



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

D I P L O M A R B E I T

Optimale Dividendenstrategien für in den Markt investierende Unternehmen

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Julia Brandstätter, BSc

Prandtauerstraße 5, 4850 Timelkam

Wien, 20. Oktober 2016

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mich im Rahmen dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank meinem Betreuer Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits, der meine Arbeit mit hilfreichen Anregungen und fachlicher Unterstützung begleitet hat.

Darüber hinaus möchte ich mich bei meiner Familie, meiner Mutter Anne-liese, meinem Vater Herbert und meinem Bruder David bedanken, dass sie mir immer den Rücken gestärkt haben. Ohne ihre Unterstützung wäre mein Studium nicht möglich gewesen.

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Studienkollegen bedanken, die mir mit Interesse und Hilfsbereitschaft zur Seite standen.

Danken möchte ich außerdem meinen Freunden, die mich mit viel Geduld und Rückhalt moralisch unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe, und dass ich die Stellen der Arbeit, einschließlich Tabellen und Abbildungen, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, 20. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Begriffsbestimmungen und Definitionen	1
2	Einführung: Risiko und Ruintheorie	7
2.1	Der klassische Risikoprozess	7
2.2	Ruin, Ruinwahrscheinlichkeit und der Ruinzeitpunkt	9
3	Optimale Dividenden	11
3.1	Das Setting	11
3.2	Beschränkte Dividendenzahlungen	13
3.3	Unbeschränkte Dividendenzahlungen	23
4	Optimale Barriere bei Unternehmen, das investiert	35
4.1	Modellbeschreibung	35
4.2	Beispiele	50
4.3	Zeitabhängige Barriere	58
5	Simulation verschiedener Barrierehöhen	60
5.1	Matlab-Programm zur Simulation	64
	Literaturverzeichnis	66

Kapitel 1

Begriffsbestimmungen und Definitionen

In diesem Kapitel geht es darum die grundlegenden Definitionen und Sätze vorzustellen, die in weiterer Folge in der Diplomarbeit verwendet werden. Wobei diese entweder aus Protter [8] oder Sato [9] entnommen wurden. Die Grundlagen der Funktionentheorie am Ende dieses Kapitels sind Werner [13] entnommen.

Definition 1.1. (Stochastischer Prozess)

Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $\{X_t, t \geq 0\}$ von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit Werten im Zustandsraum S .

Definition 1.2. (Stochastisch stetig)

Ein stochastischer Prozess X auf $\mathbb{R}^d$ heißt stochastisch stetig falls für alle $t \geq 0$ und $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathcal{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0.$$

Definition 1.3. (Lévy-Prozess)

Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ mit $X_0 = 0$ f.s. ist ein Lévy-Prozess, wenn gilt:

- (1) Für $0 \leq s \leq t$ hat $X_t - X_s$ die gleiche Verteilung wie X_{t-s} (stationäre

Zuwächse)

(2) Für $0 \leq s \leq t$ ist $X_t - X_s$ unabhängig von $\{X_u : u \leq s\}$ (unabhängige Zuwächse)

(3) X ist stochastisch stetig.

Es existiert eine Version von X mit càdlàg-Pfaden, die wir als gegeben annehmen.

Die vermutlich wichtigsten Beispiele für Lévy-Prozesse sind zum einen die Brownsche Bewegung und zum anderen der Poissonprozess sowie der zusammengesetzte Poissonprozess. Im folgenden sei der Zustandsraum nun gegeben durch $\mathbb{R}$.

Definition 1.4. (Càdlàg)

Ein stochastischer Prozess heißt càdlàg, wenn er f.s. rechtsseitig stetige Pfade hat, für die ein Grenzwert von links existiert.

Definition 1.5. (Brownsche Bewegung)

Ein stochastischer Prozess B ist eine (standard) Brownsche Bewegung, wenn er ein Lévy-Prozess ist und wenn B_t normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t ist. Man betrachte die Version von B , die stetige Pfade hat.

Definition 1.6. (Zusammengesetzter Poissonprozess)

Ein stochastischer Prozess N mit Werten auf dem Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ heißt Poissonprozess, wenn er ein Lévy-Prozess ist und wenn N_t mit Parameter λt poissonverteilt ist.

Ein zusammengesetzter Poissonprozess L ist dann definiert durch:

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} S_i$$

wobei S_i , $i = 1, \dots, N_t$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen sind, die unabhängig von N_t sind.

Definition 1.7. (Semimartingal)

Ein (adaptierter) càdlàg Prozess X heißt Semimartingal, falls

$$X_t = X_0 + L_t + F_t.$$

Dabei ist L ein lokales Martingal und F ein Prozess von endlicher Variation und $L_0 = F_0 = 0$.

Satz 1.8.

Jeder Lévy-Prozess ist ein Semimartingal. Jeder (adaptierte) càdlàg Prozess von endlicher Variation ist ein Semimartingal.

Definition 1.9. (Quadratische (Ko)-variationsprozess)

Es seien X und Y Semimartingale. Dann ist der quadratische Kovariationsprozess $[X, Y] = ([X, Y]_t)_{t \geq 0}$ definiert durch:

$$[X, Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX,$$

wobei $X_{0-} = 0$. Die Abbildung $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ ist bilinear und symmetrisch.

Definition 1.10. (Stetiger Anteil von $[X, X]$)

Es bezeichne $[X, X]^c$ den (pfadweise) stetigen Anteil von $[X, X]$. Es gilt dann für den quadratischen Variationsprozess:

$$[X, X]_t = [X, X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 = [X, X]_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta X_s)^2$$

,wobei $\Delta X = X_t - X_{t-}$

X heißt "quadratic pure jump" falls $[X, X]^c = 0$.

Für die standardisierte Brownsche Bewegung B gilt $[B, B]_t = t$.

Satz 1.11.

Es sei X ein "quadratic pure jump" Semimartingal. Dann gilt für jedes Semimartingal Y :

$$[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

Satz 1.12. (Itô Formel für Semimartingale)

Es sei X ein Semimartingal und $f \in C^2$ sei eine reelle Funktion. Dann ist $f(X)$ wieder ein Semimartingal und die folgende Formel gilt:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_{0+}^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s). \end{aligned}$$

Satz 1.13. (Stochastisches Exponential)

Es sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann existiert ein eindeutiges Semimartingal Z , das die Gleichung $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s$ erfüllt.

Z ist dabei gegeben durch:

$$Z_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} [X, X]_t \right) \prod_{0 < s \leq t} (1 - \Delta X_s) \exp \left(-\Delta X_s + \frac{1}{2} (\Delta X_s)^2 \right),$$

wobei das Produkt konvergiert. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung von oben wird auch als stochastisches Exponential $\mathcal{E}(X)$ bezeichnet und hat für stetige Semimartingale die einfachere Form:

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp \left(X_t - \frac{1}{2} [X, X]_t \right).$$

Satz 1.14.

Gegeben sei ein Vektor von Semimartingalen $Z = (Z^1, \dots, Z^d)$ mit $Z_0 = 0$ und ein Semimartingal J . Die Funktionen $f_j, (1 \leq j \leq d)$ seien lipschitzstetig. Dann hat die stochastische Differentialgleichung:

$$X_t = J_t + \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(X)_{s-} dZ_s^j,$$

eine eindeutige Lösung X , die wiederum ein Semimartingal ist.

Ist Z ein Vektor unabhängiger Lévy-Prozesse, so ist die Lösung X zudem ein starker Markov Prozess.

Definition 1.15. (Markov Prozess)

Wir nennen einen Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ Markov Prozess in stetiger Zeit mit diskretem Zustandsraum, falls gilt:

$$\mathbb{P} [X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = i_1] = \mathbb{P} [X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}]$$

für alle $j, i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ und jede Folge $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ von Zeitpunkten.

Die zukünftige Entwicklung des Prozesses hängt also nur vom aktuellen Zustand, des Prozesses ab, nicht aber von der Vergangenheit.

Definition 1.16. (Operator)

Eine stetige lineare Abbildung T zwischen den normierten Räumen X und Y heißt stetiger (linearer) Operator ($T \in L(X, Y)$). Ist der Bildraum Y der Skalkörper, so sagt man Funktional statt Operator.

Definition 1.17. (Operatornorm)

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf \{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \forall x \in X\} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \end{aligned}$$

Definition 1.18. (Halbgruppe, Yosida [14])

Eine einparametrische Familie $\{H_t, t \geq 0\}$ von beschränkten linearen Operatoren in X , $H_t \in L(X, X)$ heißt Halbgruppe, falls folgende Bedingungen

gelten:

$$\|H_t\| \leq 1$$

$$H_{t+s} = H_t H_s$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \|(H_t - I)x\| = 0 \quad \forall x \in X$$

Definition 1.19. (Der infinitesimale Generator)

Der (infinitesimale) Generator einer Halbgruppe $\{H_t\}$ ist definiert durch:

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{H_t f - f}{t},$$

$$f \in \mathcal{D}(A) := \{f : \text{der Limes existiert}\}.$$

Satz 1.20. (Dynkinsche Erwartungswertformel)

Es sei $X \in S$ und A sei der infinitesimale Generator des Markov Prozesses X_t mit $X_0 = x$. Weiters sei τ eine Stoppzeit für die $\mathbb{E}_x(\tau) < \infty$. Für $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt dann:

$$\mathbb{E}_x \left(\int_0^\tau Af(X_t) dt \right) = \mathbb{E}_x(f(X_\tau)) - f(x)$$

Satz 1.21. (Satz von Lebesgue, Shiryaev [10])

Seien $X, Y, Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen, so dass $|Y_n| \leq X$, $\mathbb{E}[X] < \infty$ und $Y_n \rightarrow Y$ f.s. gilt. Dann ist $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y]$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Y_n - Y|] = 0$$

Satz 1.22. (Satz der monotonen Konvergenz[4])

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht negative f.s. monoton wachsende Folge von Zufallsvariablen, dann gilt für ihre Erwartungswerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n]$$

Kapitel 2

Einführung: Risiko und Ruintheorie

2.1 Der klassische Risikoprozess

Als Einführung in die Risiko und Ruintheorie wollen wir als erstes den klassischen Risikoprozess, auch Cramer-Lundberg Prozess genannt, betrachten. Dieser ist gegeben durch:

$$R_t = x + ct - S_t \text{ mit } R_0 = x$$

Wobei die Komponenten des Risikoprozesses folgende sind:

Das Startkapital wird durch x beschrieben, die Prämienrate mittels λ .

Die Schadenzeitpunkte seien $(T_1, T_2, \dots)$, der Schadenanzahlprozess sei $(N_t)_{t \geq 0}$ mit $N_t = \# \{T_i, T_i \in [0, t]\}$.

Weiters ist der Schadenhöhenprozess gegeben durch $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}, X_i > 0$ f.s. und unabhängig identisch verteilt.

Der Schadenhöhenprozess und der Schadenzeitenprozess sind unabhängig voneinander.

Der Gesamtschadenprozess ist:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

und beschreibt den Gesamtschaden bis zum Zeitpunkt t mit $S_t = 0$ für $N_t = 0$. Für alle $t \geq 0$ ist S_t ein zusammengesetzter Poissonprozess.

Der Prozess ist von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, W_1, W_2, \dots$ erzeugt mit $X_i \sim Q$, wobei Q die Schadenhöhenverteilung darstellt und $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, dabei seien W_i die Zwischenankunftszeiten zwischen Schäden X_{i-1} und X_i , wenn $i \geq 2$, und W_1 ist die Wartezeit bis zum ersten Schaden.

$N(t)$ kann dann geschrieben werden als:

$$N_t = \sup \{n : W_1 + \dots + W_n \leq t\}.$$

Der Schaden X_i tritt zur Zeit $T_i = W_1 + \dots + W_i$ mit $i \geq 1$ auf.

Der Prozess R_t ist rechtsstetig das heißt $R_{T_n} = R_{T_n-} - X_k$ und hat unabhängige stationäre Inkremente, im speziellen ist er markov nach der von R_t generierten natürlichen Filtration F_t im folgenden Sinn:

Für jede von $R(u) : u \geq t$ erzeugten Menge A in der Sigmaalgebra hängt die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|F_t]$ nur von R_t alleine ab:

$$\mathbb{P}[A|F_t] = \mathbb{P}[A|R_t]$$

Der klassische Risikoprozess ist also ein sehr simples Standardmodell, jedoch sehr unrealistisch, da weder Zinsen, welche am Startkapital verdient werden, noch die Zeitabhängigkeit, noch die Größe des Portfolios, oder ähnliches miteinbezogen werden. Jedoch ist dieses Modell von großer Bedeutung, da zwei wichtige Aspekte betrachtet werden können und zwar die Häufigkeit der Schäden und deren Größe.

2.2 Ruin, Ruinwahrscheinlichkeit und der Ruinzeitpunkt

Für dieses Unterkapitel wollen wir nun mit einigen Definitionen beginnen.

Der technische Ruin sei gegeben durch:

$$\{w \in \Omega : R_t < 0 \text{ für ein } t > 0\}.$$

Der Ruinzeitpunkt ist definiert durch:

$$\tau := \inf \{t > 0 : R_t < 0\}$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$\psi(x) = \mathbb{P} \left[\inf_{t \geq 0} R_t < 0 \text{ mit } R_0 = x \right]$$

was Eins ergibt solange $c \leq \lambda \mathbb{E}[X]$, solange es also keinen sogenannten Sicherheitszuschlag gibt.

