



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

# Langlebigkeitsswaps

Eine Betrachtung unter dem  
Kontrahentenausfallrisiko und der Collateralization

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Alexandra Baumgartner, BSc  
Abelegasse 30/6  
1160 Wien

Wien, am 1. Mai 2016

---

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe, und dass ich die Stellen der Arbeit, einschließlich Tabellen und Abbildungen, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, am 1. Mai 2016

---

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlichst bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Herrn Prof. Thorsten Rheinländer bedanken, der mir beim Verfassen dieser Arbeit immer hilfreich zur Seite stand.

Ein großes Dankeschön gilt auch meiner Familie und insbesondere meinen Eltern, die mir dieses Studium überhaupt ermöglicht haben, sowie meinen Geschwistern, die mir ebenso jederzeit, so gut es ging, zur Seite standen und mir den nötigen Rückhalt dafür gegeben haben.

Weiters möchte ich mich bei meinen Freunden sowie Studienkollegen, insbesondere bei Brigitte, Jacqueline, July und Philip, bedanken, dass sie mich während des Studiums begleitet und es zu einer wundervollen und unvergesslichen Zeit gemacht haben.

Mein allergrößter Dank gilt meinem Freund Alex. Gemeinsam meisterten wir die größten Hürden, konnten uns immer wieder gegenseitig motivieren sowie unterstützen und verbrachten eine wunderbare Zeit während und abseits des Studiums.

## **Kurzfassung**

Diese Diplomarbeit behandelt Langlebigkeitsswaps an sich als auch unter Betrachtung des Kontrahentenausfallsrisikos sowie der Collateralization. Anfänglich wird dabei der sogenannte Cox Prozess vorgestellt, da sich die Todeszeitpunkte wie die ersten Sprünge dieses Prozesses verhalten. Mit den Eigenschaften des Cox Prozesses werden die Swapraten der Langlebigkeitsswaps sowie der beiden oben genannten Eigenschaften hergeleitet und zueinander in Relation gestellt. Insbesondere werden bei der Beschreibung der Collateralization die wirtschaftlichen Aspekte hervorgehoben.

## **Abstract**

This thesis analyzes the longevity swaps in itself and in the view of the counterparty risk and the collateralization. At the beginning the Cox process will be introduced, as the death times behave concisely like its first jumps. Based on the features of the Cox process the swap rates of the longevity swaps as well as the characteristics stated will be derived and put in relation to each other. In particular, the economic view of the collateralization is emphasized.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis	3
<b>1 Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2 Cox Prozess</b>	<b>8</b>
2.1 Konstruktion des Cox Prozesses . . . . .	10
2.2 Technische Hilfsmittel . . . . .	14
2.2.1 Dynamische Überlebenswahrscheinlichkeit . . . . .	17
2.3 Die Martingaleigenschaft des Cox Prozesses . . . . .	18
2.4 Erweiterung des Anwendungsbereichs des Cox Prozesses . . . . .	21
2.5 Der Cox Prozess unter einem Maßwechsel . . . . .	23
<b>3 Langlebigkeitsswaps</b>	<b>27</b>
3.1 Das Setting . . . . .	28
3.2 Typen von Langlebigkeitsswaps . . . . .	33
3.2.1 Bespoke Langlebigkeitsswaps . . . . .	33
3.2.2 Indexbasierte Langlebigkeitsswaps . . . . .	37
3.2.3 Bespoke versus indexbasierten Langlebigkeitsswaps . . . . .	39
3.3 Der Marking-To-Market (MTM) Prozess . . . . .	42

<b>4 Kontrahentenausfallsrisiko</b>	<b>44</b>
<b>5 Collateralization</b>	<b>50</b>
5.1 Wirtschaftliche Aspekte . . . . .	50
5.2 Das Setting . . . . .	56
5.3 Volle Collateralization . . . . .	63
5.4 Übliche Collateral-Regeln . . . . .	67
<b>6 Zusammenfassung</b>	<b>71</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>73</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Lebenserwartung zum Alter 60 in Österreich im Zeitraum von 1951 bis 2014 . . . . .	6
2.1	Zählprozess $N$ . . . . .	9
5.1	Entwicklung des Collateral-Volumens von 31. Dezember 1999 bis 31. Dezember 2014 in Milliarden US-Dollar . . . . .	52
5.2	Zusammensetzung der aktiven non-cleared Agreements zum 31. Dezember 2014 . . . . .	53

# Tabellenverzeichnis

3.1	Auswahl der veröffentlichten Langlebigkeitsswapstransaktionen von 2008 bis 2015 . . . . .	41
-----	---	----

# Kapitel 1

## Einleitung

In den letzten Jahren rückte das Langlebighkeitsrisiko immer mehr in den Vordergrund, da es sich zunehmend als erhebliches finanzielles Risiko entpuppte. Eine Ursache dafür ist laut einer OECD-Studie<sup>1</sup>, dass die zukünftige Lebenserwartung in allen Ländern systematisch unterschätzt wurde. Dies ist die Folge davon, dass Projektionen der Lebenserwartung deterministisch durchgeführt wurden. Gemäß dieser Studie ist es daher empfehlenswerter, stochastische Modelle für die Sterblichkeitsraten einzusetzen, um die Prognose zu verbessern.<sup>2</sup>

Der traditionelle Weg zum Transferieren des Langlebighkeitsrisikos führt über den Versicherungs- und Rückversicherungsmarkt. Jedoch fehlt es in diesen Märkten an Kapazität und Liquidität, ein globales Exposure von rund 20 Trillionen Dollar zu stützen. Kapitalmärkte können daher eine sehr wichtige Rolle spielen, da sie zusätzliche Kapazität und Liquidität auf dem Markt anbieten, was wiederum zu transparenteren und wettbewerbsfähigeren Preisen des Langlebighkeitsrisikos führt.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>vgl. Antolin [18]

<sup>2</sup>vgl. Bertschi, Gintschel und Munaretto [15], S. 41

<sup>3</sup>vgl. Dowd, Blake, Cairns and Dawson [14], S. 2

Blake und Burrows [3] waren die ersten, die für die Verwendung von sterblichkeitsverbundene Wertpapiere zum Transferieren des Langlebighkeitsrisikos auf den Kapitalmarkt eintraten. Sie schlugen dafür die Verwendung von Langlebighkeitsbonds vor. Die Idee hinter diesen Bonds ist, dass die Zahlungen an der Proportion einer Population eines bestimmten Alters, welche eine zukünftige Periode überleben, gebunden ist. Ein Beispiel dafür ist eine Rentenanleihe, wobei die Coupon-Zahlung an einen Überlebensindex gebunden ist. Blake und Burrows haben in ihrer Arbeit angedeutet, dass diese Bonds ein erhebliches Potential als Instrument zum Hedgen der Langlebighkeit für Versicherungsunternehmen haben. Sie waren jedoch auch besorgt darüber, dass das Angebot von Langlebighkeitsbonds unzureichend sein könnte und schlugen daher vor, dass diese Bonds vom Staat ausgegeben werden sollten. Ihrem Ansatz wurde in den letzten Jahren erhebliche Beachtung geschenkt, dennoch geht diese Entwicklung eher langsam voran.<sup>4</sup>

Bevor ein kurzer Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben wird, wollen wir noch den Umfang der Sterblichkeitsverbesserung in der jüngsten Vergangenheit anhand der Lebenserwartung in Österreich im Zeitraum von 1951 bis 2014 illustrieren. Abbildung 1.1 zeigt, dass die Lebenserwartung eines 60-jährigen Mannes von 1951 bis 1970 nahezu gleichbleibend 15 Jahre war. Danach sehen wir, dass diese bis 2014 auf 22 Jahre angestiegen ist. Das bedeutet, dass die Lebenserwartung eines 60-jährigen Mannes im Zeitraum von 1970 bis 2014 um rund 0,9 Prozent pro Jahr gestiegen ist. Bei einer 60-jährigen Frau wuchs die Lebenserwartung zwischen 1951 und 1970 von 17 auf 19 Jahre und danach auf 26 Jahre im Jahr 2014. Das heißt, diese ist zwischen 1970 und 2014 um rund 0,7 Prozent pro Jahr gestiegen.

---

<sup>4</sup>vgl. Biffis und Blake [5], S. 1

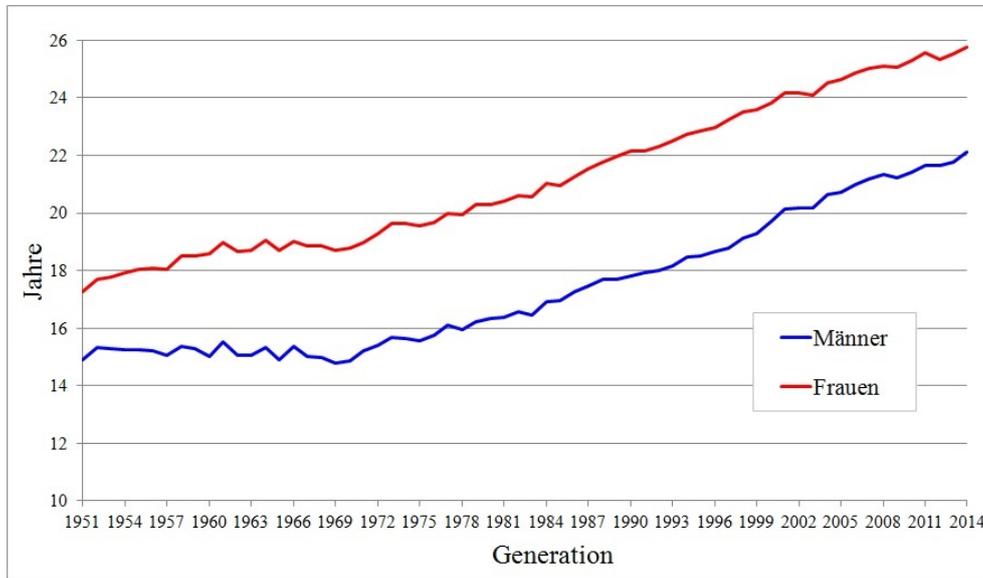


Abbildung 1.1: Lebenserwartung zum Alter 60 in Österreich im Zeitraum von 1951 bis 2014<sup>5</sup>

Der Anstieg der Lebenserwartung stellt an sich kein Problem dar, solange die Sterblichkeitsverbesserungen genau so erwartet werden. Das eigentliche Problem ist, dass der Anstieg von einer starken Ungewissheit gekennzeichnet und die Veränderung der Sterblichkeitsrate oft unerwartet ist.<sup>6</sup>

Diese Problemstellung liefert die Motivation für die Einführung und die genauere Betrachtung der Langlebigkeitsswaps, welche eine Möglichkeit der Absicherung bezüglich dem Langlebigkeitsrisiko darstellt.

Das nächste Kapitel beinhaltet die Definition des Cox Prozesses sowie dessen wichtigste Eigenschaften, wie zum Beispiel die Martingaleigenschaft. Im Kapitel 3 führen wir den Langlebigkeitsswap ein und formulieren dessen Zahlungsstrom. Wir stellen auch die zwei Typen, bespoken und indexgebunde-

<sup>5</sup>Die der Grafik zugrundeliegenden Daten stammen von Statistik Austria [22].

<sup>6</sup>vgl. Biffis und Blake [5], S. 2

ne Langlebigkeitsswaps, vor und erläutern deren Eigenschaften. Kapitel 4 hat das Kontrahentenausfallsrisiko zum Inhalt. Wir werden dies in die Bewertung des Langlebigkeitsswaps einbeziehen und betrachten zusätzlich einige Spezialfälle. Im Kapitel 5 stellen wir die Collateralization, eine Form der Kreditverbesserung, vor. Anhand des Beispiels der vollen Collateralization zeigen wir, wie die einzelnen Swapraten im Zusammenhang stehen. Am Ende der Arbeit beschreiben wir typische Collateral-Regeln.

# Kapitel 2

## Cox Prozess

Dieses Kapitel dient dazu, den Cox Prozess einzuführen, sowie wichtige Eigenschaften zu erläutern. Wir beziehen uns dabei, falls nicht anders gekennzeichnet, auf Kapitel 5 von Lando [4].

Bevor wir den Cox Prozess näher betrachten, rufen wir uns die Definition des Poisson Prozesses in Erinnerung:

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ . Das bedeutet, dass  $\Omega$  eine nichtleere Menge ist,  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra,  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  eine Filtration und  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Ein Prozess  $N$  heißt Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda \geq 0$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i).  $N_0 = 0$ .
- (ii).  $N$  hat unabhängige Inkremente.
- (iii). Die Inkremente  $N_t - N_s$  sind poissonverteilt mit Parameter  $\lambda(t - s)$ , das heißt für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq s < t$  gilt:

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{\lambda^k (t - s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}.$$

Es sei noch angemerkt, dass ein Poisson Prozess ein Zählprozess ist, das heißt, die Pfade von  $N$  sind zwischen den Sprüngen konstant, sie erhöhen sich um eins bei den Sprungzeitpunkten, sind rechtsstetig und besitzen einen linksseitigen Grenzwert.

Abbildung 2.1 veranschaulicht die grafische Struktur eines Zählprozesses mit Sprungzeitpunkten  $\tau_1, \dots, \tau_6$ .

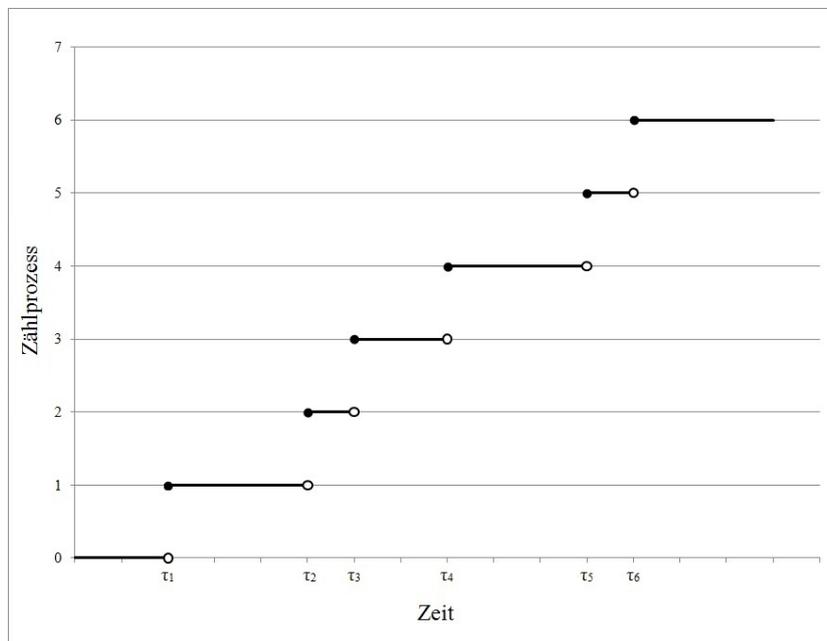


Abbildung 2.1: Zählprozess  $N$

Ein Cox Prozess ist eine Verallgemeinerung des Poisson Prozesses, welcher eine stochastische Intensitätsfunktion enthält. Das bedeutet, dass die Ausfallintensität durch exogene Zustandsgrößen bestimmt wird. Daher wird der Cox Prozess auch häufig als doppelt stochastischer Poisson Prozess beziehungsweise bedingter Poisson Prozess bezeichnet.

