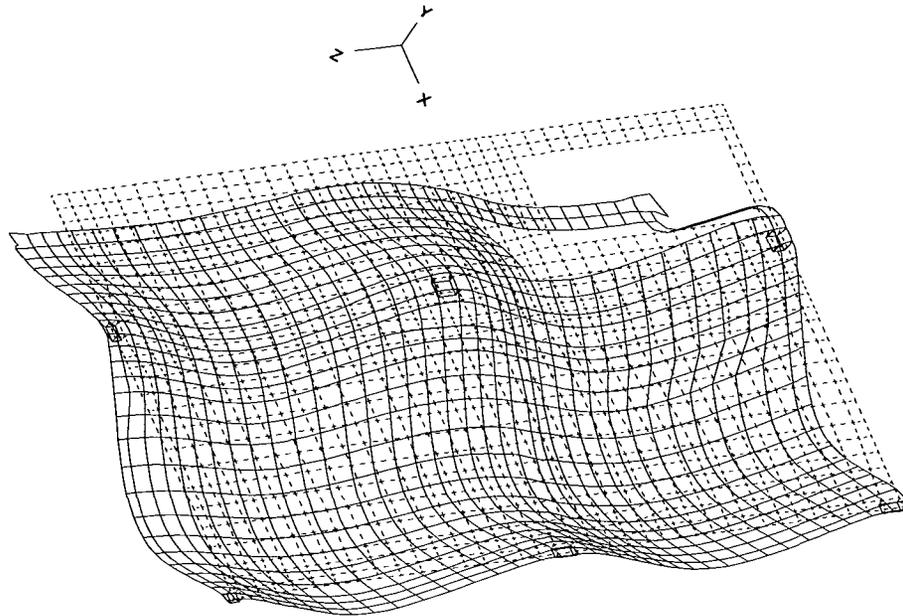


Bild 4.35: Verschiebungsbild für das Tragwerk mit optimierten Bewehrung nach der Ermittlung mit Startbewehrung von $3,50 \text{ cm}^2/\text{m}$ bei $\lambda = 1,30$

4.6.4 Vergleich der Ergebnisse der nichtlinearen Berechnungen

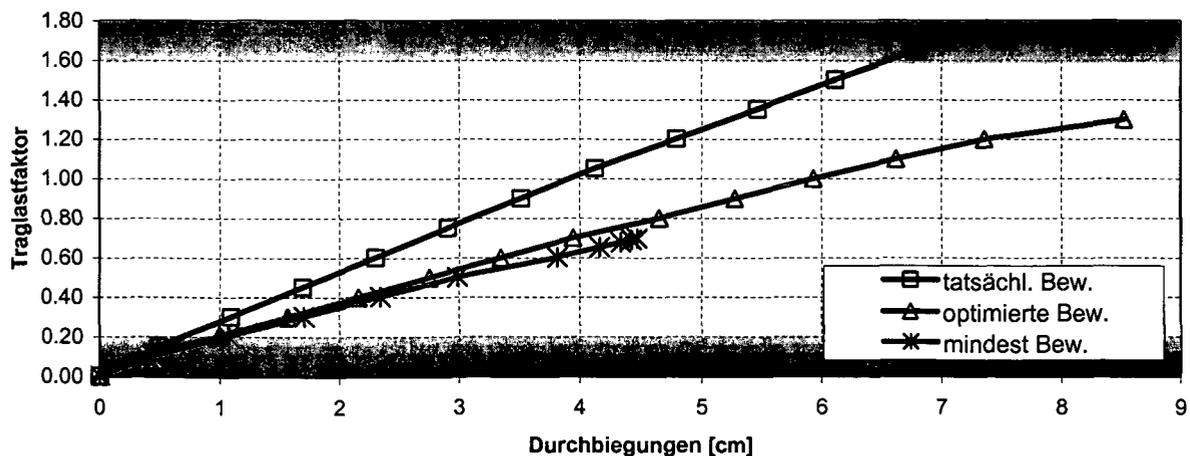
Die Cardington - Platte wurde auch mit der tatsächlich verlegten Bewehrung nichtlinear analysiert. Der erreichte Systemtraglastfaktor bei dieser Berechnung lag bei $\lambda_u = 1,75$, was einer Last von $26,58 \text{ kN/m}^2$ gleichgesetzt werden konnte.