Mit Sicherheitszuschlag gilt $R_t \rightarrow \infty$ und die Ruinwahrscheinlichkeit erfüllt folgende Integro- Differentialgleichung aus Grandell [3]:

$$0 = \lambda \mathbb{E}[\psi(x - X) - \psi(x)] + c\psi'(x), \quad x \geq 0$$

Im Risikoprozess des Cramer-Lundbergmodells erfüllt die Ruinwahrscheinlichkeit mit konstantem Zins folgende Integro-Differentialgleichung:

$$0 = \lambda \mathbb{E}[\psi(x - X) - \psi(x)] + (c + rx)\psi'(x), \quad x \geq 0$$

Was folgt ist ein kleines Beispiel zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit die Schadenhöhen seien dabei exponentialverteilt, sie haben also eine Dichte von $f(x) = \theta e^{-\theta x}$. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$\psi(x) = \frac{\lambda \mu}{c} e^{-Rx}$$

mit $\mu = \frac{1}{\theta}$ also der mittleren Schadenhöhe und $R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$ einem Anpassungskoeffizienten, so erhält man dieses Ergebnis, wenn man die positive Lösung r , der folgenden Lundberggleichung sucht:

$$\lambda + rc = \lambda \mathbb{E}[e^{rX}].$$

Wir wollen nun dieses Ergebnis aus der obigen Integro-Differentialgleichung herleiten:

Dafür sei die Überlebenswahrscheinlichkeit, was bedeutet, dass der Prozess mit Anfangskapital x nicht ruiniert, gegeben durch:

$\delta(x) = 1 - \psi(x)$, für die $\delta(x) = 0$ wenn $x < 0$ und

$$0 = \lambda(g(x) - \delta(x)) + c\delta'(x) \text{ wenn } x \geq 0 \quad (2.1)$$

wobei

$$g(x) = \mathbb{E}[\delta(x - X)] = \int_0^x \delta(x - y)\theta e^{\theta y} dy = \int_0^x \delta(y)\theta e^{-\theta(x-y)} dy.$$

$g(x)$ erfüllt auf $\{x \geq 0\}$ die Differentialgleichung $g'(x) = \theta(\delta(x) - g(x))$

$\delta(x)$ hat auf $\{x \geq 0\}$ also eine stetige zweite Ableitung $\delta''(x)$, wobei gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(g'(x) - \delta'(x)) + c\delta''(x) \\ &= \lambda\theta(\delta(x) - g(x)) - \lambda\delta'(x) + c\delta''(x) \\ &= c\theta\delta'(x) - \lambda\delta'(x) + c\delta''(x). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung hat eine Lösung der Form:

$$\delta(x) = C_1 + C_2 e^{-Rx}$$

Wenn wir $\delta \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$ ansehen erhalten wir $C_1 = 1$. Wenn wir in (2.1) $x = 0$ einsetzen erhalten wir $\lambda\delta(0) = c\delta'(0)$ also $-C_2 = \frac{\lambda}{cR+\lambda} = \frac{\lambda\mu}{c}$. Und somit führt uns dies zum obigen Ergebnis für die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\psi(x) = 1 - \delta(x) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{Rx}\right) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-Rx}.$$

Kapitel 3

Optimale Dividenden

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der optimalen Wahl einer Dividendenstrategie beschäftigen, zum einen wenn die Dividendenrate beschränkt ist und zum anderen wenn sie unbeschränkt ist.

Hierbei halten wir uns im Aufbau an Asmussen Taksar [1]

3.1 Das Setting

Als Ausgangspunkt betrachten wir die stochastische Differentialgleichung der Reserve $\{r^{(a)}(t)\}_{t \geq 0}$ ohne Dividendenzahlungen also $a = 0$ mit positivem Drift μ und dem Diffusionsparameter σ , dieser hat eine Absorptionszeit τ bei 0, wobei die Absorptionszeit mit der schon kennengelernten Ruinzeit übereinstimmt:

$$dr^{(a)}(t) = \mu dt + \sigma dw(t). \quad (3.1)$$

Wobei $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ die standardisierte Brownsche Bewegung ist.

Falls die Dividendenrate einen fixen Wert a hat, so ist die Reserve $\{r^{(a)}(t)\}_{t \geq 0}$ gegeben durch die stochastische Differentialgleichung:

$$dr^{(a)}(t) = (\mu - a)dt + \sigma dw(t). \quad (3.2)$$

In unserer Betrachtung des Prozesses $\{r(t)\}_{t \geq 0}$ wird die Dividendenrate dynamisch konstruiert, also es gilt für die Dividendenrate $a = a(t)$, dass diese von der ganzen Vergangenheit bis zum Zeitpunkt t abhängt.

Unsere Reserve sieht also folgendermaßen aus:

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dw(t) \quad (3.3)$$

wobei hier $a(t)$ die Dividendenrate ist, die zum Zeitpunkt t ausgezahlt wird. Unsere Entscheidung ist nur abhängig von der Information die zur Zeit t verfügbar ist und kann nicht von dem zukünftigen Verhalten des Prozesses abhängen. Mathematisch beschrieben bedeutet das:

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ eine Filtration, wobei $\mathcal{F}_t$ die Information bis zur Zeit t beschreibt und der Prozess $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung in Abhängigkeit von $\{\mathcal{F}_t\}$ ist, das bedeutet, es gilt: $\sigma(w(s) : 0 \leq s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Wir verlangen, dass a adaptiert zur Filtration ist, was bedeutet, dass

$$a(t) \in \mathcal{F}_t \quad (3.4)$$

Eine Familie von Zufallsvariablen die, dies erfüllt, wird Kontrollprozess genannt.

Wir wollen in Abhängigkeit von $a(\cdot)$ optimieren. Wir sind also an der Optimierung interessiert welche den Erwartungswert des Performance Indexes $J_x(a(\cdot))$ maximiert, welcher eine Zufallsvariable ist, mit Anfangswert $x = r(0)$.

Zum einen wollen wir also die optimale Wertefunktion erhalten:

$$V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbb{E} J_x(a(\cdot)) \quad (3.5)$$

wobei hier das Supremum über alle Kontrollfunktionale $a(\cdot)$, die zulässig mit den gegebenen Voraussetzungen des Problems sind, genommen wird.

Zum anderen wollen wir die optimale Kontrolle $a^*(.)$ finden, sodass gilt:

$$V(x) = \mathbb{E}J_x(a^*(.)) \quad (3.6)$$

Für den oben erwähnten Performance Index werden wir die absoluten diskontierten Dividendenzahlungen verwenden, also:

$$J_x = \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt \quad (3.7)$$

wobei c die Diskontierungsrate ist.

Es wird im Folgenden zwischen zwei Fällen unterschieden, zum einen, wo es eine obere Grenze a_0 für die Dividendenrate gibt, bis zu der diese ausgezahlt wird und zum anderen wo es keine solche obere Grenze gibt.

3.2 Beschränkte Dividendenzahlungen

Sei $a(t)$ der Kontrollparameter und der Performance Index ist gegeben durch (3.7).

In diesem Kapitel gilt, dass die maximale Rate nicht unendlich überschreitet, was bedeutet dass $a_0 < \infty$. Somit gilt, dass die Dividendenrate $a(t) \in [0, a_0]$ für alle $t > 0$.

Die Reserve hat also die obige Form:

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dw(t) \quad (3.8)$$

$$r(0) = x \quad (3.9)$$

Als erstes wollen wir uns klarmachen, dass folgendes gilt:

$$V(0) = 0$$

wobei $V(x)$ gegeben sei durch (3.5).

Ist also der Anfangswert gleich 0, so ist die Firma bankrott und es können

keine Dividenden ausgezahlt werden.

Für alle y sei die Kontrollvariable $a_y(t)$ ϵ -optimal, was bedeutet, dass:

$$\mathbb{E}J_y(a_y(t)) \geq V(y) - \epsilon$$

$a(t)$ sei folgendermaßen gegeben:

$$a(t) = \begin{cases} u, & 0 \leq t \leq \delta \\ a_{r(\delta)}(t - \delta) & t > \delta \end{cases}$$

Somit folgt für $V(x)$:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq u\delta\mathbb{P}_x(\tau > \delta) + e^{-c\delta}[\mathbb{E}_x V(r(\delta)) - \epsilon] \\ &\geq u\delta\mathbb{P}_x(\tau > \delta) + (1 - c\delta)[\mathbb{E}_x V(r(\delta)) - \epsilon] \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig, gilt:

$$V(x) \geq u\delta\mathbb{P}_x(\tau > \delta) + (1 - c\delta)\mathbb{E}_x[V(r(\delta)) - \epsilon]$$

$V(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar. $\mathcal{P}(\tau > \delta) = 1 + o(1)$ für $\delta \downarrow 0$. Wir subtrahieren nun auf beiden Seiten $V(x)$ und wenden die Itô Formel an und erhalten somit für $V(r(\delta))$:

$$\begin{aligned} u\delta + \left[\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x)\right]\delta + o(\delta) &\leq 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u &\leq 0 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $u \in [0, a_0]$.

Wir gelangen also schlussendlich zur sogenannten Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für die optimale Wertefunktion $V(x)$:

$$\max_{0 \leq u \leq a_0} \left[\frac{1}{2}\sigma^2 V(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u \right] = 0 \quad (3.10)$$

Mit der Randbedingung:

$$V(0) = 0 \quad (3.11)$$

Diese Randbedingung entsteht durch sofortigem Ruin an $x = 0$ durch die Oszillation der Brownsche Bewegung.

Wir nehmen nun also an dass $f(x)$ eine Lösung von (3.10) und (3.11) darstellt. Die Funktion die bei (3.10) maximiert wird ist eine lineare Funktion von u für jedes x . Das Maximum ist $u^*(x)$ für jeden Punkt x nimmt es entweder den Wert 0 an oder aber a_0 , es ist somit:

$$u^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } f'(x) > 1 \\ a_0 & \text{für } f'(x) \leq 1 \end{cases}$$

Angenommen f ist konkav, so existiert ein Punkt $m \geq 0$ sodass:

$$f'(x) > 1 \text{ für } x < m$$

$$f'(x) \leq 1 \text{ für } x \geq m$$

Es gilt ergibt sich also:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq m \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0 \quad x \geq m \quad (3.13)$$

Weiters seien θ_1 und $-\theta_2$ die Lösungen der Gleichung des charakteristischen Polynoms: $\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \mu\theta - c = 0$, beziehungsweise des charakteristischen Polynoms: $\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + (\mu - a_0)\theta - c = 0$.

Also:

$$\begin{aligned} \theta_1(\mu) &= \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} & \theta_1(\mu - a_0) &= \frac{-\mu + a_0 + \sqrt{(\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} \\ \theta_2(\mu) &= \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} & \theta_2(\mu - a_0) &= \frac{-\mu + a_0 - \sqrt{(\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (3.12) mit dem Ansatz $f(x) = Ce^{\theta x}$ eine allgemeine Lösung der Form:

$$C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x} \quad (3.14)$$

Weiters hat (3.13) mit selbigem Ansatz die allgemeine Lösung:

$$\frac{a_0}{c} + C_3 e^{\theta_1(\mu-a_0)x} + C_4 e^{-\theta_2(\mu-a_0)x} \quad (3.15)$$

Einerseits ist f beschränkt durch $f(x) \leq \frac{a_0}{c}$, deshalb erhalten wir in (3.15) für $C_3 = 0$ und für $C_4 = -d$.

Andererseits gilt, dass $f(0) = 0$, weshalb wir in (3.14) $C_1 = -C_2 =: C$ erhalten. Um die Konstanten C , d und die unbekannte Schranke m zu finden, verwenden wir das Prinzip des ‘smooth fit’, sodass $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Wir fordern:

$$f(m+) = f(m-) \quad (3.16)$$

$$f'(m+) = f'(m-) = 1 \quad (3.17)$$

Und somit folgt, dass auch die zweite Ableitung stetig ist. Es sei $\theta_1 = \theta_1(\mu)$, $\theta_2 = \theta_2(\mu)$ und $\theta_3 = \theta_2(\mu - a_0)$. Und es folgt:

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - d e^{-\theta_3 m} \quad (3.18)$$

$$C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = d \theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1 \quad (3.19)$$

Durch Lösen der letzten Gleichung erhält man:

$$d = \frac{1}{\theta_3} e^{\theta_3 m} \quad (3.20)$$

Durch Einsetzen von d in (3.18) erhalten wir:

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} e^{-\theta_3 m} e^{\theta_3 m} = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} =: \alpha \quad (3.21)$$

Die Lösung für (3.18) und (3.19) kann also nur dann existieren wenn die Bedingung $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ erfüllt ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass diese Bedingung hinreichend ist. Dazu benötigen wir nachfolgendes Lemma:

Lemma 3.1.

$$\alpha\theta_1 < 1.$$

Beweis

Hierfür verwenden wir die elementare Ungleichung:

$$\sqrt{a^2 + b} - a < \frac{b}{2a} \text{ für } a, b > 0$$

Durch das Einsetzen von $a = \mu$ und $b = 2\sigma^2 c$ und durch kürzen erhalten wir:

$$\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} - \mu < \frac{\sigma^2 c}{\mu}$$

Und weiters durch umformen:

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} - \mu}{\sigma^2} < \frac{c}{\mu} \quad (3.22)$$

Die Ungleichung $\alpha\theta_1 < 1$ ist durch das Einsetzen von $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3}$ und durch Umformung, äquivalent zur Ungleichung:

$$\frac{a_0}{c} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3} \quad (3.23)$$

Ist $a_0 \leq \mu$ so folgt (3.23) aus (3.22).

Ist jedoch $a_0 \geq \mu$ so erhält man:

$$\theta_3 = \frac{\sqrt{(\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2 c} + (\mu - a_0)}{\sigma^2} < \frac{c}{a_0 - \mu}. \quad (3.24)$$

Kombiniert man nun (3.22) und (3.24) so erhält man die zu $\alpha\theta_1 < 1$ äquivalente Ungleichung (3.23).

□

Proposition 3.2.

Falls $\alpha > 0$, so existiert ein eindeutiges positives Triple (C, d, m) , welches (3.18) und (3.19) löst.

Beweis

Dividiert man den Term (3.18) durch (3.19) und kürzt, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} = \alpha.$$

Multipliziert man nun den Nenner auf beiden Seiten erhält man:

$$e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m} = \alpha \theta_1 e^{\theta_1 m} + \alpha \theta_2 e^{-\theta_2 m}.$$

Durch geeignete Umformung erhält man weiters:

$$e^{\theta_1 m} e^{\theta_2 m} = \frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1}.$$

Durch Anwendung des Logarithmus bekommen wir nun:

$$m(\theta_1 + \theta_2) = \log \left(\frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} \right).$$

Was uns mit Lemma 3.1 auf die eindeutige Lösung von m führt:

$$m = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} > 0. \quad (3.25)$$

Einsetzen von m in (3.19) gibt uns folgende Lösung für C :

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 \left(\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \left(\frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} \right) \right)} + \theta_2 e^{-\theta_2 \left(\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \left(\frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} \right) \right)}}.$$

Und schlussendlich bringt uns das Einsetzen von m in (3.20) auch die Lösung für d :

$$d = \frac{e^{\theta_3 \left(\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \left(\frac{1 + \alpha \theta_2}{1 - \alpha \theta_1} \right) \right)}}{\theta_3}.$$

□

Theorem 3.3.

