

DISSERTATION

Die Beulkugel Eine Symbiose von Mechanik und Geometrie

ausgeführt zum Zweck der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Technischen Wissenschaften
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

DOCTORAL THESIS

The Buckling Sphere A Symbiosis of Mechanics and Geometry

submitted in fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Science in Civil Engineering
of the Technical University of Vienna, Faculty of Civil Engineering

by

Dipl.-Ing. **Stefan PAVLICEK**

Matrikelnummer: 0627635

Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen

Technische Universität Wien

Karlsplatz 13/202, 1040 Wien, Österreich

Gutachter

Em. O. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c.mult. **Herbert A. MANG**, Ph.D.

Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen

Technische Universität Wien

Karlsplatz 13/202, 1040 Wien, Österreich

Prof. Dr.-Ing. habil. **Werner WAGNER**

Institut für Baustatik

Universität Karlsruhe

Kainerstraße 12, 76181 Karlsruhe, Deutschland

Wien, im Juli 2016

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (IMWS) der Technischen Universität Wien im Zuge des vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) geförderten Forschungsprojekts “Categorization of buckling by means of spherical geometry” (P24526-N26). Dem FWF gilt mein aufrichtiger Dank für diese Förderung. Bei der Arbeit an dieser Abhandlung konnte ich auf die Unterstützung und Geduld von Kollegen, Professoren, Freunden und Verwandten zählen, wofür ich ihnen meinen Dank aussprechen möchte.

Besonderer Dank geht an Herrn Em. O.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c.mult. Herbert Mang, Ph.D., für seinen beherzten Einsatz. Sein außerordentlicher Zeitaufwand und sein geistiger Einfluss verliehen dem Forschungsprojekt starken Antrieb und beeinflussten es sehr positiv. Seine tiefgreifende Auseinandersetzung mit diesem Projekt neben seinen übrigen Verpflichtungen sehe ich als Privileg an.

Ebenfalls dankbar bin ich meinem Kollegen Dr. techn. Xin Jia, M. Eng., der mich über einen Großteil der vergangenen vier Jahre durch fachliche Expertise und zahlreiche Beiträge maßgeblich unterstützte und in Diskussionen immer zielorientiert argumentierte. Danken möchte ich ebenfalls dem langjährigen Institutsvorstand, Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c.mult. Josef Eberhardsteiner, sowie dem derzeitigen Institutsvorstand, Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Hellmich, die sich trotz ihrer umfassenden Verpflichtungen stets um eine kollegiale und freundschaftliche Atmosphäre bemühten und zugleich ein offenes Ohr für fachliche und organisatorische Belange hatten, wie etwa für die Anschaffung eines institutsinternen Großrechners, der eine große Hilfe für die Erstellung dieser Dissertation bedeutete.

In Bezug auf organisatorische Belange möchte ich ausdrücklich meinen großen, freundschaftlichen Dank an Herrn David Kaufmann für seine Hilfsbereitschaft und Kompetenz in allen das Computerwesen betreffenden Bereichen richten. Ebenfalls danken möchte ich Frau Gabriele Ostrowski und Frau Astrid Schuh für die großartige Unterstützung in administrativer Hinsicht, sowie der guten Seele des Instituts, Frau Mag. (FH) Martina Pöll.

Den Kollegen des IMWS sowie einzelnen Mitarbeitern anderer Institute und Universitäten möchte ich für ihre Unterstützung danken, sei es auf fachlicher Ebene oder bei der Freizeitgestaltung.

Für Unterstützung im mathematischen und numerischen Bereich gilt mein Dank Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Steindl und dem Institut für Analysis und Scientific Computing (ASC) der Technischen Universität Wien, und hier insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Feischl.

Selbstredend möchte ich meinen Eltern, meinem Bruder und meinen Freunden danken, die mir in jeder Situation zur Seite gestanden sind.

Acknowledgement

I gratefully acknowledge financial support of the research project “Categorization of buckling by means of spherical geometry” (P24526-N26) by the Austrian Science Fund (FWF), in which this thesis is embedded. I would like to express my gratitude to Mr. Andrew Bell, Senior Technical Consultant at MSC Software, Frimley, UK, for his technical support. His expertise of the software MSC.MARC has proved to be invaluable.

I wish to underscore my appreciation of his commitment without which this thesis could not have been accomplished.

Abstract

The basis of this work is a novel symbiosis of mechanics of solids and spherical geometry to quantify and illustrate the variation of the “non-membrane” percentage of the strain energy in the prebuckling region of elastic structures. The zenith angle of an arbitrary point of a specific curve on an octant of the unit sphere, called buckling sphere, is related to this energy percentage. For the limiting case of buckling from a membrane stress state this curve degenerates to a point, characterized by zero values of both spherical coordinates. For all other stress states the azimuth angle increases with the proportionally increasing load. Its magnitude at the stability limit correlates with a quantity that depends on both the “non-membrane” deformations and the stiffness of the structure at incipient buckling. The azimuth angle is computed with the help of the so-called Consistently Linearized Eigenproblem (CLE), which is solved by means of the Finite Element Method (FEM).

This eigenvalue problem is the basis for a geometrical hypothesis for the “non-membrane” percentage of the strain energy. Implementation of several routines into the finite element software MSC.MARC allows for its alternative computation in a conventional manner. In the theoretical part of the work, the concept of the buckling sphere is presented. Thereafter, its numerical realization is described. MSC.MARC permits taking advantage of the versatility of commercial FE software. Simultaneously it allows for modifying the iterative solution process within the framework of the FEM. With the help of the software MATLAB, the derivatives of the global tangent stiffness matrix with respect to a dimensionless load parameter are computed. An iterative procedure is used to increase the accuracy of the solution of the CLE. A further improvement of the numerical solution is achieved by means of examining the numerical precision of the output of MSC.MARC. Automatization of the computation is accomplished with the help of PYTHON. The subsequent numerical investigation consists of several examples, referring to buckling from a membrane stress state, a pure bending stress state, and a general stress state. The practical motive for this research is the intention to investigate the influence of “non-membrane” action just before buckling on the initial postbuckling behavior of elastic structures.

Kurzfassung

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf einer neuartigen Symbiose von Festkörpermechanik und sphärischer Geometrie, mittels der die Änderung des Anteils der "Nicht-Membran" Energie an der Verzerrungsenergie im Vorbeulbereich elastischer Strukturen quantifiziert und illustriert wird. Der Zenitwinkel eines beliebigen Punktes auf der Oberfläche des Oktanten einer Einheitskugel – der Einfachheit halber als Beulkugel bezeichnet – steht zu diesem Energieverhältnis in Beziehung. Der Azimutwinkel dieses Punktes wird mit Hilfe des sogenannten konsistent linearisierten Eigenwertproblems bestimmt, das mittels der Methode der Finiten Elemente gelöst wird. Sein Wert an der Stabilitätsgrenze hängt von den "Nicht-Membran" Verformungen und der Steifigkeit der Struktur unmittelbar vor dem Stabilitätsverlust ab. Für den Grenzfall des Beulens aus einem reinen Membranspannungszustand degeneriert die durch den Zenit- und den Azimutwinkel der einzelnen Kurvenpunkte definierte Flächenkurve zu einem Punkt, für den beide Kugelkoordinaten den Wert Null annehmen. Für alle anderen Spannungszustände nimmt der Azimutwinkel mit der proportional steigenden Belastung zu. Das konsistent linearisierte Eigenwertproblem bildet den Ausgangspunkt für eine Hypothese für den Anteil der "Nicht-Membran" Energie an der Verzerrungsenergie. Dieser Anteil wird durch Einbettung mehrerer Routinen in die Software MSC.MARC auf konventionelle Weise berechnet.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in einen theoretischen Teil, in dem das Konzept der Beulkugel vorgestellt wird, und in einen numerischen Teil, in dem ausführlich auf die numerische Implementierung eingegangen wird und numerische Beispiele vorgestellt werden. Durch Interaktion der kommerziellen FE Software MSC.MARC mit der Software MATLAB werden die benötigten Ableitungen der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix nach einem dimensionslosen Lastparameter ermittelt. Die Verbesserung der Genauigkeit der Lösung des erwähnten linearen Eigenwertproblems erfolgt auf iterative Weise. Eine weitere Steigerung dieser Genauigkeit resultiert aus der Untersuchung der numerischen Präzision der Ausgabewerte von MSC.MARC. Eine Automatisierung der interagierenden Algorithmen von MSC.MARC wird mit Hilfe der Software PYTHON erreicht. Die umfassende numerische Untersuchung besteht aus mehreren Beispielen. Das erste Beispiel betrifft den von einem reinen Membranspannungszustand ausgehenden Stabilitätsverlust. Das zweite Beispiel bezieht sich auf den von einem reinen Biegespannungszustand ausgehenden Stabilitätsverlust. Die weiteren Beispiele sind durch den von einem allgemeinen Spannungszustand ausgehenden Stabilitätsverlust gekennzeichnet. Die praktische Zielsetzung des dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsprojekts besteht in der Untersuchung des Einflusses des Anteils der "Nicht-Membran" Energie an der Verzerrungsenergie vor der Stabilitätsgrenze auf das anfängliche Nachbeulverhalten elastischer Strukturen. Diese Untersuchung ist allerdings nicht Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und vorhandene Literatur	1
1.1 Einführung	1
1.2 Beschränkungen	2
2 Grundlagen der Symbiose zwischen Festkörpermechanik und sphärischer Geometrie	3
2.1 Die Beulkugel	3
2.2 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem Membranspannungszustand	8
2.3 Auf dem CLE basierende Hypothese für $(U - U_M)/U$	11
2.4 Herausragende Eigenschaften des fundamentalen Eigenpaars des CLE	14
3 Bestandteile des CLE	18
3.1 Allgemeine Bemerkungen	18
3.2 Analytische Bestimmung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$	18
3.3 Globale Tangentensteifigkeitsmatrix	20
3.3.1 Herleitung und Aufspaltung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ in Teilmatrizen	20
3.3.2 Spezialisierung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ für die Stabilitätsgrenze	23
3.3.3 Grundlagen der numerischen Berechnung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$	26
3.3.4 Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ in MSC.MARC	27
3.4 Ableitung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix nach dem Lastparameter	29
3.4.1 Grundlagen der numerischen Berechnung von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$	29
3.4.2 Ermittlung von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ in MSC.MARC	30
3.5 Numerische Lösung des CLE	35
3.5.1 Allgemeines und spezielles Eigenwertproblem in MATLAB	35
3.5.2 Spezialisierung des Lösungsalgorithmus für das CLE	37
3.6 Verbesserung der Genauigkeit der numerischen Lösung des CLE	40
3.6.1 Approximation von λ_1^*	40
3.6.2 Minimierung des Rundungsfehlers	44
4 Numerische Nachlaufrechnung	54
4.1 Bestimmung von $\rho(\lambda)$ und $c(\lambda)$	54
4.1.1 Hypothese für $(U - U_M)/U$	54
4.1.2 Alternative Hypothese für $(U - U_M)/U$	60
4.1.3 Numerische Auswertung der beiden Hypothesen für $(U - U_M)/U$	61
4.1.4 Berechnung von $\rho(\lambda)$ für verschieden große Lastschritte $\Delta\lambda$	62
4.1.5 Numerische Implementierung unter Beachtung von Toleranzen	64
4.2 Konventionelle Berechnung von $(U - U_M)/U$ am Beispiel einer dünnen Schale	68
4.2.1 Implementierung in MSC.MARC	71
4.2.2 Verifizierung mittels der Software FE_{v2}	73
4.3 Sortierungsalgorithmus zur Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars	75

4.4 Verbesserung der Genauigkeit des fundamentalen Eigenvektors	78
5 Numerische Untersuchung	81
5.1 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem Membranspannungszustand	81
5.2 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem reinen Biegespannungszustand	84
5.2.1 Konvergenzstudie	89
5.3 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem allgemeinen Spannungszustand.	91
5.3.1 Winkelmessung.	91
5.3.2 Durchschlagen eines Kreisbogens	92
5.3.3 Verzweigungsbeulen einer Kugelkalotte	97
5.3.4 Verzweigungsknicken eines Kreisbogens.	103
5.3.5 Druckstab mit Querbelastrung	106
6 Schlussfolgerungen	111
A Tabellen betreffend die Genauigkeit der numerischen Lösung für $\lambda_1^*(\lambda)$	114
Bibliographie	118

Motivation und vorhandene Literatur

1.1 Einführung

Diese Arbeit ist in ein vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) unterstütztes Forschungsprojekt eingebunden [1]. Die Absicht, die Veränderlichkeit des Anteils der Membranenergie an der gesamten Verzerrungsenergie im Vorbeulbereich linear-elastischer Strukturen im Rahmen einer neuartigen Symbiose von Festkörpermechanik und sphärischer Geometrie zu quantifizieren, war eine bedeutende Motivation für die Inangriffnahme des Projekts. Dieser Anteil lässt sich vorzugsweise mittels der Finite Elemente Methode (FEM) berechnen. Dabei spielt die numerische Lösung eines speziellen linearen Eigenwertproblems, die unter Zuhilfenahme von kommerzieller Software bewerkstelligt werden kann, eine entscheidende Rolle. Diese Lösung erfordert allerdings umfangreiche Eigenentwicklungen, deren Beschreibung zum Kern der vorliegenden Abhandlung gehört.

Der praktische Hintergrund der erwähnten Symbiose ist die Intention, den Einfluss der Biegewirkung in Strukturen auf das anfängliche Nachbeulverhalten zu untersuchen. Die Verwirklichung dieser Absicht muss zukünftiger Forschungsarbeit überlassen bleiben.

Ein essentieller Bestandteil der erwähnten Symbiose ist das sogenannte *Consistently Linearized Eigenvalue Problem* (CLE). Es gehört einer Gruppe linearer Eigenwertprobleme an, deren eine Koeffizientenmatrix die Tangentensteifigkeitsmatrix ist, während die andere eine allgemeine reelle, symmetrische Matrix darstellt. Solche linearen Eigenwertprobleme wurden in der Vergangenheit verwendet, um numerische Probleme bei der Annäherung an die Stabilitätsgrenze auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden zu vermeiden, siehe z.B. [2], [3], [4]. Die betreffenden Eigenwertanalysen werden allgemein unter dem Begriff *begleitende Eigenwertanalysen* zusammengefasst. Mittlerweile sind effizientere Methoden zur Berechnung der Stabilitätsgrenze nichtlinearer Stabilitätsprobleme zum Stand der Technik geworden. Das CLE wurde ursprünglich zur Berechnung von *ab initio* Abschätzungen der Stabilitätsgrenze auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden verwendet [5].

Das CLE wurde im Rahmen der Transformation ursprünglich imperfektionssensitiver in imperfektionsinsensitive Strukturen im Wege möglichst geringfügiger konstruktiver Modifikationen der Ausgangsstrukturen eingesetzt, wie z.B. in [6], [7], [8] und [9]. Eine Untersuchung des Verhaltens der Determinante der Tangentensteifigkeitsmatrix zur Beantwortung der Frage, ob lineare Last-Verschiebungspfade und lineare Stabilitäts-

probleme einander gegenseitig bedingen, wird in [10] beschrieben. Mit der Lösung des CLE beschäftigen sich die Artikel [11], [12] und [13], in denen verschiedene Methoden zur Ermittlung der Ableitung der Tangentensteifigkeitsmatrix nach dem Lastparameter und deren Genauigkeit diskutiert werden.

Ein Teil der vorliegenden Arbeit ist in einem Manuskript in englischer Sprache [14] zusammengefasst. Ein Artikel über Verzweigungsbeulen, ausgehend von einem reinen Membranspannungszustand [15], und einer über FE Analysen von Stabilitätsproblemen, die auf energetischen Sonderfällen im Vorbeulbereich aufbauen [16], sind für die gegenwärtige Arbeit insofern relevant, da sie numerische Ergebnisse beinhalten, die mittels des CLE erhalten wurden. Bestimmte charakteristische Merkmale dieser Ergebnisse für den Grenzfall von Stabilitätsverlust bei einem reinen Membranspannungszustand haben dazu veranlasst, die beobachtete Situation im Rahmen des erwähnten Forschungsprojekts eingehend zu untersuchen. Im Verlauf dieser Untersuchung wird ein zweiter Grenzfall betrachtet. Er betrifft den Stabilitätsverlust aus einem reinen Biegespannungszustand, wie er in der Praxis in Form von Biegedrillknicken auftritt. Aus der umfangreichen einschlägigen Literatur sind jene Artikel besonders interessant, die sich speziell mit der Tangentensteifigkeitsmatrix der Struktur befassen. Es sind dies unter anderem [17], [18], [19], [20], [21], [22] und [23]. Für das betreffende Stabilitätsproblem wurden in [24] Ausdrücke für die Verzerrungsenergie für finite Balkenelemente hergeleitet.

1.2 Beschränkungen

Die vorliegende Arbeit ist auf statische, konservative, proportionale Belastung perfekter Strukturen aus linear-elastischem Material beschränkt. Auf die Zielsetzungen dieser Abhandlung haben diese Restriktionen keinen Einfluss.

Grundlagen der Symbiose zwischen Festkörpermechanik und sphärischer Geometrie

2.1 Die Beulkugel

Abb. (2.1) zeigt den Oktanten einer Einheitskugel, die der Einfachheit halber als *Beulkugel* bezeichnet wird. $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sind Einheitsvektoren in Richtung der betreffenden Achsen eines kartesischen Koordinatensystems. Mit P wird ein beliebiger Punkt auf der Beulkugel bezeichnet. Er wird mittels des Einheitsvektors

$$\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)) = \begin{Bmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei $\theta(\lambda)$ und $\varphi(\lambda)$ die beiden Kugelkoordinaten sind. Letztere hängen vom dimensionslosen Lastparameter λ ab. Sie folgen aus

$$\cos^2\theta = \frac{U_M}{U}, \quad (2.2)$$

wobei U_M die Membranenergie bezeichnet, die ein Teil der Verzerrungsenergie U des Systems ist, und aus

$$\cos\varphi = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*, \quad \mathbf{v}_{10}^* := \mathbf{v}_1^*(0), \quad \|\mathbf{v}_1^*\| = 1, \quad (2.3)$$

wobei \mathbf{v}_1^* einen bestimmten Eigenvektor des CLE darstellt. Die mathematische Formulierung dieses linearen Eigenwertproblems lautet wie folgt:

$$\boxed{\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + (\lambda^* - \lambda) \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{0}}. \quad (2.4)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_T$ bezeichnet die globale Steifigkeitsmatrix im Rahmen der FEM. Die Tilde über \mathbf{K}_T drückt die Zugehörigkeit von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ zu einem Gleichgewichtszustand aus. Das Symbol $\dot{\cdot}$ bedeutet $d/d\lambda$. Somit ist $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ die Ableitung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ nach dem Lastparameter λ . $\lambda^* - \lambda$ ist der Eigenwert, der zusammen mit dem Eigenvektor \mathbf{v}^* das Eigenpaar bildet. Wegen besonderer mathematischer Eigenschaften ragt das Eigenpaar $(\lambda_1^* - \lambda, \mathbf{v}_1^*)$ aus den ver-

bleibenden $N - 1$ Eigenpaaren eines Systems mit N Freiheitsgraden heraus, siehe Unterkapitel 2.4. Es wird deshalb als *fundamentales Eigenpaar* bezeichnet. Bereits Helnwein hat das CLE verwendet, wenn auch zu einem ganz anderen Zweck [5].

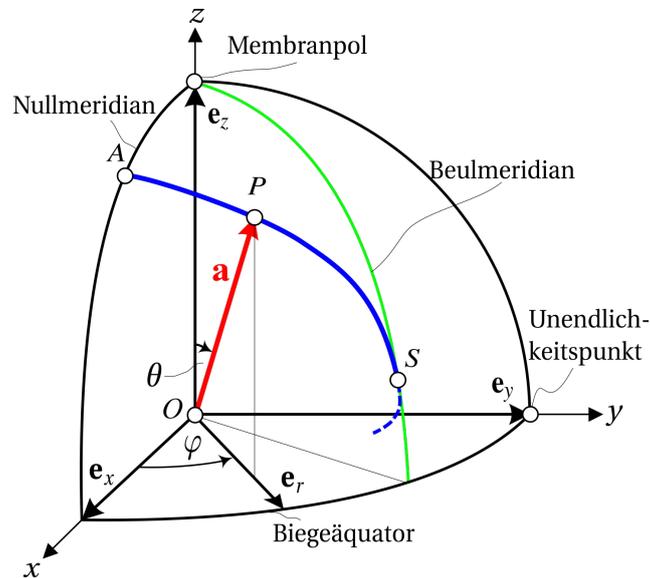


Abbildung 2.1: Beulkugel

Die Bezeichnungen *Membranpol* und *Biegeäquator* in Abb. (2.1) folgen aus der Spezialisierung von Gl. (2.2) für die energetischen Grenzfälle

$$U_M(\lambda) = U(\lambda) \implies \theta(\lambda) = 0 \quad (2.5)$$

und

$$U_M(\lambda) = 0 \implies \theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.6)$$

Der erste Grenzfall basiert auf einem reinen Membranspannungszustand im Vorbeulbereich und der zweite auf einem membranspannungsfreien Zustand. Die Bezeichnung *Biegeäquator* bezieht sich auf den Spezialfall reiner Biegung. Abb. (2.2) zeigt den Querschnitt $\varphi = \text{konst.}$ der Beulkugel. Die Kurve beginnt im Punkt A des *Nullmeridians*. Diese Bezeichnung folgt aus der Spezialisierung von Gl. (2.3) für $\lambda = 0$ zu

$$\cos \varphi(0) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_{10}^* = 1 \implies \varphi(0) = 0. \quad (2.7)$$

Der maßgebende Teil der Flächenkurve endet an der Stabilitätsgrenze S. Der Wert des Lastparameters λ im Punkt S wird mit λ_S bezeichnet. In diesem Punkt verläuft die Flächenkurve tangential an den im Folgenden als *Beulmeridian* bezeichneten Meridian. Das folgt daraus, dass $\varphi(\lambda)$ für λ_S zu einem Maximum wird, siehe Abb. (2.1). Der im Vorbeulbereich monoton wachsende Winkel φ ist einer der Gründe für seine Wahl als Azimutwinkel.

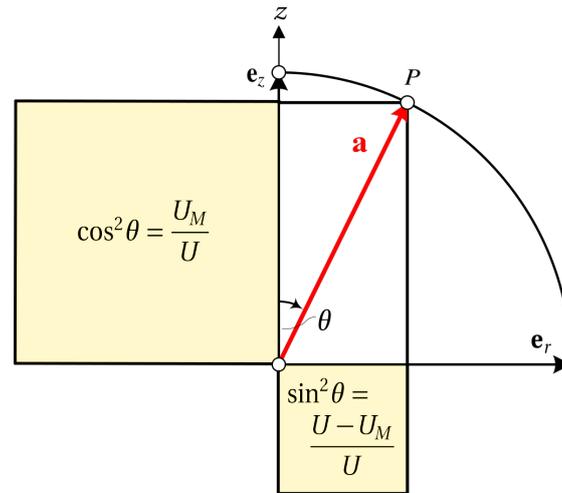


Abbildung 2.2: Querschnitt $\varphi = konst.$ der Beulkugel

Die mechanische Interpretation $\varphi(\lambda_S) = \pi/2$ als Koordinate des sogenannten *Unendlichkeitspunkts* folgt aus der unphysikalischen Situation

$$U(\lambda_S) = \infty, \quad U_M(\lambda_S) \neq \infty, \quad (2.8)$$

die auf

$$\sin^2 \theta(\lambda_S) = \frac{U(\lambda_S) - U_M(\lambda_S)}{U(\lambda_S)} = 1 \implies \theta(\lambda_S) = \frac{\pi}{2} \quad (2.9)$$

führt. Dasselbe Ergebnis für $\theta(\lambda_S)$ erhält man für das Ausbeulen aus einem reinen Biegespannungszustand, siehe Gl. (2.6). Ein Unterscheidungsmerkmal dieser beiden Grenzfälle ist der Wert von $\varphi(\lambda_S)$. Für einen reinen Biegespannungszustand beträgt er

$$0 < \cos \varphi(\lambda_S) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S) < 1 \implies 0 < \varphi(\lambda_S) < \frac{\pi}{2}, \quad (2.10)$$

siehe Abb. (5.9). Für die unphysikalische Situation laut Gl. (2.8) gilt

$$\cos \varphi(\lambda_S) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S) = 0 \implies \varphi(\lambda_S) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.11)$$

Ein Beispiel für diesen rein akademischen Fall ist ein mit einer exzentrischen Druckkraft belasteter Stab, der mittels Theorie II. Ordnung über deren Gültigkeitsbereich hinaus untersucht wird [25]. Für dieses Beispiel entspricht λ_S der *Eulerschen* Knicklast, die offensichtlich nicht von der Exzentrizität abhängt. Das impliziert

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{a}(\lambda_S) = 0, \quad \mathbf{a}_0 := \mathbf{a}(0), \quad (2.12)$$

unabhängig von der Länge des Vektors \mathbf{a}_0 in der \mathbf{x} - \mathbf{z} Ebene, die ihrerseits von der Ex-

zentrizität der Druckkraft abhängt. Es folgt

$$\mathbf{a}(\lambda_S) = \mathbf{e}_y, \quad (2.13)$$

siehe Abb. (2.3). Somit kann auch $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S)$ nicht von der Lage des Vektors \mathbf{a}_0 in der erwähnten Ebene abhängen, woraus Gl. (2.11) resultiert.

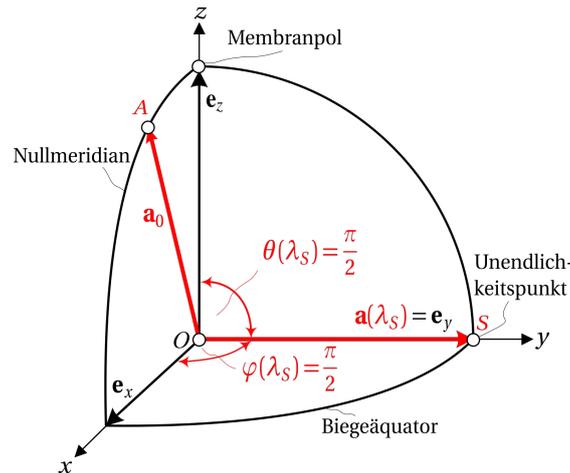


Abbildung 2.3: Exzentrisch gedrückter Stab: \mathbf{a}_0 und $\mathbf{a}(\lambda_S) = \mathbf{e}_y$ nach Theorie II. Ordnung

$\theta(\lambda_S) = \pi/2$ stellt eine notwendige Bedingung für $\varphi(\lambda_S) = \pi/2$ dar. Der Zusammenhang von $\varphi(\lambda) = \pi/2$ mit $0 < \theta(\lambda) < \pi/2$ bezieht sich hingegen auf den Vorbeulbereich. Es erhebt sich dann die Frage nach der Art eines durch $\varphi(\lambda_S) > \pi/2$ gekennzeichneten Stabilitätsverlusts, vorausgesetzt, dass ein solcher möglich ist. Abb. (2.4) dient der Veranschaulichung verschiedener Arten von Stabilitätsverlust für verschiedene Werte von $\varphi(\lambda_S)$. Mit Verweis auf die im Kapitel 5 vorgestellten numerischen Ergebnisse enthält diese Abbildung vier φ - λ Diagramme, deren Kennzeichen vier verschiedene Arten von Stabilitätsverlust sind. Diese zeichnen sich durch vier verschiedene Kombinationen von φ und $d\varphi/d\lambda$ an der Stabilitätsgrenze aus. Alle vier Fälle in Abb. (2.4) sind durch $d\varphi(\lambda_S) = 0$ gekennzeichnet. Abb. (2.4a) bezieht sich auf Verzweigungsbeulen, wobei

$$0 \leq \varphi(\lambda_S) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_S) = 0, \quad (2.14)$$

gilt. Die Stabilitätsgrenze in Abb. (2.4b) ist ein Durchschlagspunkt. Er ist durch

$$0 \leq \varphi(\lambda_S) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_S) = 0 \implies 0 \leq \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_S) < \infty \quad (2.15)$$

gekennzeichnet. Abb. (2.4c) betrifft den zuvor beschriebenen akademischen Grenzfall der Anwendung von Theorie II. Ordnung über ihren Gültigkeitsbereich hinaus. Die

“Stabilitätsgrenze” ist dabei durch

$$\varphi(\lambda_S) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_S) = \frac{0}{0} = \infty \quad (2.16)$$

gekennzeichnet. Abb. (2.4d) bezieht sich auf Verzweigungsbeulen, wobei die Stabilitätsgrenze mit einem Sattelpunkt der Last-Verschiebungskurven zusammenfällt. Für diesen Grenzfall gilt

$$\frac{\pi}{2} < \varphi(\lambda_S) < \pi, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_S) = \frac{0}{0} = \infty. \quad (2.17)$$

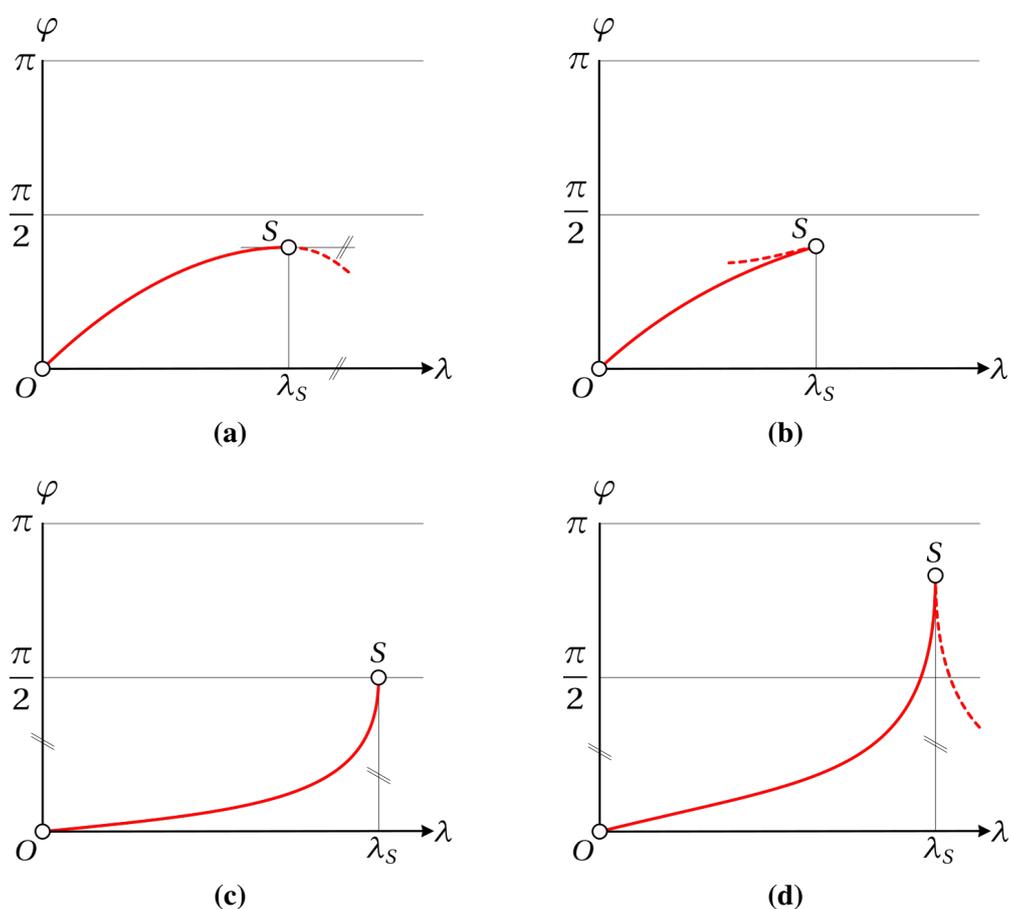


Abbildung 2.4: φ - λ Diagramme für (a) Verzweigungsbeulen, (b) Durchschlagen, (c) die Anwendung von Theorie II. Ordnung über ihren Gültigkeitsbereich hinaus und (d) Verzweigungsbeulen von einem Sattelpunkt der Last-Verschiebungspfade

Dieser Fall von Stabilitätsverlust ist der einzige mit einer Stabilitätsgrenze außerhalb des in den Abb. (2.1) und Abb. (2.3) dargestellten Oktanten der Einheitskugel. Dieser Grenzfall ist in der Regel durch große Deformationen an der Stabilitätsgrenze sowie durch Imperfektionsinsensitivität des initialen Nachbeulverhaltens der Struktur gekennzeichnet. Vor diesem Hintergrund ist die Beschränkung der vorliegenden Arbeit auf den mit Beulkugel bezeichneten Oktanten der Einheitskugel berechtigt.

2.2 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem Membranspannungszustand

Ein Membranspannungszustand im Vorbeulbereich ist durch

$$\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

charakterisiert, siehe Abb. (2.5). Basierend auf der Konstanz des Vektors \mathbf{a} wird die Hypothese von der Konstanz von \mathbf{v}_1^* aufgestellt. Es wird also angenommen, dass im vorliegenden Fall

$$\mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{v}_{10}^* \quad (2.19)$$

gilt. Berücksichtigung von Gl. (2.3) führt auf

$$\cos \varphi(\lambda) = 1 \implies \varphi(\lambda) = 0. \quad (2.20)$$

Unter der Voraussetzung der Verifizierung der erwähnten Hypothese, stellt $\varphi(\lambda) = 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\theta(\lambda) = 0$ dar.

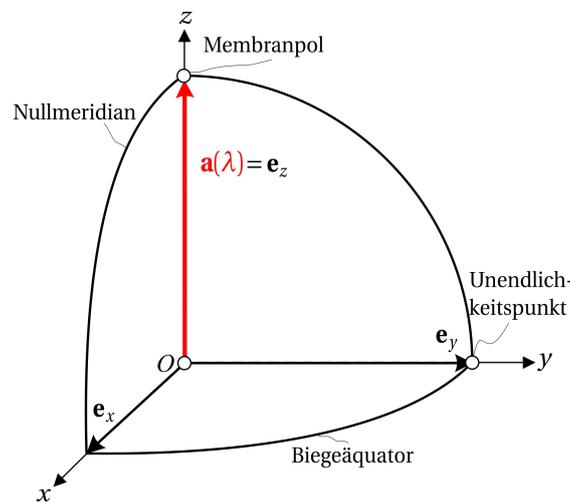


Abbildung 2.5: Membranspannungszustand

Als Voraussetzung für die numerische Verifizierung dieser Hypothese wird im Folgenden gezeigt, dass das CLE ein Eigenpaar mit einem konstanten Eigenvektor aufweisen kann, dem ein nichtlinear veränderlicher Eigenwert entspricht. Den Ausgangspunkt für den Beweis bildet die Spezialisierung von

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + (\lambda^\Delta(\lambda) - \lambda)\mathbf{B}(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}^\Delta(\lambda) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

mit $\mathbf{B}(\lambda)$ als beliebiger reeller, symmetrischer Matrix, für das Eigenpaar $(\lambda_1^\Delta(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^\Delta(\lambda))$. Dieses Eigenpaar ist durch

$$\lambda_1^\Delta(\lambda_S) = \lambda_1^*(\lambda_S) = \lambda_S \quad (2.22)$$

und

$$\mathbf{v}_1^\Delta(\lambda_S) = \mathbf{v}_1^*(\lambda_S) \quad (2.23)$$

gekennzeichnet. $\lambda_1^\Delta(\lambda_S)$ und $\mathbf{v}_1^\Delta(\lambda_S)$ entsprechen also den mittels des CLE erhaltenen Größen $\lambda_1^*(\lambda_S)$ und $\mathbf{v}_1^*(\lambda_S)$. Spezialisierung von Gl. (2.21) für das erste Eigenpaar ergibt

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + (\lambda_1^\Delta(\lambda) - \lambda)\mathbf{B}(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}_1^\Delta(\lambda) = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Ableitung von Gl. (2.24) nach λ führt auf

$$\left[\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T + (\dot{\lambda}_1^\Delta - 1)\mathbf{B} + (\lambda_1^\Delta - \lambda)\dot{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathbf{v}_1^\Delta + \left[\tilde{\mathbf{K}}_T + (\lambda_1^\Delta - \lambda)\mathbf{B} \right] \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^\Delta = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Da die Eigenvektoren eines linearen Eigenwertproblems einen vollständigen Vektorraum aufspannen, siehe Abschnitt 3.5.1, kann $\dot{\mathbf{v}}_1^\Delta$ wie folgt durch \mathbf{v}_j^Δ , $j = 2, 3, \dots, N$ ausgedrückt werden:

$$\dot{\mathbf{v}}_1^\Delta = \sum_{j=2}^N c_{1j}^\Delta \mathbf{v}_j^\Delta. \quad (2.26)$$

Wegen der Normierung $\|\mathbf{v}_1^\Delta\| = 1$ fehlt \mathbf{v}_1^Δ im Ausdruck für $\dot{\mathbf{v}}_1^\Delta$. Vormultiplikation von Gl. (2.25) mit \mathbf{v}_j^Δ und Berücksichtigung der aus Gl. (2.24) folgenden Orthogonalitätsbeziehungen

$$\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^\Delta = 0, \quad \mathbf{v}_j^\Delta \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_1^\Delta = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (2.27)$$

führen auf folgenden Ausdruck für c_{1j}^Δ :

$$c_{1j}^\Delta = - \frac{\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \left[\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T + (\lambda_1^\Delta - \lambda)\dot{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathbf{v}_1^\Delta}{\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \left[\tilde{\mathbf{K}}_T + (\lambda_1^\Delta - \lambda)\mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{v}_j^\Delta}. \quad (2.28)$$

Spezialisierung von Gl. (2.21) für das j -te Eigenpaar, $(\lambda_j^\Delta(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_j^\Delta(\lambda))$, ergibt

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + (\lambda_j^\Delta(\lambda) - \lambda)\mathbf{B}(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}_j^\Delta(\lambda) = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Vormultiplikation von Gl. (2.29) mit $\mathbf{v}_j^\Delta(\lambda)$ und Substitution der quadratischen Form

$\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_j^\Delta$ in Gl. (2.28), führen auf

$$c_{1j}^\Delta = - \frac{\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^\Delta + (\lambda_1^\Delta - \lambda) \mathbf{v}_j^\Delta \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}_1^\Delta}{(\lambda_1^\Delta - \lambda_j^\Delta) \mathbf{v}_j^\Delta \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_j^\Delta}. \quad (2.30)$$

Ein konstanter Eigenvektor impliziert

$$\dot{\mathbf{v}}_1^\Delta(\lambda) = \mathbf{0}, \quad (2.31)$$

woraus unter Berücksichtigung von Gl. (2.26)

$$c_{1j}^\Delta(\lambda) = 0 \quad (2.32)$$

folgt. Erfüllung von Gl. (2.32) für beliebige Werte von λ verlangt die Aufspaltung der mit Hilfe von Gl. (2.30) erhaltenen Beziehung

$$\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^\Delta + (\lambda_1^\Delta - \lambda) \mathbf{v}_j^\Delta \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}_1^\Delta = 0. \quad (2.33)$$

in

$$\mathbf{v}_j^\Delta \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^\Delta = 0, \quad \mathbf{v}_j^\Delta \cdot \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{v}_1^\Delta = 0. \quad (2.34)$$

Eine notwendige Bedingung für die Erfüllung dieser beiden Bedingungen ist

$$\boxed{\mathbf{B} = \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T}. \quad (2.35)$$

Gl. (2.35) garantiert die Erfüllung von Gl. (2.34.1), unabhängig vom jeweiligen Vorbeulzustand. Substitution von Gl. (2.35) in Gl. (2.24) und Ersetzen des Eigenpaars $(\lambda_1^\Delta(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^\Delta(\lambda))$ durch das entsprechende Eigenpaar im Rahmen des CLE ergibt

$$\boxed{\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + (\lambda_1^*(\lambda) - \lambda) \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{0}}. \quad (2.36)$$

Analog erhält man aus Gl. (2.30)

$$c_{1j}^* = -(\lambda_1^* - \lambda) \frac{\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}{(\lambda_1^* - \lambda_j^*) \mathbf{v}_j^* \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T \cdot \mathbf{v}_j^*}. \quad (2.37)$$

Daher verlangt die Erfüllung von

$$\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) = \sum_{j=2}^N c_{1j}^* \mathbf{v}_j^* = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

die Befriedigung der Orthogonalitätsbeziehung

$$\boxed{\mathbf{v}_j^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0} \quad (2.39)$$

seitens $\mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{v}_{10}^*$. Im Gegensatz zu den aus Gl. (2.36) folgenden *mathematischen Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0, \quad \mathbf{v}_j^* \cdot \dot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0, \quad (2.40)$$

repräsentiert Gl. (2.39) eine *physikalische Orthogonalitätsbeziehung*. Ein Spezialfall von Gl. (2.39) ist durch

$$\ddot{\mathbf{K}}_T(\lambda) = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

gekennzeichnet. Dabei handelt es sich um lineare Stabilitätsprobleme [26]. Sie sind durch eine lineare Abnahme des Eigenwerts $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$ des CLE im Vorbeulbereich bis zu Null im Verzweigungspunkt gekennzeichnet. Nebenbei bemerkt, müssen lineare Stabilitätsprobleme und lineare Last-Verschiebungspfade im Vorbeulbereich einander nicht bedingen [27]. Theoretisch ist die Anwendbarkeit von linearen Stabilitätsanalysen auf Spezialfälle des Stabilitätsverlusts aus einem Membranspannungszustand beschränkt. Vor diesem Hintergrund ist es plausibel, dass Gl. (2.39), die auf der Konstanz von \mathbf{v}_1^* beruht, eine allgemein gültige Bedingung für einen Membranspannungszustand darstellt. Diese Vermutung wird im Kapitel 5 numerisch verifiziert.

2.3 Auf dem CLE basierende Hypothese für $(U - U_M)/U$

Der numerische Nachweis der Konstanz des Eigenvektors \mathbf{v}_1^* für den Spezialfall des Beulens aus einem reinen Membranspannungszustand [15], [16] ist ein wesentliches Element der im Titel der vorliegenden Arbeit angesprochenen Symbiose von Mechanik und Geometrie. Dieser Nachweis war die Grundlage für die Vermutung, das CLE würde eine direkte quantitative Bestimmung von $(U - U_M)/U$ erlauben. Das war übrigens einer der Beweggründe für die Beantragung des eingangs erwähnten Forschungsprojekts [1]. Erweist sich die erwartete Vermutung als korrekt, dann kann das CLE auch zur Ermittlung des Zenitwinkels θ , siehe Gl. (2.2), im Rahmen der Ermittlung von $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ herangezogen werden. Die Motivation für diese Art der Berechnung von θ besteht im Bestreben um eine Symbiose von Mechanik und Geometrie von größtmöglichem Ausmaß. Eine solche Berechnung des Zenitwinkels stellt insofern eine rein theoretische Zielsetzung dar, da $(U - U_M)/U$ alternativ und bequemer auf konventionelle Weise im Rahmen der FEM ermittelt werden kann, siehe Unterkapitel 4.2.

Die oben erwähnte Vermutung ist die Grundlage einer auf dem CLE basierenden Hypothese für $(U - U_M)/U$. Ihre mathematische Formulierung lautet:

$$\boxed{\frac{U - U_M}{U} = \sqrt{\rho^2 + c^2(1 - \rho^2)}} \quad (2.42)$$

mit

$$\rho \equiv \frac{1}{\kappa}, \quad 0 \leq \rho(\lambda) < 1. \quad (2.43)$$

$\kappa(\lambda)$ bezeichnet die Krümmung einer fiktiven Kurve auf der Oberfläche der Einheitskugel, die von der Spitze des zur Länge eins normierten fundamentalen Eigenvektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ beschrieben wird. Das Adjektiv *fiktiv* soll die Tatsache unterstreichen, dass $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ kein Vektor im physikalischen Sinn ist, der durch seine Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen eines kartesischen Referenzsystems bestimmt ist. Ein solcher Vektor ist der Spezialfall eines N -dimensionalen Vektors im matriziellen Sinn, der durch einen Satz von N Größen repräsentiert wird [28]. Ein weiteres Argument für die Bezeichnung *fiktive Kurve* ist die Tatsache, dass $\rho(\lambda)$ nicht von der Relativposition von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ zu den drei Koordinatenachsen abhängt. Überdies soll durch diese Bezeichnung eine Verwechslung von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ mit $\mathbf{a}(\lambda)$ vermieden werden. Die vorliegende Hypothese für $(U - U_M)/U$ kann auch als eine Art von Dimensionsreduktion von N auf 3 angesehen werden, die sich bei der grafischen Darstellung als adäquat und effizient erweist [29].

$c(\lambda)$ wird zu

$$c = \frac{v}{(\lambda_1^* - \lambda)} \frac{\lambda_{,\xi}}{\lambda_{,\xi}(0)} \quad (2.44)$$

gewählt. In diesem von der Referenzlast unabhängigen Ausdruck ist

$$v = s_{,\xi} = \|\mathbf{v}_{1,\xi}^*\|, \quad s_{,\xi} := \frac{d}{d\xi} \quad (2.45)$$

mit ξ als verschiebungsabhängigem Parameter, der im Unterkapitel 2.4 vorgestellt wird. Die Referenzlast wird so gewählt, dass $\lambda_{,\xi}(0) = 1$ ist. Der Term $c^2(1 - \rho^2)$ in Gl. (2.42) folgt aus einer im Unterkapitel 4.1 angegebenen Definitionsgleichung, deren Kennzeichen die Einbeziehung der Verwindung der fiktiven Oberflächenkurve ist. Unterkapitel 4.1 enthält Ableitungen des Ausdrucks für $\rho(\lambda)$ und der Beziehung $c^2(\lambda)(1 - \rho^2(\lambda))$ mit $c(\lambda)$ gemäß Gl. (2.44).

Spezialisierung von Gl. (2.44) für den Spezialfall eines Membranspannungszustands im Vorbeulbereich ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (2.19) und Gl. (2.45)

$$v(\lambda) = 0 \quad (2.46)$$

und führt auf

$$c(\lambda) = 0 \quad (2.47)$$

als unterer Schranke von $c(\lambda)$. Substitution von Gl. (2.47) in Gl. (2.42) und Beachtung von $U = U_M$ ergibt

$$\frac{U - U_M}{U} = \rho^2 \implies \rho(\lambda) = 0. \quad (2.48)$$

Diese Beziehung unterstreicht die Interpretation der Spitze des konstanten Einheitsvektors \mathbf{v}_1^* als zu einem Punkt degenerierter Kreis auf der Oberfläche der Einheitskugel. Wie im Unterkapitel 4.1 gezeigt wird, handelt es sich bei $v = 0$ und $\rho = 0$ um charakteristische Eigenschaften eines singulären Punkts von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$. Folgerichtig degeneriert die zuvor erwähnte fiktive Flächenkurve für den betrachteten Grenzfall zu einem Punkt. Vorausgesetzt die für diesen Grenzfall vermutete Konstanz von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ lässt sich numerisch verifizieren, folgt daraus, dass die Hypothese für $(U - U_M)/U$, siehe Gl. (2.42), für diesen Spezialfall verifiziert ist. Für den Grenzfall von Stabilitätsverlust aus einem reinen Biegespannungszustand muss dieser Hypothese zufolge

$$c(\lambda) = 1 \quad (2.49)$$

gelten. Dabei handelt es sich um die obere Schranke von $c(\lambda)$ gemäß Gl. (2.44).

Das Unterkapitel 5.2 befasst sich mit der numerischen Untersuchung von

$$0 \leq \rho(\lambda) < 1. \quad (2.50)$$

Wenn im Gegensatz zum halboffenen Intervall für $\rho(\lambda)$ diese Größe für beliebige Werte von λ gleich 1 werden könnte, zöge das $1 - \rho^2 = 0$ und laut Gl. (2.42) ferner $U_M = 0$ für den betrachteten Wert von λ nach sich. U_M ist aber entweder für alle Werte oder für keinen Wert von λ im Vorbeulbereich gleich Null. Der Schluss, dass $U_M = 0$ $\rho(\lambda) = 1$ nach sich zieht, ist inkorrekt. Das würde nämlich das Verschwinden des zweiten Terms im Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (2.42) unabhängig von $c(\lambda)$ bedingen. Anders ausgedrückt, ergäbe sich daraus, dass $v(\lambda) = 0$ nur eine hinreichende, also nicht notwendige Bedingung für das Verschwinden von $c(\lambda)$ ist. Es würde sich dann die Frage der Notwendigkeit des zweiten Terms im Ausdruck für $(U - U_M)/U$ gemäß Gl. (2.42) stellen. In der Tat könnte man dann vermuten, dass sich auch der allgemeine Fall, gekennzeichnet durch $0 < (U - U_M)/U < 1$, ohne diesen Term behandeln ließe. Das trifft jedoch nicht zu.

Gl. (2.42) beinhaltet erste und zweite Ableitungen von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$, siehe Unterkapitel 4.1. Sie werden mittels der Methode der finiten Differenzen (FDM) approximiert. $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ repräsentiert einen Teil der numerischen Lösung des CLE, siehe Unterkapitel 3.4. Im All-

gemeinen basiert diese Lösung auf einer Approximation von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ mittels der FDM, siehe Abschnitt 3.4.1. Die Überprüfung der Hypothese (2.49) erfordert also in der Regel mehrere Approximationen von Ableitungen mittels dieser Methode.

2.4 Herausragende Eigenschaften des fundamentalen Eigenpaars des CLE

Um die herausragende Rolle des fundamentalen Eigenpaars des CLE zu unterstreichen, werden $\lambda_1^*-\lambda$ Diagramme mit $\lambda_j^*-\lambda$ Diagrammen, $j \neq 1$, verglichen. Die [5] entnommene Abb. (2.6) zeigt zwei solche Diagramme. Sie beziehen sich auf zwei zylindrische Schalen, die entlang ihrer geraden Ränder gelenkig gelagert und entlang der gekrümmten Ränder frei verschieblich sind. Beide Schalen sind durch eine im Mittelpunkt angreifende vertikale Einzellast belastet. Mit Ausnahme der Schalendicke sind beide Strukturen identisch. Die in Abb. (2.6a) dargestellte Schale weist die doppelte Dicke der in Abb. (2.6b) illustrierten Schale auf.

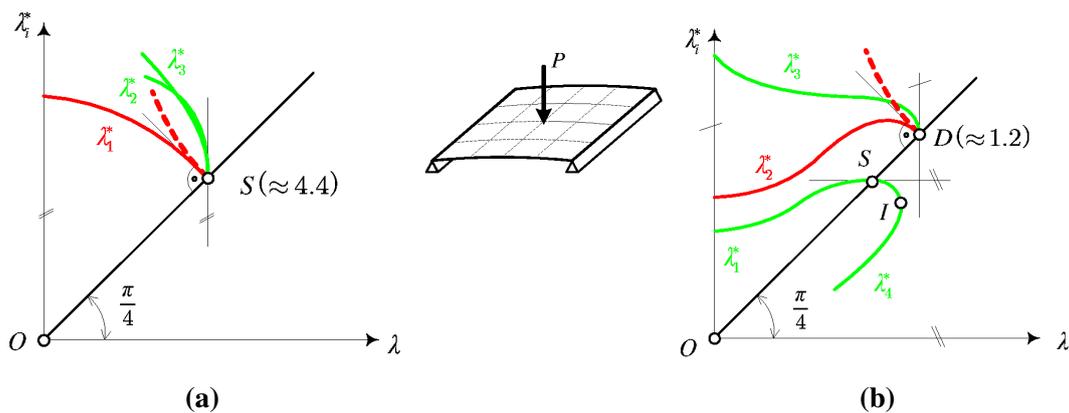


Abbildung 2.6: $\lambda_i^*-\lambda$ Diagramme für flache zylindrische Schalen verschiedener Dicke, bei denen Stabilitätsverlust durch (a) Durchschlagen und (b) Verzweigungsbeulen eintritt [5]

Die roten Kurven in Abb. (2.6) beziehen sich auf “Durchschlagsmodes”, während die grünen Kurven “Verzweigungsmoden” betreffen. Für Letztere gilt [5]:

$$\alpha_k^* = \arcsin \frac{\mathbf{v}_k^* \cdot \bar{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{v}_k^*\| \|\bar{\mathbf{P}}\|} \leq 0.2, \quad (0.2^\circ < \alpha_k^* < 1.0^\circ \text{ Unsicherheitsbereich}), \quad (2.51)$$

wobei $\bar{\mathbf{P}}$ für den Vektor der arbeitsäquivalenten Referenzkräfte in den Knotenpunkten der finiten Elemente steht. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ ist eine reelle, symmetrische Matrix. Im Vorbeulbereich ist $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ eine positiv definite Matrix. Daher sind in diesem Bereich alle Eigenwerte reell. Das Vorzeichen der Referenzlast wird so gewählt, dass sich der Eigenwert im Vorbeulbereich zu $\lambda_1^* - \lambda > 0$ ergibt. Es gibt jedoch Stabilitätsprobleme, die sowohl über eine positive als auch über eine negative Stabilitätsgrenze verfügen. Ein Beispiel

dafür ist ein zylindrischer Druckbehälter mit einem torusförmigen Übergangsbereich zwischen dem Zylinder und dem kugelkalottenförmigem Abschluss, der sowohl unter Außen- als auch unter Innendruck ausbeulen kann.