Die Ergebnisse aller drei Plattenanalysen mit Mindestbewehrung, optimierter Bewehrung und tatsächlich verlegter Bewehrungsfläche sind in den Last-Verschiebungs-Diagrammen im Bild 4.36 dargestellt. Die Verschiebungen an vier verschiedenen Beobachtungspunkten - in der Mitte des Eckfelds (M_EF) (Bild 4.36 a)), in der Mitte des Randfelds (M_RF) (Bild 4.36 b)), in der Mitte des Innenfeldes (M_IF) (Bild 4.36 C)) und neben der Öffnung (M_ÖF) (Bild 4.36 d)) sind in Abhängigkeit vom Traglastfaktor für alle drei Analysen dargestellt. Die ausgewählten Punkte sind auch im Bild 4.28 eingetragen (rot).

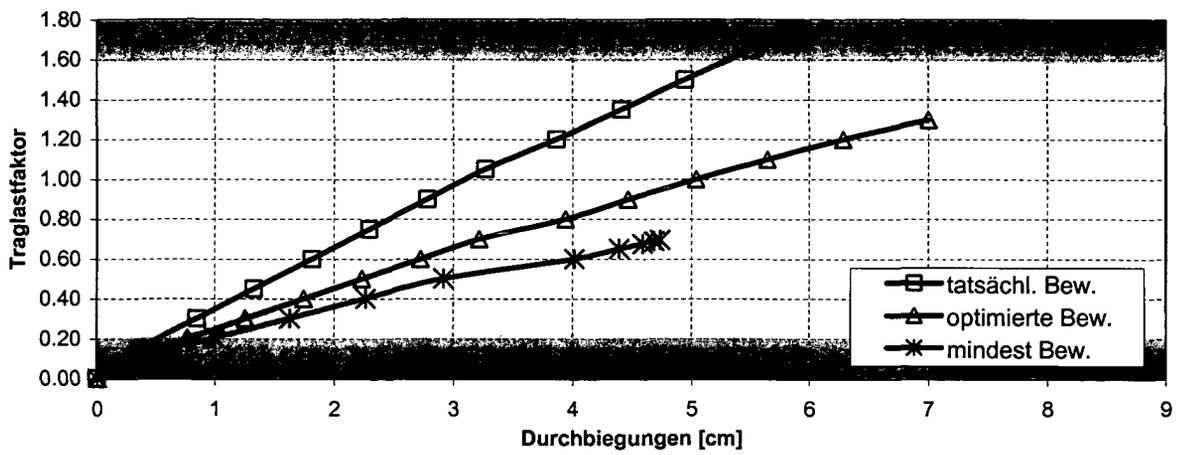
Im Falle einer nichtlinearen Berechnung mit tatsächlicher Bewehrung weist die Platte bei Erreichen des Traglastfaktors von $\lambda_u = 1,753$ erwartungsgemäß ihre größten Durchbiegungen im Eckfeld (Bild 4.36 a)) auf. Bei der Berechnung in [G1] erreicht der Traglastfaktor einen Wert von $\lambda_u = 1,51$ bezogen auf die Bemessungslast von $14,7 \text{ kN/m}^2$, was einer Gleichlast von $22,20 \text{ kN/m}^2$ entspricht. Die Differenz zwischen beiden Berechnungen lässt sich einerseits auf die unterschiedlichen Modelle, andererseits auf die unterschiedlichen Werte für die mittlere Betondruckfestigkeit und den E-Modul des Betons zurückführen. Nach Goodchild wurde das Plattenviertel außer der Flächenlast von $14,7 \text{ kN/m}^2$ zusätzlich noch mit einer Linienlast von $11,95 \text{ kN/m}$ entlang des Längs- und $9,75 \text{ kN/m}$ entlang des Querrandes belastet.

Die Analyse mit der optimierten Bewehrungsfläche zeigt im Vergleich zum Verhalten mit der tatsächlich verlegten Bewehrung bei Erreichen eines Lastfaktors von $\lambda = 1,30$ bereits einen messbaren Zuwachs an Durchbiegungen. Die vertikalen Verschiebungen an der Öffnung weisen dabei einen großen Sprung auf (Bild 4.36 d)). Eine Ursache könnte in der mangelnden Zulage von Bewehrung während der Optimierung (siehe Tabelle 4.10) in z-Richtung im schwachen Plattenbereich liegen.