## 2.1 Konstruktion des Cox Prozesses

In diesem Abschnitt wollen wir uns einen Cox Prozess konstruieren und anschließend auf seine Eigenschaften eingehen.

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ , wobei wiederum  $\Omega$  eine nichtleere Menge beschreibt,  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra,  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine Filtration und  $\mathbb{P}$  ein Pricing-Maß. Ein Pricing-Maß ist ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß beziehungsweise ein Martingalmaß, welches in einer arbitragefreien Wirtschaft existiert. Alle Wertpapiere werden mit dem erwarteten diskontierten Wert unter dem Maß  $\mathbb{P}$  bepreist. Im Folgenden betrachten wir alle Erwartungswerte unter diesem Maß.

Ein Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  von Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{R}^d$  ist auf dem oben beschriebenen Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Es sei nun  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht negative, messbare Funktion. Das Ziel ist, einen Sprungprozess  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  zu konstruieren, mit der Eigenschaft, dass  $\lambda(X)$  die  $\mathbb{F}$ -Intensität von  $N$  ist.

Wir fokussieren uns nur auf den ersten Sprungzeitpunkt  $\tau$  des Prozesses.  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  bezeichnet die von  $X$  erzeugte Filtration, die folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}.$$

Weiters sei  $E_1$  eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 1, welche unabhängig von  $\mathbb{G}$  ist.

Sei  $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$  für alle  $t$  eine Filtration, wobei  $\mathcal{H}_t$  gegeben ist durch

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{N_s; 0 \leq s \leq t\}.$$

Das heißt,  $\mathcal{F}_t$  enthält sowohl die Informationen von  $X_t$  als auch die des Sprungprozesses  $N_t$  zu jedem Zeitpunkt  $t$ .

Nun definieren wir den ersten Sprungzeitpunkt von  $N$  wie folgt:

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda(X_s) ds \geq E_1 \right\}.$$

Diese Definition des Ausfallszeitpunktes  $\tau$  erfasst die Idee, dass  $\lambda(X)$  eine stochastische (Ausfalls-) Intensität für die Sprungzeit  $\tau$  ist. Die übliche Definition dafür ist, dass

$$\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda(X_s) \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} ds$$

ein  $\mathbb{F}$ -Martingal ist.

Diese Eigenschaft werden wir im Kapitel 2.3 beweisen, doch zuvor erläutern wir, warum diese Definition so nützlich ist.

Wir betrachten nun eine Nullkuponanleihe, auch Zero-Coupon Bond genannt. Das ist eine Anleihe ohne laufender Zinszahlung, die zum Ende der Laufzeit eine Geldeinheit auszahlt.<sup>1</sup> Dieser Bond wird von einer risikofreudigen Firma zum Zeitpunkt 0 ausgegeben. Wir nehmen an, dass die Maturität des Bonds  $T$  ist und dass unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  der Ausfallszeitpunkt  $\tau$  der Firma eine wie oben beschriebene Intensität  $\lambda(X)$  hat. Weiters nehmen wir an, dass eine Shortrate  $r(X)$  existiert, sodass der ausfallsfreie Zero-Coupon Bond Preis gegeben ist durch

$$p(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^t r(X_s) ds \right) \right],$$

---

<sup>1</sup>vgl. Hull [13], S. 811

wobei  $t$  der Maturitätszeitpunkt des Bonds ist.

Allgemeiner gilt folgende Darstellung für den Preis des Bonds:

$$p(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Wir betrachten nun die Gleichung:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_T] = \exp \left( - \int_0^T \lambda(X_s) ds \right). \quad (2.1)$$

Um diese Gleichheit zu zeigen, gehen wir von der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{G}_T)$  aus und führen folgende Umformungsschritte durch:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{G}_T) &= \mathbb{P} \left( \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda(X_s) ds \geq E_1 \right\} > T \middle| \mathcal{G}_T \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^T \lambda(X_s) ds < E_1 \middle| \mathcal{G}_T \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^T \lambda(X_s) ds < E_1 \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^T \lambda(X_s) ds \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung kann weggelassen werden, da, wenn  $\mathcal{G}_T$  bekannt ist, auch das Integral  $\int_0^T \lambda(X_s) ds$  bekannt ist und die Zufallsvariable  $E_1$  laut Definition von  $\mathcal{G}_T$  unabhängig ist.

Der letzte Schritt gilt, weil  $E_1$  eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 1 ist.

Angenommen es gibt keine Erholung, dann lässt sich der Preis des Bonds

zum Zeitpunkt 0 mittels des iterierten Erwartungswertes schreiben als:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r(X_s) ds \right) \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r(X_s) ds \right) \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{G}_T \right] \right]. \end{aligned}$$

Da  $X$  messbar bezüglich  $\mathbb{G}$  ist, folgt

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r(X_s) ds \right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_T] \right].$$

Mit der Erkenntnis aus Gleichung (2.1) erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r(X_s) ds \right) \exp \left( - \int_0^T \lambda(X_s) ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r + \lambda)(X_s) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich für den Bondpreis zum Zeitpunkt 0

$$v(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r + \lambda)(X_s) ds \right) \right],$$

das heißt, dass die Shortrate  $r(X)$  durch eine intensitätsbereinigte Shortrate  $(r + \lambda)(X)$  ersetzt wurde.

Das Beispiel kann leicht modifiziert werden, damit auch ein Contingent Claim, das ist eine Forderung, die zum Endzeitpunkt erfüllt werden muss, mit einer zugesagten Zahlung  $f(X_T)$  und einer tatsächlichen Zahlung  $f(X_T)\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$  abgedeckt werden kann. Die Hauptvereinfachung, die wir erhalten, ist, dass wir die Zufallsvariable  $f(X_T)\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$  in obiger Bewertungsformel mit dem

einfacheren Ausdruck  $f(X_T)$  auf Kosten der Modifizierung der Shortrate ersetzen. Das Beispiel zeigt, dass die Rahmenbedingungen offensichtlich das Versprechen halten, analytisch nachgiebige Preise für einen mit Ausfallsrisiko behafteten Contingent Claims zu bekommen.

Um die Rahmenbedingungen funktionsfähig zu machen, müssen wir uns noch mit folgenden drei Punkte beschäftigen:

- Wir müssen überprüfen, ob diese Konstruktion gewährleistet, dass  $\lambda$  tatsächlich eine stochastische (Ausfalls-) Intensität ist.
- Wir müssen die Resultate auf eine dynamische Version erweitern, welche die Information als einen Zeitprozess aktualisiert.
- Wir müssen die Methode so erweitern, dass sie auch auf andere Typen von zugesagten Zahlungen anwendbar ist.

Um dies abklären zu können, benötigen wir zuerst einige technische Resultate, die im nächsten Abschnitt näher beschrieben werden.

## 2.2 Technische Hilfsmittel

Wir verwenden in diesem Unterkapitel weiterhin das zuvor definierte Setting und die schon hergeleitete Gleichheit:

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_s) ds \right) \right]. \quad (2.2)$$

Jedoch wollen wir auch bedingte Erwartungswerte relevanter Funktionen an beliebigen Zeitpunkten behandeln. Befinden wir uns im Zeitpunkt  $t$  und  $\tau$  ist noch nicht eingetreten, ist die Ausfallswahrscheinlichkeit vor dem Zeitpunkt  $T > t$  eine Funktion von Zustandsvariablen. Daher enthält  $\mathcal{G}_t$  die gesamte

benötigte Information.

Eine formale Erklärung hierfür ist wie folgt: Sei  $Z \in \mathbb{F}$  mit  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Z|] < \infty$ . Mit dieser Bedingung ist sichergestellt, dass der bedingte Erwartungswert existiert. Dann gibt es eine  $\mathcal{G}_t$ -messbare Zufallsvariable  $Y_t$ , sodass gilt:<sup>2</sup>

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y_t. \quad (2.3)$$

Mit dieser Erkenntnis erhalten wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.1**<sup>3</sup>

- (i). Angenommen für jedes  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt  $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_t$ . Dann gilt für jede  $\mathbb{F}$ -messbare Zufallsvariable  $Z$  und für jedes  $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Z | \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t) \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Z | \mathcal{G}_t]}{\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{G}_t)}.$$

- (ii). Gilt zusätzlich  $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ , dann folgt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Z | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Z | \mathcal{G}_t]}{\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{G}_t)}.$$

BEWEIS:

Da (ii). direkt aus (i). folgt, reicht es (i). zu zeigen.

Der Einfachheit halber definieren wir uns die Hilfsvariable  $C := \{\tau > t\}$ .

Nun müssen wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_C Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] | \mathcal{F}_t]$$

gilt. Dies bedeutet, dass für jedes  $A \in \mathcal{F}_t$  gilt:

$$\int_A \mathbf{1}_C Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} = \int_A \mathbf{1}_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P}.$$

<sup>2</sup>vgl. Lando [4], S. 114

<sup>3</sup>vgl. Bielecki und Rutkowski [24], S. 143

Mit Hilfe des Lemmas 5.1.1. von Bielecki und Rutkowski [24] folgt, dass es für jedes  $A \in \mathcal{F}_t$  ein  $B \in \mathcal{G}_t$  mit  $A \cap C = B \cap C$  gibt und daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{1}_C Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} &= \int_{A \cap C} Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} \\ &= \int_{B \cap C} Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} \\ &= \int_B \mathbf{1}_C Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Gleichheit (2.3) können wir folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned} \int_B \mathbf{1}_C Z \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} &= \int_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] \mathbb{P}(C | \mathcal{G}_t) d\mathbb{P} \\ &= \int_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des iterierten Erwartungswertes folgt:

$$\int_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P} = \int_{B \cap C} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P}.$$

Schlussendlich gelangen wir mit der Gleichheit  $A \cap C = B \cap C$  zum Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int_{B \cap C} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P} &= \int_{A \cap C} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbf{1}_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_C Z | \mathcal{G}_t] d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Aussage bewiesen.

□

Das Resultat

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{G}_t]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{G}_t]} \quad (2.4)$$

ist der wesentlichste Bestandteil der im nächsten Abschnitt folgenden Beweise. Wir beginnen nun bei der Betrachtung der dynamischen Version der Überlebenswahrscheinlichkeit in (2.2).

### 2.2.1 Dynamische Überlebenswahrscheinlichkeit

Um die Gleichung (2.2) dynamisch zu machen, gehen wir wie folgt vor: Zuerst halten wir fest, dass

$$\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t]$$

gilt. Wenden wir nun (2.4) darauf an, so ergibt sich:

$$\mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{G}_t]}.$$

Betrachten wir nun den Dividend der obigen Division. Diesen können wir mit Hilfe des iterierten Erwartungswertes sowie (2.1) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T \lambda(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \\ &= \exp \left( - \int_0^t \lambda(X_s) ds \right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit resultiert aus der Tatsache, dass  $\mathcal{G}_t$  die von  $X_t$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra ist.

Verwenden wir dies auch auf den Divisor an, das heißt für  $T = t$ , dann

erhalten wir für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > T | \mathcal{F}_t) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s) ds\right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \middle| \mathcal{G}_t\right]}{\exp\left(-\int_0^t \lambda(X_s) ds\right)} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(X_s) ds\right) \middle| \mathcal{G}_t\right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dieses Resultat ist sehr hilfreich für den Beweis der Martingaleigenschaft des Cox Prozesses, welcher im nächsten Kapitel ausgeführt wird.

## 2.3 Die Martingaleigenschaft des Cox Prozesses

Wir wollen nun die Martingaleigenschaft von

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} du,$$

wobei  $N_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$  ist, zeigen. Das heißt, wir müssen für  $0 \leq s \leq t$  beweisen, dass  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$  ist.

Verwenden wir nun die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit von  $\mathbf{1}_{\{\tau=t\}}$  Null ist, so erhalten wir mit den Resultaten aus dem letzten Abschnitt für  $0 \leq s \leq t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} - \mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 - \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} - 1 + \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} - \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

Mit dem Resultat (2.5) aus dem letzten Abschnitt folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} - \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} - \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{G}_s \right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{G}_s \right] \right). \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [N_t - N_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_u du \right) \middle| \mathcal{G}_s \right] \right).$$

Nun müssen wir noch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du - \int_0^s \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

behandeln. Halten wir fest, dass

$$\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du = \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du$$

gilt, dann liefert uns das Resultat (2.4) folgende Gleichheit:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{G}_s \right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} | \mathcal{G}_s]}. \quad (2.6)$$

Nun betrachten wir den Dividend der obigen Darstellung genauer:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{G}_s \right] &= \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} | \mathcal{G}_s] du \\ &= \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_s] du \\ &= \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\lambda_u \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_{\{\tau > u\}} | \mathcal{G}_T] | \mathcal{G}_s] du. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.1) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \lambda_u \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} \mid \mathcal{G}_T \right] \mid \mathcal{G}_s \right] du \\ &= \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \lambda_u \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right) \mid \mathcal{G}_s \right] du \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right) du \mid \mathcal{G}_s \right]. \end{aligned}$$

Da für den Integranden

$$\lambda_u \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right) = - \frac{\partial}{\partial u} \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right)$$

gilt, folgt für den obigen Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t \lambda_u \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right) du \mid \mathcal{G}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_s^t - \frac{\partial}{\partial u} \exp \left( - \int_0^u \lambda_v dv \right) du \mid \mathcal{G}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ - \exp \left( - \int_0^t \lambda_v dv \right) + \exp \left( - \int_0^s \lambda_v dv \right) \mid \mathcal{G}_s \right]. \end{aligned}$$

Somit lässt sich (2.6) folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^s \lambda_v dv \right) - \exp \left( - \int_0^t \lambda_v dv \right) \mid \mathcal{G}_s \right]}{\exp \left( - \int_0^s \lambda_v dv \right)} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_v dv \right) \mid \mathcal{G}_s \right] \right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [M_t - M_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ N_t - \int_0^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du - N_s + \int_0^s \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [N_t - N_s | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^t \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du - \int_0^s \lambda_u \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_v dv \right) \middle| \mathcal{G}_s \right] \right) \\
 &\quad - \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \left( 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_s^t \lambda_v dv \right) \middle| \mathcal{G}_s \right] \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Das heißt, wir haben schließlich die Martingaleigenschaft gezeigt.