Eine nähere Untersuchung von Abb. (2.6) erfordert die Kenntnis des Werts von $\dot{\lambda}_1^*(\lambda_S)$. Um ihn zu bestimmen, wird Gl. (2.36) nach λ abgeleitet. Das ergibt

$$[\dot{\lambda}_1^* \tilde{\mathbf{K}}_T + (\lambda_1^* - \lambda) \ddot{\mathbf{K}}_T] \cdot \mathbf{v}_1^* + [\tilde{\mathbf{K}}_T + (\lambda_1^* - \lambda) \ddot{\mathbf{K}}_T] \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^* = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

Vormultiplikation von Gl. (2.52) mit \mathbf{v}_1^* und Verwendung von Gl. (2.36) führt auf

$$\dot{\lambda}_1^* = -(\lambda_1^* - \lambda) \frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}{\mathbf{v}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}. \quad (2.53)$$

Ungeachtet der Art des Stabilitätsverlusts gilt für den Eigenwert an der Stabilitätsgrenze laut Gl. (2.36)

$$\lambda_1^*(\lambda_S) - \lambda_S = 0. \quad (2.54)$$

Für Stabilitätsverlust in Form von Verzweigungsbeulen gilt ferner

$$d\lambda > 0, \quad (2.55)$$

wobei hier die Möglichkeit des Zusammenfallens des Verzweigungspunkts mit einem Durchschlagpunkt ausgeklammert wird. Dementsprechend muss

$$\frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}{\mathbf{v}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*} \quad (2.56)$$

einen endlichen Wert besitzen. Folgerichtig führt Substitution von Gl. (2.54) in Gl. (2.53) auf

$$\boxed{\dot{\lambda}_1^*(\lambda_S) = 0}. \quad (2.57)$$

Durchschlagpunkte sind durch

$$d\lambda = 0 \quad (2.58)$$

charakterisiert. Es liegt daher nahe, einen Wechsel der Parametrisierung von λ zu ξ vorzunehmen. Der Parameters ξ ist wie folgt definiert [5]:

$$\xi = \int \sqrt{d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q}}, \quad (2.59)$$

wobei $d\mathbf{q}$ das Differential des Vektors der Knotenpunktverschiebungen, \mathbf{q} , im Rahmen

der FEM bezeichnet. Somit gilt

$$d\xi = \sqrt{d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q}}. \quad (2.60)$$

Berücksichtigung der neuen Parametrisierung im Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (2.53) durch ξ führt auf

$$\dot{\lambda}_1^* = -(\lambda_1^* - \lambda) \frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \left[\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi\xi} \lambda_{,\xi} - \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \lambda_{,\xi\xi} \right] \cdot \mathbf{v}_1^*}{(\lambda_{,\xi})^3} = -\frac{\lambda_1^* - \lambda}{(\lambda_{,\xi})^2} \frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \left[\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi\xi} \lambda_{,\xi} - \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \lambda_{,\xi\xi} \right] \cdot \mathbf{v}_1^*}{\mathbf{v}_1^* \cdot \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi}}{\lambda_{,\xi}} \cdot \mathbf{v}_1^*}. \quad (2.61)$$

Spezialisierung von Gl. (2.61) für einen durch $\lambda_{,\xi} = 0$ gekennzeichneten Durchschlagspunkt und Anwendung der Regel von *de L'Hospital* ergibt

$$\dot{\lambda}_1^* = \frac{\lambda_1^* - \lambda}{(\lambda_{,\xi})^2} \lambda_{,\xi\xi} = \frac{0}{0} \lambda_{,\xi\xi} = \frac{\lambda_{1,\xi}^* - \lambda_{,\xi}}{2\lambda_{,\xi} \lambda_{,\xi\xi}} \lambda_{,\xi\xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{1,\xi}^*}{\lambda_{,\xi}} - 1 \right) = \frac{1}{2} (\dot{\lambda}_1^* - 1), \quad (2.62)$$

woraus

$$\boxed{\dot{\lambda}_1^* = \frac{\lambda_{1,\xi}^*}{\lambda_{,\xi}} = \frac{0}{0} = \frac{\lambda_{1,\xi\xi}^*}{\lambda_{,\xi\xi}} = -1} \quad (2.63)$$

folgt. Der Durchschlagspunkt stellt also einen singulären Punkt der Kurve $\lambda_1^*(\lambda)$ in Form einer Spitze dar.

Abb. (2.6a) zeigt die Diagramme $\lambda_i^* - \lambda$, $i = 1, 2, 3$, für die dickere Schale. Die Stabilitätsgrenze S ist ein Durchschlagspunkt. In diesem Punkt gilt

$$\lambda_i^* - \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.64)$$

was einem N -fachen Nulleigenwert des CLE entspricht. Im Punkt S ist

$$\dot{\lambda}_1^* = -1, \quad \dot{\lambda}_2^* = -\infty, \quad \dot{\lambda}_3^* = -\infty. \quad (2.65)$$

Berücksichtigung von $\lambda_{,\xi} = 0$ in diesen Beziehungen führt auf

$$\lambda_{1,\xi}^* = 0, \quad \lambda_{2,\xi}^* < 0, \quad \lambda_{3,\xi}^* < 0. \quad (2.66)$$

Es ist also das Verschwinden von $\lambda_{1,\xi}^*$ im Durchschlagspunkt, das den Unterschied der Eigenwertfunktion $\lambda_1^* - \lambda$ zu den Eigenwertfunktionen $\lambda_2^* - \lambda$ und $\lambda_3^* - \lambda$ begründet und diese somit von den restlichen $N - 1$ Eigenwertfunktionen unterscheidet. Das rechtfer-

tigt die Bezeichnung von $\lambda_1^* - \lambda$ als fundamentaler Eigenwert des CLE.

Abb. (2.6b) zeigt die Diagramme $\lambda_i^* - \lambda$, $i = 1, 2, 3, 4$, für die dünnere der beiden Schalen. Die Stabilitätsgrenze S ist ein Verzweigungspunkt. In diesem Punkt gilt

$$\lambda_1^* - \lambda = 0, \quad \dot{\lambda}_1^* = 0. \quad (2.67)$$

Unabhängig von der Art des Stabilitätsverlusts gilt

$$\lambda_{1,\xi}^* = 0. \quad (2.68)$$

Der Durchschlagspunkt D ist durch

$$\lambda_2^* - \lambda = 0, \quad \lambda_3^* - \lambda = 0 \quad (2.69)$$

und

$$\dot{\lambda}_2^* = -1, \quad \dot{\lambda}_3^* = -\infty \quad (2.70)$$

gekennzeichnet. Berücksichtigung von $\lambda_{,\xi} = 0$ in den Beziehungen für $\dot{\lambda}_2^*$ und $\dot{\lambda}_3^*$ führt auf die Relationen

$$\lambda_{2,\xi}^* = 0, \quad \lambda_{3,\xi}^* < 0. \quad (2.71)$$

Im Punkt I , $\lambda_S < \lambda_I < \lambda_D$, gilt

$$\lambda_1^* = \lambda_4^*. \quad (2.72)$$

Für $\lambda > \lambda_I$ sind die Eigenwerte $\lambda_1^* - \lambda$ und $\lambda_4^* - \lambda$ konjugiert komplex. Das ist deswegen möglich, weil $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ für $\lambda > \lambda_S$ eine indefinite Matrix ist. Das Verschwinden von $\lambda_{1,\xi}^*$ im Verzweigungspunkt und von $\lambda_{2,\xi}^*$ im Durchschlagspunkt unterscheidet die Eigenwertfunktionen $\lambda_1^* - \lambda$ und $\lambda_2^* - \lambda$ von den restlichen $N - 2$ Eigenwertfunktionen. Da der Verzweigungspunkt in diesem Fall die Stabilitätsgrenze darstellt und der Durchschlagspunkt somit keine praktische Bedeutung hat, bleibt die Bezeichnung fundamentaler Eigenwert des CLE auf $\lambda_1^* - \lambda$ beschränkt.

Bestandteile des CLE

3.1 Allgemeine Bemerkungen

Eine genaue und effiziente Lösung des CLE ist die Voraussetzung dafür, dass das Ziel der Symbiose von Mechanik und Geometrie in Form der Beulkugel erreicht wird. Der ursprüngliche Zweck des CLE bestand in *ab initio* Abschätzungen der Stabilitätsgrenze mit Hilfe der FEM, siehe [5]. In späteren Untersuchungen wurde es dazu verwendet, das initiale Nachbeulverhalten linear-elastischer Strukturen zu ermitteln [8, 30, 31]. Um dieses lineare Eigenwertproblem zu lösen, müssen zuerst $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ berechnet werden. Für spezielle Formen finiter Elemente lassen sich analytische Ausdrücke der Koeffizienten von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ angeben. $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\lambda)$ kann dann durch Differentiation dieser Ausdrücke bestimmt werden [12]. Im Allgemeinen muss $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ jedoch numerisch mit Hilfe der FDM approximiert werden.

In diesem Kapitel wird zuerst eine analytische Methode der Berechnung von Koeffizientenmatrizen des CLE für ein ebenes, rotationssymmetrisches finites Balkenelement vorgestellt. Darauf folgt eine Erläuterung der numerischen Ermittlung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix mittels der kommerziellen FE Software MSC.MARC [32]. Parallel dazu erfolgt eine Einführung in die Arbeitsweise dieser und anderer kommerzieller Software [33, 34], die später verwendet wird. Die numerische Lösung des Eigenwertproblems besteht aus aufeinander folgenden Rechenschritten. Zuerst wird eine Vorlaufrechnung durchgeführt. Diese wird im Abschnitt 3.3.4 beschrieben. Im Abschnitt 3.4.1 folgt dann die Erläuterung einer numerischen Methode zur Berechnung dieser Matrizen, basierend auf einer Approximation von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ mit Hilfe der FDM, wobei, wie zuvor erwähnt, von kommerzieller FE Software Gebrauch gemacht wird. Darauf folgt die Lösung des Eigenwertproblems mittels verschiedener Methoden, die in den Abschnitten 3.5.1 und 3.5.2 vorgestellt werden. Die auf dieser Lösung basierende Nachlaufrechnung wird im Unterkapitel 4 erläutert.

3.2 Analytische Bestimmung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$

Im Rahmen der FEM erhält man die Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ eines Systems mit N Freiheitsgraden durch Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T^e$, $e = 1, 2, \dots, M$, wobei M die Anzahl der finiten Elemente bezeichnet. Mathematisch lässt

sich diese Assemblierung wie folgt beschreiben:

$$\tilde{\mathbf{K}}_T = \sum_{e=1}^M \mathbf{A}^e \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T^e \cdot \mathbf{A}^e. \quad (3.1)$$

In Gl. (3.1) bezeichnet \mathbf{A}^e die Konnektivitätsmatrix des Elements e . Da die Konnektivitätsmatrizen konstant sind, gilt

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T = \sum_{e=1}^M \mathbf{A}^e \cdot \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T^e \cdot \mathbf{A}^e. \quad (3.2)$$

Daher genügt es, die analytischen Ausdrücke der Koeffizienten der Elementsteifigkeitsmatrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T^e$, $e = 1, 2, \dots, M$, nach λ zu differenzieren und dann die so erhaltenen Matrizen $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T^e$ zur Matrix $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ zusammensetzen. Der Einfachheit halber sind die folgenden Überlegungen auf den Sonderfall eines einzigen Elementtyps beschränkt.

Die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_T^e$ eines sogenannten “co-rotational” finiten Elements, das auf der Hypothese von Euler-Bernoulli basiert, ist in [12] zu

$$\tilde{\mathbf{K}}_T^e = \mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{K}}_T^e \cdot \mathbf{X} + \frac{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}{\hat{l}} \bar{N} + \frac{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r})(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)}{\hat{l}^2} \quad (3.3)$$

angegeben, wobei \mathbf{X} die Transformationsmatrix bezeichnet, mittels der die Elementsteifigkeitsmatrix von lokalen in globale Koordinaten übergeführt wird. \hat{l} bedeutet die Länge der Mittellinie des verformten Balkenelements. Die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{z} stellen Abkürzungen für umfangreiche Ausdrücke dar, die in [12] angegeben sind. \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{N} bezeichnen die Komponenten des Kraftvektors in diesem Koordinatensystem. Im Ausdruck für $\tilde{\mathbf{K}}_T^e$ wird der obere Index e mit Ausnahme von $\bar{\mathbf{K}}_T^e$ unterdrückt. Differentiation von Gl. (3.3) nach λ ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T^e &= \dot{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_T^e \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \dot{\bar{\mathbf{K}}}_T^e \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{K}}_T^e \cdot \dot{\mathbf{X}} + \\ &\quad \frac{(\dot{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \dot{\mathbf{z}})\hat{l} - \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} \dot{\hat{l}}}{\hat{l}^2} \bar{N} + \frac{\mathbf{z} \otimes \mathbf{z}}{\hat{l}} \dot{\bar{N}} + \\ &\quad \frac{(\dot{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{r} \otimes \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{z} \otimes \dot{\mathbf{r}})\hat{l}^2}{\hat{l}^2} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) - \\ &\quad \frac{2(\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r})\dot{\hat{l}}}{\hat{l}^3} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + \\ &\quad \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{r}}{\hat{l}^2} (\dot{\bar{M}}_1 + \dot{\bar{M}}_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dieser Ausdruck stellt die Grundlage für die Lösung des CLE mit Hilfe der kommerziellen Software MATLAB dar, siehe Abschnitt 3.5.2. Für allgemeine Elementstypen - gemeint sind nicht-stabförmige Elemente - in der in MSC.MARC implementierten Elementsbibliothek [35] gibt es keine analytischen Formulierungen für die Koeffizienten

der Elementsteifigkeitsmatrix. $\tilde{\mathbf{K}}_T$ muss daher numerisch mit Hilfe der FDM auf Basis der globalen Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ ermittelt werden.

3.3 Globale Tangentensteifigkeitsmatrix

3.3.1 Herleitung und Aufspaltung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ in Teilmatrizen

Die Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ ist ein zentraler Bestandteil des CLE. Ihre Aufspaltung in Teilmatrizen wird [36] entnommen und im Folgenden kurz dargestellt. Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Spannungen im Rahmen der FEM wird in [26] beschrieben. Dabei werden der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor \mathbf{E} , der Verschiebungsgradient \mathbf{G} sowie der zweite *Pioli-Kirchhoffsche* Spannungstensor \mathbf{S} vor dem ersten Iterationsschritt im Rahmen des *Newton-Raphson* Algorithmus mit $\textcircled{1}$ gekennzeichnet. Für den zu ermittelnden Zustand nach der Iteration wird das Symbol $\textcircled{2}$ verwendet. Somit ergibt sich

$$\mathbf{S}_{\textcircled{2}} = \mathbf{S}_{\textcircled{1}} + \Delta\mathbf{S}, \quad \mathbf{E}_{\textcircled{2}} = \mathbf{E}_{\textcircled{1}} + \Delta\mathbf{E}, \quad \mathbf{G}_{\textcircled{2}} = \mathbf{G}_{\textcircled{1}} + \Delta\mathbf{G}. \quad (3.5)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{G}) \quad (3.6)$$

wird das Verzerrungsinkrement $\Delta\mathbf{E}$ in einen linearen Anteil $\Delta\mathbf{E}^{(lin)}$ und einen nichtlinearen Anteil $\Delta\mathbf{E}^{(nl)}$ aufgespalten. Bei \mathbf{G} handelt es sich um die partielle Ableitung des Verschiebungsfelds \mathbf{u} nach den zum Vektor \mathbf{X} aufgelisteten Koordinaten zur Beschreibung der unverformten Lage des Systems. Es gilt also $\mathbf{G} = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{X}$. Die beiden Anteile von $\Delta\mathbf{E}$ ergeben sich zu

$$\Delta\mathbf{E}^{(lin)} = \text{symm} \left(\left[\mathbf{I} + \mathbf{G}_{\textcircled{1}}^T \right] \Delta\mathbf{G} \right) \quad (3.7)$$

bzw.

$$\Delta\mathbf{E}^{(nl)} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_{\textcircled{1}}^T \Delta\mathbf{G}. \quad (3.8)$$

Das Inkrement $\Delta\mathbf{S}$ des zweiten *Pioli-Kirchhoffschen* Spannungstensors wird wie folgt approximiert:

$$\Delta\mathbf{S} \approx \mathbf{C}_{\textcircled{1}} \Delta\mathbf{E}^{(lin)}. \quad (3.9)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}_{\textcircled{1}}$ den tangentialen Materialsteifigkeitstensor vierter Stufe im bekannten Zustand $\textcircled{1}$. Mit Hilfe des Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhält man

unter Berücksichtigung der Gln. (3.5), (3.7), und (3.8) die Beziehung

$$\int_{V_0} \mathbf{C}_{\textcircled{1}} \Delta \mathbf{E}^{(lin)} : \delta(\Delta \mathbf{E}^{(lin)}) dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S}_{\textcircled{1}} : \delta(\Delta \mathbf{E}^{(nl)}) dV_0 = \delta W_{ext} - \int_{V_0} \mathbf{S}_{\textcircled{1}} : \delta(\Delta \mathbf{E}^{(lin)}) dV_0, \quad (3.10)$$

[36]. Sie beruht auf der Relation $\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$, wobei δW die Summe der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte, δW_{int} , und jener der äußeren Kräfte, δW_{ext} , darstellt. Gl. (3.10) enthält Größen, die von einem ausiterierten Zustand herrühren, sowie implizit das im vorliegenden Iterationsschritt zu ermittelnde Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}$.

Der lineare Anteil des Verzerrungsinkrements $\Delta \mathbf{E}^{(lin)}$, siehe Gl. (3.7), lässt sich durch den linearen Anteil \mathbf{D}_L der sogenannten Steifigkeits-Differentialoperator-Matrix \mathbf{D} [26], [36] zu

$$\Delta \mathbf{E}^{(lin)} = \mathbf{D}_L \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{D}_{L0} + \mathbf{D}_{L1}) \Delta \mathbf{u} \quad (3.11)$$

ausdrücken. Das Skalarprodukt der beiden Tensoren 2. Stufe, $\mathbf{S}_{\textcircled{1}}$ und der Variation des nichtlinearen Anteils von $\Delta \mathbf{E}$ führt auf

$$\mathbf{S}_{\textcircled{1}} : \delta(\Delta \mathbf{E}^{(nl)}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{K}_G = \mathbf{D}_{NL}^T \mathbf{S}_{\textcircled{1}} \mathbf{D}_{NL}. \quad (3.12)$$

Die darin aufscheinende Matrix \mathbf{K}_G wird geometrische Steifigkeitsmatrix oder Anfangsspannungs-Steifigkeitsmatrix genannt. Sie enthält den nichtlinearen Anteil \mathbf{D}_{NL} von \mathbf{D} . Der ausiterierte Verschiebungsgradient $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}$ geht innerhalb von \mathbf{D} nur in \mathbf{D}_{L1} ein. Dementsprechend wird die sogenannte Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K}_E eingeführt. Sie setzt sich aus dem Anteil im unbelasteten Zustand, \mathbf{K}_{EL} , und der Anfangsverschiebungs-Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_U zusammen. Es gilt also

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_{EL} + \mathbf{K}_U. \quad (3.13)$$

Unter Beachtung von Gl. (3.7) und Gl. (3.11) erhält man

$$\mathbf{K}_{EL} = \mathbf{D}_{L0}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_{L0} \quad (3.14)$$

und

$$\mathbf{K}_U = \mathbf{D}_{L0}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_{L1} + \mathbf{D}_{L1}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_{L0} + \mathbf{D}_{L1}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_{L1}. \quad (3.15)$$

Nach Einsetzen von Gl. (3.13), (3.14) und (3.15) in Gl. (3.11) und Gl. (3.10) ergibt sich

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u} dV_0 + \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u} dV_0 = \delta W_{ext} - \int_{V_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} dV_0. \quad (3.16)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.11) und des Verschwindens von Variationen kon-

stanter Größen erhält man

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_L^T \mathbf{S}_{\textcircled{1}}. \quad (3.17)$$

Aufgrund der Beschränkung auf linear-elastisches Materialverhalten folgt der Ausdruck für die globale Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ für ein bestimmtes Inkrement m , siehe Abb. (3.1), durch Einsetzen von Gl. (3.12) und Gl. (3.13) in Gl. (3.16) zu

$${}^m \tilde{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_{EL} + {}^m \mathbf{K}_U + {}^m \mathbf{K}_G. \quad (3.18)$$

In \mathbf{K}_{EL} gehen nur die Geometrie des unverformten Systems und die konstanten Werkstoffkennwerte ein. Es gilt somit $\dot{\mathbf{K}}_{EL} = \mathbf{0}$. ${}^m \mathbf{K}_U$ hängt neben der Geometrie des unverformten Systems und den im gegenständlichen Fall konstanten Materialkennwerten vom aktuellen Verschiebungszustand ab. ${}^m \mathbf{K}_G$ hängt vom aktuellen Spannungszustand sowie von der Geometrie des unverformten Ausgangszustands ab. Für das Inkrement m ergibt sich schließlich

$${}^m \tilde{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{u} = {}^{m+1} \mathbf{F}_{ext} - {}^m \mathbf{F}_{int}. \quad (3.19)$$

Die hochgestellte Tilde beschreibt dabei die Auswertung der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ für einen Gleichgewichtszustand. Darauf wird im Abschnitt 3.4.1 näher eingegangen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Superskript m im Folgenden weitgehend unterdrückt. Die Abb. (3.1) enthält einen Ausschnitt des Last-Verschiebungsdiagramms für das Inkrement m für den Freiheitsgrad i und die Kraftkomponente F_k , wobei der Index k im Folgenden unterdrückt wird.

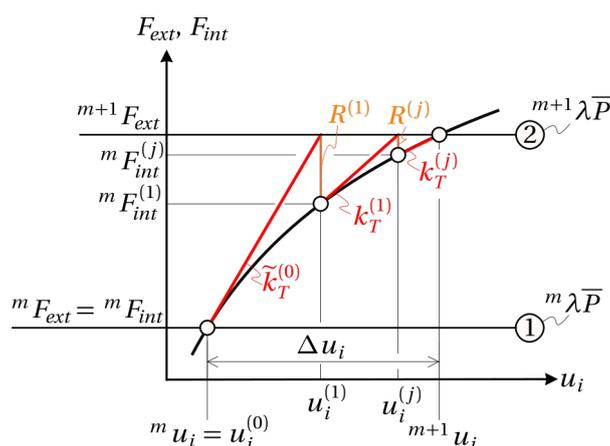


Abbildung 3.1: Ausschnitt des Last-Verschiebungsdiagramms für das Inkrement m für den Freiheitsgrad u_i und die Kraftkomponente F_k , *Newton-Raphson* Iteration zur Bestimmung von ${}^{m+1} u_i$ bei Kenntnis von ${}^m u_i$

Die Abbildung illustriert die *Newton-Raphson* Iteration zur Bestimmung von ${}^{m+1} u_i$ bei Kenntnis von ${}^m u_i$ und zeigt den Einfluss der k -ten Kraftkomponente auf die i -te Verschiebungskomponente. Die äußere Kraftkomponente ist zu ${}^{m+1} F_{ext} = {}^{m+1} \lambda \bar{P}$ gegeben, wobei \bar{P} die Referenzlast bezeichnet. Die innere Kraftkomponente beträgt

${}^m F_{ext} = {}^m F_{int} = {}^m \lambda \bar{P}$. Die Ermittlung von ${}^{m+1} u_i$ mittels *Newton-Raphson* Iteration ist in Abb. (3.1) schematisch dargestellt. $k_T^{(j)}$ bezeichnet die Tangentensteifigkeit des Freiheitsgrades i und $R^{(j)}$ die Komponente der Residuumskraft am Ende des Iterationsschritts j , die sich zu $R^{(j)} = {}^{m+1} F_{ext}^{(j)} - {}^m F_{int}^{(j)}$ ergibt.

3.3.2 Spezialisierung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ für die Stabilitätsgrenze

Im Folgenden werden die in [26], [36], [37] und [38] beschriebenen Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix diskutiert, und es wird die Ermittlung der Stabilitätsgrenze λ_S erläutert. Die Vorabberechnung von λ_S ist ein elementarer Bestandteil der Verifizierung der Lösung des CLE. Sie beschleunigt die Eigenwertberechnung und -sortierung in MATLAB, siehe Unterkapitel 4.3. Die gegenständliche Beschreibung der Lösung des Eigenwertproblems im Rahmen der FEM ist auf reelle, symmetrische Steifigkeitsmatrizen beschränkt. Unter dieser Voraussetzung sind alle Eigenwerte λ_i^* , $i = 1, 2, \dots, N$, des linearen Eigenwertproblems

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda^* \mathbf{v}, \quad (3.20)$$

in dem \mathbf{A} einen Tensor zweiter Stufe der Dimension N bezeichnet, reell. Die Symmetrie von \mathbf{A} manifestiert sich in $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Darüber hinaus bilden alle Eigenvektoren \mathbf{v} eine orthonormale Basis $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, $i \neq j$, siehe [39]. Gilt für die quadratische Form von \mathbf{A} , die Beziehung $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} > 0$, dann heißt \mathbf{A} positiv definit, und es sind alle Eigenwerte positiv. Für $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, heißt \mathbf{A} positiv semidefinit. Es existiert dann ein Eigenwert, dem zumindest ein Eigenvektor entspricht, für den die erwähnte quadratische Form verschwindet.

Die Lösung des CLE [5] erfolgt für statische Berechnungen unter Ausschluss von Kontakt und Reibung. Die proportional anwachsende Belastung verfügt über ein Potential, ist also konservativ. Somit handelt es sich bei den betrachteten Systemen um Beispiele, bei denen die Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ im Vorbeulbereich eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Die zweite Koeffizientenmatrix im Rahmen des CLE, $\tilde{\mathbf{K}}_T$, ist hingegen eine indefinite Matrix. Die Definition der Stabilitätsgrenze λ_S erfolgt mittels des *Eulerschen* Stabilitätskriteriums, demzufolge für $\lambda = \lambda_S$ zumindest zwei infinitesimal benachbarte Gleichgewichtslagen existieren, die sich um $\delta \mathbf{u}$ voneinander unterscheiden. Modifiziert man Gl. (3.19) im Sinne des *Eulerschen* Stabilitätskriteriums für die globale Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ unter Berücksichtigung des Vektors der Knotenpunktverschiebungen, \mathbf{u} , und des Vektors infinitesimal benachbarter Gleichgewichtslagen, $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$, so erhält man

$$\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda_S) \delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

da die beiden benachbarten Gleichgewichtslagen ja der gleichen Belastung entsprechen. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda_S)$ ist dann positiv semidefinit und somit singular. Eine notwendige und hinrei-

chende Bedingung für Gl. (3.21), das heißt für die Stabilitätsgrenze, ist das Verschwinden der Determinante von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda_S)$:

$$\det(\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda_S)) = 0. \quad (3.22)$$

$\delta \mathbf{u}$ ist der dem Nulleigenwert entsprechende Eigenvektor. Für Durchschlagen gilt wegen $d\lambda = 0$ zusätzlich

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda_S)) = -\infty. \quad (3.23)$$

Für $\lambda > \lambda_S$ ist $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ indefinit. Es können dann komplexe Eigenwerte und -vektoren auftreten, siehe [26]. Gl. (3.22) wird als Determinantenkriterium bezeichnet. Zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze muss die Determinante von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ zwecks Vermeidung von numerischen Over- und Underflows normiert werden. Die Verwendung dieses Kriteriums ist ressourcenschonend, erweist sich allerdings besonders bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden aufgrund großer Änderungen des Werts der normierten Determinante bei kleinen Änderungen des Lastparameters als fehleranfällig.

In dieser Arbeit wird der Wert für λ_S in MSC.MARC zuerst mittels einer sogenannten linearen Anfangsstabilitätsanalyse geschätzt. Dann wird eine begleitende Eigenwertanalyse durchgeführt, siehe [32]. Bei einem linearen Stabilitätsproblem ist die Anfangsstabilitätsanalyse exakt. Bei der begleitenden Eigenwertanalyse werden \mathbf{K}_U und \mathbf{K}_G linearisiert, indem Terme höherer Ordnung von \mathbf{u} unberücksichtigt bleiben. Der Eigenvektor wird daher als $\delta \mathbf{u}^{(lin)}$ bezeichnet. Im Wege der Linearisierung von \mathbf{K}_U und \mathbf{K}_G ist ein Laststeigerungsfaktor ζ zu ermitteln, der die Beziehung

$$\left(\mathbf{K}_{EL} + \zeta \left[\mathbf{K}_U^{(lin)}(\lambda) + \mathbf{K}_G^{(lin)}(\lambda) \right] \right) \delta \mathbf{u}^{(lin)} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

unter Voraussetzung von proportionaler Laststeigerung erfüllt, wobei ζ den Wert λ_S approximiert. Selbst für stark nichtlineare Last-Verschiebungspfade bzw. große Verschiebungen im Vorbeulbereich oder für den Fall stark variabler Eigenformen in diesem Bereich liefern mittels MSC.MARC durchgeführte begleitende Eigenwertanalysen bei ausreichend kleinen Inkrementen hinreichend genaue Ergebnisse. Dabei ist die Ermittlung des Laststeigerungsfaktors ${}^m\zeta$ des Inkrements m entscheidend. Er stellt eine Näherung des exakten Laststeigerungsfaktors ${}^m\zeta^*$ dar. Einsetzen von Gl. (3.18) in Gl. (3.21) und Multiplikation von λ mit ${}^m\zeta^*$ führt auf

$$\left(\mathbf{K}_{EL} + {}^m\mathbf{K}_U({}^m\zeta^* \lambda) + {}^m\mathbf{K}_G({}^m\zeta^* \lambda) \right) {}^m\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung von \mathbf{u} in \mathbf{K}_U und \mathbf{K}_G führt auf den

linearisierten Ausdruck

$$\left(\mathbf{K}_{EL} + {}^m \mathbf{K}_U^{(lin)}({}^m \zeta^* \lambda) + {}^m \mathbf{K}_G^{(lin)}({}^m \zeta^* \lambda) \right) {}^m \delta \mathbf{u}^{(lin)} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Vorziehen von ${}^m \zeta^*$ aus ${}^m \mathbf{K}_U$ bzw. ${}^m \mathbf{K}_G$ in Gl. (3.25) und Ersetzen durch ${}^m \zeta$ bedeutet eine zweite Linearisierung. Daraus folgt

$$\left(\mathbf{K}_{EL} + {}^m \zeta \left[{}^m \mathbf{K}_U^{(lin)}(\lambda) + {}^m \mathbf{K}_G^{(lin)}(\lambda) \right] \right) {}^m \delta \mathbf{u}^{(lin)} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

In Gl. (3.27) ist ${}^m \zeta$ für jedes Inkrement m zu berechnen. Die Stabilitätsgrenze folgt zu $\lambda_S = {}^m \lambda + {}^m \zeta$, wenn für das folgende Inkrement ${}^{m+1} \zeta < 0$ gilt.

Abb. (3.2) zeigt einen bestimmten Last-Verschiebungspfad mit einem Verzweigungs- und einem Durchschlagspunkt sowie mit snap-back Punkten [5], [36]. Im Punkt B tritt Gleichgewichtsverzweigung auf. Die strichlierte Kurve betrifft den Nachbeulpfad der perfekten Struktur. Die schwarze Kurve bezieht sich auf die imperfekte Struktur. Die Existenz eines Maximums dieser Kurve, dessen Wert kleiner als der von λ_B ist, weist auf Imperfektionssensitivität der Struktur hin. Im Durchschlagspunkt D ist $d\lambda/du_i = 0$. Im gegenständlichen Fall stellt er nicht die Stabilitätsgrenze dar und ist folglich nicht relevant. Die Belastung des Systems kann weg- oder kraftgesteuert erfolgen. Da von statischen Systemen ausgegangen wird, ist das durch die strichlierte horizontale Linie (d) symbolisierte dynamische Verhalten der Struktur nach dem Erreichen des Durchschlagspunkts für die vorliegende Arbeit nicht von Belang. Fehler bei der FE Rechnung, wie etwa zu große Lastschritte oder zu große Toleranzschwellen der Residuumkräfte, können anhand eines Last-Verschiebungspfades, wie er in Abb. (3.2) dargestellt ist, leicht identifiziert werden.

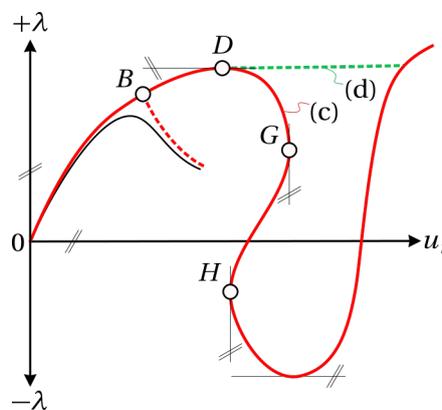


Abbildung 3.2: Last-Verschiebungspfad mit einem Verzweigungs- und einem Durchschlagspunkt sowie mit *snap-back* Punkten

Der bei Wegsteuerung nach dem Durchschlagspunkt D folgende Bereich (c) des Last-Verschiebungspfades mit den Punkten G und H , wo *snap-back* auftritt, spielt in dieser

Arbeit keine Rolle. *Snap-back* tritt etwa bei einer durch eine vertikale Kraft im Scheitelpunkt belasteten Kugelkalotte auf, siehe Abschnitt 5.3.3 und [5].

3.3.3 Grundlagen der numerischen Berechnung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$

Die numerische Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ im Rahmen der FEM und die Lösung des CLE erfolgt mit Hilfe der kommerziellen Software MSC.MENTAT [32] und ABAQUS [40] sowie mittels vom Verfasser erstellten PYTHON Routinen [33], die im Zuge des *Pre-processing* eingesetzt werden. ABAQUS dient zur Erstellung der FE Netze. Die Modellbildung für Strukturberechnungen mittels der FEM erfolgt ausschließlich mit *Lagrangeschen* Netzen. Die Eingabe von Randbedingungen, Materialparametern und der Belastung erfolgt mit Hilfe von MSC.MENTAT. PYTHON wird unter anderem dazu benutzt, um die Eingabedateien von MSC.MARC zu bearbeiten und Programmaufrufe von MSC.MARC zu automatisieren, wie dies in den Abschnitten 3.4.1 und 3.6.1 gezeigt wird.

Ein grundlegendes Erfordernis bei der Behandlung des vorliegenden Problems besteht darin, die im Rahmen der FEM entstehenden linearen Gleichungssysteme mittels kommerzieller Software zu lösen. Auf diese Weise können Systeme mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden untersucht werden. Außerdem sind verschiedene Elementtypen aus einer implementierten und ausgetesteten Bibliothek verfügbar. Weiters wird in der vorliegenden Abhandlung von in MSC.MARC implementierten Algorithmen (Solvem) [32] zur Lösung linearer Gleichungssysteme Gebrauch gemacht, siehe Abschnitt 3.3.4.

Zusätzliche relevante Entscheidungskriterien für die numerische Berechnung mit MSC.-MARC sind die Möglichkeit zur Assemblierung der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ in jedem *Newton-Raphson* Iterationsschritt und die Verfügbarkeit von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ am Ende jedes Lastschritts. Das erlaubt eine effiziente Assemblierung von Elementsteifigkeitsmatrizen mittels der kommerziellen Software. Als für die untersuchten Systeme besonders effizient erweist sich der Solver "*Multifrontal Sparse*" [32] zur parallelen und schnellen Lösung des Gleichungssystems in jedem Iterationsschritt. Er zerlegt $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ in Teilmatrizen und wählt entsprechend der Konditionierung des Gleichungssystems einen passenden direkten oder indirekten Lösungsalgorithmus. Darauf wird im Abschnitt 3.3.4 näher eingegangen. Ungeachtet dieser Zerlegung erfolgt die Ausgabe der einzelnen Zeilen und Spalten von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ in der Reihenfolge der internen Knotenpunktnummern, was das *Postprocessing* vereinfacht.

Die Kontrolle und Veranschaulichung des Verschiebungs- und Spannungszustands sowie die Überprüfung der Eigenform innerhalb des *Postprocessing* erfolgt mit Hilfe von MSC.MENTAT. Zur Lösung des CLE werden MATLAB und PYTHON eingesetzt.

3.3.4 Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ in MSC.MARC

Die Ermittlung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ zu Beginn des Inkrements m mit ${}^m\mathbf{q}(\lambda)$ als Verschiebungsvektor der Knotenpunkte erfolgt in einer Vorlaufrechnung mit Hilfe von MSC.MARC. Der Zusammenhang zwischen Vorlauf- und Nachlaufrechnung wird in diesem Kapitel später erläutert.

Zur Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ werden in MSC.MARC entweder der *Newton-Raphson* Algorithmus oder das Bogenlängenverfahren nach *Crisfield* [41] verwendet [32]. Auf den Einsatz weiterer Verfahren, die teilweise Modifikationen der beiden genannten Verfahren darstellen, wird verzichtet. Die Verfügbarkeit aller im Rahmen des jeweiligen Verfahrens abzuspeichernden Daten muss unmittelbar vor oder nach dem jeweiligen Iterationsschritt innerhalb eines Inkrements gegeben sein. Für jeden solchen Datensatz wird der dazugehörige Vektor der Knotenpunktverschiebungen, $\mathbf{q}(\lambda)$, abgespeichert und überprüft. Dadurch wird der versehentliche Aufruf einer Sekantensteifigkeitsmatrix vermieden. Auf die im Rahmen dieser Arbeit über den eigentlichen Zweck in einer FE Analyse hinausgehende Verwendung des *Newton-Raphsonverfahrens* bzw. des Bogenlängenverfahrens wird im Abschnitt 3.4.1 eingegangen.

MSC.MARC erlaubt die Ausgabe der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix in der Gleichgewichtslage durch die Option *DMIG-OUT* [42]. Dabei sind die Einträge der Matrix nach den internen Knotennummern geordnet, was mit Hilfe der sogenannten Subroutine *nodnum*, siehe [43], Ergänzungen von Randbedingungen innerhalb von MATLAB ermöglicht. Darauf und auf die Anzahl der Schreibvorgänge von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ durch *DMIG-OUT* wird in Abschnitten 3.4.1 und 3.6.1 näher eingegangen. Bei einer großen Zahl von Freiheitsgraden erweist sich die Ausnutzung der Symmetrie von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ durch *DMIG-OUT* als günstig für die Speichergeschwindigkeit (“clock-speed”) und die Rechengeschwindigkeit. Die in der verwendeten kommerziellen Software implementierten, effizienten Routinen werden auch zur Assemblierung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ aus den Elementsteifigkeitsmatrizen genutzt, um die Anzahl der Schreib- und Lesevorgänge auf der Festplatte möglichst klein zu halten. Die Subroutine *IMPD* ermöglicht den Zugriff und das Abspeichern allgemeiner Werte für jeden Knotenpunkt am Ende eines Inkrements. *IMPD* bietet verschiedene Möglichkeiten der Kontrolle der Rechnung, und zwar unter anderem der Anzahl der Elemente und Knotenpunkte, der Belastung, der Verschiebungsinkremente sowie der verwendeten Koordinatensysteme.

Vor der Berechnung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ werden $\mathbf{q}(\lambda)$ und der Lastparameter λ am Beginn jedes Inkrements sowie die Stabilitätsgrenze λ_S in der Vorlaufrechnung ermittelt. λ_S wird durch eine initiale und eine begleitende Eigenwertanalyse berechnet, siehe Abschnitt 3.3.2. Mittels des Parameters *init stress* wird im unbelasteten Zustand bei Eingabe einer Pseudolast, die das System nicht beeinflusst, $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(0)) = \tilde{\mathbf{K}}_T(0) = \mathbf{K}_{EL}$ ab-

gespeichert. Abspeichern der Verschiebungsrandbedingungen als Vektor unverschieblicher Elementsknoten erfolgt mit Hilfe der Subroutine *FORCDT* [44]. Sie wird im Allgemeinen am Ende jedes *Newton-Raphson*-Iterationsschritts innerhalb eines Inkrements für gewählte Elementsknoten aufgerufen. Bleiben die gewählten Randbedingungen bei der Laststeigerung unverändert, so wird zur Steigerung der Recheneffizienz die Subroutine *FORCDT* in einen eigenen Pseudo-Lastfall eingebettet, sodass ihr Aufruf ein einziges Mal bei $\lambda = 0$ erfolgt. Die anschließende Kontrolle des Lastparameters λ während der weiteren Analyse erweist sich als notwendig, da bei Aufruf von *FORCDT* in Inkrementen mit $\lambda > 0$ und in Verbindung mit dem Parameter *Loadcase Time* > 1 in MSC.MENTAT eine ungewollte Skalierung der abzuspeichernden Werte λ auftritt. Um die Allokation von Speicherplatz bei der Lösung des Gleichungssystems zu reduzieren, wird die Option *out-of-core* aktiviert.

Als Lösungsalgorithmus stehen in MSC.MARC direkte und iterative Methoden zur Verfügung. Im gegenständlichen Fall wird der *Multifrontal Sparse* Algorithmus gewählt, der sich besonders für reelle, symmetrische, schwach besetzte und – gezielt für Stabilitätsprobleme – schlecht konditionierte Gleichungssysteme eignet. Dabei wird innerhalb des ersten Iterationsschritts die *Cholesky*-Faktorisierung verwendet, die bei den weiteren Iterationsschritten zur Verbesserung der Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix dient. Erweist sich die Konvergenzgeschwindigkeit im Rahmen der Iteration als zu gering, so wechselt der Algorithmus zu einem direkten Lösungsverfahren. Ein solches Verfahren ist für kleine, gut konditionierte Systeme bei ausreichend vorhandenem, schnellem Speicher effizient.

Um die Vorlaufrechnung zu beschleunigen, wird ein Rechencluster mit 24 Prozessoreinheiten (*Threads*) genutzt. In MSC.MARC automatisiert die als *Domain Decomposition Method* (DDM) bezeichnete Methode die Aufteilung der einzelnen Elemente in Subsysteme, die durch das Protokoll *MPI* [32] auf einzelne Prozessoreinheiten aufgeteilt werden. Eine parallele Nutzung des allokierten Speichers durch mehrere voneinander unabhängige Gruppen finiter Elemente, allgemein als *shared memory parallel* (SMP) bekannt, beschleunigt die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und die Ermittlung der Spannungstensoren. Der verwendete Algorithmus *Multifrontal Sparse* erlaubt die Nutzung mehrerer *Threads* zur Lösung des Gleichungssystems.

Die Untersuchung von Durchschlagsproblemen erfordert verschiebungsbasierte Kriterien zur Überprüfung der Konvergenz der Lösung des linearen Gleichungssystems. In MSC.MARC wird automatisch zwischen zwei Konvergenzkriterien gewechselt, die auf relativen Toleranzen der Residuumskräfte und der Verschiebungsinkremente basieren [32]. Ein Überschreiten dieser Toleranzen oder der maximalen Anzahl von Iterationsschritten führt durch Aktivierung der Optionen *AUTO STEP* und *time step cut-backs*

zu einer Reduktion der Schrittweite $\Delta\lambda$ und zur Neuberechnung des betrachteten Inkrements. Diese Schrittweitensteuerung ist bei den in den Abschnitten 3.4.1 und 3.6.1 beschriebenen Verfahren zur Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ ebenfalls möglich.

3.4 Ableitung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix nach dem Lastparameter

3.4.1 Grundlagen der numerischen Berechnung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$

Die Ableitung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T$ nach dem dimensionslosen Lastparameter λ wird zur Lösung des CLE in Form der Ermittlung von Eigenpaaren dieses linearen Eigenwertproblems benötigt. $\tilde{\mathbf{K}}_T$ bildet für die Berechnung quadratischer und bilinearer Formen, wie etwa für die aus dem CLE folgenden zweite der beiden nachstehenden Orthogonalitätsbeziehungen für ein System mit N Freiheitsgraden,

$$\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0, \quad \mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (3.28)$$

die Grundlage. $\tilde{\mathbf{K}}_T$ stellt indirekt auch den Ausgangspunkt für die Untersuchung des Spezialfalls von Beulen aus einem Membranspannungszustand dar. Er ist bekanntlich durch die Orthogonalitätsrelation

$$\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad \mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{v}_{10}, \quad (3.29)$$

siehe Gl. (2.39), gekennzeichnet. Die Überprüfung der Richtigkeit der beiden numerisch ermittelten Ableitungen $\tilde{\mathbf{K}}_T$ bzw. $\tilde{\mathbf{K}}_T$ erfolgt nach Lösung des CLE durch Vergleich von

$$\hat{\lambda}_1^* = -(\lambda_1^* - \lambda) \frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}{\mathbf{v}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}, \quad (3.30)$$

siehe Gl. (2.53), mit der Approximation von $\hat{\lambda}_1^*$ als Differenzenquotient:

$$\hat{\lambda}_1^* \approx \frac{\lambda_1^*(\lambda + \varepsilon) - \lambda_1^*(\lambda - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \quad (3.31)$$

Die Steifigkeitsmatrix lässt sich in Abhängigkeit des Vektors der Knotenpunktverschiebungen $\mathbf{q}(\lambda)$ zu $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ ausdrücken, wobei die Tilde die Auswertung für einen Gleichgewichtszustand bezeichnet. Zur Ermittlung der Approximationen $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ bzw. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ bzw. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ dienen entweder last- oder verschiebungsbaasierte vordere Differenzenquotienten. Mit Hilfe eines Prozentsatzes ε der Schrittweite

$\Delta\lambda$ folgt die lastbasierte Approximation der ersten Ableitung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ nach λ zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda)) \approx \frac{\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \varepsilon\Delta\lambda) - \tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)}{\varepsilon\Delta\lambda} \quad (3.32)$$

und die der zweiten Ableitung $\ddot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ zu

$$\ddot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda)) \approx \frac{\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + 2\varepsilon\Delta\lambda) - 2\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \varepsilon\Delta\lambda) + \tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)}{(\varepsilon\Delta\lambda)^2}. \quad (3.33)$$

Die verschiebungsbasierte Approximation von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ folgt mit $\dot{\mathbf{q}}(\lambda) = d\mathbf{q}/d\lambda$ zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda)) = \tilde{\mathbf{K}}_{T,\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \left. \frac{\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \approx \dot{\mathbf{K}}_T = \frac{\mathbf{K}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}}) - \tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q})}{\varepsilon} \quad (3.34)$$

und die von $\ddot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ zu

$$\ddot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda)) \approx \ddot{\mathbf{K}}_T = \frac{\mathbf{K}_T(\mathbf{q} + 2\varepsilon\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon^2\ddot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{K}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}}) + \tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q})}{\varepsilon^2}. \quad (3.35)$$

Die mit den beiden beschriebenen Varianten erhaltenen Ergebnisse wurden in [11] miteinander verglichen. Am Beispiel eines in im Abschnitt 5.3.5 untersuchten Stabs wurde gezeigt, dass die Recheneffizienz bei Verwendung des verschiebungsbasierten Differenzenquotienten von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ größer ist. Weiters wurde in [13] für einen in seinem Scheitelpunkt durch eine Einzellast belasteten Kreisbogen, siehe Abb. (5.24), $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ bzw. $\ddot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ auf der Grundlage einer analytischen Formulierung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ für ein Balkenelement hergeleitet, siehe Unterkapitel 3.2. Ein Vergleich der exakten Ergebnisse für $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ mit den entsprechenden Differenzenquotienten gemäß Gl. (3.32) und Gl. (3.34), ergab eine bessere Approximation der genauen Lösung bei Anwendung des verschiebungsbasierten Differenzenquotienten. Daher wurde diesem der Vorzug gegeben.

3.4.2 Ermittlung von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ in MSC.MARC

In einer kommerziellen Software wie MSC.MARC kann man nicht auf analytische Formulierungen, wie sie in [13] verwendet werden, zurückgreifen. Die dort gewählte Strategie zur Ermittlung von $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ besteht aus einer Modifikation des *Newton-Raphson* Iterationsalgorithmus mittels in der Programmiersprache FORTRAN 77 geschriebenen Subroutinen. Gl. (3.34) verlangt eine Auswertung der Steifigkeitsmatrix sowohl für die Verschiebungen \mathbf{q} als auch für $\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}}$. Auf die Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ wurde bereits im Abschnitt 3.3.4 eingegangen. Die Ermittlung der Tangentensteifigkeit wird zuerst im Rahmen des *Newton-Raphson* Iterationsverfahrens anhand eines Freiheitsgrades vorgestellt und danach für das Bogenlängenverfahren nach *Crisfield* modifiziert.

für den ersten Iterationsschritt über die Wahl der Bogenlänge, die für diesen Freiheitsgrad in Form der Zusatzbedingung

$$l^2 = \Delta q_i \Delta q_i \quad (3.38)$$

in die Lösung des Iterationsalgorithmus eingeht. Die direkte Eingabe von $\Delta\lambda$ für ein bestimmtes Inkrement m ist nicht möglich. Der Wert $\tilde{k}_T(q_i + \varepsilon\dot{q}_i)$ des letzten Iterationsschritts ist in Abb. (3.3b) die Neigung der Tangente am Ende des betrachteten Inkrements. Bei der Untersuchung von Durchschlagsproblemen ist dieses Verfahren zur Erlangung einer verlässlichen Lösung notwendig.

Im Allgemeinen werden $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ gesondert ermittelt. In der Vorlaufrechnung, die im Abschnitt 3.3.4 näher beschrieben wird, ist zusätzlich der Vektor $\mathbf{q}(\lambda)$ als Textdatei im Format ASCII abzuspeichern.

Abb. (3.4) zeigt einen Flowchart zur verschiebungsbasierten Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars. Der Prozess der Abspeicherung von $\mathbf{q}(\lambda)$ findet in der Subroutine *UBGITR* [42] statt. Mit Hilfe der Funktion *CALL VECFTC* ist $\mathbf{q}^{(j)}(\lambda)$ auch nach jedem Iterationsschritt im jeweiligen Inkrement verfügbar. Für ein bekanntes $\Delta\lambda$ innerhalb des ersten Iterationsschritts erlaubt das die "exakte" Ermittlung von $\dot{\mathbf{q}}(\lambda)$. Die Berechnung von $\dot{\mathbf{q}}(\lambda)$ erfolgt innerhalb eines zwischengeschalteten Programms mit Hilfe von FORTRAN 90, siehe Abb. (3.4).

