Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Forecasting und Backtesting von Risikomaßen

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Birgit Bauer, BSc
3494 Brunn im Felde
Hauptstraße 9

Datum | Unterschrift Betreuer | Unterschrift Student

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere,

dass ich die Regeln des wissenschaftlichen Arbeitens eingehalten habe, insbesondere, dass ich die Masterarbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfe bedient habe. Ich versichere weiters, dass ich diese Masterarbeit bisher weder im Inland noch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe.

Mir ist bewusst, dass auch nach positiver Beurteilung der Masterarbeit die Aufdeckung eines Verstoßes gegen die Regeln des wissenschaftlichen Arbeitens (insbesondere bei Vorliegen eines Plagiats) die Einleitung eines Verfahrens zur Nichtigerklärung der Beurteilung sowie des akademischen Grades zur Folge hat.

Datum Unterschrift

Danksagung

Ein herzliches Dankeschön möchte ich hiermit allen aussprechen, die mich während meines Studiums und nicht zuletzt beim Schreiben dieser Masterarbeit unterstützt haben.

Bedanken möchte ich mich zunächst bei meinem Betreuer Prof. Thorsten Rheinländer, zum Einen für den Themenvorschlag dieser Masterarbeit und zum Anderen für seine Zeit und Geduld bei jedweder Frage die ich an ihn herangetragen habe.

Zudem möchte ich auch Herrn DI Dr. Rainer Schamberger für die Übermittlung und in weiterer Folge der BAWAG P.S.K., insbesondere Frau Mag. Andrea Guzik für die Bereitstellung der Daten meinen Dank aussprechen.

Ein besonderer Dank gilt meinem Vater, der als Korrekturleser die Arbeit nun wahrscheinlich genauso gut kennt wie ich und mich zusammen mit meiner Mutter in den letzten Jahren immer unterstützt und ermutigt hat.

Abschließend möchte ich mich noch bei meinen Studienkollegen/Freunden Fabian Pribahsnik, Markus Kakac und Lukas Richter bedanken. Sie haben mir das schwere Studium erträglich gemacht, mit mir zusammen gelernt, mir bei Übungsvorbereitungen geholfen und mir in den letzten Jahren viel Freude bereitet.

Abstract

The Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) is working on a new version of the currently valid Basel III regulations. Value at Risk should be replaced by another risk measure called Expected Shortfall (Conditional Value at Risk) for the capital requirement calculations of market risk. These new regulations called “Basel 3.5“ are planned to get in force in January 2019.

Various papers were published that criticize the expected shortfall. The missing feature of elicitability complicates the backtesting of this risk measure. Expectiles are often suggested as improvement. This work summarizes the results from different publications. It discusses elicitability and its need for backtesting. It becomes evident, that elicitability has less influence on backtesting than on model selection. Simulations show that the forecasting for both risk measures is easy to implement. An approximation of the expected shorfall by four Value at Risk values was used for backtesting. Backtesting methods for Expectile are still poorly investigated. In this work the backtesting was conducted using the loss function and bootstrapping.

Expected shortfall is not seen as a bad risk measure, but the current backtesting is deemed unsatisfactory. Very high outliers of data are not sufficiently taken into account and lead to a poor approximation. Expectiles are seen as a quite recommendable alternative, although backtesting should be improved. In addition, one has to be aware that expectiles are not comonoton additive, what could lead to problems.

Keywords

risk measures, expected shortfall, expectile, forecast, backtesting, elicitability, coherence, Basel 3.5, market risk, capital requirement

Zusammenfassung

Das Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) arbeitet an einer neuen Version der derzeitig gültigen Basel III Verordnung. Zukünftig soll bei der Berechnung des Kapitalerfordernisses für das Marktrisiko der Value at Risk durch ein anderes Risikomaß, den Expected Shortfall (Conditional Value at Risk) ersetzt werden. Die Einführung der neuen Verordnung "Basel 3.5" ist im Jänner 2019 geplant.

Es wurden verschiedenste Papers veröffentlicht, welche den Expected Shortfall kritisieren. Die fehlende Eigenschaft der Elizitabilität erschwere das Backtesting dieses Risikomaßes. Als Verbesserungsvorschlag werden des öfteren Expektile genannt. In dieser Arbeit werden die Ergebnisse aus verschiedenen Publikationen zusammengefasst. Es wird auf Elizitabilität und deren Notwendigkeit für das Backtesting eingegangen. Hierbei wird ersichtlich, dass Elizitabilität weniger auf das Backtesting als auf die Modellwahl einen Einfluss hat. Anhand von Simulationen wird festgestellt, dass das Forecasting für beide Risikomaße rasch umzusetzen ist. Für das Backtesting des Expected Shortfalls wurde eine Approximation des Expected Shortfalls durch vier Value at Risk Werte verwendet. Backtesting-Methoden für Expektile sind noch kaum erforscht. In dieser Arbeit wurde das Backtesting mittels Verlustfunktion und Bootstrapping durchgeführt.

Expected Shortfall ist kein schlechtes Risikomaß, jedoch wird das derzeitige Backtesting als nicht zufriedenstellend erachtet. Sehr hohe Ausreißer der Daten werden dadurch nicht genügend berücksichtigt und führen zu einer schlechten Approximation. Expektile werden als durchaus empfehlenswerte Alternative empfunden, jedoch sind im Bereich des Backtestings noch Verbesserungen möglich. Zudem muss man sich darüber im Klaren sein, dass Expektile nicht komonoton additiv sind, was zu einem Problem führen könnte.

Schlagwörter

Risikomaße, Expected Shortfall, Expektile, Forecast, Backtesting, Elizitabilität, Kohärenz, Basel 3.5, Marktrisiko, Kapitalerfordernis

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Basel **10**
2.1 Entwicklung 10
2.2 Kapitalvorschriften im Marktrisiko 13

3 Risikomaße **19**

4 Expected Shortfall **26**
4.1 Allgemeines 26
4.2 Forecasting 31
4.2.1 Aktienportfolio 32
4.2.2 BAWAG Portfolio 36
4.3 Backtesting 38
4.3.1 Aktienportfolio 41
4.3.2 BAWAG Portofolio 44

5 Expektile **48**
5.1 Allgemeines 48
5.2 Forecasting 52
5.2.1 Aktienportfolio 53
5.2.2 BAWAG Portfolio 56
5.3 Backtesting 57
5.3.1 Aktienportfolio 59
5.3.2 BAWAG Portfolio 60

6 Schlussbetrachtung und Ausblick **62**

7 Anhang 1 **64**

Literatur **66**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Chronologische Entwicklung von Basel I bis Basel III 10
2.2 Das drei Säulen System von Basel II [14] 11
2.3 Zusammensetzung des Eigenkapitals Basel II vs. Basel III 12
2.4 Interner-Modell Ansatz für Marktrisiko [5] 15

4.1 Dichte von X $\sim$ NV(0,2) 26
4.2 Aktienkurse der Erste Bank und OMV Aktie 32
4.3 Boxplot und Dotplot der Aktienreturns 33
4.4 Q-Q Plot der Aktienreturns 34
4.5 Boxplot und Dotplot der BAWAG-Returns 37
4.6 Q-Q Plot der BAWAG-Returns 37

5.1 Zeitliche Veränderung der Aktienreturns 53
5.2 Aktienreturn Forecast mit Expektilen (Werte abhängig von x) 55
5.3 BAWAG-Return Forecast mit Expektilen (Werte abhängig von x) 56

Kapitel 1

Einleitung

Der Zusammenbruch des Bretton Wood Systems[1] und die damit verbundenen Finanzmarktprobleme im Jahr 1973 veranlassten die Zentralbankdirektoren der G10 Länder eine Bankenaufsicht zu gründen, um weitere Katastrophen dieser Art zu verhindern und die Stabilität des internationalen Bankensystems zu stärken. Das Ziel war es Mindestregulierungsvorschriften für Banken einzuführen und die Überwachung dieser zu garantieren. [2]

Vorschriften für die Geschäftspraxis der Banken gibt es nun schon seit Juli 1988. Dennoch kam es in den letzten Jahren vermehrt zu Problemen im Bankensektor. Nicht zuletzt die Wirtschaftskrise im Jahr 2007/2008 hat aufgezeigt, dass das Bankengeschäft besser überwacht werden muss um sicherzustellen, dass die Realwirtschaft nicht aufgrund von Problem im Finanzsektor beeinträchtigt wird.

Das Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) erließ in den letzten Jahren viele Regelungen und Verordnungen, welche Katastrophen verhindern sollen. Dieses Regelwerk wird unter dem Namen Basler Akkorde zusammengefasst - derzeitig findet Basel III Anwendung. Korrekte Risikoerfassung und Risikodeckung, angemessene Eigenmittelausstattung[3], Reserven, und Verschuldungsgradbegrenzung sind Hauptbestandteile der Verordnungen unter Basel III.

Komplexere Verfahren um die Risiken besser kalkulieren zu können werden gesucht, erprobt und eingeführt. Insbesondere versucht man mehr und mehr auf die Besonderheiten der einzelnen Risikoklassen einzugehen.

Einschub: Einteilung von Risiken

Eine gängige Unterscheidung der Risiken lautet wie folgt:

a) Marktrisiko
b) Kreditrisiko
c) Liquiditätsrisiko
d) Operationelles Risiko

[1] Internationales Währungssystem eingeführt nach dem 2. Weltkrieg. Wechselkurs wird in Abhängigkeit von US-Dollar bestimmt. (http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/bretton-woods-system.html#definition)

[2] Vgl. [4].

[3] Def.: Eigenkapital besteht aus Reserven (Kapital- und Gewinnreserven) sowie Jahresgewinn. Es muss Verluste als Erstes tragen.

Ad a) Unter Marktrisiko werden Schwankungen der Preise von Finanzinstrumenten (z.B. Aktien, Anleihen), Zinsrisiko, Währungsrisiko und Rohstoffrisiko (Warenpositionsrisiko) zusammengefasst. Laut §4 Abs. 8 KI-RMV wird Marktrisiko unterteilt in: Spezifisches und allgemeines Positionsrisiko in zinsbezogenen Instrumenten, spezifisches und allgemeines Positionsrisiko in Substanzwerten, Risiko aus Aktienindex- Terminkontrakten, Risiko aus Investmentfondsanteilen, sonstige mit Optionen verbundene Risiken, Warenpositionsrisiko, Risiko aus Fremdwährungs- und Goldpositionen.

Ad b) Bei der Vergabe von Krediten ist man dem Risiko des Ausfalls von Zahlungen (Bankrott des Kreditnehmers etc.) ausgesetzt. Auch Bonitätsänderungen fallen unter den Begriff Kreditrisiko.

Ad c) Ein wesentlicher Bestandteil des Bankengeschäfts ist die Vergabe von Krediten und das Verwalten von Anlegergeld. Unter Fristen- und Losgrößentransformation versteht man die Aufgabe, dieses Geschäft so zu handhaben, dass trotz unterschiedlicher Anlagezeitpunkte und Kreditvergabezeitpunkte sowie unterschiedlicher Einlage- und Kredithöhen, die Bank das Geld immer zeitgerecht zur Verfügung stellen kann. Diese Aufgaben der Bank bergen das Risiko, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt, aufgrund unvorhergesehener Tatbestände, kein Bargeld zur Verfügung steht bzw. zu erhöhten Kosten beschafft werden muss.

Ad d) Operationelles Risiko ist ein Oberbegriff für fehlerhafte interne Prozesse. Hierzu gehören unter anderem Mitarbeiter- und Systemfehler.

Die Verfahren unter Basel III verwenden den Value at Risk als Risikomaß. Dieser fasst das gesamte Risiko in einer Zahl zusammen, was für die Praxis leicht zu handhaben ist. Der Value at Risk ist jedoch nicht subadditiv, wodurch Diversifikation in Portfolios nicht korrekt Rechnung getragen wird. Zudem wird die Schwere der Verluste, welche außerhalb des vorgeschriebenen Konfidenzniveaus liegen, nicht berücksichtigt. Das Basel Committee on Banking Supervision arbeitet derzeit an einer Version Basel 3.5, welche die Verwendung des Expected Shortfalls (Conditional Value at Risk) als Risikomaß zur Bewertung der Risiken vorschreibt.

In der folgenden Arbeit wird die Frage behandelt, inwieweit die Einführung des Expected Shortfalls als neues Risikomaß sinnvoll ist. Als kohärentes Risikomaß fällt zumindest das Problem der fehlenden Subadditivität, welches am Value at Risk stark kritisiert wird, weg. Jedoch gibt es Schwierigkeiten Backtesting durchzuführen, da der Expected Shortfall nicht elicitable ist. Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Thematik, die Expektile folglich ihrer Elizitabilität anstelle eines Expected Shortfall Maßes in der Praxis zur Anwendung zu bringen.

In dem Paper von Fabio Bellini und Valeria Bignozzi „Elicitable risk measures“ wird auf Elizitabilität genauer eingegangen und Expektile aus diesem Grund als beste Risikomaße propagiert. Hingegen sind Susanne Emmer, Marie Kratz und Dirk Tasche der Meinung, dass die fehlende Elizitabilität kein so großer Nachteil ist, wie von Bellini und Bignozzi behauptet. In ihrem Paper „What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures“ weisen sie darauf hin, dass der Expected Shortfall bedingt elicitable ist und sich dadurch ein alternativer Ansatz für das Backtesting ergibt. Das bessere Risikomaß für die Praxis, soll in dieser Arbeit theoretisch und im Rahmen von Simulationen herausgefunden werden. Dazu werden sowohl mit dem Expected Shortfall, als auch mit Expektilen Forecasts anhand von Marktrisikodaten erstellt. Mit den Methoden, welche unter anderem in den obigen Papers beschrieben wurden, sind Backtests durchzuführen, welche schlussendlich das effektivere Risikomaß für die Praxis finden sollen.

Der Aufbau der Arbeit lautet wie folgt: Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 auf die Entwicklung von Basel und die künftigen Veränderungen eingegangen. Insbesondere wird auf die Einführung des neuen Risikomaßes Expected Shortfall Bezug genommen. Kapitel 3 beschäftigt sich mit Risikomaßen und etwaigen Eigenschaften welche diese erfüllen sollten. Zudem wird hier Elizitabilität definiert. Hauptteil der Arbeit sind Kapitel 4 und

5, in welchen Expected Shortfall und Expektile definiert und berechnet werden. Es wird darauf eingegangen, welche Eigenschaften diese Risikomaße erfüllen bzw. nicht erfüllen. Anhand von Marktdaten verschafft man sich einen Eindruck wie straightforward das Berechnen und Backtesten dieser Risikomaße ist, um schließlich im letzten Kapitel eine Entscheidung zugunsten eines Risikomaßes zu treffen.

Kapitel 2

Basel

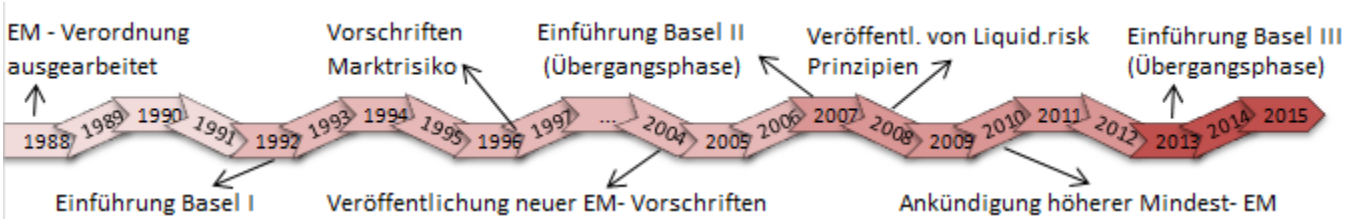

Abbildung 2.1: Chronologische Entwicklung von Basel I bis Basel III

2.1 Entwicklung

1974 wurde aufgrund schwerer Verluste und Probleme im Finanzbereich das Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) gegründet. Ziel war und ist es, Konkurs der Banken und damit verbundene Verluste des Staates zu verhindern. Indem Standards für die weltweite Bankenaufsicht und Richtlinien für die Geschäftspraxis eingeführt wurden, sollen die verschiedenen Risiken, welchen eine Bank ausgesetzt ist, minimiert werden. Ein entscheidender Punkt hierbei ist die angemessene Eigenkapitalausstattung aller Banken zu garantieren.

1988 wurde schließlich der „Basel Capital Accord“ veröffentlicht. Die Einführung des Akkords, auch bekannt unter dem Namen „Basel I“, erfolgte 1992 und fokussierte sich auf das Kreditrisiko. Künftig waren die Banken verpflichtet 8% ihrer risikogewichteten Aktiva in Form von Eigenkapital zu halten. Bei den Risikogewichten wurde noch nicht sehr stark differenziert, es gab lediglich 5 Risikogewichte. 1996 wurde Basel I um Vorschriften für das Marktrisiko ergänzt, welche beispielsweise bereits im darauffolgenden Jahr in Österreich als Verordnung erlassen wurden.

Die ersten Richtlinien waren ein Anfang, jedoch bei weitem noch nicht ausgereift genug um die gewünschte Sicherheit tatsächlich zu garantieren. Die fehlende Differenzierung in Folge inadäquater Abbildung des Risikos als auch die neu eingeführten Finanzinstrumente, welche neue Regulierungen notwendig machten, führten zu einer stetigen Weiterentwicklung des Basel Frameworks. 1999 wurde damit begonnen einen neuen Standard für die Banken einzuführen. Die Entwicklung dauerte 6 Jahre und führte schließlich zu Basel II. Umgesetzt wurde Basel II in Österreich im Bankwesengesetz (BWG), der Solvabilitätsverordnung (SolvaV) und der Offenlegungsverordnung (OffV). Neben einer besseren Risikosensibilität wurden externe Ratings[1] als

[1] Zugelassen sind Ratingagenturen wie Moody‘s, Fitch, Standard & Poor‘s,...

Einteilungskriterium von Forderungen nach Risikoklassen zugelassen. Zudem hatten Banken die Möglichkeit interne Ratingmodelle zu erstellen, welche nach vorheriger Prüfung zur Bewertung von Kreditrisiko, Marktrisiko und operationellem Risiko verwendet werden durften. Die Einhaltung der Vorschriften und nicht zuletzt die Validierung der internen Modelle führten zu einer Erweiterung der bisherigen quantitativen Standards von Basel um die 2. und 3. Säule.[2]

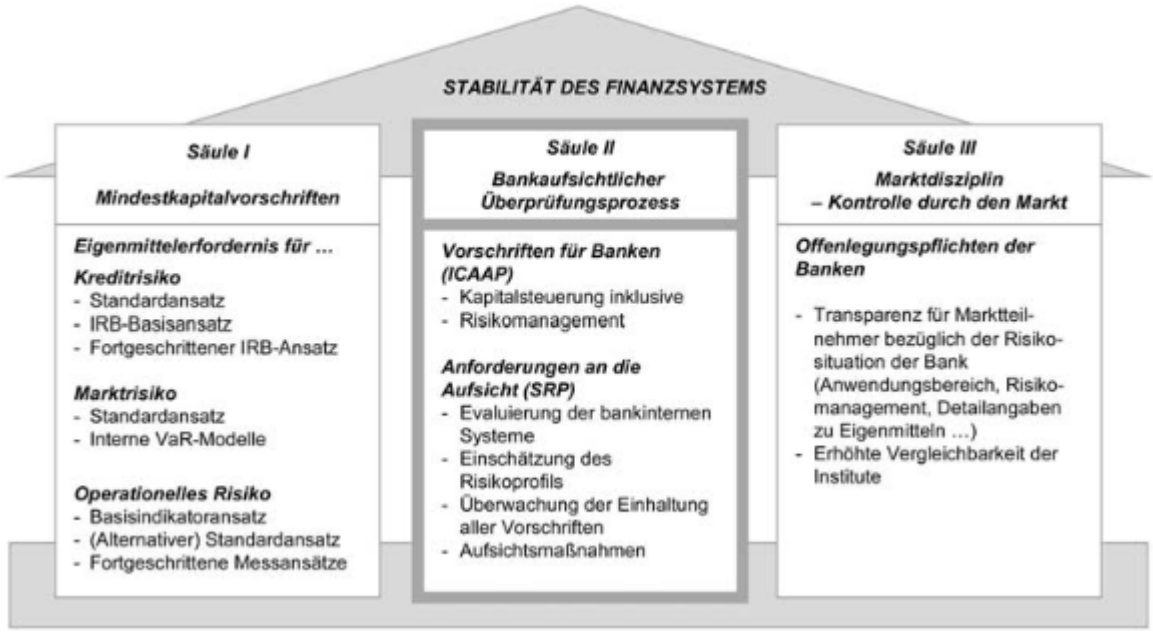

Abbildung 2.2: Das drei Säulen System von Basel II [14]

Trotz dieser Weiterentwicklungen konnte die Wirtschaftskrise 2007/2008 nicht verhindert werden. Fehlende Aufsicht und lückenhafte Richtlinien waren ein Teil der Ursachen.[3] Banken hatten immer noch die Möglichkeit sich viel zu hoch zu verschulden und konnten dies mit unzureichend hartem Kapital unterlegen. Rasantes Kreditwachstum in Kombination mit schwachen Underwriting Standards führten zu einer Unterschätzung des Kredit- und Liquiditätsrisikos. Aufgrund fehlender Kapital- und Liquiditätspuffer setzte man sich hohen Risiken aus und trug der Prozyklizität des Geschäfts nicht Rechnung. Als die Immobilienblase platzte begann die Abwärtsspirale. Aktienmärkte brachen zusammen, die Interbankfinanzkredite stiegen sprungartig an, es kam zu Insolvenzen von mehreren Banken. Der Höhepunkt war der Konkurs der US- Investmentbank Lehman Brothers. Die Finanzkrise wirkte sich schließlich auf die Realwirtschaft aus und verursachte eine globale Rezession. [4]

Bereits vor der Krise wurde klar, dass die Richtlinien weiterer Überarbeitungen bedürfen. Die Finanzinstitute sollten künftige Schocks besser verkraften können um nicht zuletzt die Realwirtschaft zu schützen. Basel II

[2]Vgl. [4].
[3]Ein kurzer Überblick der Gründe für die Wirtschaftskrise findet sich in folgendem Spiegel Artikel : [21]
[4]Vgl. [16].

wurde mit Basel III, welches derzeit schrittweise seit 2013/2014 eingeführt wird in verschiedensten Bereichen erweitert.

Um eine bessere Vernetzung der Mikro- und Makroaufsicht zu gewährleisten, wurde eine zentrale Bankenaufsicht eingeführt. Die Überwachung der relevantesten (ca. 130) Banken in der Eurozone wird nun direkt von der EZB (Europäische Zentralbank) überwacht. Als relevant gelten jene Banken, deren

- Bilanzsumme $> 30 \cdot 10^9$ Euro oder
- Bilanzsumme $> 20\%$ der Wirtschaftsleistung des Landes ist.

Auch die Eigenkapitalvorschriften wurden in Bezug auf Höhe, Qualität, Zusammensetzung und Transparenz verschärft. Wie in Abbildung 2.3 ersichtlich, hat sich die Mindesteigenmittelquote nicht erhöht. Die Zusammensetzung wurde jedoch verschärft. Demnach muss hartes Kernkapital nun 4,5% ausmachen und hat sich somit mehr als verdoppelt. Ergänzungskapital darf nur noch zu maximal 2% zur Deckung des Mindesteigenmittelerfordernisses herangezogen werden.

