



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Simulation und Analyse von Select-Produkten im Niedrigzinsumfeld

Ausgeführt am Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer,
Univ.Lektorin Dipl.-Ing. Dr.techn. Karin Hirhager
und
Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Cordelia Rudolph

durch
Eva Pasztor, BSc
Matr.-Nr. 1126983

Wien, 21. Februar 2016

Danksagung

An dieser Stelle meiner Diplomarbeit möchte ich all denjenigen danken, die mich durch ihre fachliche und menschliche Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit begleitet haben.

Besonders möchte ich mich bei Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer, Dipl.-Ing. Dr.techn. Karin Hirhager und Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Cordelia Rudolph für die gute Betreuung und die Hilfestellung bei den zahlreichen fachlichen Fragen bedanken.

Meinen Kollegen der Allianz Elementar Lebensversicherungs AG möchte ich auch herzlich für die konstruktiven Diskussionen und die Zusammenarbeit in den vergangenen zwei Jahren danken. Sie haben mir die Praxisrelevanz des Themas bestätigt und mein fachliches Wissen erweitert.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern und Brüdern. Sie haben mir das Studium ermöglicht und sind mir ständig mit gutem Rat zur Seite gestanden. Ich bin auch dankbar dafür, dass sie mich in allen Phasen des Studiums motivierten.

Einen besonderen Dank hat sich mein Freund, Matthias verdient, der mich immer wieder ermutigt und tatkräftig unterstützt hat. Er fand stets die passenden Worte, um mich meinem Ziel näher zu bringen.

Zusammenfassung

Ein „Select-Produkt“ ist ein kapitaleffizientes Vorsorgekonzept mit endfälliger Beitragsgarantie. Dies unterscheidet sich zu einer klassischen Rentenversicherung nur bei der Gewinnbeteiligung in der Ansparphase, da diese sich durch die Indexpartizipation an den Chancen des Aktienmarktes beteiligt.

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften von Indexpolicen vorgestellt und die erhöhte Bedeutung der Produktentwicklung im Niedrigzinsumfeld betont. Die Beschreibung beruht auf das erste „Select-Produkt“ am Versicherungsmarkt in Deutschland, aber weitere ähnliche Produkte werden auch im Vergleich erwähnt.

Um diese Art von Produkten näher untersuchen zu können, wird die Vertragsentwicklung in der Rentenansparphase mit Hilfe von finanzmathematischen Modellen simuliert.

Ein großer Vorteil von Indexpolicen ist die jährliche Wahlmöglichkeit zwischen sicherer Verzinsung und Indexpartizipation, die zu einer höheren Profitabilität sowohl für Versicherungsnehmer als auch für Versicherer führen kann.

Durch einen Vergleich der Resultate aus der Simulation von „Select-Produkten“ mit der klassischen Rentenversicherung werden weitere Vor- und Nachteile solcher Versicherungsprodukte aufgezeigt.

Abstract

Select-Products are index-linked life insurances with investment guarantee. These are constructed out of a traditional annuity contract but they differ in the annual surplus allocation.

In this paper, we describe the unique features of index-linked life insurance products and explain the importance of alternative methods in product design.

To analyse the accumulation phase of such annuities, we will simulate the account value by financial modelling. The paper presents a model for the first type of Select-Products but compares this product with other designs offered in the German market as well.

The analysis emphasizes the current attractiveness of these products with features, which can be reset annually to help steer profitability both from customers' and insurers' point of view.

Last but not least a comparison of the simulated results with a traditional annuity will demonstrate advantages as well as disadvantages of select-products.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	6
1 Einleitung	8
2 Lebensversicherung in der Niedrigzinsphase	10
2.1 Versicherer unter Druck	10
2.2 Produktdesign im aktuellen Umfeld	11
3 Select-Produkte	14
3.1 Allgemeine Beschreibung von Select-Produkten	14
3.2 Mathematische Beschreibung von Select-Produkten	17
4 Beschreibung und Umsetzung von Modellen	22
4.1 Modellbeschreibung	22
4.1.1 Stochastische Prozesse	22
4.1.2 Finanzmarktmodell	22
4.1.3 Modellierung des Aktienkurses	23
4.1.4 Vasicek-Zinsmodell	26
4.1.5 Portfolio Hedging	27
4.2 Simulation von Select-Produkten	31
4.2.1 Einführung ins Simulationsprogramm	31
4.2.2 Modellierung von Zinssätzen mittels Vasicek-Modell	32
4.2.3 Modellierung der Indexentwicklung	34
4.2.4 Berechnung der Zinsen bei sicherer Veranlagung	36
4.2.5 Berechnung der Höhe des Caps mittels Bisektionsverfahren	36
4.2.6 Berechnung der Zinsen bei Indexpartizipation	40
4.2.7 Modellierung der Vertragswertentwicklung	41
4.2.8 Berechnung des Konfidenzintervalls für den Mittelwert	45
5 Resultate der Simulation	48
5.1 Analyse und Vergleich	48
5.1.1 Einmalerlag	49
5.1.2 Prämienpflichtige Verträge	60

5.2	Zusammenfassung der Ergebnisse aus Kunden und Unternehmenssicht . . .	71
5.3	Zukunft der Produktentwicklung	72
6	Schlussfolgerung	73
	Abbildungsverzeichnis	75
	Tabellenverzeichnis	77
	Literaturverzeichnis	79

Kapitel 1

Einleitung

Aufgrund der derzeitigen Entwicklungen des Finanz- und Versicherungsmarktes (fallende Zinsen, volatile Märkte und steigende Eigenkapitalanforderungen) sind viele Versicherer bemüht, bei der Produktentwicklung sowohl die Auswirkungen der Niedrigzinsphase berücksichtigen zu können als auch die Kapitaleffizienz der Versicherungsprodukte zu erhöhen.

In dieser Arbeit wird das Modell der Indexpolicen analysiert. Wir werden die Ansparphase von „Select-Produkten“ simulieren und aus verschiedenen Perspektiven untersuchen.

Die praktische Umsetzung des Modells wird anhand eines Simulationsprogramms in R durchgeführt. Mithilfe dieses Programms werden wir die Simulation der Vertragsentwicklung in der Ansparphase ausführen. Im Anschluss daran berechnen wir die Vertragswertentwicklung einer klassischen Rente, um diese im Vergleich zum „Select-Produkt“ untersuchen zu können.

Das Kapitel 2 beschreibt die Situation im Niedrigzinsumfeld und den stark auf die Lebensversicherungsbranche lastenden Druck, die Zukunft eines Unternehmens durch kapitaleffiziente Lebensversicherungsprodukte abzusichern. Die Alternativen bei der Produktentwicklung im aktuellen Umfeld werden in der zweiten Hälfte dieses Kapitels diskutiert.

Das Kapitel 3 liefert die Produktbeschreibung von „Select-Produkten“. Der Begriff „Select“ erklärt sich aus der Wahlmöglichkeit des Kunden zwischen Sicherheit einer klassischen Lebensversicherung und Chancen des Aktienmarktes. Die Beschreibung basiert auf dem Vorzeigeprodukt IndexSelect aus dem Jahr 2007, welches als erstes „Select-Produkt“ von der Allianz angeboten worden ist. Weiters wird auch das Produktangebot von Indexpolicen in Deutschland erwähnt. Am Ende dieses Kapitels wird auf die Unterschiede der derzeit am Markt vorhandenen Indexpolicen eingegangen. Der Inhalt der Tabelle 3.1.1 hilft, einen Überblick über diese Art von Vorsorgekonzepten zu bekommen und sie besser zu verstehen.

Noch in diesem Kapitel werden die Struktur und der mathematische Aufbau des „Select-Produktes“ dargestellt. Die mathematische Beschreibung wird dabei möglichst allgemein gehalten, damit die unterschiedlichen Ausprägungen von „Select-Produkten“ berechnet werden können.

In Kapitel 4 werden die für die Simulation der Vertragswertentwicklung verwendeten Modelle beschrieben. Hier sind finanzmathematische Modelle wie das Aktienpreis-Modell und das Vasicek-Zinsmodell aufgeführt.

Des Weiteren beschäftigt sich dieses Kapitel auch mit der praktischen Umsetzung der oben genannten Modelle und Prozesse, welche für die Berechnung benötigt werden.

Im vorletzten Kapitel 5 werden wir die Ergebnisse der Simulation zeigen und analysieren. Die Resultate dieser Arbeit beruhen auf einem fiktiven Versicherungsvertrag. Die Kennzahlen für die Modellierung und Berechnung werden zum Teil simuliert (z.B. die Indexentwicklung) oder angenommen (z.B. Kostengestaltung), andere entsprechen der Realität (z.B. Rechnungszins).

Zum Abschluss wird ein Blick auf die Produktentwicklung der Zukunft in der Lebensversicherungsbranche geworfen, bevor im Kapitel 6 die Schlussfolgerung aus dieser Arbeit erfolgt.

Kapitel 2

Lebensversicherung in der Niedrigzinsphase

2.1 Versicherer unter Druck¹

„Washington, 15-04-2015 – Der Internationale Währungsfonds (IWF) sieht eine Krise in der europäischen Lebensversicherungsbranche heraufziehen. Die langfristigen Versprechen hoher Garantiezinsen seien zu einer schweren Bürde vor allem für mittelgroße Anbieter geworden. Das Problem könne das gesamte Finanzsystem in Mitleidenschaft ziehen.“²

So heißt in einem Bericht zur globalen Finanzstabilität, den der IWF im Frühjahr 2015 vorlegte.

Die Versicherungswirtschaft tut sich angesichts der niedrigen Zinsen immer schwerer, die Kundengelder ertragreich anzulegen, um die Zinsversprechen in den Beständen zu erfüllen. Im Hintergrund steht die Niedrigzinspolitik der Europäischen Zentralbank im Kampf gegen Wirtschaftsflaute und geringe Inflation. Staatsanleihen, in die Versicherungsunternehmen das Geld meistens veranlagen, bringen kaum noch Erträge.

Um die klassische Lebensversicherung auch in einem langanhaltenden Niedrigzinsumfeld abzusichern, setzt die FMA mit dem neuen Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) weitere Maßnahmen. So wird ab 01. Jänner 2016 der höchstzulässige Mindestgarantiezinssatz von 1,5% weiter auf 1% gesenkt. In der Abbildung 2.1.1 wird die sinkende Tendenz des garantierten Rechnungzinssatzes dargestellt.

¹Siehe [17], S. 11

²Siehe [9]

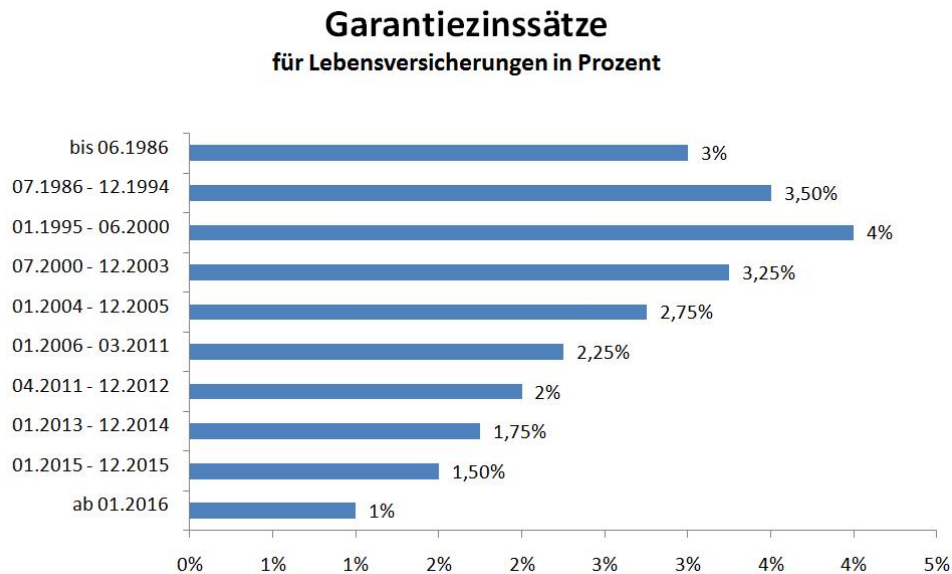


Abbildung 2.1.1: Entwicklung des Rechnungszinssatzes in Österreich

Ein weiterer Punkt im VAG-Neu betrifft, neben der Erhöhung der Zinszusatzreserven, die Produktgestaltung in der Lebensversicherungsbranche. Den Versicherern solle es, so die FMA, gerade in Niedrigzinsphasen und bei volatilen Kapitalmärkten möglich sein, Produkte anzubieten, die über „stärkere Ausgleichsmechanismen“ für schwankende Kapitalerträge verfügen.³

Der Wunsch der Versicherungsbranche ist hingegen, die Eigenkapitalanforderung von Versicherungsunternehmen zu reduzieren. Um dies zu erreichen, haben einige der führenden Versicherer in den letzten Jahren Produkte entwickelt, die auf den klassischen Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit aufbauen, aber andere Garantien anbieten. Dazu gehören die sogenannten „Select-Produkte“, bei denen der Kunde das Wahlrecht hat, die Erträge einer klassischen Versicherung gegen eine Index-abhängige Rendite zu tauschen. Auch Produkte der „neuen klassischen Lebensversicherung“ mit endfälligen Garantien gehören in diese Kategorie.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die oben erwähnten „Select-Produkte“, wie zum Beispiel Allianz IndexSelect und R+V IndexInvest zu beschreiben, zu simulieren und sowohl aus Kundensicht als auch aus Sicht des Versicherungsunternehmens zu analysieren.

2.2 Produktdesign im aktuellen Umfeld⁴

Hohe Garantieverprechen aus der Vergangenheit fallen Versicherungsunternehmen besonders im Niedrigzinsumfeld zur Last. Versicherungsverträge aus dem Bestand mit einem ga-

³Siehe [12]

⁴Siehe [16], S. 6-18.

rantierten Rechnungszins von 4% aus der Zeit zwischen 1994 - 2000⁵ haben einen erhöhten Kapitalbedarf.

Damit für die Zukunft solche Fälle immer seltener im Bestand auftreten, sind viele Versicherer bemüht, bei Neuverträgen den Kapitalbedarf zu reduzieren. Diese Art von Verträgen werden kapitaleffizient genannt.

Für alle klassischen und hybriden Produkte sind kapitaleffiziente Varianten möglich, die aus Kundensicht in allen wesentlichen Leistungen mit den aktuellen klassischen Produkten übereinstimmen. Für den Versicherer sind diese Produkte jedoch mit geringerem Kapitalbedarf versehen.

Reuß, Ruß und Wieland stellen in [18] zwei alternative Produkte zu einem traditionellen Lebensversicherungsprodukt vor:

- Traditionelles Produkt mit einer auf den jährlichen Rechnungszins von $> 0\%$ basierenden Garantie.
- Alternativprodukt 1 mit einem jährlichen Rechnungszins von 0% und endfälliger Garantie.
- Alternativprodukt 2 nur mit endfälliger Garantie. Während der Laufzeit gibt es keine Garantie (d.h. Rechnungszins kann auch negative Werte annehmen).

Unabhängig von den oben beschriebenen Differenzen, partizipieren alle drei Produktkategorien an der Gewinnbeteiligung, welche in Österreich durch die Gewinnbeteiligungsverordnung von der FMA geregelt ist.⁶

Die Resultate der Studie [18] zeigen mit Hilfe von Szenarioanalysen, dass die Risiken der Versicherer bei den Alternativprodukten geringer sind als bei den klassischen Produkten und die Kapitaleffizienz nach Solvency II Richtlinien konnte auch bestätigt werden.

Kapitaleffiziente Produktmodifikationen für Rentenprodukte sind nach dem Ruß-Modell in allen drei Phasen möglich⁷:

- Ansparphase
- Rentenübergang
- Rentenphase

Bei den bereits erwähnten „Select-Produkten“ wird eine Produktmodifikation durch innovative Zinsgarantien in der Ansparphase durchgeführt.

Aus Sicht des Versicherers ist ein „Select-Produkt“ eine klassische Rentenversicherung mit 0% jährlichem Mindestgarantiezinssatz. Garantiert werden ausschließlich die eingezahlten Bruttobeiträge am Ende der Ansparphase.

⁵Siehe Abbildung 2.1.1

⁶§2 (1) „Die Aufwendungen für die erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer (§81e Abs. 4Z III.8. VAG) zuzüglich allfälliger Direktgutschriften haben in jedem Geschäftsjahr mindestens 85 vH der Bemessungsgrundlage zu betragen.“ Siehe [6], S. 2

⁷Siehe [16], S. 7

Im Fall, dass der Kunde immer nur die sichere Verzinsung wählt, ist der Tarif so konstruiert, dass das Risiko des Versicherers und der Kapitalbedarf signifikant geringer sind als bei einem klassischen Produkt mit gleicher Garantie. Betrachtet man ein „Select-Produkt“ ohne Wahlrecht auf Indexpartizipation, so wird aus diesem eine kapitaleffiziente Klassik.

Die Kapitaleffizienz des Produktes resultiert ausschließlich aus der Art der Garantie (nur endfällig) und nicht aus der Höhe der Garantie. Beim Vertragsabschluss ist aus diesem Grund das klassische Produkt von der kapitaleffizienten Version aus Kundensicht kaum zu unterscheiden.

„Hätte die Branche in der Vergangenheit kapitaleffiziente klassische Produkte verkauft, so würden die Bestände heute kein Problem darstellen.“ So berichtet Ruß in seinem Vortrag über innovative Lebensversicherungsprodukte in Zeiten niedriger Zinsen.⁸

⁸Siehe [16], S. 27

Kapitel 3

Select-Produkte

3.1 Allgemeine Beschreibung von Select-Produkten

Bei der Produktbeschreibung dient das erste „Select“-Vorsorgekonzept als Grundlage. Produkte anderer Anbieter basieren teilweise auf das Vorreiterprodukt IndexSelect, aber können sich in einigen Eigenschaften unterscheiden.¹ Aus diesem Grund wird versucht, die Beschreibung allgemeingültig zu halten.

Das Vorsorgekonzept der „Select-Produkte“ beruht auf Indexpartizipation an einem Aktienindex. Aus der Tabelle 3.1.1 ist ersichtlich, dass bei 8 aus 12 Produktvarianten auf den Index Dow Jones EURO STOXX 50 gesetzt wird.² Somit werden die Vorteile einer Rentenversicherung mit den Chancen des Aktienmarktes verknüpft.

Die Unterschiede zu einem klassischen Rentenprodukt liegen bei der Berechnung der Jahresrendite in der Ansparphase. Die Höhe der Jahresrendite hängt dabei von der jährlichen Entscheidung des Versicherungsnehmers für oder gegen die Indexpartizipation ab.

Bei Indexpartizipation werden die eingezahlten Beiträge bis zum ersten Indexstichtag, also bis zum Beginn des ersten Indexjahres mit der am Jahresanfang veröffentlichten Verzinsung für unterjährig angesammelten Beiträge³ verzinst. Die Zinsgewinne werden zum Kauf von einjährigen Optionen auf die Kursentwicklung von EURO STOXX 50 investiert. Das Versicherungsunternehmen holt dafür Angebote mehrerer Emittenten ein und berücksichtigt bei der Auswahl des Emittenten den Preis sowie dessen Finanzkraft.⁴

Die Höhe der Jahresrendite bei Indexpartizipation wird am Ende eines Indexjahres wie folgt ermittelt. Die monatlichen Kursgewinne unter Berücksichtigung einer Renditeober-

¹Die Relax Rente von AXA erlaubt zum Beispiel nicht nur die Indexpartizipation an EURO STOXX 50, sondern bietet auch eine direkte Investitionsmöglichkeit in Fonds. Siehe [3]

²Der EURO STOXX 50 besteht aus den Aktien der 50 größten Unternehmen der Eurozone und repräsentiert deren Wertentwicklung. Daher gelten der EURO STOXX 50 und seine Wertentwicklung auch als Indikator für den gesamten Aktienmarkt in der Eurozone. Siehe [5].

³Diese Verzinsung muss nicht mit der Gesamtverzinsung (=Garantiezins (hier 0%) + Gewinnbeteiligung) übereinstimmen. Siehe [4], S. 8

⁴Siehe [4], S. 5

grenze, auch Cap genannt, und Verluste werden zu einem Jahresergebnis aufsummiert. Ist dies positiv, so werden die Gewinne nach dem „Lock-in“ Prinzip⁵ gesichert und das Vorsorgevermögen erhöht sich um die ermittelte Rendite.

Ist das Ergebnis allerdings negativ, so wird dies auf 0 gesetzt und das Vorsorgevermögen bleibt gleich hoch. Mit Hilfe des Floors, einer Beschränkung nach unten mit Null, wird der bestehende Vertrag vor Kapitalverlusten geschützt. Dieser Schutz wird über die Deckelung der Monatsrenditen finanziert. Die Höhe des Caps wird jährlich im Voraus festgelegt. Dass der Cap nicht zu niedrig ausfällt, regelt sich durch den Wettbewerb unter den Emittenten. Weiters hängt von der Höhe der Verzinsung des Versicherers auch die Höhe des Betrages ab, der für den Kauf der Optionen zur Verfügung steht. Je höher dieser Betrag ist, desto höher ist der Cap, den der Emittent anbieten kann. Das heißt, dass bei einem höheren Cap auch der Optionspreis höher liegt. Wenn der Emittent sein Angebot für den Cap erstellt, dann spielen bei ihm auch die aktuellen Kapitalmarktdaten (z.B. die Volatilität und das Zinsniveau am Kapitalmarkt) eine Rolle.⁶

Die eingezahlten Beiträge abzüglich Kosten während eines laufenden Indexjahres werden bis zum nächsten Indexstichtag angesammelt, mit dem Zinssatz für unterjährig angesammelte Beiträge verzinst und erhöhen damit die Bezugsgröße für die Indexpartizipation des darauffolgenden Jahres.

Ist die Entwicklung des Aktienmarktes weniger positiv, so gibt es die Möglichkeit, einmal jährlich vor dem darauffolgenden Indexstichtag aus der Indexpartizipation auszusteigen und sich für eine sichere Verzinsung⁷, deren Höhe im Voraus bekannt gegeben wird, zu entscheiden oder die Beiträge flexibel auf beide Varianten aufzuteilen.

Die Tabelle 3.1.1 zeigt die Unterschiede zwischen den derzeit am Markt vorhandenen Indexpolice auf.