## 2.4 Erweiterung des Anwendungsbereichs des Cox Prozesses

Mit den zuvor beschriebenen technischen Resultaten können wir nun den Anwendungsbereich dieses Modells erweitern. In der Ausfallsmodellierung beziehen wir uns auf Zahlungsströme, die in einem oder mehreren Wegen mit der Zufallsvariable  $\tau$  zusammenhängen. Die Bepreisungsformel, die wir somit erhalten, ist eine einfache Erweiterung der Bepreisungsformel wenn  $\tau$  eine deterministische Intensität besitzt. Daher nehmen wir als erstes an, dass die Intensität  $\lambda(s)$  deterministisch ist, sodass gilt:

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \exp \left( - \int_0^t \lambda(s) ds \right).$$

Mit den relevanten Integritätsannahmen der Funktionen  $g$  und  $h$  erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\exp(-rT) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}] &= \exp\left(-\int_0^T (r + \lambda(s)) ds\right) \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^T \exp(-rt) g(t) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} dt \right] &= \int_0^T \exp\left(-\int_0^t (r + \lambda(s)) ds\right) g(t) dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\exp(-r\tau) h(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}] &= \int_0^T \exp\left(-\int_0^t (r + \lambda(s)) ds\right) \lambda(t) h(t) dt\end{aligned}$$

Bepreisen wir zum Zeitpunkt  $t$ , dann gilt aufgrund der zuvor behandelten dynamischen Überlebenswahrscheinlichkeit die Gleichung:

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp\left(-\int_t^T r(X_s) ds\right) f(X_T) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp\left(-\int_t^T (r + \lambda)(X_s) ds\right) f(X_T) \middle| \mathcal{G}_t \right] \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}.\end{aligned}$$

Das bedeutet, wir benötigen nur die Information der Zustandsvariable und die Information ob der Ausfall bis jetzt eingetreten ist, um den Preis des Claims zu berechnen.

Mit diesen Rahmenbedingungen können noch zwei weitere Bausteine bepreist werden:

- Als Erstes betrachten wir eine Claim-Zahlung  $g(X_s) \mathbf{1}_{\{\tau > s\}}$ , welche stetig bis zum Ausfall beziehungsweise bis zur Maturität  $T$  ist, falls der

Ausfall nicht eingetreten ist. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_t^T g(X_s) \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \exp \left( - \int_t^s r(X_u) du \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_t^T g(X_s) \exp \left( - \int_t^s (r + \lambda)(X_u) du \right) ds \middle| \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned}$$

- Als Zweites betrachten wir eine Zahlung zum Ausfallszeitpunkt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_t^{\tau} r(X_u) du \right) h(X_{\tau}) \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_t^T h(X_s) \lambda(X_s) \exp \left( - \int_t^s (r + \lambda)(X_u) du \right) ds \right]. \end{aligned}$$

Falls  $X$  ein Diffusionsprozess ist, dann gibt es eine geschlossene Lösung für diesen Erwartungswert oder wir können den Erwartungswert als Lösung einer partiellen Differentialgleichung ausdrücken, welche wir dann numerisch lösen können.

## 2.5 Der Cox Prozess unter einem Maßwechsel

Wie anfangs erwähnt, beziehen wir uns in diesem Kapitel auf Lando [4], jedoch für eine detailliertere Ausführung sowie deren Beweise sei auf Kapitel 5.3 von Bielecki und Rutkowski [24] verwiesen.

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Für einen gegebenen Zeithorizont  $T$ , sei  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$  eine von einer  $d$ -dimensionalen Brownschen Bewegung  $W$  erzeugte Filtration, sodass folgende Martingaldar-

stellung hält: Ein  $\mathbb{P}$ -quadratisch integrierbares Martingal  $Z$  kann als ein stochastisches Integral bezüglich  $W$  dargestellt werden, das bedeutet, es gilt:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f(s) dW(s),$$

wobei  $f$  ein vorhersehbarer Prozess ist. Weiters seien auf dem Wahrscheinlichkeitsraum die Zufallsvariablen  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , welche Werte in  $[0, \infty)$  annehmen, definiert. Deren Verteilung ist stetig und es gilt  $\mathbb{P}(\tau_k = \tau_l) = 0$  für  $k \neq l$ . Diese Zufallsvariablen entsprechen den Ausfallszeitpunkten. Mit diesen definieren wir einen Zählprozess, welcher zum Ausfallszeitpunkt auf eins springt, das heißt, es gilt:

$$N_k(t) = \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_k\}},$$

für  $t \in [0, T]$  und  $k = 1, \dots, N$ . Es sei nun

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{N_k(t), k = 1, \dots, N\}$$

für alle  $t \in [0, T]$  eine Filtration, die sowohl die Informationen der Zustandsvariablen als auch die des Sprungprozesses enthält. Wir nehmen an, dass diese Filtration rechtsstetig ist, das heißt, es gilt  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  für alle  $t \geq 0$ . Weiters nehmen wir an, dass die Intensität des Sprungprozesses existiert, das bedeutet, es gibt einen bezüglich  $\mathbb{G}$  progressiv messbaren Prozess  $\lambda_k : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k = 1, \dots, N$ . Dann gilt, dass

$$M_k(t) = N_k(t) - \int_0^t (1 - N_k(s)) \lambda_k(s) ds$$

ein Martingal unter  $\mathbb{P}$  bezüglich  $\mathbb{F}$  ist. Da die Filtration rechtsstetig ist und wegen Kusuoka [21] ist unter  $\mathbb{P}$  ein Martingal bezüglich  $\mathbb{F}$  auch ein Martingal bezüglich  $\mathbb{G}$ .

Es sei  $\tilde{\mathbb{P}}$  das zu  $\mathbb{P}$  äquivalente Martingalmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , das heißt  $\tilde{\mathbb{P}}$  erfüllt folgende Definition:

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}$  ist ein Martingalmaß bezüglich einem Preisprozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , welcher ein  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptiertes Semimartingal ist, falls folgende Punkte erfüllt sind:

- (i).  $\tilde{\mathbb{P}}$  ist absolut stetig bezüglich  $\mathbb{P}$ , das bedeutet, dass alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen auch  $\tilde{\mathbb{P}}$ -Nullmengen sind.
- (ii).  $X$  ist ein  $\tilde{\mathbb{P}}$ -lokales Martingal.

Gilt zusätzlich, dass  $\tilde{\mathbb{P}}$  äquivalent zu  $\mathbb{P}$  ist, das heißt,  $\tilde{\mathbb{P}}$  ist absolut stetig bezüglich  $\mathbb{P}$ , sowie  $\mathbb{P}$  ist absolut stetig bezüglich  $\tilde{\mathbb{P}}$ , anders gesagt, die beiden Maße haben die selben Nullmengen, dann nennen wir  $\tilde{\mathbb{P}}$  ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich  $\mathbb{P}$ .<sup>4</sup>

Der zugehörige Dichteprozess ist für  $t \in [0, T]$  definiert als:

$$\rho_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Wir nehmen an, dass  $\log \rho_t$  lokal beschränkt ist. Dann existieren vorhersehbare Prozesse  $\beta : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\kappa_k : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k = 1, \dots, N$ , sodass

$$\rho_t = 1 + \int_0^t \rho_{s-} \left[ \beta(s) dW(s) + \sum_{k=1}^N \kappa_k(s) dM_k(s) \right]$$

gilt. Unter  $\tilde{\mathbb{P}}$  ist

$$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t \beta(s) ds$$

<sup>4</sup>vgl. Rheinländer und Sexton [23], S. 36

eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich  $\mathbb{F}$  und es sind

$$\tilde{M}_k(t) = N_k(t) - \int_0^t (1 - N_k(s))(1 + \kappa_k(s))\lambda_k(s)ds$$

für  $k = 1, \dots, N$  unter  $\tilde{\mathbb{P}}$  Martingale bezüglich  $\mathbb{F}$ . Daraus folgt, dass sich die Intensität unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}$  um den (stochastischen) Faktor  $(1 + \kappa_k)$  verändert hat.

Dieses allgemeine Setting umfasst auch jenes des Cox Prozesses und daher gelten die oben gezeigten Resultate auch für den Cox Prozess.

# Kapitel 3

## Langlebigkeitsswaps

In diesem Kapitel werden wir allgemein Langlebigkeitsswaps definieren, sowie zwei Instrumente, nämlich den bespoken und den indexgebundene Langlebigkeitsswap einführen und deren Swaprate herleiten. Weiters werden wir ihre Vor- und Nachteile erläutern. Großteils beziehen wir uns auf Biffis, Blake, Pitotti und Sun [6].

Allgemein betrachtet ist ein Swap ein Vertrag, bei dem zwei Parteien einen oder mehrere zukünftige Zahlungen tauschen, wobei eine der Zahlungen zufällig ist. Bei Langlebigkeitsswaps tauschen die Parteien eine fixe Zahlung gegen eine variable Zahlung, welche an die Anzahl der Überlebenden einer Referenzpopulation gebunden ist. An solchen Transaktionen sind hauptsächlich Pensionsfonds und Versicherer, die Renten anbieten, beteiligt, welche ihre mit Langlebigkeitsrisiken behaftetes Exposure hedgen wollen, ohne, dass dabei ein Basisrisiko entsteht.

Die variablen Zahlungen in solchen Swaps sind dazu bestimmt, genau die Mortalitätserfahrungen jedes einzelnen Hedgers zu matchen. Dies ist im wesentlichen eine Form der Langlebigkeitsrisiko Versicherung, welche vergleichbar mit der Rentenrückversicherung in Rückversicherungsmärkten ist.

Diese Langlebigkeitsswaps haben im Vergleich zu den Langlebigkeitsbonds, welche kurz in der Einleitung erläutert wurden, einige Vorteile. Diese können so vereinbart werden, dass sie niedrigere Transaktionskosten als die Bonds verursachen. Die Swaps sind auch viel einfacher zu kündigen, sind flexibler und können maßgeschneidert für diverse Umstände werden. Weiters benötigen die Langlebigkeitsswaps keine Existenz von liquiden Märkten. Sie benötigen nur die Risikobereitschaft von zweier Parteien, welche die Vorteile, beziehungsweise Handelsansichten, der Entwicklung der Sterblichkeit über die Zeit ausnutzen wollen.

Auch gegenüber traditioneller Versicherungsinstrumente haben die Langlebigkeitsswaps einige Vorteile. Zum Beispiel beinhalten die Swaps niedrigere Transaktionskosten und sind flexibler als Rückversicherungsverträge.

Die Langlebigkeitsswaps sind somit eine vielversprechende Form der sterblichkeitsverbundenen Wertpapiere, auf die wir im Folgenden näher eingehen werden.<sup>1</sup>

### 3.1 Das Setting

Wir betrachten einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ . Das bedeutet  $\Omega$  ist eine nichtleere Menge,  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  eine Filtration und  $\mathbb{P}$  entspricht dem „real-world“ Wahrscheinlichkeitsmaß. Weiters sei analog Kapitel 2  $\tilde{\mathbb{P}}$  das zu  $\mathbb{P}$  äquivalente Martingalmaß.

Sei nun eine Population von  $n$  Individuen gegeben, die in unserem Fall Rentenbezieher oder Pensionisten sind. Auf dem oben eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum modellieren wir die Todeszeitpunkte der  $n$  Individuen

---

<sup>1</sup>vgl. Dowd, Blake, Cairns und Dawson [14], S. 2 ff

als Stoppzeiten  $\tau^1, \dots, \tau^n$ , das heißt, zu jeder Zeit  $t$  ist in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  die Information enthalten, ob die einzelnen Individuen noch leben oder bereits gestorben sind.

Im Folgenden betrachten wir einerseits einen Hedger  $H$ , dies ist zum Beispiel ein Versicherer, der Renten anbietet oder ein Pensionsfonds, und andererseits einen Hedge-Anbieter  $HS$ , wie zum Beispiel einen Rückversicherer oder eine Investmentbank.

Wir werden in diesem Kapitel die Thematik aus der Sicht des Hedgers analysieren.

Der Hedger  $H$  hat die Verpflichtung, die Beträge  $X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$  zu zahlen. Diese Beträge sind an jeden Überlebenden der anfangs  $n$  Individuen zu fixen Zeitpunkten  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots$  zu leisten. Hier ist vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt 0 alle  $n$  Individuen leben. Die Beträge  $X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$  können von Zinsraten und der Inflation abhängen.

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf homogene Verpflichtungen, das bedeutet, die Verbindlichkeit zum Zahlungszeitpunkt  $T > 0$  ist gegeben durch die Zufallsvariable

$$\begin{aligned} X_T \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau^i > T\}} &= X_T \cdot \sum_{i=1}^n 1 - \mathbb{1}_{\{\tau^i \leq T\}} \\ &= X_T \cdot (n - N_T), \end{aligned}$$

wobei  $N_T$  die Anzahl der Todesfälle während der Periode  $[0, T]$  zählt.

In diesem Kapitel halten wir fest, dass das Ausfallsrisiko außer Acht gelassen wird, das heißt, wir fokussieren uns auf die oben beschriebenen individuellen Zahlungen mit Fälligkeit  $T > 0$ .

Wir nehmen an, dass sich die Todeszeitpunkte wie die ersten Sprünge von  $n$  bedingten Poisson Prozessen, wie zum Beispiel von Cox Prozessen (siehe Kapitel 2), verhalten, mit Sterblichkeitsintensität  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  unter dem Maß  $\mathbb{P}$  und dem äquivalentem Martingalmaß  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

Die erwartete Anzahl von Überlebenden zur Zeit  $T$  ist gegeben durch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [n - N_T] = n \cdot p_T, \quad (3.1)$$

wobei die Überlebenswahrscheinlichkeit folgendermaßen definiert ist:

$$p_T := \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T \mu_t dt \right) \right]. \quad (3.2)$$

Die Sterblichkeitsintensität kann durch Verwendung von stochastischen Sterblichkeitsmodellen modelliert werden, wie zum Beispiel das Lee-Carter Sterblichkeits-Projektions-Modell.<sup>2</sup>

Im Folgenden betrachten wir einen Finanzmarkt und führen eine risikolose Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  ein. In der Praxis wird hierfür ein Tageszinssatz verwendet. Wir nehmen an, dass ein marktkonsistenter Preis der Verbindlichkeiten berechnet werden kann, unter Verwendung eines risikoneutralen Maßes  $\tilde{\mathbb{P}}$ , welches äquivalent zu  $\mathbb{P}$  ist, sodass die Todeszeitpunkte den selben Intensitätsprozess  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  haben. Im Allgemeinen hat jedoch der Intensitätsprozess eine unterschiedliche Dynamik unter den zwei Maßen (siehe Kapitle 2).

Die erwartete Anzahl von Überlebenden im Intervall  $[0, T]$  unter den beiden Maßen kann geschrieben werden als

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau^i > T\}} \right] = np_T$$

---

<sup>2</sup>siehe Lee und Carter [20]

sowie

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau^i > T\}}\right] = n\tilde{p}_T.$$

Die beiden Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p_T$  und  $\tilde{p}_T$  sind gegeben durch Formel (3.2) unter dem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  beziehungsweise  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

Wir betrachten eine beliebige Stoppzeit  $\tau^i$ , welche die zwei Annahmen erfüllt, eine integrierbare Zufallsvariable  $Y \in \mathcal{F}_{t-}$  und einen beschränkten Prozess  $(X_t)_{t \in [0, T]}$ , sodass jedes  $X_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_{t-}$  messbar ist. Messbar bezüglich  $\mathcal{F}_{t-}$  bedeutet, dass die Information bis unmittelbar vor dem Zeitpunkt  $t$  verfügbar ist, jedoch nicht zum Zeitpunkt  $t$ .