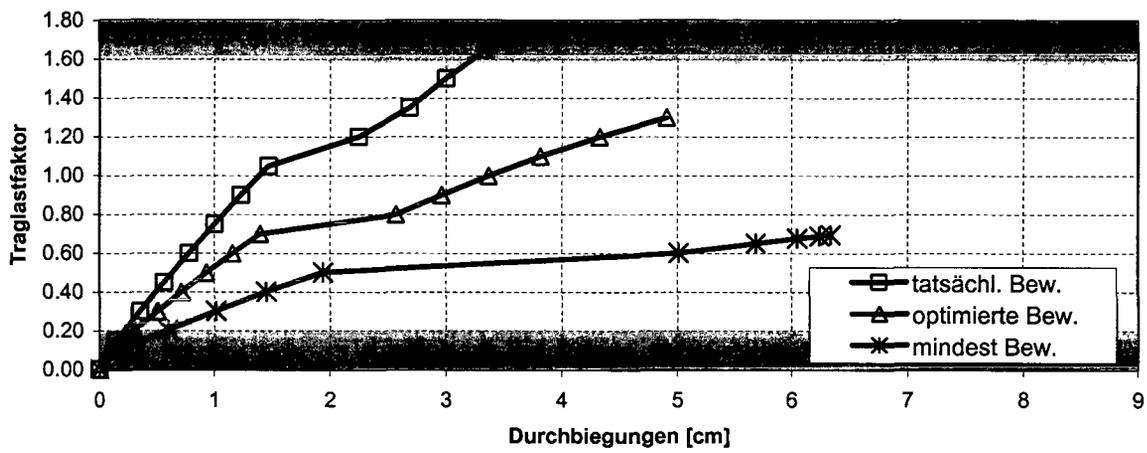
Die nichtlineare Berechnung der Platte mit Mindestbewehrung liefert einen Traglastfaktor von $\lambda = 0,694$, wobei diesmal die größten vertikalen Verschiebungen an den Innenfeldmittelpunkt erzielt wird (Bild 4.36 c)).



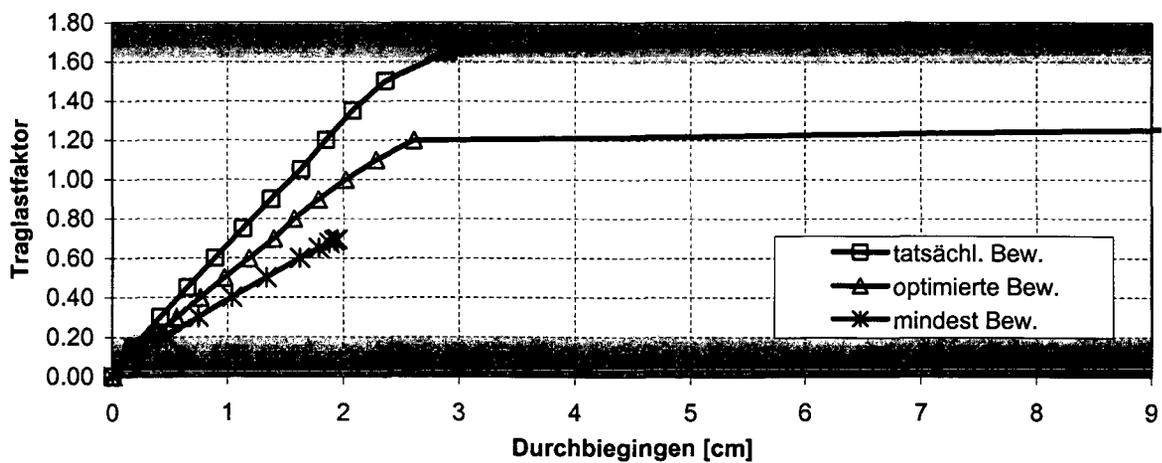
a) Mitte Eckfeld (M_EF)



b) Mitte Randfeld (M_RF)



c) Mitte Innenfeld (M_IF)



d) Mitte Feld mit Öffnung (M_ÖF)