Es existiert eine zweifach stetig differenzierbare konkave Lösung für (3.10)

und (3.11).

Falls $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$, so ist diese Lösung gegeben durch:

$$f(x) = \frac{a_0}{c} (1 - e^{-\theta_3 x}). \quad (3.26)$$

Wohingegen falls $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ diese Lösung gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} C (e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & 0 \leq x \leq m, \\ \frac{a_0}{c} - d e^{-\theta_3 x} & x > m, \end{cases} \quad (3.27)$$

wobei C, d, m die obigen eindeutigen Lösungen sind.

Beweis

Die Funktion (3.26) erfüllt (3.11) :

$$f(0) = \frac{a_0}{c} (1 - 1) = 0$$

ist konkav und die Ableitung an der Stelle 0 erfüllt weiters :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \theta_3 \frac{a_0}{c} e^{-\theta_3 x} \\ f'(0) &= \theta_3 \frac{a_0}{c} \leq 1 \end{aligned}$$

Somit ist $f'(x) \leq 1$ für alle $x > 0$ und

$$(a_0 - u) (f'(x) - 1) \leq 0, u \in [0, a_0]$$

Fügen wir diese Ungleichung folgender Gleichung hinzu:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0) f'(x) - c f(x) + a_0 = 0,$$

welche durch f erfüllt wird, erhalten wir unsere gewünschte Gleichung (3.10).

Nun nehmen wir an, dass $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$, somit erfüllt f (3.11):

$$f(0) = C(e^{\theta_1 0} - e^{-\theta_2 0}) = 0. \text{ Durch die Bauart ist } f \text{ stetig mit } f'(m-) =$$

$f'(m+)$. Nachdem f (3.12) auf $[0, m]$ und (3.13) auf $[m, \infty)$ erfüllt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} f''(m-) &= \frac{2}{\sigma^2} (cf(m) - \mu f'(m)) \\ f''(m+) &= \frac{2}{\sigma^2} (cf(m) - (\mu - a_0)f'(m) - a_0). \end{aligned}$$

Da $f'(m) = 1$ per Definition, haben wir $f''(m-) = f''(m+)$ und so ist f zweimal stetig differenzierbar.

Die Konkavität auf $[m, \infty)$ folgt unmittelbar.

Um die Konkavität im Bereich $[0, m]$ zu überprüfen, leiten wir f dreimal ab, um durch die Tatsache, dass $f''' > 0$, zu erhalten, dass f'' monoton ist.

Hierfür ist sofort zu überprüfen, dass $f''(0) < 0$ und da $f''(m+) < 0$, folgt sofort durch obige Gleichung $f''(m-) = f''(m+)$, dass $f''(m-) < 0$, sodass $f'' < 0$ auf $[0, m]$. Was eine Konkavität auf $[0, \infty)$ ergibt.

Es sei nun $x \leq m$. So ist $f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}) > 1$, fügt man nun die Ungleichung $-u(f'(x) - 1) \leq 0$ zu (3.12) hinzu erhalten wir (3.10).

Falls nun $x > m$. So ist $f'(x) = \theta_3 d e^{-\theta_3 x} < 1$ fügt man nun die Ungleichung $a_0 - u(f'(x) - 1) \leq 0$ zu (3.13) hinzu, so erhalten wir (3.10).

Was diesen Beweis vervollständigt.

□

Proposition 3.4.

Die Funktion f in Proposition (3.2) majorisiert $J_x(a(.))$ für jede admissible Strategie.

Beweis

Unter Verwendung der Itô Formel, können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 e^{-c(T \wedge \tau)} f(r(T \wedge \tau)) = & \\
 & f(x) + \int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 f''(r(t)) + (\mu - a(t)) f'(r(t)) - c f(r(t)) \right) e^{-ct} dt \\
 & + \int_0^{T \wedge \tau} e^{-ct} f'(r(t)) \sigma dw(t).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Da f konkav ist und, $f'(x)$ beschränkt (durch $f'(0)$).

So folgt, dass der letzte Term der obigen Gleichung quadratisch integrierbar ist:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau} \|e^{-ct} f'(r(t)) \sigma\|^2 dt \right] < \infty.$$

Und ein Martingal ist:

$$\int_0^{T \wedge \tau} e^{-ct} f'(r(t)) \sigma dt.$$

Mit Erwartungswert gleich Null:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T \wedge \tau} e^{-ct} f'(r(t)) \sigma dt \right] = 0.$$

Durch (3.10) können wir feststellen, dass der erste Integrand auf der rechten Seite, der obigen Gleichung $-a(t)$ nicht übersteigt.

Bildet man nun den Erwartungswert auf beiden Seiten der obigen Gleichung und ordnet die Terme neu an so erhalten wir:

$$f(x) \geq \mathbb{E}_x \int_0^{T \wedge \tau} e^{-ct} a(t) dt + \mathbb{E}_x e^{-c(T \wedge \tau)} f(r(T \wedge \tau)). \tag{3.29}$$

Lassen wir nun $T \rightarrow \infty$ gehen und wenden Satz 1.21 (Satz der monotonen Konvergenz) an, so erhalten wir:

$$f(x) \geq \mathbb{E}_x \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt = J_x(a(.)).$$

□

Korollar 3.5.

$$f(x) \geq V(x)$$

Proposition 3.6.

Es sei $u^*(x) = a_0 \mathbb{1}_{\{x > m\}}$ und $r^*(t)$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.8) und ersetze in (3.9) $a(t)$ durch $a^*(t) = u^*(r(t))$. So ist $J_x(a^*(\cdot)) = f(x)$

Beweis

Ersetzt man in (3.28) und (3.29) $a(t)$ durch $a^*(t)$, kann man erkennen, dass (3.29) von einer Ungleichung zu einer Gleichung wird, da $r(\tau) = 0$ und $f(0) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x e^{-c(T \wedge \tau)} f(r(T \wedge \tau)) &= \mathbb{E}_x e^{-c(T \wedge \tau)} f(r(T \wedge \tau)) \mathbf{1}_{\tau > T} \\ &= \mathbb{E}_x e^{-cT} f(r(T \wedge \tau)) \mathbf{1}_{\tau > T} \\ &\leq e^{-cT} \sup_{x \geq 0} f(x) \\ &\leq e^{-cT} \frac{a_0}{c} \end{aligned}$$

Was wiederum gegen 0 konvergiert, wenn wir $T \rightarrow \infty$ gehen lassen. Wendet man nun in (3.29) den Limes $T \rightarrow \infty$ an so erhält man im Endeffekt:

$$f(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\tau e^{-ct} a^*(t) dt.$$

□

Korollar 3.7.

$$f(x) = V(x) = J_x(a^*(\cdot))$$

Als Ergebnis haben wir also eine eindeutige konkave beschränkte Lösung für (3.10) und (3.11) gefunden. Jede solche Lösung stimmt mit der optimalen Wertefunktion überein.

Wir haben nun also für beschränkte Dividendenzahlungen also für $a_0 < \infty$ folgendes in diesem Abschnitt gezeigt:

Falls die maximale Rate a_0 klein genug ist, also $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ nicht erfüllt ist, so ist die optimale Strategie immer die maximale Dividendenrate zu zahlen.

Falls die maximale Rate $a_0 < \infty$ jedoch die Bedingung $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ erfüllt, so ist die optimale Strategie nichts zu zahlen falls die Reserve unter einem Optimierungslevel m ist und die maximale Dividendenrate a_0 zu zahlen falls sie über diesem Level m ist.

3.3 Unbeschränkte Dividendenzahlungen

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus dass die zeitabhängige Dividendenrate auch unendlich erreichen kann.

Daher müssen einige Adaptionen an unserem Setting vorgenommen werden.

Es sei:

$$L(t) = \int_0^t a(t)dt,$$

die Gesamtmenge der Dividendenzahlungen ausgezahlt bis zum Zeitpunkt t .

Es ist $L(t) \uparrow$ und wir werden $L(\cdot)$ als zulässig bezeichnen wenn die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$$L(t) \in \mathbb{F}_t,$$

$L(\cdot)$ ist ein nicht fallender nichtnegativer Prozess

Dabei wird weder von der Stetigkeit oder absoluten Stetigkeit dieses Prozesses ausgegangen. Da dieser Prozess nun auch Unstetigkeitsstellen also Sprünge enthalten kann, verlangen wir als technische Voraussetzung, dass die *cádlag* Eigenschaft erfüllt ist. $L(t) - L(s)$ ist also die Menge der Dividenden die im Intervall $(s, t]$ ausgezahlt werden und $L(t) - L(t-)$ ein Dividendenpauschalbetrag der zum Zeitpunkt t ausgezahlt wird (dies kann aber nur bei einer abzählbaren Menge von t Werten der Fall sein).

Die Reserve hat nun die folgenden Integraldarstellung:

$$r(t) = x + \int_0^t \mu(r(s))ds + \sigma w(t) - L(t) \quad (3.30)$$

Dabei sei $r(0) = x - L(0)$, was bedeutet, dass falls es zum Zeitpunkt 0 eine Dividendenauszahlung gibt, der Prozess sofort von x auf $x - L(0)$ fällt. Deshalb werden wir $r(0-) = x$ und $L(0-) = 0$ voraussetzen.

Der Performance Index ist gegeben durch ein Lebesgue-Stieltjes Integral wobei der linke Endpunkt bei der Integration miteinbezogen wird:

$$J_x(L(.)) = \int_0^\tau e^{-ct} dL(t).$$

Wir suchen wieder wie auch im beschränkten Dividendenfall die optimale Wertefunktion $V(x)$, wobei hier das Supremum über alle zulässigen Strategien L genommen wird:

$$V(x) = \sup_{L(.)} \mathbb{E} J_x(L(.)). \quad (3.31)$$

Und weiters die optimale Kontrolle L^* :

$$V(x) = \mathbb{E} J_x(L^*(.)). \quad (3.32)$$

Um uns klar zu machen was die Gleichungen für V erfüllen müssen rufen wir uns noch einmal den beschränkten Dividendenfall ins Gedächtnis, hierbei ist es optimal entweder 0 Dividendenrate zu zahlen oder die maximale

Dividendenrate. Bei uns ist diese maximale Dividendenrate aber unendlich. Wir werden nun ähnliche Argumente wie im vorigen Abschnitt verwenden, entweder nichts zu zahlen in einem kleinen Intervall $[0, \delta]$ und dann die ϵ -optimale Strategie zu verwenden oder aber eine unendliche Rate zu zahlen.

Für jedes y sei $L^y(\cdot)$ die Strategie, sodass:

$$\mathbb{E}J_y(L^y(\cdot)) \geq V(y) - \epsilon$$

Wir nehmen nun $\delta > 0$ als einen fixen Wert an und es sei

$W(t) = x + \mu t + \sigma w(t)$ die Brownsche Bewegung mit Driftparameter μ , Varianz σ^2 und Anfangswert x .

Es sei:

$$L_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < \delta \\ L^{W(\delta)}(t - \delta) & t \geq \delta. \end{cases}$$

Mit $L_\epsilon(\cdot)$ verfolgt man also die Strategie, keine Dividenden zu zahlen vor einem Zeitpunkt δ , während dieser Zeit entwickelt sich die Reserve wie $W(\cdot)$ und ist $W(\delta)$ zum Zeitpunkt δ . Ab dem Zeitpunkt δ ändern wir unsere Strategie zu $L^{W(\delta)}(\cdot - \delta)$ die zumindest $V(W(\delta)) - \epsilon$ einbringt.

Da so eine Strategie suboptimal ist können wir schreiben:

$$V(x) \geq e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(W(\delta)) - \epsilon; \tau \geq \delta]$$

Nachdem ϵ frei wählbar ist können wir diese Ungleichung umformen in:

$$V(x) - e^{-c\delta} \mathbb{E}V(W(\delta)) + o(\delta) \geq 0. \quad (3.33)$$

Angenommen V sei zweimal stetig differenzierbar, so haben wir

$$e^{-c\delta} \mathbb{E}V(W(\delta)) = (1 - c\delta)(V(x) + \delta\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x)\}) + o(\delta)$$

Und erhalten mit dieser Erkenntnis und durch Division von δ für (3.33):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) + cV(x) \leq 0. \quad (3.34)$$

Für eine weitere Ungleichung die V erfüllen soll, nehmen wir einen fixen Wert für x und $\delta > 0$ an und $L^y(\cdot)$ sei wie oben definiert mit $y = x - \delta$. Es sei:

$$\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + L^{x-\delta}(t)$$

Diese Strategie beschreibt die sofortige Auszahlung von δ , was die Reserve auf $x - \delta$ reduziert und dann die Anwendung des Kontrollfunktional $L^{x-\delta}(\cdot)$.

Mit ähnlichen Argumenten wie oben erhalten wir:

$$V(x) \geq \mathbb{E} \int_0^\tau e^{-ct} d\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + \mathbb{E} \int_0^\tau e^{-ct} dL^{x-\delta}(t) \geq \delta + V(x - \delta) - \epsilon$$

Da ϵ frei wählbar, erkennen wir, dass $V(x) - V(x - \delta) \geq \delta$ und somit:

$$V'(x) \geq 1. \quad (3.35)$$

Wir halten also fest, dass V die Ungleichung (3.34) und die Ungleichung (3.35) erfüllen muss.

Ergänzend ist es klar, dass aufgrund der Absorption an 0 für $x = 0$ die Anfangsbedingung $V(0) = 0$ erfüllt ist

Theorem 3.8.