⁵Mit dem Lock-In können Versicherte die mit der Indexpartizipation erzielten Kursgewinne automatisch absichern und somit die garantierte Mindestleistung zum Vertragsende steigern. Siehe Abbildung 3.2.1

⁶Siehe [4], S. 5

⁷unter sicherer Verzinsung wird die Gesamtverzinsung verstanden

KAPITEL 3. SELECT-PRODUKTE

Versicherer	Produkt	Aktienindex	Cap ^a	Rendite- modus ^b	Besonderheiten
Allianz	IndexSelect	Euro Stoxx 50	3,6%-3,9%	1	Aufteilung Partizipation und sichere Verzinsung 0,25,50,75,100%
Axa	Relax Rente	Europa Aktienindex mit ISC, basierend auf Euro Stoxx 50	4%	1	Aufteilung in Deckungsstock, Indexpartizipation und Fondsanlage
Condor	INDEX-Rente	Euro Stoxx 50	2,2%-3,5%	1	
Generali	Rente Chance Plus	Euro Stoxx 50	35% und Parti- zipationsrate: 50%	2	Nur Einmalbeitrag ab 7500 EUR
HDI	TwoTrust Selekt	MultiSelekt- Konzept aus 6 Aktienindizes	Kein Cap (Steuerung über Partizipationsquote)	1	Beiträge fließen zu gleichen Teilen ins DK des HDI, Neue Leben und Postbank LV
LV 1871	Rente Garantie Plus	Euro Stoxx 50	2,5%	1	mit 1,75% Garantieverzinsung
Nürnberger	DAX-Rente	DAX und DAX RC 20	3,5% 3,0%	1	Aufteilung Partizipation und sichere Verzinsung 0,25,50,75,100%
R+V	IndexInvest	Euro Stoxx 50	2,2%-3,5%	1	
SV Leben	IndexGarant	Euro Stoxx 50 VolaIndexPerform	3,2%-3,55%	1	Indexstichtage: 01.06, 01.12
VGH	Rente Garant	VGH Sachwerteindex	3,25%	1	Indexgewichtung monatlich neu auf Basis der Performance der Vorperiode
Volkswahl Bund	Klassik modern	Euro Stoxx 50 DAX	Kein Cap, aber Indexquote	3	
Zürich	Vorsorgegarantie Plus bzw. Zukunftsrente select	Stoxx Global Select Dividend 100 Net Total Return Excess Return Index	intransparent	?	Indexpartizipation: 0,50,100% nur Einmalbeitrag ab 10.000 EUR

^aStand: März 2015. Siehe [13], S. 18

^b1 = Aufsummierung aller Monatsrenditen pro Indexjahr unter Berücksichtigung des Caps;
2 = Durchschnittsbildung des Indexstandes über vier Zeitpunkte und Vergleich mit dem Startwert unter Berücksichtigung des Caps;

3 = Aufsummierung aller Monatsrenditen pro Indexjahr unter Berücksichtigung der Indexquote.

Tabelle 3.1.1: Vergleich von Indexpolice am Markt (Quelle: [13], S. 18)

3.2 Mathematische Beschreibung von Select-Produkten

Bei einer Wahl der Indexpartizipation, wird die entsprechende Rendite wie folgt kalkuliert: Die monatliche Indexentwicklung ist gegeben durch:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } r_{t,\tau+1} = \frac{S_{t,\tau+1} - S_{t,\tau}}{S_{t,\tau}} = \frac{S_{t,\tau+1}}{S_{t,\tau}} - 1 \quad (3.1)$$

wobei $S_{t,\tau}$ der Marktwert von einem Aktienindex⁸, am Ende des Monats τ im Jahr t ist. $\tau = 1, 2, \dots, 12$ und $t \in \{1, 2, \dots, T\} = \mathbb{T}$.

T bezeichnet die Dauer der Ansparphase in Jahren.

Die Jahresrendite eines „Select-Produktes“, wie bereits erwähnt, ist die Summe der nach oben mittels Cap c_t beschränkten monatlichen Indexentwicklungen. Aus diesem Grund wird die Jahresrendite r_t^{Select} eines „Select-Produktes“ dargestellt als:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } r_t^{Select} = \max \left(\sum_{\tau=1}^{12} \min(r_{t,\tau+1}; c_t); 0 \right) = \left(\sum_{\tau=1}^{12} \min(r_{t,\tau+1}; c_t) \right)_+ \quad (3.2)$$

Für alle IndexSelect Verträge, welche seit Jänner 2012 abgeschlossen worden sind, gibt es neben der bisherigen Option, also entweder 100% der Bezugsgröße in die sichere Verzinsung zu veranlagen oder mit 100% der Bezugsgröße an der Indexpartizipation teilzunehmen, weitere Möglichkeiten zur Mischung dieser beiden Anlagevarianten. Die Aufteilung der Quotierung kann in 25%-Schritten vorgenommen werden und ist jeweils im Voraus für das Folgejahr festzulegen. Diese Aufteilung ist auch bei den Produkten DAX-Rente und Zukunftsrente select möglich.⁹

Die sichere Verzinsung orientiert sich an der Gesamtverzinsung, welche am Jahresende im Geschäftsbericht des jeweiligen Versicherungsunternehmens veröffentlicht wird. Die Gesamtverzinsung setzt sich aus Mindestgarantieverzinsung, auch Rechnungszins genannt, zuzüglich Gewinnbeteiligung, die auch als Überschussbeteiligung bekannt ist, zusammen.¹⁰ Aus diesem Grund kann die sichere Verzinsung dargestellt werden als:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } r_t^{Sicher} = r_t^{Garantie} + r_t^{Gewinn} \quad (3.3)$$

Mit Hilfe von $r_t^{Garantie}$ aus (3.3) können wir auch die Alternativprodukte aus der Studie [18], welche im Abschnitt 2.2 beschrieben sind, wie folgt behandeln.

Wählen wir für $r_t^{Garantie}$ den Wert 0, so liegt das Alternativprodukt 1 vor. In diesem Fall werden die eingezahlten Beiträge jährlich, während der gesamten Aufschubdauer garantiert.

⁸zum Beispiel EURO STOXX 50 oder DAX

⁹Siehe Tabelle 3.1.1

¹⁰Siehe [7]

Beim Alternativprodukt 2 kann $r_t^{Garantie}$ auch negative Werte haben und somit nimmt der Vertrag auch an einer negativen Entwicklung des Marktes teil. Dabei bietet der Versicherer keine Garantien während der Laufzeit und überträgt alle Risiken des Marktes direkt auf den Versicherungsnehmer.

Um die gewählte Veranlagungsstrategie mathematisch allgemein auszudrücken, nehmen wir an, dass die Aufteilung beliebig gewählt werden kann. Sei dafür $s_t \in [0, 1]$ der Anteil des Vertragswertes, mit dem der Versicherungsnehmer an der sicheren Verzinsung teilnehmen möchte. Dieser Anteil wird mit r_t^{Sicher} nach Formel (3.3) verzinst. Der restliche Anteil wird mit r_t^{Select} , wie in der Formel (3.2) beschrieben, verzinst. Für die Mischung der beiden Anlagemöglichkeiten sei r_t^{Mix} der Zinssatz, mit dem der neue Vertragswert am Ende des Jahres kalkuliert wird.¹¹

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } r_t^{Mix} = s_t \cdot r_t^{Sicher} + (1 - s_t) \cdot r_t^{Select} \quad (3.4)$$

Um die laufenden Kosten (Verwaltungskosten γ und Inkassokosten β) bei der Vertragsentwicklung zu berücksichtigen, kann die Formel (3.4) erweitert werden. Sei dafür δ die Summe aller laufend verrechneten Kosten pro Jahr. Der Faktor δ ist direkt proportional zur Beitragssumme. Diese Kosten werden auf die zwei Komponenten durch δ_t^{Sicher} und δ_t^{Select} aufgeteilt.

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } r_t^{Mix} = s_t \cdot (r_t^{Sicher} - \delta_t^{Sicher}) + (1 - s_t) \cdot (r_t^{Select} - \delta_t^{Select}) \quad (3.5)$$

Die Vertragswertentwicklung (=account value) AV_t lässt sich für eine Select-Rente gegen **Einmalerlag** EB wie folgt rekursiv definieren:

Sei α die Höhe der beim Vertragsabschluss anfallenden Kosten. Die α -Kosten werden Abschlusskosten genannt und dienen zur Zahlung der Vermittlerprovisionen. Zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gilt:

$$AV_0 = EB - (\alpha \cdot EB)$$

$$AV_1 = AV_0 \cdot (1 + r_1^{Mix}) = AV_0 \cdot (1 + s_1 \cdot (r_1^{Sicher} - \delta_1) + (1 - s_1) \cdot (r_1^{Select} - \delta_1^{Select}))$$

wobei $s_1 \in [0, 1]$ den Anteil von AV_0 , der an der sicheren Verzinsung partizipiert, beschreibt. Gilt $s_1 = 0$, so wird der gesamte Vertragswert als Bezugsgröße für die Indexpartizipation genommen. Im anderen Extremfall ($s_1 = 1$) liegt allein der Fall der sicheren Verzinsung vor.

δ_1^{Sicher} steht für den Anteil der laufenden Kosten im 1. Jahr, welche bei der sicheren Verzinsung anfallen.

δ_1^{Select} bezeichnet den Anteil der laufenden Kosten, die bei Indexpartizipation verrechnet werden.

¹¹Siehe [4], S. 8

r_1^{Sicher} ist die im Voraus für ein Jahr festgelegte Gesamtverzinsung des Versicherungsunternehmers und

r_1^{Select} entspricht nach Formel (3.2) die Jahresrendite des „Select-Produktes“ aus der Indexpartizipation am Ende des 1. Indexjahres.

Im zweiten Jahr gilt:

$$AV_2 = AV_1 \cdot (1 + r_2^{Mix}) = AV_0 \cdot (1 + r_1^{Mix}) \cdot (1 + r_2^{Mix})$$

Nach Induktion folgt für alle Jahre $\mathbb{T} = \{1, \dots, T\}$ der Ansparphase:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } AV_t = AV_0 \cdot \prod_{t=1}^T (1 + r_t^{Mix}) \quad (3.6)$$

Die Formel (3.6) lässt sich auch rekursiv darstellen:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } AV_t = AV_{t-1} \cdot (1 + r_t^{Mix}) \quad (3.7)$$

Die rekursive Berechnung der Vertragswerte nach Formel (3.7) wird in einem späteren Kapitel für die Simulation verwendet.

Das „Select-Produkt“ verspricht zusätzlich eine Beitragsgarantie zum Ablauf der Ansparphase. Das heißt also, dass mindestens $EB > AV_0$ als Garantie zur Zeitpunkt T am Versicherungskonto vorhanden sein muss.

Aus der Sicht des Versicherers handelt sich also bei einem „Select-Produkt“ im Grunde genommen um eine am Gewinn beteiligte aufgeschobene Rentenversicherung mit zwei verschiedenen Garantien: jährliche Mindestgarantie von 0% des Vertragswertes und endfällige Bruttobeitragsgarantie, welche nach [18] weniger risikoreich ist als die jährlichen oder „cliquet-style“ Garantie¹².

Bei **laufenden Prämienzahlungen** werden die bis zum ersten Indexstichtag eingezahlten Beiträge verzinst angesammelt und bilden zusammen mit dem investierten Beitrag (der am Indexstichtag fällig wird) die Bezugsgröße für die Indexpartizipation des beginnenden Indexjahres. Die darauffolgenden investierten Beiträge werden bis zum nächsten Indexstichtag des folgenden Jahres verzinst angesammelt. Beiträge, die während eines Indexjahres eingezahlt werden (= vereinbarte Beiträge zur Altersvorsorge zwischen zwei Indexstichtagen oder Zuzahlungen) nehmen nicht an der Indexpartizipation teil. Sie werden aber mit dem Zinssatz für unterjährig angesammelte Beiträge verzinst. Die Verzinsung der unterjährig angesammelten Beiträge ist nicht zwangsläufig gleich mit der sicheren Verzinsung. Diese Art von Verzinsung für die zwischen zwei Indexstichtagen eingezahlten Beiträge wird jährlich neu festgelegt, gilt jeweils für ein Indexjahr und orientiert sich an

¹²auch year-by-year Garantie genannt. Siehe [18], S. 22

der Gesamtverzinsung des Versicherers.¹³

Die Vertragswertentwicklung AV_t einer „Select-Rentenversicherung“ lässt sich auch bei laufender Prämienzahlung P_t rekursiv definieren:

$$AV_0 = P_0 - (\alpha \cdot P_0)$$

für α die bei Vertragsabschluss anfallenden Kosten in Prozent.

Sei nun r_t^m der Zinssatz für unterjährig durch Zahlweise m ($m = 1, 2, 4, 12$) angesammelten Beiträge nach Kostenabzug.

Im Folgenden werden wir ausschließlich den jährlichen Zahlungsrhythmus behandeln.

$$AV_1 = AV_0 \cdot (1 + r_1^{Mix}) + P_1 \cdot (1 + r_1^1)$$

mit P_1 die während des 1. Indexjahres eingezahlte Jahresprämie.

$$r_1^{Mix} = s_1 \cdot (r_1^{Sicher} - \delta_1^{Sicher}) + (1 - s_1) \cdot (r_1^{Select} - \delta_1^{Select})$$

wobei $s_1 \in [0, 1]$ den Anteil von AV_0 , der an der sicheren Verzinsung partizipiert, beschreibt.

δ_1^{Sicher} steht für die anfallenden Kosten im 1. Jahr für den Anteil der Bezugsgröße mit sicherer Verzinsung und

δ_1^{Select} bezeichnet die laufenden Kosten, die bei der Indexpartizipation verrechnet werden.

r_1^{Sicher} ist die im Voraus für ein Jahr festgelegte Gesamtverzinsung des Versicherungsunternehmers nach Formel (3.3) und

r_1^{Select} die Jahresrendite des „Select-Produktes“ aus der Indexpartizipation am Ende des 1. Indexjahres nach der Formel (3.2).

Im zweiten Indexjahr gilt:

$$\begin{aligned} AV_2 &= AV_1 \cdot (1 + r_2^{Mix}) + P_2 \cdot (1 + r_2^1) = \\ &= AV_0 \cdot (1 + r_1^{Mix}) \cdot (1 + r_2^{Mix}) + P_1 \cdot (1 + r_1^1)(1 + r_2^{Mix}) + P_2 \cdot (1 + r_2^1) \end{aligned}$$

Nach Induktion $\forall t \in \mathbb{T}$ der Ansparphase folgt:

$$\forall t \in \mathbb{T} \text{ gilt: } AV_t = AV_{t-1} \cdot (1 + r_t^{Mix}) + P_t \cdot (1 + r_t^1) \quad (3.8)$$

r_t^1 definiert dabei die Verzinsung der Jahresprämien, welche während eines Indexjahres eingezahlt werden. Die Höhe dieser Verzinsung wird vom Versicherer jährlich neu festgelegt.

¹³Siehe [4], S. 7

Die folgende Abbildung 3.2.1 stellt eine mögliche Vertragsentwicklung mit und ohne Indexpartizipation zu drei Indexstichtagen grafisch dar.

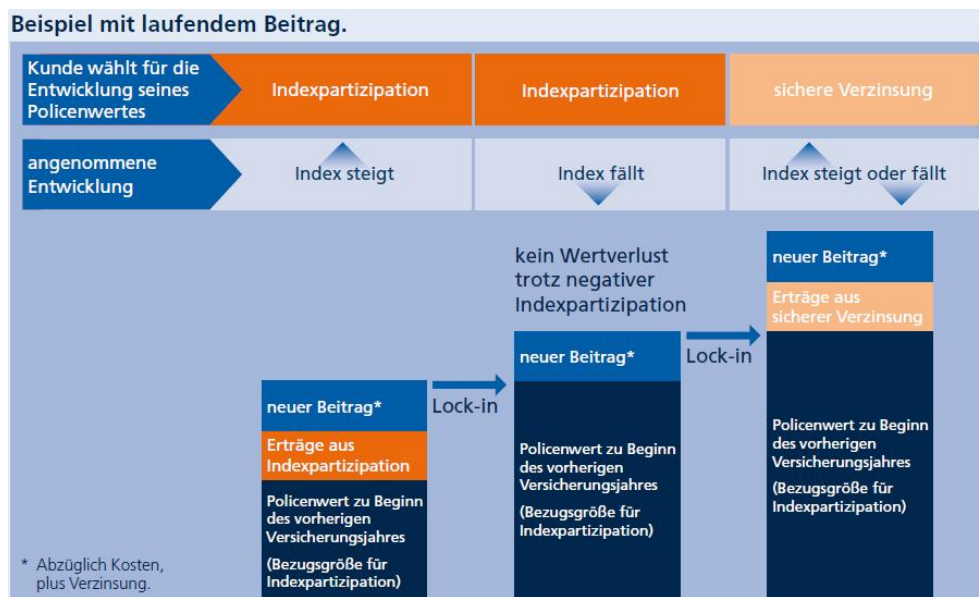


Abbildung 3.2.1: Schematische Darstellung der Vertragsentwicklung eines „Select-Produktes“ bei laufender Beitragszahlung (Quelle: R+V-Indexinvest)

Das angesammelte Vermögen am Ende der Ansparphase, also AV_T kann mit Beginn der Leistungsphase flexibel verwendet werden. Je nach Kundenwahl kann die Leistung als

- Rente
- Einmalzahlung
- oder eine Kombination aus beiden erfolgen.

Kapitel 4

Beschreibung von Modellen und deren Umsetzung

4.1 Modellbeschreibung

Die Höhe der Jahresrendite beim „Select-Produkt“ basiert auf der Entwicklung des Aktienpreises am Finanzmarkt. Aus diesem Grund wird ein geeignetes Modell für den Verlauf des Aktienkurses benötigt.

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Modelle beschrieben und wichtige Begriffe definiert.

4.1.1 Stochastische Prozesse¹

In der Finanzmathematik werden stochastische Prozesse immer dann verwendet, wenn sich eine Größe, zum Beispiel ein Aktienkurs, zufällig in der Zeit verändert.

Definition 1. *Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $X = \{X_t\}_{t \in I}$ von Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^d$.*

Ist $I = \mathbb{R}_+$ so heißt ein stochastischer Prozess càdlàg, falls die Abbildung $t \mapsto X_t$ fast sicher rechtsstetig ist und alle linksseitigen Grenzwerte $X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t} X_s$ existieren. Ist X càdlàg, so schreiben wir $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

4.1.2 Finanzmarktmodell²

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $W = (W^1, W^2, \dots, W^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine n -dimensionale Brown'sche Bewegung. Die Modellbeschreibung erfolgt in stetiger Zeit. Das heißt, $\mathbb{T} = [0; T]$. Weiters sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ die von der Brown'schen Bewegung erzeugte Filtration, die einen Aktienmarkt zwischen den Zeitpunkten 0 und $T > 0$ modelliert.

¹Siehe [19], S. 84

²Siehe [11], ab S. 93

$S^i = (S_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$ für $i = 0, 1, \dots, d$ sind die Preisverläufe von $d+1$ Wertpapieren. $S_t = (S_t^i, i = 0, \dots, d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $S := (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$

Definition 2. Das Hexupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ heißt ein Marktmodell, oder kurz Markt.

Im Folgenden werden wir uns auf das eindimensionale Aktienpreis-Modell beschränken, da dies für die Simulation ausreicht.

4.1.3 Modellierung des Aktienkurses³

Paul Samuelson entwickelte in den 50er Jahren ein stochastisches Modell zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Wertpapieren. Nach diesem Modell sind Renditen normalverteilt und Aktienkurse sind implizit log-normalverteilt. Dieses Modell wird heute als geometrische Brown'sche Bewegung genannt.

Die folgenden Begriffe werden im weiteren Verlauf für die Modellierung des Aktienkurses benötigt.

Der Kurs einer Aktie zum Zeitpunkt t sei S_t . Zu diesem Zeitpunkt t ist der Aktienkurs am Markt beobachtbar, die in der Zukunft liegende Kurse sind jedoch im Zeitpunkt t noch mit Unsicherheit behaftet.

Sei $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 . Die Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind wie folgt definiert:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du$$

Die Funktion $\Phi(x)$ als die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ kleiner gleich x ist. Dies wird durch die Abbildung 4.1.1 verdeutlicht.

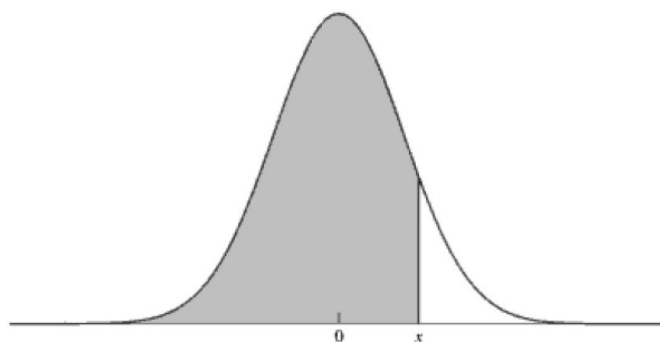


Abbildung 4.1.1: $\Phi(x)$ ist der schattierte Bereich der Glockenkurve

³Siehe [8], S. 355-361

Die Modellierung der Entwicklung des Aktienkurses erfolgt mit Hilfe einer geometrischen Brown'schen Bewegung. Die geometrische Brown'sche Bewegung ist ein stochastischer Prozess, der sich von der Standard-Brown'schen Bewegung W_t ableitet.

Sei nun $d=1$, also es existiere nur ein Risikopapier. Sei weiters $r > 0$ eine feste Zinsrate. Wir betrachten nun einen (Finanz-)Markt, in dem eine risikofreie Anlagemöglichkeit oder Cash Bond S^0 existiert, welche die Differentialgleichung

$$dS_t^0 = r \cdot S_t^0 dt \quad (4.1)$$

für den Startwert S_0^0 erfüllt. Für die Beschreibung der Aktienkursbewegung wird folgende stochastische Differentialgleichung (SDG) mit Anfangswert S_0 für den Aktienpreis verwendet:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sigma > 0 \quad (4.2)$$

Die SDG (4.2) charakterisiert das Verhalten der Kursänderung im Zeitablauf. Der Parameter μ beschreibt die erwartete mittlere Kursrendite der Aktie pro Zeiteinheit dt und wird auch Drift genannt. σ ist die Standardabweichung des Preises.