Bild 4.36: Last-Verschiebungs-Diagramme für vier Beobachtungspunkte

Ein Vergleich der Durchbiegungen an den ausgewählten Beobachtungspunkten ist in der Tabelle 4.11 angegeben. Es ist sinnvoll diesen Vergleich für das Lastniveau entsprechend dem Gebrauchstauglichkeitsnachweis anzustellen. Der Kombinationsbeiwert ψ_2 des quasi-ständig wirkenden Anteils der veränderlichen Last von $2,5 \text{ kN/m}^2$ wurde mit 0,3 (Nutzlasten auf die Decken in den Büroräumen) angenommen. Damit ergibt sich eine Dauerlast von $9,0 \text{ kN/m}^2$.

$$L_D = \sum_j G_{k,j} + \sum_i (\psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}) = (0,25 \cdot 25 + 1,00 + 1,00) + 0,3 \cdot 2,5 = 9,0 \text{ kN/m}^2 \quad (4.13)$$

Bezieht man diesen Wert auf die Bemessungslast von $L_d = 15,19 \text{ kN/m}^2$, ergibt sich ein Lastniveau von zirka $0,6 \cdot L_d$, was einem Traglastfaktor von $\lambda = 0,6$ entspricht.

Bewehrungsfläche	Durchbiegungen für $\lambda = 0,6$ [cm]				Lastfaktor	Stahlgewicht [t]		Anteil
	M_EF	M_RF	M_IF	M_ÖF	λ	Viertel	gesamt	[%]
Mindestbewehrung (3,50cm ² /m)	3,81	4,02	5,01	1,62	0,69			
Optimierte Bewehrung	3,34	2,73	1,16	1,18	1,35	2,28	9,12	42%
Stat. erford. Bewehrung (Versuch)	2,30	1,81	0,78	0,89	1,75	5,38	21,52	100%
Ausgeführte Bewehrung (Versuch)							25,00	

Tabelle 4.11: Vergleich der Durchbiegungen und des Stahlgewichts

Abschließend kann das Stahlgewicht aus den einzelnen Berechnungen miteinander wie folgt verglichen werden: Die Bewehrung der Decke wog im Versuch 25 t. Die nichtlineare Berechnung mit der Bewehrung aus dem Versuch, aber ohne Übergreifungslängen und ohne konstruktive Bewehrung, ist in Tabelle 4.11 unter „Stat. erford. Bewehrung (Versuch)“ angeführt. Die erreichte Traglastfaktoren für die entsprechenden Bewehrungsflächen sind in der fünften Spalte dieser Tabelle angegeben.

Die Algorithmus zur automatischen Traglastiteration und Erhöhung der Bewehrungsfläche liefert eine Bewehrung, die nur 42% der statisch erforderlichen Stahlmenge aus dem Versuch ergab. Mit diesem Algorithmus konnten somit 58% an statisch erforderlicher Bewehrung eingespart werden.

KAPITEL 5

SCHLUSSBEMERKUNGEN, AUSBLICK

Platten sind die weitaus verbreitetsten Tragelemente des Stahlbetonbaus. Viele Wissenschaftler haben sich mit der Problematik einer effizienten Bewehrungsermittlung dieser Bauteile beschäftigt. Dazu werden heute in der Praxis häufig physikalisch lineare Finite-Element Programme eingesetzt. Die lineare Berechnung mit und ohne anschließender Schnittgrößenumlagerung liefert oft sehr hohe Bewehrungsmengen und daher überdimensionierte Tragwerke. Tragreserven in Stahlbetonplatten, die im Vergleich zu Stabtragwerken innerlich mehrfach statisch unbestimmt sind, werden bei dieser Vorgehensweise in der Regel nicht ausgenutzt. Eine realitätsnahe Bemessung dieser Flächentragwerke kann unter Anwendung nichtlinearer Finite-Element Berechnungen erreicht werden. Diese Methode ermöglicht die Erfassung der nichtlinearen Stahlbetoneigenschaften im Nachrissbereich unter wirklichkeitsgetreuer Simulation der lastabhängigen Steifigkeit des Tragwerks.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Stahlbetonplatten aus dem Hochbau unter Anwendung nichtlinearer Finite-Element Berechnungen untersucht und bemessen.