Die optimale Wertefunktion V erfüllt die folgende Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung:

$$\max \left(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x), 1 - V'(x) \right) = 0 \quad (3.36)$$

$$V(0) = 0 \quad (3.37)$$

Wir wollen nun eine Lösung f für (3.36) finden, hierzu nehmen wir an, dass f konkav ist, sodass $f'(x)$ nicht wachsend ist.

Wir haben

$$f'(x) > 1 \quad x < m,$$

$$f'(x) = 1 \quad x \geq m$$

mit $m = \sup \{x : f'(x) > 1\}$.

Es sei:

$$\mathcal{A}f(x) = 0, \quad \text{für } x \leq m, \quad (3.38)$$

wobei gilt:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mu \frac{d}{dx} - c.$$

Es soll hierbei f zwei Sachen erfüllen, zum einen soll im Bereich $[0, m]$ (3.38)

erfüllt werden und des weiteren im Bereich $[m, \infty)$ $f'(x) = 1$.

Um nun die unbekannte Grenze m zu finden, bedienen wir uns wie im endlichen Fall dem Prinzip des "smooth fit".

Wir fordern, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, somit sei:

$$f'(m) = f'(m-) = f'(m+),$$

$$f''(m) = f''(m-) = f''(m+)$$

Also ist das Problem dadurch gegeben eine Lösung f zu finden für (3.38)

und eine Begrenzung m , sodass:

$$f(0) = 0 \quad (3.39)$$

$$f'(m) = 1 \quad (3.40)$$

$$f''(m) = 0 \quad (3.41)$$

Generell hat jede Lösung von (3.38) eine Form $C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x}$

Wobei θ_1 und θ_2 dieselben sind wie im beschränkten Fall und C_1 und C_2 sind

wählbare Konstanten Aus (3.39) folgt, dass $C_1 = -C_2$, sodass:

$$f(x) = C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), \quad (3.42)$$

wobei C einen positiven Wert hat.

Leitet man nun diese Gleichung zweimal ab so gilt:

$$f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}), \quad (3.43)$$

$$f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}) \quad (3.44)$$

Aus (3.44) und (3.41) erhält man:

$$f''(m) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 m} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 m}) = 0 \quad (3.45)$$

$$\theta_1^2 e^{\theta_1 m} = \theta_2^2 e^{-\theta_2 m} \quad (3.46)$$

$$e^{m(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2} \quad (3.47)$$

$$m(\theta_1 + \theta_2) = 2 \log \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right| \quad (3.48)$$

$$m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log \left| \frac{\theta_2}{\theta_1} \right| \quad (3.49)$$

Und aus (3.43) und (3.40) erhält man:

$$f'(m) = C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1 \quad (3.50)$$

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} \quad (3.51)$$

Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Theorem:

Theorem 3.9.

Es sei:

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x}) & x \leq m, \\ C(e^{\theta_1 m} + e^{-\theta_2 m}) + x - m & x \geq m, \end{cases}$$

wobei m und C durch (3.49) und (3.51) gegeben sind.

Dann ist $f(x)$ eine Lösung der Hamilton- Jacobi-Bellman Gleichung (3.36).

Beweis

Alles was noch zu zeigen bleibt um (3.36) zu erfüllen sind die nachfolgenden zwei Punkte:

$$f'(x) \leq 1 \quad x \leq m, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{A}f(x) \leq 0 \quad x \geq m. \quad (3.53)$$

Differenziert man (3.44) ein weiteres Mal, so können wir vermerken, dass $f'''(x) \geq 0$ woraus folgt, dass $f''(x)$ eine wachsende Funktion ist. Weiter ist $f''(0) = C(\theta_1^2 - \theta_2^2) < 0$ da gilt $|\theta_2| > \theta_1$. Weil $f''(m) = 0$, impliziert die Monotonie von f'' , dass $f''(x) \leq 0$ für $x \leq m$ und so $f(x)$ konkav auf $[0, m]$ ist.

Folglich ist $f'(x) \geq f'(m) = 1$ für alle $x \leq m$, was uns zum Ergebnis von (3.52) führt.

Um (3.53) zu zeigen, machen wir uns klar, dass für $x \geq m$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\mathcal{A}f(x) = \mu f'(x) - cf(x) \leq \mu - cf(m) = \mathcal{A}f(m) = 0.$$

Was uns zum gewünschten Ergebnis (3.53) führt und diesen Beweis komplettiert.

□

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass die Funktion f aus Theorem 3.9. genau mit der optimalen Wertfunktion V wie in (3.31) übereinstimmt.

Der erste Schritt wird sein, zu zeigen, dass f das Zielfunktional für eine beliebige Strategie majorisiert. Da $f \geq V$ wird der zweite Schritt sein ein Kontrollfunktional L^* so zu konstruieren, dass $\mathbb{E}J_x(L^*(.)) = f(x)$ gilt.

Proposition 3.10.

Sei L ein beliebiger Kontrollprozess so gilt:

$$f(x) \geq \mathbb{E}J_x(L) \quad (3.54)$$

Beweis

Es sei $r(t)$ durch (3.30) gegeben mit $\mu(x) \equiv \mu$ und sei τ die entsprechende Ruinzeit.

Für eine beliebige wachsende Funktion $L(\cdot)$ sei

$\Lambda = \{s : L(s-) \neq L(s)\}$. Sei $L^d = \sum_{s \in \Lambda, s \leq t} [L(s) - L(s-)]$ der unstetige Teil von L und $L^c(t) = L(t) - L^d(t)$ der stetige Teil.

Unter Verwendung der Itô Formel, können wir schreiben:

$$e^{-c(t \wedge \tau)} f(r(t \wedge \tau)) \quad (3.55)$$

$$= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} \mathcal{A}f(r(s)) ds \quad (3.56)$$

$$+ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r(s)) dw(s) - \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r(s)) dL(s) \quad (3.57)$$

$$- \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-cs} [f(r(s)) - f(r(s-)) - f'(r(s-))(r(s) - r(s-))] \quad (3.58)$$

$$= f(x) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} \mathcal{A}f(r(s)) ds \quad (3.59)$$

$$+ \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r(s)) dw(s) - \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r(s)) dL^c(s) \quad (3.60)$$

$$- \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-cs} [f(r(s)) - f(r(s-))] \quad (3.61)$$

Der Integrand im zweiten Term in (3.59) ist nicht positiv. Nachdem f konkav ist, $0 < f'(x) < f'(0) < \infty$. Der erste Term in (3.60) ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert gleich Null.

Nehmen wir nun die Erwartungswerte der Ausdrücke so erhalten wir:

$$\mathbb{E}[e^{-c(t \wedge \tau)} f(r(t \wedge \tau))] \quad (3.62)$$

$$\leq f(x) - \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r(s)) dL^c(s) \quad (3.63)$$

$$- \mathbb{E} \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-cs} [f(r(s)) - f(r(s-))] \quad (3.64)$$

Dabei entspricht (3.62):

$$\mathbb{E}[e^{-ct} f(r(t)); t < \tau] = e^{-ct} \mathbb{E}[f(r(t)); t < \tau] \quad (3.65)$$

Es gilt $r(t) \leq |w(t)|$, wobei $w(t)$ für die Brownsche Bewegung mit Parameter (μ, σ^2) steht.

Aufgrund der Konkavität von f gilt: $f(x) \leq a + bx$ für $a, b > 0$. Somit ist die rechte Seite von (3.65) durch $e^{-ct}(a + b\mathbb{E}|w(t)|)$ beschränkt, was für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Wir erinnern uns, dass $f'(x) \geq 1$ und, dass $r(s) - r(s-) = L(s-) - L(s)$. Daher ist $f(r(s)) - f(r(s-)) \leq L(s-) - L(s)$.

So erhalten wir wenn, wir den Limes von der Ungleichung (3.63) – (3.64) nehmen:

$$0 \leq f(x) - \mathbb{E} \int_0^\tau e^{-cs} dL^c(s) - \mathbb{E} \sum_{s \in \Lambda, s \leq t \wedge \tau} e^{-cs} [L(s) - L(s-)] \quad (3.66)$$

$$= f(x) - \mathbb{E} \int_0^\tau e^{-cs} dL(s). \quad (3.67)$$

□

Korollar 3.11.

$$f(x) \geq V(x).$$

Als erstes wollen wir ein Funktional L^* konstruieren, sodass $\mathbb{E}J_x(L) = f(x)$.

Sei m wie in (3.49) und definiere:

$$L^*(t) = \max_{s \leq t} [x + \mu s + \sigma w(s) - m]^+ \quad (3.68)$$

$$r^*(t) = x + \mu t + \sigma w(t) - L^*(t). \quad (3.69)$$

Dabei sei bemerkt, dass $\{L^*(t)\}_{t \geq 0}$ ein stetiger, wachsender Prozess ist mit $L(0) > 0$ wenn $x > m$. Wir sagen, dass in diesem Fall L einen Sprung der Größe $x - m$ an $t = 0$ hat.

Der Prozess $\{r^*(t)\}_{t \geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, m]$ mit m als oberer Grenze und das Funktional $L^*(\cdot)$ wächst nur in den Zeiten t , wenn $r^*(t) = m$.

Genauer:

$$r^*(t) \leq m \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (3.70)$$

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{r^*(t) < m} dL^*(t) = 0. \quad (3.71)$$

Proposition 3.12.

Sei f wie in Theorem 3.9. gegeben.

So ist:

$$\mathbb{E} J_x(L^*) = f(x).$$

Beweis

Es sei $\tau^* = \inf \{t : r^*(t) = 0\}$. Ersetzen wir in der Itô Formel (3.59) – (3.61) L und τ durch L^* und τ^* so ist der zweite Term in (3.59) gleich Null wegen (3.70) und $\mathcal{A}f(x) = 0$ wenn $x \leq m$. Nun nehmen wir den Erwartungswert auf beiden Seiten, wobei der Martingalterm hierbei verschwindet, so erhalten wir:

$$\mathbb{E} [e^{-ct} f(r^*(t)); t < \tau^*] = f(x) - \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-cs} f'(r^*(s)) dL^*(s). \quad (3.72)$$

Da f beschränkt ist auf $[0, m]$ so konvergiert die linke Seite für $t \rightarrow \infty$ gegen 0.

Zum anderen implizieren (3.71) und $f'(m) = 1$, dass:

$$\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r^*(s)) dL^*(s) \quad (3.73)$$

$$= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(r^*(s)) \mathbb{1}_{r^*(s)=m} dL^*(s) \quad (3.74)$$

$$= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} f'(m) \mathbb{1}_{r^*(s)=m} dL^*(s) \quad (3.75)$$

$$= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} \mathbb{1}_{r^*(s)=m} dL^*(s) \quad (3.76)$$

$$= \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau} e^{-cs} dL^*(s). \quad (3.77)$$

Setzt man nun (3.77) in (3.72) ein, und lässt man $t \rightarrow \infty$ gehen so erhält man:

$$f(x) - \mathbb{E} \int_0^{\tau} e^{-cs} dL^*(s) = 0$$

□

Korollar 3.13.

$f(x) = V(x)$ und L^* ist die optimale Kontrolle.

Beweis

Setzt man in Korollar 3.5. $f(x) \geq V(x)$, das Ergebnis von Proposition 3.12 ein so erhält man $\mathbb{E} J_x(L^*) \geq V(x)$ und verwendet man die Ungleichung $V(x) \geq \mathbb{E} J_x(L^*)$ so erhält man die Gleichheit.

In diesem Unterkapitel haben wir nun also eine Lösung f für (3.36) für zwei analytische Bereiche konstruiert. Des weiteren wurde gezeigt, dass unsere Lösung die optimale Wertefunktion majorisiert. Und schlussendlich ein

Funktional L^* konstruiert, sodass der dazugehörige Performance Index Erwartungswert V hat und gezeigt, dass $f = V$ ist und, dass L^* die optimale Kontrolle darstellt.

Es hat sich gezeigt, dass die optimale Strategie ist, falls die Dividendenzahlungen unbeschränkt sind, den Betrag zu zahlen, welcher das optimale Level m übersteigt und keine Dividenden zu zahlen falls die Reserve unter diesem Level m ist.

Kapitel 4

Optimale Barriere bei Unternehmen, das investiert

4.1 Modellbeschreibung

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass alle Prozesse und Zufallsvariablen auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definiert sind und die Filtration die üblichen Bedingungen erfüllt, was bedeutet, dass $\mathcal{F}_t$ rechtssteigend und $\mathcal{F}$ vollständig ist.

Unser Risikoprozess Y_t ist die Lösung der nachfolgenden stochastischen Integralgleichung:

$$Y_t = y + P_t + \int_0^t Y_{s-} dR_s, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Wobei die stochastischen Prozesse P_t und R_t Semimartingale sind. Und zum Anfangszeitpunkt 0 gilt, dass $P_0 = R_0 = 0$ und $Y_0 = y$ welches die sogenannte Anfangsrisikoreserve beschreibt.

Der Prämienprozess P ist eine Verallgemeinerung des klassischen Risikoprozesses, den wir bereits in Kapitel 2 kennengelernt haben.

Er wird beschrieben, durch den, durch Diffusion gestörten klassischen Risi-

koprozess:

$$P_t = y + pt + \sigma_P w_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Dabei steht die Prämienintensität $p \geq 0$ für konstante Prämieinnahmen. Der zusammengesetzte Poissonprozess wird durch $\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$ dargestellt und beschreibt die mit Zufall behafteten Forderungen an das Unternehmen. Dabei ist N_P ein Poissonprozess mit einer Intensität λ_P , welcher für die Anzahl der Schäden beziehungsweise Forderungen steht. Weiters ist $S_{P,i}$ die Schadenhöhe wobei gilt, dass die Schadenhöhe unabhängig von der Schadenanzahl ist und weiters unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F_P ist.

Der Term $\sigma_P w_{P,t}$ beschreibt kleinere zufällige Schwankungen des Risikoprozesses und ist unabhängig vom zusammengesetzten Poissonprozess, wobei w_P für die standardisierte Brownsche Bewegung steht.