Falls  $\tau^i > T$  ist, dann wird zur Zeit  $T$  die Zahlung  $Y$  getätigt. Andernfalls, wenn  $\tau^i \leq T$  ist, wird zum Zeitpunkt  $\tau^i$  der Betrag  $X_{\tau^i}$  gezahlt. Der Preis zur Zeit 0 dieses Zahlungsstroms ist daher gegeben durch:

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \exp\left(-\int_0^s (r_t + \mu_t) dt\right) X_s \mu_s ds + \exp\left(-\int_0^T (r_t + \mu_t) dt\right) Y\right].$$

Nun betrachten wir zwei Stoppzeiten  $\tau^i$  und  $\tau^j$  mit den jeweiligen Intensitäten  $\mu^i$  sowie  $\mu^j$ , welche die obigen Bedingungen erfüllen.

Falls keine der beiden Stoppzeiten erreicht wurde, das heißt, es gilt  $\min(\tau^i, \tau^j) > T$ , dann wird  $Y$  zum Zeitpunkt  $T$  gezahlt. Andernfalls wird die Zahlung  $X_t$  zur Zeit  $t \in (0, T]$  getätigt, wobei  $t = \min(\tau^i, \tau^j)$  ist. Der Preis zur Zeit 0 ist durch die gleiche Formel wie zuvor gegeben, jedoch müssen wir  $\mu_t$  durch  $\mu_t^i + \mu_t^j$  ersetzen. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Stoppzeit  $\min(\tau^i, \tau^j)$  dem ersten Sprungzeitpunkt des bedingten Poisson Prozesses mit Intensität  $(\mu_t^i + \mu_t^j)_{t \geq 0}$  entspricht. Somit ist der Preis zum Zeitpunkt 0

definiert durch:

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T \exp\left(-\int_0^s (r_t + \mu_t^i + \mu_t^j) dt\right) X_s (\mu_t^i + \mu_t^j) ds + \exp\left(-\int_0^T (r_t + \mu_t^i + \mu_t^j) dt\right) Y\right].$$

Die in den Kapiteln 3 - 5 dargestellten Formeln folgen alle aus diesen Resultaten.

Nun kommen wir wieder auf die anfangs definierte homogene Verpflichtung  $X_T \cdot (n - N_T)$  zurück. Der Marktwert der gesamten Verbindlichkeit zum Zeitpunkt 0 kann unter der Verwendung der Formeln (3.1) und (3.2) geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sum_i \exp\left(-\int_0^{T_i} r_t dt\right) (n - N_{T_i}) X_{T_i}\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_0^{T_i} r_t dt\right) (n - N_{T_i}) X_{T_i}\right] \\ &= \sum_i n \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_0^{T_i} r_t dt\right) \exp\left(-\int_0^{T_i} \mu_t dt\right) X_{T_i}\right] \\ &= n \cdot \sum_i \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\exp\left(-\int_0^{T_i} (r_t + \mu_t) dt\right) X_{T_i}\right]. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Zinsswaps, ist der fixe Bestandteil bei den Langlebigkeitsswaps eine Reihe von festen Zinsraten, welche an einen individuellen Zahlungszeitpunkt gebunden sind. Der Grund dafür ist, dass die Mortalität im hohem Alter wesentlich steigt und eine einzelne feste Zinsrate würde eine wachsende Diskrepanz zwischen den Cashflows, welche vom Swap generiert

werden und jenen, welche der Hedger benötigt, verursachen.

Wie bei Zinsswaps können wir die Langlebigkeitsswaps wie ein Portfolio von Forward-Kontrakten auf der zugrundeliegenden variablen Überlebensrate behandeln. Ein Forward Kontrakt ist eine Vereinbarung zwischen zwei Parteien zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt ein Gut zu einem festgelegten Preis zu kaufen beziehungsweise zu verkaufen. Präziser ausgedrückt geht eine Partei bei der Vereinbarung in die Long-Position, das heißt, sie verpflichtet sich das Underlying zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt zu einem vordefinierten Preis zu kaufen. Die andere Partei verpflichtet sich, das Gut zu den festgelegten Konditionen zu verkaufen, das bedeutet, sie ist in der Short-Position.<sup>3</sup>

## 3.2 Typen von Langlebigkeitsswaps

Im Weiteren betrachten wir zwei Instrumente, welche der Hedger  $H$  mit dem Hedge-Anbieter  $HS$  eingehen kann, um sein Exposure zu hedgen:

- Bespoke Langlebigkeitsswaps
- Indexgebundene Langlebigkeitsswaps

Diese werden in den folgenden Unterkapiteln näher erläutert.

### 3.2.1 Bespoke Langlebigkeitsswaps

Ein bespoke Langlebigkeitsswap erlaubt dem Hedger  $H$ , eine fixe Rate  $\bar{p}^N \in (0, 1)$  zu zahlen und im Gegenzug erhält er die realisierte Überlebensrate, die

---

<sup>3</sup>vgl. Hull [13], S. 5 ff

die Population zwischen 0 und  $T$  erfahren hat.

Wie im Abschnitt zuvor definiert, ist  $n$  die anfängliche Populationsgröße. Dann ist die Nettoauszahlung an den Hedger zur Zeit  $T$  gegeben durch

$$n \cdot \left( \frac{n - N_T}{n} - \bar{p}^N \right),$$

wobei wir hier nur gleichzeitig stattfindende Zahlungsausgleiche betrachten. Das heißt, die Nettoauszahlung entspricht dem Unterschied zwischen der tatsächlichen Anzahl von Überlebenden und der anfangs festgesetzten Anzahl von Überlebenden  $n\bar{p}^N$ .

Sei  $S_0$  der Marktwert des Swaps bei Vertragsbeginn. Dann gilt aufgrund der Gleichungen (3.1) und (3.2):

$$\begin{aligned} S_0 &= n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \cdot \left( \frac{n - N_T}{n} - \bar{p}^N \right) \right] \\ &= n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \mu_t) dt \right) \frac{n}{n} \right] - n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \cdot \bar{p}^N \right] \\ &= n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \mu_t) dt \right) \right] - n \cdot B(0, T) \cdot \bar{p}^N, \end{aligned}$$

wobei  $B(0, T)$  der Preis eines Zero-Coupon Bond mit Maturität  $T$  zum Zeitpunkt 0 ist.

Sei nun  $S_0 = 0$ , somit erhalten wir mit Hilfe der Definition der Kovarianz

$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$  nachstehende Gleichheit:

$$\begin{aligned} n \cdot B(0, T) \cdot \bar{p}^N &= n \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \mu_t) dt \right) \right] \\ &= n \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right] \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T \mu_t dt \right) \right] \\ &\quad + n \cdot \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), \exp \left( - \int_0^T \mu_t dt \right) \right). \end{aligned}$$

Da für den Preis eines Zero-Coupon Bond

$$B(0, T) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right]$$

sowie für die risikoneutrale Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\tilde{p}_T = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T \mu_t dt \right) \right]$$

gilt, können wir schließlich die Swaprate folgendermaßen darstellen:

$$\bar{p}^N = \tilde{p}_T + B(0, T)^{-1} \cdot \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), \exp \left( - \int_0^T \mu_t dt \right) \right). \quad (3.3)$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn die Sterblichkeitsintensität und der Preis des Zero-Coupon Bond (zumindest eine vernünftige Approximation 1. Ordnung) unkorreliert sind, die Langlebigkeitsswap-Kurve nur die Überlebenswahrscheinlichkeit  $\{\tilde{p}_{T_i}\}$  im Bezug auf die unterschiedlichen Laufzeiten  $\{T_i\}$  beinhaltet.

Unterschiedliche Studien haben sich kürzlich mit der Frage beschäftigt, wie man risikoadjustierte Überlebenswahrscheinlichkeiten quantifizieren kann. Da es im Wesentlichen keine öffentlich zugänglichen Informationen über Swapraten gibt, wollen wir nun einen Referenzfall annehmen, indem  $\tilde{p}_{T_i} = p_{T_i}$  für jede Maturität  $T_i$  gilt. Wir konzentrieren uns darauf, wie das Kontrahentenausfallsrisiko und die Collateral-Anforderungen einen positiven oder negativen Spread der best-estimate Überlebensrate generieren. Dies ist konsistent mit der Marktpraxis, wo generische Parteien einem „real-world“ Mortalitätsmodell (und Schätzmethodik) zum Neubewerten des Swaps zu einem zukünftigen Zeitpunkt zustimmen würden. Obwohl wir im folgenden im Wesentlichen auf das Langlebigkeitsrisiko konzentriert sind, so können in der Praxis die variablen Zahlungen des Langlebigkeitsswaps eine Interbankenraten-Komponente, wie zum Beispiel die London Inter Bank Offered Rate (LIBOR), oder die Überlebensindexierungsregeln, welche sich von den oben betrachteten unterscheiden können, beinhalten.

Es sei noch kurz angemerkt, dass der LIBOR ein Referenzzinssatz ist, welcher täglich von der British Bankers' Association veröffentlicht wird. Er wurde entworfen, um jenen Zinssatz zu reflektieren, unter dem eine Bank bereit ist, einen Kredit einer anderen Bank zu gewähren. Typischerweise werden nur jene Banken berücksichtigt, die mindestens ein AA-Kreditrating aufweisen, welche zum Beispiel von den Rating Agenturen S&P, Fitch oder Moody's bekannt gegeben werden. Den LIBOR gibt es in den wichtigsten Währungen sowie mit unterschiedlichen Laufzeiten bis zu zwölf Monaten.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>vgl. Hull [13], S. 76

### 3.2.2 Indexbasierte Langlebigkeitsswaps

Bei einem indexbasierten Langlebigkeitsswap ermöglichen standardisierte Instrumente dem Hedger eine fixe Swaprate  $\bar{p}^I \in (0, 1)$  zu zahlen und im Gegenzug dafür erhält er den realisierten Wert eines Überlebensindex  $(I_t)_{t \geq 0}$  zur Zeit  $T$ . Der Überlebensindex könnte die Sterblichkeitserfahrung einer Referenzpopulation widerspiegeln, welche weitgehend mit der des Portfolios übereinstimmen. Beispiele dafür sind die LifeMetrics Indizes von J.P. Morgan und Towers Watson, welche die Sterblichkeitsraten für mehrere europäische Länder, nämlich Großbritannien, Niederlande und Deutschland, und die USA indexieren.<sup>5</sup> Weitere Beispiele sind die Xpect Indizes von der Deutschen Börse,<sup>6</sup> welche derzeit für Deutschland und die Niederlande herausgegeben werden. Diese Indizes stellen monatliche Schätzer für die Lebenserwartung einer Referenzgruppe oder Individuen einer definierten Kohorte oder Region bereit.<sup>7</sup>

Um die Swaprate eines indexbasierten Langlebigkeitsswaps genauer analysieren zu können, betrachten wir zuerst Instrumente, die eine allgemeine variable Zahlung  $P$  generieren. Die entsprechende Swaprate  $\bar{p}$  kann nun analog der bespoke Langlebigkeitsswaps hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \cdot (P - \bar{p}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \cdot P \right] - B(0, T) \cdot \bar{p}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>vgl. Bertschi, Gintschel und Munaretto [15], S. 41-42

<sup>6</sup><http://www.dax-indices.com>

<sup>7</sup>vgl. Biffis und Blake [5], S. 11

Setzen wir nun wieder  $S_0 = 0$ , dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} B(0, T) \cdot \bar{p} &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \cdot P \right] \\ &= B(0, T) \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] + \text{Cov} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right). \end{aligned}$$

Somit gilt für die Swaprate:

$$\bar{p} = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] + B(0, T)^{-1} \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right).$$

Dieses Setup kann nun einfach auf indexbasierte Langlebigkeitsswaps angepasst werden.

Angenommen der Index hat die Darstellung:

$$I_t = \exp \left( - \int_0^t \mu_s^I ds \right),$$

wobei  $\mu_s^I$  die Sterblichkeitsintensität der Referenzpopulation ist.

Dann erhalten wir für diese Swaprate  $\bar{p}^I$ :

$$\bar{p}^I = \tilde{p}_T^I + B(0, T)^{-1} \cdot \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), \exp \left( - \int_0^T \mu_t^I dt \right) \right),$$

mit der entsprechenden risikoneutralen Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\tilde{p}_T^I = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T \mu_s^I ds \right) \right].$$

### 3.2.3 Bespoke versus indexbasierten Langlebigkeits-swaps

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften sowie die Vor- und Nachteile der bespoke und indexgebundenen Langlebigkeitsswaps beschreiben und gegenüberstellen:<sup>8</sup>

- Bestand und Dauer
  - Bespoke Langlebigkeitsswaps sind eher für geschlossene Rentenbestände, manchmal sogar ohne Anwartschaften, geeignet. In der Regel entspricht die Dauer 50 Jahren, dies kann jedoch auch kürzer sein.
  - Bei indexbasierten Swaps sind hingegen offene Rentenbestände mit Aktivversicherten üblich. Im Vergleich zu den bespoke Instrumenten ist die Dauer kürzer, nämlich nur etwa 10 Jahre.
- Sterblichkeitsraten
  - Die bespoke Swaps basieren exakt auf den Sterblichkeitsbeobachtungen des geschlossenen Rentenbestandes, deshalb ist auch eine eigene Statistik notwendig.
  - Im Gegensatz dazu basieren die indexgebundenen Langlebigkeitsswaps nicht auf dem realen, sondern auf den Sterblichkeitsbeobachtungen eines Musterbestandes und auf Index-Sterbetafeln.
- Vorteile
  - Ein Vorteil der bespoke Langlebigkeitsswaps ist, dass diese das Langlebigkeitsrisiko der laufenden Renten vollständig absichern.

---

<sup>8</sup>vgl. Bertschi, Gintschel und Munaretto [15], S. 44

Ein weiterer Vorteil ist, dass kein Basisrisiko entsteht, das heißt, es besteht keine Abweichung der Sterblichkeitsentwicklung des Rentenbestandes gegenüber einem Index.

- Die indexgebundenen Instrumente sind gegenüber den bespoke Absicherungen günstiger, transparenter und liquider. Ein weiterer Vorteil ist, dass sie wie bereits oben beschrieben für offene Rentenbestände und Aktivversicherte geeignet sind.