Zur Ermittlung von $\dot{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$ wird in MSC.MARC innerhalb einer zweiten Analyse der Parameter *RESTART* [42] verwendet, und zwar gesondert für jedes Inkrement. Der Iterationsalgorithmus wird im ausiterierten Zustand ① neu gestartet. Es ist erforderlich, jene Parameter des Iterationsalgorithmus, die durch die Option *REAUTO* [42] bei Verwendung einer automatischen Schrittweitensteuerung *AUTO LOAD* bzw. *AUTO STEP* [42] verändert werden könnten, konstant zu halten. Nur die Zahl der maximal durchzuführenden Iterationsschritte sowie die Schrittweite $\Delta\lambda$ werden modifiziert. Mit einem frei wählbaren Anfangswert für ε_1 wird, wie Abb. (3.4) zu entnehmen ist, unmittelbar vor dem ersten Iterationsschritt innerhalb eines FORTRAN 77 Programms die aufzubringende Verschiebung $\varepsilon\dot{\mathbf{q}}$ berechnet und mit Hilfe der Subroutinen *UBGITR* und *UFORMSN* [44] in das System eingebracht. Mittels der Option *REAUTO* ist die maximal erlaubte Schrittweite so zu wählen, dass die angestrebte Verschiebung innerhalb des betrachteten Inkrements stattfinden kann. Bei dem beschriebenen Verfahren werden die Optionen *TIE*, *TYING* und *TYING CHANGE* [42] in der Vorlaufrechnung, siehe Abschnitt 3.3.4, zweckentfremdet. Implementiert wurden sie ursprünglich zum Zweck der benutzerdefinierten Kopplung der Verschiebungen einzelner Knoten. Die Assemblierung nach dem ersten Iterationsschritt, siehe Abb. (3.3a), liefert $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$. Analog zu Abschnitt 3.3.4 werden durch die Option *VECFTC* [42] die Knotenpunktverschie-

bungen in jedem weiteren Iterationsschritt mit den Funktionen *dynd_d* und *dsxs_d* überprüft. Zur Speicherung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$ ist es notwendig, die Iteration vor dem zweiten Iterationsschritt vorzeitig zu beenden, da MSC.MARC die Option *DMIG-OUT* [42] nur am Ende jedes Inkrements aufruft. Aus diesem Grund ist ein Übergang zum darauf folgenden Inkrement mit einem Fehler behaftet. In Abb. (3.3) wird dies für einen Freiheitsgrad durch das Residuum $R^{(1)}$ veranschaulicht. Eine hinreichend genaue Berechnung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$ in den folgenden Inkrementen macht einen Neustart der Vorlaufrechnung mittels der Option *RESTART* für jedes Inkrement erforderlich. Zur Bestätigung eines ausreichend kleinen bzw. großen Werts von ε wird für verschiedene ε_k , $k = 1, 2, \dots, k_{max}$, das fundamentale Eigenpaar $(\lambda_{1(k)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_{1(k)}(\lambda))$, siehe Abschnitt 3.6.1, berechnet und das oben beschriebene Vorgehen für jedes Inkrement wiederholt, bis eine vorgegebene Toleranzschwelle \in

$$\left| \frac{\lambda_{1(k)} - \lambda_{1(k-1)}}{\lambda_{1(k-1)}} \right| < \in, \quad (3.39)$$

unterschritten wird. In dieser Arbeit wurde $\in = 10^{-3}$ gewählt. Die Vorgangsweise zur Ermittlung von $\mathbf{K}_T(\mathbf{q} + 2\varepsilon\dot{\mathbf{q}} + \varepsilon^2\ddot{\mathbf{q}})$ verläuft analog, wobei $\ddot{\mathbf{q}}$ mittels der FDM berechnet wird.

Zur Automatisierung des oben beschriebenen und in Abb. (5.4) illustrierten Iterationsprozesses dient ein mit MSC.MARC interagierendes Programm, das in der Programmiersprache PYTHON [33] geschrieben wurde. Zweck dieses Programms ist der Aufruf aller FORTRAN Routinen, die Herstellung der Ordner- und Dateistruktur, die Wahl von ε und die Modifikation von *input*-Dateien sowie von sukzessiven Neustarts von MSC.MARC. Ist die Berechnung für das letzte Inkrement m_{max} abgeschlossen, startet die Nachlaufrechnung, auf die später eingegangen wird.

Die beschriebene Methode führt zu einer Verlangsamung von Schreib- und Leseprozessen und damit zu einer merklichen Abnahme der Rechengeschwindigkeit. Benötigt beispielsweise eine Berechnung mit MSC.MARC ohne Subroutinen und ohne Schreibprozesse auf einem Dual-Core PC 15 Minuten, so verlängert sich die Rechenzeit durch Subroutinen und Schreibprozesse auf 4 Stunden. Die Verarbeitung von Textdateien wirkt sich in der Vorlaufrechnung vor allem im Schreibprozess speicherintensiver Größen wie $\mathbf{K}_T(\lambda)$ und $\mathbf{q}(\lambda)$ aus. $\mathbf{q}(\lambda)$ wird in diesem Zusammenhang wegen der Häufigkeit des Prozesses der Abspeicherung angeführt. Während der Neustarts müssen diese gelesen werden, und es muss für jede Änderung von ε eine Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$ abgespeichert werden. Eine Beschleunigung findet durch Nutzung der Symmetrie der Tangentensteifigkeitsmatrix im Rahmen der Option *DMIG-OUT* sowie durch Nutzung eines Rechenclusters samt dem darin eingebauten Arbeitsspeicher (RAM) statt, der schnelle Lese-

und Schreibprozesse gewährleistet.

Um die Recheneffizienz zu steigern, wird auf das Abspeichern von \mathbf{q} und auf eine explizite Berechnung von $\varepsilon\dot{\mathbf{q}}$ verzichtet. Aus Abb. (3.3) entnimmt man, dass für einen Freiheitsgrad das Aufbringen eines Verschiebungsincrements Δq_i äquivalent dem Aufbringen des Lastinkrements $\varepsilon\Delta\lambda$ für den ersten Iterationsschritt ist. Abbruch vor Beginn des zweiten Iterationsschritts liefert analog zu Abb. (3.3) die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\mathbf{q}(\lambda + \varepsilon\Delta\lambda)) = \mathbf{K}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$.

Besonders für Durchschlagsprobleme erweist sich das Bogenlängenverfahren bei den im Rahmen dieser Arbeit behandelten Beispielen als robust. Die beiden zuvor beschriebenen Vorgangsweisen zur Ermittlung von $\mathbf{K}_T(\mathbf{q} + \varepsilon\dot{\mathbf{q}})$ verlaufen analog.

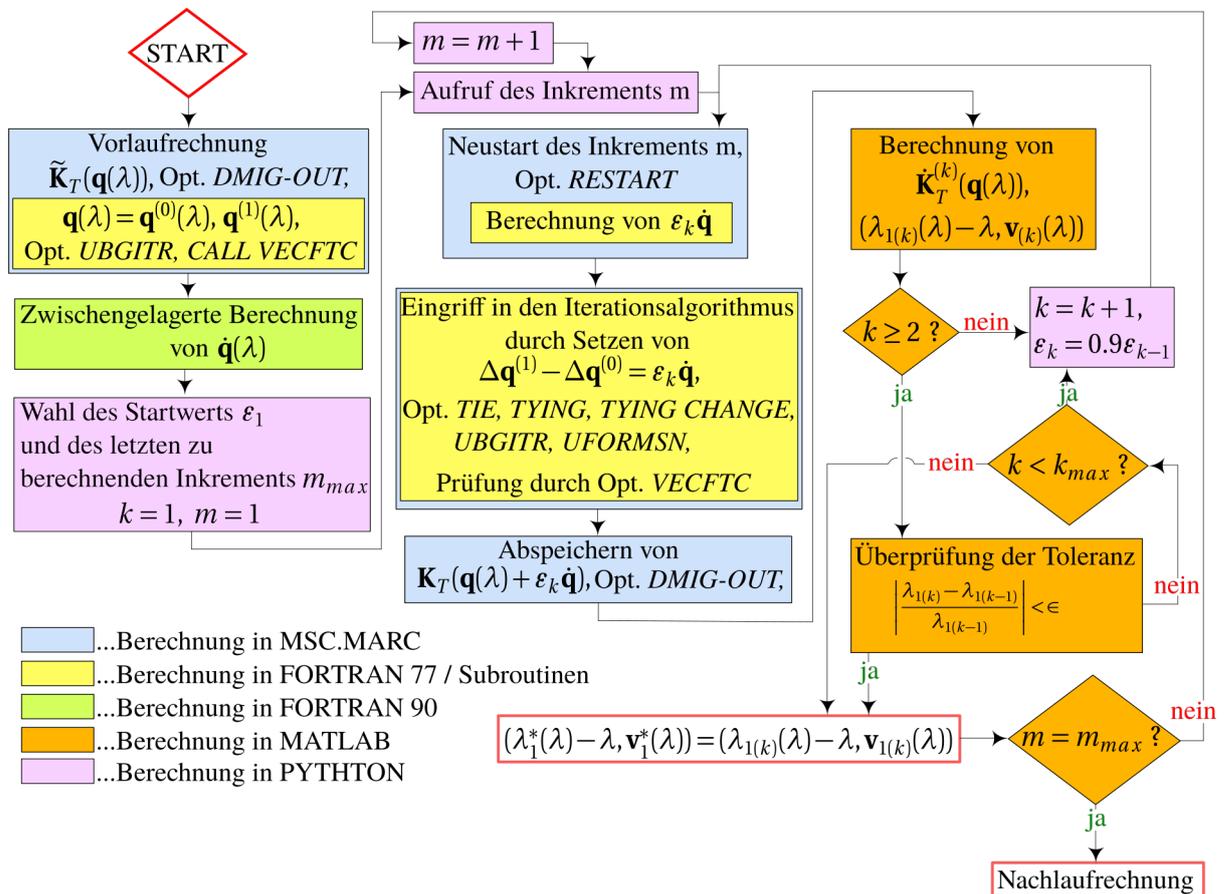


Abbildung 3.4: Flowchart zur verschiebungsbasierten Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$

Eine weitere Verringerung der Rechenzeit folgt aus der zu Gl. (3.35) alternativen Approximation von $\ddot{\mathbf{K}}_T$ mittels der FDM. Sie ist zu

$$\ddot{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda)) \approx \ddot{\mathbf{K}}_T(\lambda) = \frac{\mathbf{K}_T(\mathbf{q}(\lambda - \Delta\lambda)) - \mathbf{K}_T(\mathbf{q}(\lambda + \Delta\lambda))}{2\Delta\lambda} \quad (3.40)$$

gegeben und wird im Wege einer Nachlaufrechnung mittels MATLAB berechnet.

3.5 Numerische Lösung des CLE

3.5.1 Allgemeines und spezielles Eigenwertproblem in MATLAB

Die Lösung des (CLE) ist ein Grundelement zur Bestimmung der eingangs erwähnten Flächenkurven auf der Beulkugel. Wichtig sind dabei die Genauigkeit der Eigenvektoren sowie die zu ihrer Ermittlung benötigte Rechenzeit. Diese beiden Faktoren werden, wie sich im Laufe der numerischen Untersuchungen gezeigt hat, vor allem von der Effizienz der numerischen Lösung des CLE beeinflusst. Dabei kommt es nur auf eine relativ geringe Zahl von Eigenpaaren an.

Das allgemeine Eigenwertproblem

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{v}}_j^* = \bar{\lambda}_j^* \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{v}}_j^*, \quad (3.41)$$

wird in [39] und [45] behandelt, wobei \mathbf{A} und \mathbf{B} symmetrische Matrizen der Dimension N bezeichnen, welche die im Abschnitt 3.3.2 genannten Voraussetzungen erfüllen.

Mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (3.42)$$

kann Gl. (3.41) in die Form

$$\left(\mathbf{C} - \bar{\lambda}_j^* \cdot \mathbf{I} \right) \bar{\mathbf{v}}_j^* = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

übergeführt werden. In der numerischen Umsetzung erfolgt die Invertierung der Matrix \mathbf{B} aus Gründen der Recheneffizienz und Genauigkeit insbesondere bei schlechter Konditionierung von \mathbf{B} durch Lösung eines linearen Gleichungssystems [34]. Bei der Invertierung einer Matrix mit einer Konditionszahl von 10^{10} ist der numerische Fehler halb so groß wie bei Verwendung herkömmlicher Algorithmen [34]. Zur Lösung des CLE bietet sich somit eine Formulierung nach Gl. (3.41) an. Die Formulierung gemäß Gl. (3.43) wird zur Verifizierung dieser Lösung herangezogen.

Zwischen den Eigenvektoren des speziellen Eigenwertproblems gemäß Gl. (3.43) und jenen des Eigenwertproblems gemäß Gl. (3.41) besteht eine Beziehung, die mit Hilfe von

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-T}, \quad \hat{\bar{\mathbf{v}}}_j^* = \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{v}}_j^*, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.44)$$

zu

$$\left(\hat{\mathbf{A}} - \bar{\lambda}_j^* \cdot \mathbf{I} \right) \cdot \hat{\bar{\mathbf{v}}}_j^* = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

erhalten wird. In Gl. (3.44) kann \mathbf{S} durch Faktorisierung nach *Cholesky* oder spektrale Dekomposition, siehe [46], ermittelt werden. Bei Verwendung des *Cholesky*-Verfahrens besteht \mathbf{S} aus numerisch stark schwankenden Einträgen. $\hat{\mathbf{A}}$ wird in der Folge mit gerin-

ger Präzision berechnet. Bei Anwendung der spektralen Dekomposition in $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}$, mit $\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{D}$, muss ein Gleichungssystem mit N Unbekannten gelöst werden, um eine orthogonale Matrix \mathbf{V} mit den Eigenvektoren $\bar{\mathbf{v}}_j^*$, $j = 1, 2, \dots, N$, als Spalten und eine Diagonalmatrix \mathbf{D} mit den Elementen $\bar{\lambda}_j^*$, $j = 1, 2, \dots, N$, ermitteln zu können. Abhängig von der Größe des Gleichungssystems ist das Ergebnis der spektralen Dekomposition genauer. Die Berechnung ist jedoch rechenintensiver als die Faktorisierung nach *Cholesky*.

In Gl. (3.41) ist $\bar{\mathbf{v}}_j^*$ durch seine Richtung im N -dimensionalen Vektorraum definiert. Somit ist auch $\alpha \cdot \bar{\mathbf{v}}_j^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ein Eigenvektor von Gl. (3.41). Infolge von Gl. (3.41) gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_j^* = \bar{\lambda}_i^* \delta_{ij}, \quad \mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_j^* = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.46)$$

wobei δ_{ij} das *Kroneckersche* Symbol bezeichnet. Die Orthogonalitätsbeziehungen in Gl. (3.46) sind notwendige aber nicht hinreichende Bedingungen für Eigenvektoren. Gl. (3.46) ist auch hinreichend, falls N gleich der Dimension von \mathbf{A} ist. Die Eigenvektoren \mathbf{v}_j^* spannen einen N -dimensionalen Vektorraum auf.

Zur Lösung eines linearen Eigenwertproblems stehen direkte und iterative Methoden zur Verfügung. Direkte Lösungsverfahren basieren zumeist auf *Gaußscher* Elimination und der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer vorab bestimmbarer Zahl von Rechenoperationen. Bis auf numerische Rundungsfehler ist das Ergebnis exakt. In MATLAB löst der Solver *eig* [34] das System von N linearen Gleichungen direkt für alle Eigenpaare $(\bar{\lambda}_j^*, \bar{\mathbf{v}}_j^*)$, $j = 1, \dots, N$. Dieser Solver wird zur Verifizierung des Solvers *eigs* sowie für Systeme mit wenigen Freiheitsgraden verwendet. Viele der in MATLAB implementierten Routinen zur Lösung linearer Gleichungssysteme basieren auf frei zugänglichen Algorithmen in der Programmiersprache FORTRAN. Diese wurden ebenfalls zur Verifizierung der Lösung des linearen Eigenwertproblems herangezogen. Die gängigen direkten numerischen Lösungsverfahren bedienen sich der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms $p(\bar{\lambda}_j^*)$. Sie besteht aus einer unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} und einer oberen Dreiecksmatrix \mathbf{U} . Es ist dann $p(\bar{\lambda}_j^*) = \det(\mathbf{L}\mathbf{U})$ oder $p(\bar{\lambda}_j^*) = \det(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L})$, wobei \mathbf{D} eine Diagonalmatrix darstellt. Die Wahl zwischen diesen verschiedenen direkten Lösungsverfahren wird durch vordefinierte Algorithmen in MATLAB [34] auf Basis der Konditionszahl und anderer Eigenschaften der auftretenden Matrizen getroffen. MATLAB unterscheidet im Solver *eig* unter anderem zwischen schwach und stark besetzten Matrizen, Dreiecksmatrizen, bereits permutierten Dreiecksmatrizen, *Hermiteischen* Matrizen, *Hessenbergschen* Matrizen, Matrizen mit reellen und positiven Diagonalelementen und der Bandbreite. Je nach Typ wird der auf den bekannten *QR*-, *LU*-, *LDL*-, oder *Cholesky*-Faktorisierungen beruhende Lösungsalgorithmus gewählt. Bei der

Optimierung der Lösungsalgorithmen spielen *tridiagonal solver*, *banded solver*, *permuted triangular solver*, *diagonal solver* und *Hessenberg solver* eine entscheidende Rolle. Vom Benutzer kann bei beschränkter Rechnerkapazität durch selbst definierte MATLAB-Routinen das direkte Lösungsverfahren des Solvers *eig* [34] vermieden werden. Der Solver *eigs* ist für die iterative Lösung des Gleichungssystems mit *sparse* (schwach besetzten) Matrizen optimiert. Dieser Solver verwendet iterative Lösungsverfahren, mit denen es möglich ist, eine bestimmte Anzahl von Eigenpaaren $(\bar{\lambda}_j^*, \bar{\mathbf{v}}_j^*)$, $j = 1, \dots, k$, zu ermitteln. Er eignet sich für große, schwach besetzte und schlecht konditionierte Eigenwertprobleme.

Im Folgenden wird kurz auf die etablierten numerischen Lösungsverfahren eingegangen. Beim *Inverse Iteration* Verfahren und beim *Forward Iteration* Verfahren [47] wird im ersten Iterationsschritt ein gewählter Startvektor als Approximation von $\bar{\mathbf{v}}_j^*$ verwendet, um den kleinsten bzw. größten Eigenwert des speziellen Eigenwertproblems, siehe Gl. (3.43), zu berechnen. Die Methode des *vector shifting* und das *Rayleigh-quotient-iteration* Verfahren ermöglichen nach Umformung des Eigenwertproblems in die Form von Gl. (3.43) die Lösung für ein bestimmtes Eigenpaar. Die Kenntnis des gesamten Vektorraums ist also nicht erforderlich. Diese Verfahren basieren auf einem zu wählenden *shift* μ des Eigenwerts, der bei Berücksichtigung von Gl. (3.42) und Gl. (3.44) in Gl. (3.43) auf

$$(\mathbf{C} - \mu \cdot \mathbf{I}) \hat{\mathbf{v}}_j^* = (\bar{\lambda}_j^* - \mu) \hat{\mathbf{v}}_j^* \quad (3.47)$$

führt. $\hat{\mathbf{v}}_j^*$ konvergiert bei Anwendung des *Inverse Iteration* Verfahrens zu $\bar{\mathbf{v}}_j^*$ [47]. Weitere iterative Lösungsverfahren sind das *Gramm-Schmidt* Orthogonalisierungsverfahren und das *Conjugate Gradient* Verfahren. Eine iterative Eigenwertermittlung und Eigenvektorbestimmung ohne Überführung in die Form von Gl. (3.43) ermöglichen das allgemeine Verfahren nach *Jacobi* [47], das *Arnoldi* Verfahren und das *Lanczos* Iterationsverfahren, siehe [46] und [48].

Die Dimension der untersuchten Steifigkeitsmatrizen ist groß, und sie sind schwach besetzt. Die in MATLAB durch den Solver *eigs* für solche Eigenwertprobleme implementierte Lösungsmethode basiert auf dem *Arnoldi* Verfahren, wobei verschiedene Maßnahmen zur Vermeidung der dabei auftretenden numerischen Probleme getroffen werden [34]. Beispielsweise wird in [48] auf die Ermittlung von *cluster* von Eigenwerten eingegangen.

3.5.2 Spezialisierung des Lösungsalgorithmus für das CLE

Für das im Unterkapitel 2.1 vorgestellte CLE sollen die Eigenvektoren \mathbf{v}^* und Eigenwerte $(\lambda^* - \lambda)$ mit Hilfe des Programms MATLAB mit ausreichender Genauigkeit zur Berechnung von Ableitungen des fundamentalen Eigenvektors \mathbf{v}_1^* mit Hilfe der FDM

ermittelt werden. Da es sich bei $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T$ im Rahmen der FEM um symmetrische, reelle, große und schwach besetzte Matrizen mit Banddiagonalform handelt, wird der Solver *eigs* zur effizienten Berechnung von k Eigenpaaren $(\lambda_j^* - \lambda, \mathbf{v}_j^*)$, $j = 1, 2, \dots, k$ und der Solver *eig* zur Verifizierung dieser Eigenpaare herangezogen.

$\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ und $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ werden zu *sparse* Matrizen umgeformt, wodurch nur Elemente ungleich Null und deren Indizes gespeichert und für weitere numerische Operationen verwendet werden. Bei ihnen entfällt der Aufruf und die Bearbeitung der Nullelemente. Der Vorteil der Verwendung von *sparse* Matrizen liegt einerseits im geringen Speicherbedarf und andererseits in der Einsparung von Rechenzeit. Der Solver *eigs* erlaubt es im Gegensatz zu *eig*, die Vorteile von *sparse* Matrizen zu nutzen [34]. Mittels *eigs* wird das allgemeine Eigenwertproblem, siehe Gl. (3.41), iterativ gelöst, und es wird eine definierte Anzahl von Eigenpaaren in der Nähe eines vorgegebenen Werts ermittelt, siehe Gl. (3.47).

Das CLE, siehe Gl. (2.4), wird für das j -te Eigenpaar formuliert. Dabei bezeichnet N die Dimension von $\tilde{\mathbf{K}}_T$. Die Berechnung erfolgt für k Eigenpaare, $k \leq N$. Mit

$$\mathbf{A} = \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T, \quad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}_T, \quad \bar{\lambda}_j^* = -\frac{1}{\lambda_j^* - \lambda}, \quad \bar{\mathbf{v}}_j^* = \mathbf{v}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.48)$$

ergibt sich Gl. (3.41) zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T \mathbf{v}_j^* = -\frac{1}{\lambda_j^* - \lambda} \tilde{\mathbf{K}}_T \mathbf{v}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.49)$$

Dadurch können in *eigs* mit der Option *lm* die betragsmäßig größten Eigenwerte $\bar{\lambda}_j^*$, $j = 1, 2, \dots, n$, berechnet werden. Dabei handelt es sich um die betragsmäßig kleinsten Werte von $\lambda_j^* - \lambda$. Angabe der Symmetrie und der positiven Definität als weitere Optionen des Solvers schränken die Wahl der iterativen Lösungsverfahren des Solvers ein. Als Startvektor dient \mathbf{v}_1^* eines benachbarten Inkrements, das aus der Sortierung der Eigenpaare eines Inkrements bekannt ist. Darauf wird im Unterkapitel 4 eingegangen.

Die Inverse der Konditionszahl $1/\kappa$ von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ bzw. $\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T(\mathbf{q}(\lambda))$ wird als Indikator für die Nähe zur Singularität des Gleichungssystems herangezogen, wobei \mathbf{x} ein Einheitsvektor ist und $\kappa(\tilde{\mathbf{K}}_T)$ zu

$$\kappa(\tilde{\mathbf{K}}_T) = \frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{x}\|}{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\tilde{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{x}\|} \quad (3.50)$$

bzw. $\kappa(\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T)$ zu

$$\kappa(\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T) = \frac{\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T \cdot \mathbf{x}\|}{\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\dot{\tilde{\mathbf{K}}}_T \cdot \mathbf{x}\|} \quad (3.51)$$

gegeben ist. Für

$$\frac{1}{\kappa(\tilde{\mathbf{K}}_T)} \leq \frac{1}{\kappa(\hat{\mathbf{K}}_T)} \quad (3.52)$$

wird das spezielle lineare Eigenwertproblem gemäß der Formulierung in Gl. (3.43) unter Verwendung von Gl. (3.42) mit

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \hat{\mathbf{K}}_T, \quad \bar{\lambda}_j^* = -\frac{1}{\lambda_j^* - \lambda}, \quad \bar{\mathbf{v}}_j^* = \mathbf{v}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.53)$$

zu

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}_T^{-1} \hat{\mathbf{K}}_T - \frac{1}{\lambda_j^* - \lambda} \mathbf{I} \right) \mathbf{v}_j^* = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.54)$$

Die Lösung des speziellen Eigenwertproblems mit Hilfe des Solvers *eig* erfolgt, wie im Abschnitt 3.5.1 beschrieben, für den gesamten Vektorraum der Dimension N . Bei großen Werten von N ist es sinnvoll, $k \ll N$ Eigenpaare zu ermitteln. Die kleinsten positiven Werte λ_j^* und die dazugehörigen Eigenpaare $(\lambda_j^* - \lambda, \mathbf{v}_j^*)$, $j = 1, 2, \dots, k$, werden durch Berechnung der betragsmäßig größten Eigenwerte $\bar{\lambda}_j^*$ und Verwendung der Option *lm* erhalten. An der Stabilitätsgrenze ist der Eigenwert bekannt. In der Umgebung von λ_S erfolgt die Ermittlung des kleinsten positiven Eigenwerts durch Eingabe des Shifts $\mu = \bar{\lambda}_j^*$, siehe Gl. (3.47).

Ist

$$\frac{1}{\kappa(\tilde{\mathbf{K}}_T)} > \frac{1}{\kappa(\hat{\mathbf{K}}_T)}, \quad (3.55)$$

so folgt bei Berücksichtigung von

$$\bar{\lambda}_j^* = \lambda - \lambda_j^*, \quad \bar{\mathbf{v}}_j^* = \mathbf{v}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.56)$$

für das j -te Eigenpaar des linearen Eigenwertproblems gemäß Gl. (3.43)

$$\left(\hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_T - (\lambda - \lambda_j^*) \mathbf{I} \right) \mathbf{v}_j^* = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.57)$$

Bei Verwendung des Solvers *eigs* zur Lösung von Gl. (3.57) unter Beachtung von Gl. (3.56) ist die Berechnung für die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte $\bar{\lambda}_j^*$ mit der Option *sm* durchzuführen, um dann die kleinsten Werte λ_j^* und die entsprechenden Eigenpaare $(\lambda_j^* - \lambda, \mathbf{v}_j^*)$, $j = 1, 2, \dots, k$, ermitteln zu können.

In der vorliegenden Arbeit ist ein automatisches Auswahlverfahren in MATLAB implementiert. Basierend auf Gl. (3.52) und Gl. (3.55) wird damit die Formulierung des CLE entsprechend Gl. (3.49), Gl. (3.54) und Gl. (3.57) automatisiert. Bei großen Werten von N und Verwendung des Solvers *eigs* wird Gl. (3.49) herangezogen. Die Ermittlung von Gl. (3.50) und Gl. (3.51) ist rechenintensiv und im Bereich der Stabilitätsgrenze wegen

der Singularität von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ problematisch. Die Überprüfung von Gl. (3.52) und Gl. (3.55) geschieht durch Schätzung von κ . Das erfordert keine direkte Berechnung der Inversen von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\tilde{\mathbf{K}}_T$, worauf in [34, 49, 50, 51] näher eingegangen wird.

Zur Verbesserung der Genauigkeit der Lösung von Eigenwertproblemen wird in der Literatur die Methode des *Balancing* vorgeschlagen [52]. Die Normen der Spalten- und Zeilenvektoren von \mathbf{A} werden dabei zueinander angeglichen. Dadurch wird die Entstehung eines Rundungsfehlers während weiterer Matrixoperationen im Lösungsalgorithmus des Eigenwertproblems vermieden.

3.6 Verbesserung der Genauigkeit der numerischen Lösung des CLE

3.6.1 Approximation von λ_1^*

Bei der Lösung des CLE wird numerisches Rauschen beobachtet. Es tritt vor allem bei der Berechnung des fundamentalen Eigenpaars $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ zu Beginn der Analyse auf. Im Rahmen des im Unterkapitel 5.2 behandelten Beispiels eines I-Trägers bei Beanspruchung durch ein Biegemomentenpaar ist der entsprechende Fehler in Abb. (3.5) durch punktuelles Auftragen der Werte λ_i^* , $i = 1, 2, \dots, 20$, dargestellt. Für die Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda + \varepsilon\Delta\lambda))$, siehe Abschnitt 3.4.1, wird für alle Inkremente $m \varepsilon = 1$ und $\Delta\lambda = 0.06$ gesetzt. Die Stabilitätsgrenze tritt bei $\lambda_S = 0.53$ auf.

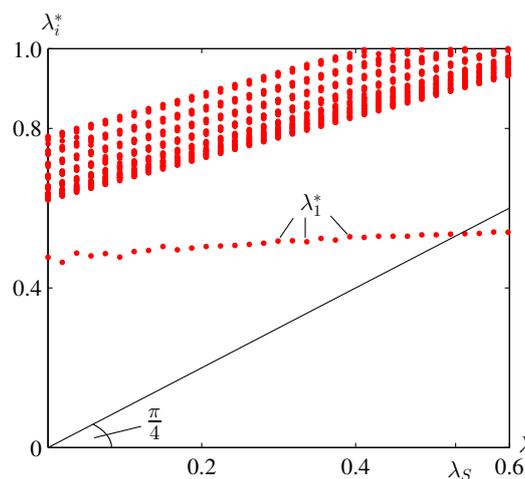


Abbildung 3.5: λ_i^* , berechnet für eine in Relation zu $\lambda_S = 0.53$ große, konstante Schrittweite von ${}^m\Delta\lambda = 0.06$ und $\varepsilon = 1$ zur Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q}(\lambda + \varepsilon\Delta\lambda))$

In Abb. (3.5) treten für $\lambda < 0.1$ Ungenauigkeiten bei der Ermittlung des kleinsten positiven Werts λ_1^* auf. Eine Regressionsanalyse würde eine schwache negative Krümmung mit horizontaler Tangente bei $\lambda_S = 0.53$ zeigen. Die Verkleinerung der Lastschritte im Rahmen der finiten Vorwärtsdifferenz auf $\varepsilon\Delta\lambda = 0.01$ ergibt Abb. (3.6a) und eine weitere Verkleinerung auf $\varepsilon\Delta\lambda = 0.003$ führt auf Abb. (3.6b).

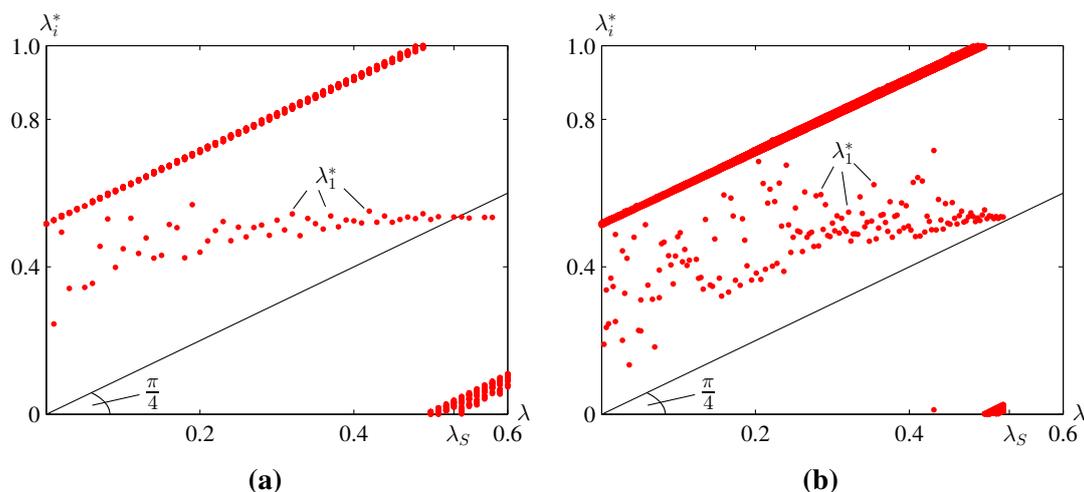


Abbildung 3.6: λ_i^* , berechnet für (a) $\epsilon \Delta \lambda = 0.01$ und (b) $\epsilon \Delta \lambda = 0.003$

Aus dem Vergleich von Abb. (3.5) mit Abb. (3.6a) und Abb. (3.6b) geht hervor, dass der numerische Fehler von der Größe von $\epsilon \Delta \lambda$ und von der Nähe zur Stabilitätsgrenze abhängt. Um die Genauigkeit des Werts λ_1^* zu verbessern, wird im Folgenden ein Verfahren zur iterativen Bestimmung des fundamentalen Eigenpaars $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ vorgestellt.

Der Fehler der Approximation dieses Eigenpaars wird zuerst für das Inkrement mit der größten Schrittweite $\Delta \lambda$ bestimmt, für das dieser Fehler im Allgemeinen am größten ist. Die Schrittweite $\Delta \lambda$ wird von MSC.MARC automatisch gewählt. Sie nimmt mit zunehmender Annäherung an die Stabilitätsgrenze ab. Daher ist es zulässig, ausreichende Genauigkeit der ersten Approximation des fundamentalen Eigenpaars vorausgesetzt, für das größte Belastungsincrement anzunehmen, dass die erste Approximation, gekennzeichnet durch $k = 0$, auch für alle übrigen Belastungsincremente ausreichend genau ist. Es reicht dann hin, die ersten Approximationen des fundamentalen Eigenpaars der jeweiligen Lastschritte als Lösung des CLE anzusehen.

Zur Fehlerabschätzung der Approximation des fundamentalen Eigenpaars für den ersten Lastschritt $\Delta \lambda_{(0)}$ werden mehrere Approximationen von λ_1^* berechnet und miteinander verglichen. Zur Ermittlung dieser Approximationen dienen Extrapolationen im Rahmen einer linearen Regressionsanalyse. Die Regressionsanalysen basieren auf $n_g - 1$ Datenpunkten $(\Delta \lambda_{(k)}/{}^m \Delta \lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n_g - 1$. $k = 0$ hängt mit der mit $\lambda_1^{*(0)}$ bezeichneten ersten Näherung von λ_1^* zusammen, für die $\Delta \lambda_{(0)} = {}^m \Delta \lambda$ gilt. Für $k = n_g$ gilt dann $\lambda_1^{*(g)}$ als durch Extrapolation erhaltene Approximation von λ_1^* für $\Delta \lambda_{(n_g)} \rightarrow 0$. g bezeichnet die Anzahl solcher Approximationen.

Diese Vorgehensweise wird anhand des im Unterkapitel 5.2 behandelten Beispiels für vier Approximationen von λ_1^* im Detail erläutert. Die Anzahl der Datenpunkte wird zu $n_1 = 5$, $n_2 = 10$, $n_3 = 15$, $n_4 = 20$ gewählt. Abb. (3.7) bezieht sich auf die zuletzt

genannte Anzahl von Datenpunkten. Sie enthält 20 Datenpunkte, die 20 verschiedene auf der FDM basierende Näherungen von λ_1^* repräsentieren, deren Berechnung im Abschnitt 3.4.1 beschrieben wurde. Die Hochzahl “(4)” in Abb. (3.7) bezieht sich auf die vierte Approximation von λ_1^* für $\Delta\lambda_{(n_4)} \rightarrow 0$. Die tiefgestellte Zahl “(19)” in Abb. (3.7) bezeichnet die größte Verkleinerung des Lastschritts. $\lambda_{1(n_4)}^{(4)}$ kennzeichnet den extrapolierten Endwert für λ_1^* , der auf der Anzahl von n_4 Datenpunkten basiert. Analog erhält man die übrigen Approximationen von λ_1^* , also $\lambda_{1(n_3)}^{(3)}$, $\lambda_{1(n_2)}^{(2)}$ und $\lambda_{1(n_1)}^{(1)}$.

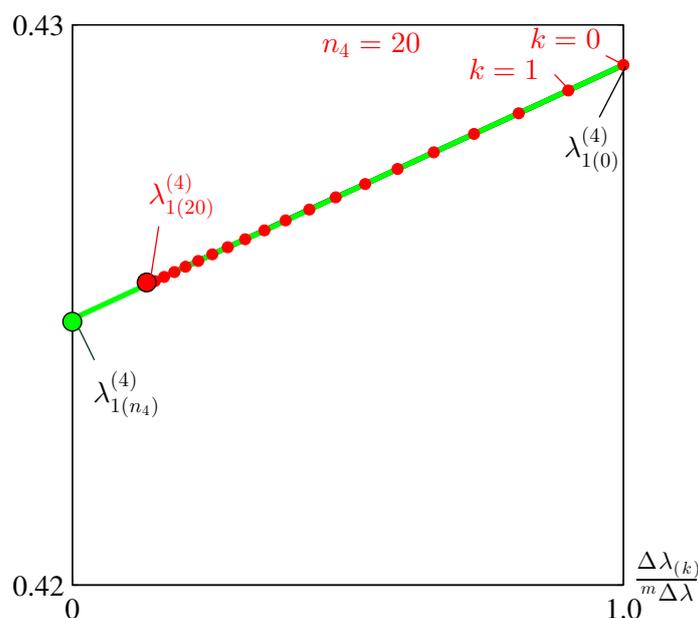


Abbildung 3.7: Extrapolierter Endwert $\lambda_{1(n_4)}^{(4)}$ als Annäherung von λ_1^* , erhalten mittels linearer Regression basierend auf $n_4 = 20$ Wertepaaren für den größten Lastschritt $m\Delta\lambda$ (Inkrement #5)

Tab. 3.1 enthält die Ergebnisse, die aus der Überprüfung der relativen Genauigkeit der extrapolierten Approximation für das Inkrement #5 und der Approximation des dazugehörigen Eigenvektors herrühren.

Tabelle 3.1: Überprüfung der relativen Genauigkeit der extrapolierten Approximation von λ_1^* für das Inkrement #5 und für die dazugehörigen Approximationen von \mathbf{v}_1^*

	g	n_g	$\frac{\lambda_1^{(g)} - \lambda_1^{(g-1)}}{\lambda_1^{(g-1)}}$	$1 - \mathbf{v}_1^{(g)} \cdot \mathbf{v}_1^{(g-1)}$
$\frac{\Delta\lambda^{(k)}}{m\Delta\lambda} = 0.9^k,$ $k = 1, 2, \dots, n_g - 1$	1	$n_1 = 5$	—	$4.956 \cdot 10^{-8}$
	2	$n_2 = 10$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	$1.717 \cdot 10^{-8}$
	3	$n_3 = 15$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$5.866 \cdot 10^{-9}$
	4	$n_4 = 20$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.923 \cdot 10^{-9}$

Die Ergebnisse in der dritten Spalte von Tab. 3.1 erfüllen die Bedingung

$$\frac{\lambda_1^{(g)} - \lambda_1^{(g-1)}}{\lambda_1^{(g-1)}} < \epsilon_1 = 10^{-4}. \quad (3.58)$$

Die Ergebnisse in der vierten Spalte von Tab. 3.1 erfüllen die Bedingung

$$1 - \mathbf{v}_1^{(g)} \mathbf{v}_1^{(g-1)} < \epsilon_2 = 10^{-5}. \quad (3.59)$$

Die für $n_2 = 10$ erhaltenen Werte werden als Lösung des CLE für das betrachtete Inkrement $\Delta\lambda$ angesehen, da die gemäß Gl. (3.58) und Gl. (3.59) ermittelten Approximationen die Toleranzschwellen ϵ_1 und ϵ_2 unterschreiten. Tab. 3.1 zeigt eine relative Verbesserung der Genauigkeit für n_3 und eine Verschlechterung für n_4 , was auf beginnendes numerisches Rauschen bei weiterer Verkleinerung des Lastschritts $\Delta\lambda_{(n_g)}$, $g \geq 4$, hinweist. Modifikationen der beschriebenen Vorgehensweise, unter anderem durch weitere Verkleinerungen des Lastschritts, erlauben die Berücksichtigung außergewöhnlicher Situationen, bei denen die vorgestellte Strategie keine ausreichende Genauigkeit gewährleistet. Das kann bei sehr kleinen Inkrementen in unmittelbarer Umgebung der Stabilitätsgrenze bei Durchschlagsproblemen erforderlich sein.

Abb. (3.8) betrifft die numerische Ermittlung von $\mathbf{K}_T^{(k)}(\mathbf{q}(\lambda))$ und $(\lambda_{1(k)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_{1(k)}(\lambda))$ für ein beliebiges Inkrement m , das durch den ersten Lastschritt $^m\Delta\lambda$ im Rahmen der Gleichgewichtsiteration gekennzeichnet ist. Zu Beginn werden die in der FE Vorlaufrechnung, siehe Abschnitt 3.3.4, berechneten Daten, darunter die in $\tilde{\mathbf{K}}_T(\mathbf{q})$ enthaltenen, geladen. In PYTHON geschriebene Routinen automatisieren die weitere Rechnung für alle angegebenen Inkremente. Wie in Abb. (3.8) dargestellt, dient PYTHON für ein einzelnes Inkrement m zur Feststellung der Anzahl n_g der maximal zu berechnenden Datenpunkte. Die erste Näherung von λ_1^* basiert auf dem Lastschritt $\Delta\lambda_{(0)}$, der gleich dem ersten Lastschritt $^m\Delta\lambda$ in der Gleichgewichtsiteration gesetzt wird. Für eine mit $n_{g,max}$ begrenzte Anzahl von Eigenpaaren $(\lambda_{1(k)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_{1(k)}(\lambda))$, $k = 1, 2, \dots, n_g$, werden $\lambda_1^{(g)}$ bzw. $\mathbf{v}_1^{(g)}$ durch entsprechende Näherungen in MATLAB approximiert. Stehen mehr als zwei solcher Approximationen zur Verfügung, werden diese miteinander verglichen und gegebenenfalls im Rahmen einer PYTHON-Routine um neue Wertepaare n_g erweitert. Der finiten Vorwärtsdifferenz des k -ten Wertepaars liegt dabei der Lastschritt $\Delta\lambda_{(k)}$ zugrunde. Dessen Größe ist im Allgemeinen um 10% kleiner als die des vorhergehenden Lastschritts $\Delta\lambda_{(k-1)}$. Werden die beiden Toleranzschwellen in Abb. (3.8) unterschritten, so folgt $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda)) \approx (\lambda_1^{(g)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^{(g)})$. Wird die maximale Anzahl von Approximationen von λ_1^* , $n_{g,max}$, überschritten, wird das fundamentale Eigenpaar $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ gleich dem in der ersten Näherung $k = 0$ erhaltenen Wertepaar $(\lambda_{1(0)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_{1(0)}(\lambda))$ gesetzt. Diese Art der Ermittlung des Eigenpaars kommt in der

Nähe von Stabilitätsgrenzen zum Tragen. Die Vergrößerung der Inkremente innerhalb der FE Vorlaufrechnung beeinflusst dieses Verhalten.

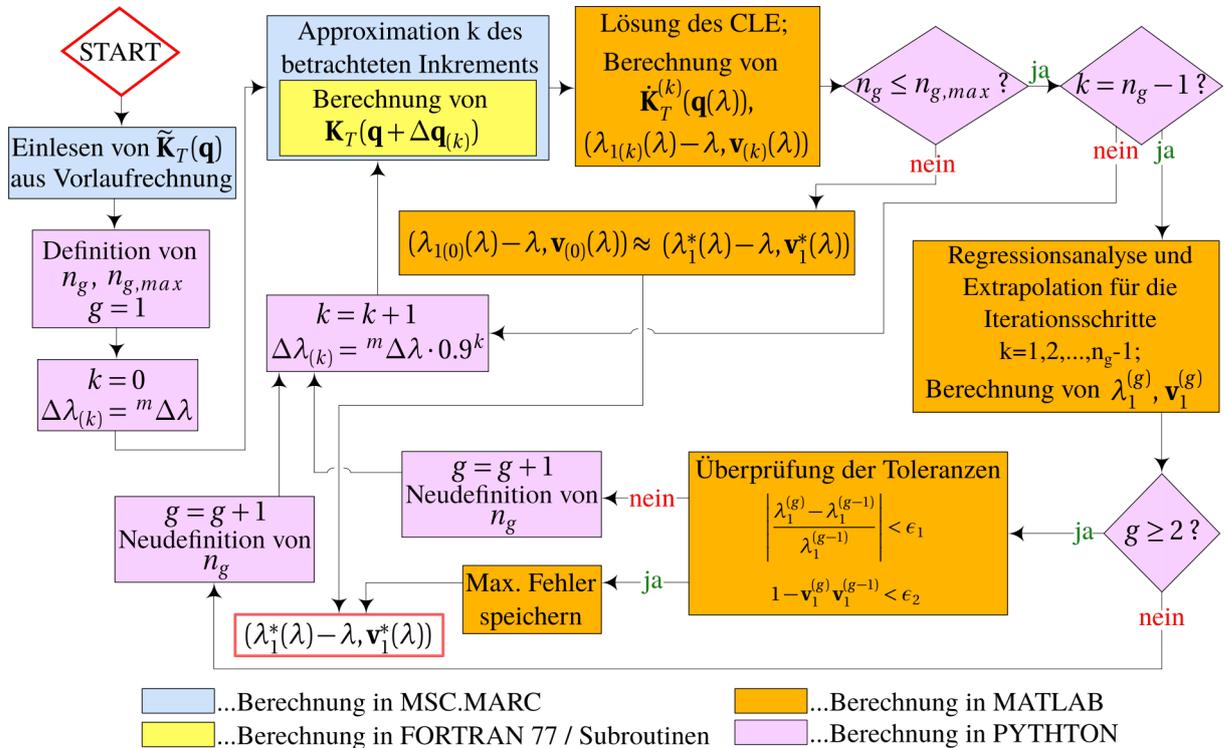


Abbildung 3.8: Flowchart zur numerischen Bestimmung des fundamentalen Eigenpaars für ein beliebiges Inkrement m

3.6.2 Minimierung des Rundungsfehlers

Ermittlung des numerischen Fehlers

Abb. (3.5), Abb. (3.6a) und Abb. (3.6b) im Abschnitt 3.6.1 betrafen einen I-Träger unter Momentenbeanspruchung, siehe Unterkapitel 5.2. Sie zeigten numerisches Rauschen des fundamentalen Eigenwerts $\lambda_1^* - \lambda$. Anwendung des im Abschnitt 3.6.1 vorgestellten Verfahrens, das auf einer linearen Regressionsanalyse beruht, erweist sich als speicher- und rechenintensiv. Es muss jede Matrizen- und Vektoroperation während der Nachlaufrechnung für die jeweilige Approximation $\lambda_1^{(g)}$ durchgeführt und das Ergebnis muss abgespeichert werden. Die darauf folgende lineare Regressionsanalyse ist in einem getrennten Schritt mit skalaren Größen durchzuführen.

In diesem Abschnitt wird die Ursache des numerischen Rauschens von $\lambda_1^* - \lambda$ untersucht. Ferner wird eine Vorgehensweise zur Abhilfe eines numerischen Problems vorgestellt. In der Literatur, siehe [53], [54] und [55], werden verschiedene Methoden zur Abschätzung von Fehlerschranken bei numerischer Differentiation angegeben, die bei der Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ verwendet wurden. Dabei zielen zwei Methoden auf die Verringerung des numerischen Rundungsfehlers ab. Eine Methode ist durch die Formulierung

eines Interpolationspolynoms für die betrachteten numerischen Werte gekennzeichnet. Ein Merkmal der zweiten Methode ist die Überführung von Gleitkommazahlen in rationale Zahlen. Beide Vorgehensweisen sind bei der Differentiation von zwei Matrizen auf jedes Matrixelement anzuwenden. Solche sich wiederholende Operationen beanspruchen lange Rechenzeiten. Bei der ersten Methode ist die Genauigkeit des erhaltenen Interpolationspolynoms schwer überprüfbar.

Die Lösung des CLE wird neben den in MATLAB implementierten Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme *eig* und *eigs* von den Matrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\check{\mathbf{K}}_T$ beeinflusst. Beide Lösungsalgorithmen wurden in MATLAB unabhängig voneinander verwendet und miteinander verglichen. Verschiedene Spezifikationen im Gleichungslöser wurden untersucht. Modifikationen der Algorithmen ergaben keine Verbesserungen. Nach Bestätigung der korrekten Funktionsweise der Gleichungslöser lag der Fokus der Untersuchung auf $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und der Ermittlung von $\check{\mathbf{K}}_T$.

Rechenoperationen erfolgen in MSC.MARC im sogenannten *double-precision-mode* [32]. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ wird durch die Option *DMIG-OUT* standardmäßig im *single-precision-mode* als Textdatei abgespeichert. Im *double-precision-mode* erfolgen numerische Rechenoperationen mit 16 Nachkommastellen, im *single-precision-mode* nur mit acht Nachkommastellen. Bei Ermittlung von $\check{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ im Abschnitt 3.4.1 wird die Differenz von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\lambda)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ gebildet. Unter der Annahme, dass die Anzahl der abgespeicherten Nachkommastellen in den Elementen von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ zur Ermittlung der fundamentalen Eigenform eines Stabilitätsproblems ausreichen, bedeutet das nicht notwendigerweise die Verfügbarkeit einer ausreichend großen Anzahl von Nachkommastellen zur Bildung der Differenz zweier Matrizen. Das lässt sich beispielsweise für eine Perturbation der Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$ für verschiedene Werte von $\Delta\tilde{\lambda}$ zeigen. Die mit Hilfe von Gl. (3.32) erhaltenen Werte von $\lambda_1^*(\lambda, \Delta\tilde{\lambda})$ für $\Delta\tilde{\lambda} = \varepsilon\Delta\lambda = 0.06$ sind in Abb. (3.5), die für $\Delta\tilde{\lambda} = 0.01$ in Abb. (3.6a) und die für $\Delta\tilde{\lambda} = 0.003$ in Abb. (3.6b) dargestellt.

Bei Verkleinerung von $\Delta\tilde{\lambda}$ von 0.06 auf 0.01 setzt numerisches Rauschen von $\lambda_1^*(\lambda)$ ein. Im Folgenden wird $\check{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$ für $\Delta\tilde{\lambda} \geq 0.01$ genauer untersucht. Für einzelne Inkremente m und für verschiedene $\Delta\tilde{\lambda}$ sind $\lambda_1^*(\lambda)$ und die Konditionszahl $\kappa(\check{\mathbf{K}}_T)$ der Matrix $\check{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$, die gemäß Gl. (3.32) ermittelt wird, in der nachstehenden Tabelle eingetragen. Tab. 3.2 zeigt größere Konditionszahlen $\kappa(\check{\mathbf{K}}_T)$ bei größeren Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$. Das bedeutet eine numerisch stabilere Lösung des CLE, wie bereits im Abschnitt 3.5.2 dargelegt wurde. Die Abkürzung “n/a“ von “not available“ bedeutet, dass $\lambda_1^*(\lambda)$ aufgrund der schlechten Konditionierung nicht ermittelt werden kann. Numerisch instabiles Verhalten ist nach Tab. 3.2 vor allem am Anfang der Analyse für $\Delta\tilde{\lambda} < 0.04$ zu erwarten.