Der Kapitalertragsprozess R wird analog zum Prämienprozess definiert und ist eine Verallgemeinerung des Black-Scholes Modells :

$$R_t = rt + \sigma_R w_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i} \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Hierbei ist rt ein konstanter deterministischen Ertrag, wobei $r \geq 0$ der stetige Zinssatz ist. Der Ausdruck $\sigma_R w_{R,t}$ steht hier für die zufälligen Schwankungen der Kapitalerträge, wobei w_R wieder eine Brownsche Bewegung darstellt.

Zur Vereinfachung sind weiters P und R unabhängig, da P die Seite des Risikos und R hingegen die Anlage am Kapitalmarkt beschreibt. Diese Vereinfachung muss aber in der Praxis im allgemeinen nicht erfüllt sein.

Aus $F_R(-1) > 0$ und $\lambda_R > 0$ folgt, dass $S_{R,i} \leq -1$ zumindest für ein i

mit einer Wahrscheinlichkeit 1, woraus folgt, dass:

$Y_t = Y_{t-} + \Delta Y_t = Y_{t-} + Y_{t-} S_{R,i} \leq 0$, was bedeutet, dass Y f.s. zu einem Zeitpunkt ins Negative übergeht, was eine Betrachtung der Ruinwahrscheinlichkeit unnötig macht, da f.s. Ruin eintritt.

Setzt man nun den Prämienprozess und den Kapitalertragsprozess in (4.1) ein, so erhält man:

$$Y_t = y + pt + \sigma_P w_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t Y_{s-} d(rs + \sigma_R w_{R,s} + \sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,i}) \quad (4.4)$$

$$= y + pt + \sigma_P w_{P,t} - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t r Y_{s-} ds \quad (4.5)$$

$$+ \int_0^t \sigma_R Y_{s-} dw_{R,s} + \int_0^t Y_{s-} d\left(\sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,i}\right) \quad (4.6)$$

Nun gilt es zu klären ob diese stochastische Differentialgleichung überhaupt lösbar ist und wenn ja, ob ihre Lösung eindeutig ist.

Hierbei reicht es festzustellen, dass R und P unabhängige Lévy-Prozesse sind. Aus Satz (1.7) folgt dass R und P unabhängige Semimartingale sind und wir somit die Lösbarkeit des allgemeinen Modells (4.1) betrachten können.

Aus Satz (1.13) folgt, dass das allgemeine Modell eine eindeutige Lösung Y hat und, dass diese sogar ein Semimartingal ist.

Da eben R und P unabhängige Lévy-Prozesse sind folgt weiters aus Satz (1.13), dass die Lösung Y sogar ein starker Markovprozess ist.

Wir wenden nun also das Theorem 6.8 aus Jacod [6] auf das Modell (4.5–4.6) an mit $H = P + y$ und $X = R$. Es gilt dann $T_1 = \inf \{t > 0 : \Delta R_t = -1\} = \infty$, sodass der gestoppte Prozess X^{T_1} gleich dem Prozess X ist. Weiters soll gelten, dass $H_{0-} = 0$ ist und somit folgt $\Delta H_0 = y$. Dadurch vereinfacht sich

die Lösung für Y und man erhält:

$$Y_t = \mathcal{E}(R)_t \left(y + \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(R)_{s-}} dP_s \right) \quad (4.7)$$

wobei $\mathcal{E}(R)$ stochastisches Exponential heißt und die eindeutige Lösung von $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dR_s$ ist.

Nach Satz (1.12) erhalten wir somit:

$$\mathcal{E}(R)_t = \exp \left(R_t - \frac{1}{2} [R, R]_t^c \right) \prod_{s \leq t} ((1 + \Delta R_s) \exp(-\Delta R_s)) \quad (4.8)$$

$$= \exp \left(rt + \sigma_R w_{R,t} + \sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i} - \frac{1}{2} \sigma_R^2 t \right) \prod_{s \leq t} ((1 + S_{R,i}) \exp(-S_{R,i})) \quad (4.9)$$

$$= \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_R^2 \right) t + \sigma_R w_{R,t} \right) \prod_{s \leq t} ((1 + S_{R,i}) \exp(-S_{R,i})) \quad (4.10)$$

Die explizite Form des Risikoprozesses wird erst im weiteren verwendet.

Nun werden wir uns damit beschäftigen, den infinitesimalen Generator unseres Risikoprozesses zu bestimmen.

Satz 4.1. (Der infinitesimale Generator)

Es sei $f \in C_b^2(\mathbb{R})$. So ist der infinitesimale Generator A des Risikoprozesses aus (4.4 - 4.6) gegeben durch

$$Af(y) = \frac{1}{2} (\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) f''(y) + (ry + p) f'(y) \quad (4.11)$$

$$+ \lambda_P \int_0^\infty (f(y-x) - f(y)) dF_P(x) \quad (4.12)$$

$$+ \lambda_R \int_{-1}^\infty (f(y(1-x) - f(y)) dF_R(x) \quad (4.13)$$

Beweis

Im Folgenden gehen wir in groben Zügen analog zum Beweis des infinitesimalen Generators von [2] vor. Falls $f \in \mathcal{D}(A)$ so kann man A mittels Definition 1.18. (Der infinitesimale Generator) berechnen. In weiterer Folge wird klar

werden, dass dieser in der Definition verwendete Grenzwert $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ existiert.

Zuerst wenden wir nun Satz (1.11) (Itô Formel für Semimartingale) auf $f(Y_t)$ an:

$$f(Y_t) - f(y) = \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) dY_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) d[Y, Y]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-}) \Delta(Y_s)\}$$

Nun wird für Y_s (4.5)–(4.6) eingesetzt, weiters sind $\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$ und $\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}$ ”quadratic pure jump” Semimartingale und w_P und w_R unabhängige Brownsche Bewegungen. Für den stetigen Anteil der quadratischen Variation von Y gilt also:

$$\begin{aligned} d[Y, Y]_t^c &= \sigma_P^2 d[w_P, w_P]_t + Y_{t-}^2 \sigma_R^2 d[w_R, w_R]_t \\ &= \sigma_P^2 dt + Y_{t-}^2 \sigma_R^2 dt \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$f(Y_t) - f(y) = \tag{4.14}$$

$$\int_{0+}^t f'(Y_{s-}) p ds + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) \sigma_P dw_{P,s} - \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) d \left(\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} \right) \tag{4.15}$$

$$\int_{0+}^t f'(Y_{s-}) r Y_{s-} ds + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) \sigma_R Y_{s-} dw_{R,s} + \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) Y_{s-} d \left(\sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{R,i} \right) \tag{4.16}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) \sigma_{P,t}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(Y_{s-}) Y_{s-}^2 \sigma_{P,t}^2 dt \tag{4.17}$$

$$+ \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-}) \Delta(Y_s)\} \tag{4.18}$$

Nun seien $T_{P,i}$ und $T_{R,j}$ die Zeitpunkte des i -ten bzw. j -ten Sprunges der Poissonprozesse N_P und N_R . Diese Poissonprozesse sind unabhängig voneinander es gilt also $\mathbb{P}(T_{P,i} = T_{R,j}) = 0 \quad \forall i, j$ und somit ist $\Delta Y_{T_{P,i}} = -S_{P,i}$ und $Y_{T_{P,i}} = Y_{T_{P,i-}} - S_{P,i}$ und weiters ist $\Delta Y_{T_{R,j}} = Y_{T_{R,j}} - S_{R,j}$ und $Y_{T_{R,j}} = Y_{T_{R,j-}} + Y_{T_{R,j-}} S_{P,i}$.

Es ergibt sich für den Term aus (4.18):

$$\begin{aligned} \sum_{0 < s \leq t} \{f(Y_s) - f(Y_{s-}) - f'(Y_{s-})\Delta(Y_s)\} = \\ \sum_{i=1}^{N_{P,t}} \{f(Y_{T_{P,i}}) - f(Y_{T_{P,i-}}) + f'(Y_{T_{P,i-}})S_{P,i}\} + \\ \sum_{i=1}^{N_{R,t}} \{f(Y_{T_{R,i}}) - f(Y_{T_{R,i-}}) - f'(Y_{T_{R,i-}})Y_{T_{R,i-}}S_{R,i}\} \end{aligned}$$

Wir können die stochastischen Integrale der obigen Gleichung (4.15)-(4.16) nun als Lebesgue-Stieltjes Integrale schreiben es ergibt sich hierbei, für diese:

$$\begin{aligned} \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) d\left(\sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i}\right) &= \sum_{i=1}^{N_{P,t}} f'(Y_{T_{P,i-}}) S_{P,i} \\ \int_{0+}^t f'(Y_{s-}) Y_{s-} d\left(\sum_{i=1}^{N_{R,t}} S_{P,i}\right) &= \sum_{i=1}^{N_{R,t}} f'(Y_{T_{R,i-}}) Y_{T_{R,i-}} S_{R,i} \end{aligned}$$

Wenn man diese Ergebnisse zusammenfasst, ergibt sich also:

$$f(Y_t) - f(y) = \quad (4.19)$$

$$\int_{0+}^t f'(Y_{s-})(p + rY_{s-})ds + \quad (4.20)$$

$$\int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_P dw_{P,s} + \int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_R Y_{s-} dw_{R,s} \quad (4.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\int_{0+}^t f''(Y_{s-})(\sigma_{P,t}^2 + Y_{s-}^2 \sigma_{P,t}^2 dt) \right) \quad (4.22)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_{P,t}} (f(Y_{T_{P,i}}) - f(Y_{T_{P,i}-})) \quad (4.23)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_{R,t}} (f(Y_{T_{R,i}}) - f(Y_{T_{R,i}-})) \quad (4.24)$$

Um nun den infinitesimalen Generator von $f(x)$ zu berechnen werden wir uns den Prozess Y_t nur in der Umgebung der 0, also auf einem Intervall $[0, t]$ für ein $t > 0$ beliebig ansehen. Und hierfür die Terme der obigen Gleichung zunächst getrennt voneinander betrachten:

Weil f' stetig und beschränkt auf $[0, t]$ ist und aufgrund dessen, dass W_P und W_R Martingale mit einem Erwartungswert von 0 und da $\mathbb{E}[\int_0^t Y_s^2 ds] = \int_0^t \mathbb{E}[Y_s^2] ds < \infty$.

Gilt für (4.21):

$$\mathbb{E} \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_P dw_{P,s} \right] + \mathbb{E} \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-})\sigma_R Y_{s-} dw_{R,s} \right] = 0 \quad \forall t \in [0, t_0]$$

Nun wollen wir die folgenden Gleichungen beweisen, vorerst setzen wir die oben erwähnten Definitionen für $Y_{T_{P,i}}$ und $Y_{T_{R,i}}$ in (4.23) und (4.24) ein und

wollen zeigen, dass:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_{P,t}} (f(Y_{T_{P,i-}} - S_{P,i}) - f(Y_{T_{P,i-}})) \right] = \lambda_P \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) \quad (4.25)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N_{R,t}} (f(Y_{T_{R,i-}} + Y_{T_{R,i-}} S_{R,i}) - f(Y_{T_{R,i-}})) \right] = \lambda_P \int_{-1}^\infty f(y(1+x)) - f(y) dF_R(x) \quad (4.26)$$

Beweis

Zuerst machen wir uns klar, dass für den Poissonprozess folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{P,t} = j) &= e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^j}{j!} \\ \mathbb{P}(N_{P,t} = 0) &= e^{-\lambda_P t} \\ \mathbb{P}(N_{P,t} = 1) &= e^{-\lambda_P t} (\lambda_P t) \\ \mathbb{P}(N_{P,t} = 2) &= e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} (\lambda_P t)^2 \\ \mathbb{P}(N_{P,t} \geq 2) &= o(t) \end{aligned}$$

Weiters setzen wir nun der Einfachheit halber den inneren Ausdruck der Summe in (4.25) gleich $B_i = (f(Y_{T_{P,i-}} - S_{P,i}) - f(Y_{T_{P,i-}}))$, $i \geq 1$ und $B_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N_{P,t}} B_i \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{N_{P,t}=j} \sum_{i=1}^{N_{P,t}} B_i \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{N_{P,t}=j} \sum_{i=1}^j B_i \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^j \mathbf{1}_{N_{P,t}=j} B_i | N_{P,t} = j \right] \mathbb{P}(N_{P,t} = j) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathbb{E}[B_1 | N_{P,t} = 1] \mathbb{P}(N_{P,t} = 1)) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^j B_i | N_{P,t} = j \right] \mathbb{P}(N_{P,t} = j) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den letzten Term näher: Aufgrund der Tatsache, dass f

beschränkt ist gilt $|f(x)| \leq M$ für $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ für ein $M > 0$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^j |B_i| | N_{P,t} = j \right] \mathbb{P}(N_{P,t} = j) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} + \left(\mathbb{E}[|B_1| + |B_2| | N_{P,t} = 2] \mathbb{P}(N_{P,t} = 2) + \sum_{j=3}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^j |B_i| | N_{P,t} = j \right] \mathbb{P}(N_{P,t} = j) \right) \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(4M e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} \lambda_P^2 t^2 + \sum_{j=3}^{\infty} 2M j e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^j}{j!} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(4M e^{-\lambda_P t} \frac{1}{2} \lambda_P^2 t \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left(2M \lambda_P \sum_{j=3}^{\infty} e^{-\lambda_P t} \frac{(\lambda_P t)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\
&= 0 + \lim_{t \rightarrow 0} (2M \lambda_P \mathbb{P}(N_{P,t} \geq 2)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (2M \lambda_P o(t)) = 0
\end{aligned}$$

Somit müssen wir nur noch folgendes betrachten:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N_{P,t}} B_i \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathbb{E}[B_1 | N_{P,t} = 1] \mathbb{P}(N_{P,t} = 1)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} e^{-\lambda_P t} (\lambda_P t) \mathbb{E}[(f(Y_{T_{P,1-}} - S_{P,1}) - f(Y_{T_{P,1-}})) | N_{P,t} = 1] \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}[(f(Y_{T_{P,1-}} - S_{P,1}) - f(Y_{T_{P,1-}})) | N_{P,t} = 1] \text{ wobei } T_{P,1} \in [0, t]
\end{aligned}$$

Wegen $N_{P,t} = 1$ wissen wir, dass Y_t auf $[0, t]$ nur genau einen Sprung macht, welcher zum Zeitpunkt $T_{P,1}$ stattfindet, also $T_{P,1} \in [0, t]$.