Definition 3. Sei W_t eine gewöhnliche Brown'sche Bewegung, so ist

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right] \quad (4.3)$$

als die Lösung von (4.2), eine geometrische Brown'sche Bewegung.

Diese Aussage folgt aus dem Lemma von Itô für Itô-Prozesse.

Definition 4. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt Itô-Prozess, falls

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$$

für zwei stochastische Prozesse a_s und b_s gilt.

Oder äquivalent in Differentialschreibweise: $(X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Itô-Prozess, falls

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t.$$

Lemma 1. Lemma von Itô für Itô-Prozesse:

Ist $h = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $C^{1,2}$ -Funktion, so ist auch der durch $Y_t = h(t, X_t)$ definierte Prozess ein Itô-Prozess und es gilt:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) a_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t) b_t^2 \right) dt + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) b_t \right) dW_t. \end{aligned}$$

Für den Beweis verweise ich auf [19]⁴.

S_t aus der stochastischen Differentialgleichung (4.2) ist also ein Itô-Prozess.

Sei nun $X_t = W_t$. Daraus folgt, dass der Prozess a_t hier 0 ist und $b_t = 1$.

Weiters sei die Funktion $h(t, X_t)$, welche in der ersten Komponente einmal und in der zweiten zweimal stetig differenzierbar ist, gegeben durch:

$$h(t, X_t) = S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma X_t \right] = S_t. \quad (4.4)$$

Dann ergibt das *Lemma von Itô*:

$$\begin{aligned} dh(t, X) &= \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma X_t \right] \right] dt + \\ &+ \left[\sigma \cdot S_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma X_t \right] \right] dX_t = \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir den logarithmierten Aktienpreisprozess. Aus diesem ist ein direktes Ablesen von Typ und Parameter der Verteilung möglich.

Mit Hilfe von Itô's Lemma kann eine SDG aus (4.2) auch für $\ln(S_t)$ hergeleitet werden.

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \quad (4.5)$$

Aus den Eigenschaften von (4.5) folgt:

$$\ln(S_t) \sim \mathcal{N} \left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sigma^2 t \right) \quad (4.6)$$

Das heißt der logarithmierte Aktienkurs, also $\ln(S_t)$, ist normalverteilt mit Erwartungswert $\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ und Varianz $\sigma^2 t$.

Eine Zufallsvariable X ist genau dann log-normalverteilt, wenn $\ln(X)$ normalverteilt mit Parametern $\mathbb{E}(\ln(X))$ und $\mathbb{V}(\ln(X))$ ist.

Eine Aussage über die Verteilung von S_t liefert die normalverteilte $\ln(S_t)$.

Die Umsetzung der Modellierung der Entwicklung des Aktienkurses wird in einem späteren Abschnitt dargestellt.

⁴Siehe [19], S. 31

4.1.4 Das Vasicek Zinsmodell⁵

Für die Anlagen eines Versicherungsunternehmens bildet die Zinsstrukturkurve der Staatsanleihen den Maßstab für risikolose Zinsen. Zusätzlich erhalten Versicherungsnehmer bei klassischen Lebensversicherungen einen garantierten Zinssatz mit sehr langen Laufzeiten. Aus diesem Grund sind Versicherer auf möglichst genaue Zinsmodelle angewiesen.

Das Short-Rate-Modell von Vasicek⁶ ist ein sogenanntes Ein-Faktor Modell. Dies bedeutet, dass das Modell in der Differentialgleichung für den Zinssatz auf eine eindimensionale Brown'sche Bewegung basiert. Das Modell hat die Form eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.⁷ Die Short-Rate besitzt somit auch die Mean-Reversion Eigenschaft.

Die Zinsrate ist im Vasicek-Modell die Lösung der stochastischen Differentialgleichung:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad \text{mit} \quad r_0 > 0 \quad (4.7)$$

Für die Parameter gilt: $\kappa, \theta, \sigma > 0$. Befindet sich der Prozess r_t zum Zeitpunkt t über dem Niveau θ (=Mean-Reversion-Level), so ist der Driftterm negativ, sonst positiv. κ bezeichnet dabei die Mean-Reversion-Rate, sprich die Geschwindigkeit der Rückkehr zu Mean-Reversion-Level, und σ die Volatilität.

Der Zinssatz hat also die Darstellung:

$$r_t = e^{-\kappa t}r_0 + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s \quad (4.8)$$

Eigenschaften des Short-Rate-Modells von Vasicek:

- r_t ist normalverteilt bezüglich des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}^*$, das heißt $r_t \sim \mathcal{N}\left(e^{-\kappa t}r_0 + (1 - e^{-\kappa t})\theta; \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}\right)\right)$
- Aus der Normalverteilung folgt, dass r_t mit positiver Wahrscheinlichkeit auch negative Werte annehmen kann. Das ist ein Nachteil des Vasicek-Modells.
- Ein weiterer Nachteil des Modells ist, dass man dies nicht an Marktdaten kalibrieren kann, da nur drei Parameter vorhanden sind.

Diese Nachteile lassen sich durch die Wahl eines anderen Modells beseitigen.⁸

Die oft als Nachteil beschriebene Existenz negativer Zinssätze im Vasicek-Modell stellt sich in Krisensituationen oft wertvoll heraus. Da die Bargeldhaltung einem Zinssatz von

⁵Siehe [8], S. 110-112

⁶Das Vasicek-Zinsmodell wurde 1977 im Journal of Financial Economics veröffentlicht. Siehe [8], S. 111

⁷Sei $c > 0$ und X die Lösung eines SDG der Form $dX_t = -cX_tdt + dW_t$. Dann heißt X ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Dieser Prozess hat die Eigenschaft, dass er immer versucht zum Niveau θ zurückzukehren (=Mean-Reversion-Eigenschaft). Je weiter der Prozess von θ entfernt ist, desto stärker ist die Drift gegen θ . Siehe [8], S. 81-82

⁸Die Negativität wird im Cox-Ingersoll-Ross Modell vermieden. Zusätzliche Parameter werden zum Beispiel im Extended-Vasicek-Modell berücksichtigt. Siehe [8], S. 112

Null entspricht, kommen Negativzinsen am Markt normalerweise nicht vor. Allerdings sind gerade im Niedrigzinsumfeld Minuszinsen beobachtbar. In diesem Fall wird diese Eigenschaft des Vasicek-Modells zu einem großen Vorteil.

Der Referenzzins 3-Monats-Euribor war am 22. April 2015 das erste Mal negativ.⁹

In der Abbildung 4.1.2 ist die fallende Entwicklung von EURIBOR im vergangenen Jahrzehnt dargestellt.

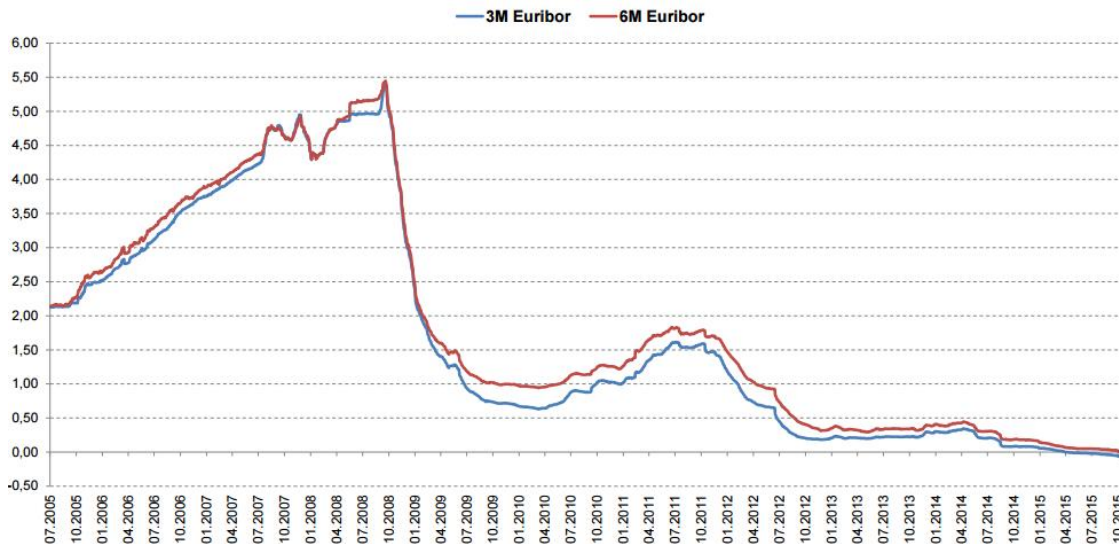


Abbildung 4.1.2: Der Euribor ist auf einem Rekordtief der letzten 10 Jahre (Quelle: www.bankdirekt.at)

Zinssätze werden an Finanzmärkten durch zahlreiche unvorhersehbare Ereignisse beeinflusst, die durch politische oder auch wirtschaftliche Faktoren entstehen und nicht vollständig modelliert werden können. Zinsratenmodelle sind aus diesem Grund oft ungenau.

4.1.5 Portfolio Hedging¹⁰

Ein professioneller Investor muss oft eine Mindestrendite erzielen. Zu diesem Zweck muss ein Anlageportfolio abgesichert werden. Da in dieser Arbeit das Portfolio aus einer indexgebundenen Rentenversicherung besteht, ist dieses Modell einem finanziellen Risiko (Kursschwankungen) und einem Langlebkeitsrisiko (Überlebenswahrscheinlichkeit der versicherten Person) ausgesetzt und daher unvollständig. Aus diesem Grund können versicherungstechnische Zahlungen durch Instrumente des Finanzmarktes nicht risikolos repliziert werden. Es entsteht ein Restrisiko, welches mit dem Föllmer-Sondermann Ansatz minimiert werden kann.

Im Folgenden werden die zugehörigen Begriffe definiert und erklärt.

⁹Siehe [14]

¹⁰Siehe [11], S. 85-89 und [15]

Definition 5. In einem Markt ist ein Portfolio ein pravisibler stochastischer Prozess $\theta = (\theta_t)_{1 \leq t \leq T} = ((\theta_t^i)_{1 \leq t \leq T}, i = 0, \dots, d)$. θ_t^i definiert die Anzahl der Wertpapiere vom Typ i zum Zeitpunkt t .

Der Wert des Portfolios $V(\Theta)$ mit Strategie $\Theta = (\theta, \nu)$ ist gegeben durch:

$$V_t(\Theta) = \theta_t S_t + \nu_t S_t^0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.9)$$

Für jeden Zeitpunkt $t \in [0; T]$ beschreibt θ_t die Anzahl der Aktien und ν_t die Anzahl der Banknoten im Portfolio.

Definition 6. Seien θ und ν progressiv messbare Prozesse auf $[0; T]$ und weiters gelte $\mathbb{P} \left[\int_0^t \theta_u^2 du < \infty \right] = 1$ und $\mathbb{P} \left[\int_0^t \nu_u du < \infty \right] = 1$. Dann ist $\Theta = (\theta, \nu)$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, falls der Vermögensprozess $V_t(\Theta)$ nach Formel (4.9) die Bedingung

$$V_t(\Theta) = V_0(\Theta) + \int_0^t \theta_u dS_u + \int_0^t \nu_u dS_u^0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.10)$$

erfüllt.

Selbstfinanzierbarkeit des Portfolios bedeutet, dass Änderungen im Wert des Portfolios nur durch Preisänderung der Wertpapiere zustande kommen können. Nach erfolgter Preisänderung kann eine Änderung der Portfoliozusammensetzung, also eine Reinvestition, erfolgen.¹¹

Definition 7. Eine Zufallsvariable H auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt Claim. Ein Claim H mit Maturität T ist replizierbar oder absicherbar, falls es eine selbstfinanzierende Strategie Θ gibt, so dass gilt

$$V_T(\Theta) = H.$$

Dann heißt Θ ein Hedge für H .

Sei hier H für eine Funktion $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ definiert als $H := g(S_T)$.

Ein Markt, in dem jeder Claim absicherbar ist, heißt vollständig, andernfalls heißt dieser unvollständig.

Das **Versicherungsportfolio** basierend auf [15] besteht aus l_x versicherte Personen, deren Lebenszeiten $\tau_1, \dots, \tau_{l_x}$ unabhängig und identisch verteilt sind. Die Verteilung von τ_i für $i = 1, \dots, l_x$ ist gegeben durch $G_t = \mathbb{P}[\tau_i] < t]$. Sei die Verteilung von τ_i absolut stetig, dann ist die Dichte definiert durch $\mu_t dt = \mathbb{P}[t < \tau_i] < t + dt]$

Der Zählprozess des Todes ist $N_0 = 0$, $N_t = \sum_{i=1}^{l_x} \mathbb{1}_{\tau_i \leq t}$ und $\mathcal{G}_t$ sei die von N_t erzeugte Filtration.

¹¹Siehe [11], S. 28

Der Zählprozess besitzt folgende Eigenschaften:

- N_t wächst durch Sprünge der Höhe 1
- $dN_t = 0$, d.h. zwischen den Sprungzeiten ist der Sprungprozess konstant.
- N_t ist rechtsstetig mit linken Limiten.

Für **Versicherungsverträge im kombinierten Modell** muss zuerst angenommen werden, dass die aktuarielle $(\mathcal{G}_t)$ und finanzielle Filtrationen $(\mathcal{F}_t)$ unabhängig voneinander sind.

Die Rentenversicherung ist im Unterschied zur Risikoversicherung meist ohne Todesfallschutz und besteht aus einer garantierten Rente, die zum Vertragsende mit Überschüssen lebenslang ausbezahlt wird. Mit anderen Worten wird der Erlebensfall der versicherten Person abgesichert.

Der Claim H lässt sich für Erlebensfallversicherungen wie folgt schreiben:

$$H = g(S_T) \cdot (l_x - N_T)$$

Wir wollen nun den Claim H bewerten. Sei dafür der intrinsische Wertprozess gegeben durch $V_t = \mathbb{E}[H|\mathcal{H}_t]$ wobei $\mathcal{H}_t$ die kleinste von $\mathcal{G}_t$ und $\mathcal{F}_t$ erzeugte Filtration ist. Aus der Unabhängigkeit der Filtrationen folgt

$$V_t = \mathbb{E}[(l_x - N_T)|\mathcal{G}_t] \cdot \mathbb{E}[g(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Weiters gilt:

$$\mathbb{E}[(l_x - N_T)|\mathcal{G}_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{l_x} \mathbb{1}_{\tau_i \geq T} | \mathcal{G}_t\right] = \sum_{i: \tau_i > t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i \geq T} | \tau_i > t] \quad (4.11)$$

An dieser Stelle benötigen wir die Definition der Überlebenswahrscheinlichkeit:

Definition 8. Die Wahrscheinlichkeit, dass der i -te Versicherungsnehmer im Alter von x weitere t Jahr überlebt, ist:

$${}_t p_x = \mathbb{P}[\tau_i > t] = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right)$$

wobei die Mortalitätsintensität μ deterministisch angenommen wird.

Somit folgt für die Gleichung (4.11):

$$\sum_{i: \tau_i > t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i \geq T} | \tau_i > t] = \sum_{i: \tau_i > t} ({}_T {}_t p_{x+t}) = (l_x - N_T) \cdot ({}_T {}_t p_{x+t})$$

Der finanzielle Teil des intrinsischen Wertprozesses für eine Erlebensfallversicherung ist

gegeben durch:

$$\mathbb{E}[g(S_T)|\mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

Beide Teile der Gleichung zusammengefasst ergeben:

$$V_t = (l_x - N_T) \cdot (T - t p_{x+t}) \cdot v(t, S_t)$$

Wir wollen im unvollständigen Modell zu einer optimalen Strategie gelangen, um den Claim H zu hedgen. Hierfür wird zuerst die Kunita-Watanabe-Zerlegung des intrinsischen Wertprozesses bestimmt: $V_t = V_0 + \int_0^t \theta_u^H dS_u + \int_0^t \nu_u^H dM_u$. Dabei ist $\theta_u^H = (l_x - N_{u-}) \cdot (T - u p_{x+u}) \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u)$ die optimale Handelsstrategie und aus $\nu_u^H = -v(t, S_u)(T - u p_{x+u})$ lässt sich der Verlustprozess $L_u^H = \int_0^t \nu_u^H dM_u$ berechnen. Weiters ist der Risikoprozess R_t^H gegeben durch $R_t^H = \mathbb{E} \left[\left(\int_t^T \nu_u^H dM_u \right)^2 | \mathcal{H}_t \right]$.

Ausgangspunkt für den Föllmer-Sondermann Ansatz, welcher die quadratische Risikominimierung für versicherungstechnische Zahlungsströme beschreibt, sind unvollständige Märkte. Das heißt, Zahlungsströme können durch handelbare Finanzinstrumente nicht vollständig repliziert werden. Es entsteht somit ein Restrisiko. Zur Lösung dieses Problems haben Föllmer und Sondermann selbstfinanzierende Strategien eingeführt, welche im Folgenden basierend auf [15] definiert werden.

Definition 9. Eine Strategie Θ heißt *risikominimierend*, falls für alle Strategien $\tilde{\Theta}$ mit $V_T(\Theta) = V_T(\tilde{\Theta})$ gilt $R_t(\Theta) \leq R_t(\tilde{\Theta}) \quad \forall t \in [0; T]$.

Eine Strategie ist im Mittel selbstfinanzierend, wenn der Kostenprozess

$$c(\Theta) = V(\Theta) - \int_0^t \theta_u^H dS_u + A$$

ein Martingal ist. A steht hier für den Zahlungsstrom.

Lemma 2. Jeder Zahlungsstrom A besitzt eine eindeutige risikominimierende Strategie Θ mit $V_T(\Theta) = 0$.

Für den Beweis verweise ich auf [15].

Im weiterführenden empirischen Teil der Arbeit, wollen wir Select Verträge simulieren. Hierfür lassen wir das Portfolio Hedging und die Minimierung des Restrisikos, welches aus der Replikation der Zahlungen am unvollständigen Markt entsteht, beiseite. Eine ausführliche Behandlung des Hedging Portfolios im Fall der Select-Versicherung würden den Umfang dieser Arbeit überschreiten. Das Thema der Absicherung des versicherungstechnischen Risikos bei Select-Produkten mit Hilfe von Finanzinstrumenten könnte aus diesem Grund in einer weiterführenden Arbeit untersucht werden.

4.2 Die Simulation von Select-Produkten

4.2.1 Einführung ins Simulationsprogramm

Bei der Erstellung der Simulation für Indexpolizen wurde die Programmiersprache R verwendet.¹²

R ist ein Software-Paket für Statistical Computing und ist die Open Source Implementierung der Sprache S, das hauptsächlich von John Chambers in den Bell Laboratories entwickelt worden ist.

Um die Reproduzierbarkeit der Simulation zu erreichen, wurden Skripten mit der Interpretersprache R erstellt. Diese müssen nicht kompiliert werden, sondern können in der Kommandozeilenkonsole nach Betätigen der Enter-Taste unmittelbar ausgeführt werden. Die Skripte, welche unten im Detail vorgestellt werden, führen einzelne Schritte der Simulation durch.

1. Zu Beginn wird die Gesamtverzinsung mittels Vasicek-Modell sowohl für Select- als auch für die klassische Rentenversicherung modelliert.
2. Im zweiten Schritt wird die Indexentwicklung, welche auf dem Aktienpreismodell beruht, hergeleitet.
3. Im nächsten Skript werden die Werte für r_t^{Sicher} bestimmt.
4. Des Weiteren beinhaltet ein R-Skript das Bisektionsverfahren, welches für die Berechnung der jährlichen Cap-Höhen benötigt wird.
5. Mit Hilfe des Caps können hier die Werte für r_t^{Select} und r_t^{Mix} für eine als Parameter vorgegebene Anzahl von Simulationen berechnet werden.
6. Zum Abschluss kann aus den in den Punkten 1.-5. errechneten Ergebnissen die Vertragsentwicklung sowohl für laufende Zahlweise als auch für einen Vertrag mit Einmalzahlung ermittelt und mit der Ansparphase einer klassischen Rente verglichen werden.

¹²Version 3.2.2. (14.08.2015) frei verfügbar unter www.r-project.org

4.2.2 Modellierung von Zinssätzen mittels Vasicek-Modell¹³

Der Programmcode beruht auf der Modellbeschreibung aus dem Kapitel 4.1.4.

Dabei werden folgende Parameter gewählt:

Parameter	Wert
Startwert r_0	0,00
Mean-Reversion Level θ	0,01
κ	0,5
Standardabweichung σ	0,01
Anzahl der Simulationen	10
Dauer der Ansparphase	20 Jahre

Tabelle 4.2.1: Parameter des Vasicek-Modelles

Um für die vorgegebene Anzahl von Simulationen und für alle Jahre Werte berechnen zu können, benötigen wir eine sogenannte Schleife, welche alle Zeitpunkte durchläuft. In dieser for-Schleife wird durch

```
dr = k*(theta-r[i-1,j])*dt + sigma*sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
```

die Zinsratenänderung nach der Formel (4.7) berechnet.

Dabei erzeugt die R-Funktion `rnorm(1,0,1)` eine standardnormalverteilte Zufallsvariable W_t .

```
## Modell-parameter
r0 = 0.00
theta = 0.01
k = 0.5
sigma = 0.01

## Simuliere Zinsen
n = 10 # Anzahl der Simulationen
T = 10 # Zeit
m = 20 # Laufzeit
dt = T/m #Abstand der Zeitintervalle
r = matrix(0,m+1,n) # Zinsmatrix
r[1,] = r0
for(j in 1:n){
  for(i in 2:(m+1)){
    dr = k*(theta-r[i-1,j])*dt + sigma*sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
```

¹³Als Vorlage dient der R-Code von Lee. Siehe <http://www.r-bloggers.com/fun-with-the-vasicek-interest-rate-model/>

```
    r[i,j] = r[i-1,j] + dr
  }
}
r

## Plot der Szenarien
t = seq(0, T, dt)
rt.ewartung = theta + (r0-theta)*exp(-k*t)
rt.stabw = sqrt( sigma^2/(2*k)*(1-exp(-2*k*t)))
matplot(t, r[,1:n], type="l", lty=1, main="Zinsentwicklung", ylab="rt")
abline(h=theta, col="red", lty=2)
lines(t, rt.ewartung, lty=2)
lines(t, rt.ewartung + 2*rt.stabw, lty=2)
lines(t, rt.ewartung - 2*rt.stabw, lty=2)
points(0,r0)
```

Die Durchführung des oben beschriebenen R-Codes liefert sowohl eine Tabelle mit den simulierten Zinswerten, als auch die Darstellung der Szenarien aus dem Vasicek Modell. Diese Darstellung zeigt die Abbildung 4.2.1.