- Nachteile

- Ein Nachteil der bespoke Absicherung ist, dass die Administration des abgesicherten Bestandes sehr aufwendig ist, da eine eigene Statistik vonnöten ist. Diese Absicherung ist auch sehr teuer und nicht liquide. Eine weitere negative Eigenschaft ist, dass diese wie schon zuvor beschrieben, nur für große Bestände mit eigener Sterblichkeitsstatistik geeignet sind.
- Ein negativer Effekt bei den indexgebundenen Langlebigkeitsswaps ist, dass ein Basisrisiko entsteht. Dies hat zur Folge, dass die indexgebundene Absicherung für ganz kleine Pensionsfonds und Rentenanbieter nicht geeignet ist.

Als Abschluss dieses Abschnittes zeigt Tabelle 3.1 einige der oben beschriebenen Langlebigkeitstransaktionen, die im Zeitraum von 2008 bis 2015 veröffentlicht wurden.

Datum	Hedger	Anbieter	Typ	Volumen <sup>9</sup>
Jun 2015	Delta Lloyd	RGA Re	indexbasiert	EUR 12
Jul 2014	BT Pension Scheme	Prudential Insurance Company of America	bespoke	GBP 16
Mar 2014	Aviva	Swiss Re / Munich Re / SCOR	bespoke	GBP 5
Dez 2013	Astra Zeneca	Deutsche Bank / Abbey Life	bespoke	GBP 2.5
Feb 2013	BAE Systems	Legal & General / Hannover Re	bespoke	GBP 3.2
Feb 2012	Aegon	Deutsche Bank	bespoke	EUR 12
Dez 2011	Pilkington	Legal & General / Hannover Re	bespoke	GBP 1
Dez 2011	British Airways	Goldman Sachs / Rothesay Life	bespoke	GBP 1.3
Nov 2011	Rolls Royce	Deutsche Bank / Abbey Life	bespoke	GBP 3
Feb 2011	Pall	JP Morgan	indexbasiert	GBP 0.1
Feb 2010	BMW	Deutsche Bank / Abbey Life	bespoke	GBP 3
Dez 2009	Berkshire County	Swiss Re	bespoke	GBP 1
Jul 2009	RSA Insurance	Goldman Sachs / Rothesay Life	bespoke	GBP 1.9
Mai 2009	Babcock	Credit Suisse	bespoke	GBP 0.5
Feb 2008	Lucida	JP Morgan	indexbasiert	N.A.

Tabelle 3.1: Auswahl der veröffentlichten Langlebigkeitsswapstransaktionen von 2008 bis 2015 <sup>10</sup>

<sup>9</sup>in Milliarden

<sup>10</sup>Die in der Tabelle verwendeten Daten stammen von Artemis [1].

### 3.3 Der Marking-To-Market (MTM) Prozess

Langlebigkeitsswaps werden derzeit nicht an der Börse gehandelt und es gibt keinen allgemein akzeptierten Rahmen für Gegenparteien ihre Positionen marktnahe zu bewerten. Das Vorhandensein vom Kontrahentenausfallsrisiko und von Collateral-Regeln, auf welche wir in den folgenden Kapiteln noch näher eingehen werden, macht die MTM-Prozedur zu einem sehr wichtigen Merkmal dieser Transaktionen aus mindestens zwei Gründen:

- (i). Zu jedem Zufallszeitpunkt generiert die Differenz zwischen der variablen und der festen Zahlung einen Zu- beziehungsweise Abfluss für den Hedger, welcher von der Mortalität abhängt. In Abwesenheit vom Basisrisiko, wie zum Beispiel bei den bespoke Lösungen, zeigt diese Differenz einen reinen „Cashflow-Hedge“, dieser dient zur Absicherung der Gefahr von Schwankungen des Cashflows, gegen das Langlebigkeits-exposure der Transaktion. Jedoch wenn sich die Marktbedingungen ändern, dies ist zum Beispiel der Fall, wenn sich das Sterblichkeitsmuster oder das Kontrahentenausfallsrisiko verändert, kann sich die Auswirkung des Swaps dramatisch entwickeln. Ein Beispiel hierfür ist, wenn erwartet wird, dass die Swapzahlung einen guten Hedge gegen das Langlebigkeitsrisiko liefert, kann die Position des Hedgers wesentlich geschwächt werden, falls sich der erwartete Barwert der Nettozahlung aufgrund einer Verschlechterung der Kreditqualität des Hedgeanbieters verringert.
- (ii). Für Solvency Anforderungen ist es wichtig, einen Langlebigkeitsswap unter extremen Markt- und Mortalitätsszenarien zu schätzen. Das bedeutet zum Beispiel, dass selbst wenn ein Langlebigkeitsswap als eine Verbindlichkeit auf einer marktkonsistenten Basis qualifiziert

ist, könnte er immer noch zu einer erheblichen Kapitalmarktentlastung führen, wenn er auf regulatorischer Basis, aufgrund seiner anerkannten Wirksamkeit als Hedge, bewertet wird.

Für die bespoken Langlebigkeitsswaps kann der Marktwert der einzelnen „floating-for-fixed“ Zahlungen unter der Verwendung dieser Bewertungsformel berechnet werden:

$$S_t = n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \cdot \left( \frac{n - N_t}{n} \cdot \exp \left( - \int_t^T \mu_s ds \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] - n \cdot B(t, T) \cdot \bar{p}^N,$$

wobei  $B(t, T)$  der Marktwert eines Zero-Coupon Bond mit Maturität  $T - t$  ist. Diese Formel gilt für jeden Zeitpunkt  $t$  in  $[0, T]$ , bis zu dem noch kein Zahlungsverzug eingetreten ist.

# Kapitel 4

## Kontrahentenausfallsrisiko

In diesem Kapitel betrachten wir den Langlebigkeitsswap in Anwesenheit vom Kontrahentenausfallsrisiko. Analog zum Kapitel 3 verweisen wir, falls nicht anders gekennzeichnet, auf Biffis, Blake, Pitotti und Sun [6].

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass sowohl der Hedger  $H$  als auch der Hedge-Anbieter  $HS$  zu einem zufälligen Zeitpunkt  $\tau^H$  beziehungsweise  $\tau^{HS}$  ausfallen kann, das bedeutet, es handelt sich um einen doppelt stochastischen Ausfallszeitpunkt. Die jeweiligen Ausfallsintensitäten bezeichnen wir im Weiteren mit  $(\lambda_t^H)_{t \geq 0}$  beziehungsweise  $(\lambda_t^{HS})_{t \geq 0}$ . Der Ausfallszeitpunkt der Swap-Transaktion ist schließlich folgendermaßen definiert:

$$\tau := \min(\tau^H, \tau^{HS}).$$

Nun betrachten wir das Ereignis  $\{\tau \leq T\}$ . Wir nehmen an, dass die nicht ausgefallene Partei  $i$  einerseits einen Bruchteil  $\psi^j \in [0, 1]$ , mit  $i \neq j$  für  $i, j \in \{H, HS\}$ , des Marktwertes des Swaps vor dem Ausfall  $S_{\tau-}$  erhalten hat, wenn sie in-the-money ist und andererseits muss sie den vollen Marktwert des Swaps vor dem Ausfall  $S_{\tau-}$  der ausgefallenen Partei zahlen.

Damit wir den Marktwert des Swaps herleiten können, folgen wir dem Modell von Duffie und Huang [2]. Die Grundidee hinter diesem Modell ist, dass die Auswirkung des Kreditrisikos auf die Swapraten von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Pfade des Swapwertes abhängig ist. Wenn der Swapwert einer Partei positiv ist, dann ist das gleichzeitig die Ausfallseigenschaft der anderen Partei. Dies ist wesentlich für die Rückwärtsrekursion zur Berechnung des gegenwärtigen Swapwertes, welcher zum nächsten Zeitpunkt gegeben ist. Der Grundstein dieser Rekursion beruht auf Rendleman [19], auf welchen wir hier nicht näher eingehen werden.

Um den Marktwert des Swaps mit dem Nominalbetrag  $n$  schließlich darstellen zu können, definieren wir zunächst

$$\vartheta^H := \mathbb{1}_{\{S_t < 0\}} (1 - \psi^H) \lambda_t^H$$

sowie

$$\vartheta^{HS} := \mathbb{1}_{\{S_t \geq 0\}} (1 - \psi^{HS}) \lambda_t^{HS}.$$

Somit erhalten wir für den Marktwert

$$S_0 = n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \vartheta^H + \vartheta^{HS}) dt \right) \cdot (P - \bar{p}^d) \right], \quad (4.1)$$

wobei  $P$  die variable Zahlung und  $\bar{p}^d$  die fixe Rate beschreibt.

Um diese Formel verstehen zu können, müssen wir beachten, dass in unserem Setting die risikoneutrale Bewertung eines Claims, welcher ausfallen kann, die Verwendung einer ausfallsrisikoangepassten Short-Rate

$$r_t + \lambda_t^H + \lambda_t^{HS}$$

und Dividendenzahlungen

$$\lambda_t^H (\psi^H \mathbb{1}_{S_{t-} < 0} + \mathbb{1}_{S_{t-} \geq 0}) + \lambda_t^{HS} (\psi^{HS} \mathbb{1}_{S_{t-} \geq 0} + \mathbb{1}_{S_{t-} < 0})$$

beinhalten, welche durch die oben festgelegten Amortisationsregeln bestimmt sind.

Formel (4.1) hat zur Folge, dass die Abzinsung mit einem Aufschlag über dem risikofreien Zins gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \Lambda_t &:= \lambda_t^H + \lambda_t^{HS} - \lambda_t^H (\psi^H \mathbb{1}_{S_t < 0} + \mathbb{1}_{S_t \geq 0}) - \lambda_t^{HS} (\psi^{HS} \mathbb{1}_{S_t \geq 0} + \mathbb{1}_{S_t < 0}) \\ &= \mathbb{1}_{S_t < 0} (1 - \psi^H) \lambda_t^H + \mathbb{1}_{S_t \geq 0} (1 - \psi^{HS}) \lambda_t^{HS} \\ &= \vartheta^H + \vartheta^{HS}. \end{aligned}$$

Diese Formel zeigt, dass  $\Lambda_t$  von der Partei abhängig ist, die zu jedem gegebenen Zeitpunkt vor dem Ausfall out-of-the-money ist. Eine solche Charakteristik wird als regime-switching Eigenschaft bezeichnet.

Sei  $S_0 = 0$ , dann gilt:

$$0 = S_0 = n \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \vartheta^H + \vartheta^{HS}) dt \right) \cdot (P - \bar{p}^d) \right]$$

Setzen wir nun  $\Lambda_t$  ein und verwenden die Definition der Kovarianz, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right) \cdot \bar{p}^d \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right) \cdot P \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right) \right] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [P] \\ &\quad + \text{Cov}_{\mathbb{P}} \left( \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right), P \right) \end{aligned}$$

Für die Swaprate ergibt sich schließlich folgende Gleichung:

$$\bar{p}^d = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[P] + \frac{\text{Cov}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt\right), P\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt\right)\right]} \quad (4.2)$$

Somit hängt die Swaprate nicht nur von der Wechselwirkung zwischen den variablen Zahlungen und den Risikofaktoren (wie zum Beispiel Zinsrate, Ausfallsintensität, Amortisationsrate) ab, sondern auch vom Marktwert des Swaps.

Wir betrachten nun die variable Zahlung  $P$  genauer und unterscheiden dabei folgende drei Fälle:

- (i). Wenn die Zahlung  $P$  keine demographische Komponente enthält, wie es zum Beispiel bei Zinsswaps der Fall ist, dann ist die Kovarianz typischerweise negativ.

Um das zu zeigen, betrachten wir den Fall der Standard-Swap-Bewertungsformel, das heißt, beide Parteien haben dieselbe Ausfallsintensität

$$\lambda_t := \lambda_t^H = \lambda_t^{HS}$$

und es ist keine Erholung nach dem Ausfall vorgesehen

$$\psi^H = \psi^{HS} = 0.$$

Wenn das Kreditrisiko der Kontrahenten gleich der durchschnittlichen Kreditqualität der LIBOR-Tafel ist, dann ist die Diskontierungsrate in (4.2) gegeben durch

$$r + \lambda,$$

wobei  $\lambda$  der LIBOR-Treasury Spread ist. Dieser wird auch als TED Spread bezeichnet, wobei TED für Treasury Bill Eurodollar Difference steht, und entspricht der Differenz zwischen dem 3-Monats-LIBOR und der 3-Monats-Treasury Rate.<sup>1</sup>

Für einen Swap, der die LIBOR-Rate auszahlt, wird der Kovarianzterm negativ<sup>2</sup> und somit gilt

$$\bar{p}^d \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P].$$

- (ii). Wenn  $P$  nur aus einer demographischen Komponente besteht (wie zum Beispiel in Gleichung (3.3)), welche unkorreliert mit den anderen Variablen ist, dann ist der Kovarianzterm nicht Null. Dies folgt wegen der regime-switching Eigenschaft der Diskontierungsrate in (4.2) und der Tatsache, dass die Umschaltung durch den Wert des Swaps ausgelöst wird, was wiederum vom variablen Zinssatz abhängig ist.
- (iii). Allgemeiner könnten wir erwarten, dass der Kovarianzterm negativ ist, da Langlebigkeits-verbundene Zahlungen wahrscheinlich positiv mit der Bonität des Hedge-Anbieters und Firmen mit signifikanten Pensionsverbindlichkeiten korreliert sind.

Im Fall der variablen Zahlungen, welche eng mit der Mortalität und der Zinsrate verbunden sind, ist eine Swaprate mit der Eigenschaft  $\bar{p}^d \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P]$  empfehlenswerter. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

---

<sup>1</sup>vgl. Hull [13], S. 809

<sup>2</sup>vgl. Johannes und Sundaresan [17], S. 391

Wir betrachten nun den Fall der vollständigen Genesung, das bedeutet, dass folgendes gilt:

$$\psi^H = \psi^{HS} = 1.$$

Somit wird  $\Lambda_t$  Null und (4.2) reduziert sich auf:

$$\bar{p}^d = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] + \frac{\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right)}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right]}.$$

Dies entspricht einer ausfallsfreien risikoneutralen Bewertungsformel, ohne Rücksicht auf die Ausfallsintensitäten der Kontrahenten und den Kosten, die die Bonitätsverbesserungs-Tools mit sich bringen, welche die vollständige Genesung nach einem Ausfall sicher stellen.

Die obige Überlegung zeigt, dass es unerlässlich ist, die Kontrahentenrisikominderung explizit in der Preisfunktion zu betrachten.

Das Kontrahentenausfallsrisiko kann auf mehreren Wegen in die Preisfunktion migriert werden, zum Beispiel durch Einführung von Kündigungsrechten oder durch Verwendung von Kreditderivaten. Im folgendem Kapitel werden wir uns jedoch auf die Collateralization fokussieren.

# Kapitel 5

## Collateralization

In diesem Abschnitt führen wir die Collateralization ein und stellen einige typische Collateral-Regeln vor. Wie in den beiden Kapitel zuvor, beziehen wir uns, wenn nicht anders gekennzeichnet, auf Biffis, Blake, Pitotti und Sun [6].