Tabelle 3.2: $\lambda_1^*(\lambda)$ und $\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$ der Matrix $\dot{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$

	$\Delta\tilde{\lambda}$	0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$
Inkrement	1	n/a	$6.0 \cdot 10^{-13}$	0.5750	$5.50 \cdot 10^{-13}$	0.4942	$6.28 \cdot 10^{-12}$
	2	0.4796	$2.3 \cdot 10^{-12}$	0.5077	$1.78 \cdot 10^{-11}$	0.5169	$2.17 \cdot 10^{-11}$
	3	0.9668	$1.7 \cdot 10^{-11}$	0.6002	$1.44 \cdot 10^{-11}$	0.557	$7.43 \cdot 10^{-11}$
	4	0.6526	$5.5 \cdot 10^{-13}$	0.7378	$2.46 \cdot 10^{-11}$	0.5077	$1.35 \cdot 10^{-10}$
	5	n/a	$2.4 \cdot 10^{-11}$	0.7212	$3.21 \cdot 10^{-11}$	0.5435	$6.58 \cdot 10^{-11}$
	38	0.7011	$5.8 \cdot 10^{-10}$	0.5962	$7.69 \cdot 10^{-10}$	0.5615	$7.50 \cdot 10^{-10}$
	40	0.6613	$5.3 \cdot 10^{-10}$	0.5925	$7.18 \cdot 10^{-10}$	0.5650	$7.35 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5988	$8.4 \cdot 10^{-10}$	0.5535	$7.49 \cdot 10^{-10}$	0.5464	$8.94 \cdot 10^{-10}$
	$\Delta\tilde{\lambda}$	0.08		0.16			
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$		
Inkrement	1	0.4730	$7.31 \cdot 10^{-11}$	0.4648	$1.28 \cdot 10^{-10}$		
	2	0.4657	$1.12 \cdot 10^{-10}$	0.4661	$1.70 \cdot 10^{-10}$		
	3	0.4905	$1.10 \cdot 10^{-10}$	0.4843	$1.94 \cdot 10^{-10}$		
	4	0.4851	$1.51 \cdot 10^{-10}$	0.4786	$2.05 \cdot 10^{-10}$		
	5	0.5112	$1.30 \cdot 10^{-10}$	0.4931	$2.25 \cdot 10^{-10}$		
	38	0.5485	$7.88 \cdot 10^{-10}$	0.5449	$8.34 \cdot 10^{-10}$		
	40	0.5449	$7.72 \cdot 10^{-10}$	0.5439	$8.65 \cdot 10^{-10}$		
	50	0.5402	$4.87 \cdot 10^{-10}$	0.5399	$7.72 \cdot 10^{-10}$		

Die Konditionszahlen und deren Interpretation decken sich mit der vorangegangenen Ermittlung von $\lambda_1^*(\lambda)$ in Abb. (3.5) und Abb. (3.6a). Mit steigendem $\Delta\tilde{\lambda}$ verändert sich $\lambda_1^*(\lambda)$ um 10%, ausgehend von $\Delta\tilde{\lambda} = 0.01$. Aus Tab. 3.2 folgt die Notwendigkeit einer Verbesserung der numerischen Genauigkeit der Resultate für das fundamentale Eigenpaar. Nachstehend wird auf den Prozess der Abspeicherung und numerischen Verarbeitung von Zahlenwerten eingegangen. Diese Bestandteile der numerischen Analyse bilden die Grundlage für eine Verbesserung der numerischen Genauigkeit.

Maschinenpräzision

Für jedes reelle Zahlenpaar gibt es unendlich viele dazwischen liegende reelle Zahlen. Die numerische Repräsentation einer reellen Zahl ist im Gegensatz dazu immer endlich, diskret und beschränkt. Daraus folgt, dass jede reelle Zahl auf einem Computer nur

approximiert werden kann.

Durch Fließkommadarstellung werden reelle Zahlen in MATLAB als

$$s | e_{E-1} e_{E-2} \dots e_0 | d_{M-1} d_{M-2} \dots d_0 \hat{=} (-1)^s \cdot d \cdot 2^e$$

$$d = 1 + \sum_{i=0}^{M-1} d_i \cdot 2^{i-M} \quad e = \sum_{j=0}^{E-1} (e_j \cdot 2^j) - B \quad (3.60)$$

dargestellt, wobei s, e und d aus 0 oder 1 bestehende *Boolsche* Zahlen sind. Sie enthalten die erforderliche Information über das Vorzeichen (s), den Exponentialwert (e) und die Mantisse (d). M repräsentiert die Länge der Mantisse, E die Länge des Exponentialwerts und B den sogenannten *Bias*. B wird entsprechend dem internationalen *IEEE* Standard definiert. Er dient dazu, durch eine definierte Anzahl von Zahlen im Vorkomabereich die Exponentialdarstellung in einen sinnvollen Bereich zu verschieben. Laut *IEEE* Standard für 64 Bit *double-precision* gilt $M = 52$, $E = 11$ und $B = 1023$. Dadurch ist der maximale Speicherplatz, der für eine reelle Zahl zur Verfügung steht, in Form von Gl. (3.60) beschränkt. Der maximal mögliche relative numerische Fehler eps für die Fließkommadarstellung ergibt sich zu $eps = 2^{-(M+1)} = 2^{-53} \approx 10^{-16}$.

Anhand eines Beispiels wird in [53] der numerische Fehler einer Additionsoperation für Zahlen im *single-precision mode* veranschaulicht. Es sei

$$a := 2.3371258 \cdot 10^{-5}, \quad b := 3.3678429 \cdot 10^1, \quad c := -3.3677711 \cdot 10^1. \quad (3.61)$$

Die Operation $a + (b + c)$ im *single-precision mode* führt auf einen numerischen Fehler von $5.78 \cdot 10^{-4}$, wobei das Zeichen $+$ für eine Berechnung mit einer begrenzten Anzahl von Nachkommastellen steht und somit eine Approximation der exakten Addition darstellt. Diese Approximation kommt durch die künstliche Beschränkung auf acht Ziffern während des numerischen Rechenprozesses zustande.

Da die FDM in dieser Arbeit häufig verwendet wird, wozu der Differenzenoperator “ $-$ ” benötigt wird, wird obiges Beispiel zur Feststellung der Genauigkeit im *single-precision mode* für eine Subtraktion wiederholt. Es soll die Entstehung des numerischen Fehlers für eine achtstellige Zahl näher untersucht werden. Eine solche Zahl entspricht dem von MSC.MARC standardmäßig implementierten Format der abgespeicherten Elemente der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$, siehe Abschnitt 3.3.1. Mit a, b und c gemäß Gl. (3.61) unter Berücksichtigung von 16 Nachkommastellen erhält man das numerisch exakte Ergebnis o für die nachstehende Differenz zu

$$o = a - b - c = -6.9462874 \cdot 10^{-4}. \quad (3.62)$$

Analog zum vorstehenden Beispiel wird der Operator $-$ für eine Subtraktion mit ei-

ner begrenzten Anzahl von Nachkommastellen verwendet. Bei Beschränkung auf acht Nachkommastellen wird die Differenz o aus Gl. (3.62) zu \tilde{o} . \tilde{o} ergibt sich zu

$$\tilde{o} = a - b - c = -3.3678406 \cdot 10^1 - (-3.3677711 \cdot 10^1) = -6.9500000 \cdot 10^{-4}. \quad (3.63)$$

Der relative Fehler ε folgt zu

$$\varepsilon = \frac{o - \tilde{o}}{o} = 5.3447256 \cdot 10^{-4}. \quad (3.64)$$

In Gl. (3.63) ist der relative Fehler ε von einer ähnlichen Größenordnung wie derjenige, der bei der Operation $+$ auftritt. Der Operator $+$ bezeichnet dabei eine auf acht Nachkommastellen begrenzte Additionsoperation. Dieser numerische Fehler ist größer als die sogenannte Maschinenpräzision *eps*. Das vorliegende Beispiel zeigt auf, dass die Subtraktion zweier großer, nur wenig verschiedener numerischer Werte zum Verschwinden von Ziffern im Nachkommabereich führt.

Eine Quantifizierung des numerischen Fehlers ε bei der numerisch exakten Subtraktionsoperation “-” erfolgt durch Zurückrechnen eines Vergrößerungsfaktors w [53]. Ein Rechenalgorithmus zur Bestimmung von \tilde{o} heißt akzeptabel, wenn das Resultat auch bei einer kleinen Perturbation exakt bleibt. Der Term “exakt” bezeichnet dabei ein Unterschreiten der gewählten Toleranzschwelle $C \cdot \text{eps}$. Dabei wird das numerisch exakte Ergebnis o_2 der Subtraktion $(a - b - c)$ mit dem Ergebnis der Subtraktion \tilde{o}_2 , das aus der Berücksichtigung von acht Nachkommastellen resultiert, verglichen. Die Berücksichtigung von acht Nachkommastellen führt auf numerische Rundungsfehler, die sich in kleinen Werten von ϵ_1 und ϵ_2 manifestieren. Somit lassen sich \tilde{o}_1 und \tilde{o}_2 in Abhängigkeit vom numerisch exakten Ergebnis durch

$$\begin{aligned} \tilde{o}_1 &= (a - b) \cdot (1 + \epsilon_1), \\ \tilde{o}_2 &= (\tilde{o}_1 - c) \cdot (1 + \epsilon_2) = \\ &= [(a - b) \cdot (1 + \epsilon_1) - c] \cdot (1 + \epsilon_2) \\ &= (a - b - c) \cdot \left(1 + \frac{a - b}{a - b - c} \cdot \epsilon_1\right) \cdot (1 + \epsilon_2) \\ &= (a - b - c) \cdot \left[1 + \frac{a - b}{a - b - c} \cdot \epsilon_1 \cdot (1 + \epsilon_2) + \epsilon_2\right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

ausdrücken. Dabei geht der Vergrößerungsfaktor w in den Ausdruck für den numerischen Fehler ein. Abhängig vom exakten Ergebnis o_2 gilt für den Subtraktionsalgorithmus

$$f(\tilde{x}) = \frac{\tilde{o}_2 - o_2}{o_2} = w \cdot \epsilon_1 \cdot (1 + \epsilon_2) + \epsilon_2, \quad w = \frac{a - b}{a - b - c}. \quad (3.66)$$

Gl. (3.65) zeigt beispielhaft, wie die Approximation des numerisch exakten Ergebnisses,

\tilde{x} , vom numerisch exakten Ergebnis x abhängt. Es gilt also $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$. Die numerische Genauigkeit einer Subtraktion wird in Abhängigkeit der Maschinenpräzision eps durch

$$|x - \tilde{x}| \leq C \cdot eps, \quad \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \leq C \cdot eps, \quad (3.67)$$

eingeschränkt, wobei C eine benutzerdefinierte Konstante darstellt, welche die benötigte numerische Genauigkeit widerspiegelt und gleich dem Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (3.66) ist. Ist die Beziehung (3.67) erfüllt, heißt der Algorithmus akzeptabel.

Ein Rechenalgorithmus $f(\tilde{x}(x))$ heißt stabil, wenn er akzeptable Ergebnisse für alle zulässigen Eingangswerte in der Größenordnung von eps liefert, wenn also

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq C \cdot eps, \quad \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \leq C \cdot eps \quad (3.68)$$

gilt, wobei $f(x)$ einen numerisch exakten Rechenalgorithmus bezeichnet.

Ziffern, die durch numerische Rundung eliminiert werden, haben einen bedeutenderen Einfluss auf die numerische Genauigkeit als Ziffern, die durch Rundung vernachlässigt werden [53]. Dieser Einfluss wird durch die sogenannte Problemsensitivität erfasst, die mittels der Konditionszahl gemessen werden kann. Wie im Abschnitt 3.5.1 erwähnt, gibt sie die Sensitivität eines Gleichungssystems bezüglich kleiner Störungen an. Für ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem ist die Konditionszahl nahe bei Null. Bei dem im Abschnitt 3.6.2 behandelten Beispiels eines I-Trägers unter reiner Momentenbeanspruchung beträgt sie $2 \cdot 10^{-13}$ am Anfang der Analyse, was auf eine große Problemsensitivität hinweist. Eine große Problemsensitivität, kombiniert mit einer niedrigen Stabilität des Rechenalgorithmus, führt zu einer ungenauen Lösung.

Zur Berechnung von $\dot{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ wird die FDM verwendet. Bei der Subtraktion im Ausdruck für die finite Differenz entsteht ein numerischer Fehler. Darauf bezog sich die das vorangegangene Beispiel betreffende Tab. 3.2. Dieser sogenannte Eliminationsfehler kommt durch Wegfall der nicht repräsentierbaren Ziffern in den Elementen der Matrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\lambda)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ zustande. Bei Division durch einen kleinen Lastschritt $\Delta\lambda$, wird dieser Fehler vergrößert, siehe Gl. (3.32), wobei eine ‘‘Verschiebung’’ der fehlerbehafteten Stellen der Zahl nach vorne erfolgt.

Die Stabilität des Algorithmus wird durch Anbringen kleiner Störungen von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$ und $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ unter Verwendung der Gln. (3.67) und (3.68) untersucht. Dabei wird die Konditionszahl $\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T)$ als Messparameter des Einflusses einer Störung auf den Wert $\lambda_1^*(\lambda)$ angesehen. Die kleinen Störungen werden in Form einer Matrix \mathbf{P} zu $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda})$ bzw. $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ addiert. Sie müssen von geeigneter Größenordnung sein. Darauf wird im

Folgenden eingegangen. Für die Berechnung von MSC.MARC werden Zahlen mit acht Nachkommastellen eingelesen. Wie im vorstehenden Beispiel gezeigt, kann bei Subtraktion zweier großer und wenig verschiedener Zahlen ein numerischer Fehler der Größenordnung $1 \cdot 10^{-4}$ auftreten. Diese Größenordnung der Präzision des Subtraktionsoperators “–” bildet für die Matrixelemente der aufgebrauchten Perturbationen \mathbf{P} eine obere Schranke. Die untere Schranke ergibt sich aus der Maschinenpräzision *eps*. Es ist zu erwarten, dass sich die Konditionszahl mit wachsenden Störungen nur wenig ändert, während der Wert $\lambda_1^*(\lambda)$ jedoch größeren Schwankungen unterliegt.

Im Folgenden werden vier verschiedene Störungen \mathbf{P}_k , also $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$, untersucht. Es handelt sich dabei um Matrizen, die nur Einträge $p_k(i, j)$ enthalten, wobei i die Zeile und j die Spalte des Matrixelements ($i, j \neq 0$ der Matrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\lambda)$ und $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ bezeichnet. Ist M der Exponent dieses Matrixelements, (i, j), wird die Störung $p_k(i, j)$ zu 10^{M-9+k} gewählt, wobei $k = 1, 2, 3, 4$ ist. Somit ändert die Störungsmatrix \mathbf{P}_1 die achte und letzte Nachkommastelle der Tangentensteifigkeitsmatrix, die von MSC.MARC im Ausgabeformat *single-precision* abgespeichert wird. $k = 1$ entspricht der kleinsten für die Lösung des CLE relevanten Störung. Für alle Matrixelemente ($i, j \neq 0$ der Matrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T$ ergeben sich damit die Matrixelemente $p_k(i, j)$ der Störungsmatrix \mathbf{P}_k zu

$$p_k(i, j) = 10^{M(i,j)-9+k}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.69)$$

Im CLE wird $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ durch

$$\mathbf{K}_{Tk}^\diamond(\lambda) = \tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) + \mathbf{P}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.70)$$

ersetzt. Es ist also das lineare Eigenwertproblem

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda) - (\lambda^* - \lambda) \mathbf{K}_{Tk}^\diamond(\lambda) \right] \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

zu lösen, wobei $(\lambda^* - \lambda, \mathbf{v}^*)$ Eigenpaare bezeichnet, die mit verschiedenen Matrizen \mathbf{K}_{Tk}^\diamond berechnet werden. Der Index k wird im Folgenden unterdrückt. Tab. 3.3 enthält $\lambda_1^*(\lambda)$ und $\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$ für verschieden große Lastschritte $\Delta\tilde{\lambda}$ innerhalb verschiedener Inkremente. Analog zu Tab. 3.3 sind $\lambda_1^*(\lambda)$ und die dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\mathbf{K}_{T1}^\diamond)$ der Matrix $\mathbf{K}_{T1}^\diamond = \tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_1$ für $\Delta\tilde{\lambda} = 0.08$ sowie $\Delta\tilde{\lambda} = 0.16$ im Anhang A in Tab. A.1 angeführt. Für $k = 2, 3, 4$ sind diese Werte in Tab. A.2, Tab. A.3 und Tab. A.4 enthalten. Tab. 3.3 zeigt durch Vergleich von $\lambda_1^*(\lambda)$ und $\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$ mit den entsprechenden Werten in Tab. 3.2 den Einfluss der Störungsmatrix \mathbf{P}_1 auf die Lösung des CLE und auf die achte Stelle der Matrixelemente (i, j) von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$. Dieser Einfluss ist sowohl bei kleinen Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda} = 0.01$ als auch bei größeren Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda} = 0.04$ gegeben.

Tabelle 3.3: $\lambda_1^*(\lambda)$ und dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$ der Matrix $\mathbf{K}_{T1}^\diamond = \mathbf{K}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_1$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$ innerhalb verschiedener Inkremente

	$\Delta\tilde{\lambda}$	0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$
Inkrement	1	0.6533	$5.99 \cdot 10^{-13}$	0.5750	$5.70 \cdot 10^{-13}$	0.4943	$7.10 \cdot 10^{-12}$
	2	0.4796	$2.31 \cdot 10^{-12}$	0.5077	$1.78 \cdot 10^{-11}$	0.5169	$2.17 \cdot 10^{-11}$
	3	0.9669	$1.66 \cdot 10^{-11}$	0.6002	$1.44 \cdot 10^{-11}$	0.5571	$7.43 \cdot 10^{-11}$
	4	0.6526	$5.52 \cdot 10^{-13}$	0.7378	$2.46 \cdot 10^{-11}$	0.5077	$1.37 \cdot 10^{-10}$
	5	n/a	$2.38 \cdot 10^{-11}$	0.7212	$3.20 \cdot 10^{-11}$	0.5435	$6.58 \cdot 10^{-11}$
	38	0.7011	$5.81 \cdot 10^{-10}$	0.5962	$7.69 \cdot 10^{-10}$	0.5615	$7.49 \cdot 10^{-10}$
	40	0.6613	$5.34 \cdot 10^{-10}$	0.5926	$7.18 \cdot 10^{-10}$	0.5650	$7.35 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5988	$8.37 \cdot 10^{-10}$	0.5535	$7.50 \cdot 10^{-10}$	0.5464	$8.94 \cdot 10^{-10}$

Ein Vergleich von Tab. 3.3 mit Tab. A.1 - A.4 zeigt, dass sich die Konditionszahl durch Addition der Störungsmatrix \mathbf{P}_k , $k = 1, 2, 3, 4$, nur wenig ändert. Somit hat \mathbf{P}_k einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Singularität der Gleichungssysteme an der Stabilitätsgrenze und auf Probleme, die bei der Lösung linearer Eigenwertprobleme mittels der in MATLAB implementierten Lösungsalgorithmen auftreten. Eine Störung von $\mathbf{K}_T(\lambda)$ wirkt sich auf $\lambda_1^*(\lambda)$ umso stärker aus, je kleiner die Schrittweite $\Delta\tilde{\lambda}$ ist. Dabei ist die schlechte Konditionierung der Matrix \mathbf{K}_T besonders bei kleinen Schrittweiten zu beachten, siehe Tab. 3.2. Wie erwartet, nimmt einerseits die Anzahl der nicht berechenbaren Werte von $\lambda_1^*(\lambda)$ ("n/a") sowie die Abweichung von den Werten $\lambda_1^*(\lambda)$ in Tab. 3.2 mit wachsendem k zu. Besonders markiert $k = 4$ den Grenzbereich zwischen einem gerade noch akzeptablen und einem inakzeptablen Ergebnis für $\lambda_1^*(\lambda)$. Zusammengefasst bedeutet dies, dass infolge der Vernachlässigung der letzten vier Ziffern im Modus *single-precision*, der in Tab. 3.3 mit "n/a" überschriebene Wert nicht berechnet werden kann. Weiters weichen die berechenbaren Werte $\lambda_1^*(\lambda)$ bei Vernachlässigung der letzten vier standardmäßig verfügbaren Ziffern von denen in Tab. 3.2 stark ab. Das lässt darauf schließen, dass der numerische Fehler von Subtraktionsoperationen mit der Anzahl der vernachlässigten Nachkommastellen zunimmt. Gleichwohl werden beim Speichern im Modus *single-precision* ebenfalls Nachkommastellen vernachlässigt. Umgekehrt folgt daraus, dass eine Erhöhung der numerischen Genauigkeit ausschließlich von der Berücksichtigung zusätzlicher Ziffern im Nachkommastellenbereich abhängt.

Anhand eines durch Biegemomente an beiden Enden belasteten Stabs, siehe Abb. (5.4), wird die oben beschriebene Ursache des numerischen Genauigkeitsverlusts überprüft. Obwohl es sich grundsätzlich um ein nichtlineares Stabilitätsproblem handelt, nimmt etwa die Vertikalverschiebung in der Mitte der Stabachse praktisch linear mit der Bela-

stung zu. Einzelne Matrixelemente $k_T(\lambda)$ der Zeile r und der Spalte c in der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ werden für verschiedene Werte von λ miteinander verglichen. In Tab. 3.4 und Tab. 3.5 sind die Werte von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ für verschiedene Matrixelemente für $\lambda = 0.00$ und $\lambda = 0.01$ sowie deren Differenz für $\lambda = 0.05$ und $\lambda = 0.09$ eingetragen. Die Matrixelemente $k_T(0) \neq 0$ in der ersten Spalte der Tab. 3.4 hängen offensichtlich von der Tangentensteifigkeit für $\lambda = 0$, \mathbf{K}_{EL} , ab. Die Werte in den ersten drei Zeilen in Tab. 3.4 ergeben sich für $\lambda = 0$ zu Null. Für $\lambda > 0$ beschreiben die entsprechenden Werte den Einfluss des aktuellen Spannungs- und Verschiebungszustands sowie den der Geometrie im Ausgangszustand.

Tabelle 3.4: Element $k_T(\lambda)$ in der Zeile r und Spalte c der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ für zwei verschiedene Laststufen λ und für deren Differenz

		$k_T(0)$	$k_T(0.01)$	$k_T(0.01) - k_T(0)$
$[r; c]$	79;1550	0.000000000	$-1.935856460 \cdot 10^{-1}$	$-1.935856460 \cdot 10^{-1}$
	3633;3660	0.000000000	$-5.373275950 \cdot 10^{-1}$	$-5.373275950 \cdot 10^{-1}$
	3635;3602	0.000000000	$-5.229110420 \cdot 10^{-3}$	$-5.229110420 \cdot 10^{-3}$
	829;2193	$8.653846160 \cdot 10^{-1}$	$8.654047480 \cdot 10^{-1}$	$2.013199999 \cdot 10^{-5}$
	6777;6736	$5.512820510 \cdot 10^{-1}$	$5.512654470 \cdot 10^{-1}$	$1.660400000 \cdot 10^{-5}$
	6796;6807	$-2.20512820 \cdot 10^0$	$-2.205108010 \cdot 10^0$	$2.018999999 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 3.5: Element $k_T(\lambda)$ in der Zeile r und Spalte c der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ für drei verschiedene Laststufen λ

		$k_T(0.03)$	$k_T(0.05)$	$k_T(0.09)$
$[r; c]$	79;1550	$-3.872049910 \cdot 10^{-1}$	$-5.808572620 \cdot 10^{-1}$	$-7.745416880 \cdot 10^{-1}$
	3633;3660	$-1.074638760 \cdot 10^0$	$-1.611933480 \cdot 10^0$	$-2.149211730 \cdot 10^0$
	3635;3602	$-1.05299890 \cdot 10^{-2}$	$-1.590264220 \cdot 10^{-2}$	$-2.134707650 \cdot 10^{-2}$
	829;2193	$8.65438710 \cdot 10^{-1}$	$8.654865000 \cdot 10^{-1}$	$8.655481170 \cdot 10^{-1}$
	6777;6736	$5.51248840 \cdot 10^{-1}$	$5.512322320 \cdot 10^{-1}$	$5.512156210 \cdot 10^{-1}$
	6796;6807	$-2.20508780 \cdot 10^0$	$-2.205067580 \cdot 10^0$	$-2.205047350 \cdot 10^0$

In Tab. 3.4 und Tab. 3.5 sind die Werte von $k_T(\lambda)$ für die gewählten Werte von λ ähnlich groß. Das ist für eng beieinander liegende Werte von λ zu erwarten. Mit wachsendem λ nehmen die Werte von $k_T(\lambda)$ abhängig vom betrachteten Element der Tangentensteifigkeitsmatrix entweder zu oder ab. Die Differenzen $k_T(0.01) - k_T(0)$ ergeben sich für die oberen drei Zeilen, für die $k_T(0) = 0.00$ gilt, zu den Werten von $k_T(0.01)$. Für die unteren drei Zeilen, für die $k_T(0) \neq 0.00$ ist, wobei $k_T(0) \approx k_T(0.01)$ ist, beträgt die Größenordnung dieser Differenz 10^{-5} . Es ist deutlich zu erkennen, dass die letzten fünf relevanten Nachkommastellen in Exponentialdarstellung vernachlässigt werden. Es bleiben nur fünf führende Ziffern übrig. Das beeinflusst insbesondere bei sehr kleinen Werten von $\Delta\lambda$ die numerische Genauigkeit von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\lambda) - \tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$. Das äußert sich im Rahmen der FDM in einem numerischen Genauigkeitsverlust. Wegen der schlech-

ten Konditionierung von $\dot{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ zu Beginn der numerischen Analysen wirkt sich dieser Fehler auf die Ermittlung des fundamentalen Eigenwerts besonders stark aus.

Im Folgenden wird eine Vorgehensweise zur Verringerung des oben beschriebenen numerischen Genauigkeitsverlusts vorgestellt. Mit Unterstützung des Support-Teams von MSC.MARC [32] kann auf in diesem FE Programm eingebettete, darin nicht standardmäßig verfügbare Routinen zugegriffen werden. Eine Programmimplementation in Form von Subroutinen wurde zur Verfügung gestellt. Sie greift auf eine Routine in MSC.MARC zu, die für die Ausgabe der durch die Option *DMIG-OUT* bestimmten Werte verantwortlich ist, siehe Abschnitt 3.3.1. Das bewirkt eine Vergrößerung der numerischen Präzision der Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ auf 18 Nachkommastellen. Der numerische Fehler bei der Subtraktion, siehe Gl. (3.64), kann so stark verkleinert werden, dass trotz schlechter Konditionierung von $\dot{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ eine ausreichend genaue Berechnung von $\lambda_1^*(\lambda)$ erfolgt. Die Anzahl der ermittelten führenden Ziffern bei der Subtraktion von Zahlenwerten ähnlicher Größenordnung wird von $8 - 4 = 4$ auf $18 - 4 = 14$ Stellen erhöht.

Zur Kontrolle wird im Unterkapitel 5.2 das Netz verfeinert, und es werden die $\lambda_1^*(\lambda)$ - λ Diagramme sowie die Werte der Stabilitätsgrenzen λ_S miteinander verglichen. Durch die Verfeinerung erhält man das in Abb. (5.6a) dargestellte $\lambda_1^*(\lambda)$ - λ Diagramm. Ein weiterer Bestandteil der Verifizierung von $\lambda_1^*(\lambda)$ betrifft die Stabilitätsgrenze, für die $\lambda_S = \lambda_1^*(\lambda_S)$ gilt. λ_S kann auf drei verschiedene Arten berechnet werden.

Tab. 3.6 betrifft das Ergebnis der analytischen Lösung für λ_S , siehe [38]. Sie wird mit $\lambda_S^{(a)}$ bezeichnet. In der zweiten Zeile wird $\lambda_S^{(b)}$ aus einer begleitenden Eigenwertanalyse in MSC.MARC, unabhängig von dem vom Verfasser programmierten Algorithmus, ermittelt [32]. $\lambda_S^{(c)}$ in der dritten Zeile wird mittels des in dieser Arbeit verwendeten Programms einschließlich der beschriebenen numerischen Verbesserungen zur Lösung des CLE berechnet. Die Abweichungen der Werte von $\lambda_S^{(a)}$, $\lambda_S^{(b)}$ und $\lambda_S^{(c)}$ für die Stabilitätsgrenze liegen unter 0.5%. Eine weitere Verifizierung des Eigenwerts erfolgt für den in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogen, der durch eine Einzellast im Scheitelpunkt belastet ist. Sie basiert auf dem Vergleich des $\lambda_1^*(\lambda)$ - λ Diagramms mit dem mit Hilfe des Programms *FE_{v2}* [56] ermittelten Ergebnis für $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$.

Tabelle 3.6: Vergleich der Werte für die Stabilitätsgrenze aus drei verschiedenen Rechnungen

	λ_1^*	
Kindmann	$\lambda_S^{(a)}$	0.526
MSC.MARC (BEA)	$\lambda_S^{(b)}$	0.534
CLE	$\lambda_S^{(c)}$	0.531

Numerische Nachlaufrechnung

4.1 Bestimmung von $\rho(\lambda)$ und $c(\lambda)$

4.1.1 Hypothese für $(U - U_M)/U$

Die Hypothese für $(U - U_M)/U$, siehe Gl. (2.42), enthält die Funktionen $\rho(\lambda)$ und $c(\lambda)$.

Zur Bestimmung von $\rho(\lambda)$ wird

$$\mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda) = 1, \quad \lambda = \lambda(\xi), \quad (4.1)$$

nach dem Parameter ξ differenziert. Gründe für die Wahl von ξ als Parameter sind einerseits die jedenfalls im Vorbeulbereich monoton wachsende Größe ξ , d.h. von $d\xi > 0$, und andererseits der Umstand, dass die Definitionsgleichung für $c^2(\lambda)(1 - \rho^2(\lambda))$, siehe Gl. (4.16), den Term $\rho_{,\xi}$ enthält. Es sei daran erinnert, dass $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ kein Vektor im physikalischen Sinn ist und dass die nachstehende differentialgeometrische Berechnung von $\rho(\lambda)$ von seiner Lage relativ zu den drei Koordinatenachsen des kartesischen Referenzsystems nicht beeinflusst wird. Die erwähnte Differentiation ergibt

$$\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_{1,\xi}^* = 0. \quad (4.2)$$

$\mathbf{v}_{1,\xi}^*$ bezeichnet den Tangentenvektor an die fiktive Flächenkurve, die von der Spitze des Vektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda(\xi))$ beschrieben wird. Eine Ausnahme, wie sie in einem singulären Punkt auftreten kann, stellt $\mathbf{v}_{1,\xi}^* = \mathbf{0}$ dar. Interpretation von ξ als Zeit bedeutet, dass

$$\mathbf{v}_{1,\xi}^* = v \cdot \mathbf{t} \quad (4.3)$$

die Vektorgeschwindigkeit eines sich auf der Kurve bewegenden Massenpunkts ist. Der Absolutwert

$$v = \|\mathbf{v}_{1,\xi}^*\| \quad (4.4)$$

stellt die Geschwindigkeit dieses Punkts dar. \mathbf{t} bezeichnet den Tangentenvektor, bei dem es sich um einen Einheitsvektor handelt. Einsetzen von Gl. (4.3) in Gl. (4.2) führt auf

$$v(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{t}) = 0. \quad (4.5)$$

Für einen regulären Punkt der fiktiven Oberflächenkurve gilt

$$v > 0, \quad \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (4.6)$$

Für einen singulären Punkt, in dem \mathbf{t} nicht definiert ist, gilt

$$v = 0. \quad (4.7)$$

In einem solchen Punkt ist $v(\xi)$ nicht glatt. Daher ist $v_{,\xi}(\xi)$ nicht definiert. In der infinitesimalen Umgebung dieses Punkts gilt jedoch

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S + \Delta\xi) = - \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S - \Delta\xi) > 0, \quad (4.8)$$

wobei $v_{,\xi}(\xi_S + \Delta\xi)$ die Tangentialbeschleunigung des Massenpunkts für $\xi_S + \Delta\xi$ darstellt. Der Spezialfall

$$v(\lambda) = 0 \quad (4.9)$$

zeichnet sich durch

$$\mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{konst}. \quad (4.10)$$

aus.

Differentiation von Gl. (4.2) nach ξ ergibt

$$\mathbf{v}_{1,\xi}^* \cdot \mathbf{v}_{1,\xi}^* + \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_{1,\xi\xi}^* = 0 \quad (4.11)$$

mit $\mathbf{v}_{1,\xi\xi}^*$ als der Vektorbeschleunigung. Sie ist zu

$$\mathbf{v}_{1,\xi\xi}^* = v_{,\xi} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (4.12)$$

gegeben. \mathbf{n} bezeichnet den Hauptnormalenvektor, der ein Einheitsvektor ist und im Vektorraum normal zu \mathbf{t} steht. v^2/ρ ist der Wert der Beschleunigungskomponente in Richtung von \mathbf{n} . Einsetzen der Gln. (4.3) und (4.12) in Gl. (4.11) und Berücksichtigung von Gl. (4.6.2) führt auf

$$v^2 \left(1 + \frac{\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n}}{\rho} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Für einen regulären Punkt der fiktiven Flächenkurve folgt aus Gl. (4.13)

$$\boxed{v > 0, \quad 0 < \rho = -\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n} < 1}. \quad (4.14)$$

Gründe, warum ρ den Wert 1 nicht annehmen kann, wurden im Unterkapitel 2.3 darge-

legt. Für einen singulären Punkt gilt

$$\boxed{v = 0, \quad \rho = 0}. \quad (4.15)$$

Abb. (4.1) zeigt, dass $\alpha = \arccos \rho$ der Winkel ist, der durch die Vektoren \mathbf{v}_1^* und $-\mathbf{n}$ eingeschlossen wird, die in der zu \mathbf{t} normalen Ebene – der Normalebene – liegen.

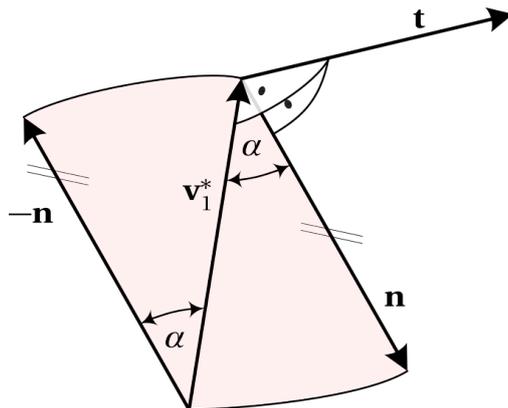


Abbildung 4.1: Darstellung von $\cos \alpha = -\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n} = \rho$

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung der Größe $c^2(\lambda)(1 - \rho^2(\lambda))$, die ein Teil des hypothetischen Ausdrucks für $(U - U_M)/U$ gemäß Gl. (2.42) ist, bildet die Definitionsgleichung:

$$c^2(\lambda)(1 - \rho^2(\lambda)) := (\sigma(\lambda)\rho_{,\xi})^2 \left(\frac{\lambda_{,\xi}}{\lambda_1^* - \lambda} \right)^2, \quad (4.16)$$

mit

$$\sigma \equiv \frac{1}{\tau}. \quad (4.17)$$

$\tau(\lambda)$ bezeichnet die Torsion der fiktiven Flächenkurve, $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$ ist der fundamentale Eigenwert des CLE und $\rho_{,\xi}(\lambda)$ ist die Ableitung von $\rho(\lambda)$ nach ξ . Sie folgt aus Gl. (4.14.2) zu

$$\rho_{,\xi}(\lambda) = -\mathbf{v}_{1,\xi}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n}_{,\xi}. \quad (4.18)$$

Darin ist

$$\mathbf{n}_{,\xi} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{d\xi} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot v, \quad (4.19)$$

wobei ds ein infinitesimales Inkrement der Bogenlänge der erwähnten Flächenkurve bezeichnet. Mittels der zu

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (4.20)$$

gegebenen zweiten *Frenetschen* Formel [57] lässt sich $d\mathbf{n}/ds$ durch κ und τ ausdrücken. In Gl. (4.20) bezeichnet \mathbf{b} den Binormalenvektor, der ein normal zu \mathbf{t} und \mathbf{n} stehender Einheitsvektor ist. Einsetzen von Gl. (4.20) in Gl. (4.19) und Eintragen des Ergebnisses

in Gl. (4.18) ergibt unter Berücksichtigung der Gl. (4.3)

$$\rho_{,\xi} = -v(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) - v\mathbf{v}_1^* \cdot (-\mathbf{kt} + \mathbf{tb}). \quad (4.21)$$

Beachtung der Orthogonalität von \mathbf{t} und \mathbf{n} bzw. \mathbf{v}_1^* , siehe Abb. (4.1), und Berücksichtigung von Gl. (4.17) führt auf

$$\sigma\rho_{,\xi} = -v(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b}). \quad (4.22)$$

Erwähnenswert ist, dass für $\rho_{,\xi} = 0$, $\sigma = \infty$ ist. $\sigma\rho_{,\xi}$ ist dann also eine indefinite Form, deren Wert gleich $-v(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b})$ ist. Einsetzen von Gl. (4.22) in Gl. (4.16) liefert

$$c^2(\lambda)(1 - \rho^2(\lambda)) = \left(\frac{v\lambda_{,\xi}}{\lambda_1^* - \lambda} \right)^2 (-\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b})^2. \quad (4.23)$$

Da sich \mathbf{v}_1^* in der Normalebene befindet, die durch die Einheitsvektoren \mathbf{n} und \mathbf{b} aufgespannt wird, muss

$$(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b})^2 = 1 \quad (4.24)$$

gelten. Folglich ist

$$(\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b})^2 = 1 - (\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n})^2 = 1 - \rho^2 = \sin^2\alpha. \quad (4.25)$$

Einsetzen von Gl. (4.25) in Gl. (4.23) führt auf

$$c^2(\lambda) = \left(\frac{v\lambda_{,\xi}}{\lambda_1^* - \lambda} \right)^2. \quad (4.26)$$

Diese Beziehung stimmt mit Gl. (2.44) unter der Voraussetzung von $\lambda_{,\xi}(0) = 1$ überein. Abb. (4.2) bezieht sich auf das Vorzeichen von $\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b}$ vor und nach dem Erreichen der Stabilitätsgrenze. An der Stabilitätsgrenze ist $P = S$. Dabei handelt es sich um einen singulären Punkt von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$. Dort tritt eine Umkehr der Richtungen von \mathbf{t} und \mathbf{b} als Ergebnis einer Drehung dieser beiden Vektoren von 180° um \mathbf{n} auf. Daraus resultiert ein Sprung des Werts des Skalarprodukts $\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b}$ in diesem Punkt von -1 auf $+1$. Dementsprechend gilt dort $|\sin\alpha(\lambda_S)| = 1$. Für $0 \leq \lambda < \lambda_S$ ist $\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b} = -\sin\alpha < 0$, siehe Abb. (4.2a), und weiters $\lambda_{,\xi}/(\lambda_1^* - \lambda) > 0$ mit $\lambda_1^* - \lambda > 0$ sowie $\lambda_{,\xi} > 0$. Für $\lambda > \lambda_S$ ergibt sich $\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b} = \sin\alpha > 0$, siehe Abb. (4.2b), und $\lambda_{,\xi}/(\lambda_1^* - \lambda) < 0$. Im Fall von Verzweigungsbeulen ist $\lambda_1^* - \lambda < 0$, siehe Abb. (2.6b), und $\lambda_{,\xi} > 0$. Für Durchschlagen gilt hingegen $\lambda_1^* - \lambda > 0$, siehe Abb. (2.6a), und $\lambda_{,\xi} < 0$. Es ist jedenfalls

$$c\sqrt{1 - \rho^2} = \frac{v\lambda_{,\xi}}{\lambda_1^* - \lambda} (-\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b}) \geq 0. \quad (4.27)$$

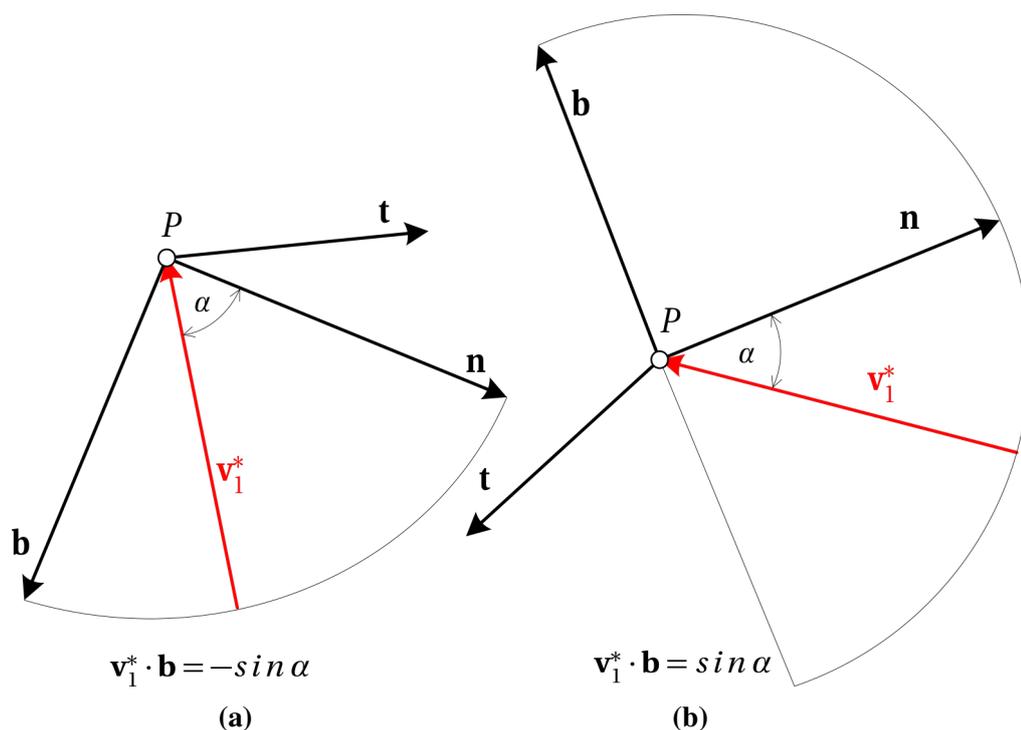


Abbildung 4.2: Zur Bestimmung des Vorzeichens von $\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{b}$ für (a) $0 \leq \lambda < \lambda_S$, (b) $\lambda > \lambda_S$

Im Grenzfall eines Membranspannungszustands ist $v(\lambda) = 0$, siehe Gl. (2.46), was aus der Konstanz des Eigenvektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ für diesen Spezialfall folgt. Es gilt somit $c(\lambda) = 0$, siehe Gl. (2.47). Daraus folgt, dass der Ausdruck für $c(\lambda)$ nicht vom Faktor $\lambda_{,\xi}/(\lambda_1^* - \lambda)$ abhängt. Für alle anderen Spannungszustände ist das aber nicht der Fall. Zur Überprüfung der Richtigkeit dieser Aussage für die Stabilitätsgrenze wird Gl. (2.42) für den entsprechenden Punkt von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ spezialisiert. Dabei handelt es sich um einen singulären Punkt der fiktiven Flächenkurve, für den laut Gl. (4.15.2)

$$\rho(\lambda_S) = 0 \quad (4.28)$$

gilt. Substitution von Gl. (4.28) in Gl. (2.42) ergibt

$$\frac{U - U_M}{U} \Big|_{\lambda=\lambda_S} = c(\lambda_S). \quad (4.29)$$

Ungeachtet der Art der Stabilitätsgrenze gilt

$$\lambda_1^*(\lambda_S) - \lambda_S = 0, \quad v(\lambda_S) = 0. \quad (4.30)$$

Für Verzweigen ist $\lambda_{,\xi}(\lambda_S) > 0$, während für Durchschlagen $\lambda_{,\xi}(\lambda_S) = 0$ gilt. Eine notwendige Bedingung für die Brauchbarkeit der Hypothese Gl. (2.42) ist der Erhalt desselben Ausdrucks für $c(\lambda_S)$ für beide Arten des Stabilitätsverlusts. Das folgt daraus, dass das gegenständliche Energieverhältnis an der Stabilitätsgrenze unabhängig von der Art

des Stabilitätsverlusts ist. Zur Verifizierung der erwähnten Bedingung wird Gl. (4.26) an der Stabilitätsgrenze spezialisiert, woraus man unter Berücksichtigung von Gl. (4.28) sowie von Gl. (4.30)

$$c(\lambda_S) = \frac{v\lambda_{,\xi}}{\lambda_{1,\xi}^* - \lambda} = \frac{0 \cdot \lambda_{,\xi}}{0} \quad (4.31)$$

erhält. Anwendung der Regel von *de L'Hospital* in der oben stehenden unbestimmten Form liefert

$$c(\lambda_S) = -\frac{v_{,\xi}\lambda_{,\xi} + v\lambda_{,\xi\xi}}{\lambda_{1,\xi}^* - \lambda_{,\xi}}, \quad (4.32)$$

wobei $v_{,\xi}$ wie folgt definiert wird:

$$v_{,\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S - \Delta\xi) = -\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S + \Delta\xi) < 0. \quad (4.33)$$

Dabei wird berücksichtigt, dass die Vektorgeschwindigkeit $v = \|\mathbf{v}_{1,\xi}^*(\xi)\|$, die an der Stabilitätsgrenze gleich Null ist, dort keine glatte Funktion ist. Ungeachtet der Art des Stabilitätsverlusts gilt

$$\lambda_{1,\xi}^*(\lambda_S) = 0, \quad (4.34)$$

siehe Unterkapitel 2.4. Einsetzen der Gln. (4.30.2) und (4.34) in Gl. (4.32) ergibt für Stabilitätsverlust in Form von Verzweigungsbeulen

$$c(\lambda_S) = -v_{,\xi} > 0. \quad (4.35)$$

Für Durchschlagen stellt der Ausdruck für $c(\lambda_S)$ gemäß Gl. (4.32) eine unbestimmte Form dar. Mit Hilfe der Regel von *de L'Hospital* und der Beziehung

$$\frac{\lambda_{1,\xi\xi}^*}{\lambda_{,\xi\xi}} = -1, \quad (4.36)$$

siehe Gl. (2.63), erhält man $c(\lambda_S)$ zu

$$c(\lambda_S) = -\frac{v_{,\xi\xi}\lambda_{,\xi} + 2v_{,\xi}\lambda_{,\xi\xi} + v\lambda_{,\xi\xi\xi}}{\lambda_{1,\xi\xi}^* - \lambda_{,\xi\xi}} = \frac{2v_{,\xi}\lambda_{,\xi\xi}}{-2\lambda_{,\xi\xi}} = -v_{,\xi} > 0. \quad (4.37)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Resultat gemäß Gl. (4.35) überein. Die Erfüllung dieser für die Brauchbarkeit der Hypothese für $(U - U_M)/U$ notwendigen Bedingung bedeutet selbstverständlich nicht, dass diese Hypothese verifiziert ist.

Die physikalische Interpretation von $c(\lambda_S)$ gemäß Gl. (4.35) bzw. Gl. (4.37) ist die einer Entschleunigung $\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S - \Delta\xi)$ des sich auf der fiktiven Flächenkurve bewegenden Massenpunkts für $\xi = \xi_S$. Diese Entschleunigung ist gleich der negativen Beschleunigung $-\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} v_{,\xi}(\xi_S + \Delta\xi)$ dieses Massenpunkts zu Beginn der Bewegung aus der Ru-

helage. Offensichtlich ist die erwähnte Entschleunigung eine finite, negative Größe. Ihr oberer Grenzwert, $v_{,\xi}(\lambda_S) = 0$, gilt für den Grenzfall eines reinen Membranspannungszustands. Ihr unterer Grenzwert, $v_{,\xi}(\lambda_S) = -1$, betrifft den Grenzfall eines reinen Biegespannungszustands.

4.1.2 Alternative Hypothese für $(U - U_M)/U$

Der hohe Anspruch an die Definitionsgleichung (4.16) und damit an die Hypothese (2.42) für $(U - U_M)/U$ war der Beweggrund für eine alternative Hypothese für dieses Energieverhältnis. Damit war die Hoffnung auf eine Verringerung möglicher Abweichungen der mittels der Hypothese (2.42) erhaltenen Werte für $(U - U_M)/U$ von den wahren Werten verbunden. Die alternative Hypothese für $(U - U_M)/U$ lautet:

$$\frac{U - U_M}{U} = \cos(\alpha - \beta) \quad (4.38)$$

mit

$$\cos \alpha = \rho, \quad \sin \beta = c \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (4.39)$$

Gl. (4.14.2) stellt einen Ausdruck für $\rho(\lambda)$ und Gl. (2.44) einen für $c(\lambda)$ dar. Spezialisierung der aus Gl. (4.38) folgenden Bezeichnung

$$\frac{U - U_M}{U} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4.40)$$

für die Stabilitätsgrenze führt unter Berücksichtigung von Gl. (4.28) und Gl. (4.35) auf

$$\frac{U - U_M}{U} \Big|_{\lambda=\lambda_S} = -v_{,\xi}, \quad (4.41)$$

also auf dasselbe Ergebnis wie das auf der ursprünglichen Hypothese beruhende Resultat.

Macht man von Gl. (4.39) in Gl. (2.42) Gebrauch, so erhält man für die ursprüngliche Hypothese

$$\frac{U - U_M}{U} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta}. \quad (4.42)$$

Für den Grenzfall eines Membranspannungszustands liefern beide Hypothesen mit

$$\cos \alpha(\lambda) = \rho(\lambda) = 0, \quad v(\lambda) = 0 \implies \sin \beta(\lambda) = c = \frac{v \lambda_{,\xi}}{\lambda_1^* - \lambda} = 0 \quad (4.43)$$

das richtige Ergebnis. Für den Grenzfall eines reinen Biegespannungszustands ergibt sich die Bedingung

$$\alpha(\lambda) = \beta(\lambda). \quad (4.44)$$

Beide Hypothesen werden im Unterkapitel 5.2 für die zwei Grenzfälle überprüft. Ein Schwachpunkt beider Hypothesen ist die nicht garantierte Erfüllung der Bedingung $c\sqrt{1-\rho^2} \leq 1$, die aus Gl. (4.39.2) folgt.

4.1.3 Numerische Auswertung der beiden Hypothesen für $(U - U_M)/U$

Die beiden Hypothesen für $(U - U_M)/U$, siehe die Gln. (2.42) und (4.38), enthalten $\rho(\lambda)$ und $c(\lambda)$. $\rho(\lambda)$ ist zu

$$\rho(\lambda) = -\mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \mathbf{n}(\lambda), \quad (4.45)$$

gegeben. Die Berechnung von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ ist Teil der Lösung des CLE, siehe Unterkapitel 3.4. \mathbf{n} ist zu

$$\mathbf{n}(\lambda) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(\lambda)}{|\dot{\mathbf{t}}(\lambda)|} \quad (4.46)$$

definiert, wobei $\dot{\mathbf{t}}(\lambda)$ die Ableitung des Tangentenvektors $\mathbf{t}(\lambda)$ nach λ bezeichnet. $\dot{\mathbf{t}}(\lambda)$ wird mittels des zentralen Differenzenquotienten

$$\dot{\mathbf{t}}^\square(\lambda) = \frac{\hat{\mathbf{t}}(\lambda + \Delta\lambda) - \hat{\mathbf{t}}(\lambda - \Delta\lambda)}{2\Delta\lambda} \quad (4.47)$$

approximiert. Bei

$$\hat{\mathbf{t}}(\lambda + \Delta\lambda) = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda + 2\Delta\lambda) - \mathbf{v}_1^*(\lambda)}{2\Delta\lambda} \quad (4.48)$$

und

$$\hat{\mathbf{t}}(\lambda - \Delta\lambda) = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda) - \mathbf{v}_1^*(\lambda - 2\Delta\lambda)}{2\Delta\lambda} \quad (4.49)$$

handelt es sich um zentrale Differenzenquotienten, mittels der $\mathbf{t}(\lambda + \Delta\lambda)$ und $\mathbf{t}(\lambda - \Delta\lambda)$ approximiert werden. Die Genauigkeit der Approximation $\rho^\square(\lambda)$ von $\rho(\lambda)$ hängt von der Größe von $\Delta\lambda$ ab. Wenn

$$\frac{\rho_{(i)}^\square - \rho_{(i+1)}^\square}{\rho_{(i)}^\square} < \epsilon \quad (4.50)$$

ist, wobei $\rho_{(i)}^\square$ und $\rho_{(i+1)}^\square$ die Ergebnisse für ρ^\square für zwei aufeinanderfolgende Schritte im Rahmen einer sukzessiven Verkleinerung von $\Delta\lambda$ sind und ϵ eine passend gewählte Fehlerschranke bezeichnet, wird dieser Prozess abgebrochen. Andererseits muss $\Delta\lambda$ groß genug gewählt werden, um numerische Fehler bei der Berechnung von $\rho^\square(\lambda)$ zu vermeiden.