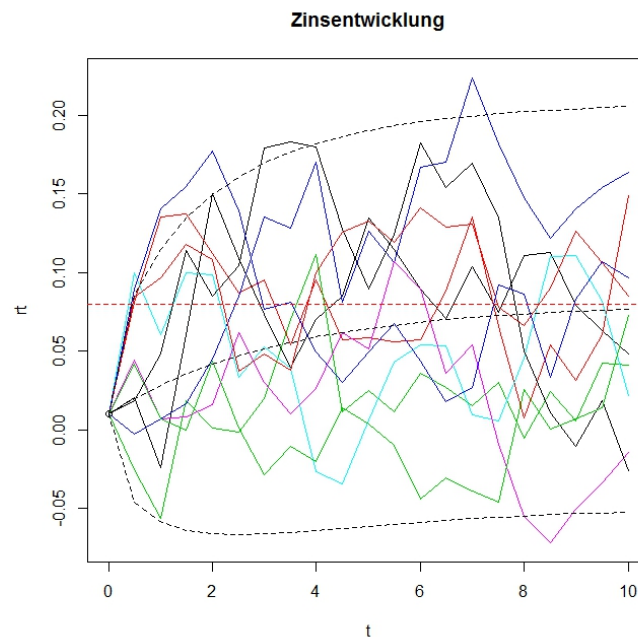


Abbildung 4.2.1: Simulation der Zinssätze mittels Vasicek-Modell

4.2.3 Modellierung der Indexentwicklung¹⁴

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung des Aktienkurses aus dem Kapitel 4.1.3 wird durch die Formel (4.3) gegeben. Diese wird hier zur Simulation der Indexentwicklung verwendet.

Im ersten Schritt wird eine R-Funktion geschrieben. Die Funktion `aktien.entw` verlangt 6 Parameter und berechnet mit deren Hilfe den Indexwert zu jedem Zeitpunkt, wobei alle Werte monatlich während der Vertragslaufzeit ermittelt werden. Das heißt, bei einer Aufschubdauer (=Ansparphase) von 20 Jahren liefert die Funktion `aktien.entw` 240 Indexwerte.

Die oben erwähnten 6 Parameter sind wie folgt gewählt:

Parameter	Wert
Startwert s_0	10
Erwartungswert μ	0,01
Standardabweichung σ	0,05
Anzahl der Simulationen	10
Dauer der Ansparphase	20 Jahre

Tabelle 4.2.2: Parameter für die Modellierung der Indexentwicklung

```
##Aktienmodell
aktien.entw = function(s0, mu, sigma, nsims = 10000, periods = c(0, 1))
{ s0 = as.vector(s0)
  nsteps = len(periods)
  dt = c(periods[1], diff(periods))
  drift = mu - 0.5 * sigma^2
  if( nsteps == 1 ) {
    s0 * exp(drift * dt + sigma * sqrt(dt) * rnorm(nsims))
  } else {
    temp = matrix(exp(drift * dt + sigma * sqrt(dt)
    * rnorm(nsteps * nsims)), nc=nsims)
    for(i in 2:nsteps) temp[i,] = temp[i,] * temp[(i-1),]
    s0 * temp
  }
}
```



```
##Plot der Aktienentwicklung
s0 = 10
```

¹⁴Als Vorlage dient der R-Code für Aktiensimulation von der Website <http://www.r-bloggers.com/simulating-multiple-asset-paths-in-r/>

```
mu = 0.01
sigma = 0.05
m = 20 #Laufzeit in Jahren
n=10 #Anzahl der Simulationen

periods = 1:(12*m) #Monatsentwicklung
perform = aktien.entw(s0, mu, sigma, n, periods = periods)
perform
matplot(perform[,1:n], type="l", lty=1,
main="Indexentwicklung", xlab="Monate", ylab="Performance")

#Monatsrenditen der Indexentwicklung
m_perform=matrix(0,(12*m),n)
for(j in 1:n){for(i in 1:((12*m)-1)){
m_perform[i+1,j]=(perform[i+1,j]/perform[i,j])-1}
}
m_perform
```

Als Ergebnis des Programms erscheint auf der Konsole die Matrix mit den simulierten Indexwerten und gleichzeitig ein Plot der berechneten Szenarien, welche in der Abbildung 4.2.2 darstellt werden.

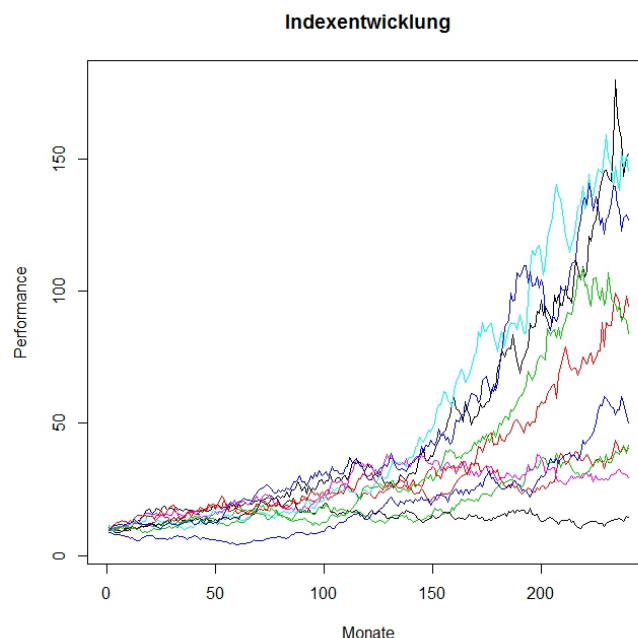


Abbildung 4.2.2: Simulation der Indexentwicklung

4.2.4 Berechnung der Zinsen bei sicherer Veranlagung

Die sichere Verzinsung ergibt sich aus der Formel (3.3). Da diese sich an die Gesamtverzinsung des Versicherungsunternehmens orientiert, welche mit Hilfe des Vasicek-Modells im Unterkapitel 4.2.2 simuliert worden ist, kann diese als das Maximum der Mindestgarantieverzinsung von 0% und der Gesamtverzinsung aus `r` dargestellt werden. Die Gesamtverzinsung ist die Summe der Überschussbeteiligung und der Garantieverzinsung.¹⁵

```
r.garantie=0.0
r.sicher=pmax(r[2:(m+1),1:n],r.garantie)
r.sicher
```

Durch die Indexverschiebung im Ausdruck `r[2:(m+1),1:n]` reduzieren wir die Matrix auf 20 Zeilen für die 20 Jahre Anspardauer. Dieser Schritt ist nötig, da in der ersten Zeile der Matrix `r` der risikoneutrale Zinssatz gespeichert ist.

Die Mehrzahl der Indexpolicen aus der Tabelle 3.1.1 arbeitet mit einem Rechnungszins von 0%. Aus diesem Grund ist `r.garantie` als 0.0 gewählt.

Das Ergebnis `r.sicher` ist eine 20×10 -dimensionale Matrix, da wir hier 10 verschiedene Simulationen haben und die Ansparphase 20 Jahre dauert.

4.2.5 Berechnung der Höhe des Caps mittels Bisektionsverfahren¹⁶

Select-Versicherungspolice werden vor negativen Indexentwicklungen geschützt. Die Finanzierbarkeit dieser Eigenschaft wird durch die eingeschränkte Weitergabe der positiven Renditen sichergestellt. Diese Deckelung erfolgt durch den Cap, dessen Höhe unter anderem von der jährlichen Investitionshöhe abhängt.¹⁷ In diesem Unterkapitel wird die Höhe des Caps in Abhängigkeit vom investierten Betrag jährlich berechnet.

Für die Berechnung der Zinsen bei Indexpartizipation müssen wir zuerst die Indexentwicklung, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, simulieren. Aus dem Ergebnis werden die monatlichen Renditen berechnet, welche im Anschluss nach oben durch ein Cap abgeschnitten werden. Die Höhe des Caps wird durch das Bisektionsverfahren bestimmt, welches eine numerische Berechnungsmethode für Nullstellen stetiger Funktionen ist.

Sei f eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, die im linken Punkt a kleiner Null, im rechten Punkt b größer Null ist. Durch die Annahme der Stetigkeit sind Sprünge ausgeschlossen. Daher muss die Funktion f die x-Achse einmal im Intervall $[a, b]$ kreuzen. Das heißt also, f hat wenigstens eine Nullstelle x mit $f(x) = 0$ im offenen

¹⁵Siehe [7]

¹⁶Als Vorlage dient der R-Code für das Bisektionsverfahren von der Website <http://finzi.psych.upenn.edu/library/NLRoot/html/BFfzero.html>

¹⁷Siehe Allgemeine Beschreibung von „Select-Produkten“ im Kapitel 3.

Intervall (a, b) .

Diese Aussage wird durch den Zwischenwertsatz von Bolzano bewiesen. Der Beweis liefert gleichzeitig das Bisektionsverfahren, welches im Folgenden umgesetzt wird:

```
##Bisektionsverfahren
bisek <- function (f, a, b, num = 50, eps = 1e-05)
{
  h = abs(b - a)/num
  i = 0
  j = 0
  a1 = b1 = 0
  while (i <= num) {
    a1 = a + i * h
    b1 = a1 + h
    if (f(a1) == 0) {
      return(round(a1,digits=4))
    }
    else if (f(b1) == 0) {
      return(b1)
    }
    else if (f(a1) * f(b1) < 0) {
      repeat {
        if (abs(b1 - a1) < eps)
          break
        x <- (a1 + b1)/2
        if (f(a1) * f(x) < 0)
          b1 <- x
        else a1 <- x
      }
      j = j + 1
      return(round(((a1 + b1)/2),digits=4))
    }
    i = i + 1
  }
  if(j==0){return("Nullstelle konnte nicht gefunden werden")}
}
```

Diese Funktion wird dann 20 mal für die Berechnung des jeweiligen Caps aufgerufen.

EB=10000

alpha=0.05

```
AV0=EB-(EB*alpha)
a <- function(cap){AV0*r.sicher[1,4]-
-(AV0*mean(pmax(apply(pmin(m_perform,cap)[((12*(1))-11):(12*(1))],1:10]
,2,sum),0)))}
b <- function(cap){AV0*r.sicher[2,4]-
-(AV0*mean(pmax(apply(pmin(m_perform,cap)[((12*(2))-11):(12*(2))],1:10]
,2,sum),0)))}
u <- function(cap){AV0*r.sicher[3,4]-
-(AV0*mean(pmax(apply(pmin(m_perform,cap)[((12*(3))-11):(12*(3))],1:10]
,2,sum),0)))}
:
y <- function(cap){AV0*r.sicher[20,4]-
-(AV0*mean(pmax(apply(pmin(m_perform,cap)[((12*(20))-11):(12*(20))],1:10]
,2,sum),0)))}
A=bisek(a,0.01,0.05,10,0.00001)
B=bisek(b,0.01,0.05,10,0.00001)
U=bisek(u,0.01,0.05,10,0.00001)
:
Y=bisek(t,0.01,0.05,10,0.00001)

#Ergebnis als Vektor
cap.hoehe=c(A,B,U,D,E,F,G,H,I,J,K,L,V,W,O,P,Q,X,Ü,Y)
cap.hoehe
```

Die obige Berechnung beruht auf der Annahme, dass die Höhe des Caps bei Einmalerlägen und bei prämienpflichtigen Verträgen übereinstimmt. Diese Annahme lässt sich dadurch begründen, dass die Höhe der sicheren Verzinsung und auch der Preis der Option trotz unterschiedlicher Prämienzahlweise gleich bleiben. Aus diesem Grund nehmen wir an, dass ein Betrag von `AV0*r.sicher` investiert wird.

Die Höhe des Caps wird als die Nullstelle der Funktion `f` berechnet, welche für einen bestimmten Cap die Differenz zwischen Rendite aus der sicheren Veranlagung und Optionspreis für das Nominale `AV0` angibt.

Die 20 gefundenen Nullstellen werden im Vektor `cap.hoehe` gespeichert und zurückgegeben.

Als Ergebnis erhalten wir bei einer Simulation der Länge 10:

Jahr	Cap-Höhe
1	0,0179
2	0,0493
3	0,0195
4	0,0203
5	0,0181
6	0,0438
7	0,0220
8	0,0183
9	0,0232
10	0,0235
11	0,0192
12	0,0236
13	0,0166
14	0,0257
15	0,0172
16	0,0209
17	0,0197
18	0,0375
19	0,0400
20	0,0438

Tabelle 4.2.3: Berechnung des Caps

Liegt keine Nullstelle der Funktion vor, so wird „Nullstelle konnte nicht gefunden werden“ ausgegeben. Dies kann zum Beispiel passieren, wenn die Gesamtverzinsung 0% ist. In diesem Fall wird die Garantieverzinsung wirksam und die Höhe des investierten Kapitals beträgt 0 EUR. Daher kann keine Option gekauft werden.

Zur Überprüfung auf Plausibilität der Nullstellen werden die Funktionswerte zwischen 0,01 und 0,05 in Abständen der Länge 0,01 mit der Hilfe von einer for-Schleife ausgegeben:

```
for(z in seq(0.01,0.05,0.01)){
  print(data.frame(z,a(z),b(z),u(z),d(z),e(z),f(z),g(z),h(z),i(z),
    j(z),k(z),l(z),v(z),w(z),o(z),p(z),q(z),r(z),ü(z),y(z))))}
```

Betrachten wir die Funktion `a`, so wissen wir aus der Tabelle 4.2.3 bereits, dass hier die Nullstelle bei 0,0179 liegt. Sehen wir uns nun die Funktionswerte an:

angenommene Cap-Höhe	Funktionswert
0,01	125,989
0,02	-32,360
0,03	-220,238
0,04	-433,470
0,05	-609,239

Tabelle 4.2.4: Funktionswerte im ersten Jahr

Anhand der Funktionswerte muss die Nullstelle zwischen 0,01 und 0,02 liegen. Die berechnete Nullstelle von 0,0179 kann deshalb als wahr betrachtet werden.

4.2.6 Berechnung der Zinsen bei Indexpartizipation

Zur Simulation der Vertragswertentwicklung benötigen wir die Zinssätze bei Indexpartizipation. Die Berechnung dieser Verzinsung folgt aus der Formel (3.2).

Die positive Summe der monatlichen, nach oben durch die Caps beschränkten Renditen liefert die jährliche Verzinsung bei Indexpartizipation. Ist diese Summe negativ, so wird sie durch 0 ersetzt.

Folgende Parameter müssen zuerst gewählt werden:

Parameter	Wert
Laufende Kosten bei sicherer Verzinsung	0,01
Laufende Kosten bei Indexpartizipation	0,01
Anzahl der Simulationen	10
Dauer der Ansparphase	20 Jahre

Tabelle 4.2.5: Parameter für Berechnung der Zinssätze

```
##r-Select
```

```
cap.neu=matrix(cap.hoehe,20,10)
cap.matrix=cap.neu[rep(1:nrow(cap.neu),each=12),]
capped_perform=matrix(0,(12*m),n)
l=0
while(l<=((12*m)-1)){
  l=l+1
  capped_perform[l,]=pmin(m_perform[l,],cap.matrix[l,])
}
capped_perform

y_perform=matrix(0,m,n)
l=0
while(l<=m-1){
  l=l+1
  y_perform[l,]=apply(capped_perform[((12*l)-11):(12*l)],2,sum)
}
y_perform

r.select=pmax(y_perform,0)
r.select #Jahresrendite bei Indexpartizipation
```

Das Ergebnis `r.select` ist aus den oben genannten Gründen erneut eine 20×10 -dimensionale Matrix.

Wie in der allgemeinen Beschreibung von „Select-Produkten“ zu lesen ist, können beide Anlageformen auch gleichzeitig gewählt werden. Die Aufteilung ist in 25%-Schritten möglich.¹⁸ Um allgemeingültig zu bleiben, verwenden wir hierfür den Parameter $s \in [0, 1]$, welcher den Anteil für sichere Verzinsung beschreibt.

Da zur Simulation der Anlegerentscheidung auch weiterführende Untersuchungen aus Sicht der sogenannten verhaltensorientierten Finanzmarkttheorie nötig wären, wählen wir die Aufteilung für den Vektor `s` beliebig aber fix, um die Resultate aus der Simulation miteinander vergleichen zu können.

```
##r-Mix
s=c(0,0.5,0.5,0.25,0.5,0,0.5,0,0.5,0.25,
    0.5,0,0.5,0.75,1,0.25,0.5,0,0.25,1)
#s=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) #Indexpartizipation
#s=c(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) #sichere Verzinsung
delta.select=0.01 #laufende Kosten bei Indexpartizipation
delta.sicher=0.01 #laufende Kosten bei sich. Verzinsung
r.mix=matrix(0,m,n)
r.mix.ppf=matrix(0,m,n)

for(j in 1:n){
  for(i in 1:m){
    r.mix[i,j] = pmax(r.sicher[i,j],0)*s[i]+(1-s[i])*pmax(r.select[i,j],0)
    r.mix.ppf[i,j]= pmax((r.sicher[i,j]-delta.sicher),0)
                    *s[i]+(1-s[i])*pmax((r.select[i,j]-delta.select),0)
  }
}
```

Die Ergebnisse von `r.mix` werden dabei bei einem Vertrag mit Einmalzahlung und die von `r.mix.ppf` bei prämienpflichtigen Verträgen, also bei laufender Zahlweise gebraucht.

4.2.7 Modellierung der Vertragswertentwicklung

Aus den Ergebnissen der vorherigen Simulationsschritte kann nun die Vertragswertentwicklung für Indexpolice simuliert werden.

¹⁸Unterschiede am Markt sind in der Tabelle 3.1.1 im Kapitel 3.2 aufgelistet.

Die Berechnung benötigt die Vorgabe bestimmter Parameter:

Parameter	Wert
Einmalbeitrag	10.000 EUR
Abschlusskosten α	0,05
Anzahl der Simulationen	10
Dauer der Ansparphase	20 Jahre

Tabelle 4.2.6: Parameter der Vertragswertentwicklung bei Einmalerlag

Die Simulation sieht bei einem Versicherungsvertrag mit Einmalzahlung nach der Formel (3.7) wie folgt aus:

```
#Einmalerlag
EB=10000
alpha=0.05
AV0=EB-(EB*alpha)
AV=matrix(1,m,n)
AV[1,]=AV0
for(j in 1:n){
  for(i in 1:(m-1)){
    AV[i+1,j]=AV[i,j]*(1+r.mix[i,j])
  }
}
AV

matplot(AV[,1:n], type="l", lty=1,
  main="Vertragswertentwicklung bei Einmalerlag",
  xlab="Jahre", ylab="Vertragswert in EUR")

#Darstellung als Boxplot
boxplot(t(AV),xlab="Jahre",ylab="Vertragswert",
  main="Darstellung Vertragsentwicklung bei Einmalerlag
  mit Boxplot für 10 Simulationen"
,col="red")
```

Für die Analyse berechnen wir auch die Vertragswertentwicklung einer klassischen Rente gegen Einmalzahlung in der Ansparphase. Hierfür nehmen wir an, dass die Beiträge 20 Jahre angespart werden, um anschließend eine Rentenzahlung zu erhalten. Die klassische Rente wird mit der derzeit gültigen Garantieverzinsung von 1% gerechnet. Hierfür verwenden wir die simulierte Gesamtverzinsung aus dem Kapitel 4.2.2. Die Verzinsung für klassische Renten wird wie folgt bestimmt:

```
r.garantie.klass=0.01
r.sicher.klass=pmax(r[2:(m+1),1:n],r.garantie.klass)
r.sicher.klass
```

Mit Hilfe der Verzinsung können wir die Wertentwicklung einer klassischen Rente berechnen:

```
#klassische Rente
EB=10000
alpha=0.05
Rente0=EB-(EB*alpha)
Rente=matrix(1,m,n)
Rente[1,]=Rente0
for(j in 1:n){
  for(i in 1:(m-1)){
    Rente[i+1,j]=Rente[i,j]*(1+r.sicher.klass[i,j])
  }
  Rente.klass=apply(Rente,1,mean)
}

#Plot-Vergleich klass. Rente mit Select-Produkt
matplot(AV[,1:n], type="l", lty=1,
  main="Vergleich mit klass. Rente (gepunktete Linie)",
  xlab="Jahre", ylab="Vertragswert in EUR")
lines(Rente.klass,type="o")
```

Handelt es sich dabei um ein Select-Vorsorgekonzept mit **laufender Zahlweise** in der Ansparphase, so müssen zusätzlich die Beiträge und die laufenden Kosten δ berücksichtigt werden. Wir beschränken uns hier auf jährliche Prämienzahlungen, um die Simulation zu vereinfachen. Im Falle einer unterjährigen Zahlweise müsste der Zinssatz für die eingezahlten Beiträge zwischen zwei Indexstichtagen auf monatliche, quartalsweise oder halbjährliche Zahlweise angepasst werden.