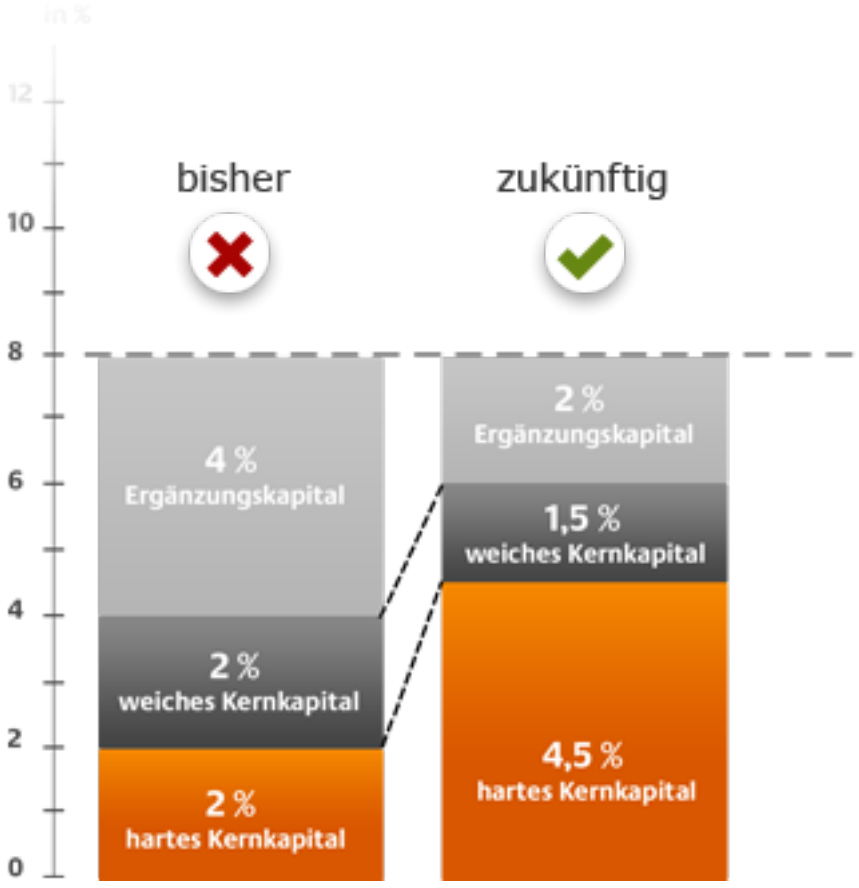

Abbildung 2.3: Zusammensetzung des Eigenkapitals Basel II vs. Basel III

Die Eigenmittelkomponenten sind in der CRR Richtlinie beschrieben:

Unter **hartem Kernkapital** versteht man Common Equity Tier 1 (CET). Hierzu zählen einbezahltes Kapital, offene Reserven und einbehaltene Gewinne.

Unter **weichem Kernkapital** versteht man Additional Tier 1 (AT1). Hierzu zählen Kapitalinstrumente mit weniger stark ausgeprägten Merkmalen u.a. hinsichtlich der Verlustteilnahme, z.B. stille Einlagen.

Unter **Ergänzungskapital** versteht man Tier 2 (T2). Hierzu zählen Genussrechte und langfristige nachrangige Verbindlichkeiten. [5]

Zusätzlich zu den verschärften Zusammensetzungsvorschriften, kommen noch verschiedenste Puffer hinzu. Ein Kapitalerhaltungspuffer (2,5% hartes Kernkapital) soll ausreichende Reserven für schlechtere Zeiten sicherstellen. Außerdem gibt es einen antizyklischen Kapitalpuffer, einen Systemrisikopuffer (mindestens 1% hartes Kernkapital) und Puffer für systemrelevante Institute (0% - 3,5% hartes Kernkapital).

Auch eine Verschuldungsobergrenze wurde unter Basel III eingeführt. Diese sogenannte Leverage Ratio ist nicht risikosensitiv und soll übermäßiger Fremdfinanzierung vorbeugen. Mit total exposure werden (ungewichtete) bilanzielle und außerbilanzielle Aktivposten bezeichnet.

$$\text{Leverage Ratio} = \frac{\text{Tier 1 capital}}{\text{Total exposure}} \tag{2.1}$$

Weitere Veränderungen unter Basel 3 betrafen das Liquiditäts-, Markt- und Kreditrisiko. Eine Liquidity Coverage Ratio (LCR) sowie eine Net Stable Funding Ratio (NSFR) sollen künftig eine ausreichende Liquidität der Banken, auch in Stresssituationen garantieren. Durch die Einführung der CVA-Charge[6] soll verstärkt auf spezielle Geschäfte geachtet und für diese die Eigenkapitalunterlegung verschärft werden. Veränderungen gab es bei der Berücksichtigung des Gegenparteiausfallrisikos. Es wurde versucht OTC (over the counter) Geschäfte zu verringern und die Attraktivität von zentralen Gegenparteien zu erhöhen. [7]

2.2 Kapitalvorschriften im Marktrisiko

Die neueren Publikation des Basel Committees on Banking Supervision beschäftigen sich mit der Überprüfung der Vorschriften für das Handelsbuch und mit dem Mindestkapital, welches eine Bank für ihre Marktrisiken zu halten hat. Die Einführung der derzeit in Ausarbeitung befindlichen Änderungen soll im Jahr 2019 stattfinden.

Folgende Bereiche sollen in den nächsten Jahren verbessert werden, um vor allem vor dem Marktrisiko zu schützen:[8]

1. **Abgrenzung von Handelsbuch und Bankbuch**
   Das Verschieben von Positionen aus dem Handelsbuch in das Bankbuch und umgekehrt soll eingeschränkt werden. Zudem soll eine Liste von Finanzinstrumenten erstellt werden, welche definitiv ins Handelsbuch gehören.

[5] Siehe [LINK 1].
[6] Das Credit Valuation Adjustment (CVA) ist die finanzielle Entschädigung für das übernommene Risiko, dass ein OTC-Kontrahent ausfällt, und einen möglichen aus seiner Sicht positiven Marktwert nicht bezahlt. [LINK 3]
[7] Vgl. [LINK 2].
[8] Vgl. [3].

2. **Behandlung von Krediten**
   Verbriefungen (Securitizations) dürfen künftig nur noch mit dem Standardansatz bewertet werden. Eigene interne Modelle sind somit ab der Einführung nicht mehr zulässig. Die bereits am Ende des letzten Unterkapitels erwähnte CVA-Charge, die zur Absicherung von Veränderungen der Kreditwürdigkeit dienen soll, ist ebenfalls unter diesem Punkt anzusiedeln.

3. **Ansatz zur Risikomessung** (des Mindestkapitalerfordernisses)
   Es wird unter angespannten "stressed" Marktbedingungen kalibriert. Mit dem Ansatz ist sicherzustellen, dass auch in schlechten Zeiten genügend Kapital zur Verfügung steht. Für die Berechnung muss eine angemessene Periode definiert werden.
   Zudem ist hier die Änderung verankert, welche für diese Arbeit besonders relevant ist, nämlich der Übergang vom bekannten Risikomaß Value at Risk zu einem Expected Shortfall Maß.

4. **Einbeziehung der Gefahr der Illiquidität des Marktes**
   Derzeit wird bei Positionen im Handelsbuch angenommen, dass diese innerhalb von 10 Tagen veräußert oder abgesichert (gehedged) werden können, man also relativ rasch Kapital beschaffen kann. Dass dies eine Falschannahme ist, machte die Wirtschaftskrise 2007/2008 klar. Künftig sollen anstelle dieses 10-Tages-Ansatzes Liquiditätshorizonte "liquidity horizons" definiert werden, welche der tatsächlich benötigten Zeitperiode, um diese Risikopositionen zu verlassen/hedgen, entsprechen. Der Liquiditätshorizont wird in [3] definiert als: *"[...] Benötigte Zeit um Transaktionen auszuführen, welche die Gefährdung durch einen Risikofaktor eliminieren, ohne den Preis von Absicherungsinstrumenten unter extremer Marktlage zu verändern."*

5. **Behandlung von Hedging und Diversifikation**
   Die Anerkennung von Diversifikation und Hedging soll zwischen dem Standardansatz und Internem-Modell Ansatz besser abgestimmt werden. Diversifikation wird nur noch mit Einschränkungen anerkannt. Im Allgemeinen findet Diversifikation im Standardansatz künftig mehr Berücksichtigung, während diese für interne Modelle limitiert wird.

6. **Zusammenhang zwischen Internen-Modell Ansatz und Standardansatz verbessern**
   Der Standardansatz und der Interne-Modell Ansatz sollen künftig aneinander angepasst werden. Es wird überlegt, den Standardansatz als Mindestlimit oder Aufschlag für das interne Modell zu verwenden.

7. **Adaptierung des Internen-Modell Ansatzes**
   Um als adäquat anerkannt zu werden, muss ein internes Modell nun strengere Auflagen erfüllen. Insbesondere wurden der Rahmen für Portfolios und die Standards um Marktrisiko im Handelsbuch abzubilden verschärft.

8. **Adaptierung des Standardansatzes**
   Mit dem Standardansatz soll Unternehmen die Möglichkeit gegeben werden, ohne größeren Aufwand ihr Kapitalerfordernis zu berechnen. Die Verwendung soll die erforderliche Berichterstattung transparent, konsistent und vergleichbar machen. Zudem soll der Standardansatz die Banken abfedern wenn ihr internes Modell nicht akzeptiert wird.

Vor allem der Punkt 3 und 7 sind in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung, weil dort auf den Übergang zu dem Expected Shortfall Maß eingegangen wird. Der Value at Risk wurde schon seit Einführung als unzureichend eingestuft. Die fehlende Berücksichtigung der Höhe von Extremereignissen (tail risks) macht es für Banken interessant genau solche Risiken einzugehen, da diese das Eigenmittelerfordernis nicht signifikant erhöhen. Auch die Prozyklizität aufgrund der Abhängigkeit von relativ jungen Daten wird dem Value at Risk als Schwäche angelastet. Der Expected Shortfall hingegen bewertet eine Position und das damit verbundene Risiko in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit des Eintritts sowie der Höhe des damit verbundenen

Verlustes.

Um das Kapitalerfordernis zu errechnen wird derzeit der 10-Tages Value at Risk zum 99% Konfidenzniveau verwendet. Ab 2019 ersetzt der Expected Shortfall zum 97,5% Konfidenzniveau diesen Ansatz bei internen Modellen. Die Änderungen des Konfidenzniveaus soll der Tatsache entgegenwirken, dass der Expected Shortfall prinzipiell konservativer bewertet als der Value at Risk. Die Verwendung eines internen Modells muss von der FMA genehmigt werden. Diese Genehmigung wurde ebenfalls restriktiert und überprüft unter anderem für jeden Trading Desk[9] separat, ob dieser unter dem internen Modell adäquat abgebildet werden kann. Als Vergleich werden Backtesting und G&V Berechnungsprogramme verwendet. Es werden also im Nachhinein Analysen durchgeführt, die Ergebnisse der Risikomaße und prognostizierter G&V Werte mit aktuellen Portfoliowertänderungen über längere Zeithorizonte bzw. mit hypothetischen Werten vergleichen.[10]

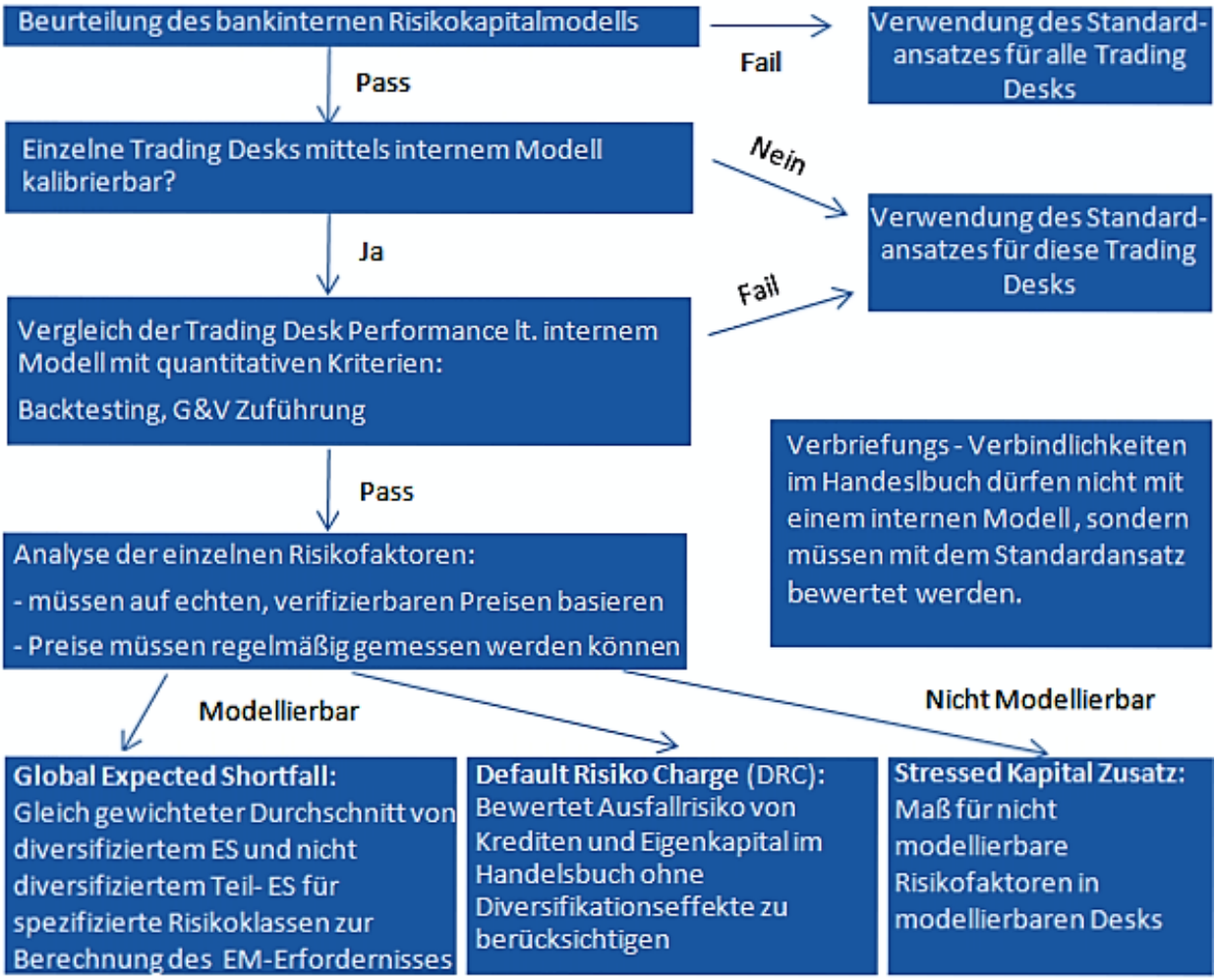

Abbildung 2.4: Interner-Modell Ansatz für Marktrisiko [5]

[9]Eine genaue Definition von "Trading Desk" findet man in [5] im Appendix 1.
[10]Vgl. [5].

Damit der Interne-Modell Ansatz zugelassen wird, müssen verschiedenste qualitative und quantitative Standards erfüllt sein und auch erfüllt bleiben. Tägliche Berichte sind zu verfassen, Backtesting muss regelmäßig durchgeführt werden und vieles mehr. Um die Berechtigung der Verwendung des internen Modells nicht zu verlieren, müssen mindestens 10% der Marktrisikokosten auf Positionen in Trading Desks entfallen, welche unter den Internen-Modell Ansatz bewertet werden.

Unter dem Internen-Modell Ansatz muss der Expected Shortfall zum 97,5% Konfidenzniveau, sowohl auf bankenweiter Ebene als auch für jeden einzelnen Trading Desk, auf täglicher Basis berechnet werden. Hierzu müssen die Risikofaktoren den jeweiligen Kategorien zugeordnet und der dazugehörige Liquiditätshorizont ℓ bestimmt werden. Der Liquiditätshorizont, welchen man aus nachstehend angeführter Tabelle ablesen kann, muss nicht gewählt werden. Er ist jedoch mindestens in dieser Höhe anzusetzen. Abhängig von den Daten kann er auch erhöht werden, ist jedoch mit der Höhe bis zur Maturität zu begrenzen.

Kategorien der Risikofaktoren	ℓ
Zinsrate: spezifizierte Währungen [a]	10
Zinsrate: unspezifizierte Währungen	20
Zinsrate: Volatilität	60
Zinsrate: anderes	60
Credit spread: sovereign (IG)	20
Credit spread: sovereign (HY)	40
Credit spread: corporate (IG)	40
Credit spread: corporate (HY)	60
Credit spread: Volatilität	120
Credit spread: anderes	120
Aktienkurs (large cap)	10
Aktienkurs (small cap)	20
Aktienkurs (large cap): Volatilität	20
Aktienkurs (small cap): Volatilität	60
Aktienkapital: anderes	60
FX Tarif: spezifizierte Währungspaare [b]	10
FX Tarif: Währungspaare	20
FX: Volatilität	40
FX: anderes	40
Energie- und Kohlenstoffemissionshandelspreis	20
Edelmetall- und Nichteisenmetallpreise	20
Andere Rohstoffpreise	60
Energie- und Kohlenstoffemissionshandelspreis: Volatilität	60
Edelmetall- und Nichteisenmetallpreise: Volatilität	60
Andere Rohstoffpreise	120
Rohstoffe: anderes	120

[a] EUR, USD, GBP, AUD, JPY, SEK, CAD, Heimwährung der Bank

[b] USD/EUR, USD/JPY, USD/GBP, USD/AUD, USD/CAD, USD/CHF, USD/MXN, USD/CNY, USD/NZD, USD/RUB, USD/HKD, USD/SGD, USD/TRY, USD/KRW, USD/SEK, USD/ZAR, USD/INR, USD/NOK, USD/BRL, EUR/JPY, EUR/GBP, EUR/CHF and JPY/AUD.

Bei der Berechnung des Expected Shortfalls für diesen Liquiditätshorizont greift man darauf zurück, von einem 10-Tages Basishorizont auszugehen und entsprechend zu skalieren.

$$ES = \sqrt{(ES_T(P))^2 + \sum_{j \geq 2} \left(ES_T(P,j) \sqrt{\frac{LH_j - LH_{j-1}}{T}} \right)^2} \tag{2.2}$$

ES	...	regulatorischer, liquiditätsbereinigter Expected Shortfall
T	...	Basishorizont (= 10 Tage)
P= (p_i)	...	Portfolio P mit Positionen p_i
LH_j	...	Länge des Liquiditätshorizontes j
Q(p_i,j)	...	Untermenge von Risikofaktoren, deren Liquiditätshorizonte im Desk von $p_i \leq LH_j$
$ES_T(P)$	...	Expected Shortfall zum Horizont T des Portfolios P unter Berücksichtigung von Schocks aller Risikofaktoren welchen P ausgesetzt ist
$ES_T(P,j)$	...	Expected Shortfall zum Horizont T des Portfolios P unter Berücksichtigung von Schocks der Risikofaktoren in Q, restlichen Faktoren konstant

Die folgende Tabelle enthält die Länge der jeweiligen Liquiditätshorizonte j.

j	1	2	3	4	5
LH_j	10	20	40	60	120

Da man speziell sicherstellen will, dass die Eigenmittelerfordernisse unter extremer Marktlage ausreichen, müssen auch für die Expected Shortfall Berechnungen, Perioden extremen Marktstresses herangezogen werden. Für die Umsetzung wird eine reduzierte Anzahl an Risikofaktoren verwendet. Diese müssen mindestens 75% der Variation des Expected Shortfall Modells mit allen Risikofaktoren ausmachen. Diese relevanten Risikofaktoren sind abhängig vom Portfolio. Zu ihnen muss eine angemessen lange Datenhistorie verfügbar sein. Zudem werden Risikofaktoren nur dann als modellierbar angesehen, wenn diesen mindestens 24 Mal im Jahr ein realer Preis zugeordnet werden kann. Der Abstand zwischen zwei Preismessungen darf nicht mehr als ein Monat umfassen. Der Expected Shortfall für die Risikokapitalberechnung ergibt sich somit wie folgt:

$$ES = ES_{R,S} \cdot \frac{ES_{A,D}}{ES_{R,D}} \tag{2.3}$$

$ES_{R,S}$	...	ES für Beobachtungsperiode extremen Marktstresses mit reduzierten Risikofaktoren
$ES_{A,D}$	...	ES für derzeitige Beobachtungsperiode mit allen Risikofaktoren
$ES_{R,D}$	...	ES für derzeitige Beobachtungsperiode mit reduzierten Risikofaktoren

Die verwendeten Beobachtungsperioden betragen jeweils 12 Monate. Die verwendeten Daten müssen immer up-to-date sein und aus diesem Grund bei groben Änderungen oder spätestens jedes Monat aktualisiert werden. Um die Beobachtungsperiode für $ES_{R,S}$ herauszufinden, muss jene 12-Monats-Periode, unter Berücksichtigung von Daten bis inkl. des Jahres 2007 herangezogen werden, zu welcher die Marktlage am angespanntesten war.

Welches Modell für die Berechnung des Expected Shortfalls verwendet wird (Monte-Carlo Simulation, historische Simulation, analytische Methoden), bleibt jeder Bank selbst überlassen.

In [5] wird auch nochmals explizit darauf hingewiesen, dass auch die speziellen Risiken bei Optionen (nichtlineare Preischarakteristik, Volatilität) berücksichtigt und erfasst werden müssen.

Das Kapitalerfordernis C_A ergibt sich nun als das Höhere von

- Kapitalkosten vom Vortag für Marktrisiko, und
- Durchschnitt der täglichen Kapitalmessungen über 60 Geschäftstage

$$C_A = max\{IMCC_{t-1} + SES_{t-1}; m_c \cdot IMCC_{avg} + SES_{avg}\} \tag{2.4}$$

IMCC bezeichnet die kumulierten Kapitalkosten der modellierbaren Risikofaktoren. Um diese zu erhalten, muss für jede einzelne Risikoklasse separat, ein sogenannter teilweiser Expected Shortfall berechnet werden. Bei diesem sind nur die Risiken aus der jeweiligen Risikoklasse zu variieren, die restlichen werden konstant gehalten. Diese teilweisen Expected Shortfall Werte (IMCC(C_i)) sowie IMCC(C) errechnen sich wie der ES in (2.3) und werden gewichtet aufsummiert.

$$IMCC = \rho(IMCC(C)) + (1-\rho)(\sum_{i=1}^{R} IMCC(C_i)) \tag{2.5}$$

Das relative Gewicht des internem Modells wird mit ρ bezeichnet und ist typischerweise 0,5.

m_c bezeichnet einen Multiplikator der, soweit nicht von Autoritäten höher gefordert, auf 1,5 gesetzt wird. Er beurteilt das Risikomanagement-System.