Die Collateralization ist eine Form der direkten Kreditverbesserung, welche verlangt, dass jede Partei, die out-of-the-money ist, Bargeld oder Wertpapiere stellt. Das heißt, eine Collateral-Vereinbarung reflektiert den Wert des akzeptierten Kreditexposures, welchen jede Partei bereit ist aufzunehmen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall des Bargeldes, dies ist auch bei Weitem die gängigste Form der Collateralization.

### 5.1 Wirtschaftliche Aspekte

Ein fundamentaler Unterschied zwischen den Langlebigkeitsswaps und anderen Rückversicherungsformen ist, dass Langlebigkeitsswaps normalerweise mit Collaterals besichert sind. Der Hauptgrund dafür ist, dass diese Swaps oft Teil einer breiten risikoabbauenden Strategie sind, welche andere Instrumen-

te mit Collaterals, wie zum Beispiel Zinsraten oder Inflationsswaps, umfassen. Ein weiterer Grund ist auch die Tatsache, dass Hedger als Folge der globalen Finanzkrise von 2008-2009 zunehmend besorgter mit dem Kontrahentenausfallsrisiko umgehen.

Da es keinen anerkannten Rahmen für eine Bewertung der Langlebigkeitswaps gibt, sehen sich Hedger sowie Hedge-Anbieter auf anderen Märkten um, damit sie ein Referenzmodell für die Kontrahentenrisikobewertung sowie -minderung anbieten können. In Zinsswapmärkten ist die häufigste Form der Bonitätsverbesserung die Entsendung von Collaterals, daher bietet sich diese als Vergleichsbasis an.

Die International Swap and Derivatives Association (ISDA) ist eine Organisation, die seit 1985 daran arbeitet, die globalen Derivatemärkte sicherer und effizienter zu machen. Zurzeit ist sie mit über 850 Mitglieder in 67 Ländern vertreten. Ansehen erlangte die Organisation hauptsächlich durch die von ihr entwickelten ISDA Master Agreements. Diese entsprechen einer Reihe von Rahmenverträgen für den Handel mit spezifischen außerbörslichen Produkten, die die wichtigsten vertraglichen Verpflichtungen zwischen den Vertragsparteien festlegt.<sup>1</sup>

Nach der ISDA ist fast jeder Swap bei großen Finanzinstituten bilateral besichert.<sup>2</sup> Das bedeutet, dass jede Partei dazu aufgefordert ist, Sicherheiten zu stellen in Abhängigkeit davon, ob der Marktwert des Swaps positiv oder negativ ist. Abbildung 5.1 zeigt den Anstieg des Volumens der erwarteten sowie gemeldeten Collaterals im Zeitraum von 1999 bis 2014. Dies zeigt wie wichtig die Collateralization in jüngster Vergangenheit geworden ist.

---

<sup>1</sup>vgl. ISDA [11]

<sup>2</sup>vgl. ISDA [8]

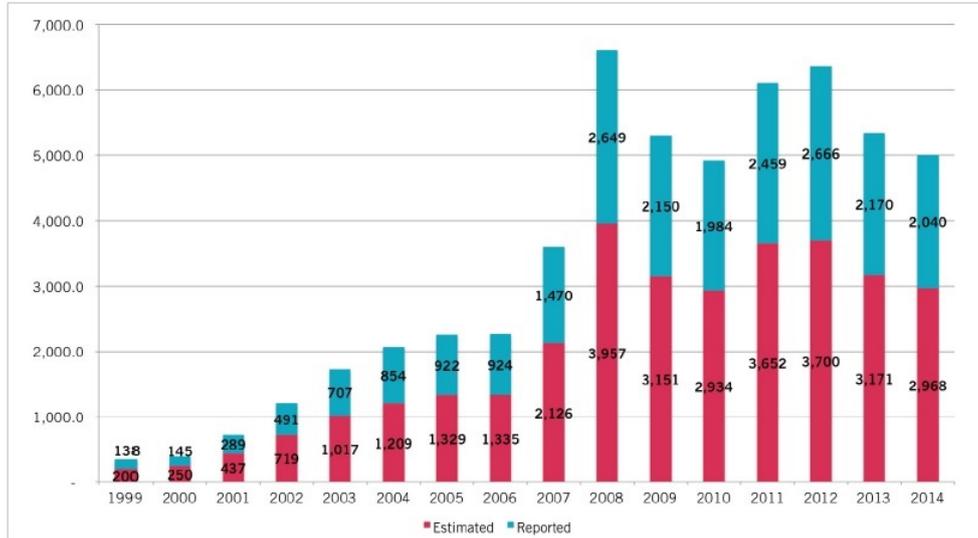


Abbildung 5.1: Entwicklung des Collateral-Volumens von 31. Dezember 1999 bis 31. Dezember 2014 in Milliarden US-Dollar<sup>3</sup>

Die überwiegende Mehrheit der Transaktionen ist gemäß eines Credit Support Annex (CSA) besichert, wie zum Beispiel 1994 ISDA Credit Support Annex New York Law sowie ISDA Credit Support Annex English Law. Ein solcher CSA entspricht dem Besicherungsanhang des Master Swap Agreement, welcher erstmals 1994 von der ISDA eingeführt wurde. Darin sind die grundlegenden Bestimmungen zur Collateralization dargestellt. Abbildung 5.2 zeigt anhand von aktiven non-cleared Agreements die soeben beschriebene Dominanz des CSA.

Die globale Finanzkrise hob die Bedeutung des bilateralen Kontrahentenrisikos und der Collateralization für außerbörsliche Märkte hervor. Die Life and Longevity Markets Association (LLMA) ist eine Organisation, die das Ziel hat, ein Forum anzubieten, in dem sich die Marktteilnehmer über den Handel

<sup>3</sup>Die Grafik stammt von ISDA [10].

von langlebigkeitsgebundene Finanzinstrumenten austauschen zu können.<sup>4</sup> Die LLMA beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Kontrahentenausfallsrisiko. Dabei wollen sie die Erfahrungen aus den festverzinslichen Märkten sowie Kreditmärkten ausnutzen.

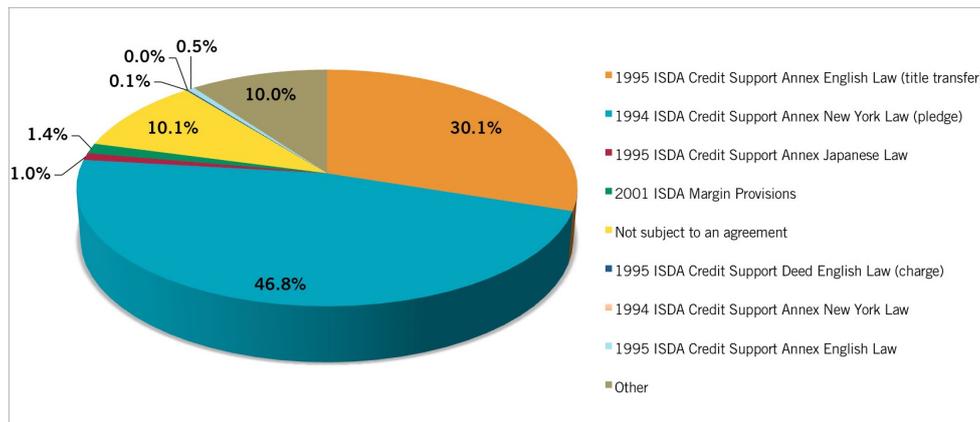


Abbildung 5.2: Zusammensetzung der aktiven non-cleared Agreements zum 31. Dezember 2014<sup>5</sup>

Im Vergleich zum traditionellen Bepreisungsrahmen, welcher bei Versicherungstransaktionen zur Anwendung kommt, wird bei Collateralization Strategien eine zusätzliche Komponente berücksichtigt. Das heißt, die Versicherungsprämie spiegelt nicht nur die Abneigung beziehungsweise den Appetit der Kontrahenten für das Risiko das übernommen wurde und die Kosten des regulatorischen Kapitals wieder, sondern auch die erwarteten Kosten, die durch die Collateralization entstehen. Damit wir diese Kosten verstehen können, betrachten wir zuerst den Sachverhalt aus der Sicht des Hedge-Anbieters, welcher einen Langlebigkeitsswap mit Collaterals ausgibt. Sobald der Swap ausreichend out-of-the-money ist, ist der Anbieter gezwungen, Collaterals zu stellen. Diese kann der Hedger verwenden, um im Falle der Zahl-

<sup>4</sup>vgl. LLMA [16]

<sup>5</sup>Die Grafik stammt von ISDA [10].

ungsunfähigkeit die Verluste zu mindern. Obwohl die Zinsen auf die Collaterals typischerweise zurückgezahlt werden, entstehen sowohl Finanzierungs- als auch Ersatzkosten. Da das Stellen von Collaterals die Ressourcen vermindert, kann der Hedge-Anbieter versuchen, sowohl die Kapitalanforderungen zu erreichen, als auch zusätzliche Geschäfte zu erzielen. Sobald der Swap hingegen ausreichend in-the-money ist, wird der Hedge-Anbieter Collaterals von der Gegenpartei erhalten. Von der Kapitalentlastung profitiert somit der Hedge-Anbieter und das freigesetzte Kapital kann verwendet werden, um zusätzliche Langlebigkeitsabsicherung zu verkaufen. Dieselben Überlegungen können wir nun aus der Sicht des Hedgers anstellen. Es ist jedoch unwahrscheinlich, dass sich der Finanzierungsbedarf und die Ersatzkosten der zwei Parteien genau gegenseitig aufheben.

Wenn wir Collateralization und die Langlebigkeitsrisiko Abneigung außer Acht lassen, dann hängen die Swapraten vom Schätzer der Überlebenswahrscheinlichkeit der betrachteten Population, vom Grad der Kovarianz zwischen den fließenden Vertragspartnern des Swaps und von der Ausfallszinsstruktur zwischen dem Hedger und dem Hedge-Anbieter ab. In Gegenwart von Collateralization sind Langlebigkeitsswapraten auch von den erwarteten Kosten, die die Collateralization mit sich bringt, abhängig. Daher beinhalten die Bewertungsformeln einen Diskontierungsfaktor, welcher die Kosten für die Collaterals reflektiert.

Wie schon kurz erwähnt, quantifizieren wir die Kosten für die Collaterals auf zwei Arten:

- (i). Die erste Art ist als Finanzierungskosten, die anfallen, wenn Collaterals gestellt werden, beziehungsweise die vermindert werden, falls man Collaterals erhält.

- (ii). Die zweite Möglichkeit ist als Ersatzkosten für den Verkauf von zusätzlichen Langlebigkeitsabsicherungen.

In beiden Fällen sehen wir, dass für typische Zinsraten und Mortalitätsparameter die Auswirkung der Collateralization gering ist, wenn das Ausfallrisiko und die Collateral-Regeln symmetrisch sind. Der Hauptgrund dafür ist, dass die Langlebigkeitsrisiken und die Zinsraten einen ausgleichenden Effekt haben. Dies beeinträchtigt die gesamte Wirkung der Collateralization:

- Einerseits stellt der Empfänger der festen Überlebensrate, das heißt der Hedge-Anbieter, Collaterals, wenn die Mortalität niedriger ist als die Überlebensrate. Somit sind die Langlebigkeits-Exposures kapitalintensiver. Andererseits erhält der Hedge-Anbieter Collaterals, wenn die Mortalität über der Überlebensrate ist. Der Gesamteffekt davon ist, dass die Swapraten nach oben gedrückt werden, um die positive Abhängigkeit des Hedge-Anbieters zwischen dem Stellen von Collaterals und den Kapitalkosten zu kompensieren.
- Wenn der Hedger oder der Hedge-Anbieter out-of-the-money ist, dann sind die Collateral-Abflüsse in Niedrigzinsumgebungen, das heißt wenn Verbindlichkeiten mit einer niedrigen Zinsrate diskontiert werden, größer. Daraus folgt, dass eine negative Beziehung zwischen dem Betrag der hinterlegten Collaterals und den Finanzierungs- beziehungsweise Ersatzkosten der Gegenpartei besteht. Dies mindert den Gesamteffekt der Collateralization.

Falls das Ausfallrisiko und beziehungsweise oder die Collateral-Regeln asymmetrisch sind, dann sind die gegenläufigen Effekte von unterschiedlicher Größe. Daher ist die Auswirkung der Collateral-Kosten auf Langlebigkeitswapraten größer. Zum Beispiel sehen wir, dass die Swapraten erheblich fal-

len, wenn der Hedger eine niedrigere Kreditbonität aufweist und eine volle Collateralization notwendig ist oder wenn Collateral-Regeln vorteilhafter für den Hedge-Anbieter sind. Die Collateralization führt eine explizite Verbindung zwischen dem individuellen Risiko-Exposure und dem Finanzierungsrisiko des Hedge-Anbieters ein. Doch wir sehen in unserem Beispiel, dass die gegenteiligen Effekte des Langlebigkeits- und Zinsrisikos sowie die unterschiedliche Art des Risikos, an den der Swap gebunden ist (Floatingrate im Falle der Zinsswaps und eine glatte Überlebensrate im Falle der Langlebigkeitsswaps), die Gesamtauswirkung der Collateralization mit jener auf den Rentenmärkten vergleichbar macht. Die Gesamtauswirkung auf den Rentenmärkten ist in der Regel niedriger als die der Collateralization. Eine wichtige Folgerung davon ist, dass die Zinsswapmärkte einen angemessenen Rahmen für die Collateralization von bespoke Langlebigkeitslösungen bieten, obwohl es solchen Lösungen an Transparenz und an Standardisierungsvorteilen verbunden mit indexbasierten Instrumenten fehlt. Investmentbanken haben indexbasierte Langlebigkeitsswaps, welche eine Struktur aufweisen, die vertraut für Kapitalmarktinvestoren sein müsste, verkauft, jedoch waren sie bis jetzt weniger populär als die bespoke Lösungen. Dieses Phänomen spiegelt sich in der Tabelle 3.1 wieder.

## 5.2 Das Setting

In diesem Abschnitt wollen wir die Rahmenbedingung für die Collateralization schaffen, damit wir dann auf die Collateral-Regeln eingehen können.

Zuerst führen wir den Collateral-Prozess vor dem Ausfall  $C = (C_t)_{t \geq 0}$  ein. Dieser Prozess zeigt, wie viel Cash  $C_t$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  vor dem Ausfall

vorhanden sein muss, um auf Änderungen der Marktbedingungen reagieren zu können, einschließlich des MTM-Wertes des Swaps.

Wir betrachten analog zu den vorangegangenen Kapiteln alles aus der Sicht des Hedgers. Das bedeutet, dass  $H$  einerseits die Collaterals hält, falls  $C_t > 0$  ist und andererseits diese ausgibt, falls  $C_t < 0$  ist.