Folgende Werte müssen im Vorhinein definiert werden:

Parameter	Wert
Höhe der Prämie	500 EUR pro Jahr
Abschlusskosten α	0,05
Zinssatz für unterjährig gezahlten Beiträge	0,01 p.a.
laufende Kosten δ	0,01
Anzahl der Simulationen	10
Dauer der Ansparphase	20 Jahre

Tabelle 4.2.7: Parameter der Vertragswertentwicklung bei laufender Zahlweise

#Laufende Zahlweise

P=500 #jährliche Zahlweise

r.zahlw=0.01

alpha=0.05

AV.ppf=matrix(1,m,n)

AV0.ppf=P-(P*alpha)

AV.ppf[1,]=AV0.ppf

```
for(j in 1:n){
```

```
  for(i in 1:(m-1)){
```

```
    AV.ppf[i+1,j]=AV.ppf[i,j]*(1+r.mix.ppf[i,j])+(P*(1+r.zahlw))
```

```
  }
```

```
}
```

AV.ppf

#Plot der Szenarien

```
matplot(t,AV.ppf[,1:n], type="l", lty=1,
```

```
  main="Vertragswertentwicklung bei laufender Zahlweise",
```

```
  xlab="Jahre", ylab="Vertragswert in EUR")
```

#Darstellung als Boxplot

```
boxplot(t(AV.ppf),xlab="Jahre",ylab="Vertragswert",col="green")
```

Auch im Fall von prämienpflichtigen Veträgen wollen wir das Select-Vorsorgekonzept mit klassischen Renten vergleichen. Dafür wird erneut die Wertentwicklung in der Ansparphase simuliert. Die Berechnung erfolgt mit jährlichen Prämien in der Höhe von 500 EUR.

```
P=500 #jährliche Zahlweise
alpha=0.05
Rente.ppf=matrix(1,m,n)
Rente0.ppf=P-(P*alpha)
Rente.ppf=matrix(1,m,n)
Rente.ppf[1,]=Rente0.ppf
for(j in 1:n){
  for(i in 1:(m-1)){
    Rente.ppf[i+1,j]=Rente.ppf[i,j]*(1+r.sicher.klass[i,j])+P
  }
}
Rente.ppf
klass.Rente.ppf=apply(Rente.ppf,1,mean)

#Plot-Vergleich ppf. klass. Rente mit ppf. Select-Produkt

matplot(AV.ppf[,1:n], type="l", lty=1,

matplot(AV.ppf[,1:n], type="l", lty=1,
main="Vergleich mit klassischer Rente (gepunktete Linie)",
  xlab="Jahre", ylab="Vertragswert in EUR")
lines(klass.Rente.ppf,type="o")
```

4.2.8 Berechnung des Konfidenzintervalls¹⁹

Sicheres Wissen über Grundgesamtheiten kann man anhand von Stichproben nicht gewinnen. Aber mit Hilfe der Statistik können Intervalle angegeben werden, innerhalb derer sich die Parameter der Grundgesamtheit wahrscheinlich bewegen. Diese Bandbreiten nennt man Konfidenzintervalle.

Um ein Intervall anzugeben, in dem der geschätzte Wert für die Grundgesamtheit „wahrscheinlich“ liegt, benötigt man eine Irrtumswahrscheinlichkeit α . Für den Mittelwert der simulierten Vertragswerte wollen wir auch das Konfidenzintervall zu einem bestimmten Konfidenzniveau berechnen. Dabei wählen wir den Wert des Niveaus so, dass der Wert des Parameters mit Wahrscheinlichkeit gleich α durch das Intervall nicht überdeckt wird. Somit beträgt das Konfidenzniveau $1 - \alpha$. Für die Berechnung des Konfidenzintervalls benötigen wir den Standardfehler SE (= die Standardabweichung der Stichprobenverteilung). Der Fehler ist abhängig sowohl von der Stichprobengröße als auch von der Streuung der Werte in der Grundgesamtheit und lässt sich durch $SE = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ berechnen. Als Schätzung

¹⁹Siehe [10], S. 396-401

der Varianz der Grundgesamtheit bestimmen wir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Die Standardabweichung der Stichprobenverteilung ist daher gegeben durch $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$. Hierfür benötigen wir zuerst den Stichprobenmittelwert $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Weiters gehen wir davon aus, dass die simulierten Ablaufswerte unabhängig und identisch verteilt sind. Diese Annahme lässt sich durch die Erzeugung unabhängiger Zufallsvariablen aus der Simulation begründen. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz können wir weiters davon ausgehen, dass die Summe der Werte und somit auch der Stichprobenmittelwert mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen eine Normalverteilung strebt.

Somit lässt sich das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ wie folgt berechnen:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (4.12)$$

Wobei $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das entsprechende Quantil der $\mathcal{N}(0,1)$ -Verteilung bezeichnet. Mit n geben wir auch hier die Anzahl der Simulationen an.

Die Abbildung 4.2.3 verdeutlicht die Konstruktion eines Konfidenzintervalls an der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

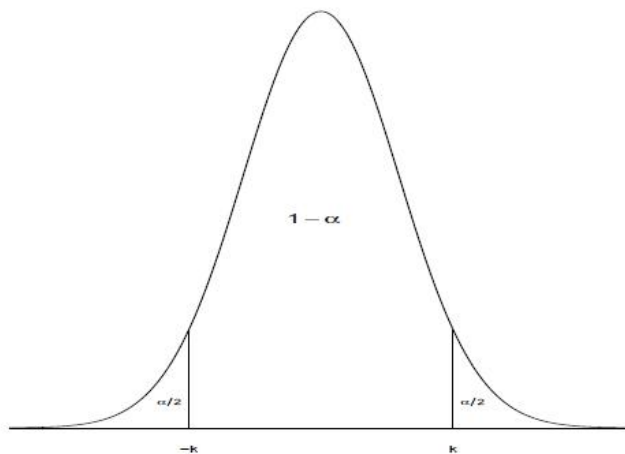


Abbildung 4.2.3: Darstellung des Konfidenzintervalls

Die Berechnung in R wird wie folgt umgesetzt:

```
konf<-function (x,konfniveau)
{
  xq<-mean(x)
  h<-qnorm(1-(1-konfniveau)/2)*sd(x)/sqrt(n)
  return(c(xq-h,xq+h))
}
```

Die R-Funktion `mean()` berechnet den Mittelwert der Ablaufswerte und die Funktion `sd()` gibt die Streuung der simulierten Werte $\hat{\sigma}$ zurück. `qnorm()` bestimmt in R das entsprechende Quantil der Normalverteilung.

Schließlich ermittelt die Funktion `konf(AV[20,],0.95)` das Konfidenzintervall zu einem Niveau von 95% für den Mittelwert der Ablaufswerte aus der Simulation.

Kapitel 5

Resultate der Simulation

5.1 Analyse und Vergleich

Die Ergebnisse der Simulation werden wir für den Einmalerlag und den prämienpflichtigen Vertrag getrennt analysieren, da diese durch den unterschiedlichen Zahlungsrhythmus nicht miteinander vergleichbar sind.

Die Vertragswerte werden für jede Simulation in einem sogenannten Boxplot dargestellt. Solche Abbildungen sollen einen Eindruck darüber vermitteln, in welchem Bereich die simulierten Vertragswerte liegen. Dabei werden für alle Jahre der Vertragslaufzeit getrennte Boxplots mit 0,25-Quantil, Median (Strich in der Box) und 0,75-Quantil, welche zusammen ein Rechteck bilden, dargestellt. Das Rechteck entspricht dem Bereich, in dem die mittleren 50% der Werte liegen und die Länge des Rechtecks ist somit der Interquartilsabstand. Weiters werden auch die Extremwerte abgebildet. Die beiden Antennen (auch Whisker genannt) bilden maximal das 1,5-Fache des Interquartilsabstands. Das Wort maximal ist so zu verstehen, dass die Länge der Antenne auch durch die Datenwerte und nicht allein durch den Interquartilsabstand bestimmt wird. Die jeweilige Antenne endet bei dem Wert aus der Simulation, der noch innerhalb der Grenze vom 1,5-Fache des Interquartilsabstands liegt. Gibt es Werte außerhalb dieser Grenze, so werden diese als Ausreißer in einzelnen Punkten dargestellt. Ansonsten wird die Länge der Antenne durch den maximalen und minimalen Vertragswert festgelegt. Die Abbildung 5.1.1 stellt die oben beschriebenen Werte anhand eines Beispiels graphisch dar.

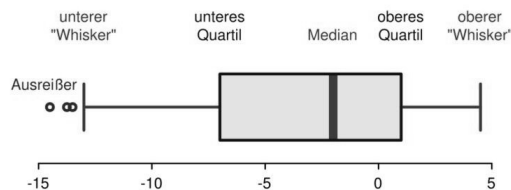


Abbildung 5.1.1: Boxplot mit Antennen und Extremwerten (Quelle: Wikipedia - Boxplot)

5.1.1 Einmalerlag

Die im Kapitel 4.2 beschriebene Simulation liefert unter Vorgabe der Parameter aus der Tabelle 4.2.6 die Vertragswerte für alle Jahre der Ansparphase für eine bestimmte Anzahl von Simulationen.

Zusätzlich zu den bereits erwähnten Parametern ist auch die Aufteilung zwischen Indexpartizipation und sicherer Verzinsung frei wählbar.

Im ersten Fall gehen wir von folgenden Entscheidungen aus:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anteil der Indexpartizipation	100%	50%	50%	75%	50%	100%	50%	100%	50%	75%

Jahr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anteil der Indexpartizipation	50%	100%	50%	25%	0%	75%	50%	100%	75%	0%

Tabelle 5.1.1: Aufteilung zwischen Indexpartizipation und sicherer Verzinsung

Diese Aufteilung wird bei allen Beispielen mit gemischter Veranlagung herangezogen, um die Ergebnisse der Simulation miteinander vergleichen zu können.

Bei Einmalerlagstarifen gehen wir davon aus, dass zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses 10.000 EUR vom Versicherungsnehmer eingezahlt werden. Da die Abschlusskosten α in der Höhe von 500 EUR gleich zu Beginn anfallen, beträgt der Vertragswert zum ersten Indexstichtag 9500 EUR. Wie am Anfang dieses Kapitels erwähnt, erfolgt die Verzinsung der Einmalzahlung anteilig sowohl mit dem Zinssatz aus der sicheren Veranlagung als auch mit der Rendite aus der Indexpartizipation. Die Anteile sind der Tabelle 5.1.1 zu entnehmen.

Die Simulation der Vertragswerte eines Select-Produktes gegen einer Einmalzahlung von 10.000 EUR liefert nach einer Ansparphase von 20 Jahren ein angespartes Kapital von durchschnittlich 13.745,92 EUR. Das gesamte Ergebnis der Simulation zeigt die Tabelle 5.1.3.

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	12.035,12	13.745,92	18.693,15
maßgebliche konstante Jahresrendite	1,19%	1,87%	3,44%

Tabelle 5.1.2: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase

Die Tabelle 5.1.2 zeigt, dass im schlechtesten Fall der Simulation die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite¹ über dem garantierten Rechnungszins² liegt. Im besten Fall wird

¹unter Annahme einer konstanten Verzinsung

²In Österreich seit 01.01.2016: 1%

eine effektive Verzinsung von 3,44% jährlich erwirtschaftet, welche auch über der derzeitigen Gesamtverzinsung von 2,5% - 2,75% liegt.

Wie schon beschrieben, werden die simulierten Vertragswerte in einem Boxplot dargestellt.

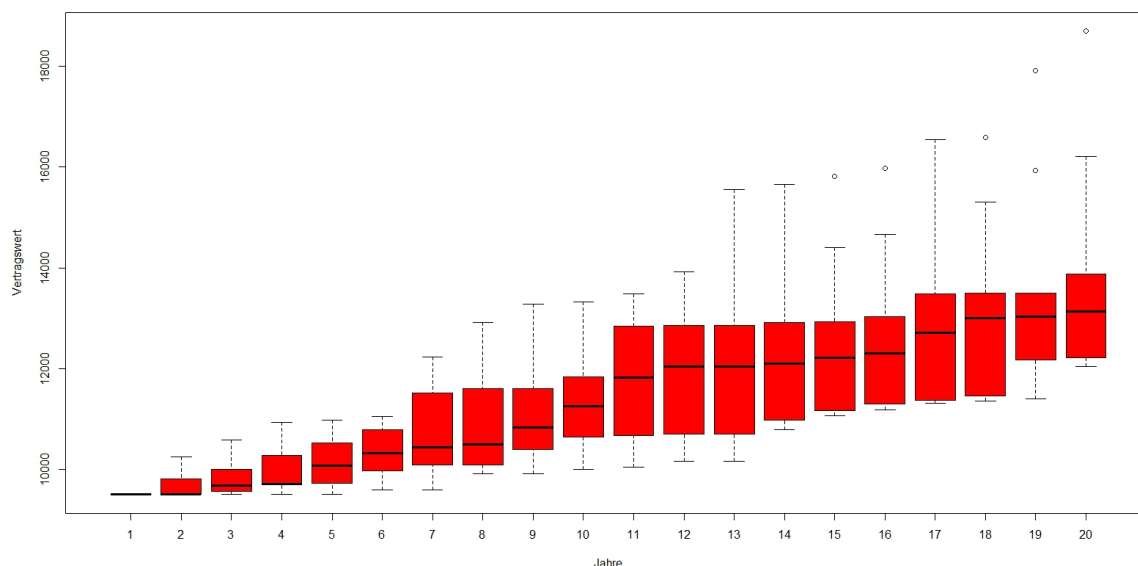


Abbildung 5.1.2: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise

Aus der Abbildung 5.1.2 können wir ablesen, dass sich bei dem Maximum von 18.693,15 EUR aus der Tabelle 5.1.2 um einen Ausreißer handelt.

In den ersten Jahren liegt der Vertragswert noch unter dem eingezahlten Einmalbeitrag. In diesen Jahren müssen erst die verrechneten Kosten erwirtschaftet werden. Aufgrund der zu Beginn anfallenden Abschlusskosten³ liegt der Vertragswert nach Versicherungsbeginn deutlich unter dem einbezahlten Betrag von 10.000 EUR. Aus diesem Grund ist eine solche Erlebensversicherungen nur als langfristige Investition empfehlenswert.

Da im letzten Jahr aus Gründen der Sicherstellung des garantierten Kapitals keine Indexpartizipation mehr möglich ist, ist die Entwicklung des Vertragswertes zwischen dem 19. und 20. Jahr nur eingeschränkt durch die sichere Verzinsung r_{sicher} , welche mit Hilfe des Vasicek- Modells simuliert wird, möglich. Die geringfügige Entwicklung in diesem Fall ist an der Abbildung gut erkennbar.

³In der Praxis wird oft als „kopflastige“ Kostenverrechnung bezeichnet.

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00
2	10252.96	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9974.04	9500.00	9812.67	9500.00
3	10252.96	9557.09	9719.69	9637.61	9596.54	9500.00	10006.64	9986.76	10581.12	9539.00
4	10283.18	9693.83	9719.69	9708.10	9691.92	9500.00	10532.36	10005.80	10933.69	9562.58
5	10289.55	9995.75	10051.72	10085.11	9729.76	9500.00	10589.84	10524.94	10972.62	9567.04
6	10356.73	10092.25	10781.38	10287.25	9870.19	9967.99	10898.82	10524.94	11055.92	9590.19
7	10356.73	10092.25	11511.18	10287.25	9870.19	10873.48	12230.89	10524.94	11639.22	9590.19
8	10458.45	10092.25	11606.00	10393.28	9913.64	10911.19	12915.09	10524.94	11903.15	9962.83
9	10755.38	10092.25	11606.00	10393.28	9913.64	10911.19	12915.09	10524.94	13285.94	11316.63
10	10850.31	10092.25	11830.12	11100.83	10001.97	11784.65	13072.78	10641.27	13328.44	11416.81
11	10896.87	10121.79	11881.53	11813.71	10050.92	11823.24	13131.12	10665.49	13489.86	12840.71
12	10957.78	10164.92	12270.81	12217.25	10160.88	11878.07	13913.16	10706.88	13594.91	12853.37
13	10957.78	10667.17	12270.81	12217.25	10160.88	11878.07	13913.16	10706.88	15550.10	12853.37
14	10967.66	10785.15	12302.27	12333.69	11010.32	11906.37	14152.66	10975.41	15660.04	12917.40
15	11061.91	11322.09	12442.93	12432.07	11173.42	11996.18	14398.50	11104.68	15808.91	12925.14
16	11227.31	11708.85	12719.10	12616.37	11301.43	11996.72	14667.70	11187.84	15974.79	13030.26
17	11372.86	11765.60	12729.66	12690.07	11316.29	13483.11	14762.55	11310.79	16548.21	13092.77
18	11451.71	12169.76	13178.86	12811.63	11349.91	13494.44	15309.81	11396.83	16580.82	13221.71
19	11451.71	12169.76	13295.31	12849.33	11398.73	13494.44	15934.16	12164.89	17915.80	13221.71
20	12035.12	12173.55	13324.36	12949.27	12450.43	13532.49	16207.88	12213.14	18693.15	13879.77

Tabelle 5.1.3: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung

Um das Konfidenzintervall für den Mittelwert der Ablaufswerte $\bar{X}$ zum Konfidenzniveau von 95% bei 10 Simulationsläufen zu bestimmen, wird die Funktion `konf()`, wie im Kapitel 4.2.8 beschrieben, aufgerufen und folgendes Intervall kann ermittelt werden:

$$[13.745, 92 - 1.321, 28; 13.745, 92 + 1.321, 28] = [12.425, 64; 15.066, 19]$$

Dieses Intervall $[12.425, 64; 15.066, 19]$ überdeckt den Mittelwert der Vertragswerte am Ende der Ansparphase mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit.

Je kleiner das Intervall ist, umso kleiner ist der Fehler der Simulation des Mittelwertes. Das Konfidenzintervall lässt sich mit der Erhöhung der Anzahl der Simulationen verkleinern. Aus diesem Grund erhöhen wir n von 10 auf 10.000 Simulationen.

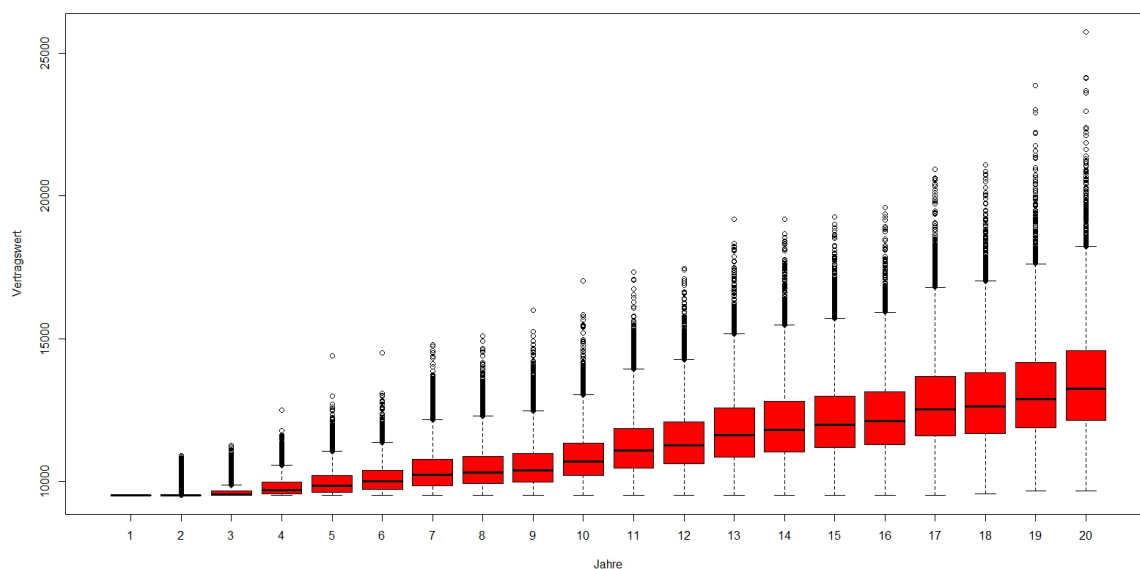


Abbildung 5.1.3: Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalanlage

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	9.659,09	13.509,48	25.736,55
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,09%	1,78%	5,11%

Tabelle 5.1.4: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei 10.000 Simulationen

Aus der Abbildung 5.1.3 sowie aus der Tabelle 5.1.4 lässt sich erkennen, dass der Mittelwert der Ablaufswerte bei 10.000 Simulationen geringer ist als bei 10 Simulationen. Weiters entstehen viele Ausreißer und somit vergrößert sich der Abstand zwischen Minimum und Maximum. Das Minimum der beobachteten Simulation liegt unter dem eingezahlten Einmalbeitrag. In diesem Fall werden wegen der weniger positiven Zinsentwicklung die verrechneten Kosten nicht erwirtschaftet.

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert erneut zum Niveau 95% bei 10.000 Simulationen ist:

$$[13.509, 48 - 36, 5; 13.509, 48 + 36, 5] = [13.472, 98; 13.545, 98]$$

Das berechnete Intervall ist bei 10.000 Simulationen viel kürzer als bei 10 Simulationen und wir können annehmen, dass der Mittelwert im Intervall $[13.472, 98; 13.545, 98]$ liegt.

Für reine Indexpartizipation, also wenn der Versicherungsnehmer sich konstant während der Ansparphase mit 100% der Bezugsgröße für die Teilnahme an der Indexentwicklung entscheidet, zeigt die Tabelle 5.1.6 das Ergebnis der Simulation. Die Abbildung 5.1.4 stellt die Vertragsentwicklung eines Select-Produktes gegen Einmalzahlung bei reiner Indexpartizipation während der gesamten Anspardauer dar.

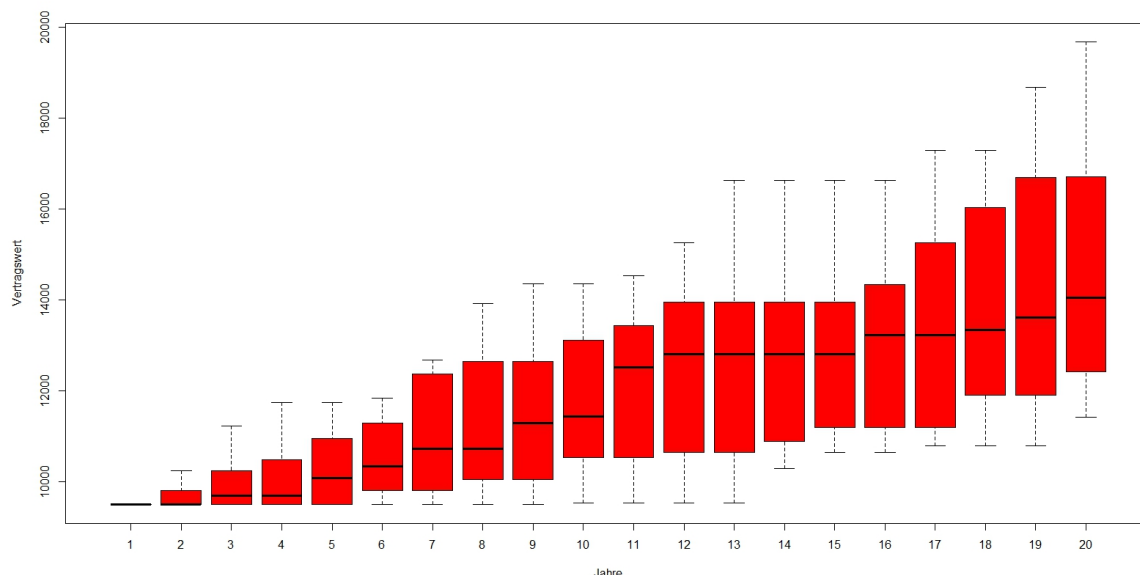


Abbildung 5.1.4: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise und 100% Indexpartizipation

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	11.433,25	14.485,57	19.677,52
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,93%	2,13%	3,71%

Tabelle 5.1.5: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei 100% Indexpartizipation

Anhand der Tabelle 5.1.5 sehen wir, dass sich bei reiner Indexpartizipation die Spanne zwischen Minimum und Maximum vergrößert und somit die Chance auf höhere Rendite steigt. Gleichzeitig haben aber auch negative Entwicklungen des Aktienindexes einen stärkeren Einfluss.