SES bezeichnet das kumulierte regulatorische Kapitalmaß. Es umfasst jene K Risikofaktoren, welche zwar in modellgeeigneten Desks sind, jedoch selbst als nicht modellierbar eingestuft wurden, sowie Kapitalkosten für L nicht modellierbare spezifische Credit Spread Risikofaktoren welche nachweislich ohne Korrelation kumuliert werden.

$$SES = \sum_{j=1}^{K} SES_{NM,j} + \sqrt{\sum_{i=1}^{L} ISES_{NM,i}^2} \tag{2.6}$$

$SES_{NM,j}$	...	Kapitalkosten unter Stress-Szenario für nicht modellierbares Risiko j
$ISES_{NM,i}$	...	Kapitalkosten unter Stress-Szenario für spezifisches nicht modellierbares Credit Spread Risiko i

Schlussendlich erhält man die kumulierten Kapitalkosten für Marktrisiko (ACC) als Summe der kumulierten Kapitalerfordernisse für modellierbare Trading Desks und der standardisierten Kapitalkosten für Risiken in nicht modellierbaren Trading Desks.

$$ACC = C_A + DRC + C_U \tag{2.7}$$

Hierbei bezeichnet DRC die Kosten von Ausfallsrisiken (Default Risk Charge). Die Kosten C_U für Desks welche nicht als geeignet für das interne Modell eingestuft wurden, errechnen sich nach den Standardansatz.[11]

[11] Vgl. [5] insbesondere Kapitel C.3 Quantitative Standards.

Kapitel 3

Risikomaße

Das Bankengeschäft birgt Risiken. Diesen ist man ausgesetzt und kann sie nicht vollkommen verhindern. Jedoch sollte man sich gegen diese Risiken absichern. Um sich vor Risiken zu schützen, muss man aber erst wissen, welchem Risiko man sich genau aussetzt und wie hoch der mögliche Verlust ist. Aber wie genau kann man solche Finanzrisiken eigentlich messen?

Die Idee ist es zwischen akzeptablen und inakzeptablen Risiken zu unterscheiden. Man muss sich die Frage stellen, wie viel Verlust man verkraften kann und ab welcher Verlusthöhe Probleme auftreten. Für die zu hohen möglichen Verluste, muss zusätzliches Kapital zur Sicherung gehalten werden, sodass bei tatsächlichem Eintritt des negativen Ereignisses, genügend Reserven vorhanden sind. Die Menge des dafür nötigen Kapitals wird mit Hilfe von Risikomaßen bestimmt. Risikomaße sind, wie der Name schon sagt, Maße um Risiken zu messen.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Ω	...	Menge der möglichen Zustände (z.B. mögliche Werte die ein Aktienkurs annehmen kann)
F	...	Sigmaalgebra, welche durch die Teilmengen aller $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf Ω erzeugt wird
$\mathbb{P}$	...	Wahrscheinlichkeitsmaß

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ ist ungleich der leeren Menge.

Der Raum der Zufallsvariablen $\mathcal{M}$ sei ein konvexer Kegel, d.h. für $X_1, X_2 \in \mathcal{M}$ und für $\lambda > 0$ folgt:

- $X_1 + X_2 \in \mathcal{M}$
- $\lambda \cdot X_i \in \mathcal{M} \qquad i \in \{1, 2\}$

Die Risiken, bzw. Schäden/Verluste in dem Portfolio werden mit X_t bezeichnet.

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad\qquad \omega \mapsto X(\omega)$$

In diesem Kontext ist immer darauf zu achten, ob man die Risiken oder die Schäden/Verluste betrachtet. Je nachdem ergibt sich, dass die rechte oder linke Seite der Dichtefunktion "gefährlich" ist. Denn für Risiken gilt, dass Verluste negativ und Gewinne positiv sind, d.h. die Gefahr eines hohen Verlustes liegt am linken Ende der Dichtefunktion. Hingegen sind hohe Schäden/Verluste schlecht. Bezeichnet die Zufallsvariable also Schäden/Verluste, so liegt die Gefahr am rechten Ende der Dichtefunktion.

Um für die Finanzwirtschaft sinnvolle Risikomaße zu definieren, gibt es einige Eigenschaften, welche solch ein Maß erfüllen sollte. Diese werden im Weiteren spezifiziert.

Definition 3.1 (monetäres Risikomaß)**.** *Eine Abbildung $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, wenn $\forall X, Y \in \mathcal{M}$, (X,Y bezeichnen Variablen des Verlustes) und $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass:*

(M):	*für $X \leq Y$ folgt, dass $\rho(X) \leq \rho(Y)$*	*[Monotonie]*
(T):	$\rho(X + c) = \rho(X) + c$	*[Translationsinvarianz]*

Warum ein Risikomaß im Finanzbereich dies erfüllen sollte ist klar. Bereits vorhin wurde erwähnt, je höher der Schaden/Verlust desto schlimmer. Aus diesem Grund sollte auch das monetäre Risikomaß mit der Höhe der möglichen Verluste wachsen. Zudem sollte eine Konstante, die als sicherer Verlust zu interpretieren ist, zu 100% mit Kapital hinterlegt werden müssen. Das Risikomaß soll sich also im gleichen Ausmaß erhöhen wie der Verlust, jedoch soll c keinen Einfluss auf die Risikomessung von X haben.

Ist das Risikomaß translationsinvariant, so folgt sofort, dass $\rho(X - \rho(X)) = 0$ gelten muss. Hierbei ist $\rho(X)$ eine Konstante. In der Anwendung bedeutet dies, dass das Risikokapital exakt jenem zu haltenden Geldbetrag entspricht, welchen man halten muss um das Risiko voll zu decken.

Definition 3.2 (konvexes Risikomaß)**.** *Erfüllt ein monetäres Risikomaß ρ zusätzlich zu den Eigenschaften (M), (T) auch die Eigenschaft (K), so wird es als konvexes Risikomaß bezeichnet.*

(K):	$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall X, Y \in \mathcal{M}$ *gilt:* $\rho(\lambda \cdot X + (1-\lambda) \cdot Y) \leq \lambda \cdot \rho(X) + (1-\lambda) \cdot \rho(Y)$	*[Konvexität]*

Daraus lässt sich sofort folgern, dass für ein konvexes Risikomaß $\rho(\lambda \cdot X) \leq \lambda \cdot \rho(X)$, wenn $0 < \lambda \leq 1$ und $\rho(\lambda \cdot X) \geq \lambda \cdot \rho(X)$, wenn $\lambda \geq 1$ ist.

Definition 3.3 (kohärentes Risikomaß)**.** *Eine Abbildung $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ wird als kohärentes Risikomaß bezeichnet, wenn es die Eigenschaften (M), (T) sowie folgendes $\forall X, Y \in \mathcal{M},\ \forall \lambda \geq 0$ erfüllt:*

(S):	$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$	*[Subadditivität]*
(PH):	$\rho(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho(X)$	*[Positive Homogenität]*

Subadditivität trägt Diversifikationseffekten in Portfolios Rechnung. Sie besagt, dass beim Zusammenführen zweier Zufallsvariablen, welche den Verlust beschreiben, das Risikomaß nicht höher ist, als wenn diese getrennt betrachtet werden. Wäre ein Risikomaß nicht subadditiv, so wäre der Anreiz groß, Risiken zu zerlegen, dies möchte man jedoch nicht. Positive Homogenität sorgt dafür, dass bei Skalierung des Risikos mit einem Faktor, das Risikomaß im selben Ausmaß skaliert wird.

Folgerung 3.4. *Jedes kohärente Risikomaß ist auch ein konvexes Risikomaß.*

Beweis. Monotonie und Translationsinvarianz sind bei beiden erfüllt. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass aus positiver Homogenität zusammen mit Subadditivität, Konvexität hergeleitet werden kann.

$$\rho(\lambda \cdot X + (1-\lambda) \cdot Y) \leq \rho(\lambda \cdot X) + \rho((1-\lambda) \cdot Y) = \lambda \cdot \rho(X) + (1-\lambda) \cdot \rho(Y)$$

Die erste Ungleichung verwendet (S) die zweite (PH). □

Folgerung 3.5. *Jedes konvexe Risikomaß ρ, welches zudem die Eigenschaft der positiven Homogenität (PH) erfüllt, ist kohärent.*

Beweis. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{M}$. Monotonie, Translationsinvarianz und positive Homogenität sind nach den Voraussetzungen bereits erfüllt. Die Subadditivität ist noch nachzuprüfen.

$$\rho(X+Y) = \rho(2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot X + \tfrac{1}{2} \cdot Y)) = 2 \cdot \rho(\tfrac{1}{2} \cdot X + \tfrac{1}{2} \cdot Y) \leq 2 \cdot (\tfrac{1}{2}\rho(X) + \tfrac{1}{2}\rho(Y)) = \rho(X) + \rho(Y)$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde Eigenschaft (PH) verwendet, danach die Konvexität (K).

□

Definition 3.6 (komonotone Additivität)**.** *$X, Y \in \mathcal{M}$ sind komonoton, wenn es eine reellwertige Zufallsvariable (ZV) Z und nicht fallende Funktionen f_1 und f_2 gibt, sodass $X = f_1(Z)$ und $Y = f_2(Z)$.*
Für solche ZV bezeichnet man das Risikomaß ρ als komonoton additiv, wenn:

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y).$$

Komonotone Additivität besagt, dass sich das Risiko bei Portfoliobildung zweier komonotoner ZV nicht verringert. Sind die Zufallsvariablen komonoton, so gibt es keine Diversifikation. Dies erscheint logisch, da das Risiko des Portfolios nicht verringert wird, wenn es aus zwei ZV besteht, die total voneinander abhängen.

Definition 3.7 (Verteilungsinvarianz)**.** *Ein Risikomaß wird als verteilungsinvariant bezeichnet, wenn $\forall X, Y \in \mathcal{M}$ gleich verteilt (d.h. $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$) gilt:* $\rho(X) = \rho(Y)$

Verteilungsinvarianz besagt, dass das Ergebnis des Risikomaßes nur von der Verteilung von X abhängt.

Eine weitere Eigenschaft, auf die in weiterer Folge besonders eingegangen wird ist Elizitabilität. Dies spielt eine bedeutende Rolle beim Backtesting, da bei Risikomaßen, welche nicht elicitable sind, Probleme auftreten. Insbesondere kann man Elizitabilität verwenden, um die Qualität verschiedener Forecastingmethoden zu bestimmen. Um Elizitabilität zu definieren, müssen zunächst einige Begriffe eingeführt werden.[1]

Definition 3.8. *Eine Trefferfunktion s wird definiert durch:*

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to [0; \infty) \\ (x, y) &\mapsto s(x, y) \end{aligned}$$

x bezeichnet punktweise Prognosen, während y die Realisationen bezeichnet. Zusätzlich gelten die folgenden Voraussetzungen:

1. $S(x, y) \geq 0$
2. $S(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
3. $S(x, y)$ *monton wachsend in x für $x > y$, und $S(x, y)$ monoton fallend in x für $x < y$*
4. $S(x, y)$ *stetig in x*

Die Eigenschaften 1.-4. sind für die Definition einer Trefferfunktion nicht notwendig, jedoch in der Praxis meist erfüllt und in weiterer Folge für einige Ergebnisse nötig.

Sei ρ ein Funktional auf einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{P} &\to 2^{\mathbb{R}} \qquad (Potenzmenge) \\ \mathbb{P} &\mapsto \rho(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

[1] Für den folgenden Abschnitt wurden insbesondere Emmer [12] und Bellini [7] verwendet.

Definition 3.9. *Eine Trefferfunktion $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist konsistent für ρ bezüglich $\mathcal{P}$:⇔*
$\forall \mathbb{P}, \forall t \in \rho(\mathbb{P}), \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int s(t, X)\ d\mathbb{P}(X) \leq \int s(x, X)\ d\mathbb{P}(X) \tag{3.1}$$

Definition 3.10. *Ist eine Funktion s konsistent und erfüllt sie zudem die nachstehende Eigenschaft, so wird s als strikt konsistent zu $\mathcal{P}$ bezeichnet.*

$$\int s(t, X)\ d\mathbb{P}(X) = \int s(x, X)\ d\mathbb{P}(X) \qquad \Rightarrow \qquad x \in \rho(\mathbb{P}) \tag{3.2}$$

Definition 3.11. [2] *Eine Trefferfunktion s wird als homogen in Ordnung b bezeichnet, wenn $\forall c \in \mathbb{R};\ \forall x, y \in A \subset \mathbb{R}$:*

$$s(c \cdot x, c \cdot y) = |c|^b \cdot s(x, y)$$

Definition 3.12. *Eine Trefferfunktion s wird als äquivariant zur Klasse $\mathcal{H} := \{h : A \to A\}$ bezeichnet, wenn:*

$$\underset{x \in A}{arg\ min}\ \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[s(x, h(Y))]\} = h(\underset{x \in A}{arg\ min}\ \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[s(x, Y)]\})$$

In verschiedenen Literaturen werden unterschiedliche Definitionen für Elizitabilität verwendet. Untenstehend werden drei Definitionen gegeben, welche in Emmer [12] und Bellini [7] zu finden sind. Definition 3.13 verwendet Trefferfunktionen, welche nicht unbedingt die obigen vier definierten Eigenschaften erfüllen müssen. Sie ist somit auch für obige Trefferfunktionen, welche zusätzlich noch diese 4 Eigenschaften haben, gültig. Zudem ist[3] Definition 3.15 eine Verallgemeinerung von Definition 3.14 und diese beiden Definitionen sind nur für Funktionale ρ definiert, welche einen eindeutigen Wert zurückliefern (single-valued).

Definition 3.13 (Emmer [12])**.** *Ein Risikomaß ρ ist elicitable bezüglich $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ es existiert eine strikt konsistente Trefferfunktion s für ρ bezüglich $\mathcal{P}$.*

Definition 3.14 (Bellini [7])**.** *Ein Risikomaß ρ ist elicitable bezüglich $\mathcal{P}_\rho \subset \mathcal{P}$, wenn es eine Trefferfunktion s gibt, sodass $\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_\rho$:*

$$\int s(x, X)\ d\mathbb{P}(X) < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rho(\mathbb{P}) = \underset{x \in \mathbb{R}}{arg\ min}\ \{\int s(x, X)\ d\mathbb{P}(X)\}$$

Definition 3.14 ist eine speziellere Formulierung von Elizitabilität. Der Definitionsbereich wird hier eingeschränkt. In dem Paper von Bellini [7] wird darauf hingewiesen, dass die folgende Definition 3.15 eine Verallgemeinerung ist, es sich jedoch mit Definition 3.14 besser arbeiten lässt.

Definition 3.15 (Bellini [7])**.** *Ein Risikomaß ρ ist elicitable bezüglich $\mathcal{P}_\rho \subset \mathcal{P}$:⇔ $\exists s$ Trefferfunktion s.d. $\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_\rho$:*

$$h_{\mathbb{P}}(t, x) := \int [s(x, X) - s(t, X)]\ d\mathbb{P}(X) \qquad \text{wohldefiniert } \forall x, t \in \mathbb{R}$$

$$h_{\mathbb{P}}(\rho(\mathbb{P}), x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \neq \rho(\mathbb{P})$$

[2] Siehe [15].
[3] Siehe [7].

Kann man zeigen, dass aus Definition 3.13 die Definition 3.15 folgt, so folgt aus beiden Definitionen die Definition 3.14.

Beweis. Für alle Definitionen müssen die Integrale wohldefiniert sein.
Negiert man Gleichung (3.2), so bedeutet strikte Konsistenz auch, dass

$$x \notin \rho(\mathbb{P}) \Rightarrow \int s(t,x)d\mathbb{P}(X) \neq \int s(x,X)d\mathbb{P}(X).$$

Aufgrund der Konsistenz folgt

$$\int s(t,x)d\mathbb{P}(X) < \int s(x,X)d\mathbb{P}(X).$$

Bringt man den linken Ausdruck auf die rechte Seite und verwendete die Linearität des Integrals, so erhält man

$$h_{\mathbb{P}}(t,x) > 0 \text{ für } t \in \rho(\mathbb{P}) \text{ und } x \notin \rho(\mathbb{P}).$$

Da bei den Risikomaßen in Definition 3.14 und 3.15 die Menge $\rho(\mathbb{P})$ nur aus einem Element besteht, kann das Elementzeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden und man erhält

$$h_{\mathbb{P}}(\rho(\mathbb{P}),x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \neq \rho(\mathbb{P}).$$

□

Wie man bereits in Definition 3.14 erkennt, kann unter Voraussetzung, dass das Risikomaß elicitable ist, ein optimaler Punktforecast für $\rho(\mathbb{P})$ bestimmt werden. Dies folgt bereits wenn die Trefferfunktion nur konsistent ist. [4]

Lemma 3.16. *Die Trefferfunktion s ist konsistent für ρ in $\mathcal{P}$. $\Leftrightarrow$ Für jedes $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ ist jedes $x \in \rho(\mathbb{P})$ ein optimaler Punktforecast.*

Ein statistisches Funktional ist also genau dann elicitable, wenn es der Minimierer einer passenden Trefferfunktion s ist.

Definition 3.17 (Bedingte Elizitabilität)**.** *Ein Risikomaß ρ von $\mathcal{P}$ heißt bedingt elicitable, wenn es Funktionale $\tilde{\gamma}$ und $\gamma : \mathcal{D} \to 2^{\mathbb{R}}$ mit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \times 2^{\mathbb{R}}$ gibt, sodass*

1. *$\tilde{\gamma}$ elicitable bezüglich $\mathcal{P}$*
2. *$(\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) \in \mathcal{D} \qquad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$*
3. *$\forall c \in \tilde{\gamma}(\mathcal{P})$ ist $\gamma_c : \mathcal{P}_c \to 2^{\mathbb{R}},\ \mathbb{P} \mapsto \gamma(\mathbb{P}, c) \subset \mathbb{R}$ elicitable bezüglich $\mathcal{P}_c := \{\mathbb{P} \in \mathcal{P} : (\mathbb{P}, c) \in \mathcal{D}\}$*
4. *$\rho(\mathbb{P}) = \gamma(\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$*

Folgerung 3.18. *Ist ein Risikomaß elicitable, so ist es auch bedingt elicitable.* [5]

[4] Siehe [15].
[5] Emmer [12].

Bedingte Elizitabilität kann beim Forecasting von nicht elicitablen Risikomaßen helfen und bietet zudem einen Ansatz für das Backtesting. Indem man zuerst $\tilde{\gamma}(\mathbb{P})$ forecasted, was aufgrund der Elizitabilität von diesem Funktional möglich ist, und danach diesen Wert als fixes c verwendet um $\gamma(\mathbb{P}, c)$ zu berechnen, kann man das Forecasting in 2 Schritte aufsplitten. Genauso kann dann beim Backtesting vorgegangen werden. [12]

Das folgende Lemma ist auch in [13] zu finden. Es besagt, dass wenn eine elicitable Funktion durch eine Bijektion in eine andere Funktion übergeführt werden kann, auch diese elicitable ist.

Lemma 3.19 (Revelation principle)**.** *Seien $A, \tilde{A}, B \subset \mathbb{R}$. $f : A \to \tilde{A}$ sei eine Bijektion mit inverser Funktion f^{-1}. Sei $\rho : \mathcal{M} \to A$ ein Risikomaß, dann gilt:*

$$\rho : \mathcal{M} \to A \quad \textit{ist elicitable} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_f := f \circ \rho : \mathcal{M} \to \tilde{A} \quad \textit{ist elicitable.}$$

$$s : A \times B \to \mathbb{R} \quad \textit{ist (strikt) konsistente Trefferfunktion für } \rho \textit{ bzgl. } \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow$$
$$s_f : \tilde{A} \times B \to \mathbb{R}; \quad (\tilde{x}, y) \mapsto s_f(\tilde{x}, y) = s(f^{-1}(\tilde{x}), y) \quad \textit{ist (strikt) konsistente Trefferfkt für } \rho_f \textit{ bzgl. } \mathcal{P}$$

Lemma 3.20. *Sei ρ ein Risikomaß auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger $\mathcal{P}_c$. Ist ρ elicitable, so gilt:*

- *$\rho(\mathbb{P}) \in [ess\ inf(\mathbb{P}), ess\ sup(\mathbb{P})]$. Insbesondere gilt $\rho(\delta_x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.*
- *Jede Trefferfunktion s welche zu ρ gehört, ist genauigkeitsbelohnend.*
- *ρ ist m-quasilinear.*
- *ρ hat konvexe Levelmengen.*

Der Beweis von Lemma 3.20 sowie die folgenden Definitionserklärungen können in Bellini [7] nachgelesen werden.

Definition 3.21. *Ein Risikomaß ρ ist genauigkeitsbelohnend (accuracy rewarding), wenn $\forall x, t \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ gilt:*

$$\rho(\mathbb{P}) < x < t \text{ oder } t < x < \rho(\mathbb{P}) \quad \Rightarrow \quad \int s(x, X) d\mathbb{P}(X) \leq \int s(t, X) d\mathbb{P}(X)$$

Aufgrund der Zusatzbedingungen, welche an die Trefferfunktion s gestellt wurden, ist diese Eigenschaft erfüllt. Ist ein Risikomaß genauigkeitsbelohnend, so ist garantiert, dass von zwei gegebenen Punktforecasts, der bessere einen geringeren Wert von der Trefferfunktion zugewiesen bekommt. [6]

Definition 3.22. *Ein Risikomaß ρ ist m-konvex*[7]*, wenn $\forall \lambda \in [0, 1]$ gilt, dass:*

$$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \lambda \mathbb{P}_1 + (1 - \lambda)\mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$$

[6] Für den Beweis siehe [7] Prop. 3.2.
[7] m steht für konvex in Bezug auf Mischungen.

Definition 3.23. *Ein Risikomaß ρ ist m-quasikonvex wenn $\forall\gamma \in \mathbb{R}, \forall\lambda \in [0,1], \forall\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$ gilt:*

$$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \{\rho \leq \gamma\} := \{\mathbb{P}_3 \in \mathcal{P} : \rho(\mathbb{P}_3) \leq \gamma\} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda\mathbb{P}_1 + (1-\lambda)\mathbb{P}_2 \in \{\rho \leq \gamma\}$$

Ein Risikomaß ist m-quasikonkav, wenn $-\rho$ m-quasikonvex ist.
Ein Risikomaß ist m-quasilinear, wenn es m-quasikonvex und m-quasikonkav ist.

Definition 3.24. *Das Risikomaß ρ besitzt konvexe Levelmengen, wenn $\forall\gamma \in \mathbb{R}$, die Levelmengen $\{\rho = \gamma\} := \{\mathbb{P} \in \mathcal{P} \mid \rho(\mathbb{P}) = \gamma\}$ m-konvex sind. D.h. $\forall\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}, \forall\lambda \in [0,1]$*

$$\rho(\mathbb{P}_1) = \rho(\mathbb{P}_2) = \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \rho(\lambda\mathbb{P}_1 + (1-\lambda)\mathbb{P}_2) = \gamma.$$

Ein Risikomaß sollte einigermaßen robust sein, d.h. kleine Änderungen in den Daten sollten keine großen Änderungen der Ergebnisse herbeiführen. Zur Messung der Robustheit schlägt Emmer [12] den Wasserstein-Abstand vor.

Seien $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, so ist der Wasserstein-Abstand definiert durch

$$d_W(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = inf\{\mathbb{E}(|X - Y|) : X \sim \mathbb{P},\ Y \sim \mathbb{Q}\}. \tag{3.3}$$

Definition 3.25 (Robustheit)**.** *Seien $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaße, $n \geq 1$. $X_n \sim \mathbb{P}_n, X \sim \mathbb{P}$. Das Risikomaß ρ heißt stetig bei X bezüglich des Wasserstein-Abstandes, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} d_W(X_n, X) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |\rho(X_n) - \rho(X)| = 0.$$

Kapitel 4

Expected Shortfall

Der Expected Shortfall soll zukünftig für die Bewertung des Eigenmittelerfordernisses unter Basel als Risikomaß herangezogen werden. Man erhält ihn durch Mittelbildung aller Value at Risk Werte über das Konfidenzniveau α. Jedes Randereignis wird mit seiner Höhe bei der Expected Shortfall Berechnung berücksichtigt. Letztere Eigenschaft führt dazu, dass der Expected Shortfall gegenüber dem Value at Risk präferiert wird.