Der Ausdruck für $c(\lambda)$, siehe Gl. (2.44), enthält $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$, $v(\lambda)$ und $\lambda_{,\xi}$. Die Berechnung des Eigenwerts $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$ wurde im Unterkapitel 3.4 erläutert. Die Approximation von $v(\lambda)$ basiert auf einem zentralen Differenzenquotient für $\mathbf{v}_{1,\xi}^*(\lambda)$. $\lambda_{,\xi}(\xi)$ wird durch Ersetzen der infinitesimalen Inkremente $d\lambda$ und $d\xi$ durch endliche Inkremente berech-

net.

4.1.4 Berechnung von $\rho(\lambda)$ für verschieden große Lastschritte $\Delta\lambda$

In den Gln. (4.47) bis (4.49) scheint $\Delta\lambda$ auf. Der fundamentale Eigenvektor \mathbf{v}_1^* wird an den Stellen $\lambda + 2\Delta\lambda$ und $\lambda - 2\Delta\lambda$ und der Tangentenvektor $\hat{\mathbf{t}}$ an den Stellen $\lambda + \Delta\lambda$ und $\lambda - \Delta\lambda$ als bekannt vorausgesetzt. Bei Verwendung der Differenzenquotienten gemäß Gl. (4.48) und Gl. (4.49) wird eine konstante Schrittweite $\Delta\lambda$ in vier aufeinanderfolgenden Inkrementen vorausgesetzt, was bei einer großen Anzahl von Inkrementen und, damit verbunden, kleinen Schrittweiten $\Delta\lambda$ näherungsweise erfüllt ist. Kleine Werte von $\Delta\lambda$ relativ zu λ_S führen bei den in Kapitel 5 untersuchten Beispielen auf eine raschere Konvergenz der *Newton-Raphson* Iteration und somit auf eine kleinere Anzahl von benötigten Iterationsschritten. Die Wahl der Schrittweiten aufeinander folgender Inkremente ist in MSC.MARC [32] automatisiert und hängt von der Anzahl der Iterationsschritte des vorangegangenen Inkrements ab. Durch Vorschreiben einer Mindestanzahl von Iterationsschritten für jedes Inkrement werden näherungsweise konstante Schrittweiten in aufeinander folgenden Inkrementen erreicht.

Die sukzessive Berechnung der zuvor angeführten Differenzenquotienten an beliebigen Stellen ist die Voraussetzung für eine möglichst genaue Ermittlung von $\rho(\lambda)$, die im Wege einer Konvergenzanalyse unter Berücksichtigung des in Gl. (4.50) angegebenen Abbruchkriteriums bewerkstelligt wird. Die Berechnung von ρ findet nach der Lösung des CLE in einer Nachlaufrechnung statt. Die Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ erfolgt jeweils für einen Belastungszustand λ , der sich entsprechend den Konvergenzkriterien, der Zahl der Elemente und dem verwendeten Lösungsalgorithmus aus der inkrementellen Schrittweite $\Delta\lambda$ der Vorlaufrechnung ergibt, siehe Abschnitt 3.3.4. Eine neuerliche Berechnung an einer bestimmten Stelle λ erfordert für jede Reduktion des ursprünglichen $\Delta\lambda$ einen Zugriff auf die Vorlaufrechnung und einen Neustart von MSC.MARC. Das ist aufwendig und ineffizient. Daher wird eine alternative Methode zur Ermittlung des Differenzenquotienten verwendet. Die Berechnung von $\hat{\mathbf{t}}$ erfolgt an einer Stelle $\lambda^{(c)}$ im Vorbeulbereich, die zu

$$\lambda^{(c)} = \lambda^{(l)} + \frac{\lambda^{(u)} - \lambda^{(l)}}{2}, \quad \lambda^{(u)} > \lambda^{(l)}, \quad (4.51)$$

gegeben ist. Daraus folgt für den Tangentenvektor $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c)})$

$$\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c)}) = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l)})}{\lambda^{(u)} - \lambda^{(l)}}. \quad (4.52)$$

Nach Ermittlung von $\hat{\mathbf{t}}$ an zwei benachbarten Stellen, $\lambda^{(c_1)}$ und $\lambda^{(c_2)}$, kann unter Beach-

tion von $\lambda^{(c_2)} > \lambda^{(c_1)}$ $\hat{\mathbf{t}}^\square(\lambda^{(d)})$ im Vorbeulbereich analog zu Gl. (4.52) für

$$\lambda^{(d)} = \lambda^{(c_1)} + \frac{\lambda^{(c_2)} - \lambda^{(c_1)}}{2} \quad (4.53)$$

zu

$$\hat{\mathbf{t}}^\square(\lambda^{(d)}) = \frac{\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c_2)}) - \hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c_1)})}{\lambda^{(c_2)} - \lambda^{(c_1)}} \quad (4.54)$$

berechnet werden. Daraus ergibt sich nach Einsetzen von Gl. (4.54) in Gl. (4.46)

$$\mathbf{n}(\lambda^{(d)}) = \frac{\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(d)})}{|\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(d)})|}. \quad (4.55)$$

Um $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(d)})$ zu erhalten, wird zwischen den benachbarten Eigenvektoren $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(c_1)})$ und $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(c_2)})$ linear interpoliert. Einsetzen von $\mathbf{n}(\lambda^{(d)})$ und $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(d)})$ in Gl. (4.45) führt auf

$$\rho(\lambda^{(d)}) = -\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(d)}) \mathbf{n}(\lambda^{(d)}). \quad (4.56)$$

Abb. (4.3a) zeigt \mathbf{v}_1^* , $\hat{\mathbf{t}}$ gemäß Gl. (4.52) und $\hat{\mathbf{t}}^\square$ gemäß Gl. (4.54), vereinfacht im zwei-dimensionalen Vektorraum. $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ ist bekannt. Die Auswertung von $\hat{\mathbf{t}}^\square$ erfolgt an der Stelle $\lambda^{(d)}$, die unter der Voraussetzung konstanter Schrittweiten $\Delta\lambda$ in allen Inkrementen mit der Stelle λ übereinstimmt. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, weicht $\lambda^{(d)}$ von λ ab. Diese Abweichung ist klein, da aufeinander folgende Schrittweiten voneinander abhängen. Da $\hat{\mathbf{t}}^\square$ mit Hilfe der FDM gemäß Gl. (4.54) berechnet wird, ist dieser Vektor in Abb. (4.3a) zu $\hat{\mathbf{t}}^\square(\lambda^{(d)}) (\lambda^{(c_2)} - \lambda^{(c_1)})$ angegeben. Die fundamentalen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_a)})$, $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_a)})$, $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_b)})$ und $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b)})$ sind bekannt. Bei der Bildung des vorderen Differenzenquotienten gemäß Gl. (4.52) und Gl. (4.54) werden die Relationen

$$\lambda^{(u_b)} > \lambda^{(l_b)}, \quad \lambda^{(u_a)} > \lambda^{(l_a)}, \quad \lambda^{(u_b)} > \lambda^{(d)} > \lambda^{(l_a)} \quad (4.57)$$

berücksichtigt. Die Winkel α_a und α_b in Abb. (4.3) folgen aus den inneren Produkten entsprechender fundamentaler Eigenvektoren zu

$$\cos \alpha_a = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_a)}) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_a)})}{\|\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_a)})\| \|\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_a)})\|}, \quad \cos \alpha_b = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_b)}) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b)})}{\|\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_b)})\| \|\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b)})\|}. \quad (4.58)$$

Auswertung von Gl. (4.52) an den Stellen a und b führt auf die Tangentenvektoren $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c_1)})$ und $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(c_2)})$. Substitution dieser beiden Vektoren in Gl. (4.54) führt auf $\hat{\mathbf{t}}^\square(\lambda^{(d)})$, siehe Abb. (4.3a). Mit Hilfe von Gl. (4.55) erhält man dann $\rho(\lambda^{(d)})$.

Abb. (4.3b) betrifft die sich in den Gln. (4.51) - (4.58) manifestierende Modifikation der FDM. Sie ist durch rückwärtige Differenzenquotienten für die Tangentenvektoren $\hat{\mathbf{t}}$ an den Stellen $\lambda^{(u_a)}$ und $\lambda^{(u_b)}$ gekennzeichnet.

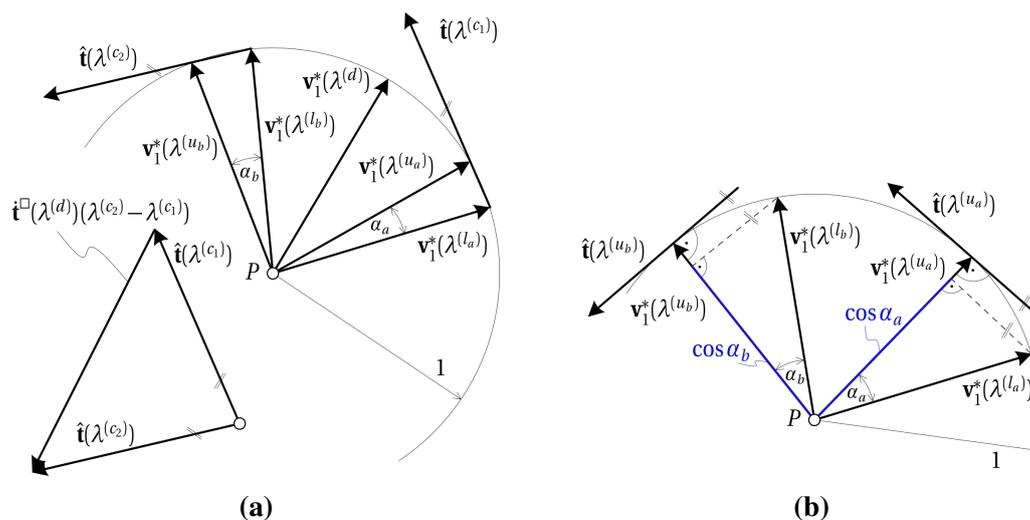


Abbildung 4.3: (a) \mathbf{v}_1^* , $\hat{\mathbf{t}}$ und $\hat{\mathbf{t}}^\square$ als in die Zeichenebene projizierte Vektoren, abhängig von $\lambda^{(l_a)}$, $\lambda^{(u_a)}$, $\lambda^{(l_b)}$, $\lambda^{(u_b)}$, $\lambda^{(c_1)}$, $\lambda^{(c_2)}$ und $\lambda^{(d)}$ sowie (b) Modifikation für einen rückwärtigen Differenzenquotienten unter Berücksichtigung der Orthogonalität von $\hat{\mathbf{t}}$ und \mathbf{v}_1^*

Spezialisierung von Gl. (4.52) für die Punkte a und b und Substitution von $\lambda^{(c_1)} = \lambda^{(u_a)}$ und $\lambda^{(c_2)} = \lambda^{(u_b)}$ in die Gl. (4.58) führen auf $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_a)})$ und $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_b)})$, siehe Gl. (4.59). Unter Berücksichtigung von $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$ und des Umstands, dass es sich bei dem Kreisschnitt in Abb. (4.3b) um die Projektion einer fiktiven Flächenkurve handelt, die von der Spitze eines N -dimensionalen Vektors beschrieben wird, sowie unter Beachtung der Orthogonalität von $\hat{\mathbf{t}}$ und \mathbf{v}_1^* erhält man $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_a)})$ und $\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_b)})$ zu

$$\hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_a)}) = \frac{\cos \alpha_a \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_a)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_a)})}{\sin \alpha_a}, \quad \hat{\mathbf{t}}(\lambda^{(u_b)}) = \frac{\cos \alpha_b \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l_b)})}{\sin \alpha_b}. \quad (4.59)$$

4.1.5 Numerische Implementierung unter Beachtung von Toleranzen

Die Automatisierung der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen FDM zur Ermittlung von ρ erfolgt durch Implementierung eines iterativen Lösungsalgorithmus in MATLAB. Dies ist in Abb. (4.4) dargestellt. Darin bezeichnet $\Delta\lambda$ ein Inkrement des dimensionslosen Lastparameters λ . Alle Schrittweiten der FDM werden aus Gründen der numerischen Genauigkeit und aus praktischen Überlegungen im Gegensatz zu der durch die Gln. (4.45) bis (4.50) gekennzeichneten Methode vergrößert. Darauf wird auch in Abb. (4.4) eingegangen. Es wird überprüft, ob die kleinste zur Verfügung stehende Schrittweite ausreicht, um eine hinreichend genaue numerische Lösung für ρ zu erreichen. Umgekehrt kann durch sukzessive Verkleinerung der Schrittweite im Rahmen der FDM das Konvergenzverhalten von ρ studiert werden, was allerdings wegen des dazu notwendigen erneuten Aufrufs der Vorlaufrechnung ineffizient ist.

Da für die FDM die fundamentalen Eigenvektoren an den Grenzen mehrerer zur be-

trachteten Stelle benachbarten Inkremente benötigt werden, wird zur Vereinfachung der Schreibweise auf die Indizierung der Schrittweiten der jeweiligen Inkremente verzichtet und stattdessen nur $\Delta\lambda$ geschrieben. Wie im Unterkapitel 3.6 erwähnt, führt die FDM bei sehr kleinen Schrittweiten zu numerischem Rauschen. Um das zu vermeiden, werden die unteren Grenzwerte $\epsilon_1^{(min)} = \epsilon_a^{(min)} = \epsilon_b^{(min)} = 10^{-5}$ der Skalarprodukte zweier für die FDM benötigten Vektoren \mathbf{v}_1^* überprüft. Große Grenzwerte mindern die Genauigkeit bei der Berechnung von ρ , zu kleine äußern sich in numerischer Ungenauigkeit. Die Umgebung der Stelle, an der ρ berechnet wird, ist durch bestimmte Werte $\lambda^{(l_a),min}$ und $\lambda^{(u_b),max}$ begrenzt. Sie werden im Vorbeulbereich zu $\lambda - 0.1 \cdot \lambda_S$ und zu $\lambda + 0.1 \cdot \lambda_S$ gewählt. Im Nachbeulbereich ist bei Durchschlagen die Abnahme von λ zu beachten. Eine Überschreitung der Toleranzschwelle des mit Hilfe von $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b),min})$ und $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u_b),max})$ ermittelten Werts von ρ bedeutet, dass das Verfahren zur Bestimmung von ρ nicht konvergiert, siehe Abb. (4.4).

Numerisches Rauschen bei sukzessiver Verkleinerung von $|\lambda^{(u)} - \lambda^{(l)}|$ in Gl. (4.52) tritt auf, wenn die numerische Genauigkeit der Elemente von $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l)})$ ungenügend ist. Das äußert sich in einem Verlust an signifikanten Nachkommastellen, siehe Abschnitt 3.6.2 und in einem zu kleinen Wert von $\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u)}) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l)})$. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die geringe numerische Genauigkeit auf einige wenige Freiheitsgrade in \mathbf{v}_1^* zurückzuführen ist. Bei steigender Anzahl finiter Elemente wächst die Zahl der betroffenen Freiheitsgrade. Je größer hingegen das Netz ist, desto weniger Freiheitsgrade sind von geringer numerischer Genauigkeit betroffen. Das deckt sich mit numerischen Ergebnissen für ρ . Diese Resultate sind bei größeren Netzen in geringerem Maß von numerischem Rauschen betroffen.

Zur Berechnung der Tangentenvektoren $\hat{\mathbf{t}}_k(\lambda^{(c_1)})$ und $\hat{\mathbf{t}}_k(\lambda^{(c_2)})$ ist die maximale Größe der Inkremente, an deren Grenzen der fundamentale Eigenvektor berechnet wird, mit $\Delta\lambda^{a,(max)} = 0.1 \cdot \lambda_S$ bzw. mit $\Delta\lambda^{a,(min)} = 0.1 \cdot \lambda_S$ begrenzt. Wird $\hat{\mathbf{t}}$ in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten $k-1$ und k berechnet, dann darf die durch das innere Produkt $\hat{\mathbf{t}}_k \cdot \hat{\mathbf{t}}_{k-1}$ definierte Abweichung voneinander die Toleranzschwelle $\epsilon_{t1}^{(max)}$ bzw. $\epsilon_{t2}^{(max)}$ nicht überschreiten, siehe Abb. (4.4). Analog wird die Konvergenz von $\rho(\lambda^{(d)})$ überprüft, siehe Gl. (4.50). Weichen die Werte $\lambda^{(d)}$ in verschiedenen Iterationsschritten von j bzw. von k bei der Ermittlung von ρ an einer bestimmten Stelle voneinander ab, wird von linearer Interpolation Gebrauch gemacht. Im Rahmen dieser Arbeit wird $\epsilon_{t1}^{(max)} = 10^{-4}$, $\epsilon_{t2}^{(max)} = 10^{-4}$ und $\epsilon = 10^{-3}$ gewählt.

Im Zuge der Gleichgewichtsiteration definieren die Inkremente $\Delta\lambda$ die Stellen, an denen die fundamentalen Eigenvektoren ermittelt werden, siehe Abb. (4.4). Abhängig davon, ob für einen zentralen Differenzenquotienten ausreichend viele solcher Stellen zur Einhaltung der vorher beschriebenen Toleranzschwellen existieren, erfolgt eine Modifika-

tion des beschriebenen Algorithmus für einen vorderen oder rückwärtigen Differenzenquotienten.

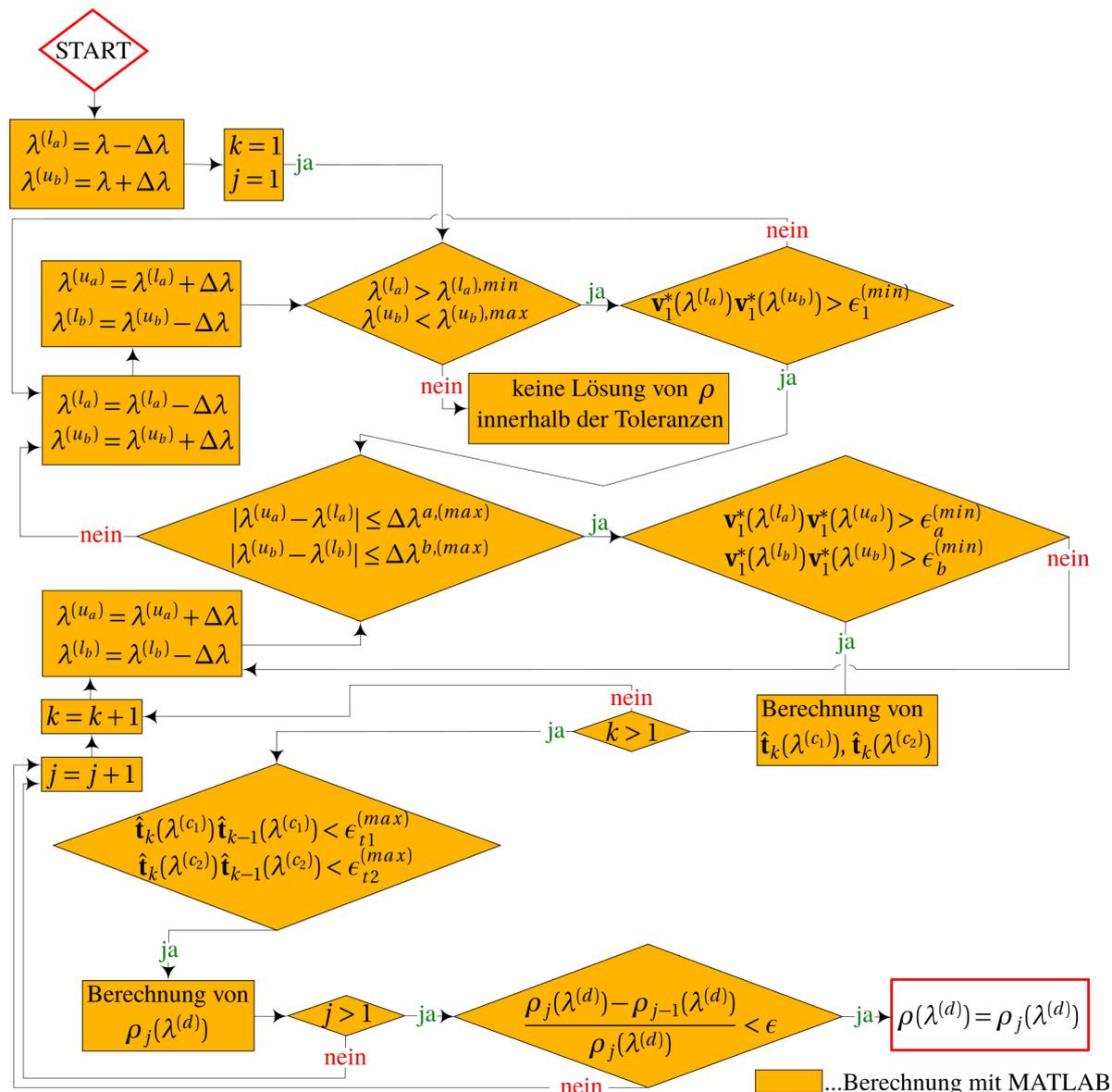


Abbildung 4.4: Flowchart zur numerischen Ermittlung von ρ

Es wird die Norm der Ableitung des fundamentalen Eigenvektors $\dot{\mathbf{v}}_1^*$ mit Hilfe eines vorderen, rückwärtigen, und zentralen Differenzenquotienten berechnet und miteinander verglichen. Unter Berücksichtigung von Gl. (4.52) und von $\lambda^{(l)} = \lambda$ ergibt sich der vordere Differenzenquotient an der Stelle λ zu

$$\|\dot{\mathbf{v}}_1^{*(F)}\| = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda)}{\lambda^{(u)} - \lambda}, \quad (4.60)$$

der rückwärtige Differenzenquotient mit $\lambda^{(u)} = \lambda$ zu

$$\|\dot{\mathbf{v}}_1^{*(B)}\| = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l)})}{\lambda - \lambda^{(l)}} \quad (4.61)$$

und der zentrale Differenzenquotient zu

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1\| = \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda^{(u)}) - \mathbf{v}_1^*(\lambda^{(l)})}{\lambda^{(u)} - \lambda^{(l)}}. \quad (4.62)$$

Bei der Ermittlung von $\tilde{\mathbf{K}}_T(\lambda)$ wird vom vorderen Differenzenquotienten Gebrauch gemacht, siehe Abschnitt 3.4.1. Für einen Verzweigungspunkt mit $\dot{s}(\lambda_S) = v(\lambda_S) = 0$ werden die Werte λ der Abszisse des $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1\|$ - λ Diagramms entsprechend angepasst, sodass sich die modifizierte Form des Werts von $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ ergibt, siehe Abb. (4.5a).

Abb. (4.5a) bezieht sich auf den in Abb. (5.25) dargestellten Kreisbogen, der durch eine vertikale Kraft im Scheitelpunkt belastet ist. Das Bild enthält einen Vergleich der mittels der oben beschriebenen Differenzenquotienten erhaltenen $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ - λ Diagramme. Sie stimmen sehr gut überein. Das Detail zeigt, dass der zentrale Differenzenquotient – rot dargestellt – den Kleinstwert der Minima von $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ an der jeweiligen Stabilitätsgrenze S liefert.

Abb. (4.5b) zeigt ρ - λ Diagramme für den in Abb. (5.25) dargestellten Kreisbogen. Die Werte von ρ wurden mit Hilfe des in den Gln. (4.45) bis (4.50) beschriebenen Verfahrens ermittelt. Das zum $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ - λ Diagramm gehörige ρ - λ Diagramm ist in rot dargestellt. Die numerische Berechnung des ρ - λ Diagramms wurde in Abb. (4.4) beschrieben. $\bar{\rho}$ wird dabei zur Verifizierung von ρ in Abhängigkeit von \dot{s} berechnet. In der Abb. (4.5b) ist das entsprechende Diagramm blau dargestellt. Ein Vergleich der beiden ρ - λ Diagramme zeigt eine gute Übereinstimmung.

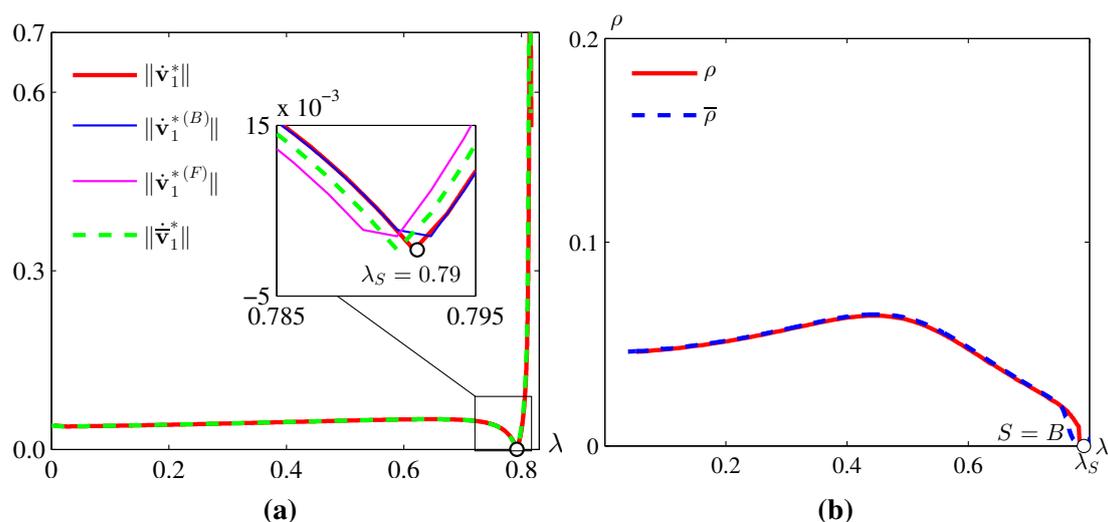


Abbildung 4.5: (a) Modifiziertes $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ - λ Diagramm aus zentralem Differenzenquotienten, $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^{*(B)}\|$ - λ Diagramm aus rückwärtigem Differenzenquotienten, $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^{*(F)}\|$ - λ Diagramm aus vorderem Differenzenquotienten und $\|\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_1^*\|$ - λ Diagramm aus zentralem Differenzenquotienten und (b) ρ - λ - bzw. $\bar{\rho}$ - λ Diagramm für den in Abb. (5.25) dargestellten Kreisbogen, der durch eine vertikale Kraft im Scheitelpunkt belastet ist, siehe Abschnitt 5.3.4

$\bar{\rho}$ lässt sich auch in größerer Nähe der Stabilitätsgrenze S , bei der es sich im gegenständlichen Fall um einen Verzweigungspunkt handelt, mittels eines alternativen Verfahrens berechnen.

Abb. (4.6) zeigt das $\rho^{(B,O)}$ - λ , $\rho^{(B)}$ - λ , ρ - λ und $\bar{\rho}$ - λ Diagramm des in Abb. (5.4) dargestellten gabelgelagerten Balkens, der durch Biegemomente an beiden Enden belastet ist. $\rho^{(B,O)}$ wird unter Berücksichtigung des Ausdrucks für den rückwärtigen Differenzenquotienten gemäß Gl. (4.59) berechnet, wobei die Orthogonalität von $\hat{\mathbf{t}}$ und \mathbf{v}_1^* mit Hilfe von $\cos \alpha_a$ und $\cos \alpha_b$ berücksichtigt wird, siehe Gl. (4.58). Beachtung des Ausdrucks für den rückwärtigen Differenzenquotienten gemäß Gl. (4.61) führt unter Berücksichtigung von Gl. (4.56) auf $\rho^{(B)}$. ρ ergibt sich als zentraler Differenzenquotient gemäß Gl. (4.56) und unter Berücksichtigung von $v_{,\xi}/\lambda_{,\xi} = \dot{s} = \|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ entsprechend Abb. (4.5b). Ebenso unter Berücksichtigung von $v_{,\xi}/\lambda_{,\xi} = \dot{s} = \|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ wird $\bar{\rho}$ ermittelt. Innerhalb eines Lastschritts wird dabei $\bar{\rho}$ mittels Interpolation an 30 Stellen ausgewertet. Das ermöglicht die Ermittlung von $\bar{\rho}$ auch in der Nähe der Stabilitätsgrenze S .

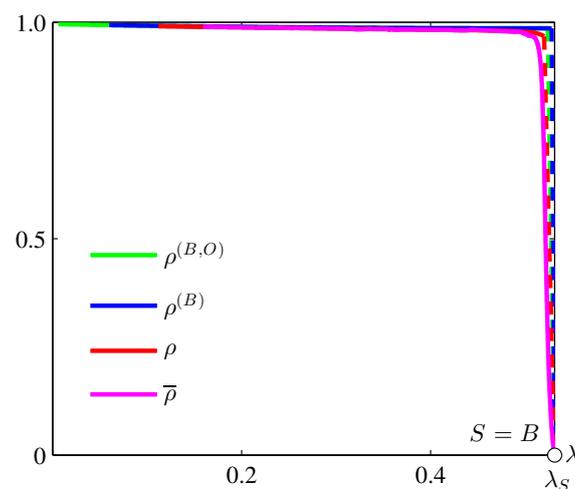


Abbildung 4.6: $\rho^{(B,O)}$ - λ , $\rho^{(B)}$ - λ , ρ - λ und $\bar{\rho}$ - λ Diagramm für einen gabelgelagerten IPE-400, der an beiden Enden durch Biegemomente um die y -Achse belastet ist, siehe Abb. (5.4)

4.2 Konventionelle Berechnung von $(U - U_M)/U$ am Beispiel einer dünnen Schale

Die im Unterkapitel 2.3 vorgestellte Hypothese für $(U - U_M)/U$ lässt sich durch Vergleich mit dem Ergebnis für einen prozentuellen Energieanteil aus einer konventionellen Berechnung überprüfen. Zur Ermittlung der Verzerrungsenergie eines Systems wird deren näherungsweise Berechnung im Rahmen der FEM auf Basis der Verzerrungen der einzelnen finiten Elemente beschrieben. Der Beitrag der Schubdeformationen infolge von Querkraft zur Verzerrungsenergie eines dünnwandigen Schalenelements ist in vielen Fällen vernachlässigbar. U ist dann gleich der Summe von Membranenergie U_M und

Biegeenergie U_B :

$$U = U_M + U_B. \quad (4.63)$$

U_M und U_B sind zu

$$U_M = \int_A U_M^* dA \quad (4.64)$$

und

$$U_B = \int_A U_B^* dA \quad (4.65)$$

gegeben, wobei U_M^* und U_B^* die auf die Mittelfläche der unverformten Schale bezogene Membran- bzw. Biegeenergie bezeichnen. Die nachstehenden Ausdrücke für U_M^* und U_B^* basieren auf den klassischen *Love-Kirchhoffschen* Annahmen [58]:

$$U_M^* = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[(\varepsilon_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\beta^{(0)})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_\alpha^{(0)}\varepsilon_\beta^{(0)} - \frac{1}{4}\omega^{(0)^2}) \right] \quad (4.66)$$

und

$$U_B^* = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} [(\chi_\alpha + \chi_\beta)^2 - 2(1-\nu)(\chi_\alpha\chi_\beta - \tau^2)]. \quad (4.67)$$

Dabei bezeichnen $\varepsilon_\alpha^{(0)}$, $\varepsilon_\beta^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ die Membranverzerrungen, χ_α , χ_β , τ sind die Krümmungsänderungen bzw. die Verwindungsänderung der Schalenmittelfläche. E steht für den Elastizitätsmodul des einfachheitshalber als isotrop angenommenen Werkstoffs, ν für dessen Querdehnzahl und h für die Schalendicke. α und β sind orthogonale, krummlinige Koordinaten. Sie beziehen sich auf die unverformte Ausgangslage der Schale. Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen hat unter anderem *Koiter* [58] hergeleitet. Seine nichtlineare Schalentheorie berücksichtigt den Einfluss der Rotationen um die Tangenten der Parameterlinien $\alpha = konst.$ und $\beta = konst.$ auf die Membranverzerrungen.

Ein Scheinproblem tritt auf, wenn Bögen oder Balken im Rahmen der FEM als Schalen oder Platten modelliert werden. Das geschieht häufig bei Stabilitätsanalysen solcher Stabtragwerke im Falle von dünnwandigen Querschnitten. Als Beispiel zur Erläuterung dieses Pseudoproblems dient ein I-Träger bei reiner Biegung, siehe Abb. (4.7).

Die Verzerrungsenergie ist zu

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (4.68)$$

gegeben. Einsetzen von

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \quad (4.69)$$

mit I_y als Flächenträgheitsmoment um die y -Achse in Gl. (4.68) und Berücksichtigung

des *Hookeschen* Gesetzes ergibt

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M_y^2}{EI_y^2} z^2 dV = \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} l. \quad (4.70)$$

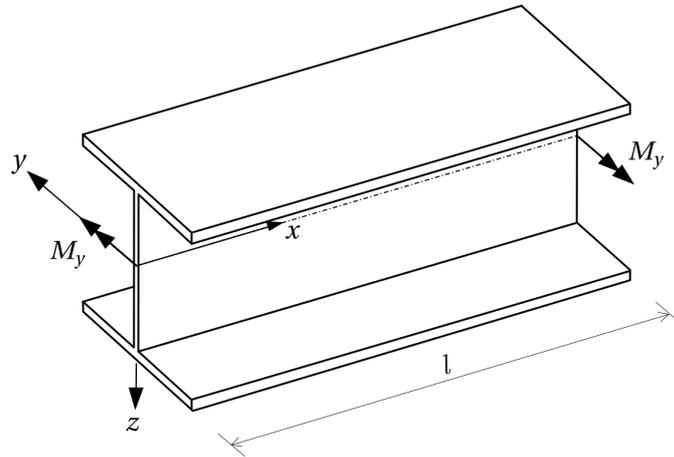


Abbildung 4.7: I-Träger bei reiner Biegung um die y-Achse

Offensichtlich ist

$$U = U_B \implies U_M = 0. \quad (4.71)$$

Wird der Balken jedoch als *Faltwerk* modelliert, so erhält man die in ihm aufgespeicherte Verzerrungsenergie als Summe der Anteile der beiden Flansche, $2U^{(F)}$, und des Stags, $U^{(S)}$. Daher ist

$$U = 2U^{(F)} + U^{(S)} \quad (4.72)$$

mit

$$U^{(F)} = U_M^{(F)} + U_B^{(F)} \quad (4.73)$$

und

$$U^{(S)} = U_M^{(S)}. \quad (4.74)$$

Wegen

$$U_M^{(F)} > 0, \quad U_M^{(S)} > 0 \quad (4.75)$$

widerspricht $U_M^{(F)} + U_M^{(S)}$ dem aus $U = U_B$ folgendem Ergebnis $U_M = 0$, siehe Gl. (4.71). Der Grund für diese Diskrepanz ist die Verschiedenartigkeit der Aufspaltung der Verzerrungsenergie bei der Berechnung des I-Trägers als *Stabwerk* und als aus ebenen Flächentragwerken zusammengesetztes *Faltwerk*. Im zweiten Fall kommen die Normalkräfte und Biegemomente pro Längeneinheit der die beiden Flansche repräsentierenden Platten bzw. die Normalkräfte der den Steg repräsentierenden Scheibe zum Tragen, während es im ersten Fall nur auf das die globale Tragwirkung kennzeichnende Biegemoment M_y ankommt. Bei einem *Stabtragwerk* kommt es demgemäß bei der Ermittlung

von $(U - U_M)/U$ auf die nach der Stabwerkstheorie ermittelten Schnittkräfte an. Deren allfällige Ermittlung als Resultanten von Spannungen, die mittels einer Flächentragwerkstheorie berechnet wurden, tut dabei nichts zur Sache.

Der Vorteil der konventionellen Berechnung der Verzerrungsenergie besteht in ihrer effizienten und bequemen Ermittlung, die mit Hilfe einer in FORTRAN 77 geschriebenen Subroutine erfolgt. Die Notwendigkeit, diese Subroutine an den jeweils verwendeten Elementstyp anzupassen, bedeutet einen Nachteil.

4.2.1 Implementierung in MSC.MARC

Zur konventionellen Ermittlung von $(U - U_M)/U$ ist es erforderlich, die Schnittkräfte und die diesbezüglichen Verzerrungen in den für *Gauss'sche* Integration benötigten Integrationspunkten zu ermitteln.

Zwecks Vergleichs des Ergebnisses für $(U - U_M)/U$ mit dem auf Hypothesen für $(U - U_M)/U$ beruhendem Resultat werden die erforderlichen Subroutinen in der Programmiersprache FORTRAN 77 in MSC.MARC implementiert. Sie werden unabhängig von den übrigen Routinen, die der Lösung des CLE dienen, verwendet. Diese Vorgehensweise bietet zusätzliche Kontrollmöglichkeiten.

Die in MSC.MARC verfügbare Form der Ausgabe der Spannungen und Verzerrungen für einen bestimmten Elementstyp ist in [35] angegeben. Es wird die Option *POST MODEL DEFINITION* genutzt, um die für das Postprocessing benötigten Größen zu speichern. Dabei werden unter anderem spezielle Ausgabegrößen aufgerufen, die durch sogenannte *element post codes* abgerufen werden. Diese Codes sind in [32] vermerkt. Die Automatisierung des Postprocessing erfolgt durch Aufruf der Subroutine *ELMVAR* [44]. *ELMVAR* ist zur Weiterverarbeitung in MATLAB notwendig.

Die Routine *ELMVAR* wird während des automatisierten Postprocessing in MSC.MARC mehrmals aufgerufen. Das erfolgt nach Beendigung der Gleichgewichtssiteration für ein Inkrement für das jeweilige Element e . Allgemeine Berechnungsvariablen, wie zB. Laststufe und Inkrementnummer, ebenso wie elementspezifische Daten und Vektor- und Tensordimensionen, sind durch *COMMON BLOCKS* zugänglich. Im Allgemeinen werden die benötigten Variablen im lokalen Koordinatensystem des betreffenden Elements ausgegeben. Zur Koordinatentransformation dient die Routine *ORIENT 2*.

Während der Berechnung ist zwischen verschiedenen Elementstypen zu unterscheiden. Bei Balkenelementen werden die Schnittgrößen in den *Gauss'schen* Integrationspunkten als *internal force variables* bezeichnet. Sie sind durch Signaturen, sogenannte *output codes*, gekennzeichnet und als Vektor (*components of stress*) abrufbar. Die entsprechenden Komponenten des Verzerrungs- und Krümmungsänderungstensors (*components of strain*) werden mittels der *output codes* identifiziert und während des Postprocessing mit

den in MSC.MENTAT angezeigten Verzerrungen bzw. Krümmungen verglichen.

Bei der konventionellen Ermittlung der Energieanteile ist die Unterscheidung zwischen Schalenelementen und Balkenelementen wichtig, da sich für Schalenelemente das Koordinatensystem der verwendeten Elementtypen (MSC.MARC #75 bzw. #139 [35]) von dem anderer Elemente unterscheidet. Bei Schalenelementen in Form degenerierter 3D Elemente werden krummlinige, orthogonale Koordinaten α und β verwendet.

Die Ausgabe von Schnittgrößen, Verzerrungen und Krümmungsänderungen erfolgt für einen bestimmten Integrationspunkt eines finiten Elements in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. Abb. (4.8) zeigt dieses Koordinatensystem. Sein Ursprung ist der Mittelpunkt der Schalenmittelfläche, O . Drei zueinander orthogonale Vektoren, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , definieren die Richtungen der Koordinatenachsen. \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 spannen dieselbe Ebene wie die Einheitsvektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 auf. Diese ergeben sich zu

$$\mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{X}}{d\alpha} / \left| \frac{d\mathbf{X}}{d\alpha} \right|, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{d\mathbf{X}}{d\beta} / \left| \frac{d\mathbf{X}}{d\beta} \right| \quad (4.76)$$

mit

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

als zu einem Vektor zusammengefassten globalen Koordinaten. Die lokalen Richtungen der Vektoren \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 in einem Integrationspunkt ergeben sich analog zu den lokalen Koordinatenachsen mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Schalenmittelfläche.

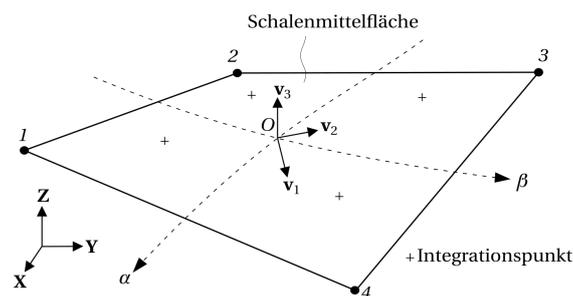


Abbildung 4.8: Lokale orthogonale Richtungsvektoren \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 und krummlinige Koordinaten α , β für den Mittelpunkt O der Schalenmittelfläche eines finiten Elements

Die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 für einen Punkt der Schalenmittelfläche spannen eine Tangentialebene an die Schalenmittelfläche in diesem Punkt auf. Für den Fall eines ebenen finiten Elements stimmen die Richtungsvektoren \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 im Integrationspunkt mit den Richtungen im Mittelpunkt der Schalenmittelfläche überein.

Für das durch \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 beschriebene Koordinatensystem erhält man gemäß Gl. (4.66)

$$U_M^* = \frac{1}{2} (n_{11} \epsilon_{11} + n_{22} \epsilon_{22} + n_{12} \gamma_{12}), \quad (4.78)$$

bzw. gemäß Gl. (4.67)

$$U_B^* = \frac{1}{2} (m_{11} \chi_{11} + m_{22} \chi_{22} + m_{12} \chi_{12}), \quad (4.79)$$

wobei n_{11} , n_{22} , n_{12} die Membrankräfte pro Längeneinheit und ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} die entsprechenden Membranverzerrungen bezeichnen. m_{11} , m_{22} , m_{12} sind die auf die Längeneinheit bezogenen Momente und χ_{11} , χ_{22} , χ_{12} die entsprechenden Änderungen der Krümmungen bzw. der Verwindung der Schalenmittelfläche.

Gauss'sche Integration über die Mittelfläche A^e des finiten Elements e ergibt

$$U_B^{(e)} = \int_{A^e} U_B^* dA, \quad U_M^{(e)} = \int_{A^e} U_M^* dA, \quad (4.80)$$

wobei der Elementsindex e in den Integranden der beiden Integrale unterdrückt wird.

Die numerische Implementierung der konventionellen Berechnung der Verzerrungsenergie verlangt eine Automatisierung mittels der Subroutine *ELVAR* und eine sichere Identifizierung der Schnittgrößen in MSC.MARC und der zugehörigen Verzerrungen und Krümmungsänderungen.

4.2.2 Verifizierung mittels der Software FE_{v2}

Die Verifizierung der im vorhergehenden Kapitel vorgestellten numerischen Berechnung der Verzerrungsenergie und ihrer Anteile erfolgt durch numerischen Vergleich mit einer unabhängigen Software. Dazu wird das von *Jia* erstellte FE Programm FE_{v2} [56] herangezogen. Es besteht aus mehreren in MATLAB geschriebenen Routinen, die es erlauben, ebene Stabwerksstrukturen mit Hilfe der FEM zu berechnen. Die darin enthaltenen Balkenelemente beruhen auf der *Bernoullischen* Hypothese. Dementsprechend werden die Schubdeformationen vernachlässigt. Anhand des Beispiels eines Kreisbogens, der im Scheitelpunkt mit einer vertikalen Kraft belastet ist, siehe Abschnitt 5.3.4, wird die Verzerrungsenergie auf die im vorhergehenden Kapitel vorgestellte konventionelle Weise ermittelt. Die Anteile der Verzerrungsenergien für drei verschiedene Netze werden miteinander verglichen.

Abb. (4.9a) enthält U - λ Diagramme für drei Netze mit 100 bzw. 200 und 400 Elementen. Der verwendete Elementtyp in MSC.MARC ist #52 [35]. Das mittels des Programms FE_{v2} erhaltene U - λ Diagramm ist zu Vergleichszwecken in grauer Form dargestellt. Abb. (4.9b) betrifft entsprechende U_M - λ Diagramme. U_M wird entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.2.1 unter Berücksichtigung von Gl. (4.78) ermittelt.

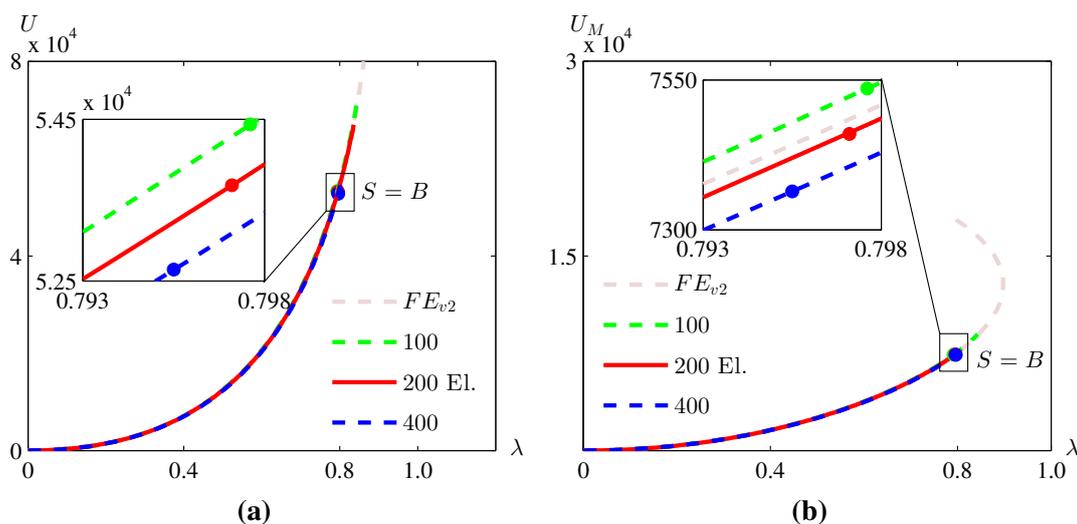


Abbildung 4.9: (a) U - λ Diagramme und (b) U_M - λ Diagramme für drei Netze mit 100 bzw. 200 und 400 Elementen samt Vergleich mit dem mittels des Programms FE_{v2} erhaltenem entsprechenden Diagramm für einen mit einer vertikalen Kraft im Scheitelpunkt belasteten Kreisbogen, siehe Abschnitt 5.3.4

Die Werte für die Stabilitätsgrenzen auf der Grundlage der drei FE Diskretisierungen unterscheiden sich um weniger als 0.5%, siehe Abb. (4.9). Für das grün strichlierte Diagramm mit 100 Elementen liegt sie bei $\lambda_S = 0.7977$, für das rote Diagramm mit 200 Elementen bei $\lambda_S = 0.7976$ und für das blau strichlierte mit 400 Elementen bei $\lambda_S = 0.7955$. U und U_M hängen also nur sehr wenig von der Zahl der finiten Elemente ab. An der Stabilitätsgrenze unterscheiden sich die Ergebnisse für U_M mit den mit Hilfe von FE_{v2} erhaltenen Resultaten nur um 0.002%. Aus dem Vergleich mit FE_{v2} geht hervor, dass die Berechnung gemäß der Gl. (4.80) korrekt ist. Abb. (4.9b) zeigt, dass die Aufspaltung der Verzerrungsenergie gemäß Gl. (4.78) richtig ist. Der Biegeanteil $U_B = U - U_M$ ergibt sich aus Gl. (4.79).

Abb. (4.10a) zeigt $(U - U_M)$ - λ Diagramme. Ein Vergleich von Abb. (4.10a) und Abb. (4.9b) zeigt, dass U_M und $U - U_M = U_B$ im Bereich $\lambda < 0.3$ nahezu gleich stark anwachsen. Für $0.3 \leq \lambda < \lambda_S$ wächst $U - U_M$ aber weitaus stärker als U_M an.

In Abb. (4.10b) ist die Verzerrungsenergie bei Berücksichtigung der transversalen Schubdeformationen, $U^{(\tau)}$, sowie ihr Biege- und Membrananteil, $U^{(\tau)} - U_M^{(\tau)}$ bzw. $U_M^{(\tau)}$, in Abhängigkeit von λ dargestellt. Zu Vergleichszwecken werden die entsprechenden Diagramme ohne Berücksichtigung dieser Schubdeformationen in die Abb. (4.10b) eingetragen. Auf die Angabe der Stabilitätsgrenze wird bewusst verzichtet, da es sich bei dem Vergleich entsprechender Diagramme um zwei verschieden geartete Beispiele handelt. Auf den Verzweigungspunkt folgt bei $\lambda \approx 0.9$ ein Durchschlagspunkt. Wegen $d\lambda = 0$ weisen die Diagramme in diesem Punkt eine vertikale Tangente auf. Die Berechnungen erfolgen mit Hilfe des schubnachgiebigen Balkenelements #98 in MSC.MARC [35]. Ein Vergleich entsprechender Diagramme zeigt, dass der Einfluss der Schubdeforma-

tionen bei diesem Beispiel sehr klein ist.

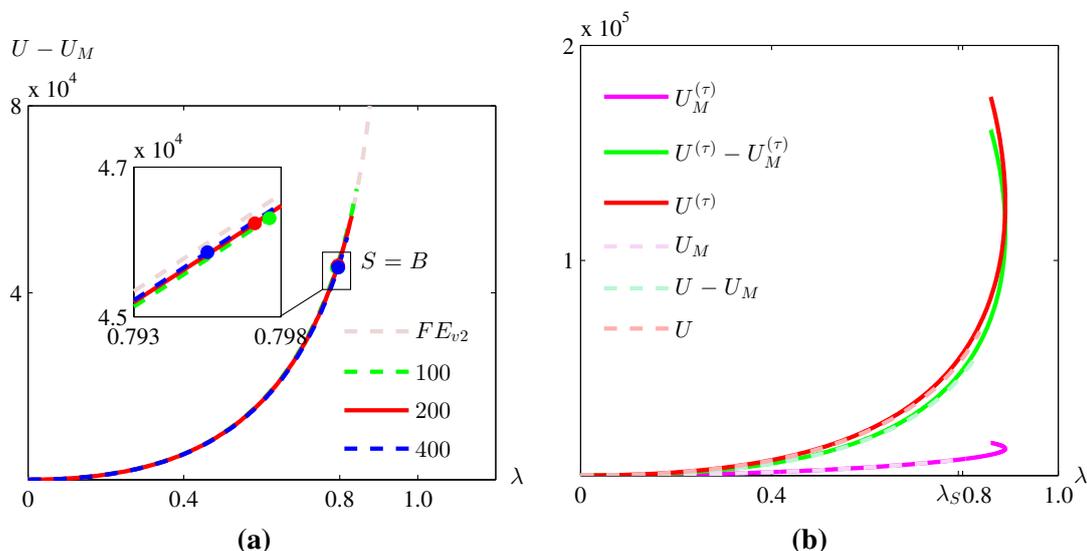


Abbildung 4.10: (a) $(U - U_M)$ - λ Diagramme für drei Netze mit 100 bzw. 200 und 400 Elementen und Vergleich mit dem mittels des Programms FE_{v2} erhaltenem entsprechenden Diagramm, (b) $U^{(\tau)}$ - λ , $U_M^{(\tau)}$ - λ und $(U^{(\tau)} - U_M^{(\tau)})$ - λ Diagramm sowie U - λ , U_M - λ und $(U - U_M)$ - λ Diagramm für einen mit einer vertikalen Kraft im Scheitelpunkt belasteten Kreisbogen, siehe Abschnitt 5.3.4

$U^{(\tau)} - U_M^{(\tau)}$, $U_M^{(\tau)}$ und $U^{(\tau)}$ in Abb. (4.10b) stimmen mit den mittels des Programms FE_{v2} erhaltenen Vergleichswerten gut überein. Um den Vergleich vornehmen zu können, wurde dieses Programm dahingehend erweitert, dass Schubdeformationen berücksichtigt werden können. Der größte Unterschied der mit den beiden Programmen erhaltenen Ergebnisse beträgt 0.002%.