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00
2	10252.96	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9974.04	9500.00	9812.67	9500.00
3	10252.96	9500.00	9902.99	9500.00	9500.00	9500.00	10007.24	10442.82	11230.63	9500.00
4	10252.96	9500.00	9902.99	9500.00	9500.00	9500.00	10963.63	10482.63	11751.41	9500.00
5	10252.96	9810.81	10354.05	9930.62	9500.00	9500.00	10963.63	11207.80	11751.41	9500.00
6	10252.96	9810.81	11844.06	10046.43	9500.00	10423.36	11301.12	11207.80	11751.41	9500.00
7	10252.96	9810.81	12645.79	10046.43	9500.00	11370.21	12682.36	11207.80	12371.40	9500.00
8	10252.96	9810.81	12645.79	10046.43	9500.00	11370.21	13931.22	11207.80	12871.21	10146.84
9	10544.06	9810.81	12645.79	10046.43	9500.00	11370.21	13931.22	11207.80	14366.46	11525.64
10	10544.06	9810.81	13041.77	11106.70	9536.38	13116.74	13931.22	11348.88	14366.46	11525.64
11	10544.06	9810.81	13096.05	11961.97	9536.38	13116.74	13931.22	11348.88	14540.15	13436.09
12	10649.92	9810.81	13954.18	12519.25	9536.38	13116.74	15270.26	11348.88	14540.15	13436.09
13	10649.92	10295.56	13954.18	12519.25	9536.38	13116.74	15270.26	11348.88	16631.27	13436.09
14	10649.92	10295.56	13954.18	12519.25	10890.84	13116.74	15270.26	11899.18	16631.27	13436.09
15	10649.92	11202.84	13954.18	12519.25	11055.05	13116.74	15270.26	11935.89	16631.27	13436.09
16	10649.92	11207.04	13954.18	12519.25	11055.05	14344.11	15270.26	12095.07	16631.27	13984.59
17	10798.31	11207.04	13954.18	12519.25	11056.32	16713.76	15270.26	12248.87	17299.05	13998.10
18	10798.31	11911.96	14890.04	12519.25	11056.32	16713.76	16041.81	12248.87	17299.05	14168.11
19	10798.31	11911.96	15021.62	12556.09	11103.88	16713.76	16696.00	13074.35	18691.85	14168.11
20	11433.25	11911.96	15021.62	12556.09	12423.81	16713.76	16969.22	13074.35	19677.52	15074.11

Tabelle 5.1.6: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung und 100% Indexpartizipation

Als Konfidenzintervall für den Mittelwert der Ablaufswerte zum Konfidenzniveau von 95% erhalten wir im Fall der reinen Indexpartizipation:

$$[14.485, 57 - 1.660, 89; 14.485, 57 + 1.660, 89] = [12.824, 68; 16.146, 46]$$

Zum Vergleich betrachten wir auch in diesem Beispiel die Entwicklung bei 10.000 Simulationen.

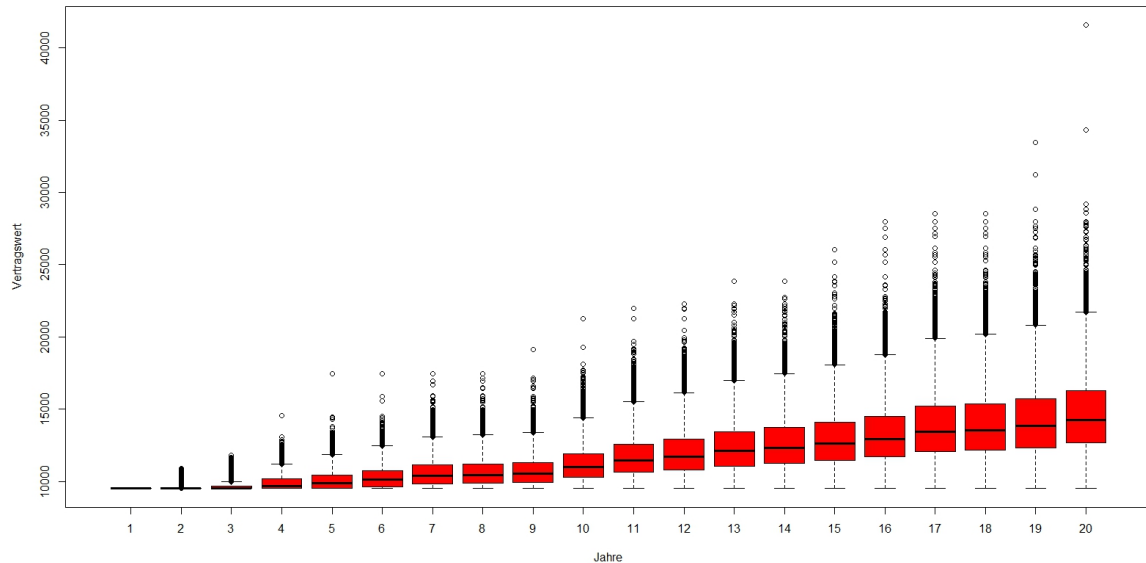


Abbildung 5.1.5: Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalerlag bei reiner Indexpartizipation

Wir sehen auch hier, dass durch die Erhöhung der Simulation zahlreiche Ausreißer entstehen, aber sich der Mittelwert nach 20 Jahren in diesem Fall kaum ändert. Das Konfidenzintervall zum Niveau 95% bei 10.000 Simulationen in diesem Fall ist:

$$[14.675, 72; 14.785, 57]$$

Dementsprechend können wir annehmen, dass der Mittelwert der Vertragswerte am Ende der Ansparphase in diesem Intervall liegt. Anhand der beobachteten Simulation können wir festhalten, dass die Index-Veranlagung die bessere Strategie aus Kundensicht wäre, da der Mittelwert nach 10.000 Simulationen höher liegt als bei der gemischten Veranlagung.

Als drittes Beispiel wollen wir die ausschließliche sichere Veranlagung betrachten.

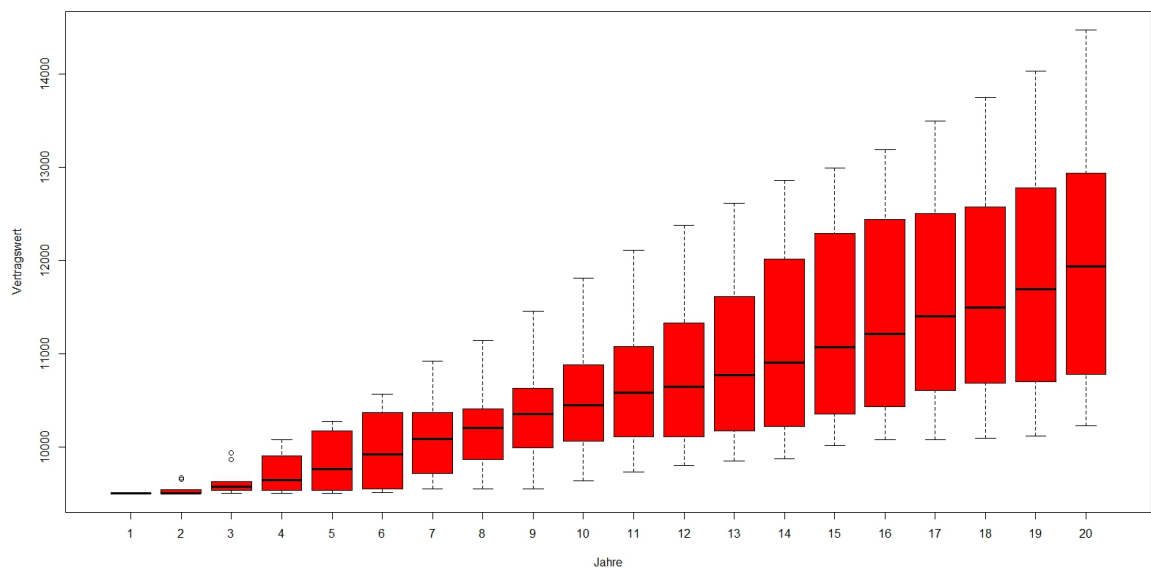


Abbildung 5.1.6: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise und sicherer Verzinsung

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	10.231,29	11.974,00	14.469,42
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,38%	1,17%	2,13%

Tabelle 5.1.7: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei sicherer Veranlagung

Die berechneten jährlichen Renditen sind, wie in der Tabelle 5.1.7 dargestellt, weit niedriger als bei der reinen Indexveranlagung oder bei der Mischung der Veranlagungsarten. Als Konfidenzintervall für den Mittelwert der Ablaufswerte zum Konfidenzniveau 95% erhalten wir im Fall der sicheren Veranlagung:

$$[11.100, 42; 12.847, 57]$$

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00
2	9500.00	9517.68	9500.00	9653.53	9667.52	9500.00	9500.00	9500.00	9500.00	9544.78
3	9500.00	9632.08	9536.39	9933.20	9864.00	9500.00	9530.49	9530.71	9615.15	9623.15
4	9556.00	9907.69	9536.39	10078.51	10060.09	9500.00	9621.07	9530.71	9810.04	9670.73
5	9579.70	10169.57	9536.39	10273.54	10217.17	9500.00	9831.09	9530.71	9949.78	9688.76
6	9704.79	10365.93	9548.55	10565.57	10512.10	9512.63	10102.14	9530.71	10100.85	9735.64
7	9911.77	10365.93	9712.25	10918.46	10734.98	9566.29	10272.33	9548.83	10254.67	9772.24
8	10106.47	10365.93	9872.25	11143.53	10829.51	9632.64	10410.07	9548.83	10305.44	9866.30
9	10340.18	10365.93	9989.55	11456.69	10993.39	9632.64	10625.23	9548.83	10474.85	10026.20
10	10522.71	10365.93	10062.56	11807.48	11147.17	9695.23	10884.68	9639.72	10541.86	10203.71
11	10703.34	10487.29	10111.84	12112.80	11365.41	9822.22	11079.00	9727.49	10670.22	10220.12
12	10715.53	10576.68	10111.84	12376.01	11614.09	9913.33	11333.75	9802.98	10836.41	10240.27
13	10743.53	10801.64	10170.96	12615.66	11823.80	9928.72	11616.77	9853.17	10958.91	10240.27
14	10762.90	11040.58	10223.12	12856.12	12121.38	9976.02	12016.72	9869.64	11113.87	10342.29
15	10886.22	11449.13	10378.97	12992.85	12299.87	10076.36	12295.03	10014.49	11254.74	10350.55
16	11049.00	11840.24	10609.33	13185.47	12440.79	10076.81	12524.91	10089.48	11372.84	10434.74
17	11160.09	12069.75	10644.55	13493.55	12501.89	10076.81	12848.90	10148.11	11635.84	10604.73
18	11314.85	12139.79	10681.89	13752.06	12576.18	10093.74	13152.33	10302.51	11681.70	10684.81
19	11572.11	12275.31	10710.40	14032.85	12781.10	10117.18	13442.24	10473.42	11807.96	10703.11
20	11888.92	12290.61	10804.00	14469.42	12940.17	10231.29	13706.01	10639.56	11989.31	10780.65

Tabelle 5.1.8: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung und sicherer Veranlagung

Zum Vergleich betrachten wir auch hier die Entwicklung bei 10.000 Simulationen.

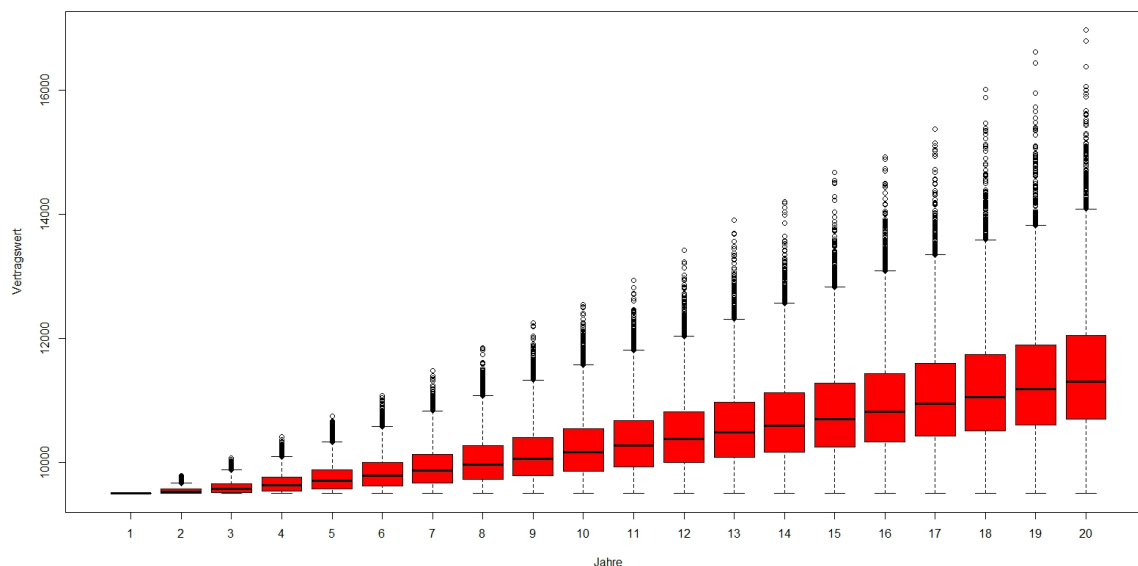


Abbildung 5.1.7: Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalanlage bei sicherer Veranlagung

Wir sehen auch hier, dass der Mittelwert für alle Jahre niedriger ist als bei 10 Simulationen. Das Konfidenzintervall zum Niveau 95% bei 10.000 Simulationen in diesem Fall ist:

$$[11.420, 70; 11.460, 18]$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die simulierte sichere Verzinsung aus dem Vasicek-Modell⁴ in vielen Fällen niedriger ist als die simulierte Rendite aus der Indexentwicklung⁵. Hier wird nochmals deutlich, dass die richtige Wahl der Anlagestrategie sehr wichtig bei Select-Produkten ist.

Zum Abschluss werden Select-Produkte mit klassischer Rentenversicherung gegen Einmalzahlung gegenübergestellt.

Die Berechnung liefert folgende Diagramme:

⁴Siehe Unterkapitel 4.2.2

⁵Siehe Unterkapitel 4.2.3

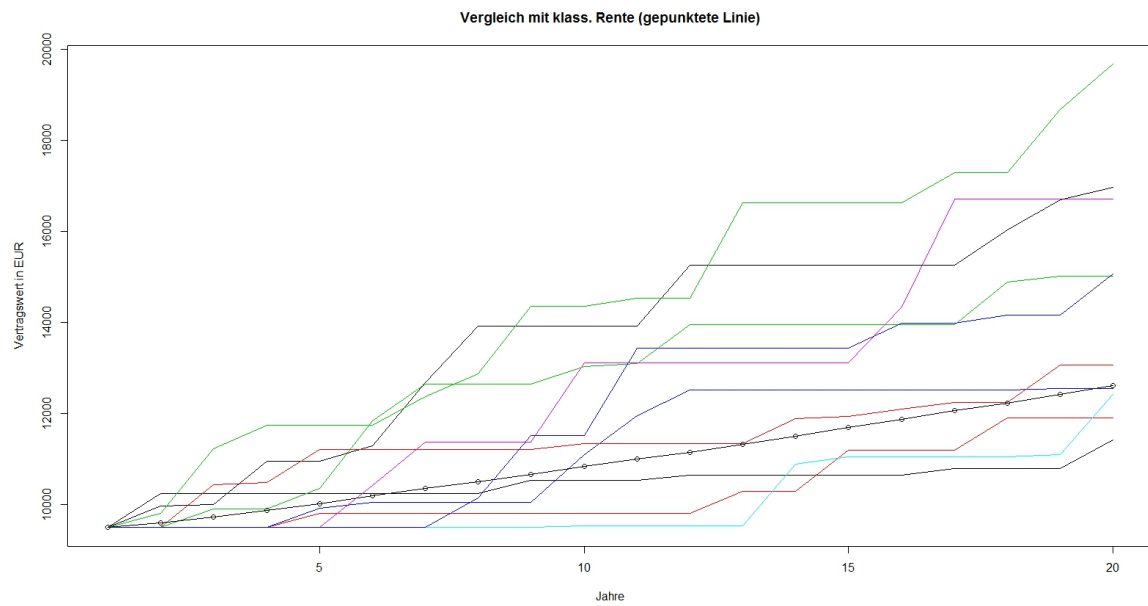


Abbildung 5.1.8: Gegenüberstellung der Vertragsentwicklung von Select-Produkten mit 100% Indexpartizipation und klassischen Renten bei einmaliger Zahlweise

Betrachten wir nun das Select-Produkt mit der flexiblen Aufteilung der Bezugsgröße zwischen sicherer Verzinsung und Indexpartizipation. Die Bestimmung der Anteile für die Aufteilung erfolgt nach der Tabelle 5.1.1.

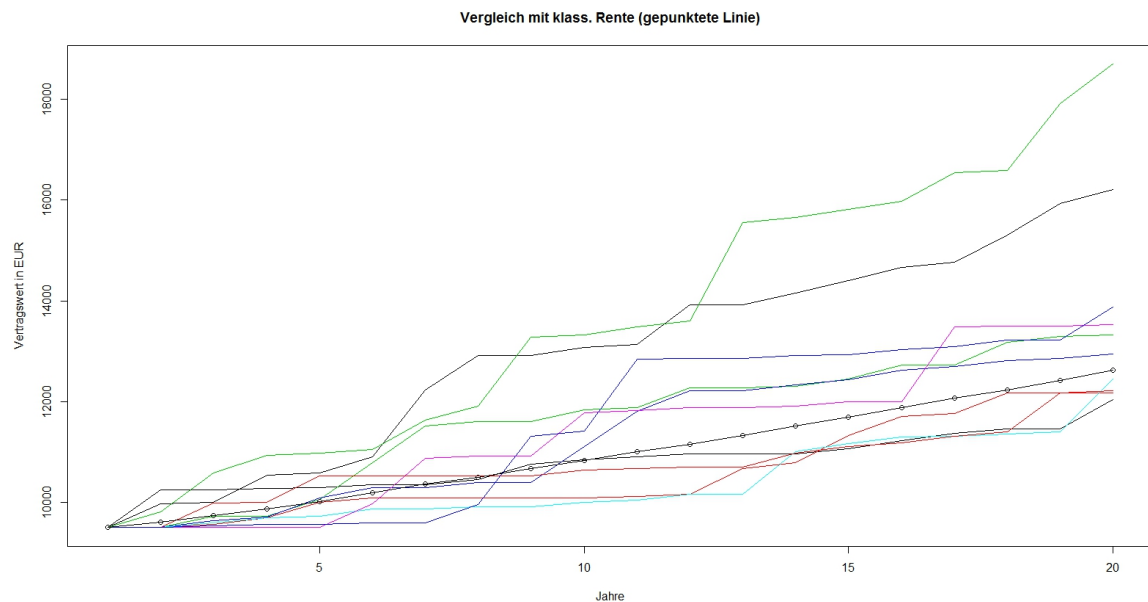


Abbildung 5.1.9: Gegenüberstellung der Vertragsentwicklung von Select-Produkten und klassischen Renten bei einmaliger Zahlweise

Die klassische Rente gegen Einmalzahlung mit der simulierten Gesamtverzinsung aus

dem Unterkapitel 4.2.2 liefert nach 20 Jahren Ansparphase einen Mittelwert von 12.624,88 EUR für die Vertragswerte.

Wir können aus den Abbildungen 5.1.8 und 5.1.9 folgern, dass die klassische Rente in vielen Fällen unter dem Wert des Select-Produktes liegt. Allerdings ist während der gesamten Laufzeit von 20 Jahren auch eine schlechtere Performance beim Select-Vorsorgekonzept zu beobachten.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Select-Produkte aus Kundensicht höhere Rendite erwirtschaften können als klassische Rentenversicherungen. Dennoch sind auch die Risiken des Aktienmarktes in wenigen Fällen der Simulation zu erkennen.

5.1.2 Prämienpflichtige Verträge

Bei prämienpflichtigen Versicherungsverträgen wird wie bei den Einmalerlagsbeispielen vorgegangen.

Zuerst wird der Fall der gemischten Aufteilung der jährlichen Bezugsgrößen zwischen sicherer Verzinsung und Indexpartizipation betrachtet. Die Aufteilung erfolgt nach den Angaben aus der Tabelle 5.1.1.

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird bei laufender Prämienzahlung nur die jährliche Zahlweise zugelassen. Aus diesem Grund werden in der Berechnung keine Unterjährigkeitszuschläge berücksichtigt.