Zunächst wurden die allgemeinen Grundlagen der Plattentheorie und die Berechnung der auftretenden Schnittgrößen in einem Plattenelement unter gleichmäßig verteilter Flächenlast behandelt. Dabei bilden die Biege- und Drillmomente den Biegespannungszustand, sofern die Platte senkrecht zu ihrer Mittelfläche beansprucht wird. Stahlbetonplatten weisen im gerissenen Zustand Verzerrungen in ihrer Mittelebene auf, wodurch bereits bei kleinen Verformungen Membrandruckkräfte in den

gerissenen Bereichen hervorgerufen werden. Infolge der Überlagerung von Biege- und Membranspannungszustand können die Platten eine höhere Traglast als unter reiner Biegebeanspruchung aufnehmen. Die entstehende Druckkraft kann im Vergleich zur linearen Bemessung zu einer Verminderung der erforderlichen Bewehrung führen. Dies sollte allerdings nur dann berücksichtigt werden, wenn die horizontalen Verschiebungen der Platte durch entsprechende Randbedingungen begrenzt werden. Im ersten Kapitel wurden das Bemessungsmodell mit orthogonalen Bewehrungsnetzen und das Sandwichmodell kurz vorgestellt. Das tatsächliche Tragverhalten einer Stahlbetonplatte und deren Idealisierung in der Finite-Element Berechnung kann mit Hilfe eines geschichteten Schalenelements, in dem den einzelnen Schichten unterschiedliche Materialmodelle zugewiesen werden, erfolgen.

Im Anschluss daran erfolgte die Beschreibung der Nachweisformate nach den neuen europäischen Normenwerken für die Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit.

Im dritten Kapitel wurde nach einer kurzen Beschreibung der bestehenden Algorithmen zur Bemessung von Stahlbetonflächentragwerken auf die zwei elementaren Dimensionierungskonzepte - die Schnittgrößen- und Traglastiteration - näher eingegangen. Besondere Aufmerksamkeit wurde dabei dem nichtlinearen Algorithmus zur automatischen Traglastiteration und Erhöhung der Bewehrungsflächen geschenkt, der gleichsam eine Neuentwicklung auf dem Gebiet der nichtlinearen Bemessungsmöglichkeiten für Stahlbetonplatten darstellt.

Die darauffolgenden numerischen Beispiele dienen zur Veranschaulichung des Prinzips und Aufbaus dieses Algorithmus, der auch in das nichtlineare Finite-Element Programm SEGNID implementiert wurde. Es stellte sich heraus, dass bei der Anwendung dieses Verfahrens die richtige Wahl der Startbewehrung von entscheidender Bedeutung für den Ablauf des Optimierungsprozesses und das Ergebnis ist. Das grundsätzliche Problem bei der Anwendung solcher nichtlinearer Berechnungen liegt dabei in der Festlegung Lage und Größe der Stahleinlagen im Querschnitt. Dabei darf der Startwert die Mindestbewehrung von auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen nicht unterschreiten, um Sprödbrüche zu vermeiden. Wählt man eine andere Bewehrungsfläche als Startbewehrung, so ändert sich der gesamte Optimierungsprozess, da sich von Anfang an ein anderer Lastabtragmechanismus in der Platte einstellt, der bis zum Ende hin unverändert bleibt. Die Beispiele haben ge-

zeigt, dass eine Bewehrungsermittlung mit der Mindestbewehrung als Startbewehrung durchaus zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Ergänzend sollte speziell bei Plattentragwerken noch der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit in Bezug auf die Durchbiegungsbeschränkung geführt werden. Die in der nichtlinearen Berechnung erhaltenen maximalen vertikalen Verschiebungen für die in den Normenwerken festgelegten Lastniveaus und ein anschließender Vergleich mit den zulässigen Werten hat jedoch ergeben, dass dieser Nachweis ohne Schwierigkeiten erfüllt werden kann. Allerdings erweist sich auch eine zusätzliche Iterationsschleife für den Gebrauchstauglichkeitsnachweis als sinnvoll.