4.3 Sortierungsalgorithmus zur Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars

Im Unterkapitel 3.5 wurde die Lösung des CLE für jedes Inkrement für eine bestimmte Anzahl von Eigenpaaren $(\lambda_j^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_j^*(\lambda))$, $j = 1, 2, \dots, k$, beschrieben. Diese Anzahl hängt von der verwendeten Lösungsmethode, der Zahl der Freiheitsgrade, der Schrittweite und dem Ausmaß der Nichtlinearität der Last-Verschiebungspfade des Systems ab, siehe Abschnitt 3.5.2. Um die Variabilität der Eigenpaare $(\lambda_j^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_j^*(\lambda))$, $j = 1, 2, \dots, k$, in Abhängigkeit von λ zu beschreiben, muss jedes Eigenpaar am Ende des Inkrements m , $(\lambda_j^*(m\lambda) - m\lambda, \mathbf{v}_j^*(m\lambda))$, mit dem entsprechenden Eigenpaar am Ende des vorhergehenden Inkrements $m - 1$, $(\lambda_j^*(m-1\lambda) - m-1\lambda, \mathbf{v}_j^*(m-1\lambda))$, verglichen werden. Dieser Vorgang heißt Sortierung. Vor der Sortierung werden die berechneten Eigenpaare mit $(\lambda^{*(j)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}^{*(j)}(\lambda))$, $j = 1, 2, \dots, k$, bezeichnet. Nach der Sortierung kennt man das fundamentale Eigenpaar $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$.

$\lambda_1^*(\lambda)$ ist eine stetige Funktion. Das $\lambda_1^*-\lambda$ Diagramm weist an der Stabilitätsgrenze im Fall eines Verzweigungspunkts eine horizontale Tangente auf, siehe etwa Abb. (2.6b). Es gilt dort die Bedingung $\dot{\lambda}_1^*(\lambda_S) = 0$. Für eine Stabilitätsgrenze in Form eines Durchschlagspunkts gilt $\dot{\lambda}_1^*(\lambda_S) = -1$, siehe etwa Abb. (2.6a). Das $\lambda_1^*-\lambda$ Diagramm weist dort eine Spitze auf. $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ ist eine stetige Funktion. Das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)-\lambda$ Diagramm weist an der Stabilitätsgrenze im Fall eines Verzweigungspunkts ein Minimum auf, siehe Abb. (5.6). Eine Stabilitätsgrenze in Form eines Durchschlagspunkts ist durch eine Spitze dieses Diagramms gekennzeichnet, siehe Abb. (5.15b). $\lambda_j^*-\lambda$ Diagramme, $j = 1, 2, \dots, k$, können sich schneiden. Der fundamentale Eigenwert $\lambda_1^* - \lambda$ entspricht nicht notwendigerweise dem kleinsten positiven Eigenwert zu Beginn des Belastungsprozesses, d.h. für $\lambda = 0$. Um die Anzahl k der zu berechnenden Eigenwerte möglichst klein zu halten, wird allerdings von dieser Annahme ausgegangen. Im Zuge der Sortierung der Eigenwerte werden Eigenwerte $\lambda^{*(j)} - \lambda$, $j = 1, 2, \dots, k$, berechnet, deren Werte nahe dem des fundamentalen Eigenwerts am Ende des vorangegangenen Inkrements liegen. Dabei wird während der Eigenwertberechnung von einem *shift* μ Gebrauch gemacht, der unter Berücksichtigung von Gl. (3.47) so gewählt wird, dass zu Beginn des Inkrements m $\lambda^{*(1)}(m\lambda) = \lambda_1^{*(m-1)}(\lambda)$ gilt. Der Index j kennzeichnet einen vor der Sortierung der Eigenwerte ermittelten Wert $\lambda^{*(j)}$.

Abb. (4.11a) betrifft die Sortierung von Eigenwerten am Ende des Inkrements m zur Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars. Dabei wird aus den als blaue Punkte dargestellten Werten $\lambda^{*(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k$ der dem fundamentalen Eigenwert $\lambda_1^* - \lambda$ entsprechende Wert λ_1^* ermittelt. Die Eigenwerte an den Inkrementsgrenzen $\lambda < m\lambda$ sind bekannt. Für $m < 10$ wird die Annahme getroffen, dass der kleinste positive Eigenwert $\lambda^{*(j)} - \lambda$ gleich dem fundamentalen Eigenwert ist. Für $m \geq 10$ wird durch quadratische Extrapolation von $\lambda_1^*(\lambda) - \lambda$, $\lambda < m\lambda$, der Wert $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda) - m\lambda$ ermittelt, siehe Kurve (a). Befindet sich im gewählten Intervall $\Delta\lambda^{*(a)}$ mit $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ ein einziger Punkt $\lambda^{*(j)}(m\lambda)$ und gilt zusätzlich

$$|\lambda_1^{*(e)}(m\lambda) - \lambda^{*(j)}(m\lambda)| \leq \epsilon_T, \quad (4.81)$$

dann ist $\lambda^{*(j)}(m\lambda) = \lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$. In der vorliegenden Arbeit wird $\Delta\lambda^{*(a)} = 2(m\lambda - m^{-1}\lambda)$ und $\epsilon_T = 10^{-4} \Delta\lambda$ gewählt. Der Wert $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ liegt in der Mitte des Intervalls $\Delta\lambda^{*(a)}$. Dieses Intervall liegt oberhalb der Diagonale $\lambda^{*(j)} = \lambda$. Negative Eigenwerte werden in dem vorgestellten Algorithmus nicht berücksichtigt, da sie ja im Vorbeulbereich nicht positiv werden können.

Abb. (4.11b) stellt eine Erweiterung von Abb. (4.11a) für den Fall dar, dass die Toleranzschwelle (4.81) überschritten wird oder dass im Intervall $\Delta\lambda^{*(a)}$, innerhalb dessen sich der Wert $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ befindet, mehr als ein Eigenwert $(\lambda^{*(j)}(m\lambda) - m\lambda)$ vor-

handen ist. In diesem Fall wird ein Intervall $\Delta\lambda^{*(b)}$ gewählt, innerhalb dessen sich der Wert $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ befindet, siehe Kurve (c). Die darin enthaltenen benachbarten Werte $\lambda^{*(j)}(m\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, l$, werden untersucht. $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ liegt in der Mitte von $\Delta\lambda^{*(b)}$. Das Intervall $\Delta\lambda^{*(b)}$ liegt oberhalb der Diagonale $\lambda^{*(j)} = \lambda$. $\Delta\lambda^{*(b)}$ hängt von der Schrittweite $\Delta\lambda$ ab. Sie wird so gewählt, dass mindestens fünf Werte $\lambda^{*(j)}$ untersucht werden können. Zur Bestimmung des fundamentalen Eigenpaars wird

$$a_1^{(j)} = |\lambda_1^{*(e)}(m\lambda) - \lambda^{*(j)}(m\lambda)|, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.82)$$

und das innere Produkt der zugehörigen Eigenvektoren

$$a_2^{(j)} = \mathbf{v}_1^*(m^{-1}\lambda) \cdot \mathbf{v}^{*(j)}(m\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.83)$$

berechnet. Außerdem wird das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm für $\lambda \leq m^{-1}\lambda$ ermittelt. Der Wert von $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ an der Stelle $m\lambda$ wird durch quadratische Extrapolation erhalten. Mit Hilfe von

$$a_3^{(j)} = |(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}^{*(e)}(m\lambda) - \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}^{*(j)}(m\lambda))|, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.84)$$

kann auf das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm zurückgegriffen werden, und zwar während der Sortierung. Weist $a_2^{(j)}$ für ein bestimmtes j ein Minimum auf und erhält man für dasselbe j ein Minimum für $a_3^{(j)}$ aus Gl. (4.84), dann ergibt sich das fundamentale Eigenpaar zu $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda)) = (\lambda^{*(j)}(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}^{*(j)}(\lambda))$. Für dieses j ist $a_1^{(j)}$ aus Gl. (4.82) nicht notwendigerweise ein Minimum.

Abb. (4.11c) zeigt ein $\lambda^{*(j)}$ - λ Diagramm für den Fall einander schneidender λ_j^* - λ Diagramme, analog zu Abb. (4.11b). Der extrapolierte Wert $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$ liegt zwischen $\lambda^{*(3)}$ und $\lambda^{*(4)}$. Unter Berücksichtigung der Gln. (4.82) - (4.84) für die zuvor beschriebene Sortierung führt das auf $\lambda_1^* = \lambda^{*(3)}$.

Ist das letzte Inkrement vor der Stabilitätsgrenze erreicht, muss überprüft werden, ob $\lambda^{*(1)} \geq \lambda$ der kleinste positive Wert oberhalb der Diagonale $\lambda^{*(j)}$ - λ ist. Ist das nicht der Fall, so ist, ausgehend von der unteren Grenze des Inkrements m , $m\lambda < \lambda_S$, bei dem es sich um das letzte Inkrement vor der Stabilitätsgrenze handelt, eine Sortierung im Vorbeulbereich in umgekehrter Richtung vorzunehmen.

Abb. (4.11d) betrifft eine solche rückwärts gerichtete Sortierung zur Ermittlung des fundamentalen Eigenwerts. Voraussetzung ist die Kenntnis von λ_S , dessen Berechnung im Abschnitt 3.3.4 beschrieben wurde. *Per definitionem* von λ_1^* gilt, dass der kleinste positive Eigenwert $(\lambda^{*(j)} - \lambda)$ unmittelbar vor der Stabilitätsgrenze der fundamentale Eigenwert ist. Extrapolation führt auf $\lambda_1^{*(e)}(m\lambda)$, siehe Kurve (a). Untersuchung aller Eigenpaare $(\lambda^{*(j)}(m\lambda) - m\lambda, \mathbf{v}^{*(j)}(m\lambda))$, $j = 1, 2, \dots, l$, deren Eigenwerte im Intervall $\Delta\lambda^{*(a)}$ liegen, siehe Kurve (c), liefert analog zu den Abbn. (4.11a) - (4.11c) das funda-

mentale Eigenpaar im Punkt $m\lambda$.

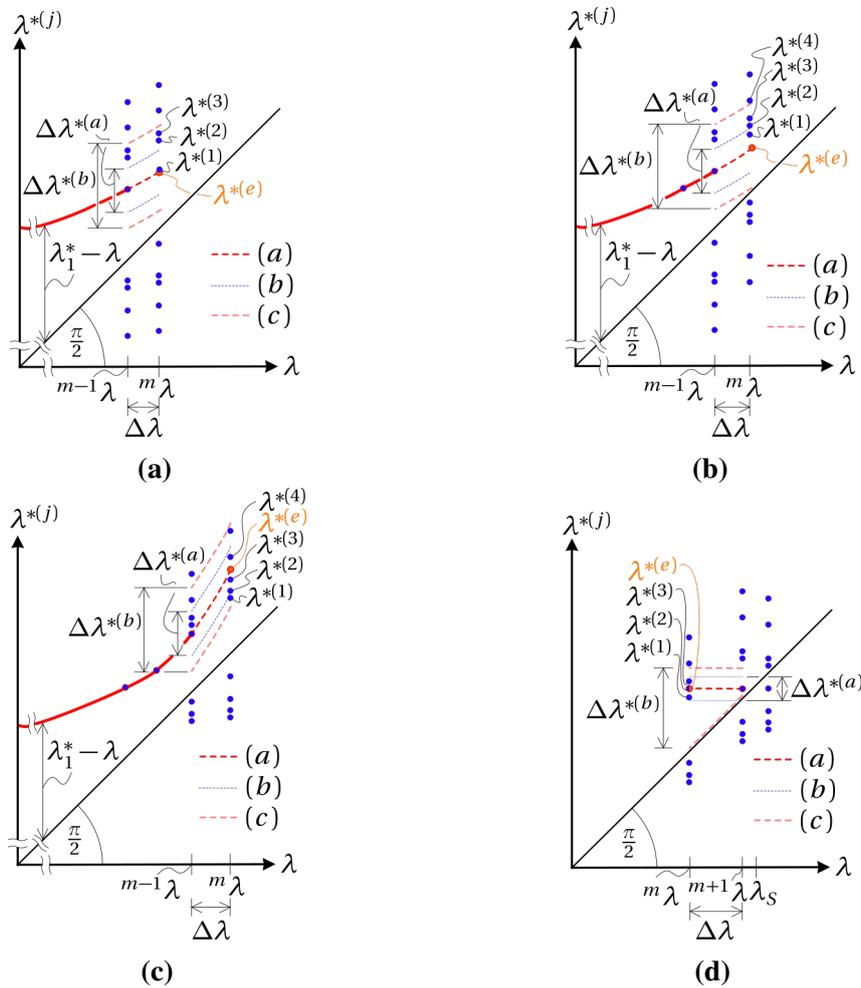


Abbildung 4.11: $\lambda^{*(j)}-\lambda$ Diagramme zur Sortierung des fundamentalen Eigenpaars für (a) isolierte Eigenwerte, (b) benachbarte Eigenwerte, (c) einander schneidende Eigenwertkurven, (d) Sortierung in umgekehrter Richtung

4.4 Verbesserung der Genauigkeit des fundamentalen Eigenvektors

Die Nachlaufrechnungen regen zu numerischen Überlegungen in Richtung einer Verbesserung der Genauigkeit der ersten und zweiten Ableitung des fundamentalen Eigenvektors an. Aus der Normierung des fundamentalen Eigenvektors in Gl. (2.3) zu $\|\mathbf{v}_1^*(\lambda)\| = 1$ folgt

$$\mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) = \mathbf{0}. \tag{4.85}$$

Diese Orthogonalitätsbeziehung wird zur Überprüfung der Genauigkeit von $\dot{\mathbf{v}}_1^*$ verwendet. Zugleich soll Gl. (4.85) der Steigerung der Genauigkeit von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ dienen. Voraussetzung ist, dass $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ bekannt ist und dass seine numerische Genauigkeit größer ist als die von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$. Diese Voraussetzung ist erfüllt, da $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ mittels der FDM auf Basis von

$\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ zu

$$\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \approx \frac{\mathbf{v}_1^*(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}_1^*(\lambda - \Delta\lambda)}{2\Delta\lambda}, \quad (4.86)$$

approximiert wird. In der numerischen Untersuchung kommt es in Gl. (4.85) zu einem Residuum $r(\lambda)$. Dieses Residuum ist zu minimieren, worauf nachstehend Bezug genommen wird:

$$r(\lambda) = \mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \rightarrow 0. \quad (4.87)$$

Dadurch soll die Genauigkeit von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ gesteigert werden. Dazu wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet, in der ein Vektor $\mathbf{x}(\lambda)$ gesucht ist, mit dessen Hilfe die beiden Residuen

$$\begin{aligned} r_1(\lambda) &= \mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \frac{\mathbf{x}(\lambda)}{\|\mathbf{x}(\lambda)\|} \rightarrow 0, \\ r_2(\lambda) &= \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \cdot \frac{\mathbf{x}(\lambda)}{\|\mathbf{x}(\lambda)\|} - 1 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

minimiert werden. Das geschieht unter Zuhilfenahme des Startvektors $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ für $\mathbf{x}(\lambda)$ mittels der Funktion *fsolve* in MATLAB. Dabei handelt es sich um eine effiziente Lösung des vorliegenden Problems. Wird die Minimierung von $r_2(\lambda)$ nicht vorgenommen, so erhält man einen Vektor $\mathbf{x}(\lambda)$, der orthogonal zu $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ ist. Es lässt sich jedoch keine Aussage darüber machen, um welchen der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j^*(\lambda)$, $j = 2, 3, \dots, N$, es sich bei dem Ergebnis dieser Minimierung handelt. Dasselbe Problem tritt auf, wenn anstatt des Residuums $r_1(\lambda)$, N Residuen $r_i(\lambda) = v_i(\lambda) x_i(\lambda) = 0$ berücksichtigt werden. Dabei bezeichnen v_i bzw. x_i Elemente der Vektoren $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ bzw. $\mathbf{x}(\lambda)$. Die Normierung von $\mathbf{x}(\lambda)$ in Gl. (4.88) verhindert, dass einzelne Vektorelemente die Lösung stärker beeinflussen als andere. Nach erfolgreicher Minimierung erhält man

$$\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda), \quad (4.89)$$

wobei $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ eine Verbesserung von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ darstellt.

Analog zu Gl. (4.87) lässt sich eine numerische Verbesserung für $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ erzielen. Ausgehend vom Residuum r ergeben sich mit

$$r(\lambda) = \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) + \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda) \rightarrow 0 \quad (4.90)$$

und $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ als einem bekannten Vektor die zu minimierenden Funktionen zu

$$\begin{aligned} r_1(\lambda) &= \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) + \mathbf{v}_1^*(\lambda) \cdot \frac{\mathbf{x}(\lambda)}{\|\mathbf{x}(\lambda)\|} \rightarrow 0, \\ r_2(\lambda) &= \dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) \cdot \frac{\mathbf{x}(\lambda)}{\|\mathbf{x}(\lambda)\|} - 1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Nach Minimierung von $r_1(\lambda)$ und $r_2(\lambda)$ erhält man mit

$$\ddot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda) = \mathbf{x}(\lambda) \quad (4.92)$$

eine numerische Verbesserung von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$.

Abb. (4.12a) zeigt das $(\dot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^*)/(\lambda_1^* - \lambda)$ - λ Diagramm für den in Abb. (5.4) dargestellten Balken, der auf reine Biegung beansprucht wird. Dabei wird ausdrücklich nicht von der Methode zur Verbesserung der numerischen Genauigkeit im Abschnitt 3.6.2 oder von der Approximation von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ im Abschnitt 3.6.1 Gebrauch gemacht.

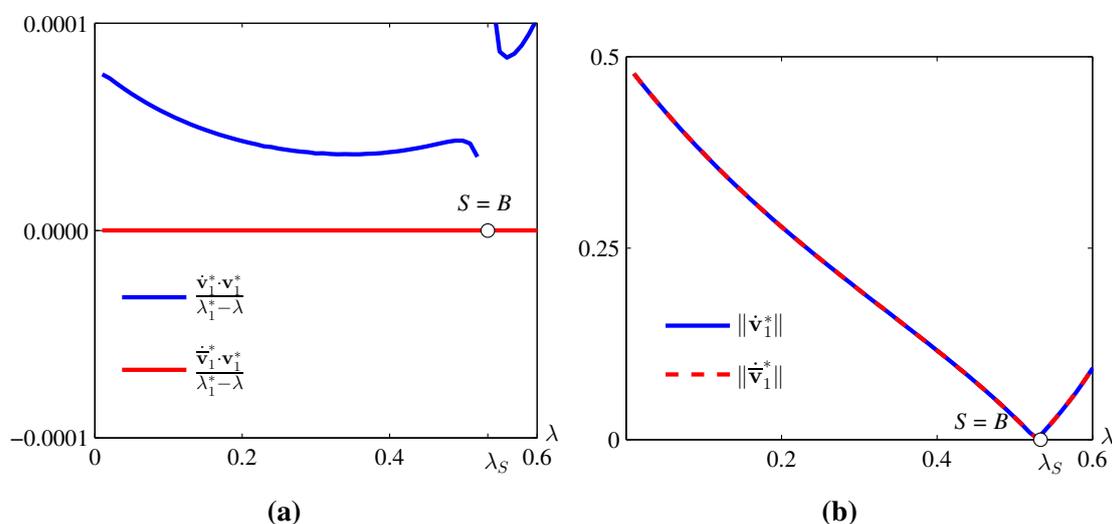


Abbildung 4.12: (a) $(\dot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^*)/(\lambda_1^* - \lambda)$ - λ Diagramm und (b) $\|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ - λ Diagramm, jeweils mit und ohne Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehungen $\dot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^* = 0$, die durch das Symbol “ \leftrightarrow ” über $\dot{\mathbf{v}}_1^*$ gekennzeichnet werden, für den in Abb. (5.4) dargestellten, auf reine Biegung beanspruchten Balken

Das $(\dot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^*)/(\lambda_1^* - \lambda)$ - λ Diagramm wird mit dem gemäß Gl. (4.89) verbesserten Vektor $\ddot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ verglichen. Die numerische Genauigkeit der Orthogonalitätsbeziehung $(\dot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^*)/(\lambda_1^* - \lambda)$ liegt bei weniger als 10^{-4} im Vorbeulbereich. Die Kurve $(\ddot{\mathbf{v}}_1^* \cdot \mathbf{v}_1^*)/(\lambda_1^* - \lambda)$ - λ weist maximal eine Abweichung von 10^{-9} von Null auf. Abb. (4.12b) zeigt das $\|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ - λ Diagramm für dasselbe Beispiel, jeweils ohne und mit Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehungen gemäß Gl. (4.88). Die Berücksichtigung dieser Beziehungen hat laut Abb. (4.12b) keinen erkennbaren Einfluss auf $s(\lambda) = \|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$.

Mittels der vorgestellten Methode zur Verbesserung von $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda)$ auf Basis des fundamentalen Eigenvektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ wird das Residuum $r(\lambda)$, das sich bei der numerischen Berechnung aus der Orthogonalitätsbeziehung gemäß Gl. (4.87) ergibt, erheblich reduziert. Der mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verbundene Rechenaufwand ist allerdings bei großen Systemen sehr groß.

Numerische Untersuchung

5.1 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem Membranspannungszustand

Abb. (5.1) zeigt einen beidseitig gelenkig gelagerten Bogen, der mit einer gleichförmigen vertikalen Linienlast belastet ist. Die Bogenachse ist eine Parabel, die durch

$$y = \frac{4H}{L^2}x(L-x), \quad x \in [0, L], \quad (5.1)$$

beschrieben wird. Der Querschnitt ist rechteckig. Die Abmessungen des Rechtecks sind konstant. Die Werte der Geometrie- und Querschnittsparameter, L , H bzw. A , I , des Elastizitätsmoduls E und der Referenzlast \bar{p} sind ebenfalls in Abb. (5.1) angegeben. Im Gegensatz zu einem Dreigelenksbogen derselben geometrischen Form und derselben Belastung wie der Zweigelenksbogen ist dieser kein Stützlinienbogen. Trotzdem ist es gerechtfertigt, ihn näherungsweise als solchen zu betrachten, da die auftretenden Biegemomente vernachlässigbar klein sind. Ein Stützlinienbogen ist im Vorbeulbereich frei von Biegemomenten. Der Stabilitätsverlust geht also von einem Membranspannungszustand aus.

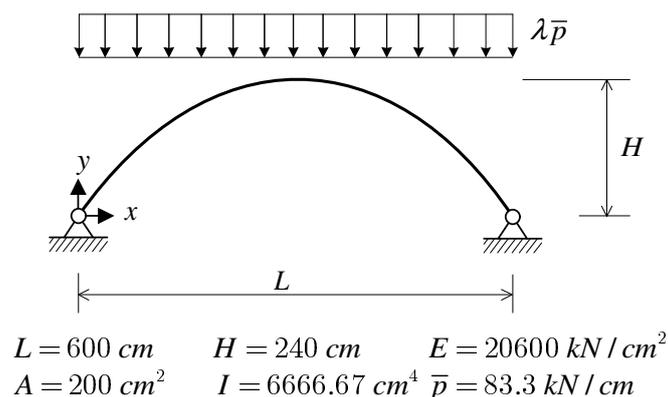


Abbildung 5.1: Geometrie, Materialparameter und Belastung eines beidseitig gelenkig gelagerten Parabelbogens

Die Struktur wird sowohl mit dem Programm FEM_{v2} als auch mit Hilfe von MSC.-MARC (Element #52 [35]) untersucht. Der Bogen wird mit 100 Balkenelementen mit je zwei Elementsknoten modelliert. Die Vertikalverschiebung u des Scheitelpunkts wird

als repräsentativer Freiheitsgrad gewählt. Ein positiver Wert von u bedeutet eine Verschiebung in Krafrichtung. Die mittels der beiden zitierten Programme erhaltenen λ - u Diagramme sind in Abb. (5.2a) dargestellt. Sie enthalten den Verzweigungspunkt $S = B$, auf den der Durchschlagspunkt D folgt. Da der Stabilitätsverlust durch Verzweigung des Gleichgewichts erfolgt, ist der Durchschlagspunkt praktisch bedeutungslos. Das mittels MSC.MARC erhaltene Ergebnis für den Last-Verschiebungspfad stimmt ausgezeichnet mit dem mit Hilfe von FEM_{v2} erhaltenen Resultat überein. Abb. (5.2b) zeigt das λ_1^* - λ Diagramm. Seine Nichtlinearität, die beim vorliegenden Problem klein ist, stellt eine charakteristische Eigenschaft eines nichtlinearen Stabilitätsproblems dar. Im Verzweigungspunkt ist $\lambda_1^* = \lambda_S$, siehe Gl. (2.54), und $\dot{\lambda}_1^* = 0$, siehe Gl. (2.57).

Abb. (5.3) zeigt $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramme, wobei $\mathbf{v}_{10}^* = \mathbf{v}_1^*(0)$ ist, siehe Gl. (2.3). Die horizontale Linie in Abb. (5.3a) erlaubt den Schluss, dass bei einem echten Stützlinsenbogen $\mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{v}_{10}^*$ ist. Die zu Beginn des Unterkapitels 2.2 aufgestellte Hypothese, siehe Gl. (2.19) und Abb. (2.5), ist somit numerisch verifiziert. Die in der vorliegenden Arbeit nicht dokumentierte numerische Untersuchung eines von *Miseschen* Fachwerks, das mit einer vertikalen Kraft im Scheitelpunkt belastet ist, stellt eine weitere Bestätigung dieser Hypothese dar. Dieses Beispiel ist durch eine beträchtlich stärker ausgeprägte Nichtlinearität des λ_1^* - λ Diagramms als die des Parabelbogens gekennzeichnet. Die Konstanz von \mathbf{v}_1^* hat spezielle physikalische Orthogonalitätsbedingungen zur Folge, siehe Gl. (2.39). Tab. 5.1 zeigt, dass die Qualität der Approximation dieser Bedingungen sehr gut ist. Im Gegensatz dazu beweist das in Abb. (5.3b) dargestellte $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm eines zweiseitig gelenkig gelagerten Kreisbogens, der durch eine vertikale Einzellast im Scheitelpunkt belastet wird [12], dass $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ nicht konstant ist. Das ist die Folge von Biegemomenten, die im Vorbeulbereich zusätzlich zu den Normalkräften auftreten. Abb. (5.3b) zeigt, dass das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm an der Stabilitätsgrenze $S = B$, d.h. im Verzweigungspunkt, ein Minimum aufweist. Das folgt aus der Spezialisierung von Gl. (2.37) für den Verzweigungspunkt, für den $\lambda_1^*(\lambda_S) - \lambda_S = 0$ gilt, siehe Gl. (2.54), und

$$\frac{\mathbf{v}_j^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*}{(\lambda_1^* - \lambda_j^*) \mathbf{v}_j^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_j^*} \quad (5.2)$$

einen endlichen Wert aufweist. Folglich gilt

$$c_{1j}^*(\lambda_S) = 0. \quad (5.3)$$

Substitution von Gl. (5.2) in den Ausdruck für $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ gemäß Gl. (2.38) ergibt

$$\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda_S) = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Der Stabilitätsgrenze entspricht also ein singulärer Punkt der fiktiven Flächenkurve auf einer Einheitskugel, die von der Spitze des Vektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ beschrieben wird. Es folgt somit

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^* = 0, \quad (5.5)$$

Mit Hilfe von Gl. (2.3) kann gezeigt werden, dass der sich in Gl. (5.5) manifestierende Extremwert von $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ ein Minimum ist, siehe Abb. (5.3b).

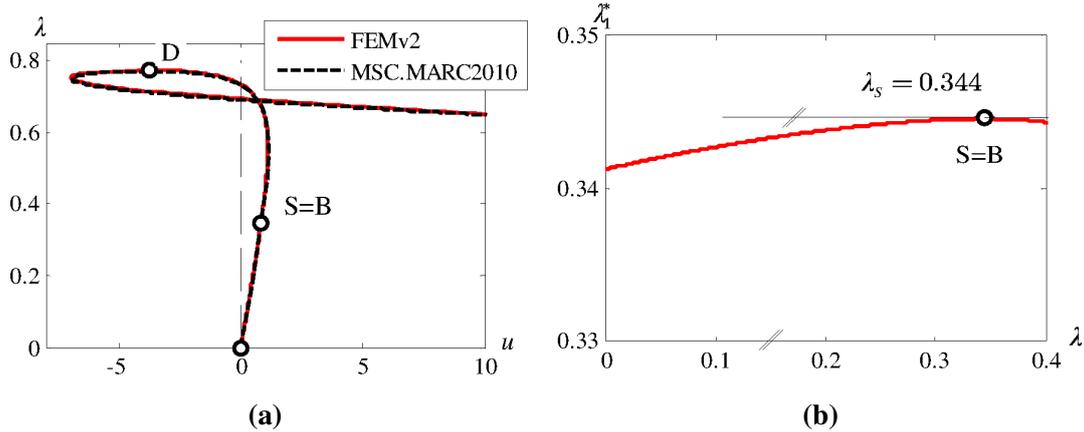


Abbildung 5.2: (a) λ - u Diagramme und (b) λ_1^* - λ Diagramm eines zweiseitig gelenkig gelagerten Parabelbogens, der mit einer gleichförmig verteilten vertikalen Gleichlast belastet ist

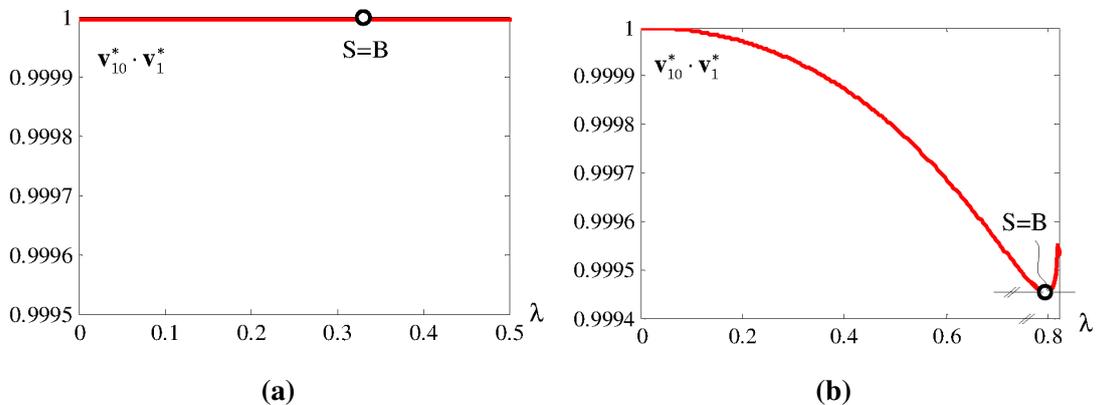


Abbildung 5.3: $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm (a) eines mit einer vertikalen Gleichlast belasteten, beidseitig gelenkig gelagerten Parabelbogens und (b) eines mit einer vertikalen Einzellast im Scheitelpunkt belasteten, beidseitig gelenkig gelagerten Kreisbogens

Tabelle 5.1: Approximation der *physikalischen Orthogonalitätsbeziehungen* $\mathbf{v}_j^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^* = 0$, $j \neq 1$, $\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_{10}^*$, beispielhaft für $j = 2, 3, 4$ und $\lambda = 0$

	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$\mathbf{v}_j^* \cdot \ddot{\mathbf{K}}_T \cdot \mathbf{v}_1^*$	7.4952×10^{-5}	-4.1178×10^{-5}	-2.5294×10^{-5}

5.2 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem reinen Biegespannungszustand

Abb. (5.4) zeigt einen gabelgelagerten Balken, der an beiden Enden durch Biegemomente $\lambda \overline{M}_y$ um die horizontale y -Achse beansprucht wird. Der Querschnitt des Balkens ist der eines IPE-400. Die Werte der Länge des Balkens L , der Querschnittsparameter A , I_y , I_z , I_t , I_ω , der elastischen Konstanten E , ν und des Referenzbiegemoments \overline{M}_y sind ebenfalls aus Abb. (5.4) ersichtlich. I_t bezeichnet dabei das Torsionsträgheitsmoment um die Längsachse x und I_ω den Wölbwiderstand.

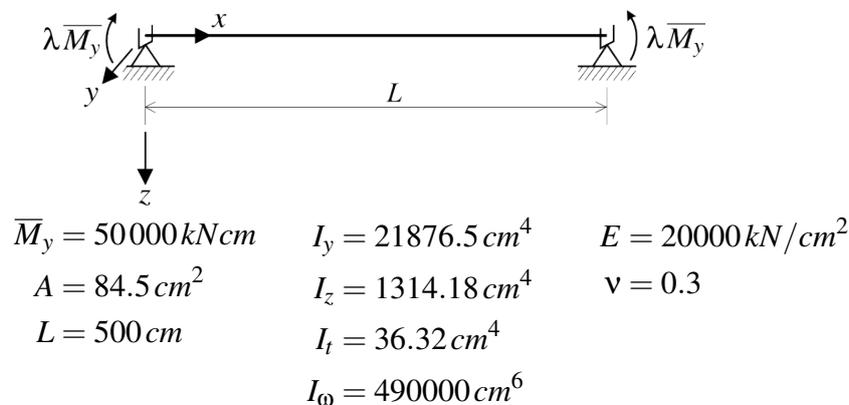


Abbildung 5.4: Geometrie, Materialparameter und Belastung eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

In [17] wurde die Steifigkeitsmatrix eines ähnlichen Balkens hergeleitet. Dabei wurde ein Verfahren verwendet, bei dem eine Übertragungsmatrix zum Einsatz gelangt. Bei dieser Matrix handelt es sich um eine Sekantensteifigkeitsmatrix.

Zur numerischen Untersuchung des Biegedrillknickens des Balkens mittels der FEM werden 1200 bilineare Schalenelemente (Element #75 [35]) verwendet. Diese Diskretisierung basiert auf einer vorher durchgeführten Konvergenzstudie. Abb. (5.5) zeigt die ersten drei Eigenformen des Balkens.

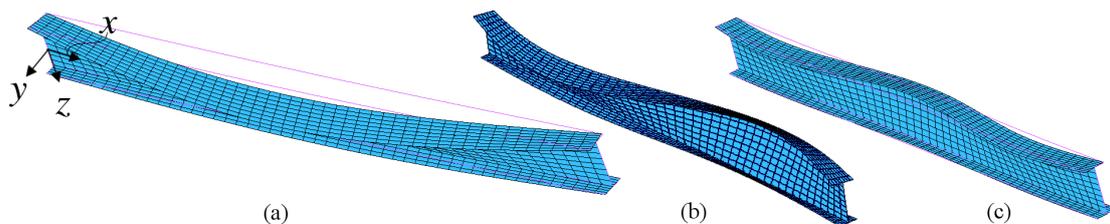


Abbildung 5.5: Biegedrillknicken des in Abb. (5.4) dargestellten Balkens: (a) erste, (b) zweite, (c) dritte Eigenform

Die Eigenwertanalyse mit MSC.MARC führt auf

$$\lambda_S = 0.531 \quad (5.6)$$

als Wert des Laststeigerungsfaktors an der Stabilitätsgrenze. Er unterscheidet sich nur wenig von

$$\lambda_S = 0.526 \tag{5.7}$$

als dem Ergebnis einer analytischen Rechnung gemäß [38]. Darin ergibt sich das kritische Biegemoment um die y-Achse zu

$$M_{cr,y} = \lambda_S \overline{M}_y = N_{Ki,z} \cdot c, \tag{5.8}$$

mit

$$N_{Ki,z} = \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{L^2}, \quad c = \sqrt{\frac{I_\omega + 0.039 \cdot L^2 \cdot I_t}{I_z}}. \tag{5.9}$$

Kleine Differenzen bei der numerischen Realisierung der Randbedingungen scheinen die Hauptursache der kleinen Differenz zwischen den zwei Werten für λ_S zu sein.

Abb. (5.6a) zeigt das λ_1^* - λ Diagramm. Abb. (5.6b) enthält das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm. Die Variabilität von $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ resultiert aus der Biegebeanspruchung im Vorbeulbereich. Analog zur Situation eines durch eine Einzellast im Scheitelpunkt belasteten Kreisbogens, siehe Abb. (5.3b), besitzt $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ ein Minimum im Verzweigungspunkt S. Aus Abb. (5.6b) folgt, dass $\varphi(\lambda_S) = \arccos(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S))$ sehr klein ist.

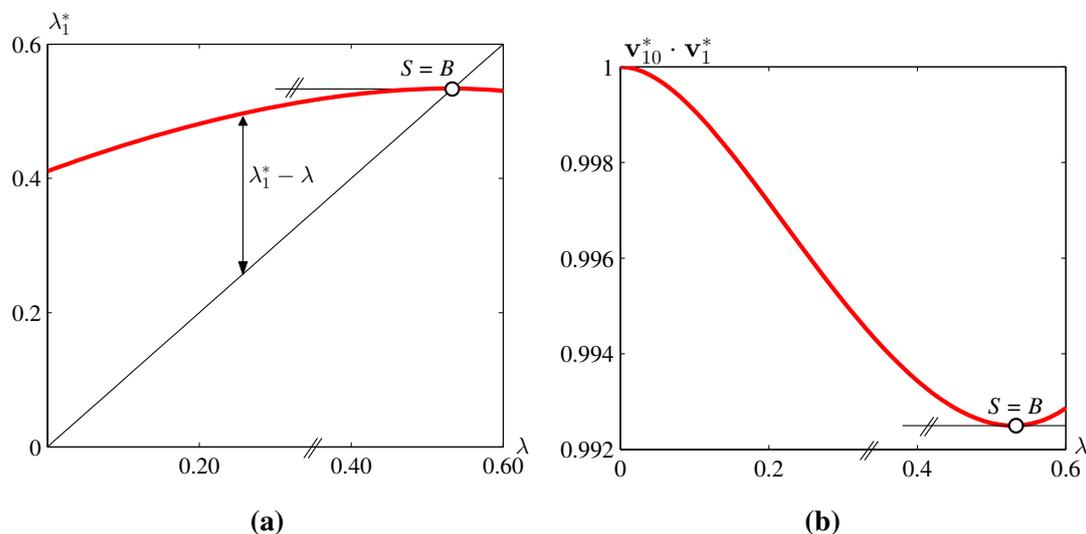


Abbildung 5.6: (a) λ_1^* - λ Diagramm, (b) $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm eines auf reine Biegung um die y-Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

Abb. (5.7a) zeigt das ρ - λ Diagramm. $\rho(\lambda_S) = 0$, siehe Gl. (4.15.2), verhindert, dass die Funktion $\rho(\lambda) = -\mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{n}$, siehe Gl. (4.14.2), die ursprünglich vermutete Beziehung $\rho(\lambda) = 1$ erfüllt. Eine solche Beziehung liegt, was sich im Laufe der Arbeit an der vorliegenden Abhandlung gezeigt hat, außerhalb der Gültigkeit von $\rho(\lambda)$, siehe Gl. (2.50). Die Abweichung von $\rho(\lambda)$ von 1 bleibt jedenfalls weitestgehend klein. Sie steigt von 0.9% bei $\lambda/\lambda_S = 0.10$ auf 2.8% bei $\lambda/\lambda_S = 0.975$ an. Abb. (5.7b) enthält das c - λ Dia-

gramm. Obwohl die Bedingung $c(\lambda) = 1$, siehe Gl. (2.49), nicht erfüllt ist, ist die Qualität der Approximation von $(U - U_M)/U = 1$ ausgezeichnet, siehe Tab. 5.2. Das ist die Folge der zuvor erwähnten, mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft von der Stabilitätsgrenze sehr kleinen Abweichung von $\rho(\lambda)$ von 1.

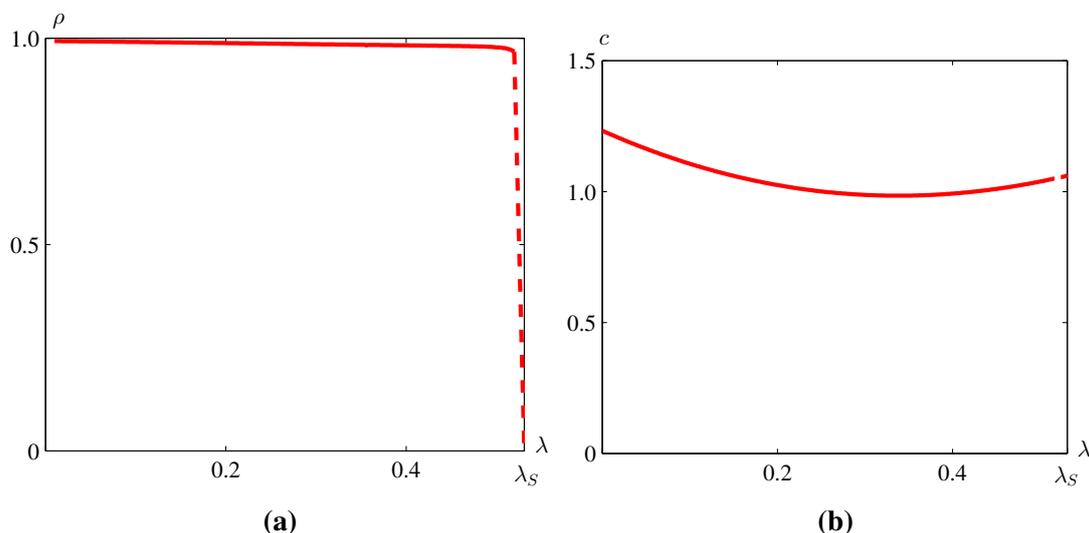


Abbildung 5.7: (a) ρ - λ Diagramm, (b) c - λ Diagramm eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

Tabelle 5.2: Approximation der Bedingung $(U - U_M)/U = 1$ eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

	λ/λ_S						
	0.20	0.40	0.60	0.80	0.90	0.95	0.975
$\frac{U - U_M}{U}$	1.00194	1.00045	0.99953	1.00000	1.00106	1.00146	1.00038

Im Folgenden wird auf die alternative Hypothese gemäß Gl. (4.38) eingegangen. Abb. (5.8a) zeigt für den auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400 das α - λ und β - λ Diagramm gemäß Gl. (4.39). Die beiden Diagramme stimmen mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft von λ_S und für $\lambda < 0.1$ sehr gut überein. Die alternative Hypothese liefert für den Grenzfall reiner Biegung eine ausgezeichnete Approximation von $(U - U_M)/U = 1$. Abb. (5.8b) zeigt dies in Form des $\cos(\alpha - \beta)$ - λ Diagramms. Die Abweichung von 1 für kleine Werte von λ ist vernachlässigbar, wenn man sich den Maßstab der Ordinate vor Augen führt. Die kleine Abweichung des Werts $\cos(\alpha - \beta)$ von 1 führt für den Grenzfall reiner Biegung auf eine ausgezeichnete Qualität der Approximation von $(U - U_M)/U = 1$, siehe Tab. 5.3. Die alternative Hypothese für $(U - U_M)/U$ in Gl. (4.38) erfüllt somit neben dem Grenzfall eines Membranzustands auch den Grenzfall reiner Biegung.

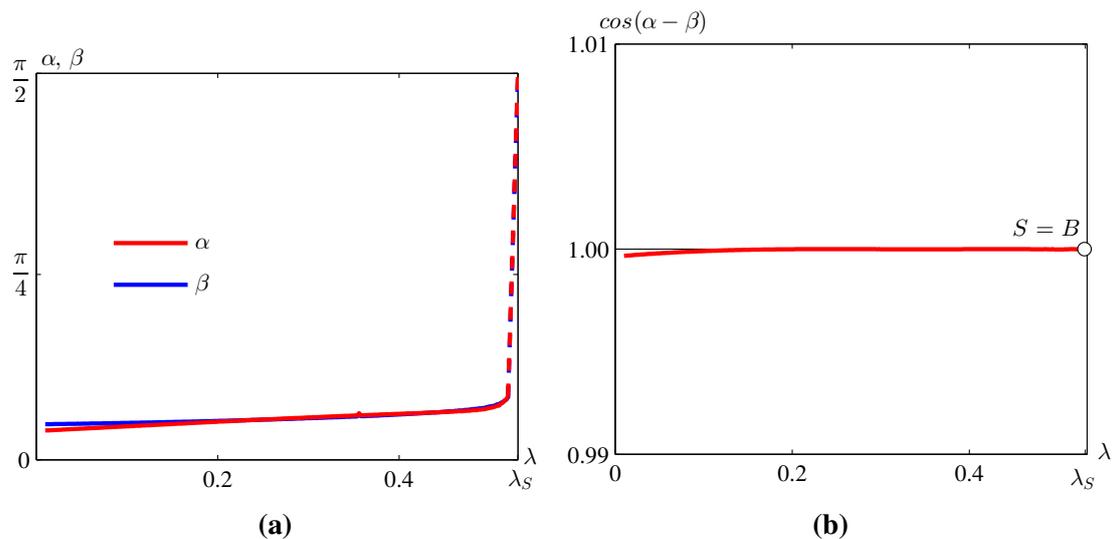


Abbildung 5.8: (a) α - λ und β - λ Diagramm, (b) $\cos(\alpha - \beta)$ - λ Diagramm eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

Tabelle 5.3: Approximation der Bedingung $(U - U_M)/U = 1$ auf Basis der alternativen Hypothese für $(U - U_M)/U$ gemäß Gl. (4.38) eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

	λ/λ_S						
	0.20	0.40	0.60	0.80	0.90	0.95	0.975
$\frac{U - U_M}{U}$	0.99992	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998	0.99999

Für einen reinen Biegespannungszustand im Vorbeulbereich folgt bei Berücksichtigung von Gl. (2.2) und Gl. (2.5)

$$\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda)) = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.10}$$

siehe Abb. (5.9). Der Wert von

$$\varphi(\lambda_S) = \arccos(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S)) \tag{5.11}$$

ist sehr klein. Im vorliegenden Fall ist $\varphi(\lambda_S)$ gleich dem Winkel, der von \mathbf{e}_x und $\mathbf{a}(\lambda_S)$ eingeschlossen wird. Um den Eindruck eines konstanten Eigenvektors $\mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{e}_x$ zu vermeiden, wurde bei der Darstellung der Abweichung des Vektors $\mathbf{a}(\lambda_S)$ von \mathbf{e}_x in Abb. (5.9) stark übertrieben. Der Winkel $\varphi(\lambda_S)$ korreliert mit einem Ausdruck, der sowohl von den ‘‘Nicht-Membran’’ Deformationen – im gegenständlichen Fall also von reiner Biegebeanspruchung – als auch von der Steifigkeit der Struktur zu Beginn des

Biegedrillknickens abhängt.

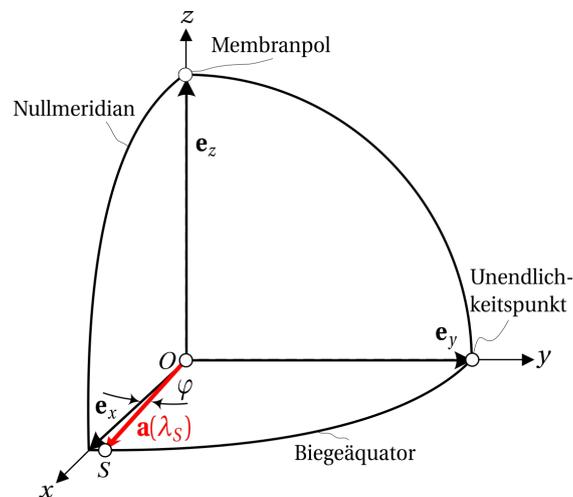


Abbildung 5.9: Reiner Biegespannungszustand

Die entsprechende Hypothese lautet:

$$\tan \varphi(\lambda_S) = (\xi(\lambda_S) - \xi_M(\lambda_S)) \left| 1 - \frac{\lambda_{,\xi}(\lambda_S)}{\lambda_{,\xi}(0)} \right|, \quad 0 \leq \varphi(\lambda_S) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (5.12)$$

mit ξ gemäß Gl. (2.59) und ξ_M als dem Membrananteil von ξ . Für den vorliegenden Grenzfall eines reinen Biegespannungszustands ist

$$\xi_M(\lambda_S) = 0. \quad (5.13)$$

Aus Gl. (5.12) folgt dementsprechend

$$\tan \varphi(\lambda_S) = \xi(\lambda_S) |1 - \lambda_{,\xi}(\lambda_S)|, \quad (5.14)$$

wenn die Referenzbelastung so gewählt ist, dass $\lambda_{,\xi}(0) = 1$ ist. Wegen der sehr kleinen Nichtlinearität der Last-Verschiebungspfade im Vorbeulbereich ist

$$0 < \xi(\lambda_S) |1 - \lambda_{,\xi}(\lambda_S)| \ll 1. \quad (5.15)$$

Das ist zu beachten, wenn ein Vergleich zwischen dem sehr kleinen Winkel $\varphi(\lambda_S)$ beim vorliegenden Beispiel, bei dem $U_M(\lambda) = 0$ ist, mit $\varphi(\lambda_S) = \pi/2$ in Abb. (2.5) gezogen wird. Dieser Winkel entspricht $U_M/U|_{\lambda=\lambda_S} = 0$, wobei allerdings $U_M(\lambda_S) \neq 0$ ist und $U(\lambda_S) = \infty$ gilt. Bei diesem Problem ist

$$\xi(\lambda_S) = \infty, \quad \xi_M(\lambda_S) \neq \infty, \quad \lambda_{,\xi}(\lambda_S) = 0, \quad (5.16)$$

woraus

$$\tan \varphi(\lambda_S) = \infty \implies \varphi(\lambda_S) = \frac{\pi}{2} \quad (5.17)$$

resultiert, siehe Abb. (2.4c).

Im Gegensatz zum sehr kleinen Winkel $\varphi(\lambda_S)$ beim gabelgelagerten IPE-400 ist die Änderung von $\rho(\lambda)$ im Bereich kurz vor der Stabilitätsgrenze groß, siehe Abb. (5.7a). Daher ändert sich der Vektor $\mathbf{n}(\lambda)$, der in die Formel für $\rho(\lambda)$ eingeht, siehe Gl. (4.14), stark, obwohl sich $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ nur sehr wenig ändert.

Die numerische Untersuchung des Grenzfalls eines reinen Biegespannungszustands erlaubt die Schlussfolgerung der Brauchbarkeit der Hypothese für $(U - U_M)/U$, siehe Gl. (2.42), für den Spezialfall eines konstanten Werts von $(U - U_M)/U$. Für den betreffenden Grenzfall beträgt die maximale Abweichung vom wahren Wert 1 laut Tab. 5.2 weniger als 1%. Für den Grenzfall eines reinen Membranspannungszustands erhält man für alle Werte von λ die exakte Lösung, wenn man von vernachlässigbar kleinen numerischen Fehlern absieht.