In dem Unterkapitel 4.1 werden zunächst die Ergebnisse aus verschiedensten Publikationen, wie Emmer [12], Springer [17] und [LINK 5], zusammengefasst. Anschließend an dieses Unterkapitel werden Forecasting und Backtesting anhand von

- einem willkürlich zusammengestellten Aktienportfolio [1]
- Marktdaten eines Portfolios, welches dankenswerterweise von der BAWAG P.S.K. zur Verfügung gestellt wurde

durchgeführt.

4.1 Allgemeines

Definition 4.1. *Der Value at Risk zum Level $\alpha \in (0,1)$ ist gegeben durch:*

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = inf\ \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} = inf\ \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} \tag{4.1}$$

$F_X(x)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion von X, d.h. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Der VaR beschreibt das α-Quantil der Verteilung, wie in Abbildung 4.1 ersichtlich. Er gibt den Portfolioverlust an, welcher mit Wahrscheinlichkeit α nicht überschritten wird.

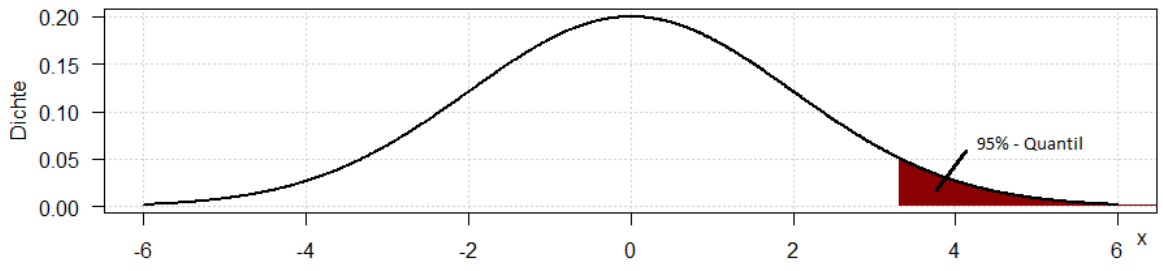

Abbildung 4.1: Dichte von X $\sim$ NV(0,2)

[1] Die dabei verwendeten Daten sind im Anhang 1 zu finden.

Der Expected Shortfall- als gewichtetes Mittel über den Value at Risk- beschreibt den durchschnittlichen Verlust in den $100 \cdot (1-\alpha)\%$ schlechtesten Fällen und wird wie folgt definiert:

Definition 4.2. *Der Expected Shortfall der Zufallsvariable X, welche den Verlust modelliert, zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0,1)$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)\ du \\ &= \mathbb{E}[X|X \geq VaR_\alpha(X)] + \Big(\mathbb{E}[X|X \geq VaR_\alpha] - VaR_\alpha(X)\Big) \cdot \Big(\frac{\mathbb{P}(X \geq VaR_\alpha(X))}{1-\alpha} - 1\Big) \end{aligned}$$

Ist die Verteilung F_X stetig, dann ist $\mathbb{P}[X = VaR_\alpha(X)] = 0$ und somit gilt: $ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[X|X \geq VaR_\alpha(X)]$.

Proposition 4.3. *Der Expected Shortfall ist ein monetäres Risikomaß.*

Beweis. Zur Monotonie (M): Gegeben seien zwei den Verlust modellierende Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $X \leq Y$. Es ist bekannt, dass der Value at Risk ein monetäres Risikomaß[2] ist, aus diesem Grund gilt:

$$VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y).$$

Das Integral ist ebenfalls monoton. Daraus folgt sofort:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)\ du \leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(Y)\ du = ES_\alpha(Y)$$

Zur Translationsinvarianz (T): Sei $X \in \mathcal{M}$ eine Zufallsvariable des Verlustes. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest, dann gilt:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X+c) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X+c)\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 (VaR_u(X)+c)\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)\ du + \frac{c}{1-\alpha} - \frac{c\cdot\alpha}{1-\alpha} \\ &= ES_\alpha(X) + c \end{aligned}$$

□

Proposition 4.4. *Der Expected Shortfall ist zudem subadditiv und positiv homogen. Folglich ist er ein kohärentes und somit aufgrund von Lemma 3.4 auch ein konvexes Risikomaß.*

Beweis. Zur Positiven Homogenität (PH): Sei $X \in \mathcal{M}$ eine Zufallsvariable und $c > 0$ beliebig aber fest, dann gilt:

$$ES_\alpha(c \cdot X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X \cdot c)\ du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X) \cdot c\ du = ES\alpha(X) \cdot c$$

[2]Es ist leicht zu sehen, dass $inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} \leq inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq x) \geq \alpha\}$.

Es bleibt noch die Subadditivität (S) zu beweisen. Diese ist ein wenig komplizierter als die anderen Eigenschaften, da der Value at Risk nicht subadditiv ist.

Wir verwenden für den Beweis das folgende Hilfslemma, welches inklusive Beweis in [17] (Lemma 2.5) nachzulesen ist. Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}_{\{..\}}$ die Indikatorfunktion.

Hilfslemma:
Es sei $X: \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable und* $y \in \mathbb{R}$. $\alpha \in (0,1)$ *bezeichne das Konfidenzniveau.*

$$\mathbf{1}_{X,y,\alpha} := \mathbf{1}_{\{X>y\}} + \beta_{X,\alpha}(y) \cdot \mathbf{1}_{\{X=y\}} \tag{4.2}$$

$$\beta_{X,\alpha}(y) := \frac{\mathbb{P}(X \leq y) - \alpha}{\mathbb{P}(X = y)} \cdot \mathbf{1}_{\{\mathbb{P}(X=y)>0\}} \tag{4.3}$$

Unter Verwendung dieser Definitionen gilt:

$$1)\ \mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha}(\omega) \in [0,1] \qquad \forall \omega \in \Omega \tag{4.4}$$
$$2)\ \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha}) = 1 - \alpha \tag{4.5}$$
$$3)\ \mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha}) = (1-\alpha) \cdot ES_\alpha(X) \tag{4.6}$$

Seien nun $X, Y \in \mathcal{M}$ zwei Zufallsvariablen.

Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned}
&ES_\alpha(X+Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(X+Y) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (1-\alpha) \cdot (ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(X+Y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha) \cdot (ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(X+Y)) \\
&\overset{(4.6)}{=} \mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} + Y \cdot \mathbf{1}_{Y,VaR_\alpha(Y),\alpha} - (X+Y) \cdot \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha}) \\
&= \mathbb{E}(X \cdot (\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha})) \\
&+ \mathbb{E}(Y \cdot (\mathbf{1}_{Y,VaR_\alpha(Y),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha}))
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha,\alpha}$ laut (4.4) immer Werte zwischen 0 und 1 annimmt, folgt aufgrund der Definition:

$$\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha} \qquad \begin{cases} \leq\ 0 & \text{wenn } X(w) < VaR_\alpha(X) \\ \geq\ 0 & \text{wenn } X(w) > VaR_\alpha(X) \end{cases} \tag{4.7}$$

Damit erhält man in allen Fällen (auch in dem Fall, dass $X(\omega) = VaR_\alpha(X)$):

$$X \cdot (\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha}) \geq VaR_\alpha(X) \cdot (\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha})$$

Unter Anwendung des obigen Resultats, (4.5) und der Linearität des Integrals, erhält man schließlich Subadditivität, denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \cdot (\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha})) \\ &\leq VaR_\alpha(X) \cdot \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X,VaR_\alpha(X),\alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y),VaR_\alpha(X+Y),\alpha}) \\ &\overset{(4.5)}{=} VaR_\alpha(X)\big[(1-\alpha) - (1-\alpha)\big] = 0\end{aligned}$$

□

Proposition 4.5. *Der Expected Shortfall ist komonoton additiv.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathcal{M}$ zwei komonotone Zufallsvariablen, d.h. $X = f_1(Z)$, $Y = f_2(Z)$ mit f_1, f_2 monoton wachsende Funktionen und Z uniformverteilt auf [0,1].

Dann gilt für den Value at Risk, dass dieser komonoton additiv ist, denn:

$$VaR_\alpha(X+Y) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) = VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) \tag{4.8}$$

Somit erhalten man aus obiger Gleichung für den Value at Risk, dass:

$$\begin{aligned}ES_\alpha(X+Y) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X+Y)\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X) + VaR_u(Y)\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)\ du + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(Y)\ du \\ &= ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)\end{aligned}$$

□

Proposition 4.6. *Auch Verteilungsinvarianz ist bei dem Expected Shortfall gegeben.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathcal{M}$ zwei Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung.

$$\begin{aligned}ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq u\}\ du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(Y \leq x) \geq u\}\ du \\ &= ES_\alpha(Y)\end{aligned}$$

□

Proposition 4.7. *Der Expected Shortfall ist nicht elicitable.*

Beweis. Für den Beweis wird Punkt 4 von Lemma 3.20 verwendet. Kann man zeigen, dass der Expected Shortfall keine konvexen Levelmengen hat, so ist dieser nicht elicitable.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und a,b,c,d $\in I$, sodass $a < b < c < \frac{1}{2} \cdot (b+d)$. Man betrachte die Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$F_1 = \alpha \cdot \delta_a + \frac{1}{2} \cdot (1-\alpha) \cdot (\delta_b + \delta_d)$$
$$F_2 = \alpha \cdot \delta_c + \frac{1}{2} \cdot (1-\alpha) \cdot \delta_{\frac{b+d}{2}}$$

Hierbei bezeichnet δ_x das Punktmaß in $x \in \mathbb{R}$. Es ist definiert durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Angenommen $\alpha \geq \frac{1}{3}$. Zum Einen gilt, dass:

$$ES_\alpha(F_1) = ES_\alpha(F_2) = \frac{1}{2} \cdot (b+d).$$

Zum Anderen ist jedoch:

$$ES_\alpha\left(\frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2)\right) = \frac{1}{4} \cdot (b + c + 2 \cdot d) > \frac{1}{2} \cdot (b+d).$$

Damit folgt, dass der Expected Shortfall keine konvexen Levelmengen hat und damit ist er nicht elicitable. Für $\alpha \leq \frac{1}{3}$ lässt sich ein analoges Gegenbeispiel finden.

□

Lemma 4.8 (Emmer [12])**.** *Bei stetiger Verteilung mit endlichem Mittelwert ist der Expected Shortfall bedingt elicitable.*

Beweis. Sei $\alpha \in (0,1)$ fix. X sei eine ZV mit stetiger Verteilung $\mathbb{P}$.

$\mathcal{P} := \{\mathbb{P} : \mathbb{P}$ ist stetige Verteilung auf $\mathbb{R}$ mit endlichem Erwartungswert$\}$

$\mathcal{D} := \{(\mathbb{P}, c) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R} \mid \mathbb{P}([c, \infty)) > 0\}$

Aufgrund der stetigen Verteilung von X vereinfacht sich der Expected Shortfall zu:

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X \geq VaR_\alpha(X)]$$

Man definiere sich

$$\gamma : \quad \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad (\mathbb{P}, c) \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X | X \geq c].$$

$$\tilde{\gamma} : \quad \mathcal{P} \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{P} \mapsto VaR_\alpha(X)$$

Sind nun die Eigenschaften aus Definition 3.17 erfüllt?

1. Eigenschaft z.z.: $\tilde{\gamma}$ ist elicitable bezüglich $\mathcal{P}$

Für die Verteilungen aus $\mathcal{P}$ wurde vorausgesetzt, dass sie einen endlichen Erwartungswert haben. Aus diesem Grund sind laut [19] Quantile, und damit der Value at Risk elicitable mit Trefferfunktion

$$s(x,y) = (\mathbf{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha) \cdot (x - y).$$

2. Eigenschaft z.z.: $(\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) \in \mathcal{D} \qquad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$

$(\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) = (\mathbb{P}, VaR_\alpha(X))$
Es gilt $\mathbb{P}([VaR_\alpha(X), \infty)) = \mathbb{P}(X \geq VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) \in \mathcal{D}.$

4. Eigenschaft z.z.: $\nu(\mathbb{P}) = \gamma(\mathbb{P}, \tilde{\gamma}(\mathbb{P})) \qquad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$

$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[X \mid X \geq \tilde{\gamma}(\mathbb{P})] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[X \mid X \geq VaR_\alpha(X)]$

Es bleibt noch die 3. Eigenschaft aus der Definition zu zeigen, d.h. zu zeigen ist:
$\forall c \in \tilde{\gamma}(\mathcal{P})$ ist $\gamma_c : \mathcal{P}_c \to 2^\mathbb{R},\ \mathbb{P} \mapsto \gamma(\mathbb{P}, c) \subset \mathbb{R}$ elicitable bezüglich $\mathcal{P}_c := \{\mathbb{P} \in \mathcal{P} : (\mathbb{P}, c) \in \mathcal{D}\}$.

Um die Gültigkeit dieser Aussage zu folgern wird ein Hilfslemma aus Gneiting [15] verwendet.

Hilfslemma:
Sei $\mathcal{P}$ die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit endlichen ersten Momenten. Dann gilt:

- Das Erwartungswertfunktional ist elicitable bezüglich $\mathcal{P}$.
- Angenommen s ist Trefferfunktion auf $D = I \times I$, dann gilt:
  s ist konsistent für das Erwartungswertfunktional bezüglich der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger auf I $\Leftrightarrow$ s ist von der Form

  $$s(x,y) = \phi(y) - \phi(x) - \phi'(x) \cdot (y - x), \tag{4.9}$$

  wobei ϕ eine konvexe Funktion mit Subgradient ϕ' auf I ist.
- Ist ϕ strikt konvex, dann ist die Trefferfunktion (4.9) strikt konsistent für das Mittelwertfunktional bezüglich der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf I für die sowohl $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Y)$ als auch $\mathbb{E}_\mathbb{P}(\phi(Y))$ existieren und endlich sind.

Sei c fest. Wir wenden das Hilfslemma auf die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{P}_c$ aus Definition 3.17 an und erhalten somit, dass γ_c elicitable mit strikt konsistenter Trefferfunktion $s(x,y) = (\phi(y) - \phi(x) - \phi'(x) \cdot (y - x)) \cdot 1_{[c,\infty)}(x)$ mit $\phi(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$.

□

Abschließend sei noch erwähnt, dass der Expected Shortfall robust bezüglich des Wasserstein-Abstandes ist. Genaueres kann bei Stahl [22] nachgelesen werden.

4.2 Forecasting

Der Expected Shortfall ist ein statistischer Schätzer, welcher unter normalen Marktbedingungen gültig ist. Wurde das Forecasting richtig gemacht, so müssen die Veränderungen der Portfoliowerte den kalkulierten Expected Shortfall Wert, in einer gewissen Zeit, abhängig von dem gewählten Konfidenzniveau, hin und wieder überschreiten. Wird der Schätzer nie überschritten, so ist er zu konservativ. [3]

In der Praxis und Literatur gibt es verschiedenste Möglichkeiten, um den Expected Shortfall zu berechnen. Monte Carlo Simulation, Varianz-Kovarianz Methode und historische Simulation sind die Bekanntesten.

[3] Vgl. [LINK 4].

4.2.1 Aktienportfolio

Für das Forecasting wurden lediglich die ersten 110 Werte des Aktienportfolios verwendet (d.h. Werte bis inkl. 09.05.2016). Die Daten sind im Anhang 1 zu finden. Die restlichen Daten werden danach für das Backtesting benötigt.

Das zu untersuchende Portfolio bestehe aus:

- 100 Erste Bank Aktien und
- 70 OMV Aktien.

Die Returns R_t des Portfolios zur Zeit t errechnen sich wie folgt:

$$R_t = -\left(\frac{P_t - P_{t-1}}{|P_{t-1}|}\right) \tag{4.10}$$

P_t ... Wert des Portfolios zur Zeit t

Der Absolutbetrag in der Formel der Returns wird benötigt, falls das Portfolio negative Werte annimmt. Dies ist bei dem Aktienportfolio nicht der Fall, kann jedoch vorkommen, wenn das Portfolio Optionen und andere Finanzprodukte enthält. Die Returns haben ein negatives Vorzeichen, da in obigen Kapiteln immer von Verlusten ausgegangen wurde und weiterhin die rechte Seite der Verteilung die gefährliche sein muss, um frühere Resultate in exakt dieser Form anwenden zu können.

Im Folgenden werden die gegebenen Daten rechnerisch und graphisch unter Verwendung von R und Excel analysiert.

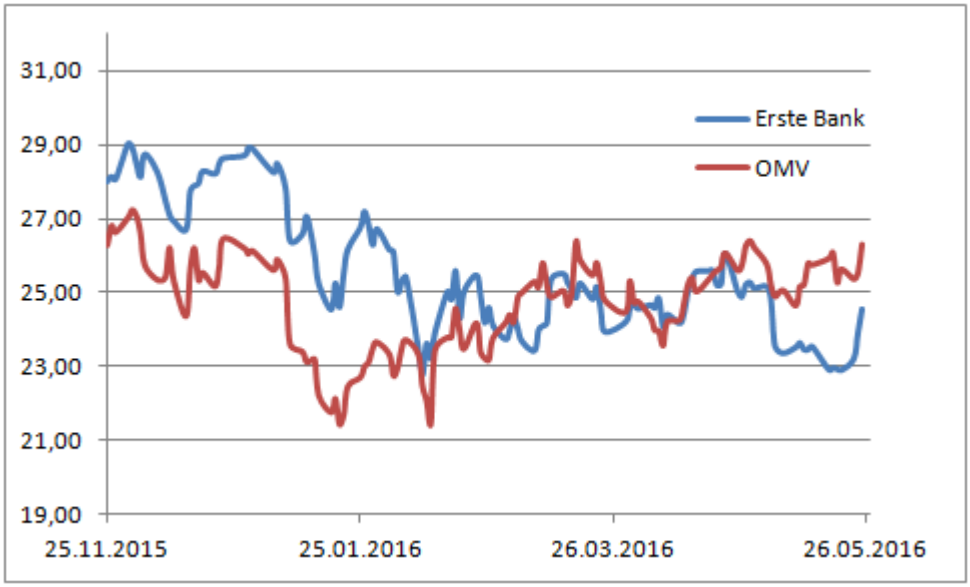

Abbildung 4.2: Aktienkurse der Erste Bank und OMV Aktie

Abbildung 4.2 zeigt den Verlauf der OMV und Erste Bank Aktie, aus welchen das zu bewertende Portfolio besteht.

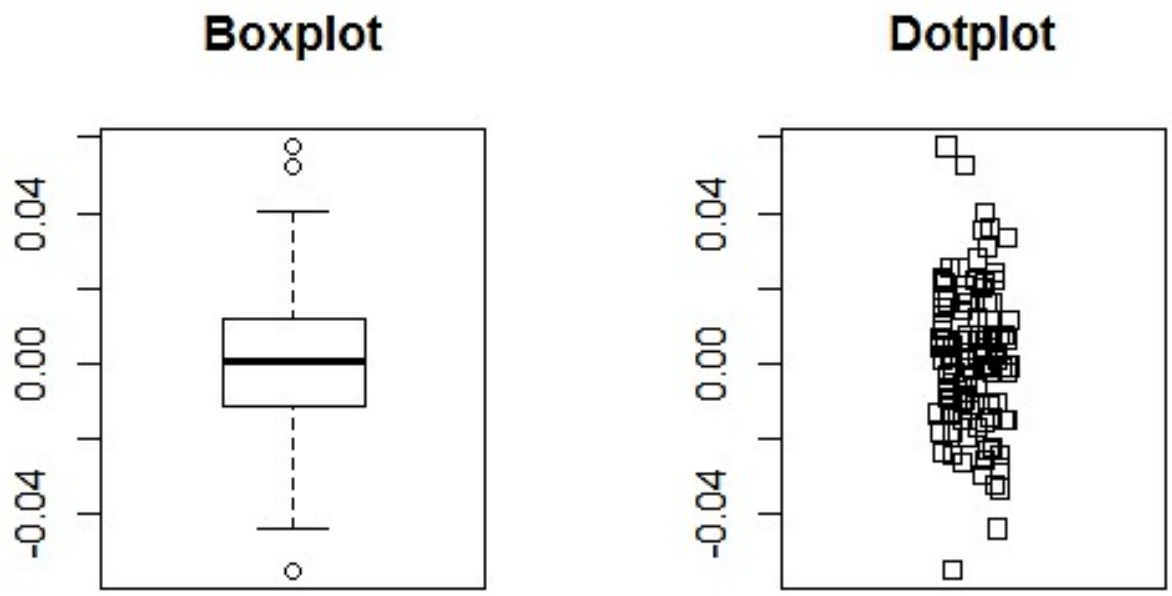

Abbildung 4.3: Boxplot und Dotplot der Aktienreturns

Abbildung 4.3 besteht aus zwei Grafiken, welche die Verteilung der Returns widerspiegeln.

Boxplot: Er zeigt, dass die Verteilung einigermaßen symmetrisch ist. In der Box befinden sich die mittleren 50% der Daten. Begrenzt ist die Box durch das 25% und 75% Quantil. Der Strich in der Mitte bezeichnet den Median der Daten. Da dieser mittig liegt, ist die zugrunde liegende Verteilung nicht schief. Die beiden Kennzeichnungen außerhalb der Box, welche durch eine strichlierte Linie mit dem Rechteck verbunden sind, heißen Whiskers. Alles außerhalb dieses Bereichs, wird als Ausreißer deklariert. Ausreißer werden durch Punkte in der Grafik angezeigt.

Dotplot: Hierbei wird jeder einzelne Datenpunkt als kleines Quadrat geplottet.