Wählt man nun t klein genug, so macht Y_t f.s. keinen weiteren Sprung mehr in diesem Intervall.

Insbesondere hat der Prozess N_P f.s. dort keine Sprungstelle, weil ja gilt, dass:

$\mathbb{P}(N_{P,t} \geq 1) = o(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Es ist also $\lim_{t \rightarrow 0} Y_t = \lim_{t \rightarrow 0} Y_{T_{P,1-}} = y$.

Mit der Beschränktheit von f können wir den Satz von Lebesgue anwenden

und den Limes und Erwartungswert vertauschen:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=i}^{N_{P,t}} (f(Y_{T_{P,i-}} - S_{P,i}) - f(Y_{T_{P,i-}})) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N_{P,t}} B_i \right] \\ &= \mathbb{E}[f(y - S_{P,1}) - f(y)] \\ &= \int_0^\infty f(y - x) - f(y) dF_P(x) \end{aligned}$$

Wobei $F_P(x)$ die Verteilung von $S_{P,i}$ ist.

Für (4.26), wird äquivalent vorgegangen.

Nun wollen wir noch die folgenden Ausdrücke zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_{0+}^t f'(Y_{s-})(p + rY_{s-}) ds \right] &= f'(y)(p + ry) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_{0+}^t \frac{1}{2} f''(Y_{s-})(\sigma_P^2 + Y_{s-}^2 \sigma_P^2) dt \right] &= \frac{1}{2} f''(y)(\sigma_{P,t}^2 + y^2 \sigma_P^2) \end{aligned}$$

Wir werden hierfür als erstes die letzte Gleichung zeigen, hierfür zeigen wir als erstes:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_R^2 f''(Y_{s-}) Y_{s-}^2 ds \right] = \frac{1}{2} \sigma_R^2 f''(y) y^2 \quad (4.27)$$

Aufgrund dessen, dass f'' beschränkt ist und $Y_0 = 0$, kann man mit dem Satz von Fubini folgendes schließen.

Wobei $\zeta_t := -\ln \mathcal{E}(R)_t = -(r - \frac{1}{2} \sigma_R^2) t - \sigma_R w_{R,t} - \sum_{i=1}^{N_{R,i}} \ln(1 + S_{R,i})$ und $Z_t = e^{-\zeta_t} - \int_0^t e^{\zeta_{s-}} dP_s$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t Y_{s-}^2 f''(Y_{s-}) ds \right] &= \int_0^t \mathbb{E} [(ye^{-\zeta_s}) + Z_s]^2 f''(Y_s) ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E} [y^2 e^{-2\zeta_s} f''(Y_s) + 2ye^{-\zeta_s} Z_s f''(Y_s) + Z_s^2 f''(Y_s)] ds \\ &= \int_0^t (y^2 f''(y) + o(t)) ds \text{ wobei } o(t) \rightarrow 0 \text{ wenn } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_R^2 Y_{s-}^2 f''(Y_{s-}) ds \right] &= \frac{1}{2} \sigma_R^2 \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t (y^2 f''(y) + o(t)) ds \\ &= \frac{1}{2} \sigma_R^2 y^2 f''(y) \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir weiters:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_P^2 f''(Y_{s-}) ds \right] = \frac{1}{2} \sigma_P^2 f''(y)$$

Wenn man nun alle gewonnenen Erkenntnisse zusammenfasst so erhält man das gewünschte:

$$\begin{aligned} Af(y) &= \frac{1}{2} (\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) f''(y) + (ry + p) f'(y) \\ &\quad + \lambda_P \int_0^\infty (f(y-x) - f(y)) dF_P(x) \\ &\quad + \lambda_R \int_{-1}^\infty (f(y(1-x)) - f(y)) dF_R(x) \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir den infinitesimalen Generator und den Risikoprozess verwenden um mittels der Bestimmung eines Randwertproblems die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(y)$ und die Laplacetransformierte der Ruinzeit $q_\alpha(y)$ zu erfassen.

Sei C_t^b die akkumulierten Dividenden bis zum Zeitpunkt t . Weiter sei der Risikoprozess ohne Dividenden gegeben durch:

$$Y_t = y + \int_0^t (p + rY_s) ds + \int_0^t \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 Y_s^2} dW_s \quad (4.28)$$

$$- \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t Y_{s-} d \left(\sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,i} \right) \quad (4.29)$$

Und sei Y^b der Risikoprozess mit der Dividendenbarriere b , sodass $Y^\infty = Y$. So ist dieser durch folgende stochastische Differentialgleichung bestimmt:

$$Y_t^b = y + \int_0^t (p + rY_s^b) ds + \int_0^t \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 \cdot (Y_s^b)^2} dW_s \quad (4.30)$$

$$- \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + \int_0^t Y_{s-}^b d \left(\sum_{i=1}^{N_{R,s}} S_{R,i} \right) - C_t^b. \quad (4.31)$$

Falls hierbei $\lambda_P = \lambda_R = 0$, so gibt es ein eindeutiges Paar (Y_t^b, C_t^b) welches diese stochastische Differentialgleichung löst, dabei ist C_t^b stetig und hat folgende Eigenschaft

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s^b=b\}} dC_s^b = C_t^b.$$

Der Erwartungswert der Dividenden mit Diskontierungsfaktor α und $Y_0^b = y$ ist:

$$V_b(y) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dC_t^b \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_y^b} e^{-\alpha t} dC_t^b \right] \quad (4.32)$$

wobei $T_y^b = \inf \{Y_t^b < 0\}$. Wenn $b < \infty$ so ist Ruin sicher, das bedeutet $\mathbb{P}(T_y^b) < \infty = 1$.

Satz 4.2.

Angenommen Y_t^b ist unser zugrundeliegender Prozess und der infinitesimale Generator A ist gegeben durch Satz 4.1. So haben wir:

1. Sei $V_b(y)$ eine beschränkte und auf $(0, b)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit einer beschränkten ersten Ableitung.

Falls $V_b(y)$ folgende Gleichung löst:

$$AV_b(y) = \alpha V_b(y) \text{ auf } 0 < y < b$$

zusammen mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} V_b(y) &= 0 \text{ auf } y < 0, V_b(0) = 0 \text{ wenn } \sigma_P^2 > 0 \\ V_b'(b) &= 1, V_b(y) = V_b(b) + y - b \text{ auf } y > b. \end{aligned}$$

So ist $V_b(y)$ gegeben durch (4.32)

2. Sei $q_{\alpha,b}(y)$ eine beschränkte und auf $(0, b)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit einer beschränkten ersten Ableitung.

Falls $q_{\alpha,b}(y)$ folgende Gleichung löst:

$$Aq_{\alpha,b}(y) = \alpha q_{\alpha,b}(y) \text{ auf } 0 < y < b$$

zusammen mit den Ranbedingungen:

$$q_{\alpha,b}(y) = 1 \text{ auf } y < 0, q_{\alpha,b}(0) = 1 \text{ wenn } \sigma_P^2 > 0$$

$$q'_{\alpha,b}(b) = 0, q_{\alpha,b}(y) = q_{\alpha,b}(b) \text{ auf } y > b.$$

So ist $q_{\alpha,b}(y)$ gegeben durch:

$$q_{\alpha,b}(y) = \mathbb{E}[e^{-\alpha T_y^b}].$$

Beweis

Wir wollen vorerst das Resultat von Punkt 1. des Satzes zeigen. Unter Verwendung der Itô Formel und dem infinitesimalen Generator des Prozesses, können wir folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(t \wedge T_y^b)} V_b(Y_{(t \wedge T_y^b)}) \\ &= V_b(y) + \int_0^{t \wedge T_y^b} e^{-\alpha s} A V_b(Y_s^b) ds \\ &\quad - \int_0^{t \wedge T_y^b} e^{-\alpha s} V_b'(Y_s^b) \alpha ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge T_y^b} e^{-\alpha s} V_b'(Y_s^b) dw(s) - \int_0^{t \wedge T_y^b} e^{-\alpha s} V_b'(Y_s^b) dC_s^b \end{aligned}$$

Der dritte Term auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich aus der expliziten Zeitableitung des Exponentialterms der linken Seite.

Ist nun V glatt und reicht das stochastische Integral nur bis zu einem festen Wert t so verschwindet dieses wenn wir nun die Erwartungswerte der obigen

Terme bilden, es ist also:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\alpha(t \wedge T_y^b)} V_b(Y_{(t \wedge T_y^b)})] \\ = V_b(y) + \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge T_y^b} (AV_b(Y_s^b) - V_b'(Y_s^b)\alpha ds)e^{-\alpha s}\right] \\ - \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge T_y^b} e^{-\alpha s} V_b'(Y_s^b) dC_s^b\right] \end{aligned}$$

Und da der Erwartungswert des zweiten Terms der rechten Seite aufgrund der Voraussetzung des Satzes gleich Null ist, erhalten wir das gewünschte Resultat, nach $f \rightarrow \infty$.

Um Punkt 2. zu zeigen geht man hierbei analog zum Beweis von Punkt 1. vor.

□

Aus diesem Satz ist zu erkennen, dass $V_b(y)$ und $q_{\alpha,b}(y)$ dieselbe Integro-Differentialgleichung lösen. Hierbei wäre es natürlich von Vorteil die Integro-Differentialgleichung in eine reine Differentialgleichung durch Differentiation umzuwandeln, dabei ist es wichtig keinen Informationsverlust zu haben.

Nun betrachten wir nurmehr den Fall $Aq_{\alpha,b}(y) = \alpha q_{\alpha,b}$ mit $\alpha \geq 0$ näher, da dieser den ersten Fall des Satzes einschließt, dazu setze man nur: $\alpha = 0$ und $q_{0,b}(y) = V_b(y)$.

Nun formen wir die Gleichung $Aq_{\alpha,b}(y) = \alpha q_{\alpha,b}$ um auf $Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y) = 0$ und mit dem Satz 4.1 erhalten wir:

$$q'_{\alpha,b}(y)(p + ry) + \frac{1}{2}q''_{\alpha,b}(y)(\sigma_P^2 + y^2\sigma_R^2) \tag{4.33}$$

$$+ \lambda_P \int_0^\infty q_{\alpha,b}(y - x) - q_{\alpha,b}(y) dF_P(x) \tag{4.34}$$

$$+ \lambda_R \int_{-1}^\infty q_{\alpha,b}(y(1 - x)) - q_{\alpha,b}(y) dF_R(x) - \alpha q_{\alpha,b}(y) = 0. \tag{4.35}$$

Diese Gleichung kann nun in eine Form ohne Integrale umgewandelt werden, um dem Informationsverlust der durch Differentiation entsteht entgegen zu wirken, brauchen wir zusätzliche Randbedingungen, diese erhalten wir indem wir bei der obigen Gleichung $y \downarrow 0$ gehen lassen.

Wir wollen nun also den Grenzwert:

$$\lim_{y \downarrow 0} (Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y)) = 0$$

mit obigen Nebenbedingungen bestimmen.

Die neue Nebenbedingung die sich für $\sigma_P^2 > 0$ ergibt, lautet also:

$$\begin{aligned} q'_{\alpha,b}(0+)(p+0) + \frac{1}{2}q''_{\alpha,b}(0+)(\sigma_P^2 + 0) \\ + \lambda_P \int_0^\infty q_{\alpha,b}(0-x) - q_{\alpha,b}(0) dF_P(x) \\ + \lambda_R \int_{-1}^\infty q_{\alpha,b}(0) - q_{\alpha,b}(0) dF_R(x) - \alpha q_{\alpha,b}(0) \\ = q'_{\alpha,b}(0+)p + \frac{1}{2}q''_{\alpha,b}(0+)\sigma_P^2 - \alpha = 0. \end{aligned}$$

Die neue Nebenbedingung für $\sigma_P^2 = 0$ lautet:

$$\begin{aligned} q'_{\alpha,b}(0+)p + \lambda_P \int_0^\infty q_{\alpha,b}(0-x) - q_{\alpha,b}(0) dF_P(x) + 0 - \alpha q_{\alpha,b}(0) \\ = q'_{\alpha,b}(0+)p + \lambda_P \int_0^\infty dF_P(x) - \lambda_P q_{\alpha,b}(0) \int_0^\infty dF_P(x) - \alpha q_{\alpha,b}(0) \\ = q'_{\alpha,b}(0+)p - (\alpha + \lambda_P)q_{\alpha,b}(0) + \lambda_P = 0. \end{aligned}$$

Für die Gleichung $AV_b(y) - \alpha V_b(y) = 0$ gelten also folgende Nebenbedingungen:

Für $\sigma_P^2 > 0$:

$$V'_b(0+)p + \frac{1}{2}V''_b(0+)\sigma_P^2 = 0.$$

Für $\sigma_P^2 = 0$:

$$V'_b(0+)p - (\alpha + \lambda_P)V_b(0) = 0.$$

Muss die Gleichung zweimal integriert werden um eine Integral freie Darstellung zu erhalten, so gilt es den Grenzwert $y \downarrow 0$ der Gleichung $(\frac{d}{dy})(Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y)) = 0$ zu berechnen, dabei wird angenommen, dass die stetige Dichte $f_P(x) = F'_P(x)$ auf dem Intervall $[0, \epsilon]$ existiert.

Die neue Nebenbedingung für $\sigma_P^2 > 0$ lautet also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_{\alpha,b}'''(0+) \sigma_P^2 + \left(p - \frac{\sigma_P^2}{2p} (r + \lambda_R \mathbb{E}[S_R] - \lambda_P - \alpha) \right) q''(0+) \\ + \frac{\alpha}{p} (r + \lambda_R \mathbb{E}[S_R] - \lambda_P - \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Die neue Nebenbedingung für $\sigma_P^2 = 0$ lautet:

$$q_{\alpha,b}''(0+)p + \left(r + \frac{p\lambda_P}{\alpha - \lambda_P} f_P(0) + \lambda_R \mathbb{E}[S_R] - \lambda_P - \alpha \right) q_{\alpha}'(0+) - \frac{\alpha\lambda_P}{\alpha + \lambda_P} f_P(0) = 0.$$

4.2 Beispiele

Beispiel 1

Bevor wir nun zur Berechnung unseres ersten Beispiels übergehen können, benötigen wir für genau dieses einige Resultate über konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen.