5.2.1 Konvergenzstudie

Die große Anzahl an Elementen zur Modellierung des in Abb. (5.4) dargestellten Balkens verursacht längere Rechenzeiten bei der Lösung des CLE und bei nachträglichen Berechnungen, in denen $\tilde{\mathbf{K}}_T$ oder \mathbf{v}_1^* erneut abgerufen werden muss. Die Anzahl der Elemente soll einerseits ausreichend groß sein, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erhalten, andererseits aber möglichst klein, um allzu lange Rechenzeiten zu vermeiden. Im Unterkapitel 4.1 wurde überdies darauf hingewiesen, dass eine große Anzahl von Elementen die Genauigkeit der numerischen Auswertung von ρ verringert. Die nachstehende Konvergenzstudie mittels mehrerer Netze soll eine Aussage zur optimalen Elementanzahl und eine Verifizierung des Ergebnisses für die Stabilitätsgrenze λ_S ermöglichen. Dabei wird zwischen der Anzahl der Elemente in Längsrichtung des Balkens, $N^{(l)}$, und der entsprechenden Anzahl in Querrichtung, $N^{(Q)}$, unterschieden.

Tab. 5.4 enthält für das vorliegende Beispiel eines auf reine Biegung beanspruchten Balkens, siehe Abb. (5.4), die Werte von λ_S für verschiedene Netze. Die Zahl der Elemente in Balkenlängsrichtung beträgt 26 bzw. 50 und 100. Die entsprechende Anzahl in Balkenquerrichtung ist 12 bzw. 24 und 48. Zusätzlich sind die prozentualen Differenzen zwischen den auf Basis dieser Netze enthaltenen Werte für λ_S in die Tab. 5.4 eingetragen.

Tabelle 5.4: λ_S für verschiedene Netze eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

		$N^{(l)}$		
		26	50	100
$N^{(Q)}$	λ_1^*			
	12	0.5293 ↓ -0.58% 0.5262	→ -0.34% → 0.5311 ↓ -0.60% 0.5279	→ -0.17% → 0.5320 ↓ -0.60% 0.5288
	24	↓ -0.29% 0.5247	↓ -0.28% 0.5264	↓ -0.30% 0.5272
48		→ -0.32% →	→ -0.15% →	

Tab. 5.4 wird entnommen, dass die Wirkung der Netzverfeinerung in der Längsrichtung entgegengesetzt der in der Querrichtung ist. Da die größte Abweichung zweier verschiedener Werte für λ_S in Tab. 5.4 nur rund 0.6% beträgt, wird das Netz mit $N^{(Q)} = 12$ und $N^{(l)} = 50$ für die weiteren Untersuchungen gewählt. Es wird in der Folge abgekürzt zu [12/50] geschrieben. Diese Diskretisierung ermöglicht eine effiziente Lösung des CLE und eine schnelle Nachlaufrechnung.

Abb. (5.10) enthält Ergebnisse für verschiedene Netze. Abb. (5.10a) zeigt $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramme. Die Netze sind zu $[N^{(Q)}/N^{(l)}]$ ausgewiesen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Diskretisierung mit $N^{(Q)} = 48$ in Abb. (5.10a) nicht berücksichtigt. Abb. (5.10b) zeigt entsprechende ρ - λ Diagramme.

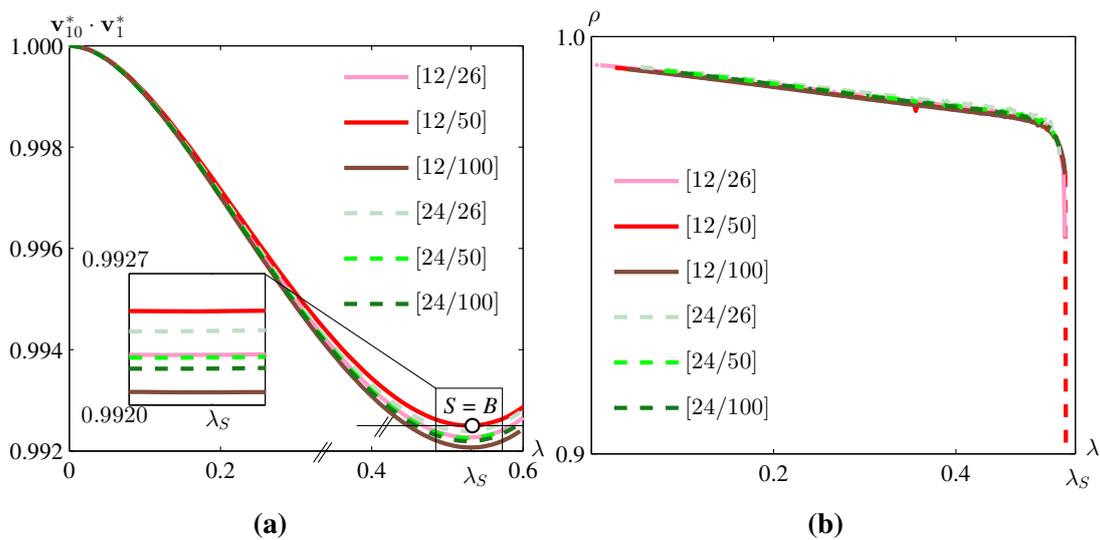


Abbildung 5.10: (a) $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ - λ Diagramme, (b) ρ - λ Diagramme für verschiedene FE Netze $[N^{(Q)}/N^{(l)}]$ eines auf reine Biegung um die y -Achse beanspruchten, gabelgelagerten IPE-400

Die $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ - sowie die ρ - λ Diagramme unterscheiden sich nur relativ wenig voneinander. Die Werte von $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ für die Querschnittsdiskretisierung mit 24 Elementen

liegen in der Umgebung von λ_S näher beieinander als die für $N^{(Q)} = 12$. Mit steigender Anzahl der Elemente in Längsrichtung weicht $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ stärker von Eins ab, wobei die Diskretisierung [12/50] eine Ausnahme bildet. Quantitative Trends lassen sich in Abb. (5.10b) nicht ausmachen. Angemerkt sei jedoch, dass die Anzahl der Werte von λ , für die ρ ermittelt wurde und für die die numerische Lösung gemäß Abb. (4.4) nicht konvergiert, mit wachsender Anzahl der Elemente entlang der Längsachse zunimmt.

5.3 Stabilitätsverlust, ausgehend von einem allgemeinen Spannungszustand

5.3.1 Winkelmessung

Für den von $da(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ und dem Breitenkreis $\theta = konst.$ eingeschlossenen Winkel ψ , siehe Abb. (5.11), gilt

$$\tan \psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\varphi}, \quad (5.18)$$

$d\theta$ folgt aus Gl. (2.2) zu

$$d\theta = -\frac{1}{\sin 2\theta} d\left(\frac{U_M}{U}\right) \quad (5.19)$$

und $d\varphi$ aus Gl. (2.3) zu

$$d\varphi = -\frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{v}_{10}^* \cdot d\mathbf{v}_1^*. \quad (5.20)$$

Einsetzen von Gl. (5.19) und Gl. (5.20) in Gl. (5.18) ergibt

$$\tan \psi = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta \sin 2\theta} \frac{d\left(\frac{U_M}{U}\right)}{\mathbf{v}_{10}^* \cdot d\mathbf{v}_1^*}. \quad (5.21)$$

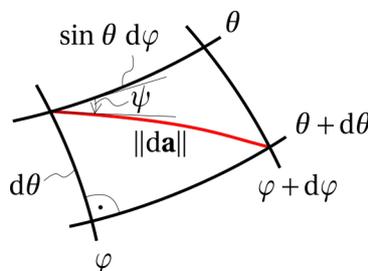


Abbildung 5.11: Zur Bestimmung des Winkels ψ

An der Stabilitätsgrenze ist

$$d\mathbf{v}_1^*(\lambda_S) = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Gl. (5.22) folgt aus Gl. (5.4), die für eine Stabilitätsgrenze in Form eines Verzweigungspunkts gilt. Gl. (5.22) muss offensichtlich auch für eine Stabilitätsgrenze in Form eines

Durchschlagspunkts gelten. Um das zu zeigen, wird von der ursprünglichen Parametrisierung des Ausdrucks für c_{1j}^* mit λ , siehe Gl. (2.37), auf eine Parametrisierung mit ξ übergegangen. Für c_{1j} erhält man dann

$$c_{1j}^* = -\frac{\lambda_1^* - \lambda}{\lambda_1^* - \lambda_j^*} \frac{\mathbf{v}_j^* \cdot \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi\xi} \lambda_{,\xi} - \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \lambda_{,\xi\xi}}{(\lambda_{,\xi})^3} \cdot \mathbf{v}_1^*}{(\lambda_1^* - \lambda_j^*) \mathbf{v}_j^* \cdot \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi}}{\lambda_{,\xi}} \cdot \mathbf{v}_j^*} = -\frac{\lambda_1^* - \lambda}{\lambda_1^* - \lambda_j^*} \frac{\mathbf{v}_j^* \cdot \frac{\tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi\xi}}{\lambda_{,\xi}} \cdot \mathbf{v}_1^*}{\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \cdot \mathbf{v}_j^*}, \quad (5.23)$$

wobei von der aus Gl. (2.40.2) folgenden Orthogonalitätsrelation

$$\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \cdot \mathbf{v}_1^* = 0 \quad (5.24)$$

Gebrauch gemacht wird. Substitution von Gl. (5.23) in

$$\dot{\mathbf{v}}_1^* = \frac{\mathbf{v}_{1,\xi}^*}{\lambda_{,\xi}} = \sum_{j=2}^N c_{1j}^* \cdot \mathbf{v}_j^* \quad (5.25)$$

ergibt

$$d\mathbf{v}_1^* = -(\lambda_1^* - \lambda) \left(\sum_{j=2}^N \frac{\mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi\xi} \cdot \mathbf{v}_1^*}{(\lambda_1^* - \lambda_j^*) \mathbf{v}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{T,\xi} \cdot \mathbf{v}_j^*} \mathbf{v}_j^* \right) d\xi. \quad (5.26)$$

Da, wie bereits im Unterkapitel 2.4 erwähnt, der Durchschlagspunkt einem N -fachen Eigenwert des CLE entspricht, gilt für die Stabilitätsgrenze

$$\lambda_1^*(\lambda_S) - \lambda_S = 0, \quad \lambda_1^*(\lambda_S) - \lambda_j^*(\lambda_S) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N. \quad (5.27)$$

Anwendung der Regel von *de L'Hospital* und Berücksichtigung der Relationen (2.66) sowie der Gl. (2.68) führt auf

$$\frac{\lambda_1^* - \lambda}{\lambda_1^* - \lambda_j^*} \Big|_{\lambda=\lambda_S} = \frac{0}{0} = \frac{\lambda_{1,\xi}^* - \lambda_{j,\xi}}{\lambda_{1,\xi}^* - \lambda_{j,\xi}} \Big|_{\lambda=\lambda_S} = \frac{0-0}{0-\lambda_{j,\xi}^*} = 0. \quad (5.28)$$

Einsetzen von Gl. (5.28) in Gl. (5.26) bestätigt Gl. (5.22). Berücksichtigung von Gl. (5.22) in Gl. (5.21) ergibt

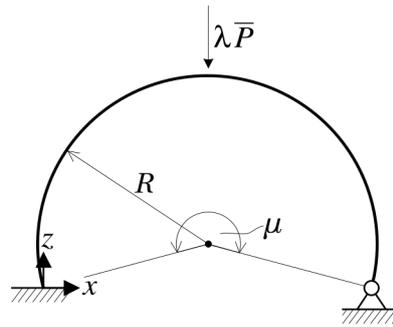
$$|\tan \psi(\lambda_S)| = \infty. \quad (5.29)$$

Somit berührt die Flächenkurve an der Stabilitätsgrenze den Beulmeridian, siehe Abb. (2.1).

5.3.2 Durchschlagen eines Kreisbogens

Abb. (5.12) zeigt einen Kreisbogen, der mit einer vertikalen Einzellast im Scheitelpunkt belastet ist. An seinem linken Ende ist er eingespannt. Am rechten Ende ist er gelenkig gelagert. Der Querschnitt des Bogens ist rechteckig. Die Abmessungen des Recht-

ecks sind konstant. Die Werte des Radius R , des Winkels μ , der Biegesteifigkeit EI , der Dehnsteifigkeit EA , der Schubsteifigkeit GA/\varkappa , wobei G den Schubmodul und \varkappa den Schubbeiwert bezeichnet, und der Referenzlast \bar{P} sind in Abb. (5.12) angegeben. Die Schubsteifigkeit erhält man durch Division der Dehnsteifigkeit durch $2(1 + \nu)\varkappa$, wobei $\nu = 0.25$ angenommen und $\varkappa = 1.2$ berücksichtigt wird.



$$R = 1907.4 \text{ cm} \quad \mu = 215^\circ \quad \bar{P} = 1000 \text{ kN}$$

$$EI = 10^8 \text{ kNcm}^2 \quad EA = 5 \cdot 10^4 \text{ kN} \quad GA/\varkappa = 16666.7 \text{ kN}$$

Abbildung 5.12: Geometrie, Steifigkeit und Belastung eines Kreisbogens, der am linken Ende eingespannt und am rechten Ende gelenkig gelagert ist

Der Bogen wird mit Hilfe von MSC.MARC (Element #98 [35]) für drei verschiedene FE Diskretisierungen (100, 200 und 400 Elemente) untersucht. Abb. (5.13a) zeigt λ - w Diagramme, wobei w die Vertikalverschiebung des Scheitelpunkts bezeichnet. Positive Werte von w weisen auf eine Verschiebung in Richtung der Last hin. Abb. (5.13b) zeigt λ - φ Diagramme, wobei φ die Rotation des Scheitelpunkts bezeichnet. Ein positiver Wert von φ bedeutet eine Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn. An der Stabilitätsgrenze S ist $d\lambda = 0$. Es findet somit Durchschlagen statt. Die Ergebnisse der drei FE Diskretisierungen unterscheiden sich nur sehr wenig voneinander. Das äußert sich nicht zuletzt in den sehr kleinen Abständen zwischen den Stabilitätsgrenzen, siehe das Detail in Abb. (5.13a) bzw. Abb. (5.13b). Die Ordinaten λ_S dieser Punkte sind weniger als 4% größer als der in [5] angeführte Wert von λ_S . Abb. (5.13a) zeigt, dass das λ - w Diagramm stark nichtlinear und dass die Durchbiegung an der Stabilitätsgrenze sehr groß ist. Abb. (5.13b) veranschaulicht, dass $\varphi(\lambda)$ ein Maximum im Vorbeulbereich aufweist. Im Folgenden wird die FE Diskretisierung mit 200 Elementen verwendet.

Abb. (5.14a) zeigt die fundamentale Eigenform für $\lambda = 0$. Sie ist Teil des Ergebnisses einer Anfangsstabilitätsanalyse im Rahmen des CLE. Sie entspricht der in [5] dargestellten Eigenform. Abb. (5.14b) zeigt die verformte Lage des Bogens für $\lambda = 0.84$, d.h. kurz vor Erreichen der Stabilitätsgrenze bei $\lambda_S = 0.85$. Überlagert ist dieser Kurve die fundamentale Eigenform für den erwähnten Wert von λ . Beide Kurven stimmen gut mit den entsprechenden Kurven in [5] überein.

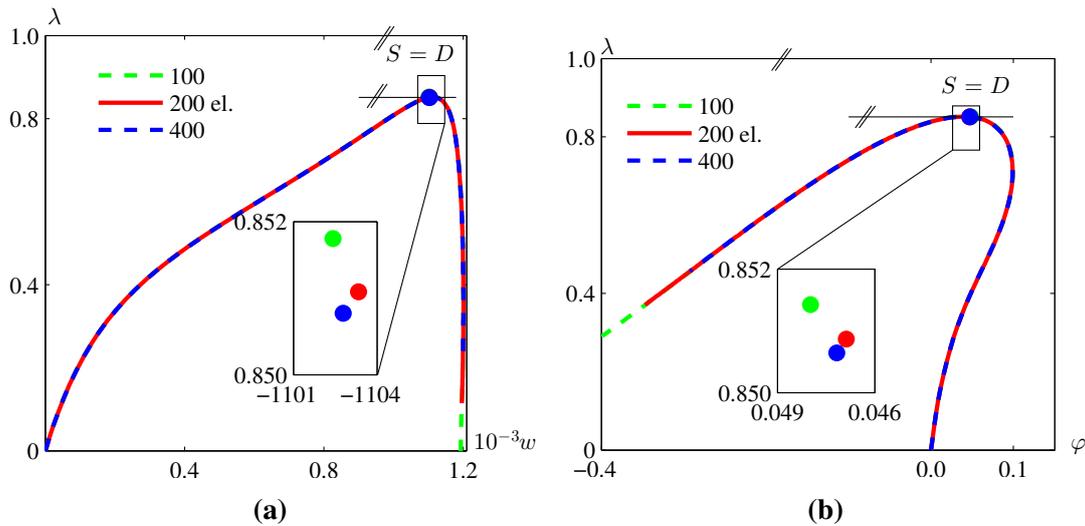


Abbildung 5.13: (a) λ - w Diagramme (w in [cm]) und (b) λ - φ Diagramme (φ in [rad]) für den Scheitelpunkt des in Abb. (5.12) dargestellten Kreisbogens

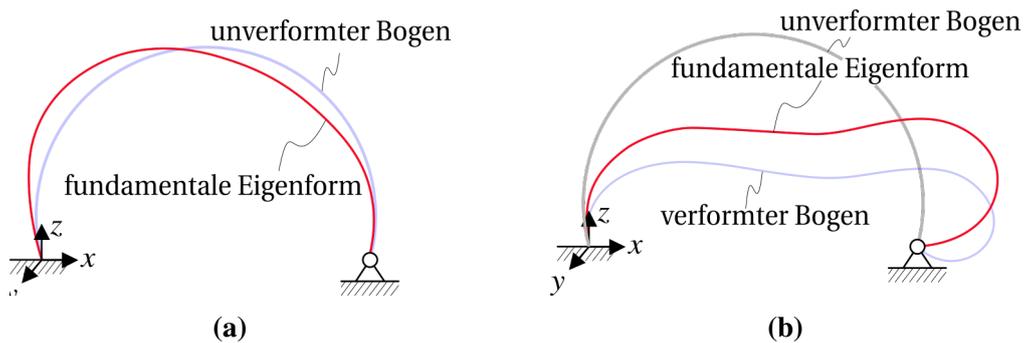


Abbildung 5.14: (a) Fundamentale Eigenform für $\lambda = 0$, (b) verformter Bogen bei $\lambda = 0.84$ (ohne Überhöhung) mit überlagerter Eigenform

Abb. (5.15a) zeigt das λ_1^* - λ Diagramm. Im Durchschlagspunkt D , der die Stabilitätsgrenze S darstellt, ist $\dot{\lambda}_1^* = -1$, siehe Gl. (2.63) (Die Auflösung in Abb. (5.15a) ist nicht fein genug, um das Maximum von $\lambda_1^*(\lambda)$ knapp vor der Stabilitätsgrenze ersichtlich zu machen). Die Form des Diagramms ist typisch für eine ausgeprägte Nichtlinearität im Vorbeulbereich. Sie ist durch große Verformungen an der Stabilitätsgrenze gekennzeichnet. Abb. (5.15b) zeigt das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm. An der Stabilitätsgrenze gilt

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \dot{\mathbf{v}}_1^* = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \frac{\mathbf{v}_{1,\xi}^*}{\lambda_{,\xi}} = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \frac{\mathbf{0}}{0} = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \frac{\mathbf{v}_{1,\xi\xi}^*}{\lambda_{,\xi\xi}}, \quad (5.30)$$

wobei von Gl. (2.58) und Gl. (5.22) sowie von der Regel von *de L'Hospital* Gebrauch gemacht wird. Ebenso wie in der Kurve $\lambda_1^*(\lambda)$ entspricht dem Durchschlagspunkt in der Kurve $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda)$ ein singulärer Punkt in Form einer Spitze. Sie ist in Abb. (5.15) nicht ersichtlich, da die beiden Kurven nur bis zur Stabilitätsgrenze gezeichnet wurden.

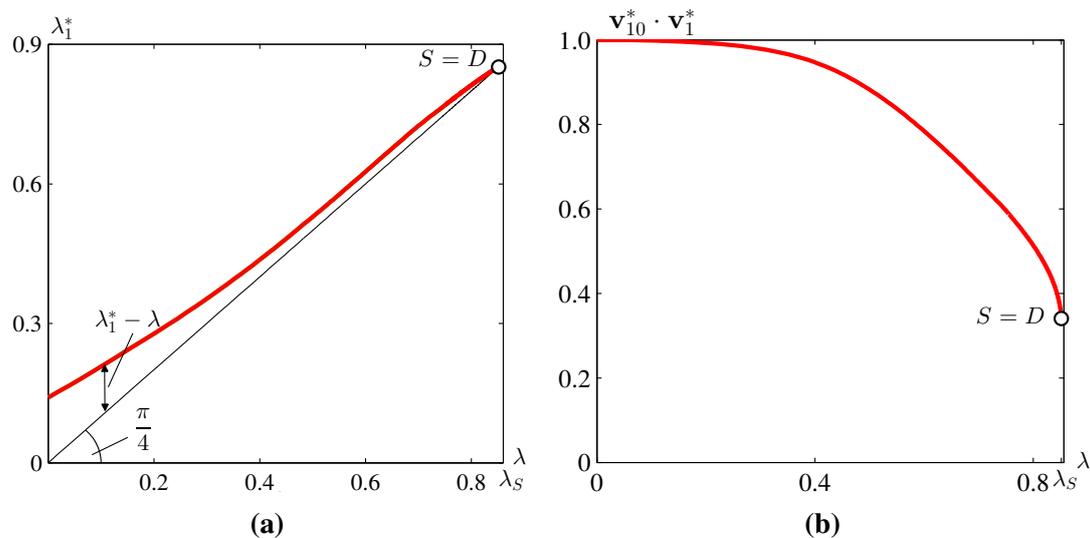


Abbildung 5.15: (a) λ_1^* - λ Diagramm und (b) $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm des in Abb. (5.12) dargestellten Kreisbogens

Abb. (5.16) zeigt die Kurve $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ auf der Oberfläche der Beulkugel für den in Abb. (5.12) dargestellten Kreisbogen. Der Winkel $\theta(\lambda)$ wurde auf konventionelle Weise ermittelt, siehe Unterkapitel 4.2. Die Berechnung wurde auch unter Zuhilfenahme der Hypothese für $(U - U_M)/U$, siehe Gl. (2.42), durchgeführt. Das Ergebnis wich aber stark von dem der konventionellen Berechnung von θ ab. Die Hypothese wurde somit für den Fall des von einem allgemeinen Spannungszustand ausgehenden Stabilitätsverlusts falsifiziert. Zum Unterschied von den zwei Grenzfällen, in denen der fundamentale Eigenvektor entweder konstant ist (Membranspannungszustand), oder sich nur sehr wenig ändert (reiner Biegespannungszustand), trifft das im allgemeinen Fall nicht notwendigerweise zu, siehe Abb. (5.15b). Bei einem allgemeinen Spannungszustand können die Funktionen $\rho(\lambda)$ und $c(\lambda)$ viel komplizierter als bei den beiden Grenzfällen sein. Darin wird der Grund für das Versagen der Hypothese (2.42) beim vorliegenden Beispiel gesehen. Das beeinträchtigt das Konzept der Beulkugel insofern nicht, weil der Zenitwinkel auf konventionelle Weise, siehe Unterkapitel 4.2, effizienter berechnet werden kann. Der Winkel θ ist groß und ändert sich mit φ relativ wenig. Entsprechend Gl. (2.2) ist daher $(U - U_M)/U$ im gesamten Vorbeulbereich im Vergleich zum energetischen Komplement U_M/U relativ groß. Der Einfluss der Anzahl der zur Diskretisierung des Bogens verwendeten finiten Elemente auf die Ergebnisse ist vernachlässigbar klein. Das folgt aus der vernachlässigbar kleinen Abhängigkeit der Last-Verschiebungs Diagramme in Abb. (5.13) von der Anzahl der Elemente. Abb. (5.16) zeigt ferner, dass $\theta(\varphi)$ eine nichtmonotone Funktion sein kann. Im vorliegenden Fall gilt an der Stabilitätsgrenze

$$d\left(\frac{U_M}{U}\right) > 0 \implies d\theta < 0. \quad (5.31)$$

Weiters folgt für $\lambda = \lambda_S$,

$$d\mathbf{v}_1^* = \mathbf{0} \implies d\varphi = 0. \quad (5.32)$$

Einsetzen von $d\theta < 0$ und $d\varphi = 0$ in Gl. (5.18) führt auf

$$\tan \Psi(\lambda_S) = -\infty. \quad (5.33)$$

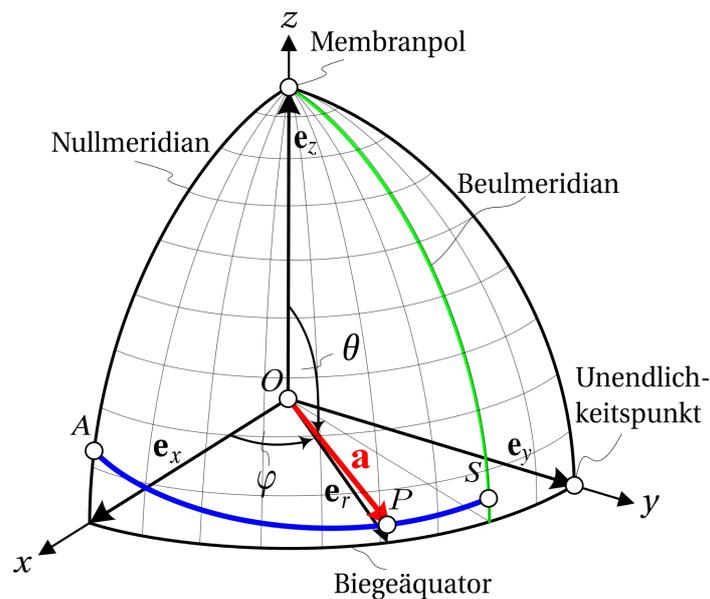


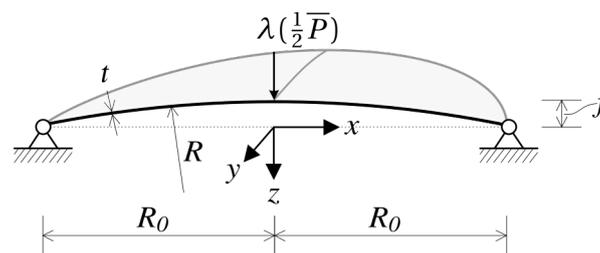
Abbildung 5.16: $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ für den in Abb. (5.12) dargestellten Kreisbogen

Die Flächenkurve wurde in Abb. (5.16) nur bis zur Stabilitätsgrenze dargestellt. Ihre große Krümmung in diesem Punkt könnte den falschen Eindruck erwecken, dass diese Kurve den Beulmeridian im Punkt S nicht tangiert.

Ein Vergleich des Resultats für $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ für das vorliegende Problem mit dem für das vorhergehende Problem des Biegedrillknickens aus einem reinen Biegespannungszustand verdeutlicht, dass der größte Unterschied zwischen den beiden Flächenkurven der Wert von $\varphi(\lambda_S)$ ist. Für das vorhergehende Problem ist er außerordentlich klein. Für das vorliegende Problem ist er hingegen groß. Das folgt aus dem fundamentalen Unterschied zwischen den Vorbeulbereichen der beiden Probleme. Er manifestiert sich in praktisch linearen Last-Verschiebungspfaden mit relativ kleinen Verformungen an der Stabilitätsgrenze beim vorhergehenden Problem im Gegensatz zur ausgeprägten Nichtlinearität dieser Pfade und zu sehr großen Deformationen an der Stabilitätsgrenze beim vorliegenden Problem. Das leichte Anwachsen des Zenitwinkels vor der Stabilitätsgrenze beim vorliegenden Problem, siehe Abb. (5.16), ist eine Folge der relativ großen Membranzugbeanspruchung in der Umgebung des Krafteintragungspunkts.

5.3.3 Verzweigungsbeulen einer Kugelkalotte

Abb. (5.17) zeigt die Hälfte einer gelenkig gelagerten Kugelkalotte mit konstanter Wandstärke, die durch eine vertikale Einzellast im Scheitelpunkt belastet wird. Die Werte des Radius R , der Dicke t , des Radius des Basiskreises R_0 , des Stiches f , des Elastizitätsmoduls E , der Querdehnzahl ν und der Referenzlast \bar{P} sind ebenfalls in Abb. (5.17) eingetragen. Die fundamentale Eigenform der Schale weist eine Symmetrieebene auf. Als solche wird hier die x - z Ebene gewählt, siehe Abb. (5.17). Die Berechnung wird daher für die durch $y \leq 0$ gekennzeichnete Schalenhälfte durchgeführt.



$$\begin{aligned}
 R &= 313.0 \text{ cm} & t &= 0.015 \text{ cm} & R_0 &= 5.0 \cdot 25 \text{ cm} & f &= 1.0 \text{ cm} \\
 E &= 21 \cdot 10^3 \text{ kNcm}^2 & \nu &= 0.3 & & & \bar{P} &= 250 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.17: Geometrie, Materialparameter und Belastung einer längs des Randes gelenkig gelagerten Kugelkalotte

Eine ähnliche Kugelkalotte wurde in [5] untersucht. Die dabei verwendete Diskretisierung war mit 96 Elementen relativ grob. In [5] wurden zwei Durchschlagsmodes und ein Verzerrungsmode ermittelt. Was Letzteren betrifft, wurde im Zuge der Laststeigerung eine Rotation der Eigenform um die durch den Scheitelpunkt verlaufende vertikale Achse beobachtet.

In einer Untersuchung für das in diesem Abschnitt behandelte Beispiel wurde die gesamte Kugelkalotte betrachtet, und es wurde überdies die Wandstärke der Schale variiert. Dabei wurde die erwähnte Rotation des Verzweigungsmodes im Vorbeulbereich bestätigt. Mit Hilfe des im Unterkapitel 4.3 beschriebenen Sortierungsalgorithmus lässt sich zeigen, dass im Vorbeulbereich zwei sehr nahe beieinander liegende Werte $\lambda_j^*(\lambda)$ existieren, denen zwei zueinander orthogonale Verzweigungsmodes entsprechen. Ihre Rotation um die vertikale Achse durch den Scheitelpunkt verhindert eine erfolgreiche Sortierung von Eigenwerten zwecks Auffindung des fundamentalen Eigenpaares auf Basis seines nicht-rotationssymmetrischen Eigenvektors. Eine Untersuchung der Änderung des Eigenvektors im Wege des $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramms ist nicht möglich. Um die angesprochene Rotation zu unterbinden, wird die in Abb. (5.17) dargestellte Hälfte der Kugelkalotte unter Berücksichtigung entsprechender Symmetriebedingungen untersucht. Berechnet werden dabei die rotationssymmetrische Vorbeulverformung und der

rotationssymmetrische Durchschlagmode. Der Unterschied der Beullast λ_S zwischen der Untersuchung einer Schalenhälfte und der gesamten Kugelkalotte beträgt weniger als 2%.

Die Schale wird mit Hilfe der Software MSC.MARC analysiert (Element #75 [35]), wobei drei unterschiedliche Diskretisierungen (96 bzw. 384 und 1536 Elemente) vorgenommen werden. Abb. (5.18a) zeigt λ - w Diagramme, wobei w die vertikale Durchbiegung des Scheitelpunkts bezeichnet. Positive Werte von w bedeuten Verschiebungen in Richtung der Last. Die für das mittlere Netz erhaltene Beullast ist um 9.8% kleiner als die für das größte Netz ermittelte. Für die feinste der drei Diskretisierungen ergibt sich eine um 2.4% kleinere Beullast als für das mittlere Netz. Abb. (5.18a) zeigt, dass die drei Kurven bis ungefähr $\lambda = 2$ sehr gut übereinstimmen. Sie spiegeln das lokale Verhalten der Struktur im Scheitelpunkt und in dessen Umgebung wider. Es ist durch eine anfängliche Abnahme der Steifigkeit gekennzeichnet, gefolgt von einer Versteifung aufgrund von Membranzugspannungen, die durch ausgeprägte Biegeverformungen in der Umgebung des Kraftangriffspunkts ausgelöst werden. Darauf folgt eine Abnahme der Steifigkeit. Schließlich wird die Stabilitätsgrenze in Form eines Verzweigungspunkts unmittelbar vor einem Maximum von λ erreicht.

Angemerkt sei, dass die Identifizierung des Durchschlagpunkts am Primärpfad in Abb. (5.18a) mehrere FE Rechnungen, siehe Abschnitt 3.3.4, erfordert. Sie unterscheiden sich durch verschiedene Toleranzen der Gleichgewichtsiteration. Da es um einen Durchschlagpunkt geht, müssen in der FE Vorlaufrechnung verschiebungsbasierte relative Toleranzen verwendet werden. Ferner muss die maximal zulässige Verschiebung in einem Inkrement begrenzt werden. Wird sie zu klein gewählt, wird kein Durchschlagpunkt gefunden und fälschlicherweise ein Versteifen des Systems angezeigt. Wird die maximal zulässige inkrementelle Verschiebung hingegen zu groß gewählt, so wird anstatt des Primärpfads der Sekundärpfad für Verzweigen ermittelt. Diese Situation wird dadurch verschärft, dass der Verzweigungs- und der Durchschlagpunkt sehr nahe beieinander liegen. Um bei großen Verschiebungen im Vorbeulbereich eine rechenökonomische Analyse zu ermöglichen, werden relative Toleranzen der Residuumskräfte berücksichtigt. In der Umgebung des Durchschlagpunkts von MSC.MARC werden sie durch die beschriebenen verschiebungsbasierten Toleranzen ersetzt.

Abb. (5.18b) zeigt die λ_1^* - λ Diagramme für die drei Diskretisierungen. Qualitativ sind sie den entsprechenden Diagrammen im vorhergehenden Beispiel ähnlich, siehe Abb. (5.15a). Ihr Verlauf ist typisch für eine ausgeprägte Nichtlinearität im Vorbeulbereich, verbunden mit großen Verformungen an der Stabilitätsgrenze. Alle drei Kurven enthalten jeweils zwei Punkte, an denen $\dot{\lambda}_1^* = 1$ ist. Die Region zwischen diesen beiden Punkten korreliert schwach mit den Wendepunkten der λ - w Diagramme in Abb. (5.18a),

wobei angemerkt sei, dass diese Diagramme jeweils nur einen einzigen Freiheitsgrad betreffen. In jedem Fall sind solche Zwischenregionen Indikatoren für einen stark variablen Mechanismus der Lastabtragung der Schale im Vorbeulbereich.

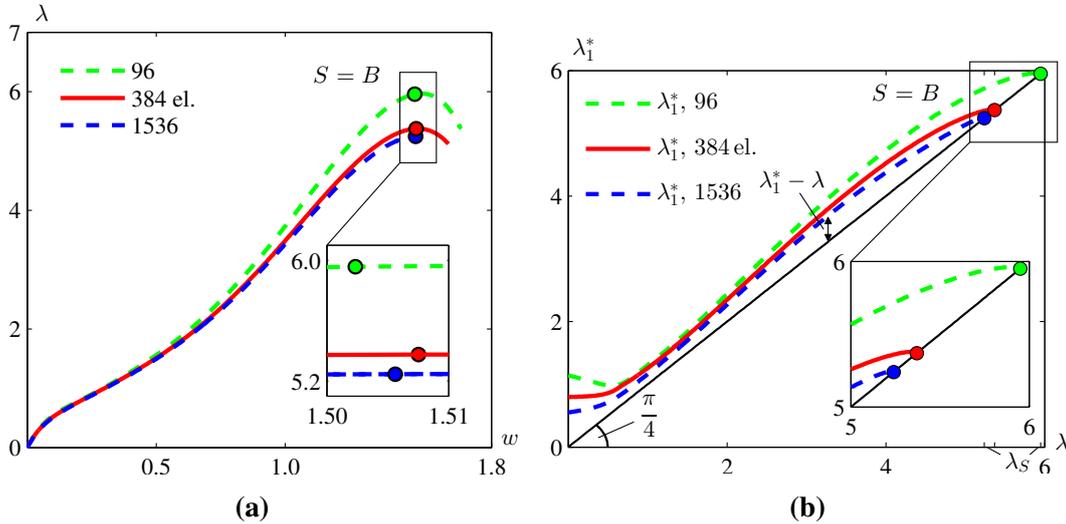


Abbildung 5.18: (a) λ - w Diagramme (w in [cm]) für den Scheitelpunkt der in Abb. (5.17) dargestellten Kugelkalotte, (b) λ_1^* - λ Diagramme für diese Schale

Im Folgenden wird die FE Diskretisierung mit 384 Elementen verwendet. Abb. (5.19a) zeigt die fundamentale Eigenform für $\lambda = 0$. Sie ist Teil des Ergebnisses einer Stabilitätsanalyse mittels des CLE zu Beginn des Belastungsprozesses. Abb. (5.19b) zeigt die Eigenform für $\lambda = 5.364$. Dabei handelt es sich um einen Wert von λ unmittelbar vor dem Erreichen der Stabilitätsgrenze. Das Pluszeichen im farblichen Maßstab bezieht sich auf ins Innere der unverformten Schale gerichtete und das Minuszeichen auf in ihr Äußeres gerichtete Verschiebungen.

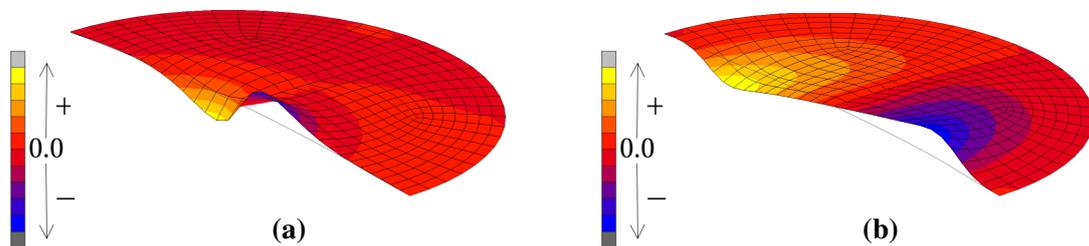


Abbildung 5.19: Fundamentale Eigenform für (a) $\lambda = 0$ und (b) $\lambda = 5.364$

Abb. (5.20) zeigt das $(\mathbf{v}_{10}^* - \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm. Es weist auf eine signifikante Änderung der fundamentalen Eigenform im Vorbeulbereich hin, die durch einen steilen Abfall der Funktion $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda)$ innerhalb eines relativ kleinen Belastungsintervalls bei einer vergleichsweise geringen Belastungsintensität gekennzeichnet ist.

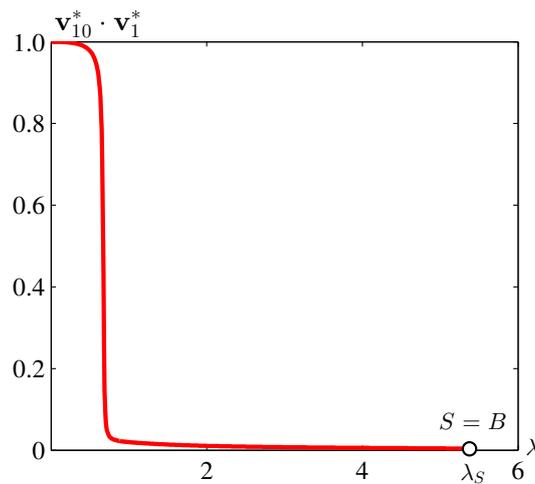


Abbildung 5.20: $(\mathbf{v}_{10}^* - \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm für die in Abb. (5.17) dargestellte Kugelkalotte

Der Umstand, dass sich der die Stabilitätsgrenze repräsentierende Verzweigungspunkt in unmittelbarer Nachbarschaft des Durchschlagpunkts befindet, weckte das Interesse an einer genaueren Untersuchung des Durchschlagmodes im Rahmen des CLE, siehe Abb. (2.6b). Abb. (5.21a) zeigt die betreffende Eigenform für $\lambda = 0$. In Abb. (5.21b) ist diese Eigenform für $\lambda = 5.364$ dargestellt. Wie bereits erwähnt, handelt es sich dabei um einen Wert von λ unmittelbar vor der Stabilitätsgrenze.

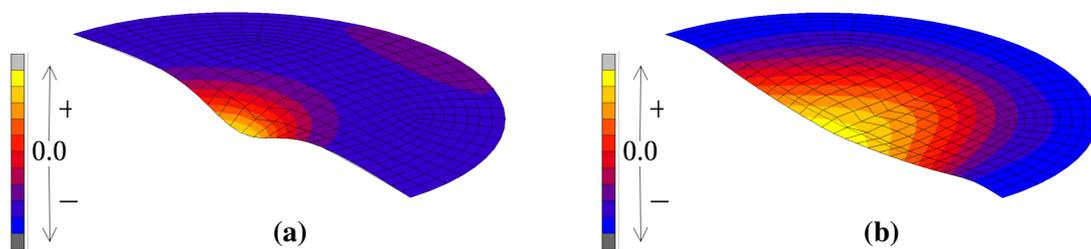


Abbildung 5.21: Eigenform des Durchschlagmodes für (a) $\lambda = 0$ und (b) $\lambda = 5.364$

Abb. (5.22) enthält das λ_1^* - λ Diagramm und das λ_2^* - λ Diagramm für die gegenständliche Kugelkalotte. Das Detail zeigt, dass der Verzweigungspunkt dem Durchschlagpunkt vorangeht. Bemerkenswerterweise ist $\lambda_1^* - \lambda > \lambda_2^* - \lambda$ mit Ausnahme eines sehr kleinen Bereichs unmittelbar vor dem Verzweigungspunkt. Das könnte den falschen Eindruck erwecken, dass der Stabilitätsverlust in Form von Durchschlagen erfolgt.

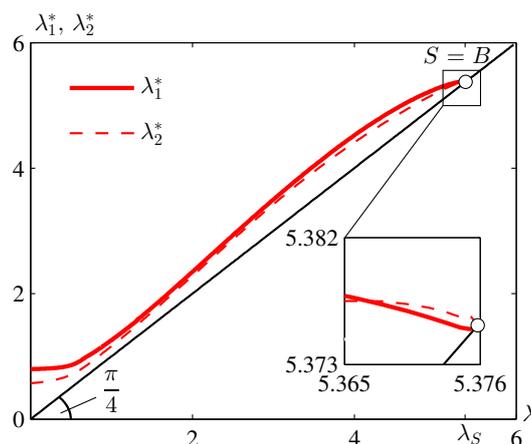


Abbildung 5.22: λ_1^* - λ Diagramm und λ_2^* - λ Diagramm für die in Abb. (5.17) dargestellte Kugelkalotte

Für den außergewöhnlichen Fall von *hilltop buckling*, gekennzeichnet durch das Zusammenfallen des Verzweigungspunkts mit dem Durchschlagspunkt, gelten die Beziehungen

$$\lambda_{,\xi}(\lambda_S) = 0, \quad \lambda_{1,\xi}^*(\lambda_S) = \lambda_{2,\xi}^*(\lambda_S) = 0 \implies \dot{\lambda}_1^*(\lambda_S) = \dot{\lambda}_2^*(\lambda_S) = -1. \quad (5.34)$$

In diesem Sonderfall gibt es zwei fundamentale Eigenpaare: $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ und $(\lambda_2^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_2^*(\lambda))$. Unter der Voraussetzung der numerisch nicht überprüften Gültigkeit der Hypothese (2.42) für $(U - U_M)/U$ gilt dann

$$\rho_1^2(\lambda) + c_1^2(\lambda) (1 - \rho_1^2(\lambda)) = \rho_2^2(\lambda) + c_2^2(\lambda) (1 - \rho_2^2(\lambda)). \quad (5.35)$$

Die Stabilitätsgrenze ist ein singulärer Punkt der Vektorfunktionen $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ und $\mathbf{v}_2^*(\lambda)$. Dementsprechend ist

$$\rho_1(\lambda_S) = \rho_2(\lambda_S) = 0, \quad (5.36)$$

siehe Gl. (2.43.2), woraus

$$c_1(\lambda_S) = c_2(\lambda_S) \quad (5.37)$$

mit $c_1(\lambda_S)$ und $c_2(\lambda_S)$ gemäß Gl. (2.44) folgt. Darüberhinaus müssen beide Eigenpaare auf denselben Vektor $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ führen. Folglich muss

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda) \quad (5.38)$$

gelten. Das setzt laut Gl. (2.3) die Gültigkeit der Beziehung

$$\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda) = \mathbf{v}_{20}^* \cdot \mathbf{v}_2^*(\lambda) \quad (5.39)$$

voraus.

Abb. (5.23) zeigt die Kurve $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ auf der Oberfläche der Beulkugel für die in Abb. (5.17) dargestellte Kugelkalotte. Der Winkel $\theta(\lambda)$ wurde auf konventionelle Weise ermittelt. Die anfängliche Zunahme dieses Winkels bedeutet einen mit wachsendem Winkel φ schwächeren Zuwachs der Membranenergie als der Biegeenergie. Relativ nahe dem Beulmeridian erreicht $\theta(\lambda)$ ein Maximum. Der prozentuale Anteil der Biegeenergie an der Verzerrungsenergie ist dann also am größten. Danach steigt der prozentuale Anteil der Membranenergie stärker als jener der Biegeenergie an. An der Stabilitätsgrenze tangiert die Flächenkurve den Beulmeridian. Dieser befindet sich bei diesem Beispiel in unmittelbarer Nähe des Meridians, der den in Abb. (5.23) definierten *Unendlichkeitspunkt* enthält. Das folgt aus

$$\cos \varphi(\lambda_S) = \mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda_S) = 0.00513, \quad (5.40)$$

demzufolge $\varphi(\lambda_S)$ nahezu 90° beträgt. Dieses Ergebnis ist mit der ausgeprägten Nichtlinearität des λ - w Diagramms, siehe Abb. (5.18a), und dem relativ großen Wert des Verhältnisses von $w(\lambda_S)$ zum Stich f der dünnen Schale konsistent. Aus den Abbn. (5.17) und (5.18a) folgt der Wert dieses Verhältnisses zu

$$w(\lambda_S) / f \approx 1.51. \quad (5.41)$$

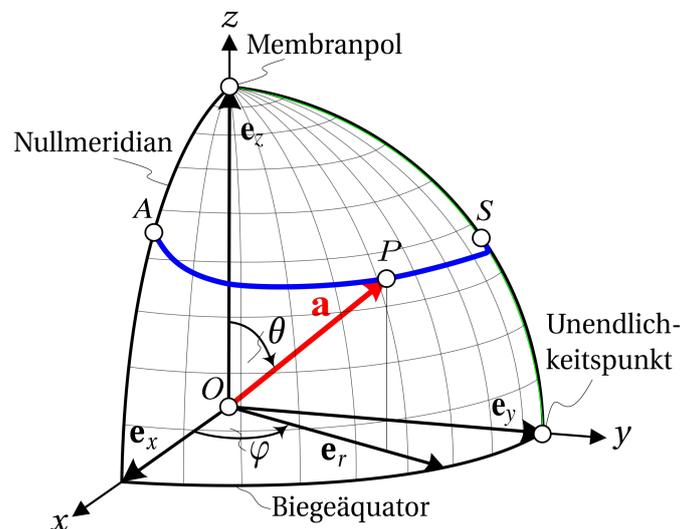


Abbildung 5.23: $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ für die in Abb. (5.17) dargestellte Kugelkalotte

Der Zenitwinkel der Punkte auf der Flächenkurve $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ in Abb. (5.23) ist bedeutend kleiner als der in Abb. (5.16). Der Grund dafür besteht darin, dass der Anteil der Lastabtragung einer konzentrierten Last in Form von Membranbeanspruchung bei der Schale beträchtlich größer als beim Bogen ist.

5.3.4 Verzweigungsknicken eines Kreisbogens

Abb. (5.24) zeigt einen ebenen Kreisbogen, der durch eine vertikale Einzellast im Scheitelpunkt belastet ist. An beiden Enden ist er gelenkig gelagert. Der Querschnitt des Bogens ist rechteckig. Die Abmessungen des Rechtecks sind konstant. Die Spannweite a , der Stich f , die Querschnittsbreite b und -höhe h , der Elastizitätsmodul E , die Querdehnzahl ν und die Referenzlast \bar{P} sind ebenfalls in Abb. (5.24) angegeben.

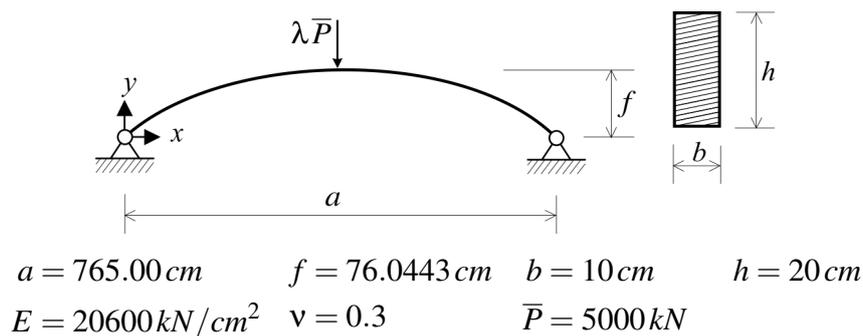


Abbildung 5.24: Geometrie, Materialparameter und Belastung eines zweiseitig gelenkig gelagerten Kreisbogens

Der Bogen wird mit Hilfe von MSC.MARC (Element #52 [35]) untersucht. Dabei werden drei verschiedene Diskretisierungen (100, 200 und 400 Elemente) berücksichtigt.

Abb. (5.25a) zeigt λ - w Diagramme, wobei w die Vertikalverschiebung des Scheitelpunkts bedeutet. Positive Werte von w bedeuten eine Verschiebung in Richtung der Belastung. Die Diagramme lassen eine deutliche Nichtlinearität erkennen. Die Steifigkeit des Systems nimmt ab. An der Stabilitätsgrenze S ist $d\lambda/dw > 0$, somit handelt es sich um einen Verzweigungspunkt. Es ist also $S = B$. Bei weiterer Steigerung der Belastung erreicht der Primärpfad einen Durchschlagspunkt, gekennzeichnet von $d\lambda = 0$. Im gegenständlichen Fall kommt ihm keine physikalische Bedeutung zu. Die mit den drei Diskretisierungen erhaltenen Diagramme stimmen ausgezeichnet überein, wobei der Wert für λ_S mit zunehmender Elementanzahl abnimmt. Deshalb wurde das λ - w Diagramm auch nicht bis zum Durchschlagspunkt fortgesetzt. Die mittels der drei Netze erhaltenen Ergebnisse für die Stabilitätsgrenze unterscheiden sich nur wenig voneinander, wie dem Detail in Abb. (5.25a) zu entnehmen ist. Der größte Unterschied zweier Werte für die Stabilitätsgrenze tritt beim Vergleich des Netzes mit 400 Elementen mit dem mit 100 Elementen auf. Er beträgt 0.5%. Die Diskretisierung mit 200 Elementen wird als ausreichend genau erachtet und für die weiteren Rechnungen verwendet. Die Verschiebung an der Stabilitätsgrenze beträgt 27% des Bogenstichs f .