Im Weiteren verwenden wir die Notation:

$$a^+ := \max(a, 0)$$

$$a^- := \max(-a, 0)$$

Wir betrachten nun die Amortisationsregeln einer Collateral-Vereinbarung, welche sich in drei Fälle unterscheiden lassen:

(i). *Hedgers-Ausfall*

Der Hedgers-Ausfall entspricht folgendem Ereignis:

$$\{\tau^H \leq \min(\tau^{HS}, T)\}.$$

Einerseits bekommt der Hedge-Anbieter  $HS$  jegliches Collateral vom Hedger  $H$ , sofern dieser kurz vor dem Ausfall ist, das heißt, er bekommt den Wert  $C_{\tau_{H-}}^-$ . Andererseits zahlt der Hedge-Anbieter  $HS$  den vollen MTM-Wert des Swaps an den Hedger  $H$ , falls  $S_{\tau_{H-}} \geq 0$  ist.

Der Nettofluss des Hedgers ist somit gegeben durch:

$$S_{\tau_{H-}}^+ - C_{\tau_{H-}}^-$$

(ii). *Hedge-Anbieters-Ausfall*

Dieser Fall entspricht dem zu oben äquivalenten Ereignis:

$$\{\tau^{HS} \leq \min(\tau^H, T)\}.$$

Der Hedger  $H$  zahlt den vollen MTM-Wert des Swaps an den Hedge-Anbieter  $HS$ , wenn  $S_{\tau HS-} < 0$  ist. Falls jedoch  $HS$  kurz vor dem Ausfall ist, dann bekommt  $H$  jegliches Collateral, das heißt, den Betrag  $C_{\tau HS-}^+$ .

Der Nettofluss des Hedgers ist in diesem Fall:

$$-S_{\tau HS-}^- + C_{\tau HS-}^+$$

(iii). Wann immer die nicht ausgefallene Partei, sagen wir zum Beispiel  $H$ , out-of-the-money ist, differenzieren wir zwischen folgenden Fällen:

(a) Overcollateralization

Die Zahlung des vollen MTM-Wertes des Swaps wird vom Hedger  $H$  durch Erhalten des Betrages

$$(S_{\tau-}^+ - C_{\tau-}^+)^+$$

erreicht.

(b) Undercollateralization

In diesem Fall wird der volle MTM-Wert vom Hedger  $H$  erreicht, indem er den Wert

$$(S_{\tau-}^- - C_{\tau-}^-)^+$$

erhält.

(c) Volle Collateralization

Im Falle der vollen Collateralization verliert der Hedger jegliche Collateral an den Hedge-Anbieter.

Um die Collateralization genauer betrachten zu können, drücken wir das Collateral vor dem Ausfall beider Parteien als einen Bruchteil des MTM-

Wertes des Swaps aus. Das heißt, es gilt:

$$C_t = (c_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}} + c_t^H \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}}) \cdot S_{t-}, \quad (5.1)$$

wobei  $c^H$  und  $c^{HS}$  zwei nicht negative, linksstetige Prozesse sind, die den Bruchteil des MTM-Wertes des Swaps beschreiben, welche als Collateral von  $H$  beziehungsweise von  $HS$  verwendet wird.

Jedoch müssen wir beachten, dass (5.1) Kosten verursacht. Wir können nämlich die von einer Partei zu Beginn ausgegebenen Collaterals nicht erfassen (das entspricht einer Form der Overcollateralization). Dies führt zu weiteren Transaktionen und dementsprechend zu zusätzlichen Kosten.

Wir definieren nun  $(\delta_t)_{t \geq 0}$  als einen nicht negativen, stetigen Prozess, welcher die Rendite, die durch die Collateralization entsteht, beschreibt. Diese Definition ist in jenem Sinne zu verstehen, dass das Halten beziehungsweise Stellen von  $C_t$  sofort den Nettobetrag  $\delta_t C_t$  erwirtschaftet beziehungsweise kostet.

Schließlich können wir eine Asymmetrie einführen, indem wir  $\delta_t$  folgendermaßen darstellen:

$$\delta_t = \delta_t^H \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}} + \delta_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}},$$

wobei  $\delta_t^H$  die Nettokosten des Hedgers beschreibt, die entstehen durch das Stellen von Collaterals, wenn  $H$  out-of-the-money ist und  $\delta_t^{HS}$  beschreibt den Nettoertrag, der aufgrund der von  $HS$  gestellten Collaterals entsteht, wenn  $H$  in-the-money ist.

Im Allgemeinen können wir die im Marktwert des Swaps eingebetteten Kosten wie die Kosten der marginalen Marktteilnehmer auffassen. Jedoch wenn wir individuelle Langlebigkeitsswaps-Transaktionen mit maßgeschneiderten

CSAs betrachten, kann es zweckmäßig sein, die Collateral-Kosten der Gegenpartei in die Bewertungsformel mit einzubeziehen. In diesem Fall können  $\delta_t^H$  und  $\delta_t^{HS}$  als Kosten durch das Stellen von Collaterals für  $H$  beziehungsweise  $HS$ , wann immer sie out-of-the-money sind, aufgefasst werden.

Bezeichnet  $\bar{p}^c$  die Swaprate im Falle von Collateralization, so können wir den MTM-Wert des Swaps wie in Gleichung (4.1) schreiben, jedoch müssen wir hierfür den Spread  $\Lambda$  noch modifizieren.

Wie zuvor definiert beschreibt der Prozess  $(\delta_t^H)_{t \geq 0}$  die Nettokosten des Hedgers, die durch das Stellen von Collaterals entstehen und der Prozess  $(\delta_t^{HS})_{t \geq 0}$  den Nettoertrag, der aufgrund der von  $HS$  gestellten Collaterals entsteht. Das bedeutet, dass das Halten vom Betrag  $C_t$  den Hedger mit dem sofortigen Ertrag

$$\delta_t^{HS} C_t^+ - \delta_t^H C_t^-$$

versorgt. Wir nehmen an, dass die Collaterals beschränkt sind und  $C_t$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_{t-}$  für alle  $t \in [0, T]$  ist. Der Hedger sowie der Hedge-Anbieter nehmen an, dass die Ausfallszeitpunkte wie zuvor definiert sind und im Speziellen die Ausfallsintensitäten  $\lambda^H$  und  $\lambda^{HS}$  besitzen. Mit den zuvor beschriebenen Amortisationsregeln können wir eine Formel für den Marktwert des Swaps herleiten.

Der Einfachheit halber definieren wir uns nun eine Hilfsvariable:

$$\varepsilon_u = \exp \left( - \int_0^u (r_t + \lambda_t^H + \lambda_t^{HS}) dt \right).$$

Schließlich erhalten wir für den Marktwert des Swaps:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [\varepsilon_T (P - \bar{p}^d)] \\
 &+ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T \varepsilon_s (\lambda_s^H (S_s^+ - C_s^-) + \lambda_s^{HS} (C_s^+ - S_s^-)) ds \right] \\
 &+ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T \varepsilon_s (\delta_s^{HS} C_s^+ - \delta_s^H C_s^-) ds \right].
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (5.1) ist der Betrag, der bei der nicht ausgefallenen Partei zur Zeit  $\tau = \min(\tau^H, \tau^{HS}) \leq T$  wieder erlangt wird, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{1}_{\{\tau=\tau^H\}} S_{\tau-} (c_\tau^H \mathbb{1}_{\{S_{\tau-} < 0\}} + \mathbb{1}_{\{S_{\tau-} \geq 0\}}) \\
 &+ \mathbb{1}_{\{\tau=\tau^{HS}\}} S_{\tau-} (c_\tau^{HS} \mathbb{1}_{\{S_{\tau-} \geq 0\}} + \mathbb{1}_{\{S_{\tau-} < 0\}}).
 \end{aligned}$$

Hier können wir sehen, dass  $c^H$  und  $c^{HS}$  die Erholungsraten  $\psi^H$  und  $\psi^{HS}$ , welche im Kapitel 3 eingeführt wurden, ersetzen.

Somit ergibt sich für den Marktwert des Swaps:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [\varepsilon_T (P - \bar{p}^d)] \\
 &+ \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T \varepsilon_s (\lambda_s^H + (\lambda_s^{HS} \delta_s^{HS}) c_s^{HS}) S_s^+ ds \right] \\
 &- \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T \varepsilon_s (\lambda_s^{HS} + (\lambda_s^H + \delta_s^H) c_s^H) S_s^- ds \right].
 \end{aligned}$$

Das stimmt mit der gewöhnlichen risikoneutralen Bewertungsformel für Sicherheiten mit dem Pay-off

$$S_T = P - \bar{p}^d$$

zum Endzeitpunkt überein. Dieser zahlt kontinuierlich eine Dividende aus, welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  dem Anteil

$$(\lambda_s^H + (\lambda_s^{HS} + \delta_s^{HS}) c_s^{HS}) \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}} + (\lambda_s^{HS} + (\lambda_s^H + \delta_s^H) c_s^H) \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}}$$

des Marktwertes entspricht.

Subtrahieren wir nun die Dividendenrate von  $\lambda^H + \lambda^{HS}$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_t^H + \lambda_t^{HS} - (\lambda_t^H + (\lambda_t^{HS} + \delta_t^{HS}) c_t^{HS}) \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}} \\
 & - (\lambda_t^{HS} + (\lambda_t^H + \delta_t^H) c_t^H) \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}} \\
 = & \lambda_t^H \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}} + \lambda_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}} - (\lambda_t^{HS} + \delta_t^{HS}) c_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq 0\}} \\
 & - (\lambda_t^H + \delta_t^H) c_t^H \mathbb{1}_{\{S_{t-} < 0\}} \\
 = & \lambda_t^H (1 - c_t^H) \mathbb{1}_{\{S_t < 0\}} + \lambda_t^{HS} (1 - c_t^{HS}) \mathbb{1}_{\{S_t \geq 0\}} \\
 & - (\delta_t^H c_t^H \mathbb{1}_{\{S_t < 0\}} + \delta_t^{HS} c_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_t \geq 0\}}).
 \end{aligned}$$

Somit haben wir schließlich den modifizierten Spread hergeleitet:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_t = & \lambda_t^H (1 - c_t^H) \mathbb{1}_{\{S_t < 0\}} + \lambda_t^{HS} (1 - c_t^{HS}) \mathbb{1}_{\{S_t \geq 0\}} \\
 & - (\delta_t^H c_t^H \mathbb{1}_{\{S_t < 0\}} + \delta_t^{HS} c_t^{HS} \mathbb{1}_{\{S_t \geq 0\}}).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Mit diesem modifizierten Spread ist die Swaprate unter Collateralization gegeben durch:

$$\bar{p}^c = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] + \frac{\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Gamma_t) dt \right), P \right)}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Gamma_t) dt \right) \right]}. \tag{5.3}$$

Setzen wir diese Swaprate in die Formel (4.1) ein, dann ergibt sich die Gleichung des MTM-Wertes des Swaps:

$$S_0 = n \cdot \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \vartheta^H + \vartheta^{HS}) dt \right) \cdot (P - \bar{p}^c) \right], \tag{5.4}$$

wobei  $\vartheta^H$  und  $\vartheta^{HS}$  die im Kapitel 4 definierten Hilfsvariablen entsprechen.

Im Ausdruck (5.2) erkennen wir die typischen Eigenschaften einer Bewertungsformel für kreditrisikoreiche Papiere: Die ersten zwei Terme erfassen

den anteiligen Rückgewinn des MTM-Wertes des Swaps im Falle des Gegenparteiausfalls. Der dritte Term erfasst die Kosten, die anfallen, wenn man Collaterals stellt, bevor man ausfällt. Ein wichtiger Unterschied ist, dass in Gleichung (5.2) die Rückgewinnungsrate von den Collateral-Regeln abhängig ist und die Collateral-Kosten explizit in der Diskontierungsrate auftreten.

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir noch einfache konkrete Fälle, um die Rolle der Collateralization in den Swapraten besser verständlich zu machen.

### 5.3 Volle Collateralization

In diesem Unterkapitel beziehen wir uns, falls nicht anders gekennzeichnet, neben dem anfangs erwähnten Paper Biffis, Blake, Piotti und Sun [6] auch auf Johannes und Sundaresan [17].

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Collateral-Regeln, die wir erhalten, falls folgendes gilt:

$$c^H = c^{HS} = 1.$$

Das bedeutet, dass der volle MTM-Wert des Swaps als Collateral gehalten beziehungsweise gestellt wird je nachdem, ob die MTM-Prozedur einen positiven beziehungsweise negativen Wert für  $S_t$  generiert.

Da wir Barsicherheiten betrachten, ist der Ausfall immateriell. Im Gegensatz zum Kapitel 3 reduziert sich im Allgemeinen der Ausdruck für den MTM-Wert des Swaps nicht zu der gewöhnlichen, ausfallsfreien, risikoneutralen

Bewertungsformel, es sei denn, die Collateral-Kosten sind Null.

Im Fall von symmetrischen Collateral-Kosten vereinfacht sich der Spread unter der obigen Bedingung zu:

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= - \left( \delta_t^H c_t^H \mathbf{1}_{\{S_t < 0\}} + \delta_t^{HS} c_t^{HS} \mathbf{1}_{\{S_t \geq 0\}} \right) \\ &= - \delta_t\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Spread der negativen Rendite entspricht. Setzen wir dieses vereinfachte  $\Gamma_t$  in Formel (5.3) ein, dann erhalten wir folgende Swaprate:

$$\bar{p}^c = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] + \frac{\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left( \exp \left( \int_0^T (\delta_t - r_t) dt \right), P \right)}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( \int_0^T (\delta_t - r_t) dt \right) \right]}.$$

Im Weiteren untersuchen wir die Beziehungen zwischen den Swapraten etwas näher.

Da die folgenden Kovarianzen

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \delta_t) dt \right), P \right] \\ \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right]\end{aligned}$$

jeweils einen negativen Wert annehmen, sind beide Swapraten  $\bar{p}^d$  und  $\bar{p}$  kleiner als  $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P]$ . Falls  $\delta_t$  deterministisch ist, dann gilt sogar die Gleichheit  $\bar{p}^c = \bar{p}$ .<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>vgl. Cox, Ingersoll, Jr. und Ross [12]

Nun betrachten wir die Differenz zwischen der ausfallsfreien Swaprate  $\bar{p}$  und der Swaprate  $\bar{p}^d$ :

$$\bar{p} - \bar{p}^d = \frac{\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right]}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right]} - \frac{\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right), P \right]}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right) \right]}.$$

Da  $(r_t + \Lambda_t)$  und  $r_t$  positiv korreliert sind, gilt für die Kovarianzen aus der obigen Formel folgendes:

$$\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right), P \right] < \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right].$$

Mit dieser Ungleichung und der Tatsache, dass

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t + \Lambda_t) dt \right) \right] < \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right) \right]$$

ist, folgt schließlich insgesamt für die Swapraten:

$$\bar{p} > \bar{p}^d.$$

Dieses Resultat ist nicht sehr intuitiv, da es impliziert, dass das Eliminieren vom Kontrahentenausfallsrisiko die Swapraten ansteigen lässt.