Hierbei wird auf das Buch von Slater [12] verwiesen.

Konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen haben die Form:

$$zh''(z) + (b - z)h'(z) - az = 0.$$

Die Lösungen $h(x)$ einer solchen Gleichung haben die Form:

$$h(x) = C_1 F(a, b, x) + C_2 U(a, b, x)$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Es sei hier $h(x) = \mathcal{F}(a, b, x)$.

Weiters ist $F(a, b, x)$ die Krummersche Funktion und eine Lösung der Differentialgleichung, welche gegeben ist durch die Reihe:

$$F(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)3!}x^3 + \dots$$

wobei diese Reihe für $b \neq 0, -1, -2, \dots$ konvergiert.

Eine weitere Lösung der Differentialgleichung ist:

$$U(a, b, x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} F(a, b, x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} F(1+a-b, 2-b, x).$$

Eine einfachere Darstellung der beiden Lösungen ist:

$$F(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \text{ für } b > a > 0, \quad (4.36)$$

$$U(a, b, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \text{ für } a > 0, x > 0. \quad (4.37)$$

Für das erste Beispiel nehmen wir an, dass $\lambda_R = \sigma_P = \sigma_R = 0$.

Die Schadenforderungen $S_{P,i}$ seien exponentialverteilt mit Parameter μ , was bedeutet, dass: $f_P(x) = F'_P(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$.

Für dieses Beispiel hat nun das Modell die folgende Form, was unter anderem dem klassischen Cramer Lundberg Modell entspricht:

$$Y_t = y + pt - \sum_{i=1}^{N_{P,t}} S_{P,i} + r \int_0^t Y_s ds \quad (4.38)$$

Der infinitesimale Generator A von Y ist hierfür gegeben durch:

$$Af(y) = f'(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty f(y-x) - f(y) dF_P(x) \text{ für } f \in \mathcal{D}(A) \cap C_b^2$$

Nun wollen wir die Bedingung $AV_b(y) - \alpha V_b(y) = 0$ erfüllen, welche bei uns folgende Form annimmt:

$$V'_b(y)(p + ry) + \lambda_P \int_0^\infty V_b(y-x) - V_b(y) dF_P(x) - \alpha V_b(y) = 0$$

Diese Gleichung wollen wir jedoch in eine reine Differentialgleichung umwandeln, hierfür differenzieren wir die Gleichung ein weiteres Mal um das Integral loszuwerden und betrachten statt $AV_b(y) - \alpha V_b(y) = 0$ die Gleichung $\frac{\partial}{\partial y}(AV_b(y) - \alpha V_b(y)) + \mu(AV_b(y) - \alpha V_b(y)) = 0$. Wir erhalten hier die

Darstellung:

$$\begin{aligned} & V_b''(y)(p + ry) + V_b'(y)r + \lambda_P \int_0^\infty (V_b'(y-x) - V_b'(y))\mu e^{-\mu x} dx - \alpha V_b'(y) \\ & + \mu((ry + p)V_b'(y) + \lambda_P \int_0^\infty (V_b(y-x) - V_b(y))\mu e^{-\mu x} dx - \alpha V_b(y)) \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration erhalten wir:

$$V_b''(y)(p + ry) + V_b'(y)(\mu ry + \mu p + r - \lambda_P - \alpha) - \alpha \mu V_b(y) = 0$$

Mit den zusätzlichen Bedingungen:

$$\begin{aligned} pV_b'(0+) - (\lambda_P + \alpha)V_b(0) &= 0 \\ V_b'(b) &= 1 \end{aligned}$$

Nun vollziehen wir eine Variablentransformation $y = \frac{z}{\mu} - \frac{p}{r}$ und $g(z) = V_b(y)$.

Wir erhalten also die konfluente hypergeometrische Form:

$$zg''(z) + \left(1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r} - z\right)g'(z) - \left(-\frac{\alpha}{r}\right)g(z) = 0.$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form:

$$V_b(y) = \mathcal{F}\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, z\right) = \mathcal{F}\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)$$

Also haben wir eine Gleichung der Gestalt:

$$V_b(y) = c_1 F\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right) + c_2 U\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)$$

Nun wollen wir die spezielle Lösung erhalten und benützen hierfür die Randbedingungen. Wir betrachten die asymptotische Eigenschaft von $U(a, b, x)$ und erfahren, dass $U(a, b, x) = x^{-a}(1 + o(\frac{1}{x}))$ für $x \rightarrow \infty$, was bedeutet, dass U verschwindet für $a > 0$ und $x \rightarrow \infty$. Wir probieren eine Lösung der Form:

$$V_b(y) = c_2 U\left(-\frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, -\mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)$$

Da aber $a = -\frac{\alpha}{r} < 0$, so können wir die Funktion nicht mit obigen Definitionen berechnen.

Es kommt uns aber gelegen, dass für konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen gilt, dass falls $f(x) = U(a, b, x)$ eine Lösung ist auch $f(x) = e^x x^{1-b} U(1-a, 2-b, -x)$ eine Lösung ist.

Wir suchen also eine Lösung der Form:

$$\begin{aligned} V_b(y) &= c_2 e^{-\mu(y+\frac{p}{r})} \left(-\mu \left(y + \frac{p}{r} \right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} U \left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 - \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu \left(y + \frac{p}{r} \right) \right) \right) \\ &= C e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r} \right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} U \left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu \left(y + \frac{p}{r} \right) \right) \end{aligned}$$

Nun wollen wir noch die Konstante C finden, hierfür setzen wir die Randbedingung in die gerade ausgeführte allgemeine Lösung ein. Nach den Differentiationsregeln für konfluente hypergeometrische Funktionen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} U(a, b, x) = -a U(a+1, b+1, x).$$

Wobei wir der Einfachheit halber die obigen Variablen (a, b, x) setzen. Also folgt:

$$\begin{aligned} V'_b(y) &= C e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r} \right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} \left(-r U(a, b, x) - \frac{\alpha + \lambda_P}{ry - p} - \left(1 + \frac{\alpha}{r} U(a+1, b+1, x) \right) \right) \\ V_b(0) &= C \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} U(a, b, w) \\ V'_b(0) &= C \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} \left(-\mu + \frac{\alpha + \lambda_P}{ry + p} U(a, b, w) - \mu \left(1 + \frac{\alpha}{r} U(a+1, b+1, w) \right) \right) \end{aligned}$$

mit $a = 1 + \frac{\alpha}{r}$, $b = 1 + \frac{\alpha+\lambda_P}{r}$ und $w = \frac{\mu p}{r}$.

Die Lösung ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_b(y) &= \frac{e^{\mu b} \left(b + \frac{p}{r} \right)^{-\frac{\alpha+\lambda_P}{r}}}{D_V(b)} \\ &\left(\left(\eta_U(0, 0) + \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) \eta_U(1, 0) \right) \xi_1(y) + \left(\frac{r + \alpha}{r + \alpha + \lambda_P} \right) \eta_F(1, 0) - \eta_F(0, 0) \right) \end{aligned}$$

Mit:

$$\begin{aligned}\xi_1(y) &= e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r}\right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} U\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right) \\ \xi_2(y) &= e^{-\mu y} \left(y + \frac{p}{r}\right)^{\frac{\alpha+\lambda_P}{r}} F\left(1 + \frac{\alpha}{r}, 1 + \frac{\alpha + \lambda_P}{r}, \mu\left(y + \frac{p}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

Wir erkennen also, dass $V_b(y)$ nur durch $\frac{e^{\mu b(b+\frac{p}{r}) - \frac{\alpha+\lambda_P}{r}}}{D_V(b)}$ von b abhängt.

Wobei:

$$\begin{aligned}D_V(b) &= \left(\eta_F(0,0) - \frac{r+\alpha}{r+\alpha+\lambda_P}\eta_F(1,0)\right) \left(\left(\frac{\alpha+\lambda_P}{rb+p} - \mu\right)\eta_U(0,b) - \mu\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)\eta_U(1,b)\right) \\ &\quad - \left(\eta_U(0,0) + \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)\eta_U(1,0)\right) \left(\left(\frac{\alpha+\lambda_P}{rb+p} - \mu\right)\eta_F(0,b) - \mu\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)\eta_F(1,b)\right)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\eta_U(k,x) &= U\left(k+1 + \frac{\alpha}{r}, k+1 + \frac{\alpha+\lambda_P}{r}, \mu\left(x + \frac{p}{r}\right)\right) \\ \eta_F(k,x) &= U\left(k+1 + \frac{\alpha}{r}, k+1 + \frac{\alpha+\lambda_P}{r}, \mu\left(x + \frac{p}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

Somit erhalten wir das optimale b indem wir nur den von b abhängigen Term maximieren. Wir verwenden nun dieselbe Vorgehensweise wie bei der Berechnung von $V_b(y)$ um $q_{\alpha,b}(y)$ zu lösen. Wir wollen also eine Lösung des folgenden Problems

$$Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y) = 0$$

Was für unser Problem bedeutet

$$q'_{\alpha,b}(y)(p+ry) + \lambda_P \int_0^\infty (q_{\alpha,b}(y-x) - q_{\alpha,b}(y))\mu e^{-\mu x} dx - \alpha q_{\alpha,b}(y) = 0$$

Um die Integrale zu eliminieren betrachten wir wieder $\frac{\partial}{\partial y}(Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y)) + \mu(Aq_{\alpha,b}(y) - \alpha q_{\alpha,b}(y)) = 0$ also:

$$(ry+p)q''_{\alpha,b}(y) + (\mu ry + \mu p + r - \lambda_P - \alpha)q'_{\alpha,b}(y) - \alpha \mu q_{\alpha,b}(y) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} q'_{\alpha,b}(b) &= 0 \\ pq'_{\alpha,b}(0+) - (\lambda_P + \alpha)q_{\alpha,b}(0) + \lambda_P &= 0. \end{aligned}$$

Durch analoges Vorgehen wie zuvor erhalten wir für

$$\begin{aligned} q_{\alpha,b}(y) &= \frac{1}{D_q(b)} \frac{\lambda_P}{\mu p} \left(\left(\frac{\alpha + \lambda_P}{rb + p} - \mu \right) \eta_U(0, b) - \mu \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) \eta_U(1, b) \right) \xi_1 \\ &\quad - \frac{1}{D_q(b)} \frac{\lambda_P}{\mu p} \left(\left(\frac{\alpha + \lambda_P}{rb + p} - \mu \right) \eta_F(0, b) + \mu \frac{r + \alpha}{r + \alpha + \lambda_P} \eta_F(1, b) \right) \xi_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} D_q(b) &= \left(\eta_U(0, 0) + \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) \eta_U(1, 0) \right) \left(\left(\frac{\alpha + \lambda_P}{rb + p} - \mu \right) \eta_F(0, b) + \mu \frac{r + \alpha}{r + \alpha + \lambda_P} \eta_F(1, b) \right) \\ &\quad - \left(\eta_F(0, 0) - \frac{r + \alpha}{r + \alpha + \lambda_P} \eta_F(1, 0) \right) \left(\left(\frac{\alpha + \lambda_P}{rb + p} - \mu \right) \eta_U(0, b) - \mu \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) \eta_U(1, b) \right) \end{aligned}$$

Beispiel 2

Für Beispiel 2 nehmen wir an, dass $\lambda_P = \lambda_R = 0$. Somit nimmt er Prozess Y_t folgende Form an:

$$Y_t = y + \int_0^t (p + rY_s) ds + \int_0^t \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 Y_s^2} dW_s$$

Aus Shreve[11] folgt, dass wir ein b^* finden sodass

$$V''_{b^*}(b^*) = 0$$

Wobei die Barrierestrategie mit Barriere b^* die optimale Strategie aller Dividendenstrategien ist. Wenn jedoch kein b^* gefunden werden kann so existiert in diesem Fall keine optimale Strategie. Zuerst wollen wir natürlich $V_b(y)$ für gegebenes b finden. Falls $y > b$ so ist $V_b(y) = y - b + V_b(b)$, also nehmen wir an, dass $y \leq b$. Der infinitesimale Generator A von Y ist hierfür gegeben durch:

$$AV(y) = \frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2) V''_b(y) + (ry + p) V'_b.$$

Für die Bedingung $AV_b(y) - \alpha V_b(y) = 0$ ergibt sich somit:

$$\frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2)V_b''(y) + (ry + p)V_b' - \alpha V_b(y) = 0,$$

mit

$$V_b(0) = 0 \text{ und } V_b'(b) = 1. \quad (4.39)$$

Laut Appendix Paulsen und Gjessing [7] erhalten wir für $\alpha > r$ zwei unabhängige Lösungen für dieses Problem und zwar $D(y, \rho + 1)$ und $E(y, \rho + 1)$ wobei:

$$D(y, \delta) = \int_y^\infty (t - y)^\delta K(t) dt \text{ wobei } -1 < \operatorname{Re}(\delta) < 1 + \operatorname{Re}(\beta),$$

$$E(y, \delta) = \int_{-\infty}^y (y - t)^\delta K(t) dt \text{ wobei } -1 < \operatorname{Re}(\delta) < 1 + \operatorname{Re}(\beta),$$

mit

$$K(t) = (\sigma_R^2 t^2 + \sigma_P^2)^{-(1+\frac{\beta}{2})} \exp \left\{ -\frac{2p}{\sigma_P \sigma_R} \arctan \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_P} t \right) \right\}$$

und

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2r}{\sigma_R^2} - 1 \right)^2 + 8 \frac{\alpha}{\sigma_R^2}} - 1 \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0,$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{2r}{\sigma_R^2} - 1 \right)^2 + 8 \frac{\alpha}{\sigma_R^2}} - \left(1 + \frac{2r}{\sigma_R^2} \right) \right) \quad \operatorname{Re}(\rho) > 0$$

Es gilt also:

$$V_b(y) = C_1 D(y, \rho + 1) + C_2 E(y, \rho + 1).$$

Verwendet man nun $\frac{\partial}{\partial y} D(y, \delta) = -\delta D(y, \delta - 1)$ und $\frac{\partial}{\partial y} E(y, \delta) = \delta E(y, \delta - 1)$ und den Randbedingungen erhalten wir:

$$C_1 = -\frac{E(0, \rho + 1)}{(\rho + 1)A(b, \rho)} \quad C_2 = -\frac{D(0, \rho + 1)}{(\rho + 1)A(b, \rho)}.$$

wobei

$$A(b, \rho) = E(b, \rho)D(0, \rho + 1) + D(b, \rho)E(0, \rho + 1)$$

Es folgt, dass:

$$V_b(y) = \frac{1}{A(b, \rho)} \frac{1}{\rho + 1} (D(0, \rho + 1)E(y, \rho + 1) - E(0, \rho + 1)D(y, \rho + 1)).$$

Nun leiten wir zweimal ab und setzen b ein um b^* zu erhalten:

$$V'_b(y) = \frac{D(0, \rho + 1)E(y, \rho) + E(0, \rho + 1)D(y, \rho)}{A(b, \rho)},$$

$$V''_b(y) = \frac{D(0, \rho + 1)\rho E(y, \rho - 1) - E(0, \rho + 1)\rho D(y, \rho - 1)}{D(0, \rho + 1)E(b, \rho) + E(0, \rho + 1)D(b, \rho)}$$

Somit erhalten wir b^* als Lösung von:

$$\frac{D(b, \rho - 1)}{E(b, \rho - 1)} = \frac{D(0, \rho + 1)}{E(0, \rho + 1)}.$$

Ist $\alpha < r$ so überschreitet das Einkommen den Verlust aufgrund von Diskontierung und es ist keine optimale Strategie zu finden.