Abb. (5.25b) zeigt das $\lambda_1^* - \lambda$ Diagramm. Der fundamentale Eigenwert $\lambda_1^* - \lambda$, ist in der Abbildung vermerkt. Stabilitätsverlust durch Verzweigen des Gleichgewichts äußert sich in einer horizontalen Tangente im Punkt B , also in $\dot{\lambda}_1^*(\lambda_S) = 0$. Vergleicht man das

λ_1^* - λ Diagramm in Abb. (5.25b) mit den λ_1^* - λ Diagrammen für den im Unterkapitel 5.1 behandelten Parabelbogen, der durch eine gleichförmig verteilte vertikale Linienlast beansprucht wird, siehe Abb. (5.2b), ferner mit den entsprechenden Diagrammen für den im Abschnitt 5.3.2 untersuchten Kreisbogen, der durch eine Einzellast im Scheitelpunkt belastet wird, siehe Abb. (5.15a), und schließlich mit den betreffenden Diagrammen für die im Abschnitt 5.3.3 behandelte Kugelkalotte, die ebenfalls im Scheitelpunkt durch eine Einzellast beansprucht wird, so lässt sich der Grad der Nichtlinearität des λ_1^* - λ Diagramms in Abb. (5.25b) zwischen dem des Parabelbogens und dem des zuvor erwähnten Kreisbogens einordnen. Der Wert der Verschiebung w an der Stabilitätsgrenze liegt zwischen entsprechenden Werten für diese beiden Probleme. Der vorstehende Kommentar bezieht sich allerdings nur auf einen, wenn auch charakteristischen Freiheitsgrad.

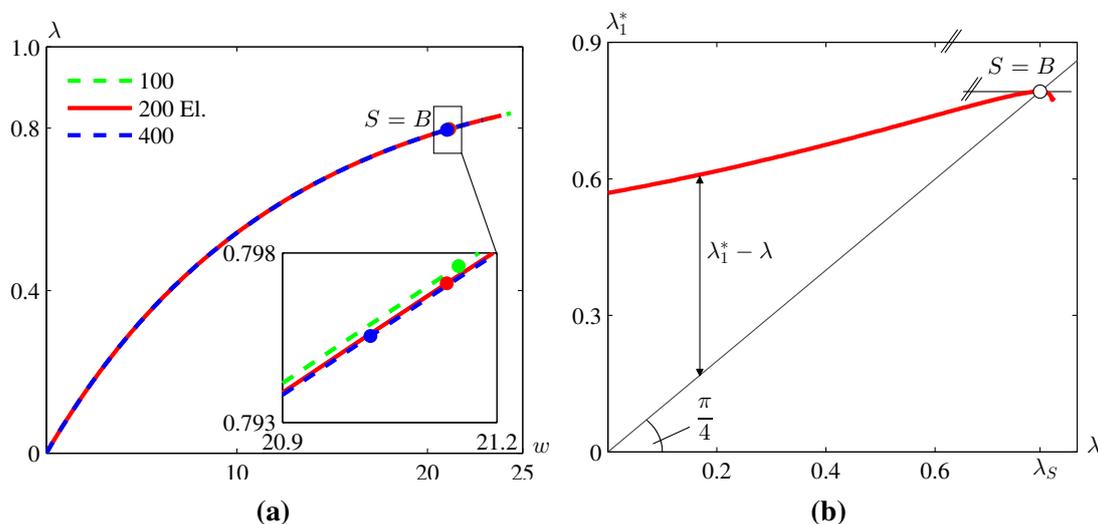


Abbildung 5.25: (a) λ - w Diagramme (w in [cm]) und (b) λ_1^* - λ Diagramm des in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogens

In Abb. (5.26) ist die fundamentale Eigenform auf Basis des CLE kurz vor Erreichen der Stabilitätsgrenze bei $\lambda = 0.79$ abgebildet. Sie stimmt gut mit der in [5] angegebenen Eigenform überein. Sie ist identisch mit der maßgebenden Eigenform infolge einer begleitenden Eigenwertanalyse mittels des CLE.



Abbildung 5.26: Fundamentale Eigenform an der Stabilitätsgrenze des in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogens

Abb. (5.27a) zeigt das $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm des untersuchten Kreisbogens. Im Verzweigungspunkt B an der Stabilitätsgrenze S weist es ein Minimum auf. Die Abnahme von $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ vom Wert 1 beträgt 0.05%. Sie ist also klein im Vergleich zur entsprechenden Abnahme bei der in Abb. (5.17) dargestellten Kugelkalotte, siehe Abb. (5.20), und

bei dem in Abb. (5.12) illustrierten Kreisbogen, siehe Abb. (5.15b). Abb. (5.27b) zeigt das $\|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ - λ Diagramm. $\|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ stellt die Geschwindigkeit, mit der sich die Vektorspitze auf der Einheitskugel bewegt, dar. Diese Geschwindigkeit ist im Vorbeulbereich weitgehend konstant. Kurz vor der Stabilitätsgrenze nimmt sie stark ab. An der Stabilitätsgrenze ist $\dot{\mathbf{v}}_1^*(\lambda_S) = 0$, siehe Abb. (5.27b).

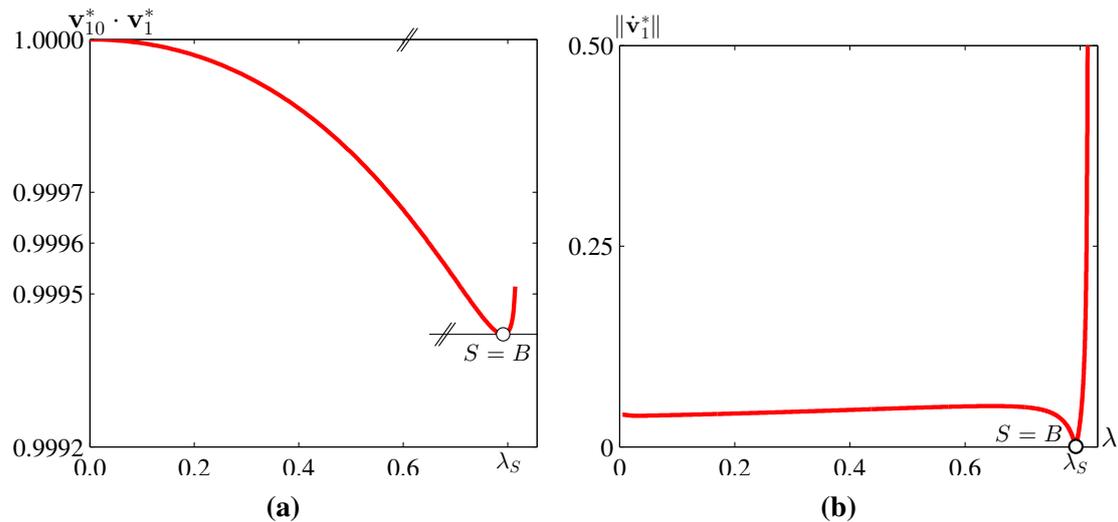


Abbildung 5.27: (a) $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramm und (b) $\|\dot{\mathbf{v}}_1^*\|$ - λ Diagramm des in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogens

In Abb. (5.28a) ist das ρ - λ Diagramm dargestellt. Für $\lambda < 0.05$ wird ρ mittels eines vorderen Differenzenquotienten und für $\lambda > 0.05$ mittels eines zentralen Differenzenquotienten ermittelt, siehe Unterkapitel 4.1. Wegen dieses Unterschieds ist ρ erst für $\lambda > 0.05$ ausreichend genau berechenbar. Im Punkt S gilt $\rho = 0$. Im gesamten Vorbeulbereich ist für das gegenständliche Beispiel $\rho < 0.1$, siehe Abb. (5.28a).

Das Energieverhältnis $(U - U_M)/U$ wird auf herkömmliche Weise ermittelt, siehe Unterkapitel 4.2. Das auf der Basis einer Diskretisierung mit 200 finiten Elementen erhaltene Ergebnis wird mit dem entsprechenden Resultat, das mit Hilfe der Software FE_{v2} [56] erhalten wurde, verglichen. Die beiden $((U - U_M)/U)$ - λ Diagramme sind in Abb. (5.28b) dargestellt. Die beiden Kurven stimmen ausgezeichnet überein. Nach Überschreiten des Verzweigungspunkts B wird ein Durchschlagspunkt erreicht. Das manifestiert sich in einer vertikalen Tangente der $((U - U_M)/U)$ - λ Diagramme. Im Vorbeul- und im Nachbeulbereich des Primärpfads nimmt der Anteil der Biegeenergie $U - U_M$ von 70% kontinuierlich auf 90% zu.

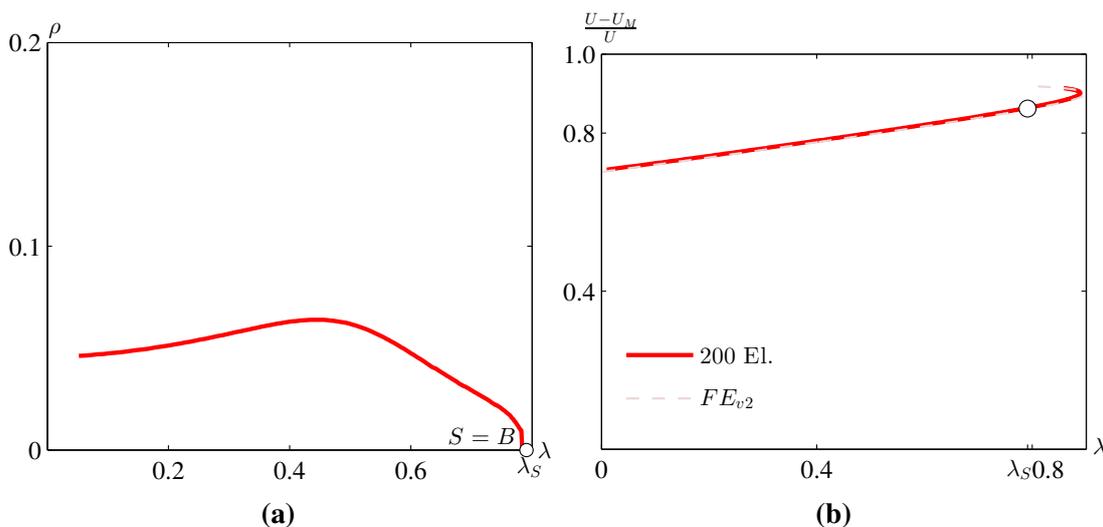


Abbildung 5.28: (a) ρ - λ Diagramm und (b) $((U - U_M)/U)$ - λ Diagramme unter Berücksichtigung der Schubverformungen des in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogens

In Abb. (5.29) ist die Funktion $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ für das vorliegende Beispiel dargestellt. Der kontinuierliche Anstieg der Biegeenergie, wie ihn Abb. (5.28b) zeigt, manifestiert sich im Anwachsen des Winkels θ . Am Startpunkt A bei $\lambda = 0$ schließt die von der Spitze des Vektors A beschriebene blaue Kurve einen spitzen Winkel mit dem Nullmeridian ein. An der durch den Punkt S gekennzeichneten Stabilitätsgrenze tangiert die Kurve den grün dargestellten Beulmeridian. Der sehr kleine Winkel $\varphi(\lambda_S)$ an der Stabilitätsgrenze ist eine Folge der sehr geringen Variabilität des fundamentalen Eigenvektors $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$.

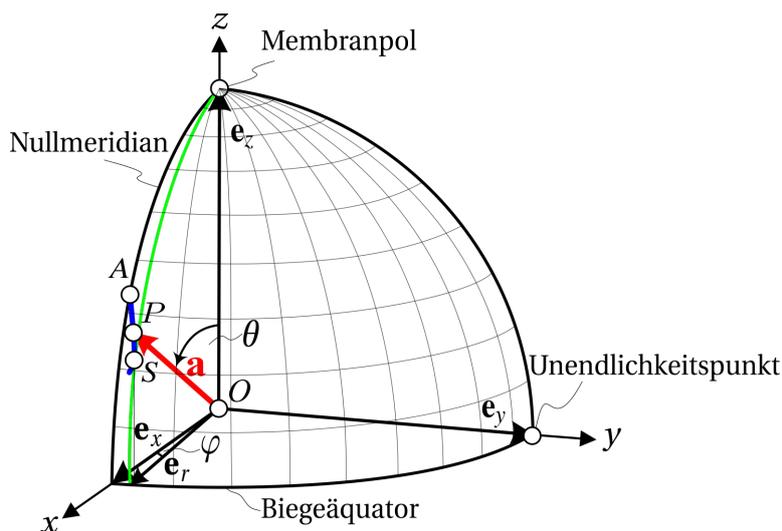
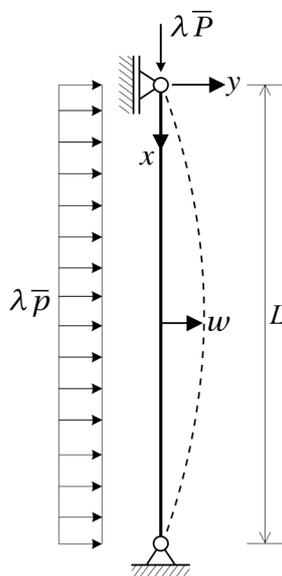


Abbildung 5.29: $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ für den in Abb. (5.24) dargestellten Kreisbogen

5.3.5 Druckstab mit Querbelastung

Abb. (5.30) zeigt einen geraden Druckstab, der durch eine vertikale Einzellast am oberen Ende und durch eine horizontale Linienlast belastet ist. An beiden Enden ist er gelenkig gelagert. Der Querschnitt des Stabs ist rechteckig. Die Abmessungen des Rechtecks

sind konstant. Die Länge L , die Querschnittsfläche A , das Flächenträgheitsmoment I , der Elastizitätsmodul E , die Querdehnzahl ν und die Referenzlasten \bar{P} und \bar{p} sind ebenfalls in Abb. (5.30) angegeben.



$$L = 1000 \text{ cm} \quad A = 24000 \text{ cm}^2 \quad I = 4.8 \cdot 10^7 \text{ cm}^4 \quad \nu = 0.05$$

$$E = 2.0833 \text{ kN/cm}^2 \quad \bar{P} = 100 \text{ kN} \quad \bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$$

Abbildung 5.30: Geometrie, Materialparameter und Belastung eines gelenkig gelagerten Druckstabes mit Querbelastung

Für kleine Werte des Lastparameters λ ist der Anteil der Membranenergie an der Verzerrungsenergie des Systems sehr groß. Mit steigender Belastung und der daraus resultierenden Querverformung w nimmt dieser Anteil ab. Dieses Verhalten entspricht dem eines exzentrisch gedrückten Balkens, wie es etwa in [25] auf der Grundlage von Theorie II. Ordnung beschrieben wird.

Die gegenständliche Berechnung wurde mittels der FEM durchgeführt. Dabei wurden große Verformungen berücksichtigt. Abb. (5.31a) zeigt das λ - w Diagramm des querbelasteten Druckstabs. Positive Werte von w bedeuten eine Querverschiebung der Stabmitte in Richtung von \bar{p} . Bis ungefähr $\lambda = 4$ ist der Grad der Nichtlinearität dieses Last-Verschiebungspfad klein. Mit zunehmender Belastung ändert sich das jedoch. Das λ - w Diagramm scheint sich der Knicklast für den zweiten Eulerfall λ_{cr} anzunähern. Diese ergibt sich für den vorliegenden Druckstab ohne Querbelastung zu $\lambda_{cr} = 10.28$. Da die gegenständliche Berechnung im Gegensatz zu der zuvor zitierten Analyse in [5] auf Theorie III. Ordnung beruht, weist das λ - w Diagramm einen Wendepunkt auf. Die Struktur erfährt danach eine Versteifung. Sie kann also die wachsende Belastung weiterhin aufnehmen.

Abb. (5.31b) erlaubt einen Vergleich des λ_1^* - λ Diagramms für den in Abb. (5.30) dargestellten Druckstab ohne Querbelastung, also für $\bar{p} = 0 \text{ kN/cm}$, mit entsprechenden

Diagrammen für $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ bzw. 1 kN/cm und 10 kN/cm . Mit abnehmendem Wert von \bar{p} wird das Minimum von λ_1^* später erreicht und die Differenz zwischen diesem Wert von λ_1^* und der Lösung $\lambda = \lambda_{cr}$ für den zweiten Eulerfall nimmt ab. Da keine Stabilitätsgrenze existiert, nähert sich die Kurve zwar der Diagonalen $\lambda_1^* = \lambda$ an, schneidet diese jedoch nicht. Der Kurvenpunkt mit dem geringsten Normalabstand von $\lambda_1^* = \lambda$ weist offensichtlich die Neigung $\dot{\lambda}_1^* = 1$ auf. Nachher steigt $\dot{\lambda}_1^*$ wieder stärker an. Der entsprechende Punkt für den Fall von $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ korreliert ungefähr mit dem Wendepunkt des λ - w Diagramms in Abb. (5.31a).

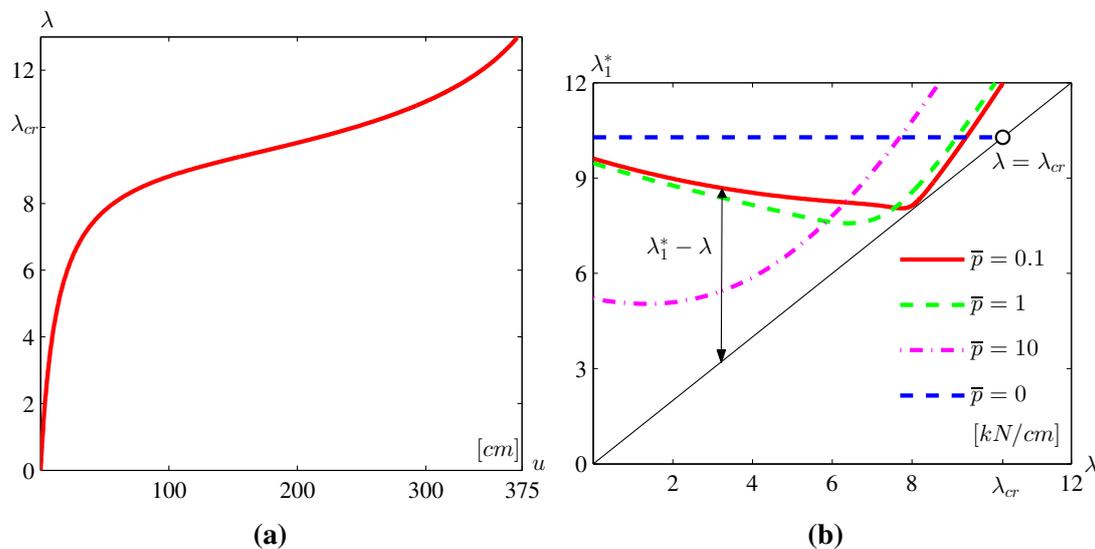


Abbildung 5.31: (a) λ - w Diagramm (w in [cm]) und (b) λ_1^* - λ Diagramme für $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ bzw. 1 kN/cm und 10 kN/cm für den in Abb. (5.30) dargestellten Druckstab

Abb. (5.32) zeigt $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramme des in Abb. (5.30) dargestellten Druckstabs für verschiedene Werte \bar{p} .

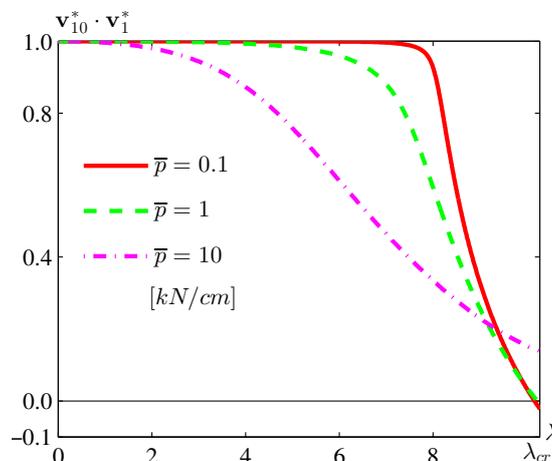


Abbildung 5.32: $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramme für den in Abb. (5.30) dargestellten Druckstab mit Querbelastung

Die zuvor angesprochene starke Änderung des Systemverhaltens hat eine starke Änderung des fundamentalen Eigenvektors zur Folge. Das äußert sich im Falle von $\bar{p} =$

0.1 kN/cm in einem starken Abfall des $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*)$ - λ Diagramms zwischen $\lambda = 8$ und $\lambda = \lambda_{cr}$. Mit steigendem Wert \bar{p} tritt dieser Abfall früher und weniger stark ausgeprägt auf. Daraus lässt sich der Unterschied gegenüber dem Druckstab ohne Querbelastung ablesen, für den $(\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*) = 1$, also konstant ist. Da es sich beim querbelasteten Druckstab um kein Stabilitätsproblem handelt, existiert keine Stabilitätsgrenze. Das Skalarprodukt $\mathbf{v}_{10}^* \cdot \mathbf{v}_1^*$ kann daher negative Werte annehmen, was etwa für $\lambda = \lambda_{cr}$ im Falle von $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ bzw. 1 kN/cm zutrifft.

Abb. (5.33a) zeigt das s - λ Diagramm des in Abb. (5.30) dargestellten Druckstabs mit $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ als Querbelastung. Daraus folgt, dass sich der fundamentale Eigenvektor kurz vor λ_{cr} stark ändert. Abb. (5.33b) enthält das entsprechende $((U - U_M)/U)$ - λ Diagramm, das auf konventionelle Weise, siehe Unterkapitel 4.2, ermittelt wurde. Zu Vergleichszwecken wurden auch die entsprechenden Diagramme für $\bar{p} = 1 \text{ kN/cm}$ bzw. 10 kN/cm in diese Abbildung eingetragen. Man erkennt, dass die Änderung des Anteils der Biegeenergie an der Verzerrungsenergie für kleine Werte von \bar{p} stärker ausgeprägt ist als für große Werte. Die starke Änderung des fundamentalen Eigenvektors \mathbf{v}_1^* findet jedoch, wie zuvor erläutert, erst nach dem starken Anstieg des Verhältnisses $(U - U_M)/U$ statt. Sie ist je nach Anteil der Biegeenergie an der Verzerrungsenergie verschieden groß.

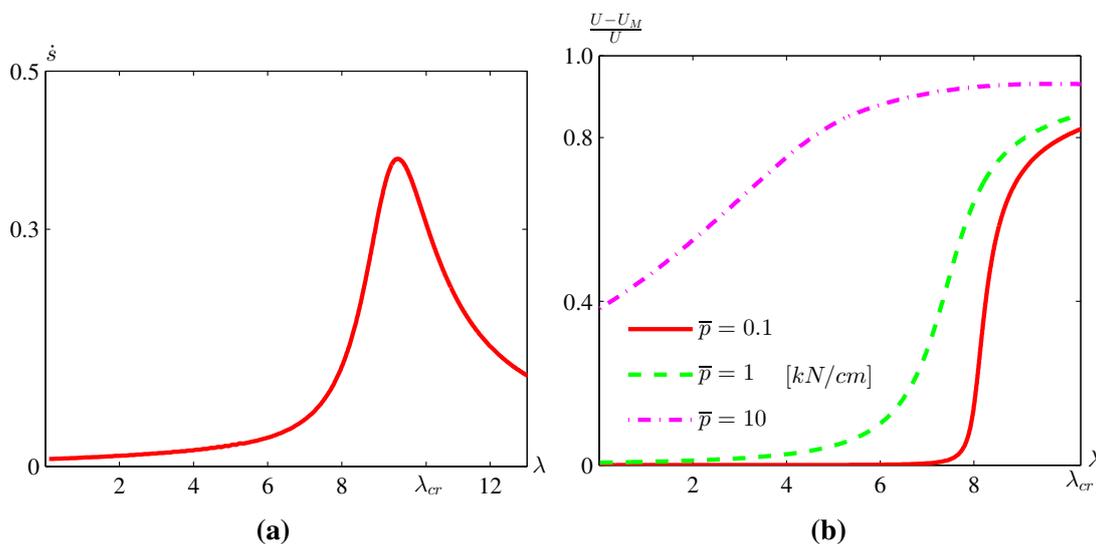


Abbildung 5.33: (a) s - λ Diagramm für $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ und (b) $((U - U_M)/U)$ - λ Diagramme für $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$ bzw. 1 kN/cm und 10 kN/cm für den in Abb. (5.30) dargestellten Druckstab mit Querbelastung

Abb. (5.34) zeigt die durch den Vektor $\mathbf{a}(\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$ beschriebene Flächenkurve für den in Abb. (5.30) dargestellten Druckstab mit Querbelastung für den Fall $\bar{p} = 0.1 \text{ kN/cm}$. Der Anstieg der Biegeenergie, wie ihn Abb. (5.33b) illustriert, manifestiert sich in einem Anstieg des Winkels θ . Der geringe Anteil von $(U - U_M)/U$ zu Beginn der Analyse, siehe Abb. (5.33b), bewirkt einen relativ kleinen Winkel θ im Startpunkt A der Flächenkurve

Schlussfolgerungen

- Die hypothetische Schlüsselrolle des CLE für das Konzept der Beulkugel wurde numerisch verifiziert.
- Speziell wurde gezeigt, dass das fundamentale Eigenpaar $(\lambda_1^* - \lambda, \mathbf{v}_1^*)$ des CLE eine Sonderrolle unter den N Eigenpaaren der durch N Freiheitsgrade gekennzeichneten FE Diskretisierung elastischer Strukturen einnimmt.
- Ungeachtet der Art der Stabilitätsgrenze gilt dort $\lambda_{1,\xi}^* = 0, \mathbf{v}_{1,\xi}^* = \mathbf{0}$. Die Stabilitätsgrenze stellt also einen singulären Punkt von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ dar. Eine Stabilitätsgrenze in Form eines Durchschlagpunkts korreliert mit einem N -fachen Nulleigenwert des CLE. Im Gegensatz zu $\lambda_{1,\xi}^* = 0$ gilt jedoch $\lambda_{j,\xi}^* \neq 0, j = 2, 3, \dots, N$.
- Für $\cos \varphi(\lambda) = \mathbf{v}_1^*(0) \cdot \mathbf{v}_1^*(\lambda) < 0$ ist Stabilitätsversagen in Form von Durchschlägen unmöglich. Das war der Grund für die Beschränkung der numerischen Untersuchung auf einen Oktanten der Einheitskugel. Die einzige Form einer in diesem Fall möglichen Stabilitätsgrenze ist ein Verzweigungspunkt, der mit einem Sattelpunkt der Last-Verschiebungspfade zusammenfällt.
- Der Wert von $\varphi(\lambda)$ an der Stabilitätsgrenze korreliert mit einer globalen Größe, die sowohl von den “Nicht-Membran” Verformungen als auch von der Steifigkeit der Struktur zu Beulbeginn abhängt.
- Ferner wurde auch gezeigt, dass beim CLE einem konstanten fundamentalen Eigenvektor ein nichtlinear veränderlicher fundamentaler Eigenwert entsprechen kann.
- Dieser Beweis bildete die theoretische Voraussetzung für die numerische Verifizierung der hypothetischen Konstanz von \mathbf{v}_1^* für den Grenzfall von Beulen aus einem Membranspannungszustand.
- Diese Verifizierung war die Voraussetzung zur Formulierung einer allgemeinen, auf dem CLE basierenden Hypothese für $(U - U_M)/U$. Numerisch wurde sie für den Grenzfall des Beulens aus einem reinen Membranspannungszustand genau und für den des Beulens aus einem reinen Biegespannungszustand in Form einer sehr guten Näherung verifiziert. Daraus folgt, dass diese Hypothese für den

Sonderfall eines konstanten Werts von $(U - U_M)/U$ im Vorbeulbereich geeignet ist.

- Die Hypothese manifestiert sich in einer Formel, welche die Krümmung und die Verwindung einer fiktiven Flächenkurve enthält, die durch die Spitze eines Einheitsvektors \mathbf{v}_1^* beschrieben wird. Die Tatsache, dass es sich dabei nicht um einen Vektor im physikalischen Sinn handelt, war kein Hindernis für die Verwendung der Differentialgeometrie zur Bestimmung dieser beiden geometrischen Größen.
- Im Fall von Stabilitätsverlust bei einem allgemeinen Spannungszustand wurde die Hypothese dadurch überprüft, dass das Ergebnis für $(U - U_M)/U$ für ein bestimmtes Beispiel mit dem Resultat einer konventionellen Berechnung dieses Verhältnisses verglichen wurde. Infolge mangelnder Übereinstimmung der beiden Ergebnisse wurde der Zenitwinkel bei den durch einen allgemeinen Spannungszustand gekennzeichneten Beispielen im Vorbeulbereich auf konventionelle Weise ermittelt.
- Diese Falsifizierung der Hypothese ist für das Konzept der Beulkugel insofern irrelevant, weil sowohl der *Membranpol* und der *Biegeäquator* als auch der *Unendlichkeitspunkt* und der *Beulmeridian* vom CLE erfasst werden und der Zenitwinkel auf herkömmliche Weise effizienter und bequemer berechnet werden kann.
- Die numerische Umsetzung des Konzepts der Beulkugel war eine große Herausforderung.
- Eine Schwierigkeit bestand darin, Ableitungen von Matrizen und Vektoren nach dem Lastparameter zu ermitteln. Die analytische Berechnung der Koeffizientenmatrizen $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\check{\mathbf{K}}_T$ in der mathematischen Formulierung des CLE für den Spezialfall eines geraden, finiten Stabelements war insofern wichtig, weil sie eine Überprüfung der numerischen Ermittlung von $\check{\mathbf{K}}_T$ auf Basis eines Finite-Differenzen Ausdrucks mit Hilfe der kommerziellen Software MSC.MARC ermöglichte.
- Um die gewünschte Genauigkeit der Approximation von $\mathbf{v}_1^*(\lambda)$ mittels der FDM zu erreichen, mussten mehrere Subroutinen in MSC.MARC geschrieben bzw. modifiziert werden.
- Die numerische Genauigkeit des Abspeicherungsprozesses von $\tilde{\mathbf{K}}_T$ und $\check{\mathbf{K}}_T$ hat erheblichen Einfluss auf die Lösung des CLE sowie auf weitere darauf beruhende Berechnungen. Im Wege einer detailreichen Analyse wurden zwei Methoden ausführlich vorgestellt, mittels der sich die numerische Genauigkeit des Ergebnisses für \mathbf{v}_1^* verbessern lässt.

- Die Berechnung des Krümmungsradius ρ der fiktiven Oberflächenkurve, die durch die Spitze des fundamentalen Eigenvektors \mathbf{v}_1^* auf einer Einheitskugel hervorgerufen wird, stellt eine numerische Herausforderung dar. Dabei führt eine feine Diskretisierung im Rahmen des FE Modells nicht notwendigerweise auf eine große Genauigkeit der Werte von ρ .
- Die Interaktion der problemspezifischen Software, die im Zuge des vorliegenden Forschungsprojekts erstellt wurde, mit MSC.MARC erwies sich als sehr gut.
- Die Steigerung der numerischen Präzision, weiters Effizienzerwägungen betreffend die numerische Lösung des vorliegenden Problems sowie zwei vorgestellte Methoden zur Ermittlung des fundamentalen Eigenpaars $(\lambda_1^*(\lambda) - \lambda, \mathbf{v}_1^*(\lambda))$ ermöglichen es, das Ausmaß an Interaktionen zwischen MSC.MARC und MATLAB gering zu halten. Dadurch wird die Effizienz der Lösung des CLE wesentlich gesteigert. Ihre Genauigkeit spielt in der Nachlaufrechnung eine wichtige Rolle.
- Ein Teil der gewonnenen numerischen Erkenntnisse stellt eine quantitative Bestätigung traditioneller qualitativer Aussagen dar. Beispiele dafür sind Qualifizierungen wie “eine Struktur mit viel Biegung” oder “eine große Spannungsumlagerung”.
- Die Beulkugel stellt eine bemerkenswerte Symbiose von Mechanik und Geometrie dar. Die wissenschaftliche Beschäftigung mit dieser Symbiose ist ein gutes Beispiel einer weiter gefassten Symbiose, und zwar der zwischen Grundlagenforschung und angewandter Forschung. Bei dieser Symbiose handelt es sich um ein Markenzeichen der Ingenieurwissenschaften.

Tabellen betreffend die Genauigkeit der numerischen Lösung für $\lambda_1^*(\lambda)$

Tabelle A.1: $\lambda_1^*(\lambda)$ und dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$ der Matrix $\mathbf{K}_T^\diamond = \mathbf{K}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_1$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$ und verschiedene Inkremente

$\Delta\tilde{\lambda}$		0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$
Inkrement	1	0.6533	$5.99 \cdot 10^{-13}$	0.5750	$5.70 \cdot 10^{-13}$	0.4943	$7.10 \cdot 10^{-12}$
	2	0.4796	$2.31 \cdot 10^{-12}$	0.5077	$1.78 \cdot 10^{-11}$	0.5169	$2.17 \cdot 10^{-11}$
	3	0.9669	$1.66 \cdot 10^{-11}$	0.6002	$1.44 \cdot 10^{-11}$	0.5571	$7.43 \cdot 10^{-11}$
	4	0.6526	$5.52 \cdot 10^{-13}$	0.7378	$2.46 \cdot 10^{-11}$	0.5077	$1.37 \cdot 10^{-10}$
	5	n/a	$2.38 \cdot 10^{-11}$	0.7212	$3.20 \cdot 10^{-11}$	0.5435	$6.58 \cdot 10^{-11}$
	38	0.7011	$5.81 \cdot 10^{-10}$	0.5962	$7.69 \cdot 10^{-10}$	0.5615	$7.49 \cdot 10^{-10}$
	40	0.6613	$5.34 \cdot 10^{-10}$	0.5926	$7.18 \cdot 10^{-10}$	0.5650	$7.35 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5988	$8.37 \cdot 10^{-10}$	0.5535	$7.50 \cdot 10^{-10}$	0.5464	$8.94 \cdot 10^{-10}$
	$\Delta\tilde{\lambda}$		0.08		0.16		
			λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\mathbf{K}_T^\diamond)$	
Inkrement	1	0.4730	$7.31 \cdot 10^{-11}$	0.4684	$1.28 \cdot 10^{-10}$		
	2	0.4657	$1.28 \cdot 10^{-10}$	0.4662	$1.70 \cdot 10^{-10}$		
	3	0.4905	$1.10 \cdot 10^{-10}$	0.4843	$1.94 \cdot 10^{-10}$		
	4	0.4851	$1.51 \cdot 10^{-10}$	0.4786	$2.05 \cdot 10^{-10}$		
	5	0.5112	$1.30 \cdot 10^{-10}$	0.4931	$2.25 \cdot 10^{-10}$		
	38	0.5485	$7.85 \cdot 10^{-10}$	0.5449	$8.37 \cdot 10^{-10}$		
	40	0.5449	$7.72 \cdot 10^{-10}$	0.5439	$8.65 \cdot 10^{-10}$		
	50	0.5403	$4.86 \cdot 10^{-10}$	0.5339	$7.72 \cdot 10^{-10}$		

Tabelle A.2: $\lambda_1^*(\lambda)$ und dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$ der Matrix $\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond = \dot{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_2$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$ und verschiedene Inkremente

$\Delta\tilde{\lambda}$		0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$
Inkrement	1	0.6535	$6.16 \cdot 10^{-13}$	0.5751	$5.50 \cdot 10^{-13}$	0.4944	$7.10 \cdot 10^{-12}$
	2	0.4797	$2.23 \cdot 10^{-12}$	0.5078	$1.78 \cdot 10^{-11}$	0.5171	$2.16 \cdot 10^{-11}$
	3	0.9672	$1.66 \cdot 10^{-11}$	0.6003	$1.44 \cdot 10^{-11}$	0.5573	$7.43 \cdot 10^{-11}$
	4	0.6528	$5.52 \cdot 10^{-13}$	0.7380	$2.46 \cdot 10^{-11}$	0.5079	$1.34 \cdot 10^{-11}$
	5	n/a	$2.38 \cdot 10^{-11}$	0.7213	$3.21 \cdot 10^{-11}$	0.5436	$6.57 \cdot 10^{-11}$
	38	0.7013	$5.82 \cdot 10^{-10}$	0.5962	$7.69 \cdot 10^{-10}$	0.5616	$7.49 \cdot 10^{-10}$
	40	0.6614	$5.34 \cdot 10^{-10}$	0.5926	$7.18 \cdot 10^{-10}$	0.5651	$7.40 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5989	$8.37 \cdot 10^{-10}$	0.5535	$7.49 \cdot 10^{-10}$	0.5465	$8.94 \cdot 10^{-10}$
$\Delta\tilde{\lambda}$		0.08		0.16			
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$		
Inkrement	1	0.4732	$7.30 \cdot 10^{-10}$	0.4685	$1.28 \cdot 10^{-10}$		
	2	0.4659	$1.28 \cdot 10^{-10}$	0.4663	$1.71 \cdot 10^{-10}$		
	3	0.4907	$1.10 \cdot 10^{-10}$	0.4845	$1.94 \cdot 10^{-10}$		
	4	0.4853	$1.50 \cdot 10^{-10}$	0.4788	$2.05 \cdot 10^{-10}$		
	5	0.5114	$1.30 \cdot 10^{-10}$	0.4933	$2.25 \cdot 10^{-10}$		
	38	0.5486	$7.88 \cdot 10^{-10}$	0.5450	$8.37 \cdot 10^{-10}$		
	40	0.5450	$7.72 \cdot 10^{-10}$	0.5439	$8.67 \cdot 10^{-10}$		
	50	0.5403	$4.79 \cdot 10^{-10}$	0.5339	$7.92 \cdot 10^{-10}$		

Tabelle A.3: $\lambda_1^*(\lambda)$ und dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$ der Matrix $\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond = \dot{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_3$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$ und verschiedene Inkremente

$\Delta\tilde{\lambda}$		0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$
Inkrement	1	0.6558	$6.17 \cdot 10^{-13}$	0.5764	$5.46 \cdot 10^{-13}$	0.4962	$6.29 \cdot 10^{-12}$
	2	0.4809	$2.24 \cdot 10^{-12}$	0.5089	$1.77 \cdot 10^{-11}$	0.5190	$2.17 \cdot 10^{-11}$
	3	0.9703	$1.66 \cdot 10^{-11}$	0.6017	$1.45 \cdot 10^{-11}$	0.5593	$7.40 \cdot 10^{-11}$
	4	0.6546	$5.49 \cdot 10^{-13}$	0.7397	$2.50 \cdot 10^{-11}$	0.5097	$1.33 \cdot 10^{-10}$
	5	n/a	$2.39 \cdot 10^{-11}$	0.7230	$3.21 \cdot 10^{-11}$	0.5457	$6.54 \cdot 10^{-11}$
	38	0.7029	$5.81 \cdot 10^{-10}$	0.5670	$7.71 \cdot 10^{-10}$	0.5627	$7.48 \cdot 10^{-10}$
	40	0.6397	$5.33 \cdot 10^{-10}$	0.5933	$7.16 \cdot 10^{-10}$	0.5661	$7.33 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5997	$8.36 \cdot 10^{-10}$	0.5538	$9.28 \cdot 10^{-10}$	0.5468	$8.94 \cdot 10^{-10}$

$\Delta\tilde{\lambda}$		0.08		0.16	
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$
Inkrement	1	0.4751	$7.25 \cdot 10^{-11}$	0.4600	$1.25 \cdot 10^{-10}$
	2	0.4677	$1.10 \cdot 10^{-10}$	0.4677	$1.71 \cdot 10^{-10}$
	3	0.4927	$1.08 \cdot 10^{-10}$	0.4860	$1.94 \cdot 10^{-10}$
	4	0.4872	$1.49 \cdot 10^{-10}$	0.4802	$2.04 \cdot 10^{-10}$
	5	0.5135	$1.28 \cdot 10^{-10}$	0.4948	$2.26 \cdot 10^{-10}$
	38	0.5497	$7.87 \cdot 10^{-10}$	0.5458	$8.35 \cdot 10^{-10}$
	40	0.5459	$7.70 \cdot 10^{-10}$	0.5449	$8.62 \cdot 10^{-10}$
	50	0.5406	$4.04 \cdot 10^{-10}$	0.5402	$7.81 \cdot 10^{-10}$

Tabelle A.4: $\lambda_1^*(\lambda)$ und dazugehörige Konditionszahl $\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$ der Matrix $\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond = \dot{\mathbf{K}}_T(\lambda + \Delta\tilde{\lambda}) + \mathbf{P}_4$ für verschiedene Schrittweiten $\Delta\tilde{\lambda}$ und verschiedene Inkremente

	$\Delta\tilde{\lambda}$	0.01		0.02		0.04	
		λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$	λ_1^*	$\kappa(\dot{\mathbf{K}}_T^\diamond)$
Inkrement	1	n/a	$4.89 \cdot 10^{-13}$	0.7437	$1.18 \cdot 10^{-13}$	n/a	$6.45 \cdot 10^{-12}$
	2	0.6473	$2.68 \cdot 10^{-12}$	0.6501	$1.30 \cdot 10^{-11}$	n/a	$7.92 \cdot 10^{-12}$
	3	n/a	$9.21 \cdot 10^{-11}$	0.7766	$1.07 \cdot 10^{-11}$	n/a	$3.07 \cdot 10^{-11}$
	4	0.9214	$8.91 \cdot 10^{-13}$	n/a	$2.60 \cdot 10^{-11}$	n/a	$1.11 \cdot 10^{-10}$
	5	n/a	$2.02 \cdot 10^{-11}$	n/a	$7.47 \cdot 10^{-12}$	n/a	$5.20 \cdot 10^{-11}$
	38	1.0132	$5.22 \cdot 10^{-10}$	0.7187	$4.11 \cdot 10^{-10}$	0.7718	$6.96 \cdot 10^{-10}$
	40	0.9178	$4.91 \cdot 10^{-10}$	0.7080	$4.30 \cdot 10^{-10}$	0.7753	$6.93 \cdot 10^{-10}$
	50	0.8181	$8.61 \cdot 10^{-10}$	0.5989	$6.86 \cdot 10^{-10}$	0.6582	$9.55 \cdot 10^{-10}$

Bibliographie

- [1] MANG H. A. *Categorization of Buckling By Means of Spherical Geometry*. Antrag an den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) zur finanziellen Unterstützung eines Forschungsprojekts, 2011.
- [2] GALLAGHER R. H., YANG H. T. Y. *Elastic Instability Predictions for Doubly-Curved Shells*. Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics at the Wright-Patterson Air Force Base, Ohio [October 15-17, 1968], 1969.
- [3] BRENDEL B. *Geometrisch nichtlineare Elastostatik*. Institut für Strukturmechanik, Universität Stuttgart, Diss., 1979.
- [4] RAMM E. *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*. Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics: Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr-Universität Bochum [July 28-31, 1980], 1981.
- [5] HELNWEIN P. *Zur initialen Abschätzbarkeit von Stabilitätsgrenzen auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden elastischer Strukturen mittels der Methode der Finiten Elemente*. Technische Universität Wien, Diss., 1996.
- [6] SCHRANZ C. *Conversion from Imperfection-sensitive into Imperfection-insensitive Elastic Structures*. Technische Universität Wien, Diss., 2005.
- [7] JIA X. *On the Influence of Design Changes on Buckling and Postbuckling of Elastic Structures*. Technische Universität Wien, Diss., 2010.
- [8] SCHRANZ C., KRENN B., MANG H. A. *Conversion from Imperfection-sensitive into Imperfection-insensitive Elastic Structures. II. Numerical Investigation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Bd. 195, Nr. 13-16, S. 1458-1479, 2006.
- [9] HÖFINGER G. *Sensitivity Analysis of the Initial Postbuckling Behavior of Elastic Structures*. Technische Universität Wien, Diss., 2010.
- [10] STEINBÖCK A., MANG H. A. *Are Linear Prebuckling Paths and Linear Stability Problems Mutually Conditional?* Computational Mechanics, Bd. 42, Nr. 3, S. 441-445, 2008.
- [11] JIA X., MANG H. A. *Determination of the Derivative of the Tangent Stiffness Matrix With Respect to the Load Parameter*. PAMM, Bd. 13, Nr. 1, S. 119-120, 2013.

- [12] JIA X., MANG H. A. *Assessment of Solutions from the Consistently Linearized Eigenproblem by Means of Finite Difference Approximations*. Computers & Structures, Bd. 151, S. 42-48, 2015.
- [13] JIA X., MANG H. A. *Displacement-Based Finite Difference Approximations of Derivatives of the Tangent Stiffness Matrix With Respect to the Load Parameter*. PAMM, Bd. 14, Nr. 1, S. 195-196, 2014.
- [14] MANG H. A., PAVLICEK S. , JIA X. *The Buckling Sphere – A Symbiosis of Mechanics and Geometry [in press]*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016.
- [15] MANG H. A., HÖFINGER G. *Bifurcation Buckling From a Membrane Stress State*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Bd. 90, Nr. 7, S. 867-881, 2012.
- [16] MANG H. A., JIA X. , HÖFINGER G. *Finite Element Analysis of Buckling of Structures at Special Prebuckling States*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Bd. 50 (2), Nr. 3, S. 785-796, 2012.
- [17] AMINBAGHAI M., MANG H. A. *Characteristics of the Solution of the Consistently Linearized Eigenproblem for Lateral Torsional Buckling*. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, Bd. 6, Nr. 1, 2012.
- [18] GU J. X., CHANG S. L. *A Refined Finite Element Formulation for Flexural and Torsional Buckling of Beam Columns with Finite Rotations*. Engineering Structures, Bd. 27 (5), S. 749-759, 2005.
- [19] STROHMANN I. *Zum Biegedrillknicken von biegebeanspruchten I-Profilen mit und ohne Voute*. Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen, Technische Universität Dortmund, Diss., 2010.
- [20] ROBERTS E. R. *Elastic Flexural-Torsional Buckling Analysis Using Finite Element Method and Object-oriented Technology with C/C++*. University of Pittsburgh, Diss., 2004.
- [21] LARUE B., KHELIL A. , GUEURY M. *Elastic Flexural–Torsional Buckling of Steel Beams with Rigid and Continuous Lateral Restraints*. Journal of Constructional Steel Research, Bd. 63(5), S. 692-708, 2007.
- [22] ZHANG L., TONG G. S. *Elastic Flexural-Torsional Buckling of Thin-Walled Cantilevers*. Thin-Walled Structures, Bd. 46, Nr. 1, S. 27-37, 2008.

- [23] ERKMEN R. E., ATTARD M. M. *Lateral–Torsional Buckling Analysis of Thin-Walled Beams Including Shear and Prebuckling Deformation Effects*. International Journal of Mechanical Sciences, Bd. 53, Nr. 10, S. 918-925, 2011.
- [24] MORTEZA A., TORKAMANI M. , ROBERTS E. R. *Energy Equations for Elastic Flexural–Torsional Buckling Analysis of Plane Structures*. Thin-Walled Structures, Bd. 47, Nr. 4, S. 463-473, 2009.
- [25] MANG H. A., HOFSTETTER G. *Festigkeitslehre*. 4. Auflage, Springer-Vieweg, Berlin-Heidelberg, 2013.
- [26] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L. *The Finite Element Method*. Bd. 2, 5. Auflage, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [27] STEINBÖCK A., HÖFINGER G., JIA X. , MANG H. A. *Three Pending Questions in Structural Stability*. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Bd. 50 (1), S. 51-64, 2009.
- [28] WYLIE C. R. *Advanced Engineering Mathematics*. 4. Auflage, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [29] BURGESS C. J. C. *Dimension Reduction: A Guided Tour*. Foundations and Trends in Machine Learning, Now Publishers, Boston-Delft, 2010.
- [30] JIA X., MANG H. A. *Conversion of Imperfection-sensitive Elastic Structures into Imperfection-insensitive Ones by Adding Tensile Members*. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Bd. 52 (2), S. 121-128, 2011.
- [31] MANG H. A., SCHRANZ C. , HELNWEIN P. *Conversion from Imperfection-sensitive into Imperfection-insensitive Elastic Structures. I. Theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Bd. 195, Nr. 13-16, S. 1422-1457, 2006.
- [32] MSC.MARC & MENTAT. *Marc Manual Volume A: Theory and User Information*. MSC Software Corporation, California, 2012.
- [33] PYTHON. *Version 3.5.1*. Python Software Foundation, 2001-2016.
- [34] MATLAB. *Version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., Natick, Maryland, 2010.
- [35] MSC.MARC & MENTAT. *Marc Manual Volume B: Element Library*. MSC Software Corporation, California, 2012.

- [36] RAMMERSTORFER F. G., DAXNER T. *Nichtlineare Finite Elemente Methoden*. Vorlesungsskript, Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, Technische Universität Wien, und CAE Simulation and Solutions, 2015.
- [37] CRISFIELD M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics*. 1. Auflage, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [38] KINDMANN R. *Stahlbau: Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung*. 4. Auflage, Ernst & Sohn, Berlin, 2008.
- [39] BATHE K. J., WILSON E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. 1. Auflage, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [40] ABAQUS. *ABAQUS/Standard Analysis User's Manual*. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, Rhode Island, 2011.
- [41] CRISFIELD M. A. *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-through*. Computers and Structures, Bd. 13, S. 55-62, 1981.
- [42] MSC.MARC & MENTAT. *Marc Manual Volume C: Program Input*. MSC Software Corporation, California, 2012.
- [43] MSC.MARC & MENTAT. *Marc Manual Volume E: Demonstration Problems*. MSC Software Corporation, California, 2012.
- [44] MSC.MARC & MENTAT. *Marc Manual Volume D: User Subroutines and Special Routines*. MSC Software Corporation, California, 2012.
- [45] HAVLICEK H. *Lineare Algebra für technische Mathematiker*. 1. Auflage Berliner Studienreihe zur Mathematik, Heldermann, Wien, 2006.
- [46] ÜBERHUBER C., KATZENBEISSER S. *MATLAB 6.5: Eine Einführung*. 1. Auflage, Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.
- [47] KRESSNER D. *Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin-Heidelberg, 2006.
- [48] LEHOUCQ R. B., SORENSEN D. C. *Deflation Techniques for an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., Bd. 17, Nr. 4, S. 789-821, 1996.
- [49] BISCHOF C. H., TANG P. T. P. *Robust Incremental Condition Estimation*. 1. Auflage, Computer Science Department, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee, 1991.

- [50] HAGER W. W. *Condition Estimates*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., Bd. 5, S. 311-316, 1984.
- [51] HIGHAM N. J., TISSEUR F. *A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation With an Application to 1-Norm Pseudospectra*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., Bd. 21, S. 1185-1201, 2000.
- [52] CHEN T. Y., DEMMEL J. W. *Balancing Sparse Matrices For Computing Eigenvalues*. Linear Algebra and its Applications, Bd. 309 (1-3), S. 261-287, 2000.
- [53] GERSTNER T. *Numerische Mathematik*. Vorlesungsskript, Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2011/2012.
- [54] LI W., SIMON S. , KIESS S. *On the Estimation of Numerical Error Bounds in Linear Algebra Based On Discrete Stochastic Arithmetic*. Applied Numerical Mathematics, Bd. 62, Nr. 5, S. 536-555, 2012.
- [55] PLATE T. *Avoiding Roundoff Error in Backpropagating Derivatives*. Lecture Notes in Computer Science. S. 225-230, Springer, Berlin-Heidelberg, 2012.
- [56] JIA X. *FE_{v2} Finite Element Software*. Technische Universität Wien, 2012.
- [57] BANCHOFF T. F., LOVETT S. T. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 1. Auflage, Taylor & Francis, Natick, Maryland, 2010.
- [58] KOITER W. T. *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Final Report, Stanford University, California, National Aeronautics and Space Administration, 1967.

CURRICULUM VITAE

Dipl.-Ing. Stefan Pavlicek

Personal Details

Date of Birth: 11.8.1988
Place of Birth: Ried i. Innkreis
Nationality: Austrian
Current address: Hervicusgasse 4/1/6
1120 Vienna, Austria

Education and Qualifications

8/2012 - 8/2016 Doctoral studies in Civil Engineering at
Technical University of Vienna, Austria
12/2011 - 7/2012 MCE, bridge construction, Linz, Austria
3/3007 - 11/2011 Diploma studies in Civil Engineering at
Technical University of Vienna, Austria
9/2006 - 2/2007 Military service
9/1998 - 7/2006 High school BG/BRG Wels