Damit wir die Differenz zwischen  $\bar{p}$  und  $\bar{p}^c$  unter die Lupe nehmen können, sei zuvor noch erwähnt, dass, falls

$$\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right] < \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t - \delta_t) dt \right), P \right]$$

ist, dann erhalten wir schließlich für die Swapraten:

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [P] > \bar{p}^c > \bar{p} > \bar{p}^d.$$

Um diese Bedingung verstehen zu können, betrachten wir die Approximation erster Ordnung der Exponentialfunktion:

$$e^x = 1 + x.$$

Dies impliziert, dass wir die geforderte Bedingung schreiben können als:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T r_t dt \right), P \right] &< \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \exp \left( - \int_0^T (r_t - \delta_t) dt \right), P \right] \\ \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ 1 - \int_0^T r_t dt, P \right] &< \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ 1 - \int_0^T r_t dt + \int_0^T \delta_t dt, P \right] \\ &= \text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ 1 - \int_0^T r_t dt, P \right] + \text{Cov} \left[ \int_0^T \delta_t dt, P \right]. \end{aligned}$$

Ist die Kovarianz  $\text{Cov}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T \delta_t dt, P \right]$  positiv, dann ist die Swaprate mit Collaterals höher als die ausfallsfreie Swaprate, das heißt im Speziellen jene mit kostenloser Collateralization. Diese Bedingung hält, falls die Nettokosten der Collaterals positiv mit der ausfallsfreien Shortrate oder mit dem TED-Spread korrelieren.

Die Ungleichung  $\bar{p}^c > \bar{p}$  zeigt, dass der MTM-Wert und die kostspieligen Collaterals eine weitere Zunahme der Swapraten hervorrufen. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass (teure) Collateralization-Ergebnisse beim Zahler der variablen Rate mit einer höheren fixen Rate kompensiert werden. Auf dem Zinsswap-Markt passiert dies, wenn entweder die Shortrate oder der TED-Spread positiv mit  $\delta$  korreliert ist.

Die Intuition ist, dass die Partei, die die variable Rate zahlt, sowohl die Collaterals stellen als auch höhere Finanzierungskosten haben wird, wenn die variable Rate steigt.

Bei Langlebigkeitsswaps können wir erwarten, dass die Kosten der Collateralization positiv von der Sicherheitsverbesserung und negativ von der Zinsrate abhängen. Ein Grund dafür ist, dass die Verbindlichkeiten, die mit Langlebigkeit verbunden sind, kapitalintensiver in Umgebungen mit niedriger Sterblichkeit und niedriger Zinsrate sind. Dies folgt aufgrund der geringen Abzinsung der zukünftigen Cashflows.

Die kombinierte Auswirkung aus den zwei Effekten ist jedoch unklar.

## 5.4 Übliche Collateral-Regeln

Gemäß der ISDA<sup>7</sup> ist es für Collateral-Verträge typisch, die Collateral-Auslöser, basierend darauf, dass der Marktwert des Swaps oder andere relevanten Variablen (wie zum Beispiel Kreditrating, Kreditspread, etc.) einen vordefinierten Schwellwert überschreiten, zu spezifizieren. Bei Langlebigkeitsswaps kann der CSA Collateral-Regeln definieren, die von der zugrunde gelegten Lebenserfahrung abhängen und verschiedene Variablen in unterschiedlichen Frequenzen überwachen. Hierbei ist die Pfadabhängigkeit, beispielsweise im Bezug auf die Lebenserwartung, gemeint.

Der CSA kann zum Beispiel Sterblichkeitsverbesserungen für tägliche Collateral-Anpassungen von finanzielle Konditionen, für quartalsweise Anpassungen von Mortalitätserfahrungen und für jährliche Anpassungen von Änderungen in den zukünftigen Sterblichkeitsverbesserungen erlauben.

Die folgenden Beispiele zeigen einige der zuvor genannten Aspekte:

(i). Sei

$$c_t^{HS} = \mathbb{1}_{\{S_{t-} \geq \underline{s}(t)\}} \quad \text{und} \quad c_t^H = \mathbb{1}_{\{S_{t-} \leq \bar{s}(t)\}},$$

---

<sup>7</sup>vgl. ISDA [9]

wobei  $\underline{s}$  und  $\bar{s}$  auf  $[0, T]$  definierte, stetige Funktionen sind und es gilt  $\underline{s} \leq \bar{s}$ . Das bedeutet, dass der Hedge-Anbieter die vollen Collaterals stellen muss, wenn der MTM-Wert des Swaps über der entsprechenden zeitabhängigen Schwelle ist. Ist andernfalls der MTM-Wert unter dieser Schranke, dann muss der Hedger die vollen Collaterals stellen.

Allgemeinere Collateral-Regeln erhalten wir durch

$$c_t^{HS} = \gamma_t^{HS} \mathbf{1}_{\{S_{t-} \geq \underline{s}(t)\}} \quad \text{und} \quad c_t^H = \gamma_t^{HS} \mathbf{1}_{\{S_{t-} \leq \bar{s}(t)\}},$$

für geeignete Prozesse  $\gamma^H$  und  $\gamma^{HS}$ , welche von den vorherrschenden Marktbedingungen oder Erfahrungen über zukünftige Sterblichkeit abhängen.

- (ii). Bei Langlebigkeitsswaps ist es geläufig, die Collateral-Schwellenwerte hinsichtlich der Sterblichkeitsprognose basierend auf einem zu Vertragsbeginn vereinbarten Modell zu definieren. In diesem Modell werden die Todesfälle in der Hedger's Population anstelle des Marktwert des Swaps überwacht. Dies ist sowohl auf die Neueinschätzung der Risiken, bewegt durch beliebige Mortalitätsmodelle, als auch auf das Vorhandensein von bedeutender Modellrisiken, welche die Gegenparteien daran hindert, an einem geläufigen Modell zu einem zukünftigen Zeitpunkt zuzustimmen, zurückzuführen.

Wir setzen zum Beispiel

$$c_t^{HS} = \mathbf{1}_{\{N_{t-} \geq \alpha(t)\}} \quad \text{und} \quad c_t^H = \mathbf{1}_{\{N_{t-} \leq \beta(t)\}},$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  stetige Funktionen sind, für die  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq n$  gilt. Das bedeutet, dass der Hedge-Anbieter volle Collaterals stellen muss, wenn die realisierte Todesanzahl unter der relevanten Schwelle ist. Liegt sie

jedoch über dieser Schranke, dann muss der Hedger die vollen Collaterals stellen.

- (iii). Für einen indexbasierten Swap ist es üblich mit der Sterblichkeitsintensität  $\mu^I$  der Referenzpopulation zu arbeiten. Sei

$$c_t^{HS} = \mathbb{1}_{\{\int_0^t \mu_s^I ds \geq a(t)\}} \quad \text{und} \quad c_t^H = \mathbb{1}_{\{\int_0^t \mu_s^I ds \geq b(t)\}},$$

mit  $a$  und  $b$  sind stetige Funktionen, für die gilt  $0 \leq a \leq b$ . Das bedeutet, dass die Collateral-Entsendung zu jedem Zeitpunkt  $t$  ausgelöst wird, wenn der realisierte Wert des Langlebigkeitsindex,  $\exp\left(\int_0^t \mu_s^I ds\right)$ , aus dem offenen Intervall  $(\exp(-b(t)), \exp(-a(t)))$  fällt.

- (iv). Wie in Kapitel 3.3 erwähnt wurde, ist das Ausmaß des Kontrahentenrisikos abhängig von der Kreditwürdigkeit der Gegenpartei. Deshalb verwenden Collateral-Verträge solche Schwellenwerte, die vom Kreditrating oder einem CDS-Spread abhängig sind.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass ein CDS (Credit Default Swap) ein Kreditderivat ist, welches eine Versicherung gegen das Ausfallrisiko eines Referenzschuldners anbietet.<sup>8</sup>

Ein einfaches Beispiel für diesen Fall erhalten wir aus Punkt (i). dieser Aufzählung, indem wir folgendes setzten:

$$c_t^{HS} = \mathbb{1}_{\{N_{t-} \leq \alpha(t)\} \cup \{\lambda_t^{HS} \geq \underline{\lambda}\}} \quad \text{und} \quad c_t^H = \mathbb{1}_{\{N_{t-} \geq \beta(t)\} \cup \{\lambda_t^H \geq \underline{\lambda}\}}.$$

Das bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt  $t$  einerseits der Hedger Collaterals erhält, wenn entweder die realisierten Todesfälle unter dem Level  $\alpha(t)$  sind oder die Ausfallsintensität des Hedge-Anbieters über eine gegebene Schwelle  $\underline{\lambda} \geq 0$  hinaus schießt. Andererseits erhält der Hedge-Anbieter Collaterals, wenn entweder die realisierten Todesfälle unter

---

<sup>8</sup>vgl. Hull [13], S. 548

der Schranke  $\beta(t)$  liegen oder die Ausfallsintensität des Hedgers über eine gegebene Schwelle  $\underline{\lambda} \geq 0$  hinaus schießt. Wir müssen beachten, dass  $c^H$  und  $c^{HS}$  nicht zur selben Zeit Null sein können (zum Beispiel bei dem Ereignis  $\{N_{t-} \leq \alpha(t)\} \cup \{\lambda_t^H \geq \underline{\lambda}\}$ ), aber (5.1) garantiert, dass nur die Partei die Collaterals stellen wird out-of-the-money ist.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir uns intensiv mit den Rahmenbedingungen des Langlebigkeitsswaps beschäftigt und haben diese in Abhängigkeit vom Kontrahentenausfallsrisiko sowie der Collateralization diskutiert.

Anfangs erläuterten wir den Cox Prozess, welcher mit samt seinen Eigenschaften eine wichtige Rolle bei der Betrachtung der Langlebigkeitsswaps spielt, da sich die Todeszeitpunkte wie die ersten Sprünge eines Cox Prozesses verhalten.

Anschließend haben wir die Langlebigkeitsswaps an sich sowie in Anwesenheit vom Kontrahentenausfallsrisiko und der Collateralization näher betrachtet. Wir befassten uns im Speziellen mit der Fragestellung, wie man die Effektivität der langlebigkeitsverbundenen Instrumente in Abhängigkeit vom Kontrahentenausfallsrisiko messen kann. In diesem Zusammenhang haben wir eine Methode zum Bepreisen von Langlebigkeitsswaps vorgestellt, welche die MTM-Prozedur, die Collaterals sowie deren Kosten berücksichtigt. Wir haben gezeigt, dass Collateral-Strategien das Kontrahentenausfallsrisiko mindern können, jedoch werden dadurch neue Kosten verursacht,

welche vom Hedger oder vom Hedge-Anbieter getragen werden müssen. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass die Kosten der Collateralization in Langlebigkeitsswaps-Märkten vergleichbar mit, und oft kleiner als, jenen in liquideren Zinsswap-Märkten sind. Das bedeutet, dass das Kontrahentenausfallsrisiko keineswegs eine Hürde in der Entwicklung des Langlebigkeitsswap-Marktes darstellt.

In den nächsten Jahren wird sich zeigen, ob sich langlebigkeitsverbundene Finanzinstrumente als eine Alternative zu den traditionellen Versicherungsformen durchsetzen beziehungsweise noch weiter festigen können, damit mehr Kapazität zum Transfer von Langlebigkeitsrisikos zur Verfügung steht.

# Literaturverzeichnis

- [1] ARTEMIS. [http://www.artemis.bm/library/longevity\\_swaps\\_risk\\_transfers.html](http://www.artemis.bm/library/longevity_swaps_risk_transfers.html), Stand 09.04.2016.
- [2] DARRELL DUFFIE, MING HUANG. Swap rates and credit quality. *The Journal of Finance*, Vol. LI(No. 3):921–949, (1996).
- [3] DAVID BLAKE, WILLIAM BURROWS. Survivor bonds: Helping to hedge mortality risk. *Pensions Institute, Discussion Paper PI-9910*, (2001).
- [4] DAVID LANDO. *Credit Risk Modeling*. Princeton University Press, (2004).
- [5] ENRICO BIFFIS, DAVID BLAKE. Mortality-linked securities and derivatives. *Pensions Institute, Discussion Paper PI-0901*, (2009).
- [6] ENRICO BIFFIS, DAVID BLAKE, LORENZO PIOTTI, ARIEL SUN. The cost of counterparty risk and collateralization in longevity swaps. (2013).
- [7] ENRICO BIFFIS, MICHEL DENUIT, PIERRE DEVOLDER. Stochastic mortality under measure changes. (2009).
- [8] ISDA. *2010 Margin Survey*. International Swaps and Derivatives Association, (2010).
- [9] ISDA. *Market Review of OTC Derivative Bilateral Collateralization Practices*. International Swaps and Derivatives Association, (2010).

- [10] ISDA. *Margin Survey 2015*. International Swaps and Derivatives Association, (2015).
- [11] ISDA. <http://www2.isda.org/about-isda/>, Stand 30.3.2016.
- [12] JOHN C. COX, JONATHAN E. INGERSOLL, JR., STEPHAN A. ROSS. The relation between forward prices and futures prices. *The Journal of Financial Economics*, Vol. 9:321–346, (1981).
- [13] JOHN C. HULL. *Options, Futures and Other Derivatives, Eighth Edition*. Pearson Education, Inc., (2012).
- [14] KEVIN DOWD, DAVID BLAKE, ANDREW G.J. CAIRNS, PAUL DAWSON. Survivor swaps. *Pensions Institute, Discussion Paper PI-0604*, (2006).
- [15] LJUDMILA BERTSCHI, ANDREAS GINTSCHEL, NATHALIE MUNARETTO. Absicherung von langleberisiken einer pensionskasse am kapitalmarkt. *Der Schweizer Treuhänder*, Vol. 1-2:41–47, (2010).
- [16] LLMA. <http://www.llma.org/about-us.html>, Stand 30.03.2016.
- [17] MICHAEL JOHANNES, SERESH SUNDARESAN. The impact of collateralization on swap rates. *The Journal of Finance*, Vol. LXII(No. 1):383–410, (2007).
- [18] PABLO ANTOLIN. Longevity risk and private pensions. *OECD Working Papers on Insurance an Private Pensions*, No. 3, (2007).
- [19] R. J. RENDLEMAN, JR. How risks are shared in interest rate swaps. *Journal of Financial Services Research*, Vol. 7:5–34, Springer, (1993).

- [20] RONALD D. LEE, LAWRENCE R. CARTER. Modeling and forecasting u.s. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87(No. 419):659–671, (1992).
- [21] SHIGEO KUSUOKA. A remark on default risk models. *In Advances in mathematical economics*, Vol. 1:69–82, Springer, (1999).
- [22] STATISTIK AUSTRIA. <http://www.statistik.at/>, Stand 28.03.2016.
- [23] THORSTEN RHEINLÄNDER, JENNY SEXTON. *Hedging Derivatives*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2011).
- [24] TOMASZ R. BIELECKI, MAREK RUTKOWSKI. *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer, (2010).