Ist $\alpha = r$ so gleichen sich Einkommen und Verlust aus, aufgrund von Diskontierung, aber da eine wachsende Barriere die Wahrscheinlichkeit des Ruins vor einem fixen Zeitpunkt t vermindert, ist in diesem Fall auch keine optimale Strategie auffindbar.

Um $q_{\alpha, b}(y) = \mathbb{E}[e^{-\alpha T_y^b}]$ zu finden müssen wir für $Aq_{\alpha, b} - \alpha q_{\alpha, b} = 0$ folgende Gleichung lösen:

$$\frac{1}{2}(\sigma_R^2 y^2 + \sigma_P^2)q''_{\alpha, b}(y) + (ry + p)q'_{\alpha, b}(y) - \alpha q_{\alpha, b}(y) = 0$$

mit

$$q_{\alpha, b}(0) = 1 \text{ und } q'_{\alpha, b}(b) = 0.$$

Mit analoger Vorgehensweise wie beim Lösen von $V_b(y)$ erhalten wir für $Re(\alpha) > r$ und $y \leq b$ das Ergebnis:

$$q_{\alpha, b}(y) = \frac{1}{A(b, \rho)} (E(b, \rho)D(y, \rho + 1) + D(b, \rho)E(y, \rho + 1))$$

Die Laplace Transformation muss dann numerisch invertiert werden.

4.3 Zeitabhängige Barriere

Eine Barrierestrategie impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit für eventuellen Ruin 1 ist, ist jedoch die Barriere $b(t)$ zum Beispiel $b(t) = b_0 + b_1 t$, so muss dies nicht mehr der Fall sein. Wir nehmen ab jetzt an, dass für $t \rightarrow \infty$ gilt, dass $b(t) \rightarrow \infty$. Es sei mit $(t, y) \rightarrow \infty$ gemeint, dass $y \leq b(t) \forall t$ und $y \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Es gilt analog zum Satz (4.2):

1. ψ_b erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_b(t, y) + A \psi_b(t, y) = 0$$

zusammen mit:

$$\begin{aligned} \psi_b(t, y) &= 1 \text{ auf } y < 0, \psi_b(t, 0) = 1 \text{ wenn } \sigma_P^2 > 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \psi'_b(t, b(t)) &= 0, \psi_b(t, y) = \psi_b(t, b) \text{ auf } y > b, \lim_{(t, y) \rightarrow \infty} \psi_b(t, y) = 0 \end{aligned}$$

So ist

$$\psi_b(0, y) = \mathbb{P}(T_Y^b < \infty)$$

2. Erfüllt $q_{\alpha, b}(y)$ folgendes:

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{\alpha, b}(t, y) + A q_{\alpha, b}(t, y) = \alpha q_{\alpha, b}(t, y)$$

zusammen mit denselben Bedingungen von ψ für q .

So ist $q_{\alpha, b}(0, y)$ gegeben durch:

$$q_{\alpha, b}(0, y) = \mathbb{E}[e^{-\alpha T_y^b}]$$

3. Wenn wir die folgende Gleichung lösen können

$$\frac{\partial}{\partial t} V_b(t, y) + A V_b(t, y) = \alpha V_b(t, y)$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} V_b(t, y) &= 0 \text{ auf } y < 0, V_b(t, 0) = 0 \text{ wenn } \sigma_P^2 > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} V_b(t, b(t)) &= 1, V_b(t, y) = V_b(t, b(t)) + y - b(t) \text{ auf } y > b(t), \\ \lim_{(t,y) \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} V_b(t, y) &= 0 \end{aligned}$$

So gilt:

$$V_b(0, y) = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_y^b} e^{-\alpha t} dC_t^b \right]$$

Kapitel 5

Simulation verschiedener Barrierehöhen

In diesem Kapitel wollen wir nun unsere theoretischen Resultate in einem Diffusionsmodell mittels der Simulation von Beispiel 2 überprüfen. Hierfür verwenden wir die Monte-Carlo-Methode um in der Lage zu sein die gewünschten Werte geeignet zu simulieren.

Hierfür haben wir einen Zeithorizont von $T = 10000$ gewählt und diesen in äquidistante Intervalle $\frac{T}{n}$ zerlegt um geeignet zu diskretisieren, wobei im weiteren $n = 100000$ gewählt wird.

Es ergibt sich somit bei der Diskretisierung, da die Inkremente der Brownschen Bewegung $w_{i\frac{T}{n}} - w_{(i+1)\frac{T}{n}} \sim N(0, \frac{T}{n})$, also normalverteilt sind, für obiges Beispiel folgendes für $i = 0, \dots, n - 1$:

$$Y_{(i+1)\frac{T}{n}} = Y_{i\frac{T}{n}} + (p + r \cdot Y_{i\frac{T}{n}}) \cdot \frac{T}{n} + \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 \cdot Y_{(i)\frac{T}{n}}^2} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}} \cdot Z$$
$$Y_0 = y$$

Hierbei ist Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable die im nachfolgenden mittels der Box-Muller-Methode erzeugt wird.

Das stochastische Integral wird also durch die Multiplikation von $\sqrt{\frac{T}{n}} \cdot Z$ geeignet diskretisiert.

Es ergibt sich also für den Reserveprozess folgendes für $i = 0, \dots, n-1$:

$$\hat{Y}_{(i+1)\frac{T}{n}} = \min \left\{ Y_{i\frac{T}{n}} + (p + r \cdot Y_{i\frac{T}{n}}) \cdot \frac{T}{n} + \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 \cdot Y_{(i)\frac{T}{n}}^2} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}} \cdot Z, B \right\}$$

$$\hat{Y}_0 = \min \{y, B\}$$

Und weiters werden die adäquaten diskontierten Dividenden folgendermaßen berechnet:

$$D(i \cdot \frac{T}{n}) = \left(\hat{Y}_{(i-1)\frac{T}{n}} + (p + r \cdot Y_{i\frac{T}{n}}) \cdot \frac{T}{n} + \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_R^2 \cdot Y_{(i)\frac{T}{n}}^2} \cdot \sqrt{\frac{T}{n}} \cdot Z - B \right)^+ \cdot \exp(-i \frac{T}{n} \beta)$$

$$D(0) = \max \{y - B, 0\}$$

Die Dividenden ergeben sich wiederum aus der Differenz von Barriere und Funktionswert des Prozesses, falls der Prozess über der Barriere liegt, andernfalls sind die Dividenden Null.

Um die Zielfunktion eines simulierten Pfades zu erhalten müssen wir noch die Summe über die diskontierten Dividenden bilden:

$$V_{Sim}(y) = \sum_{i=0}^n D(i \cdot \frac{T}{n})$$

Für die Simulation haben wir ein Matlab-Programm mit folgenden Parametern verfasst:

$$p = 0.02, r = 0.03, \sigma_P = 0.04, \sigma_R = 0.04, \beta = 0.1, y = 1$$

Es ergibt sich für Beispiel 2 mit diesen gewählten Parametern der Wert für die theoretisch optimale Barriere und das Ergebnis für die entsprechende Wertefunktion wie folgt:

$$m = 0.1263 \qquad V_{Ber} = 1.1482$$

m	V_{Sim}
0.01053	1.015
0.02105	1.023
0.03158	1.032
0.04211	1.047
0.05263	1.061
0.06316	1.078
0.07368	1.09
0.08421	1.101
0.09474	1.107
0.1053	1.111
0.1158	1.115
0.1263	1.116
0.1368	1.111
0.1474	1.106
0.1579	1.105
0.1684	1.098
0.1789	1.094
0.1895	1.083
0.2	1.078

Tabelle 5.1: Simulationen erzeugt mittels Matlab Programm

In dieser Tabelle sind nun die Simulationen der Wertefunktion die mittels Matlab-Programm simuliert wurden zusammengefasst. Die nachfolgende Grafik zeigt die simulierte Zielfunktion $V_{Sim}(1)$ für die getesteten Barrieren m . Man sieht hierbei, dass tatsächlich unter allen getesteten Barrieren die maximale Barriere bei $m = 0.1263$ liegt.

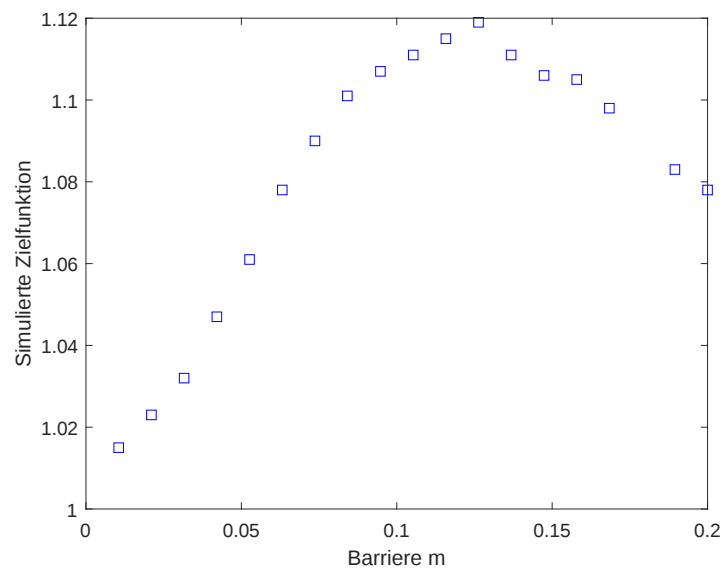


Abbildung 5.1: Simulierte Zielfunktion $V_{Sim}(1)$ für alle getesteten Barrieren.

5.1 Matlab-Programm zur Simulation

```
function V = Simulation3(x, N, n, T, p, r, sigmaP, sigmaR, beta, m, Z)

X(1) = min(x, m);
D(1) = max(x - m, 0);
for j = 1 : N
    for i = 1 : n
        deltaYt = increase(X(i), p, r, n, T, sigmaP, sigmaR, Z, i);
        X(i + 1) = X(i) + deltaYt;
        if(X(i) < 0)
            if(X(i + 1) > m)
                D(i + 1) = 0;
            else
                D(i + 1) = (X(i + 1) - m) * (exp(-beta * (T/n) * i));
                X(i + 1) = m;
            end
        else
            X(i + 1) = 0;
            D(i + 1) = 0;
        end
    end
end
C(j) = sum(D);
end
V = sum(C)/N;

function deltaYt = increase(Ytb, p, r, n, T, sigmaP, sigmaR, Z, i)
deltaYt = (p + r * Ytb) * (T/n) + sqrt(sigmaP^2 + sigmaR^2 * Ytb^2) * sqrt(T/n) *
    (randn * Z(i) + 1) * sqrt(T/n);
```

```
boxmuller(1);
```

```
end
```

Um die Z der Funktion zu berechnen wurde das folgende Programm verwendet:

```
function Z = boxmuller(n)
```

```
rand(n, 1);
```

```
Z = sqrt(-2 * log(rand(1, n))). * cos(2 * pi * rand(1, n));
```

Literaturverzeichnis

- [1] ASMUSSEN SOREN, TAKSAR MICHAEL. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20, S. 1-15, 1997.
- [2] DIESCH. Risikothorie bei zufaelligen Kapitalanlagen. *Technische Universitaet Muenchen*, 2006.
- [3] GRANDELL, J. Aspects of risk theory. *Springer, New York*, 1991.
- [4] IRLE ALBRECHT. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Grundlagen - Resultate - Anwendungen*. Vieweg+Teubner, 2001.
- [5] ITO, KYJOSHI. Stochastic processes. *Springer Verlag Berlin, New York*, 2003.
- [6] JACOD JEAN. *Calcul Stochastique et Problemes de Martingales*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1979.
- [7] PAULSEN JOSTEIN, GJESSING HAKON K. Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investment. *Insurance: Mathematics and Economics* 20 S. 215-223, 1997.
- [8] PROTTER, PHILIP E. Stochastic integration and differential equations. *Springer Berlin, Heidelberg, New York*, 2000.

- [9] SATO, KEN-ITI. Levy processes and infinitely divisible distributions. *Cambridge University Press*, 1999.
- [10] SHIRYAEV, A.N. Probability. *Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York*, 1995.
- [11] SHREVE S.E., LEHOCZKY J.P, GAVER D.P. Optimal consumption for general diffusion with absorbing and reflecting barriers. *SIAM Control And Optimization*, 22, S. 55-75, 1984.
- [12] SLATER L. J. *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1960.
- [13] WERNER, DIRK. *Funktionalanalysis*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [14] YOSIDA, KOSAKU. Functional analysis. *Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York*, 1971.