Mittels R kann man sich auch zusätzlich eine Zusammenfassung der Daten ausgeben lassen.

```
> summary(data)
Datum          Erste.Bank        OMV          Portfoliowert    Return
1.02.16:   Min.   :22.75   Min.   :21.45   Min.   :3823   Min.   :-0.0548275
1.03.16:   1st Qu.:24.55   1st Qu.:23.59   1st Qu.:4133   1st Qu.:-0.0110859
1.04.16:   Median :25.24   Median :24.89   Median :4265   Median : 0.0009716
1.12.15:   Mean   :25.70   Mean   :24.65   Mean   :4296   Mean   : 0.0010107
2.02.16:   3rd Qu.:26.82   3rd Qu.:25.61   3rd Qu.:4371   3rd Qu.: 0.0120804
2.03.16:   Max.   :29.04   Max.   :27.23   Max.   :4801   Max.   : 0.0575835
```

Es gilt die Verteilung der Returns des obigen Portfolios herauszufinden. Zuerst schätzt man Mittelwert und Varianz. Aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen, kann man dies wie folgt machen, wobei n die Anzahl der

gegebenen Returns X_i bezeichnet.

$$\mathbb{E}[X]_{\text{Schätzer}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.11}$$

$$\mathbb{V}[X]_{\text{Schätzer}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X]_{\text{Schätzer}})^2 \tag{4.12}$$

Da häufig angenommen wird, dass Aktienreturns normalverteilt sind, stellt sich die Frage, ob auch diese Portfolioreturns einer Normalverteilung mit oben berechneten Erwartungswert und Varianz folgen. Zuerst wird dies graphisch mittels Q-Q Plot nachgeprüft.

```
> qqnorm(returns, pch=1, col="orange")
> qqline(returns, lwd=1.5, col="black")
```

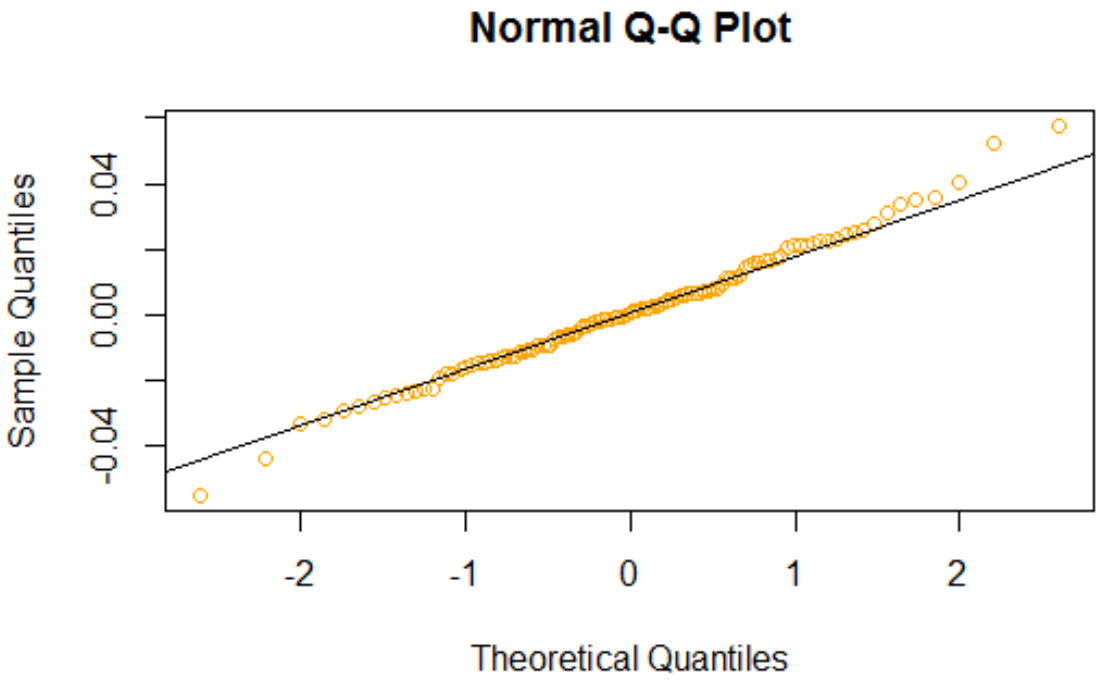

Abbildung 4.4: Q-Q Plot der Aktienreturns

Die graphische Darstellung schließt die Normalverteilungs-Annahme zumindest nicht aus. Es wird nun mittels Kolmogoroff-Smirnoff-Test (KS-Test) nachgeprüft, ob eine Normalverteilung mit geschätztem Mittelwert und Varianz vorliegt.

Bei dem KS-Test wird die empirische Verteilungsfunktion $\hat{\mathrm{F}}_n$ als Schätzer für die Verteilung verwendet.

$$\hat{\mathrm{F}}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

Grundlage des Tests ist der folgende Satz:

Satz 4.9. *Für eine Stichprobe $X_1, ..., X_n$ aus einer Verteilung mit stetiger Verteilungsfunktion F ist die Verteilung von*

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |i/n - F(X_{i:n})|, |F(X_{i:n}) - (i-1)/n| \right\} \tag{4.14}$$

unabhängig von F.

Hierbei bezeichnet $X_{i:n}$ die i-te Ordnungsstatistik aus n Stichproben, somit also den i-kleinsten Stichprobenwert. In obiger Gleichung herrscht Gleichheit, da das Supremum nur an einer Sprungstelle der empirischen Verteilungsfunktion $\hat{\mathrm{F}}_n$ angenommen werden kann.

Der Test zum Niveau $\alpha(= 0.99)$ lautet dann:

$$\mathcal{H}_0 : F(x) = F_0(x) \; \forall x \qquad gegen \qquad \mathcal{H}_1 : \exists x \text{ mit } F(x) \neq F_0(x) \tag{4.15}$$

Die Nullhypothese wird verworfen, falls die Teststatistik $D_n > d_{n;1-\alpha}$ ist. Die Werte $d_{n;1-\alpha}$ für Normalverteilung stammen aus H.W. LILLIEFORS.

```
> dist.norm <- function(DATEN) {
+   n <- length(DATEN)
+   mu <- mean(DATEN)      # geschaetzter Erwartungswert
+   sig<- sd(DATEN)        # geschaetzte Standardabweichung
+   d.s <- sort(DATEN)
+   e.1 <- (1:n)/n
+   e.2 <- (0:(n-1))/n
+   Fx <- pnorm(d.s,mu, sig)
+   ABS <- c(abs(Fx-e.1),abs(Fx-e.2))
+   D <- max(ABS)
+   D
+ }

> T <- dist.norm(ret)
> n <- length(ret)
> if( T > 1.031 / sqrt(n) )
        {print("H0 wird verworfen")}
> if( T <= 1.031 / sqrt(n) )
        {print("H0 wird beibehalten")}
[1] "H0 wird beibehalten"
> T
[1] 0.06633624
```

Der Test liefert das Ergebnis D_n = 0,06633624. Dieses ist kleiner als $1,031/\sqrt{(n)} = 0,09875189$. Aus diesem Grund wird die $\mathcal{H}_0$ beibehalten und es wird in weiterer Folge für die Berechnungen davon ausgegangen, dass die Returns des Aktienportfolios normalverteilt sind.

Returns R $\sim NV(\mu; \sigma^2)$ mit Mittelwert μ=0,00101066 und Standardabweichung σ=0,019009609.

$$
\begin{aligned}
ES_\alpha(R) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\alpha(u)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mu + \sigma\cdot\Phi^{-1}(u)du \\
&= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\cdot\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))
\end{aligned}
$$

Hierbei bezeichnet φ die Dichtefunktion und Φ die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung. Somit berechnet sich der Expected Shortfall zu $\alpha = 97,5\%$ mittels:

$$
\begin{aligned}
ES_\alpha(R) &= 0,00101066 + \frac{0,019009609}{0,025}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-\frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2}{2}) \\
&= 0,00101066 + \frac{0,019009609}{0,025}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-\frac{(1,96)^2}{2}) \\
&= 0,04545
\end{aligned}
$$

Das heißt der durchschnittliche Verlust in den 2,5% schlechtesten Fällen beträgt eine prozentuelle Veränderung ins Negative von 4,545%. Ausgehend von dem derzeitigen Wert $P_{09.05.2016}$ ergäbe sich somit ein ES des Portfolios von:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{(ES - P_{09.05.2016})}{P_{09.05.2016}} = 0,04545 \\
\Leftrightarrow \quad & ES - P_{09.05.2016} = -0,04545\cdot P_{09.05.2016} \\
\Leftrightarrow \quad & ES = -0,04545\cdot 4.076,50 + 4.076,50 \\
\Leftrightarrow \quad & ES = 3.891
\end{aligned}
$$

Eine andere Variante ohne Verteilungsschätzung soll auch vorgestellt werden. Im Folgenden werden die Ergebnisse mittels historischer Simulation berechnet.

Bei der historischen Simulation errechnet man sich wieder die Returns R_i und sortiert diese der Höhe nach aufsteigend. Der Expected Shortfall errechnet sich dann mittels

$$
ES_\alpha(R) = \frac{1}{\lceil(1-\alpha)\cdot n\rceil + 1}\cdot\sum_{i=\lfloor\alpha\cdot n\rfloor}^{n} R_i. \tag{4.16}
$$

$\alpha = 97,5\%$, n=109 ist die Anzahl der Returns und damit folgt $ES_\alpha(R) = 0,0465$. Was für das Portfolio einen Wert von $ES_{Portfolio} = 3.887$ liefert.

4.2.2 BAWAG Portfolio

Für das Forecasting des BAWAG Portfolios werden die ersten 209 Datenpunkte verwendet. Das Portfolio besteht aus verschiedensten Finanzmarktprodukten wie Bonds, Floors, Swaps, Optionen. Teilweise handelt es sich um Long und teilweise um Short Positionen.

Abbildung 4.5: Boxplot und Dotplot der BAWAG-Returns

Abbildung 4.5 besteht aus zwei Grafiken, welche die Verteilung der Returns widerspiegeln. Man erkennt, dass es eine Häufung um die Null gibt, jedoch sehr hohe Ausreißer dabei sind.

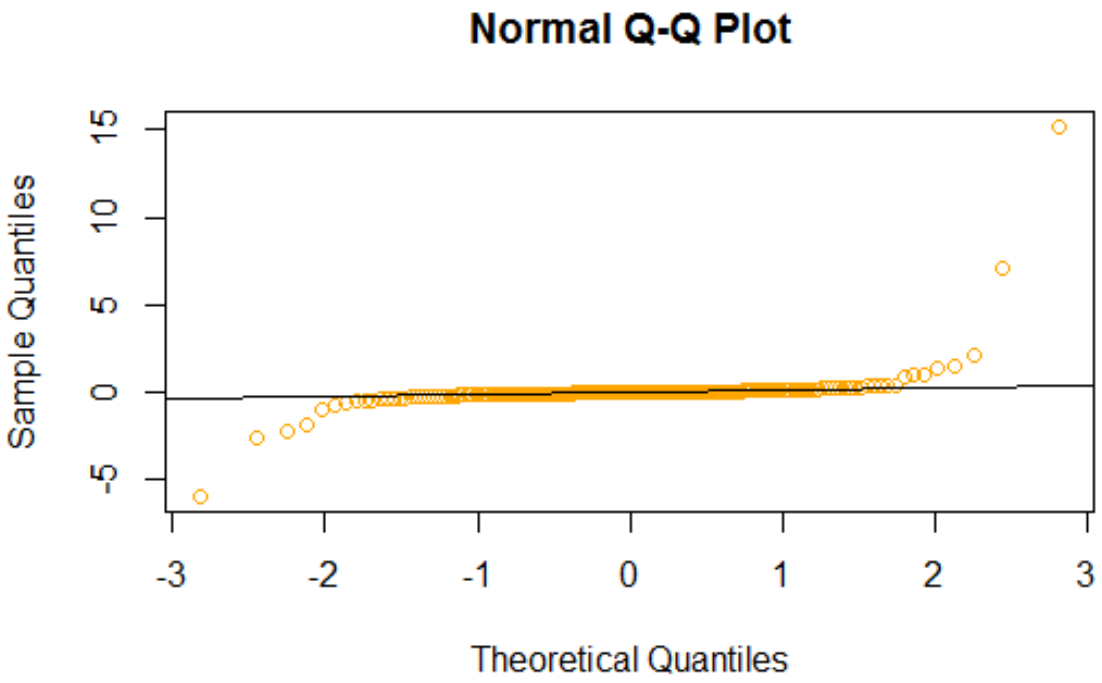

Abbildung 4.6: Q-Q Plot der BAWAG-Returns

Der Q-Q Plot zeigt bereits, dass diese Daten wohl eher nicht normalverteilt sind. Der KS-Test zeigt ebenfalls,

dass die $\mathcal{H}_0$ mit einem Testwert D_n=0,3734315 zu verwerfen ist.

Es wird aus diesem Grund auf die historische Simulation zur Berechnung der Risikomaße zurückgegriffen. Die 208 Returns welche aus den Daten berechnet wurden, lauten in aufsteigender Reihenfolge, wie folgt:

```
> ret
[  1] -5.910519801 -2.537601526 -2.156143633 -1.840414897 -0.920216465 -0.783082532
[  7] -0.581554789 -0.525000569 -0.502213759 -0.484744391 -0.385859420 -0.346830306
[ 13] -0.345328289 -0.334124867 -0.314978186 -0.282745947 -0.275130471 -0.274438311
[ 19] -0.270815674 -0.264486417 -0.221190925 -0.220324517 -0.194570048 -0.187812998
[ 25] -0.181010109 -0.178765443 -0.170929838 -0.153868600 -0.145144786 -0.141429943
[ 31] -0.137422546 -0.129026853 -0.128606588 -0.125385842 -0.122426208 -0.121146881
[ 37] -0.118628720 -0.117112077 -0.114763254 -0.111077157 -0.105563019 -0.104312183
[ 43] -0.104037535 -0.103427281 -0.102142755 -0.102082620 -0.101129666 -0.100490822
[ 49] -0.099526923 -0.096325389 -0.092879519 -0.091347757 -0.089015697 -0.087119244
[ 55] -0.083749823 -0.082939582 -0.080796829 -0.078273488 -0.076458784 -0.075633243
[ 61] -0.069042791 -0.064676886 -0.063230070 -0.062442230 -0.059648198 -0.059365997
[ 67] -0.056591396 -0.055779767 -0.053456242 -0.051154467 -0.051082091 -0.050696155
[ 73] -0.049296812 -0.046344064 -0.042128821 -0.039770512 -0.038511086 -0.037479262
[ 79] -0.036186524 -0.034632679 -0.034399913 -0.032494739 -0.031182147 -0.030471789
[ 85] -0.028279196 -0.025954439 -0.023952646 -0.021793730 -0.018582580 -0.018444788
[ 91] -0.014094072 -0.013857388 -0.013499397 -0.011484101 -0.011141120 -0.008926045
[ 97] -0.007944042 -0.003854946 -0.003517707 -0.002111587 -0.001415100 -0.001089197
[103]  0.000466252  0.002954827  0.003096718  0.004735166  0.005269603  0.006417311
[109]  0.007785019  0.008739910  0.010215414  0.010968278  0.011952002  0.012478506
[115]  0.012668127  0.013116180  0.013698805  0.014693464  0.015599785  0.016542235
[121]  0.017611528  0.018723178  0.019793327  0.020515421  0.025042651  0.026734665
[127]  0.027082109  0.028483973  0.029386731  0.029786966  0.030970438  0.032316702
[133]  0.033202978  0.034746967  0.035868243  0.040157663  0.040807494  0.041886578
[139]  0.042360825  0.042375006  0.046072015  0.047066031  0.050036944  0.051242102
[145]  0.051801841  0.053233091  0.054554891  0.054860221  0.055863824  0.056408124
[151]  0.056637626  0.057962406  0.064508231  0.067478901  0.067726145  0.072173362
[157]  0.072873943  0.078558934  0.079231876  0.080331965  0.085282030  0.085306527
[163]  0.091371241  0.092333556  0.094060766  0.095908595  0.095958339  0.103001370
[169]  0.103616518  0.104980924  0.113475874  0.120437046  0.126449917  0.129147324
[175]  0.132018021  0.133150975  0.137756182  0.139548539  0.148054954  0.157193502
[181]  0.159005136  0.171041571  0.173612721  0.176549515  0.181405208  0.191664944
[187]  0.207396719  0.209458902  0.216480719  0.224096374  0.227330575  0.229062152
[193]  0.279848764  0.281434252  0.291128252  0.343645324  0.426341979  0.428184818
[199]  0.433783585  0.453117371  0.849859301  0.997094572  1.014774194  1.352456081
[205]  1.500803445  2.150196206  7.072556480 15.155965770
```

Unter der Verwendung von Formel (4.16) ergibt sich

$$ES_\alpha(R) = \frac{1}{7} \cdot 29,24384675 = 4,1777.$$

4.3 Backtesting

Zur Validierung der Forecasts und speziell um zu sehen, ob die verwendeten Methoden die Risikomaße korrekt berechnen, wird Backtesting verwendet. Hierbei überprüft man die Forecasting-Methode, indem man

sie auf historische Daten anwendet. Laut Basel[4] muss das Backtesting für jeden 1-Tages Value at Risk für $\alpha = 97,5\%$ und $\alpha = 99\%$ durchgeführt werden. Dabei sind die Daten der letzten 12 Monate heranzuziehen. Beim Backtesting werden die tatsächlich realisierten Returns mit jenen der von Risikomaßen im Forecasting generierten verglichen. Abhängig vom gewählten α sollte das Risikomaß meist über dem realisierten Ergebnis liegen.

Da der Expected Shortfall nicht gut backgetestet werden kann, wird auf eine Approximation zurückgegriffen. (Siehe Acerbi und Tasche [1].)

$$ES_\alpha(R) \approx \frac{1}{4}[VaR_\alpha(R) + VaR_{0,75\cdot\alpha+0,25}(R) + VaR_{0,5\cdot\alpha+0,5}(R) + VaR_{0,25\cdot\alpha+0,75}(R)] \tag{4.17}$$

Laut dieser Approximation kann der Expected Shortfall validiert werden, indem die Plausibilität der vier Value at Risk Werte überprüft wird.

Die Elizitabilität des Value at Risk impliziert die Existenz einer strikt konsistenten Trefferfunktion s. Diese ist für den Value at Risk gegeben durch[5]:

$$s(VaR_\alpha(R), X) = (\mathbf{1}_{\{VaR_\alpha(R) \geq X\}} - \alpha) \cdot (VaR_\alpha(R) - X) \tag{4.18}$$

Hierbei bezeichnet X den realisierten Return. Mittels Umformen kann die Trefferfunktion auch durch

$$S(VaR_\alpha(R), X) = (1-\alpha) \cdot (X - VaR_\alpha(R))^- + \alpha \cdot (X - VaR_\alpha(R))^+ \tag{4.19}$$

beschrieben werden. $(...)^-$ bezeichnet dabei den Negativteil, während $(...)^+$ den Positivteil bezeichnet.

Die strikt konsistente Trefferfunktion liefert den Schätzer

$$\text{VaR} = \arg\min_x \mathbb{E}[s(x, X)]. \tag{4.20}$$

Diese Gleichung führt unter der Voraussetzung, dass sowohl die Ableitung existiert als auch Ableitung und Erwartungswert vertauscht werden dürfen zu

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\mathbb{E}[s(x,X)]|_{x=\text{VaR}} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[\frac{d}{dx}s(x,X)|_{x=\text{VaR}}] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[\frac{d}{dx}(\mathbf{1}_{\{x\geq X\}} - \alpha)\cdot(x-X)|_{x=\text{VaR}}] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[(\mathbf{1}_{\{x\geq X\}} - \alpha)|_{x=\text{VaR}}] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[(\mathbf{1}_{\{VaR\geq X\}} - \alpha)] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{P}[VaR \geq X] \stackrel{!}{=} \alpha \\
\Rightarrow \quad & 1 - \mathbb{P}[X > VaR] \stackrel{!}{=} \alpha \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{P}[X > VaR] \stackrel{!}{=} 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit einer Value at Risk Überschreitung. Es bezeichne $I_t := \mathbf{1}_{\{X_t > VaR_{t-1}\}}$ den Indikator einer solchen Überschreitung. Dieser sollte unter Annahme, dass der Value at Risk richtig berechnet

[4] Vgl. [5].
[5] Siehe [12].

wurde, bernoulliverteilt sein mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$.

Betrachtet man die Trefferfunktion zu verschiedenen Zeiten, so erhält man für einen Zeithorizont m

$$\tilde{s} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s(VaR_{t+i-1}(R), X_{t+i}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha \cdot (X_{t+i} - VaR_{t+i-1})^{+} + (1-\alpha)\cdot(X_{t+i} - VaR_{t+i-1})^{-}$$

Die Summe solcher Indikatoren über höhere Zeithorizonte sollte somit binomialverteilt sein. Diese Eigenschaft kann verwendet werden, um den Value at Risk zu validieren. Christoffersen [10] verwendet einen Likelihood Ratio Test um auf Binomialverhalten zu testen.

Dazu müssen zwei Tests durchgeführt werden.

- Teste ob $\mathbb{E}[I_t(\alpha)] = 1-\alpha$. D.h. man testet, ob die einzelnen Indikatoren bernoulliverteilt sind.
- Teste auf Unabhängigkeit von $I_t(\alpha)$ und $I_s(\alpha)$.

Man berechnet zuerst die Likelihood einer $Ber(1-\alpha)$ verteilten Folge von Zufallsvariablen.

$$L(1-\alpha) = \alpha^{T_0}\cdot(1-\alpha)^{T_1}$$

T_0 ... Anzahl der 0er in Daten = Anzahl der Nicht Überschreitungen des VaR
T_1 ... Anzahl der 1er in Daten = Anzahl der Überschreitungen des VaR

Die $\mathcal{H}_0$, welche beim Test auf Bernoulli Verteilung zugrunde liegt, lautet:

$$\mathcal{H}_0 : \qquad \mathbb{E}[I_t] := v = 1-\alpha$$

Der Wert v errechnet sich aus den Daten. T sei die Anzahl der gegebenen Daten.

$$v = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t = T_1/T$$

Somit ergibt sich die Likelihood von $I_t \sim Ber(v)$ durch:

$$L(v) = \left(1-\frac{T_1}{T}\right)^{T_0}\cdot\left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1} \tag{4.21}$$

Die Teststatistik des Likelihood Ratio Tests lautet somit

$$LR_{ub} = -2\cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] \sim \chi_1^2. \tag{4.22}$$

Der Chi-Quadrat Test mit Freiheitsgrad 1 wird typischerweise für Signifikanzniveaus 1%, 5% oder 10% durchgeführt.

Anmerkung: Bei nur wenigen Daten sollte besser auf Monte Carlo Simulation zurückgegriffen werden. Siehe hierzu [11].

Der Test auf Unabhängigkeit verwendet ebenfalls einen Likelihood Ansatz. Sind wieder T Daten gegeben, so ist die Likelihoodfunktion der Übergangsmatrix

P= $\begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix}$

gegeben durch

$$L(P) = (1-p_{01})^{T_{00}} \cdot p_{01}^{T_{01}} \cdot (1-p_{11})^{T_{10}} \cdot p_{11}^{T_{11}}, \tag{4.23}$$

wobei T_{ij} mit i,j=0,1 die Anzahl jener Beobachtungen angibt, welche zum Zeitpunkt t von Beobachtung i starten und in t+1 in Beobachtung j übergehen. 0 bedeutet wieder keine Überschreitung während 1 eine Value at Risk Überschreitung bezeichnet.

Nun müssen mittels Maximum Likelihood Schätzer die Werte für p_{01} und p_{11} berechnet werden.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dp_{i1}} ln(L(P)) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dp_{i1}} (T_{00} \cdot ln(1-p_{01}) + T_{01} \cdot ln(p_{01}) + T_{10} \cdot ln(1-p_{11}) + T_{11} \cdot ln(p_{11})) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{T_{i0}}{1-p_{i1}} \cdot (-1) + \frac{T_{i1}}{p_{i1}} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & T_{i1} - T_{i1} \cdot p_{i1} - T_{i0} \cdot p_{i1} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & p_{i1} \stackrel{!}{=} \frac{T_{i1}}{T_{i0} + T_{i1}}
\end{aligned}$$

Damit folgt auch:

$$p_{00} = 1 - p_{01} = \frac{T_{00}}{T_{00} + T_{01}}$$
$$p_{10} = 1 - p_{11} = \frac{T_{10}}{T_{10} + T_{11}}$$

Zum Testen auf Unabhängigkeit ($\Leftrightarrow p_{01} = p_{11}$) wird wieder ein Likelihood Ratio Test mit nachfolgender Teststatistik verwendet.

$$LR_{ua} = -2 \cdot ln \left[\frac{L(v)}{L(P)} \right] \sim \chi_1^2 \tag{4.24}$$

Anmerkung: In [11] werden auch noch andere Methoden zur Unabhängigkeitstestung angegeben.

4.3.1 Aktienportfolio

Im Folgenden werden alle Returns des Aktienportfolios zum Backtesting herangezogen. Es werden jene vier verschiedenen Quantile versucht zu validieren, durch welche der Expected Shortfall zu α=97,5% approximiert wird.