Der simulierte Vertrag basiert auf einer jährlichen Prämie in der Höhe von 500 EUR. Zusätzlich fallen Abschlusskosten und laufende Kosten an. Die Tabelle zeigt die vordefinierten Eigenschaften des simulierten Vertrages:

Parameter	Wert
Höhe der Prämie	500 EUR pro Jahr
Abschlusskosten α	0,05
Zinssatz für unterjährig gezahlten Beiträge	0,01 p.a.
laufende Kosten δ	0,01

Tabelle 5.1.9: Vordefinierte Eigenschaften des Vertrages bei laufender Zahlweise

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00
2	1012.90	980.00	980.00	980.00	980.00	980.00	998.95	980.00	990.88	980.00
3	1517.90	1485.99	1500.89	1494.30	1490.06	1485.00	1503.95	1528.73	1563.57	1485.00
4	2022.90	2004.82	2005.89	2002.75	2002.42	1990.00	2073.30	2033.73	2105.04	1990.00
5	2527.90	2552.21	2564.36	2565.50	2510.23	2495.00	2584.43	2628.99	2612.27	2495.00
6	3036.76	3069.09	3241.06	3096.27	3038.91	3108.78	3138.99	3133.99	3124.04	3000.00
7	3541.76	3574.09	3933.03	3601.27	3543.91	3865.09	3996.25	3638.99	3762.62	3505.00
8	4063.84	4079.09	4450.77	4125.38	4048.91	4370.09	4684.84	4143.99	4324.81	4111.80
9	4643.58	4584.09	4955.77	4630.38	4553.91	4875.09	5189.84	4648.99	5288.98	5134.41
10	5166.35	5089.09	5513.58	5404.30	5067.99	5730.13	5732.26	5160.01	5793.98	5659.19
11	5680.60	5596.26	6018.58	6202.31	5585.13	6239.57	6248.51	5665.01	6311.21	6825.29
12	6185.72	6101.26	6690.67	6857.16	6123.30	6744.57	7063.16	6170.01	6833.80	7330.29
13	6690.72	6846.72	7195.67	7362.16	6628.30	7249.57	7568.16	6675.01	8253.28	7835.29
14	7195.72	7393.21	7700.67	7900.51	7621.14	7754.57	8165.60	7308.47	8775.37	8340.29
15	7708.59	8192.34	8235.96	8409.27	8162.82	8259.91	8751.20	7839.10	9297.97	8845.29
16	8251.76	8895.27	8841.40	8954.85	8679.72	8764.91	9332.30	8344.10	9807.56	9350.29
17	8781.22	9421.14	9346.40	9489.77	9184.72	10290.14	9874.32	8866.09	10566.53	9869.99
18	9303.20	10175.33	10118.09	10038.22	9689.72	10795.14	10646.63	9394.21	11071.53	10385.58
19	9808.20	10680.33	10623.09	10543.22	10194.72	11300.14	11479.34	10438.36	12357.22	10890.58
20	10714.79	11185.33	11128.09	11103.87	11538.38	11808.75	12066.75	10958.66	13274.82	11836.21

Tabelle 5.1.10: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise

Die geringere Höhe der Ablaufwerte (letzte Zeile der Tabelle 5.1.10) als im vorigen Unterkapitel kann auf Unterschiede in der Zahlweise zurückgeführt werden.

In diesem Fall erhalten wir aus den 10 Simulationen einen Mittelwert der Ablaufwerte von 11.561,56 EUR, welcher eine maßgebliche Jahresrendite in der Höhe von 1,53% ergibt.

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	10.714,79	11.561,56	13.274,82
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,75%	1,53%	2,92%

Tabelle 5.1.11: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise am Ende der Ansparphase

Die Höhe der Jahresrendite des Mittelwertes liegt auch in diesem Fall höher als der derzeit gültige garantierte Rechnungszins für klassische Lebensversicherungen. Das Minimum der Vertragswerte nach 20 Jahren Ansparphase entspricht einer Jahresrendite von 0,75%. Das heißt also, dass das Ergebnis der Simulation im schlechtesten Fall unter der seit dem 01.01.2016 geltenden garantierten Verzinsung von 1% liegt.

Die folgende Abbildung stellt die 10 Simulationen als Boxplot dar. Anhand des Bildes ist der Mittelwert für alle Jahre gut zu erkennen.

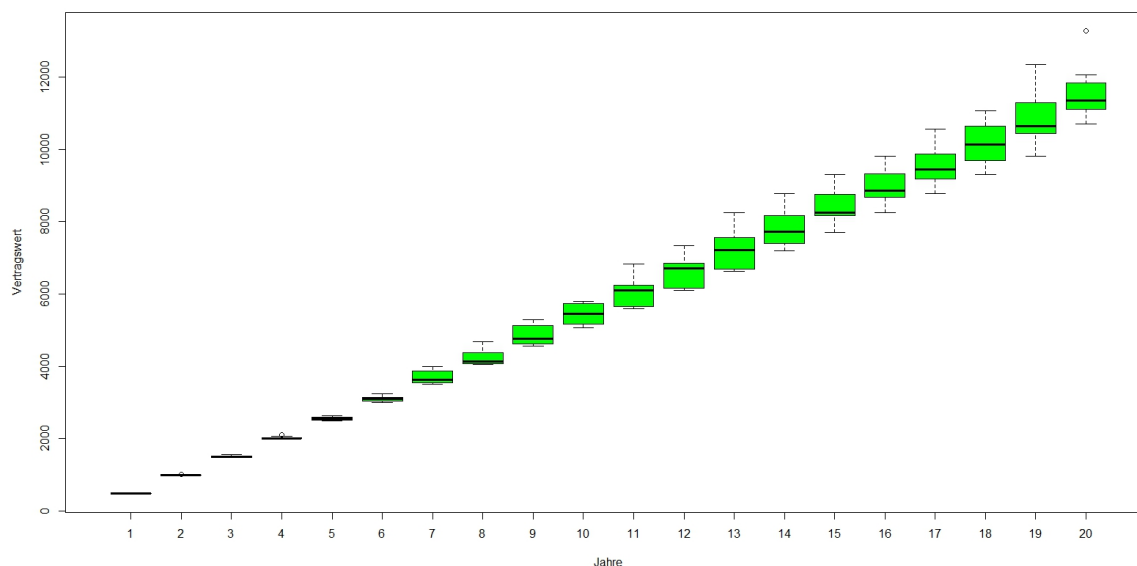


Abbildung 5.1.10: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise

Des Weiteren lässt sich aus der Grafik 5.1.10 ablesen, dass das Maximum in der Höhe von 13.274,82 EUR ein Ausreißer ist und daher einen einzelnen Punkt im Boxplot darstellt. Als Ausreißer werden die Werte gezeichnet, welche mehr als das 1,5-fache des Interquartilabstands vom Median abweichen.

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Konfidenzniveau von 95% ist bei 10 Simulationen für gemischte Veranlagung und laufender Zahlweise:

$$[11.102, 05; 12.021, 08]$$

Bei 10.000 Simulationen erhalten wir folgende Ergebnisse:

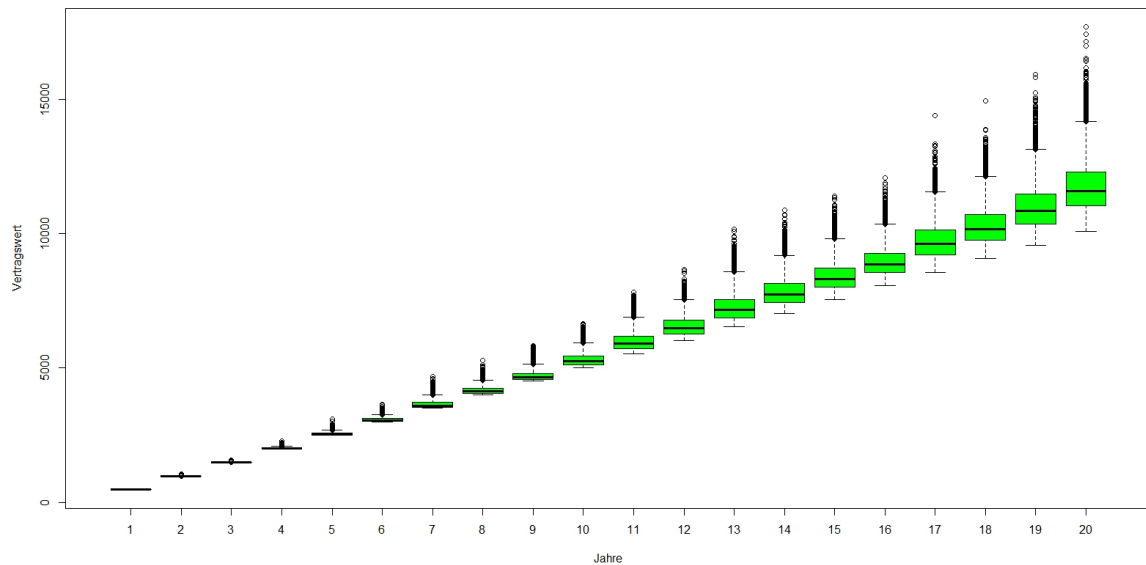


Abbildung 5.1.11: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise mit 10.000 Simulationen

Hier ergibt sich als Mittelwert der Ablaufswerte nach 20 Jahren Ansparphase 11.736,93 EUR. Der Mittelwert wird, anders als bei Einmalerlägen, mit der Anzahl der Simulationsläufen höher.

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Konfidenzniveau 95% bei 10.000 Simulationsläufen ist deutlich kleiner als bei 10 Läufen:

$$[11.718, 40; 11.755, 46]$$

Wir können davon ausgehen, dass der Wert des Mittelwertes nach 20 Jahren zwischen 11.718,40 EUR und 11.755,46 EUR liegt.

Zum Vergleich betrachten wir erneut die Wertentwicklung bei reiner Indexpartizipation. Das heißt, dass der Kunde sich jedes Jahr kontinuierlich mit 100% seiner Bezugsgröße für die Teilnahme an der Entwicklung des Aktienindex entscheidet.

Die Simulation liefert für diesen Fall folgendes Ergebnis:

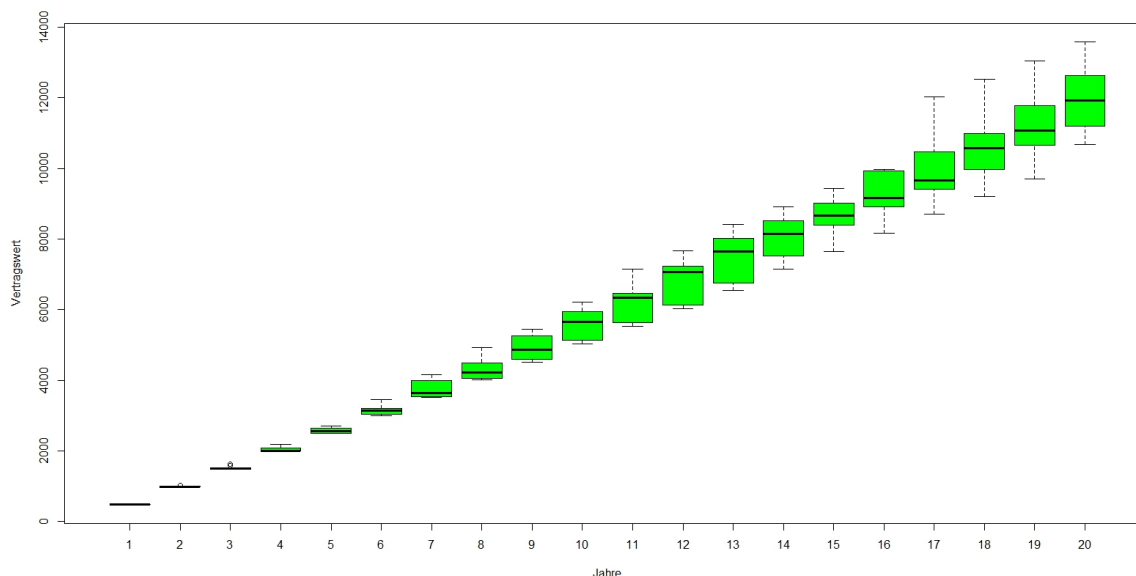


Abbildung 5.1.12: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation

Bei dieser Analyse erhalten wir ein ähnliches Ergebnis wie bei Verträgen mit Einmalzahlung, wo die Indexpartizipation aus Kundensicht vorteilhafter erscheint als die gemischte Veranlagung. Auch in diesem Fall ist der Mittelwert der prämienpflichtigen Vertragswerte nach 20 Jahren und 100% Indexpartizipation höher als bei der Mischung aus sicherer Verzinsung und Veranlagung am Kapitalmarkt. Somit wäre die Wahl einer reinen Indexpartizipation profitabler.

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	10.683,15	12.040,24	13.574,53
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,72%	1,94%	3,14%

Tabelle 5.1.12: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise und 100% Indexveranlagung am Ende der Ansparphase

Die Höhe der berechneten Rendite für den Mittelwert liegt auch hier über der Garantieverzinsung von 1%. Beim Vergleich mit der gemischten Veranlagung sieht die Entwicklung bei der reinen Indexpartizipation besser aus. Eine genauere Aussage können wir später beim Vergleich von 10.000 Simulationsläufen treffen.

In diesem Fall erhalten wir folgendes Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Niveau 95%:

$$[11.424, 0712.656, 42]$$

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00
2	1012.90	980.00	980.00	980.00	980.00	980.00	998.95	980.00	990.88	980.00
3	1517.90	1485.00	1516.77	1485.00	1485.00	1485.00	1503.95	1572.46	1629.16	1485.00
4	2022.90	1990.00	2021.77	1990.00	1990.00	1990.00	2137.64	2077.46	2193.41	1990.00
5	2527.90	2540.21	2598.64	2565.30	2495.00	2495.00	2642.64	2705.40	2698.41	2495.00
6	3032.90	3045.21	3451.61	3074.57	3000.00	3217.55	3202.57	3210.40	3203.41	3000.00
7	3537.90	3550.21	4155.74	3579.57	3505.00	3982.66	4066.96	3715.40	3845.39	3505.00
8	4042.90	4055.21	4660.74	4084.57	4010.00	4487.66	4931.78	4220.40	4467.29	4213.60
9	4622.25	4560.21	5165.74	4589.57	4515.00	4992.66	5436.78	4725.40	5446.59	5249.03
10	5127.25	5065.21	5780.84	5533.04	5020.00	6214.63	5941.78	5242.63	5951.59	5754.03
11	5632.25	5570.21	6285.84	6408.78	5525.00	6719.63	6446.78	5747.63	6469.02	7155.26
12	6137.48	6075.21	7139.87	7148.26	6030.00	7224.63	7506.96	6252.63	6974.02	7660.26
13	6642.48	6819.63	7644.87	7653.26	6535.00	7729.63	8011.96	6757.63	8412.27	8165.26
14	7147.48	7324.63	8149.87	8158.26	7902.82	8234.63	8516.96	7522.72	8917.27	8670.26
15	7652.48	8401.86	8654.87	8663.26	8447.95	8739.63	9021.96	8027.72	9422.27	9175.26
16	8157.48	8906.86	9159.87	9168.26	8952.95	9975.03	9526.96	8559.50	9927.27	9963.07
17	8694.56	9411.86	9664.87	9673.26	9457.95	12028.15	10031.96	9087.75	10731.59	10468.07
18	9199.56	10414.74	10721.41	10178.26	9962.95	12533.15	10943.52	9592.75	11236.59	10995.52
19	9704.56	10919.74	11226.41	10683.26	10467.95	13038.15	11785.37	10648.30	12533.92	11500.52
20	10683.15	11424.74	11731.41	11188.26	12112.60	13543.15	12365.37	11153.30	13574.53	12625.94

Tabelle 5.1.13: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise und reiner Indexpartizipation

Um eine genauere Aussage über die Resultate treffen zu können, wird die Anzahl der Simulationen erneut auf 10.000 erhöht.

Bei reiner Indexveranlagung werden die Vertragswerte in der Abbildung 5.1.13 dargestellt.

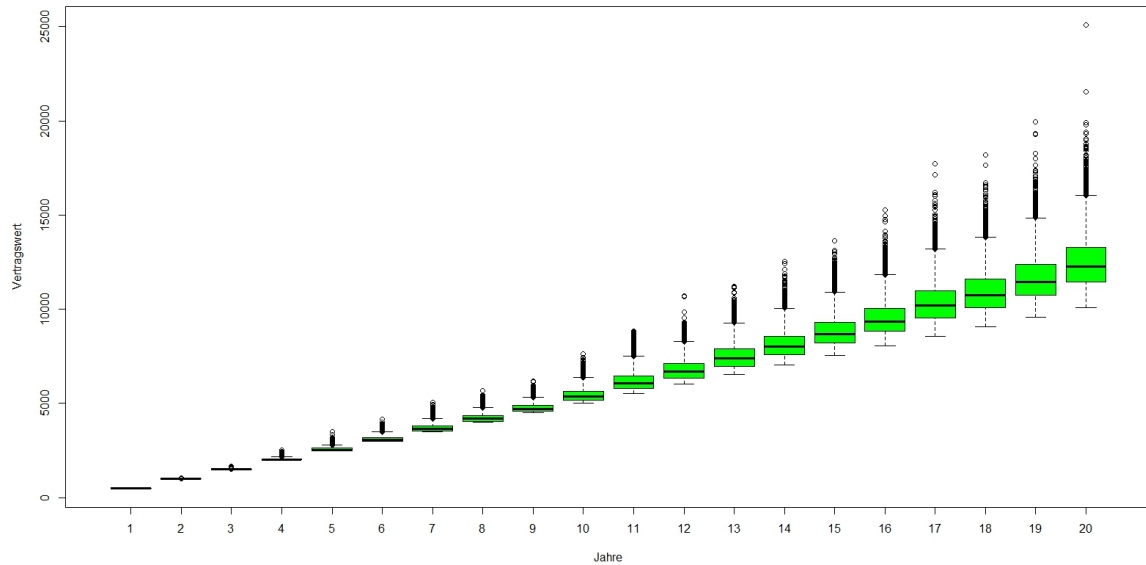


Abbildung 5.1.13: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation mit 10.000 Simulationen

Die 10.000 Simulationsläufe ergeben folgendes Konfidenzintervall für den Mittelwert zu einem Konfidenzniveau von 95%:

$$[12.468, 93; 12.524, 24]$$

Aus der Perspektive des Versicherungsnehmers wäre die gemischte Veranlagung sowohl bei 10, als auch bei 10.000 Simulationen eine schlechtere Entscheidung.

Als drittes Beispiel wird die durchgehende Wahl der sicheren Verzinsung untersucht.

Die Abbildung 5.1.14 stellt die Vertragsentwicklung während der Anspardauer von 20 Jahren in einem Boxplot dar.

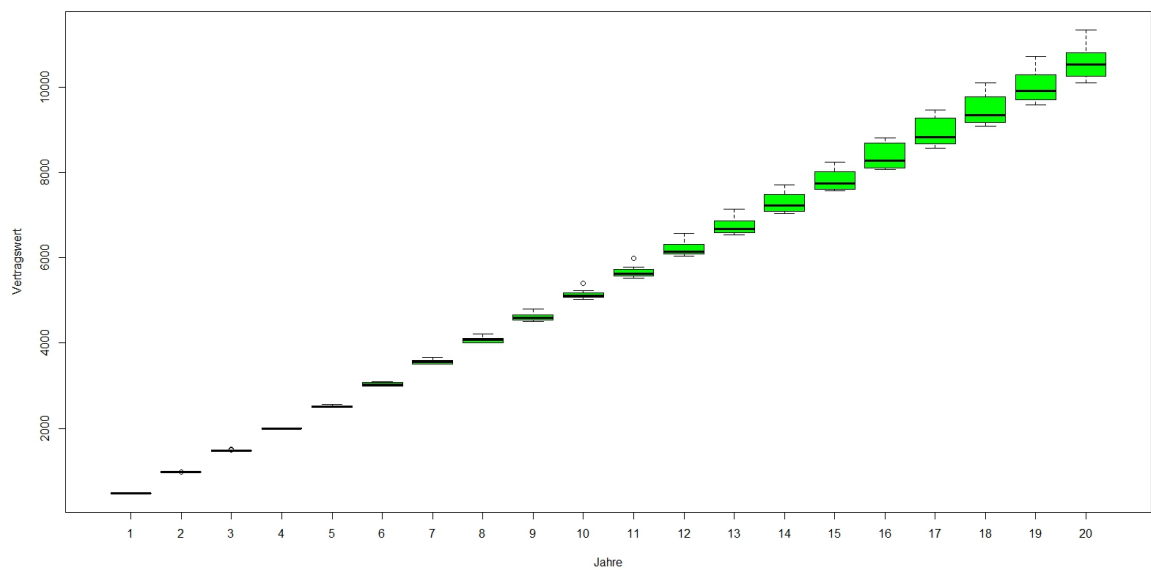


Abbildung 5.1.14: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung

Im Vergleich mit den Beispielen der gemischten Veranlagung und reiner Indexpartizipation, liegt der Mittelwert von 10.593,61 EUR hier niedriger und somit erhalten wir auch eine geringere Jahresrendite als bei den vorherigen Analysen.