Neben der richtigen Wahl der Startbewehrung spielt auch die richtige Wahl der Eingabewerte C_1 und insbesondere C_2 eine wesentliche Rolle für die nichtlineare Bewehrungsermittlung. Mit diesen Werten wird der gesamte Bemessungsprozess gesteuert - einerseits durch die Größe der Bewehrungssinkremente und damit durch die Anzahl der Iterationsschritte; andererseits durch die Bereiche der Struktur, in denen eine Erhöhung der vorhandenen Bewehrung vorzunehmen ist. Parameterstudien an einigen Beispielen dienten hierfür als Ausgangspunkt für die Bemessung von Stahlbetonplatten.

Anschließend wurde die in den unterschiedlichen Optimierungsprozessen erhaltene Bewehrungsfläche bewertet und verglichen. So kam es beispielsweise bei der Bemessung der Geschosdecke des Cardington – Versuchsgebäudes zu einer Reduktion von etwa 60% der Bewehrung. Die Decke wurde dabei zuerst nach der linearen Finite-Element Methode berechnet [G1] und im Anschluss mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus optimiert. Auch bei den Optimierungsprozessen der anderen hier kurz beschriebenen Verfahren der Arbeitsgruppen an der ETH Zürich und Universität Kaiserslautern wurde eine beträchtliche Reduktion der linear ermittelten Bewehrung erzielt.

Der hier vorgestellte computergestützte Algorithmus zur Traglastbestimmung und Bewehrungsermittlung stellt eine weitere Möglichkeit zur effizienten Ausnutzung der Bewehrung in Stahlbetonplatten dar und kann sowohl für die Bemessung von neuerrichtenden Tragwerken als auch bei der Traglastberechnung bestehender Flächentragwerke eingesetzt werden. Die hier geführten Studien haben gezeigt, dass die Festlegung der Startbewehrung und richtige Steuerung der Bewehrungserhö-

Die Wahl der zu wählenden Eingangsparameter auch im Zuge des Gebrauchstauglichkeitsnachweises einen wesentlichen Einfluss auf den Optimierungsprozess und die daraus resultierende Bewehrung ausüben. Bei geeigneter Wahl dieser Parameter führt die in dieser Arbeit vorgestellte Methode zu einer sparsamen, aber ausreichenden Bewehrung von Stahlbetonplatten.

LITERATUR

- [A1] Anderheggen, E., Steffen, P., Glanzer, G.: *Plastische Berechnung von Stahlbetonplatten*. Schweizer Ingenieur und Architekt 117, 1999, Heft 4, Zürich, Verlags-AG der akad. techn. Vereine, S. 58-62
- [A2] Anderheggen, E., Glanzer, G.: *Elastoplastische Bemessung und Analyse von Stahlbetonplatten*. Festschrift Prof. Dr. L. Sparowitz zum 60. Geburtstag, Institut für Stahlbeton, TU Graz, 2000, S. 1-6
- [B1] Baumann, Th.: *Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1972, Heft 217, Berlin, Ernst & Sohn
- [B2] Baumann, Th.: *Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken*. Der Bauingenieur 47, 1972, Heft 10, Berlin, Springer-Verlag, S. 367-377
- [B3] de Borst, R., Meyer, Ch.: *Numerische Probleme bei nichtlinearem Tragwerksverhalten*. In: Der Ingenieurbau: Grundwissen / [Hrsg.: G. Mehlhorn], Band Rechnerorientierende Baumechanik, Berlin, Ernst & Sohn, 1995, S. 427-488
- [C1] Chana, P., Moss, R. M.: *Re-engineering the design and construction processes for in situ concrete frames*. Structural Concrete 2, No. 2, 2001, Thomas Telford Ltd and fib, S. 49-61
- [C2] Comité Euro-International du Béton: *CEB-FIP Model Code 1990, Final Draft*, CEB-Bulletin d'Information No. 203-205, Lausanne, 1991
- [D1] DIN 1045-1, *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1, Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung, Berlin, 2001
- [D2] Dinges, D., Schulz, J.-U., Kollegger, J., Mehlhorn, G.: *SEGNID – FE-Programm zur Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Strukturen*. Bericht Nr. 4, Massivbau, GH Kassel, 1987
- [E1] EC 1: *Eurocode 1991 (EC 1), Grundlagen der Tragwerksplanung, Teil 1, Grundlagen der Bemessung*, 1994
- [E2] prEN 1992-1-1, *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1.1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. CEN, Brüssel, 2003
- [G1] Glanzer, G.: *Nichtlineare FE-Analyse von Stahlbetonplatten und -schalen mittels linearisierter Fließbedingungen im Knotenkrafttraum*. Dissertation, 2000, ETH Zürich
- [G2] Goodchild, C.: *Rationalization of flat slab reinforcement*, British Cement Association, 2000