Test auf Bernoulli Verteilung VaR = 97,5%

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & 3 \\ T_0 & = & 117 \\ T & = & 120 \end{array} \qquad v = \frac{1}{120} \cdot \sum_{t=1}^{120} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{3}{120} = 0,025$$

Daraus ergibt sich folgender Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-0,025)^{117} \cdot 0,025^3 = 8,08 \cdot 10^{-7} \tag{4.25}$$

Da $L(1-\alpha) = L(0,025)$ exakt denselben Wert liefert, ist die Teststatistik = 0 und wird, unabhängig vom gewählten Signifikanzniveau des Tests, sicher nicht verworfen.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 98,125%

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & 3 \\ T_0 & = & 117 \\ T & = & 120 \end{array} \qquad v = \frac{1}{120} \cdot \sum_{t=1}^{120} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{3}{120} = 0,025$$

Daraus ergibt sich wieder der folgende Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-0,025)^{117} \cdot 0,025^3 = 8,08 \cdot 10^{-7} \tag{4.26}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert

$$L(1-\alpha) = L(0,01875) = 0,98125^{117} \cdot 0,01875^3 = 7,2 \cdot 10^{-7}. \tag{4.27}$$

Mit obigen Ergebnissen kann der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 0,23 \tag{4.28}$$

Mittels des R Befehls qchisq(0.975,1) wird das 97,5% Quantil mit Freiheitsgrad 1 berechnet. Dieses Quantil hat den Wert 5,023886. Die anderen Quantile der χ^2-Verteilung können analog berechnet werden und ergeben $\chi^2(95\%) = 3,841459$ und $\chi^2(90\%) = 2,705543$.

$\mathcal{H}_0$ wird beibehalten, da $LR_{ub} = 0,23 < \chi^2_1(0,975)$. Auch für die beiden anderen Signifikanzniveaus würde die $\mathcal{H}_0$ beibehalten werden.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 98,75%

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & 2 \\ T_0 & = & 118 \\ T & = & 120 \end{array} \qquad v = \frac{1}{120} \cdot \sum_{t=1}^{120} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{2}{120} = 0,016667$$

Daraus ergibt sich der folgende Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-0,016667)^{118} \cdot 0,016667^2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \tag{4.29}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert:

$$L(1-\alpha) = L(0,0125) = 0,9875^{118} \cdot 0,0125^2 = 3,5 \cdot 10^{-5} \tag{4.30}$$

Mit diesen Ergebnissen kann wieder der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 0,15 \tag{4.31}$$

$\mathcal{H}_0$ wird auch hier beibehalten, da $LR_{ub} = 0,15 < \chi^2_1(0,975) = 5,023886$.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 99,375%

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & 2 \\ T_0 & = & 118 \\ T & = & 120 \end{array} \qquad v = \frac{1}{120} \cdot \sum_{t=1}^{120} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{2}{120} = 0,016667$$

Daraus ergibt sich folgender Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-0,016667)^{118} \cdot 0,016667^2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \tag{4.32}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert:

$$L(1-\alpha) = L(0,00625) = 0,99375^{118} \cdot 0,00625^2 = 1,86 \cdot 10^{-5} \tag{4.33}$$

Mit diesen Ergebnissen kann der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 1,44 \tag{4.34}$$

$\mathcal{H}_0$ wird somit beibehalten, da $LR_{ub} = 1,44 < \chi^2_1(0,975)$.

Dass die $\mathcal{H}_0$ nicht verworfen wurde, ist nicht sehr überraschend, da ein Großteil der Daten ja bereits für das Forecasting verwendet wurde.

Test auf Unabhängigkeit für VaR = 97,5% & VaR 98,125%

Da für VaR = 97,5% und VaR 98,125% die Anzahl der Verwerfungen T_1 gleich, somit die Werte v und $L(v)$ für diese Prozentsätze ident sind, ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Teststatistik.

$$\begin{array}{rcl} T_{01} & = & 3 \\ T_{11} & = & 0{,}0000001^a \\ T_{10} & = & 3 \\ T_{00} & = & 113 \end{array}$$

[a] Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Mithilfe dieser Werte kann die Übergangsmatrix P berechnet werden.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97414 & 0,02586 \\ 0,99999 & 3,3 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Likelihoodfunktion der Übergangsmatrix P:

$$L(P) = (0,97414)^{113} \cdot 0,02586^3 \cdot (0,99999)^3 \cdot (3,3 \cdot 10^{-8})^{0,0000001} = 8,956 \cdot 10^{-7} \tag{4.35}$$

Die Teststatistik ergibt somit, unter Verwendung des Ergebnisses von Gleichung (4.29)

$$LR_{ua} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(v)}{L(P)}\right] = 0,206. \tag{4.36}$$

Vergleicht man dies wieder mit $\chi^2(0,975) = 5,023886$, so wird die $\mathcal{H}_0$ beibehalten.

Test auf Unabhängigkeit für VaR = 98,75% & VaR 99,375%

Da für VaR = 98,75% und VaR 99,375% die Anzahl der Verwerfungen T_1 gleich, somit die Werte v und $L(v)$ für diese Prozentsätze ident sind, ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Teststatistik.

$$\begin{aligned} T_{01} &= 2 \\ T_{11} &= 0{,}0000001^a \\ T_{10} &= 2 \\ T_{00} &= 115 \end{aligned}$$

[a]Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Mithilfe dieser Werte kann die Übergangsmatrix P berechnet werden.

$$\mathrm{P}= \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98291 & 0,01709 \\ 0,99999 & 5\cdot 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Likelihoodfunktion der Übergangsmatrix P:

$$L(P) = (0,98291)^{115} \cdot 0,01709^2 \cdot (0,99999)^2 \cdot (5\cdot 10^{-8})^{0,0000001} = 4,023 \cdot 10^{-5} \tag{4.37}$$

Die Teststatistik ergibt somit, unter Verwendung des Ergebnisses von Gleichung (4.32)

$$LR_{ua} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(v)}{L(P)}\right] = 0,0678. \tag{4.38}$$

Auch in diesem Fall gilt $\chi^2(0,975) = 5,023886 > LR_{ua}$ und die $\mathcal{H}_0$ wird aus diesem Grund beibehalten.

Da alle Value at Risk Werte zu den verschiedenen Niveaus α validiert wurden folgt, dass der Expected Shortfall erfolgreich backgetestet wurde.

4.3.2 BAWAG Portofolio

Auch für das BAWAG Portfolio soll nun das Backtesting durchgeführt werden. Wieder wurde der ES(97,5%) foregecasted und man will nun die Richtigkeit des Forecasting-Modells mit Hilfe von Backtesting überprüfen. Laut Gleichung (4.17) kann man durch Validierung von vier Value at Risk Werten auf die Richtigkeit der Expected Shortfall Modellierung schließen.

Test auf Bernoulli Verteilung VaR = 97,5%

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_0 &= 181 \\ T &= 182 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{182} \cdot \sum_{t=1}^{182} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{182} = 0,00549$$

Daraus ergibt sich folgender Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-0,00549)^{181} \cdot 0,00549^1 = 0,002 \tag{4.39}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert

$$L(1-\alpha) = L(0,025) = 0,975^{181} \cdot 0,025^1 = 2,56 \cdot 10^{-4}. \tag{4.40}$$

Mit obigen Ergebnissen kann der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 4,14 \tag{4.41}$$

Die zum Testen verwendeten Quantile der χ^2-Verteilung haben die Werte $\chi^2(97,5\%) = 5,023886$, $\chi^2(95\%) = 3,841459$ und $\chi^2(90\%) = 2,705543$.

$\mathcal{H}_0$ wird beibehalten, da $LR_{ub} = 4,14 < \chi^2_1(0,975)$. Jedoch würde die Hypothese für die anderen Signifikanzniveaus verworfen werden. Grund ist, dass sich die aktuellen Daten sehr stabil verhalten und es kaum hohe Returns gegeben hat. Die Verwerfung bei den anderen Signifikanzniveaus deutet darauf hin, dass das Forecasting-Modell eventuell zu konservativ ist.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 98,125%

$$\begin{array}{lcl} T_1 & = & 1 \\ T_0 & = & 181 \\ T & = & 182 \end{array} \qquad v = \frac{1}{182} \cdot \sum_{t=1}^{182} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{182} = 0,00549$$

Daraus ergibt sich wieder der folgende Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = 0,002 \tag{4.42}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert nun

$$L(1-\alpha) = L(0,01875) = 0,98125^{181} \cdot 0,01875^1 = 6,1 \cdot 10^{-4}. \tag{4.43}$$

Die Teststatistik ergibt somit den Wert

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 2,40. \tag{4.44}$$

$\mathcal{H}_0$ wird beibehalten, da $LR_{ub} = 2,40 < \chi^2_1(0,975)$. Auch für die beiden anderen Signifikanzniveaus würde die $\mathcal{H}_0$ beibehalten werden, da für höheres α weniger Überschreitungen erwartet werden.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 98,75%

$$\begin{array}{lcl} T_1 & = & 0,0000001\ ^a \\ T_0 & = & 182 \\ T & = & 182 \end{array} \qquad v = \frac{1}{182} \cdot \sum_{t=1}^{182} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{0,0000001}{182} = 5,5 \cdot 10^{-10}$$

[a] Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Daraus ergibt sich der folgende Wert der Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-v)^{182} \cdot v^{0,0000001} = 99,9 \cdot 10^{-2} \tag{4.45}$$

Hingegen liefert der Vergleichswert:

$$L(1-\alpha) = L(0,0125) = 0,9875^{182} \cdot 0,0125^{0,0000001} = 10,1 \cdot 10^{-2} \tag{4.46}$$

Mit diesen Ergebnissen kann wieder der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln\left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)}\right] = 4,58 \tag{4.47}$$

$\mathcal{H}_0$ wird auch hier beibehalten, jedoch wiederum nur für das Signifikanzniveau 2,5%. Auch hier ist das Problem, dass das Forecasting konservativ ist und mehr Value at Risk Überschreitungen prognostiziert.

Test auf Bernoulli Verteilung für VaR = 99,375%

$T_1 = 0{,}0000001$ [a]
$T_0 = 182$
$T = 182$

$$v = \frac{1}{182} \cdot \sum_{t=1}^{182} I_t = \frac{T_1}{T} = \frac{0,0000001}{182} = 5,5 \cdot 10^{-10}$$

[a] Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Daraus ergibt sich die Likelihoodfunktion von I_t:

$$L(v) = (1-v)^{T_0} \cdot v^{T_1} = (1-v)^{182} \cdot v^{0,0000001} = 99,9 \cdot 10^{-2} \tag{4.48}$$

Der Vergleichswert liefert hingegen

$$L(1-\alpha) = L(0,00625) = 0,99375^{182} \cdot 0,00625^{0,0000001} = 31,95 \cdot 10^{-2}. \tag{4.49}$$

Mit diesen Ergebnissen kann der Wert der Teststatistik errechnet werden.

$$LR_{ub} = -2 \cdot ln \left[\frac{L(1-\alpha)}{L(v)} \right] = 2,28 \tag{4.50}$$

$\mathcal{H}_0$ wird somit beibehalten.

Test auf Unabhängigkeit für VaR = 97,5% & VaR 98,125%

Da für VaR = 97,5% und VaR 98,125% die Anzahl der Verwerfungen T_1 gleich, somit die Werte v und $L(v)$ für diese Prozentsätze identisch sind, ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Teststatistik.

$T_{01} = 1$
$T_{11} = 0{,}0000001$ [a]
$T_{10} = 1$
$T_{00} = 179$

[a] Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Mithilfe dieser Werte kann die Übergangsmatrix P berechnet werden.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99444 & 0,00556 \\ 0,99999 & 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Likelihoodfunktion der Übergangsmatrix P:

$$L(P) = (0,99444)^{179} \cdot 0,00556^1 \cdot (0,99999)^1 \cdot (10^{-7})^{0,0000001} = 2,05 \cdot 10^{-3} \tag{4.51}$$

Die Teststatistik ergibt somit, unter Verwendung des Ergebnisses von Gleichung (4.39)

$$LR_{ua} = -2 \cdot ln \left[\frac{L(v)}{L(P)} \right] = 0,022. \tag{4.52}$$

Vergleicht man dies wieder mit $\chi^2(0,975) = 5,023886$, so wird die $\mathcal{H}_0$ beibehalten.

Test auf Unabhängigkeit für VaR = 98,75% & VaR 99,375%

Da für VaR = 98,75% und VaR 99,375% die Anzahl der Verwerfungen T_1 gleich, somit die Werte v und $L(v)$ für diese Prozentsätze identisch sind, ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Teststatistik.

$$\begin{aligned} T_{01} &= 0{,}0000001^a \\ T_{11} &= 0{,}0000001 \\ T_{10} &= 0{,}0000001 \\ T_{00} &= 181 \end{aligned}$$

[a]Hier gehört eigentlich 0, jedoch würde dies zu Testproblemen führen.

Mithilfe dieser Werte kann die Übergangsmatrix P berechnet werden.

$$\text{P}= \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,99999 & 5,5 \cdot 10^{-10} \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die Likelihoodfunktion der Übergangsmatrix P:

$$L(P) = (0,99999)^{181} \cdot (5,5 \cdot 10^{-10})^{0,0000001} \cdot (0,5)^{0,0000001} \cdot 0,5^{0,0000001} = 99,99 \cdot 10^{-2} \tag{4.53}$$

Die Teststatistik ergibt somit, unter Verwendung des Ergebnisses von Gleichung (4.45)

$$LR_{ua} = -2 \cdot ln \left[\frac{L(v)}{L(P)} \right] = -2,76 \cdot 10^{-7}. \tag{4.54}$$

Auch in diesem Fall gilt $\chi^2(0,975) = 5,023886 > LR_{ua}$ und die $\mathcal{H}_0$ wird aus diesem Grund beibehalten.

Da alle Value at Risk Werte zu den verschiedenen Niveaus α validiert wurden folgt, dass der Expected Shortfall erfolgreich backgetestet wurde.

Kapitel 5

Expektile

Der Expected Shortfall ist nicht elicitable und deshalb ist es nicht möglich mittels strikt konsistenter Trefferfunktion das Backtesting durchzuführen. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, ob man nicht besser ein anderes Risikomaß zur Marktrisikobewertung unter Basel 3.5 verwenden sollte.

Expektile (Expectiles) wurden hierfür in einigen Publikationen empfohlen. Vermutlich setzt sich das Wort aus den Worten "expectation" und "quantile" zusammen. Diese sind (für $\tau \geq \frac{1}{2}$) kohärent und zudem elicitable. Expektile stellen eine Verallgemeinerung von Quantilen dar. Sie minimieren eine quadratische Verlustfunktion, sind somit also Nullstellen einer gewissen Funktion.

Das erste Unterkapitel 5.1 fasst wieder die wichtigsten Eigenschaften von Expektilen aus verschiedensten Publikationen, wie Emmer [12], Bellini [8],Pinkhasik [20] und Gneiting [15], zusammen. Anschließend an dieses Unterkapitel werden wie bereits im letzten Kapitel Forecasting und Backtesting anhand von

- einem willkürlich zusammengestellten Aktienportfolio [1]
- Marktdaten eines Portfolios, welches dankenswerterweise von der BAWAG P.S.K. zur Verfügung gestellt wurde

durchgeführt.

5.1 Allgemeines

Definition 5.1. *Seien ϕ_1, $\phi_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ konvexe, streng monoton wachsende Funktionen mit $\phi_i(0) = 0$ und $\phi_i(1) = 1$.*

$$\pi_\tau(X, x) := \tau \cdot \mathbb{E}[\phi_1(max(X - x; 0))] + (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[\phi_2(max(x - X; 0))] \tag{5.1}$$

Dann heißt $x^*_\tau \in \arg\min_x \pi_\tau(X, x)$ verallgemeinertes Quantil.

Setzt man $\phi_1 = \phi_2 = x$, so erhält man die normalen Quantile. Sind $\phi_1 = \phi_2 = x^2$, so kommt man auf die Definition von Expektilen.

Definition 5.2. *Sei $\tau \in (0, 1)$ und sei X eine den Verlust modellierende, quadratintegrierbare Zufallsvariable. Das τ-Expektil $e_\tau(X)$ wurde erstmals von Newey und Powell (1987) definiert durch:*

[1] Die dabei verwendeten Daten sind im Anhang 1 zu finden.

$$e_\tau(X) = \underset{x\in\mathbb{R}}{arg\ min}\ \{\tau \cdot \mathbb{E}[max(X-x;0)^2] + (1-\tau)\cdot \mathbb{E}[max(x-X;0)^2]\} \tag{5.2}$$

Lemma 5.3. *Sei X eine integrierbare Zufallsvariable.*

$$\Rightarrow \quad e_\tau(X) \text{ ist eindeutige Lösung } x \text{ von: } \tau \cdot \mathbb{E}[max(X-x;0)] = (1-\tau)\cdot \mathbb{E}[max(x-X;0)] \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow \quad e_\tau(X) \text{ ist eindeutige Lösung } x \text{ von: } \tau \cdot \int_x^\infty (y-x)\ dF_X(y) = (1-\tau)\cdot \int_{-\infty}^x (x-y)\ dF_X(y) \tag{5.4}$$

$$\Rightarrow \quad e_\tau(X) = \frac{\tau \cdot \mathbb{E}[X\cdot \mathbf{1}_{\{X>e_\tau(X)\}}] + (1-\tau)\cdot \mathbb{E}[X\cdot \mathbf{1}_{\{X\le e_\tau(X)\}}]}{\tau\cdot\mathbb{P}[X>e_\tau(X)] + (1-\tau)\cdot\mathbb{P}[X\le e_\tau(X)]} \tag{5.5}$$

Proposition 5.4. *Das $\tau-$Expektil ist ein monetäres Risikomaß.*

Beweis. Zur Monotonie (M): Gegeben seien zwei den Verlust modellierende Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $X \le Y$ und $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.

$X \le Y$

$\Rightarrow max(X-x;0) \le max(Y-x;0)$
$\Rightarrow max(x-X;0) = -max(X-x;0) \ge -max(Y-x;0) = max(x-Y;0)$
$\Rightarrow \mathbb{E}[max(X-x;0)] \le \mathbb{E}[max(Y-x;0)] \qquad$ und $\qquad \mathbb{E}[max(x-X;0)] \ge \mathbb{E}[max(x-Y;0)]$

Die Funktion $max(X-x;0)$ ist in x monoton fallend, während die Funktion $max(x-X;0)$ in x monoton wachsend ist. Somit erhält man

$$\tau\cdot\mathbb{E}[max(X-x;0)] - (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max(x-X;0)] \le \tau\cdot\mathbb{E}[max(Y-x;0)] - (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max(x-Y;0)]. \tag{5.6}$$

Unter Verwendung von Folgerung 1 aus Lemma 5.3 ergibt sich somit, dass für $e_\tau(X)$ die linke Seite in Gleichung (5.6) gleich 0 ist, während die rechte Seite noch $\ge$ Null ist. Umgekehrt ist für $e_\tau(Y)$ die rechte Seite von Gleichung (5.6) gleich Null, die linke Seite aber bereits $\le$ Null. Folglich wird die Nullstelle der linken Seite früher bzw. zur gleichen Zeit angenommen als die Nullstelle der rechten Seite von Gleichung (5.6).

Damit folgt für das τ-Expektil mit $\tau \in (0,1)$

$$\Rightarrow e_\tau(X) \le e_\tau(Y)$$

Zur Translationsinvarianz (T): Sei $X \in \mathcal{M}$ Zufallsvariable des Verlustes, für die $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ gilt. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest.

Sei $Y = X + c$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\tau\cdot\mathbb{E}[max(Y-x;0)] - (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max(x-Y;0)] \\
&= \tau\cdot\mathbb{E}[max(X+c-x;0)] - (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max(x-X-c;0)] \\
&= \tau\cdot\mathbb{E}[max(X-(x-c);0)] - (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max((x-c)-X;0)].
\end{aligned}$$

Damit hat letzterer Ausdruck seine Nullstelle bei $e_\tau(X) + c = e_\tau(Y) = e_\tau(X+c)$.

□

Proposition 5.5. *Das τ – Expektil ist zudem subadditiv und positiv homogen für $\tau \in [\frac{1}{2}, 1)$. Folglich ist es ein kohärentes und somit aufgrund von Lemma 3.4 auch ein konvexes Risikomaß.*

Beweis. Zur Positiven Homogenität (PH): Sei $X \in \mathcal{M}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $c > 0$ beliebig aber fest.

Sei $Y = c \cdot X$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\tau \cdot \mathbb{E}[max(Y - x; 0)] - (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(x - Y; 0)] \\
&= \tau \cdot \mathbb{E}[max(c \cdot X - x; 0)] - (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(x - c \cdot X; 0)] \\
&= \tau \cdot c \cdot \mathbb{E}[max(X - \frac{x}{c}; 0)] - (1 - \tau) \cdot c \cdot \mathbb{E}[max(\frac{x}{c} - Y; 0)].
\end{aligned}$$

Damit hat letzterer Ausdruck seine Nullstelle bei $c \cdot e_\tau(X) = e_\tau(Y) = e_\tau(c \cdot X)$.