- [K1] Kollegger, J.: *Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerkelementen unter Normalkraft- und Momentenbeanspruchung*. Beton- und Stahlbetonbau 86, 1991, Heft 5, Berlin, Ernst & Sohn, S. 114-119
- [K2] Kollegger, J.: *Computational Modelling of Concrete Structures*. Proceedings of the Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures, Badgastein, Austria, 1998, S. 959-967
- [K3] Kollegger, J.: *Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken*. Dissertation, GH Kassel, 1988
- [K4] Köberl, B.: *Modellierung einer Flachdecke mit der Methode der nichtlinearen Finiten Elemente*, Großer Entwurf, 2003, TU Wien
- [K5] König, G., Ahner, C.: *Sicherheits- und Nachweiskonzept der nichtlinearen Berechnungen im Stahl- und Spannbetonbau*, Sicherheit und Risiko im Bauwesen, Darmstädter Statik-Seminar 2000, TU Darmstadt, Institut für Baustatik, 2000, S. 1-25
- [K6] Kuyt, B.: *Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken*. Beton- und Stahlbetonbau 59, 1964, Heft 7, Berlin, Ernst & Sohn, S. 158-163
- [L1] Lang Ch., Meiswinkel R., Wittek U.: *Bemessung von Stahlbetonplatten mit dem nichtlinearen Verfahren nach DIN 1045-1*, Beton- und Stahlbetonbau 95, 2000, Heft 5, Berlin, Ernst & Sohn, S. 270-278
- [L2] Leitz, H.: *Eisenbewehrte Platten bei allgemeinen Biegunszuständen*. Die Bautechnik 1, 1923, Heft 16, Berlin, Ernst & Sohn, S. 155-157
- [L3] Leitz, H.: *Eisenbewehrte Platten bei allgemeinen Biegunszuständen*. Die Bautechnik 1, 1923, Heft 17, Berlin, Ernst & Sohn, S. 163-167
- [L4] Leitz, H.: *Zum Stand der Berechnung kreuzweise bewehrter Platten*. Der Bauingenieur 6, 1925, Heft 32, Berlin, Springer Verlag, S. 920-924
- [L5] Leitz, H.: *Die Drillmomente bei kreuzweise bewehrten Platten*. Die Bautechnik 3, 1925, Heft 51, Berlin, Ernst & Sohn, S. 717-719
- [L6] Leitz, H.: *Über die Anwendung der Elastizitätstheorie auf kreuzweise bewehrten Beton*. Beton und Eisen 25, 1926, Heft 13, Berlin, Ernst & Sohn, S. 240-245
- [M1] Mang, H.: *Flächentragwerke*, In: Der Ingenieurbau: Grundwissen / [Hrsg.: G. Mehlhorn], Band: Rechnerorientierende Baumechanik, Berlin, Ernst & Sohn, 1995, S. 45-89
- [M2] Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W. und Sigrist, V.: *Tragverhalten von Stahlbeton*, IBK Publikation SP-008, ETH Zürich, 1999
- [M3] Mehlhorn, G.: *Grundlagen zur physikalisch nichtlinearen FEM-Berechnung von Tragwerken aus bewehrtem Konstruktionsbeton. Materialmodelle für Bewehrung und Beton*, Bauingenieur 70, 1995, Berlin, Springer-Verlag, S. 313-320
- [M4] Mehlhorn, G.: *Grundlagen zur physikalisch nichtlinearen FEM-Berechnung von Tragwerken aus bewehrtem Konstruktionsbeton – Verbund zwischen Beton und*

- Bewehrung und Modellierung von bewehrtem Konstruktionsbeton*, Bauingenieur 71, 1996, Berlin, Springer-Verlag, S. 187-193
- [M5] Mehlhorn, G., Kollegger, J.: *Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau*. In: *Der Ingenieurbau: Grundwissen / [Hrsg.: G. Mehlhorn]*, Band Rechnerorientierende Baumechanik, Berlin, Ernst & Sohn, 1995, S. 293-425
- [O1] Ockleston, A.J.: *Arching action in reinforced concrete slabs*. *The Structural Engineer*, Vol. 36, 1958, No. 6, S. 197-201
- [Ö1] ÖNORM B 4700, *Stahlbetontragwerke, EUROCODE-nahe Berechnung, Bemessung und konstruktive Durchbildung*. Österreichisches Normungsinstitut, Wien, 2001
- [P1] Park, R., Gamble, W.L.: *Reinforced concrete slabs*, 2nd ed., New York, Chichester, Weinheim, Singapore, Toronto, John Wiley & Sons, Inc. 2000
- [P2] Popov, R.: *Non-linear Analysis of Point-supported Reinforced Concrete Slabs*. K.Bergmeister, Proceedings of the 3rd Int. PhD Symposium in Civil Engineering, Inst. of Structural Engineering, University of A. Sciences, Vol. 2, Vienna, Austria, 2000
- [P3] Popov, R., Kollegger, J.: *Nicht-lineare Analyse von Stahlbetonplatten unter Berücksichtigung der Gewölbewirkung*. *Beton- und Stahlbetonbau* 96, 2001, Berlin, Ernst & Sohn, S. 312
- [P4] Popov, R., Preisinger, C.: *Optimization of Reinforcement in Concrete Plate and Shell Structures with the Aid of Non-linear Finite Element Analysis*. P. Schiessl, N. Gebbeken, M. Keuser, K. Zilch, 4th International Ph. D. Symposium in Civil Engineering, TU München, Universität der Bundeswehr Muenchen, Vol. 2, Muenchen, Germany, September 2002
- [P5] Preisinger, C.: *Konzepte für die nichtlineare Berechnung und Bemessung von Stahlbetonplatten*. Diplomarbeit, 2002, TU Wien
- [P6] Preisinger, C., Popov, R., Kollegger, J.: *Optimization of Reinforcement in Concrete Plate and Shell Structures with the Aid of Non-linear Finite Element Analysis*. H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner, Fifth World Congress on Computation Mechanics, WCCM 5, Vienna, Austria, July 2002
- [P7] Preisinger, C., Popov, R., Kollegger, J.: *Nonlinear Design Procedures for Reinforced Concrete Plates and Shells*. N. Bicanic, R. de Borst, H. Mang, G. Meschke, Computational Modelling of Concrete Structures, EURO-C 2003, St. Johann im Pongau, Austria, March 2003
- [Q1] Quast, U.: *Zur Kritik an der Stützenbemessung*, *Beton- und Stahlbetonbau* 95, 2000, Heft 5, Berlin, Ernst & Sohn, S. 305-311
- [S1] Schlaich, J.: *Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten*. *Beton- und Stahlbetonbau* 59, 1964, Heft 11, Berlin, Ernst & Sohn, S. 250-285
- [S2] Scholz, G.: *Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken*. *Beton- und Stahlbetonbau* 53, 1958, Heft 10, Berlin, Ernst & Sohn, S. 250-255

-
- [T1] TNO Building and Construction Research, *DIANA Release 7.2 – User's Manual*, Delft, 1999
- [V1] Valentin, G., Kidery, G. F.: *Stahlbetonbau, 9. Auflage*. Manz Verlag Schulbuch, Wien, 1999
- [V2] Veit, R.: *Optimierung der Bewehrung in Flächentragwerken auf der Basis der nichtlinearen FEM*, Diplomarbeit, 2003, TU Wien
- [W1] Wittek, U., Meiswinkel, R., Lang, Ch.: *Beitrag zu nichtlinearen Dimensionierungskonzepten von Flächentragwerken aus Stahlbeton, Bericht 2*. Universität Kaiserslautern, 2000
- [Z1] Zahn, F., Ganz, H.: *Vorspannung im Hochbau, 4.1 VSL Report Serie*, VSL International Ltd., 1994