Zur Subadditivität (S):
Seien nun $X, Y \in \mathcal{M}$ zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Sei $\tau \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Für $x = e_\tau(X)$ gilt laut Lemma 5.3

$$\begin{aligned}
& \tau \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0)] = (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(x - X; 0)] \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}[max(x - X; 0)] = \frac{\tau}{1 - \tau} \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0)]
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X - x] = \mathbb{E}[max(X - x; 0)] - \mathbb{E}[max(x - X; 0)]. \tag{5.7}$$

Unter Verwendung von Gleichung (5.7) ist also $x = e_\tau(X)$ äquivalent zu

$$\mathbb{E}[X - x] = \mathbb{E}[max(X - x; 0)] - \frac{\tau}{1 - \tau} \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0)] = (1 - \frac{\tau}{1 - \tau}) \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0)]. \tag{5.8}$$

Man betrachte nun $Z = X + Y$ mit $z = x + y$ als eindeutige Nullstelle von

$$\tau \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] = (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(z - Z; 0)]$$

und damit $z = e_\tau(Z)$.

$$\begin{aligned}
& \tau \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(z - Z; 0)] \\
\overset{(5.7)}{=} & \tau \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - (1 - \tau) \cdot (\ \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - \mathbb{E}[Z - z]\ ) \\
= & \tau \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - (1 - \tau) \cdot (\ \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - \mathbb{E}[X - x] - \mathbb{E}[Y - y]\ ) \\
\overset{(5.8)}{=} & \tau \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - (1 - \tau) \cdot (\ \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] - (1 - \frac{\tau}{1 - \tau}) \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0) + max(Y - y; 0)]\ ) \\
= & (2 \cdot \tau - 1) \cdot \mathbb{E}[max(Z - z; 0)] + (1 - 2 \cdot \tau) \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0) + max(Y - y; 0)] \\
= & (2 \cdot \tau - 1) \cdot \mathbb{E}[max(X - x + Y - y; 0) - max(X - x; 0) - max(Y - y; 0)] \\
\leq & (2 \cdot \tau - 1) \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0) + max(Y - y; 0) - max(X - x; 0) - max(Y - y; 0)] \\
= & 0 \\
= & \tau \cdot \mathbb{E}[max(X - x; 0)] - (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(x - X; 0)] + \tau \cdot \mathbb{E}[max(Y - y; 0)] - (1 - \tau) \cdot \mathbb{E}[max(y - Y; 0)]
\end{aligned}$$

Somit folgt, dass die Nullstelle des Anfangsterms früher bzw. zur gleichen Zeit angenommen wird wie die Nullstelle des Endterms.

$$\Rightarrow e_\tau(X+Y) \leq e_\tau(X) + e_\tau(Y) \qquad \forall\ \tau \in [\frac{1}{2}, 1) \tag{5.9}$$

Die obigen Ungleichungszeichen gelten natürlich in dieser Richtung nur, weil $\tau \in [\frac{1}{2}, 1)$ vorausgesetzt ist. Für $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ würden sich diese Ungleichungszeichen umdrehen, da dann der Term $(2 \cdot \tau - 1) \leq 0$ wäre und man würde Superadditivität erhalten. □

Proposition 5.6. *(Emmer [12]) τ-Expektile mit $\tau \in [\frac{1}{2}, 1)$ sind nicht komonoton additiv.*

Beweis. Wäre e_τ komonoton additiv, dann wäre es laut Theorem 3.6 von Tasche [23] ein sogenanntes Spektral-Risikomaß. Aber dann wäre es laut Korollar 4.3 von Ziegel [24] nicht elicitable im Widerspruch zu Proposition 5.8.[2] □

Proposition 5.7. *Expektile sind verteilungsinvariant.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ zwei Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung.
Es folgt sofort, das die beiden Zufallsvariablen auch denselben Erwartungswert haben. Damit erhält man

$$\begin{aligned} e_\tau(X) &= \arg\min_{x \in \mathbb{R}} \{\tau \cdot \mathbb{E}[max(X-x;0)^2] + (1-\tau) \cdot \mathbb{E}[max(x-X;0)^2]\} \\ &= \arg\min_{x \in \mathbb{R}} \{\tau \cdot \mathbb{E}[max(Y-x;0)^2] + (1-\tau) \cdot \mathbb{E}[max(x-Y;0)^2]\} = e_\tau(Y). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.8. *Expektile sind elicitable, insbesondere gilt (Theorem 10 Gneiting [15]):*

Sei $\mathcal{P}$ die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit endlichen ersten Momenten und sei $\tau \in (0,1)$. Dann gilt:

- *Das τ-Expektil ist elicitable bezüglich $\mathcal{P}$.*
- *Angenommen s ist Trefferfunktion auf $D = I \times I$, dann gilt:*
  s ist konsistent für das τ-Expektil bezüglich der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompaktem Träger auf $I \Leftrightarrow$ s ist von der Form

  $$s(x,y) = |\mathbf{1}_{\{x \geq y\}} - \tau| \cdot (\phi(y) - \phi(x) - \phi'(x) \cdot (y-x)), \tag{5.10}$$

  wobei ϕ eine konvexe Funktion mit Subgradient ϕ' auf I ist.
- *Ist ϕ strikt konvex, dann ist die Trefferfunktion (5.10) strikt konsistent für das τ-Expektil bezüglich der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf I für die sowohl $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Y)$ als auch $\mathbb{E}_\mathbb{P}(\phi(Y))$ existieren und endlich sind.*

Beweis. Der Beweis kann in Gneiting [15] nachgelesen werden.

Die Elizitabilität kann dann mit Hilfe von Punkt 3 bewiesen werden.

Sei $\phi = \frac{y^2}{(1+|y|)}$, so folgt, dass ϕ konvex ist.

[2] Die Aussagen des oben erwähnten Theorems und Korollars sind im Anhang 1 nachzulesen.

Da die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße auf I mit endlichen ersten Momenten betrachtet wird gilt, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$ endlich ist. Dies ist äquivalent zu $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\phi(Y))$ endlich.

Somit gibt es eine strikt konsistente Trefferfunktion und das τ-Expektil ist damit laut Definition elicitable. □

Anmerkung: Das τ-Expektil einer quadratintegrierbaren Zufallsvariable hat die strikt konsistente Trefferfunktion

$$s_\tau(x,y) = |\mathbf{1}_{\{x \geq y\}} - \tau| \cdot (x-y)^2 \tag{5.11}$$

da $\phi(x) = x^2$ ist.

Aus Folgerung 3.18 folgt sofort, dass Expektile damit auch bedingt elicitable sind.

Abschließend sei noch erwähnt, dass Expektile robust bezüglich des Wasserstein-Abstandes sind. Genaueres kann in Bellini [8] nachgelesen werden.

5.2 Forecasting

Die Daten des Aktien- und BAWAG Portfolios wurden bereits im vorangegangenen Kapitel analysiert. Es sollen nun anstelle des Expected Shortfall, die Expektile als Risikomaß herangezogen werden.

Um die finanzielle Bedeutung der Expektile zu verdeutlichen, wirft man einen Blick auf deren Akzeptanzmenge. Die Akzeptanzmenge des $EVaR_\tau(X) = -e_\tau(X)$ wird beschrieben durch

$$\mathcal{A}_{EVaR_\tau} = \{X \ : \ -e_\tau(X) \leq 0\} = \left\{X \ : \ \frac{\mathbb{E}[X_+]}{\mathbb{E}[X_-]} \geq \frac{1-\tau}{\tau}\right\}$$

Die Akzeptanz eines Portfoliowertes hängt bei Expektilen/EVaR also von der Gewinn/Verlust Ratio ab. Bei dem EVaR wird ein Portfoliowert akzeptiert, wenn das Verhältnis erwarteter Gewinn zu erwartetem Verlust genügend hoch ist. (X bezeichnet in diesem Fall nicht den Verlust sondern ein Risiko, d.h. $X > 0$ ist ein Gewinn!) [6]

Expektile sind elicitable und besitzen somit eine strikt konsistente Trefferfunktion. Diese wurde bereits in Gleichung (5.11) definiert und kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} s_\tau(x,y) &= sgn(x-y) \cdot (\mathbf{1}_{\{x \geq y\}} - \tau) \cdot (x-y)^2 \\ &= (1-\tau) \cdot (x-y)^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq y\}} + \tau \cdot (y-x)^2 \cdot \mathbf{1}_{\{x < y\}} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $sgn(x)$ die Vorzeichenfunktion.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \geq 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Somit ergibt sich der Schätzer für das τ-Expektil mittels

$$e_\tau(X) = \arg\min_x \mathbb{E}[s(x,X)].$$

Unter der Voraussetzung, dass die Ableitung existiert und der Erwartungswert mit der Ableitung vertauscht werden darf gilt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\mathbb{E}[s(x,X)]|_{x=e_\tau} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[\frac{d}{dx}s(x,X)|_{x=e_\tau}] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[\frac{d}{dx}(\mathbf{1}_{\{x\geq X\}}-\tau)\cdot sgn(x-X)\cdot(x-X)^2|_{x=e_\tau}] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[(\mathbf{1}_{\{e_\tau\geq X\}}-\tau)\cdot sgn(e_\tau-X)\cdot(e_\tau-X)\cdot 2] \stackrel{!}{=} 0 \qquad |:2 \\
\Rightarrow \quad & \mathbb{E}[(1-\tau)\cdot\mathbf{1}_{\{e_\tau\geq X\}}\cdot(e_\tau-X)+\tau\cdot\mathbf{1}_{\{e_\tau<X\}}\cdot(e_\tau-X)] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{e_\tau\geq X\}}\cdot(e_\tau-X)]-\tau\cdot\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{e_\tau<X\}}\cdot(X-e_\tau)] \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad (1-\tau)\cdot\mathbb{E}[max(e_\tau-X;0)] \stackrel{!}{=} \mathbb{E}[max(X-e_\tau;0)] \tag{5.12}
$$

Somit erhält man ausgehend von der Trefferfunktion, die Berechnung der Expektile laut Lemma 5.3.

5.2.1 Aktienportfolio

Aus dem letzten Kapitel ist bereits bekannt, dass die Returns des gegebenen Aktienportfolios normalverteilt $NV(0,00101066;0,019009609^2)$ sind. Zur Berechnung wurden die Daten bis inkl. 09.05.2016 aus Anhang 1 verwendet. Das Portfolio besteht aus

- 70 Erste Bank Aktien und
- 100 OMV Aktien.

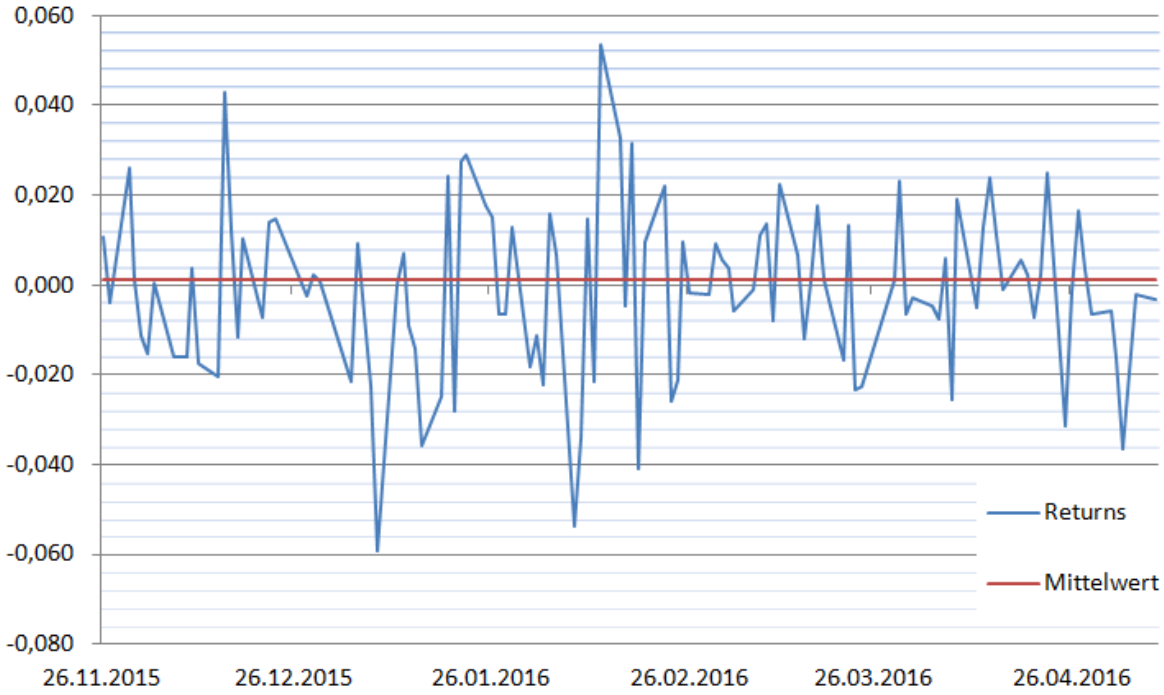

Abbildung 5.1: Zeitliche Veränderung der Aktienreturns

Zuvor wurde der Expected Shortfall zu $\alpha = 97,5\%$ berechnet. Dies entspricht in etwa einem Expektil mit $\tau = 98\%$.

Aus der stochastischen Analysis ist bekannt, dass jede normalverteilte Zufallsvariable durch eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ausgedrückt werden kann.

$$\begin{aligned} R = \sigma X + \mu \qquad & \text{mit } X \sim NV(0,1) \\ \Rightarrow \qquad & R \sim NV(\mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

Kombination des obigen mit den Kohärenz-Eigenschaften des τ-Expektils liefert

$$e_\tau(R) = e_\tau(\sigma \cdot X + \mu) = \sigma \cdot e_\tau(X) + \mu. \tag{5.13}$$

Es wird nun Formel (5.12) verwendet um das 98%-Expektil von $X \sim NV(0,1)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} & (1-\tau) \cdot \mathbb{E}[max(x - X; 0)] = \mathbb{E}[max(X - x; 0)] \\ \Rightarrow \qquad & (1-\tau) \cdot \int_{-\infty}^{x} (x-y)\ dF_X(y) = \tau \cdot \int_{x}^{\infty} (y-x)\ dF_X(y) \\ \Rightarrow \qquad & (1-\tau) \cdot \int_{-\infty}^{x} (x-y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy = \tau \cdot \int_{x}^{\infty} (y-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

Aufgrund der Länge der folgenden Gleichungen werden linke und rechte Seite separat betrachtet.

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt in weiterer Folge:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & (1-\tau) \cdot x \cdot \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy - (1-\tau) \cdot \int_{\infty}^{x^2} y \cdot \frac{1}{2 \cdot y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z/2} dz \\ \Rightarrow \qquad & = (1-\tau) \cdot x \cdot \Phi(x) - (1-\tau) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\infty}^{x^2} e^{-z/2} dz \\ \Rightarrow \qquad & = (1-\tau) \cdot x \cdot \Phi(x) + (1-\tau) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-x^2/2} - e^{-\infty/2}) \cdot 2 \\ \Rightarrow \qquad & = (1-\tau) \cdot x \cdot \Phi(x) + (1-\tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann aufgelöst werden zu:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \tau \cdot \int_{x^2}^{\infty} y \cdot \frac{1}{2 \cdot y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z/2} dz - \tau \cdot x \cdot \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy \\ \Rightarrow \qquad & = \tau \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x^2}^{\infty} e^{-z/2} dz - \tau \cdot x \cdot (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} dy) \\ \Rightarrow \qquad & = \tau \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (e^{-\infty/2} - e^{-x^2/2}) \cdot (-2) - \tau \cdot x \cdot (1 - \Phi(x)) \\ \Rightarrow \qquad & = \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} - \tau \cdot x \cdot (1 - \Phi(x)) \end{aligned}$$

Um das τ-Expektil zu erhalten muss somit jenes x gefunden werden, welches

$$(1-\tau)\cdot x\cdot\Phi(x)+(1-\tau)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}=\tau\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}-\tau\cdot x\cdot(1-\Phi(x)) \tag{5.14}$$

erfüllt. Hierzu kann man z.B. in Excel eine Tabelle anlegen und für jedes x schauen, was die Seiten für ein Ergebnis liefern.

x	$\Phi(x)$	Rechte Seite	Differenz der Seiten	linke Seite
1,47	0,92922	0,030744032	0,000716603	0,030027429
1,48	0,93056	0,030050822	-0,00016246	0,030213282
1,49	0,92989	0,026464439	-0,003875651	0,030340091

Die Nullstelle liegt offensichtlich zwischen 1,47 und 1,48. Möchte man das Ergebnis noch genauer als auf zwei Nachkommastellen haben, so kann man $\Phi(x)$ mittels linearer Interpolation berechnen.

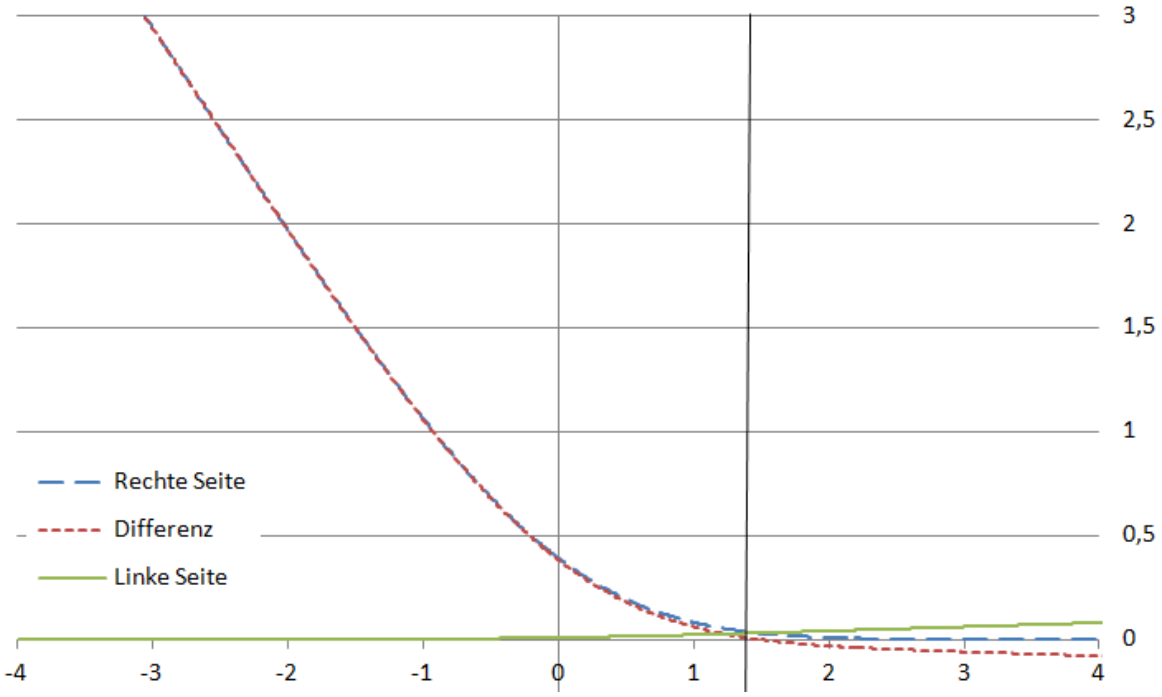

Abbildung 5.2: Aktienreturn Forecast mit Expektilen (Werte abhängig von x)

Eigenschaft (5.13) liefert nun das 98%-Expektil für die Aktienreturns.

$$e_\tau(R)=0,019009609\cdot 1,48+0,00101066=0,029 \tag{5.15}$$

Das τ-Expektil liefert bei diesem Aktienportfolio im Vergleich zum Expected Shortfall von 0,04545 einen niedrigeren Forecast.

5.2.2 BAWAG Portfolio

Auch die BAWAG Daten wurden bereits in Kapitel 4.2.2 analysiert und können dort nachgelesen werden. Für den Forecast des 98%-Expektils soll nun wieder die historische Simulation verwendet werden. Es wird hierzu auf den Schätzer des Erwartungswertes (4.11) bzw. die empirische Verteilungsfunktion (4.13) zurückgegriffen.

Ausgehend von (5.12) kann man die folgende Berechnung herleiten. Jenes x welches die Gleichung erfüllt, ist das gesuchte τ-Expektil.

$$
\begin{aligned}
& (1-\tau)\cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{x\geq R\}}\cdot(x-R)] && = && \tau\cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{x<R\}}\cdot(R-x)] \\
\Rightarrow \quad & (1-\tau)\cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-R_i)\cdot \mathbf{1}_{\{x\geq R_i\}} && = && \tau\cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-x)\cdot \mathbf{1}_{\{x<R_i\}} \\
\Rightarrow \quad & (1-\tau)\cdot \left[x\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{x\geq R_i\}}-\sum_{i=1}^{n}R_i\cdot\mathbf{1}_{\{x\geq R_i\}}\right] && = && \tau\cdot \left[\sum_{i=1}^{n}R_i\cdot\mathbf{1}_{\{x<R_i\}}-x\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{x<R_i\}}\right]
\end{aligned}
$$

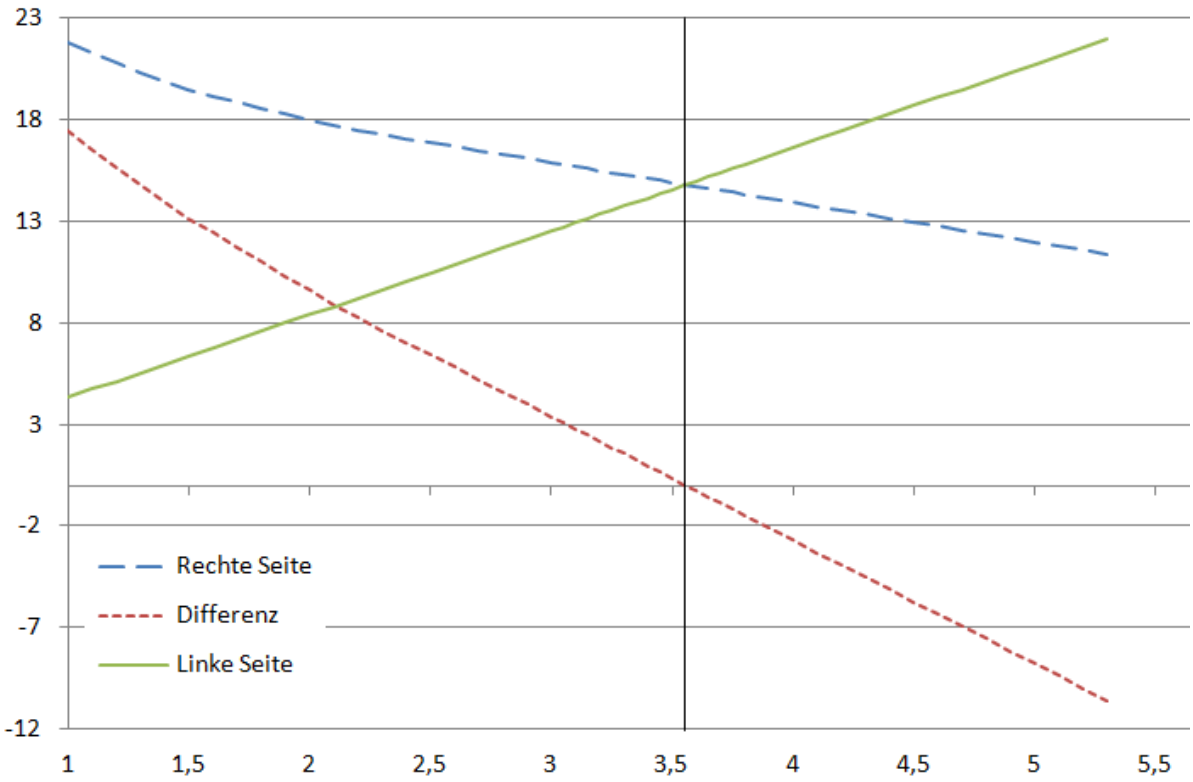

Abbildung 5.3: BAWAG-Return Forecast mit Expektilen (Werte abhängig von x)

Die Nullstelle und damit unser 98%-Expektil Wert liegt offensichtlich in der Nähe von 3,5.
Die einzelnen Werte können wieder mit Excel berechnet werden.

x	Rechte Seite	Differenz der Seiten	Linke Seite
3,5	14,9239518	0,34140312	14,58254868
3,6	14,7279518	-0,26659688	14,99454868
3,55	14,8259518	0,03740312	14,78854868
3,56	14,8063518	-0,02339688	14,82974868
3,556	14,8141918	0,00092312	14,81326868
3,557	14,8122318	-0,00515688	14,81738868
3,5561	14,8139958	0,00031512	14,81368068
3,5562	14,8137998	-0,00029288	14,81409268
3,55611	14,8139762	0,00025432	14,81372188
3,55612	14,8139566	0,00019352	14,81376308
3,55613	14,813937	0,00013272	14,81380428
3,55614	14,8139174	$7,2 \cdot 10^{-5}$	14,81384548
3,55615	14,8138978	$1,1 \cdot 10^{-5}$	14,81388668
3,55616	14,8138782	$-4,97 \cdot 10^{-5}$	14,81392788
3,55617	14,8138586	-0,00011048	14,81396908
3,55618	14,813839	-0,00017128	14,81401028

Somit erhält man ein 98%-Expektil von 3,55615. Dieses ist im Vergleich zum Forecast des Expected Shortfalls von 4,17 ein niedrigerer Wert.

Es scheint als müsste τ erhöht werden, um dem Expected Shortfall noch näher zu kommen. [6] schlägt $\tau = 0,998$ vor. [2] enthält eine Tabelle, welche abhängig von der Verteilung, das für die Expektil Berechnung verwendete τ mit dem für die Value at Risk Berechnung verwendetem α in Verbindung setzt.

Für das Aktienportfolio würde $\tau = 0,998$ zu einem Ergebnis nahe, aber noch unter dem Expected Shortfall Wert führen (0,043). Das Forecasting für das BAWAG Portfolio würde bei einem τ von 0,998 weit über dem Expected Shortfall Wert liegen. Das $99,8$%-Expektil läge zwischen 10 und 11.

5.3 Backtesting

Die Forecasting-Methoden sollen nun wieder mittels Backtesting validiert werden. Bei Expektilen hat man den Vorteil gegenüber dem Expected Shortfall, dass diese elicitable sind. Aus diesem Grund kann die Verlustfunktion

$$L(X,Y) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} s(x_i, y_i) \tag{5.16}$$

als Tester herangezogen werden. Die x_i bezeichnen hierbei Forecasts, die y_i Realisationen der Zufallsvariable.

Jedoch wird dieser durchschnittlich realisierte Verlust L zumeist in der Literatur als Vergleichsstatistik verwendet. Ist wie hier, die Trefferfunktion genauigkeitsbelohnend und es wurden mehrere Modelle für das Forecasting verwendet, so kann anhand von $L(x,y)$ entschieden werden, welches dieser Modelle am besten geeignet ist. Je niedriger der Wert, umso besser ist das verwendete Modell.

Hier soll jedoch Backtesting zur Modellvalidierung durchgeführt werden. Anderson [2] sagt, dass es zur Zeit (2012) noch keine entwickelte Backtesting-Methode für Expektile gibt. Das bedeutet somit auch, dass Elizitabilität primär für Modellvergleiche und nicht zur Modellvalidierung relevant ist.

Campell [9] (und vor ihm auch Lopez [18]) schreibt in seiner Publikation über das Backtesting von Value at Risk mit solchen Verlustfunktionen. Campell ermahnt jedoch ausdrücklich, dass dafür eine Verteilung der Verlustfunktion bestimmt werden muss. In weiterer Folge kann ein Verwerfen bei der Nullhypothese nicht nur darauf zurückgeführt werden, dass die zugrunde gelegte Forecasting-Methode falsch ist, es kann auch sein, dass lediglich die Verlustverteilung falsch ist.

Schließlich publizierten Bellini und Di Bernardio [6] im Jahr 2015 ein Paper, welches mittels Bootstrapping die Verteilung des realisierten Verlustes bestimmt und diese in weiterer Folge für das Backtesting der Expektile verwendet. Dies soll nun auf das Aktien- und BAWAG Portfolio sinngemäß angewandt werden.

Hinter Bootstrapping steckt die Idee, aus einer Stichprobe mit n Werten mittels Resampling mehrere Stichproben zu erhalten. Dies funktioniert, indem man zufällig aus dieser Stichprobe n Werte zieht, wobei ein Wert öfter als einmal gezogen werden kann. Man simuliert damit die empirische Verteilung und kann somit auf die Verteilung der Verlustfunktion Rückschlüsse ziehen.

Dazu wurde nachfolgende Funktion in R implementiert. Der Funktion werden die Anzahl der Resamplings, das Signifikanzniveau α, die Returns des Portfolios, das im Forecasting berechnete Expektile inkl. τ und der realisierte Verlust übergeben. Mit diesen Werten ermittelt die Funktion ein Konfidenzintervall für den zu erwartenden Verlust. Man erwartet, dass der realisierte Verlust in diesem Konfidenzintervall enthalten ist.

```
> Bootstrapping<-function(B,alpha,data,expectile, tau, RLoss){

    # B: Anzahl der Bootstraps
    # alpha: Signifikanzniveau des Tests
    # expectile: im Forecast berechnet
    # RLoss ist der realisierte Verlust der foregecasteten Daten

    Lstar <- rep(0,B)    # hier werden Ergebnisse hineingeschrieben
    n <- length(data)    # Anzahl der Zeitpunkte

    for (j in 1:B){
        returnsstar<- sample(data, n, replace=T) # Resampling findet statt
        sum <- 0
        for(i in 1:n){
            if(returnsstar[i]<= expectile ){
                sum = sum + ((1-tau)*(expectile-returnsstar[i])^2)}
            else{sum = sum +  (tau*(expectile-returnsstar[i])^2)}
        }
        Lstar[j]<- 1/n * sum
    }

    Lstar <-sort(Lstar)
    pick<-round((alpha/2)*(B+1))
    lower <-Lstar[pick]
    upper<- Lstar[B-pick+1]
    list(RLoss=RLoss, lower=lower, upper=upper)
  }
```

5.3.1 Aktienportfolio

Zunächst wird der realisierte Verlust berechnet. Beim Aktienportfolio wurde ein Expektil von $e_\tau = 0,29$ foregecastet. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} L(e_\tau, Y) &= \frac{1}{109} \sum_{i=1}^{109} s(e_\tau, y_i) \\ &= \frac{1}{109} \sum_{i=1}^{109} |\mathbf{1}_{\{e_\tau \geq y_i\}} - \tau| \cdot (e_\tau - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{109} \cdot 0,004024317 \\ &= 3,692034 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Nun verwendet man die in R implementierte Bootstrapping-Funktion, um das Konfidenzintervall zu bestimmen, in welchem der realisierte Verlust liegen sollte.

Es handelt sich hierbei um einen Test des realisierten Verlustes.

$$\mathcal{H}_0: \quad RealLoss = L(e_\tau, Y) \qquad \mathcal{H}_1: \quad RealLoss > L(e_\tau, Y)$$

Bei dem Bootstrapping werden 10.000 Simulationen durchgeführt. Getestet wird mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$. Als Daten werden die gesamten bekannten Daten des Aktienportfolios verwendet. Die Bootstrapping-Funktion liefert das Konfidenzintervall

$$(2.435774 \cdot 10^{-5}, 4.999132 \cdot 10^{-5}).$$

Da der realisierte Verlust von $3,69 \cdot 10^{-5}$ in dem Intervall liegt, war das Backtesting erfolgreich.

Auch der p -Wert der Teststatistik kann berechnet werden. Hierzu wird wieder eine Funktion in R implementiert. Der p -Wert ist eine Wahrscheinlichkeit. Ist diese Wahrscheinlichkeit sehr klein, so spricht das stark gegen die Nullhypothese $\mathcal{H}_0$.

```
pwert <- function(B, alpha, data, expectile, tau, RLoss){

    n <- length(data)
    counter <- 0

    for (j in 1:B){
      returnsstar <- sample(data, n, replace=T)
      sum <- 0
      for(i in 1:n){
        if(returnsstar[i]<= expectile ){
           sum = sum + ((1-tau)*(expectile-returnsstar[i])^2)}
        else{sum = sum +  (tau*(expectile-returnsstar[i])^2)}
      }

      Lstar<- 1/n * sum
      if(Lstar>RLoss){counter=counter+1}
    }
```

```
    pvalue <- counter/B
    pvalue
}
```

Führt man das Bootstrapping wieder 10.000 Mal durch und verwendet das Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$, so ergibt sich ein p -Wert von $0,4047$. Dieser p -Wert ist sehr hoch und unterstützt somit die Nullhypothese. Dass das Backtesting des Aktienportfolios das Forecasting untermauert, ist natürlich wieder nicht weiter verwunderlich. Zum Backtesting wurden ja großteils dieselben Daten verwendet, wie für das Forecasting.

5.3.2 BAWAG Portfolio

Auch das BAWAG Portfolio kann analog zu oben mittels Verlustfunktion backgetestet werden.

Als Erstes muss wieder der realisierte Verlust bestimmt werden. Das Forecasting in Kapitel 5.2.2 hat ein τ-Expektil von $e_{0.98} = 3,55615$ ergeben. Damit kann der realisierte Verlust unseres Portfolios wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned} L(e_\tau) &= \frac{1}{208} \sum_{i=1}^{208} |\mathbf{1}_{\{e_\tau \geq y\}} - \tau| \cdot (e_\tau - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{208} \cdot 198,59 \\ &= 0,955 \end{aligned}$$

Wie bei dem Aktienportfolio wird nun auch bei dem BAWAG Portfolio getestet ob der realisierte Verlust gleich dem oben berechneten $L(e_\tau, Y)$ ist.

$$\mathcal{H}_0 : \quad RealLoss = L(e_\tau, Y) \qquad \mathcal{H}_1 : \quad RealLoss > L(e_\tau, Y)$$

Die Parameter, für welche das Bootstrapping durchgeführt wird, lauten wie folgt:

- B = 10.000
- α = 0,1
- data = gesamten Returns des BAWAG Portfolios
- expectile = 3,55615
- $\tau = 0,98$
- RLoss = 0,955

Unter Anwendung der in R implementierten Bootstrapping-Funktion auf diesen Input ergibt sich das Konfidenzintervall

$$(0.260298, 1.897571).$$

Der realisierte Verlust von 0,955 liegt in diesem Intervall. Somit hat das Backtesting unsere Nullhypothese bestätigt.

Abschließend soll auch der p -Wert des BAWAG Portfolios angegeben werden. Zur Berechnung wird die Funktion *pwert* aus Kapitel 5.3.1 verwendet. Die Parameter werden wie bei der Ermittlung des Konfidenzintervalles gewählt.

Die Funktion liefert den p -Wert

$$p = 0,2737.$$

Auch dieser p -Wert ist relativ hoch und die Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ wird beibehalten.

Hier ist ebenfalls anzumerken, dass das Verwerfen der Nullhypothese sehr unwahrscheinlich ist, da für das Forecasting großteils dieselben Daten verwendet wurden wie für das Backtesting. Die Simulation soll jedoch nur zur Veranschaulichung dienen und dies sollte aus diesem Grund nicht weiter stören.

Das Backtesting mittels Verlustfunktion liefert also, dass das Forecasting akzeptiert wird.

Kapitel 6

Schlussbetrachtung und Ausblick

Nachstehende Tabelle soll nochmals kurz die wichtigsten Eigenschaften von Expected Shortfall und Expektilen zusammenfassen.

Eigenschaft	Expected Shortfall	Expektil e_τ mit $\tau \geq \frac{1}{2}$
monoton	x	x
translationsinvariant	x	x
positiv homogen	x	x
subadditiv	x	x
kohärent	x	x
komonoton additiv	x	
verteilungsinvariant	x	x
elicitable		x
bedingt elicitable	x	x
robust (Wasserstein-Abstand)	x	x

Die Betrachtungen in den vorangegangenen Kapiteln haben gezeigt, dass Expektile sehr interessante Risikomaße, mit vielen wünschenswerten Eigenschaften sind. Das Forecasting ist im Vergleich zum Expected Shortfall nicht viel komplizierter und kann jedenfalls ohne größere Probleme umgesetzt werden. Das Backtesting ist machbar, scheint allerdings noch nicht sehr ausführlich durchleuchtet worden zu sein und kann sicherlich noch verbessert werden. Zudem gibt es einen Nachteil von Expektilen, welcher nicht unberücksichtigt bleiben sollte. Expektile sind nicht komonoton additiv. Trotzdem scheinen Expektile eine durchaus gute Alternative zum Expected Shortfall zu sein.

Auch der Expected Shortfall hat seine Vor- und Nachteile. Beim Backtesting ist jedoch aufgefallen, dass dieses etwas langwierig und umständlich ist. Das derzeitige Backtesting wird als nicht zufriedenstellend erachtet. Sehr hohe Ausreißer der Daten werden dadurch nicht genügend berücksichtigt und führen zu einer schlechten Approximation des Expected Shortfalls durch die vier Value at Risk Werte. Dies fällt vor allem bei dem BAWAG Portfolio ins Gewicht. Es gibt jedoch bereits mehrere Publikationen, beispielsweise "Backtesting Expected Shortfall - Introducing three model-independent, non-parametric back-test methodologies for Expected Shortfall" von Carlo Acerbi and Balazs Szekely (2014), welche andere Methoden vorschlagen. Diese sollten eventuell in Betracht gezogen werden. Es bleibt allerdings das Problem der fehlenden Elizitabilität, welches einen Vergleich zwischen verschiedenen Forecasting-Methoden schwierig macht.

Sollten Expektile als Risikomaß in der Praxis verwendet werden, so müsste vom Basel Committee ein Wert τ festgelegt werden, für welchen das Forecasting durchzuführen ist. Jedenfalls würde dadurch das Verglei-

chen verschiedenster Forecasting-Methoden sehr leicht durchführbar sein und das Backtesting wäre einfacher.

Im Bereich der Expektile gibt es bereits sehr viele positive Entwicklungen. Dieses Risikomaß erfreut sich zunehmender Beliebtheit und immer mehr Publikationen werden hierzu veröffentlicht. Außerdem können, auch wenn in dieser Arbeit nicht verwendet, Expektile bereits in R berechnet werden. Hierzu dient das R Package *expectreg*. Um dieses Package verwenden zu können, müssen auch *BayesX*, *mboost*, *splines* und *quadprog* installiert sein. Das Package bietet die Möglichkeit Expektil- und Quantilregression für Modelle mit nicht linearen Effekten durchzuführen. Zudem können auch Expektile von typischen Verteilungen berechnet werden.

Ob Expektile tatsächlich den Expected Shortfall als Risikomaß zur Bewertung von Marktrisiko ersetzen werden, bleibt abzuwarten. Es sind allerdings sicherlich noch viele weitere Publikationen zu erwarten, welche dieses Risikomaß genauer beleuchten werden.

Kapitel 7

Anhang 1

Nachstehende Tabelle enthält die historischen Aktienwerte, welche in den vorangegangenen Kapiteln zur Berechnung herangezogen wurden. Die Daten wurden [LINK 6] und [LINK 7] entnommen.

Datum	Erste Bank	OMV
25.05.2016	24,55	26,30
24.05.2016	23,89	25,51
23.05.2016	23,19	25,37
20.05.2016	22,89	25,63
19.05.2016	22,92	25,27
18.05.2016	22,95	26,07
17.05.2016	22,90	25,92
13.05.2016	23,53	25,75
12.05.2016	23,45	25,79
11.05.2016	23,45	25,21
10.05.2016	23,63	25,16
09.05.2016	23,51	24,65
06.05.2016	23,35	25,06
04.05.2016	23,55	24,90
03.05.2016	24,85	25,22
02.05.2016	25,17	25,77
29.04.2016	25,12	26,21
28.04.2016	25,27	26,40
27.04.2016	25,22	26,27
26.04.2016	24,88	25,73
25.04.2016	25,03	25,60
22.04.2016	26,07	26,07
21.04.2016	25,23	25,70
20.04.2016	25,20	25,60
19.04.2016	25,59	25,50
18.04.2016	25,59	25,35
15.04.2016	25,57	25,03
14.04.2016	25,36	25,40
13.04.2016	25,02	25,21
12.04.2016	24,40	24,67
11.04.2016	24,16	24,26
08.04.2016	24,40	24,21

Datum	Erste Bank	OMV
07.04.2016	24,06	23,57
06.04.2016	24,84	23,96
05.04.2016	24,58	23,99
04.04.2016	24,66	24,33
01.04.2016	24,56	24,76
31.03.2016	24,70	24,73
30.03.2016	24,57	25,32
29.03.2016	24,20	24,47
24.03.2016	23,93	24,79
23.03.2016	24,53	25,28
22.03.2016	25,15	25,81
21.03.2016	24,82	25,47
18.03.2016	25,25	25,88
17.03.2016	24,86	26,37
16.03.2016	25,07	24,98
15.03.2016	25,27	24,65
14.03.2016	25,51	25,05
11.03.2016	25,35	24,88
10.03.2016	24,18	25,20
09.03.2016	24,09	25,80
08.03.2016	23,98	25,15
07.03.2016	23,42	25,30
04.03.2016	23,67	25,00
03.03.2016	24,00	24,88
02.03.2016	24,32	24,20
01.03.2016	23,95	24,40
29.02.2016	23,73	24,18
26.02.2016	24,10	23,78
25.02.2016	24,59	23,19
24.02.2016	24,18	23,23
23.02.2016	24,93	23,40
22.02.2016	25,47	24,18

Datum	Erste Bank	OMV
19.02.2016	25,03	23,48
18.02.2016	24,31	23,95
17.02.2016	25,59	24,58
16.02.2016	24,81	23,80
15.02.2016	25,01	23,79
12.02.2016	23,91	23,45
11.02.2016	23,20	21,47
10.02.2016	23,61	22,08
09.02.2016	22,75	22,49
08.02.2016	23,49	23,34
05.02.2016	25,42	23,73
04.02.2016	25,30	23,51
03.02.2016	25,03	22,97
02.02.2016	26,10	22,76
01.02.2016	26,17	23,34
29.01.2016	26,73	23,66
28.01.2016	26,29	23,50
27.01.2016	26,84	23,12
26.01.2016	27,20	23,00
25.01.2016	26,76	22,71
22.01.2016	26,18	22,47
21.01.2016	25,52	21,71
20.01.2016	24,60	21,45
19.01.2016	25,25	22,14
18.01.2016	24,54	21,77
15.01.2016	25,22	22,22
14.01.2016	26,02	23,20
13.01.2016	26,66	23,16
12.01.2016	27,07	23,14

Datum	Erste Bank	OMV
11.01.2016	26,58	23,41
08.01.2016	26,42	23,63
07.01.2016	27,82	25,38
05.01.2016	28,50	25,89
04.01.2016	28,27	25,61
30.12.2015	28,91	26,13
29.12.2015	28,94	26,04
28.12.2015	28,72	26,20
23.12.2015	28,65	26,46
22.12.2015	28,50	25,70
21.12.2015	28,22	25,17
18.12.2015	28,30	25,54
17.12.2015	27,97	25,34
16.12.2015	27,90	26,20
15.12.2015	27,75	25,61
14.12.2015	26,71	24,36
11.12.2015	26,94	25,33
10.12.2015	27,11	26,21
09.12.2015	27,51	25,41
07.12.2015	28,29	25,35
04.12.2015	28,76	25,75
03.12.2015	28,14	26,60
02.12.2015	28,52	27,08
01.12.2015	28,95	27,23
30.11.2015	29,04	27,02
27.11.2015	28,08	26,63
26.11.2015	28,15	26,80
25.11.2015	28,02	26,28

Theorem 3.6 aus Tasche [23]:
Sei ρ ein Risikomaß auf dem Raum V der beschränkten Zufallsvariablen im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Angenommen $(\Omega, F, \mathbb{P})$ ist standard und atomlos (insbesondere existiert eine ZV, welche uniformverteilt ist auf (0,1)). Dann ist ρ ein kohärentes, verteilungsinvariantes und komonoton additives [...] Risikomaß dann und nur dann, wenn

$$\rho(X) = p \int_0^1 VaR_u(X)F(du) + (1-p)VaR_1(X), \qquad X \in V,$$

wobei $p \in [0,1]$ und F ist eine stetige, konvexe Verteilungsfunktion, welche auf [0,1] konzentriert ist.

Korollar 4.3 aus Ziegel [24]:
Spektral-Risikomaße anders als Minus der Erwartungswert sind nicht elicitable bezüglich jedweder Klasse von Risikoverteilungen welche die Zwei-Punkt Verteilung beinhalten.

Literaturverzeichnis

[1] C. Acerbi, D. Tasche (2002): On the coherence of expected shortfall; Journal of Banking and Finance 26, 1487-1503

[2] A.L. Anderson (2012): A Study on Expectiles: Measuring Risk in Finance; nachzulesen auf https://getd.libs.uga.edu/pdfs/anderson_andrew_l_201212_ms.pdf

[3] Basel Committee on Banking Supervision (2013): Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework; nachzulesen auf http://www.bis.org/publ/bcbs265.htm

[4] Basel Committee on Banking Supervision (2015): A brief history of the Basel Committee; nachzulesen auf http://www.bis.org/bcbs/about.htm?m=3—14—573 von 06.02.2015

[5] Basel Committee on Banking Supervision (2016): Minimum capital requirements for Market Risk; nachzulesen auf http://www.bis.org/bcbs/publ/d352.htm

[6] F. Bellini, E. Di Bernardio (2015): Risk Management with Expectiles; nachzulesen auf https://www.researchgate.net/publication/276935585

[7] F. Bellini, V.Bignozzi (2014): Elicitable risk measures; Quantitative Finance 15, 725-733

[8] F. Bellini, B. Klar, A. Müller, E. Rosazza Gianin (2014): Generalized quantiles as risk measures; Insurance: Mathematics and Economics 54, 41-48

[9] S.D. Campbell (2005): A Review of Backtesting and Backtesting Procedures; Journal of Risk 9, 1-17

[10] P. Christoffersen (2008): Backtesting; SSRN: http://ssrn.com/abstract=2044825

[11] P. Christoffersen, D. Pelletier (2004): Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach; Journal of Financial Econometrics 2, 84-108

[12] S. Emmer, M. Kratz, D. Tasche (2015): What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures

[13] T. Fissler, J.F. Ziegel (2015): Higher order elicitability and Osband's principle

[14] FMA/OeNB (2006): Leitfaden zur Gesamtbankrisikosteuerung S.7

[15] Gneiting (2011): Making and Evaluating Point Forecasts; Journal of the American Statistical Association 106 (494), 746-762

[16] S. Ingves (Rede vom 02.11.2015): From the Vasa to the Basel framework: The dangers of instability; nachzulesen auf http://www.bis.org/speeches/sp151102.htm

[17] M.Kriele, J. Wolf (2012): Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen; Springer Berlin, Springer Auflage: 2012, Kapitel 2 "Risikomaß"; nachzulesen auf http://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9783642258053-c1.pdf?SGWID=0-0-45-1269237-p174287288.

[18] J.A. Lopez (1999): Methods for Evaluating Value-at-Risk Models, Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review, 1999b, 2, 3-17

[19] W. Newey, J. Powell (1987): Asymmetric least squares estimation and testing; Econometrica 55, 819-847

[20] Y. Pinkhasik (2014): Asymptotik für Expektilschätzungen

[21] Spiegel Online (2009): Absturz der Weltbörsen: Hauptursachen der Finanzmarktkrise; nachzulesen auf http://www.spiegel.de/wirtschaft/unternehmen/absturz-der-weltboersen-hauptursachen-der-finanzmarktkrise-a-648271.html

[22] G. Stahl, J. Zheng, R. Kiesel, R. Rühlicke (2012): Conceptualizing Robustness in Risk Management; SSRN: http://ssrn.com/abstract=2065723

[23] D. Tasche (2002): Expected Shortfall and Beyond. Journal of Banking & Finance 26, 1519-1533; nachzulesen auf http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0203558.pdf

[24] J. F. Ziegel (2014): Coherence and Elicitability; Mathematical Finance

[LINK 1] https://www.bundesfinanzministerium.de/Content/DE/Standardartikel/Service/Einfach_erklaert/2010-11-04-einfach-erklaert-basel-III-alternativversion.html

[LINK 2] https://www.oenb.at/en/Financial-Stability/banking-union/legal-framework/basel-III.html

[LINK 3] http://www.wepex.de/site/files/wepex/Newsflash_PDF-Dateien/WEPEX_Newsflash_CVA_2015.pdf

[LINK 4] http://www.capco.com/insights/capco-blog/frtb-replacing-var-with-expected-shortfall-in-market-risk

[LINK 5] G. CH. Pflug: www.univie.ac.at/sor/aurora6/papers/Kluwer.pdf

[LINK 6] http://www.finanzen.at/kurse/historisch/Erste_Group_Bank/Wien/25.11.2015_25.5.2016

[LINK 7] http://www.finanzen.at/kurse/historisch/OMV/Wien/25.11.2015_25.5.2016