	Minimum	Durchschnitt	Maximum
Vertragswert in EUR	10.098,21	10.593,61	11.328,96
maßgebliche konstante Jahresrendite	0,13%	0,63%	1,32%

Tabelle 5.1.14: Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung am Ende der Ansparphase

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Konfidenzniveau 95% bei der abschließlichen sicheren Veranlagung sieht wie folgt aus:

$$[10.318,94; 10.868,28]$$

Jahr	Simulationen									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00	475.00
2	980.00	980.00	980.00	982.93	983.63	980.00	980.00	980.00	980.00	980.00
3	1485.00	1486.98	1485.00	1506.57	1498.78	1485.00	1485.00	1485.00	1487.08	1485.00
4	1990.00	2019.66	1990.00	2018.55	2018.59	1990.00	1990.00	1990.00	2007.35	1990.00
5	2495.00	2557.84	2495.00	2542.42	2534.92	2495.00	2518.54	2495.00	2520.87	2495.00
6	3007.63	3086.65	3000.00	3094.27	3087.75	3000.00	3067.79	3000.00	3038.94	3000.00
7	3546.70	3591.65	3526.43	3671.67	3627.33	3505.00	3593.80	3505.00	3559.82	3505.00
8	4085.90	4096.65	4054.26	4215.64	4132.33	4010.00	4111.05	4010.00	4064.82	4010.00
9	4644.53	4601.65	4566.89	4796.96	4658.54	4515.00	4659.91	4515.00	4596.00	4539.89
10	5185.07	5106.65	5071.89	5400.86	5182.12	5020.00	5232.10	5020.00	5101.00	5079.87
11	5727.22	5620.38	5576.89	5991.51	5736.76	5540.55	5778.18	5525.00	5617.10	5584.87
12	6232.22	6125.38	6081.89	6566.79	6309.91	6045.55	6358.26	6030.00	6153.41	6089.87
13	6737.22	6699.41	6586.89	7133.28	6865.75	6550.55	6958.45	6535.00	6666.44	6594.87
14	7242.22	7285.61	7091.89	7702.92	7474.89	7055.55	7633.44	7040.00	7199.04	7099.87
15	7757.78	7987.36	7634.09	8212.81	8015.21	7560.96	8238.90	7577.92	7723.30	7604.87
16	8301.20	8685.34	8232.19	8757.43	8531.89	8065.96	8815.55	8082.92	8232.11	8109.87
17	8806.65	9271.84	8737.19	9379.48	9036.89	8570.96	9460.43	8587.92	8845.16	8665.88
18	9345.71	9776.84	9242.19	9970.38	9541.89	9075.96	10094.24	9137.70	9350.16	9170.88
19	9969.74	10293.21	9747.19	10579.25	10106.95	9580.96	10720.80	9702.91	9862.71	9675.88
20	10647.99	10798.21	10252.19	11307.59	10636.67	10098.21	11328.96	10264.81	10420.56	10180.88

Tabelle 5.1.15: Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung

Bei der Simulation mit 10.000 Pfaden wird versucht, einen „besseren“ Mittelwert zu bestimmen. Der „wahre“ Wert könnte allerdings nur bei unendlichen Simulationsläufen bestimmt werden. Bei der erhöhten Anzahl der Simulationen wird ein Mittelwert von 10.463,61 EUR berechnet, der niedriger ist als bei gemischter Veranlagung oder bei reiner Indexveranlagung.

Im Vergleich der drei Veranlagungsstrategien stellt sich die Index-Veranlagung als die ertragreichste Variante heraus.

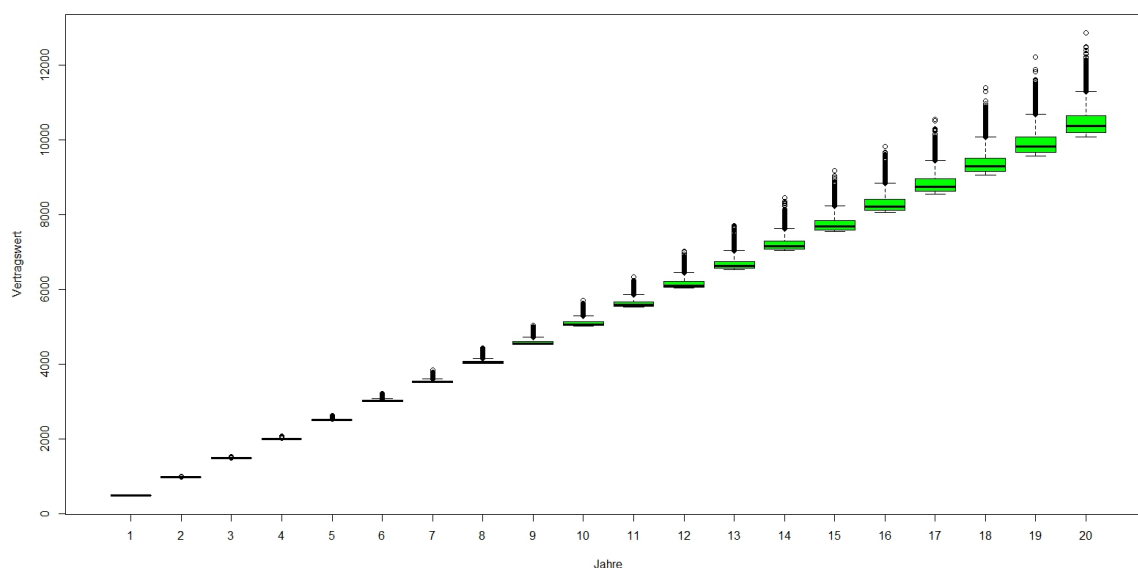


Abbildung 5.1.15: Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung mit 10.000 Simulationen

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Konfidenzniveau von 95% nach 10.000 Simulationen ist

$$[10.456, 75; 10.470, 48]$$

Nach diesem Ergebnis der beobachteten Simulation können wir feststellen, dass die ausschließliche Wahl der sicheren Veranlagung auch bei prämienpflichtigen Verträgen die niedrigsten Vertragswerte nach 20 Jahren Anspardauer liefert.

Zum Schluss werden wir die prämienpflichtigen Select-Produkte mit prämienpflichtigen klassischen Rentenprodukten vergleichen. Dafür betrachten wir die Abbildungen 5.1.16 und 5.1.17.

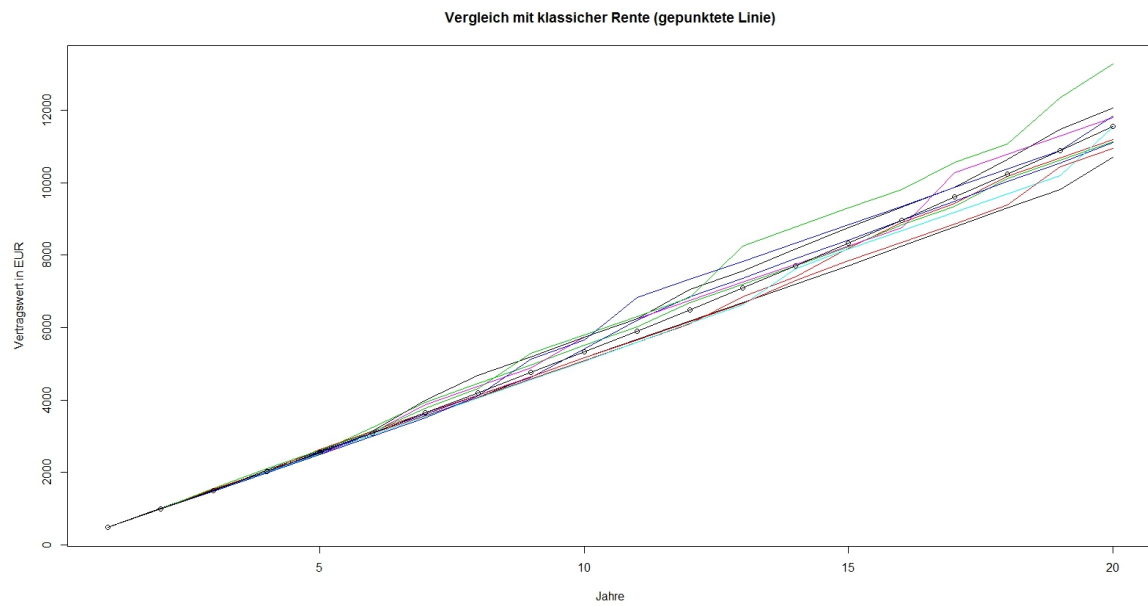


Abbildung 5.1.16: Vergleich Select-Produkt und klassische Rentenversicherung mit laufender Zahlweise

Nun wollen wir den Vertragsverlauf bei ausschließlicher Indexveranlagung betrachten und mit einem klassischen Rententarif vergleichen.

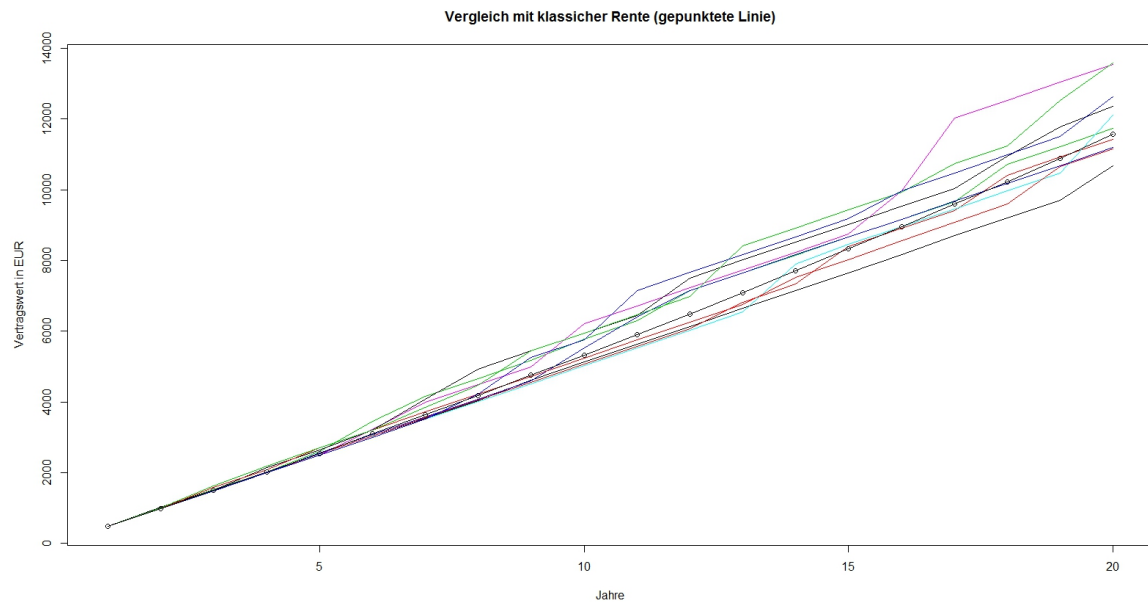


Abbildung 5.1.17: Vergleich Select-Produkt und klassische Rentenversicherung mit laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation

Bei Verträgen mit laufender Zahlweise sind die Vorteile von Select-Produkten nicht klar aus den Abbildungen 5.1.16 und 5.1.17 ablesbar. In beiden Fällen stellt sich die klassische,

prämienpflichtige Rentenversicherung für Versicherungsnehmer mittelmäßig im Vergleich zum Select-Vorsorgekonzept mit jährlicher Zahlweise heraus.

Bei 100% Indexpartizipation während der gesamten Laufzeit entwickelt sich die Select-Versicherung in den meisten Fällen besser als eine klassische Rente, dennoch gibt es Pfade, bei denen der Vertragswert nach der Ansparphase niedriger ist als bei dem klassischen Produkt mit 1% Garantieverzinsung. Bei der gemischten Veranlagung treten die oben genannten Einzelfälle häufiger ein. An der Abbildung 5.1.16 wird deutlich, dass eine gut überlegte Kundenentscheidung bei der Wahl der Veranlagung bei Select-Produkten eine große Auswirkung auf die Entwicklung des Vertragswertes hat.

5.2 Zusammenfassung der Ergebnisse aus Kunden und Unternehmenssicht

Als Fazit der Analyse der Simulation können wir festhalten, dass das Konzept des Select-Produktes aus Kundensicht sich in vielen Fällen wirtschaftlich besser herausstellt als die klassische Rentenversicherung.

Eine Gegenüberstellung der Höhe der ermittelten Jahresrenditen aus den Tabellen 5.1.2, 5.1.5, 5.1.7, 5.1.11, 5.1.12 und 5.1.14 fundiert die vorige Behauptung. Die Mittelwerte der Szenarien liegen in den beobachteten Fällen über der am Versicherungsmarkt üblichen Garantieverzinsung.⁶

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens stellt sich das Select-Produkt auch als vorteilhaft heraus. Durch die Höhe des beim Produktdesign gewählten garantierten Rechnungszinssatzes von 0% benötigt der Versicherer nach Solvency II Bestimmungen weniger Eigenkapital.

In der Studie *Participating Life Insurance Contracts under Risk Based Solvency Frameworks: How to increase Capital Efficiency by Product Design* durchgeführt von Reuß, Ruß und Wieland⁷ wurde die Berechnung des Solvency Risk Capitals für drei verschiedene Produktkategorien durchgeführt. Durch ihre Analysen konnte auch belegt werden, dass Select-Produkte, welche zur Kategorie Alternativprodukt 1 gehören, aus Unternehmenssicht kapitaleffizient sind.

Produktkategorie	Traditionell	Alternativ 1	Alternativ 2
PVFP (basis)	3,63%	4,24%	4,25%
PVFP (stress)	0,90%	2,58%	2,60%
Δ PVFP	2,73%	1,66%	1,65%

Tabelle 5.2.1: Veränderung des PVFP im Zinsstress (Quelle: [18], S. 27)

⁶2016: 1%

⁷Siehe [18]

In der Tabelle 5.2.1 ist eine Veränderung des PVFP⁸ im Zinsstress zu sehen. Diese Änderung ist bei den beiden untersuchten Alternativprodukten, welche im Kapitel 2.2 genau beschrieben werden, viel geringer als bei dem sogenannten traditionellen Produkt mit garantiertem Rechnungszins. Da sich aus Δ PVFP die Höhe der Kapitalanforderung unter Solvency II ableiten lässt, ist das Solvenzkapital bei den Alternativprodukten mehr als 1% geringer.

5.3 Zukunft der Produktentwicklung

Um Lebensversicherungsprodukte auch in der Zukunft verkaufen zu können, ist bei der Produktentwicklung Kundenorientierung mehr als jemals zuvor gefragt.

Select-Produkte sind ein Schritt in die richtige Richtung, da sie höhere Renditen als klassische Rentenversicherungen bieten aber durch das Lock-In Verfahren dennoch die Beiträge der Kunden abzüglich Kosten sichern.

Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung von Select-Produkten besteht darin, die Kosten erst aus dem erwirtschafteten Gewinn abzuziehen. Somit bleibt den Kunden bei schlechterer Entwicklung mehr am Versicherungskonto und das Versicherungsunternehmen verdient bei einer höheren Rendite mehr an Kosten.

Als eine flexible Alternative könnten verschiedene Indexarten zur Wahl angeboten werden. Somit würde bei einer schlechteren Entwicklung des gewählten Aktienindex, wie zum Beispiel EURO STOXX 50, nicht nur die Wahl der sicheren Verzinsung zur Verfügung stehen, sondern auch ein Index, wodurch Versicherungsnehmer für die Zwischenzeit nicht auf die Chancen des Kapitalmarktes verzichten müssten.

⁸PVFP=Present Value of Future Profits

Kapitel 6

Schlussfolgerung

Ein strategisch gut positioniertes Versicherungsunternehmen muss sich mit der Komplexität des Kapitalmarktes befassen.

Nur so ist es möglich in der derzeit herrschenden Niedrigzinsphase weiterhin Gewinne zu erwirtschaften und Neuverträge abschließen zu können.

Die Änderungen der gesetzlichen Richtlinien, wie zum Beispiel durch Solvency II oder VAG-Neu, stellen in der heutigen Zeit eine weitere Herausforderung dar.

Diese Arbeit hat aufgezeigt, dass durch richtige Produktentwicklung sowohl die Kundenattraktivität als auch die gesetzlichen Rahmenbedingungen leichter erfüllt werden können.

Im Fokus der Analyse ist das Konzept von Select-Produkten gestanden. Es konnte aus den Ergebnissen der Simulation gezeigt werden, dass solche Versicherungsverträge nicht nur weniger Solvenzkapital benötigen, wie schon von Reuß, Ruß und Wieland veröffentlicht, sondern auch für Kunden eine gute Investitionsmöglichkeit bieten.

Die Ergebnisse aus der Simulation haben aufgezeigt, dass die Vertragswertentwicklung beim Select-Vorsorgekonzept stark von der Wahl der Anlagestrategie abhängt. Die Entscheidung über die jährliche Aufteilung zwischen sicherer Verzinsung und Indexpartizipation sollte auch immer im Kontext der jeweiligen Situation am Kapitalmarkt getroffen werden. Des Weiteren ist bei der Wahl der Aufteilungsquote die eigene Risikobereitschaft des Kunden ausschlaggebend. Die Wahl der Anlagenstrategie kann nicht immer rational begründet werden. Aus diesem Grund spielen Erkenntnisse der Verhaltensökonomie eine zusätzliche Rolle bei Select-Produkten, welche in einer weiterführenden wissenschaftlichen Arbeit aus Sicht der verhaltensorientierten Finanzmarkttheorie untersucht werden könnten.

Abbildungsverzeichnis

2.1.1	Entwicklung des Rechnungszinssatzes in Österreich	11
3.2.1	Schematische Darstellung der Vertragsentwicklung eines „Select-Produktes“ bei laufender Beitragszahlung (Quelle: R+V-Indexinvest)	21
4.1.1	$\Phi(x)$ ist der schattierte Bereich der Glockenkurve	23
4.1.2	Der Euribor ist auf einem Rekordtief der letzten 10 Jahre (Quelle: www.bankdirekt.at)	27
4.2.1	Simulation der Zinssätze mittels Vasicek-Modell	33
4.2.2	Simulation der Indexentwicklung	35
4.2.3	Darstellung des Konfidenzintervalls	46
5.1.1	Boxplot mit Antennen und Extremwerten (Quelle: Wikipedia - Boxplot	48
5.1.2	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise . .	50
5.1.3	Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalerlag .	52
5.1.4	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise und 100% Indexpartizipation	53
5.1.5	Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalerlag bei reiner Indexpartizipation	55
5.1.6	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei einmaliger Zahlweise und sicherer Verzinsung	56
5.1.7	Vertragswertentwicklung bei 10.000 Simulationsläufen für Einmalerlag bei sicherer Veranlagung	58
5.1.8	Gegenüberstellung der Vertragsentwicklung von Select-Produkten mit 100% Indexpartizipation und klassischen Renten bei einmaliger Zahlweise	59
5.1.9	Gegenüberstellung der Vertragsentwicklung von Select-Produkten und klassischen Renten bei einmaliger Zahlweise	59
5.1.10	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise . . .	62
5.1.11	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise mit 10.000 Simulationen	63
5.1.12	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation	64

5.1.13	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation mit 10.000 Simulationen	66
5.1.14	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung	67
5.1.15	Vertragsentwicklung von Select-Produkten bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung mit 10.000 Simulationen	69
5.1.16	Vergleich Select-Produkt und klassische Rentenversicherung mit laufender Zahlweise	70
5.1.17	Vergleich Select-Produkt und klassische Rentenversicherung mit laufender Zahlweise und 100% Indexpartizipation	70

Tabellenverzeichnis

3.1.1	Vergleich von Indexpolicen am Markt (Quelle: [13], S. 18)	16
4.2.1	Parameter des Vasicek-Modelles	32
4.2.2	Parameter für die Modellierung der Indexentwicklung	34
4.2.3	Berechnung des Caps	39
4.2.4	Funktionswerte im ersten Jahr	39
4.2.5	Parameter für Berechnung der Zinssätze	40
4.2.6	Parameter der Vertragswertentwicklung bei Einmalerlag	42
4.2.7	Parameter der Vertragswertentwicklung bei laufender Zahlweise	44
5.1.1	Aufteilung zwischen Indexpartizipation und sicherer Verzinsung	49
5.1.2	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase	49
5.1.3	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung	51
5.1.4	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei 10.000 Simulationen	52
5.1.5	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei 100% Indexpartizipation	53
5.1.6	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung und 100% Indexpartizipation	54
5.1.7	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite am Ende der Ansparphase bei sicherer Veranlagung	56
5.1.8	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten bei Einmalzahlung und sicherer Veranlagung	57
5.1.9	Vordefinierte Eigenschaften des Vertrages bei laufender Zahlweise	60
5.1.10	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise	61
5.1.11	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise am Ende der Ansparphase	62
5.1.12	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise und 100% Indexveranlagung am Ende der Ansparphase	64

5.1.13	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise und reiner Indexpartizipation	65
5.1.14	Die Höhe der maßgeblichen Jahresrendite bei laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung am Ende der Ansparphase	67
5.1.15	Resultat der Simulation der Vertragswertentwicklung von Select-Produkten laufender Zahlweise und sicherer Veranlagung	68
5.2.1	Veränderung des PVFP im Zinsstress (Quelle: [18], S. 27)	71

Literaturverzeichnis

- [1] Aktuarvereinigung Österreichs. Leitfaden zur Bilanzierung nach IAS/US-GAAP in österreichischen Versicherungsunternehmen. http://www.avoe.at/pdf/Leitfaden_1.pdf, 11–05–2001.
- [2] Maria Alexandrova, Alexander Bohnert, Nadine Gatzert, und Jochen Russ. *Innovative Equity-Linked Life Insurance Based on Traditional Products: The Case of Select-Products*. Friedrich Alexander- Universität Erlangen-Nürnberg, 2015.
- [3] AXA. Relax Rente Comfort. https://www.axa.de/site/axade/get/documents/axade/AXA.de_Dokumente_und_Bilder/Privatkunden/Altersvorsorge/Relax-Rente/Dokumente/PKI-Relax-Rente-Comfort.pdf, 2015.
- [4] Allianz Deutschland. *Versicherungskonzept IndexSelect - FAQ - Die häufigsten Fragen und Antworten*. Allianz Deutschland, 2012.
- [5] Finanzen.at. Euro Stoxx 50. http://www.finanzen.at/index/Euro_Stoxx_50, 11–09–2015.
- [6] FMA. Guideline zur Berechnung der zukünftigen Gewinnbeteiligung unter QIS 5. http://www.fma.gv.at/typo3conf/ext/dam_download/secure.php?u=0&file=1914&t=1344804131&hash=27351588cdfce300c2201805b647ec6d, 2014.
- [7] FMA. Berechnungsmethode des Höchstzinssatzes. <https://www.fma.gv.at/de/unternehmen/versicherungsunternehmen/hoechstzinssatz.html>, 25–09–2014.
- [8] Lutz Hahnenstein, Klaus Röder, und Sascha Wilkens. *Die Black-Scholes Optionspreisformel - Eine Herleitung mit Hilfe des Prinzips der risikoneutralen Bewertung*. Wirtschaftswissenschaftliches Studium : WiSt - Zeitschrift für Studium und Forschung, 2001.
- [9] Handelsblatt. IWF sieht Krise für Lebensversicherer heraufziehen. <http://www.handelsblatt.com/finanzen/vorsorge/versicherung/niedrigzins-iwf-sieht-krise-fuer-lebensversichererheraufziehen/11642132.html>, 15–04–2015.
- [10] Andreas Handl. *Einführung in die Statistik mit R*. Universität Bielefeld.

- [11] Achim Klenke. *Mathematik der Finanzmärkte*. Johannes Gutenberg - Universität Mainz, 2005.
- [12] Emanuel Lampert. Lebensversicherung: FMA schnürt umfangreiches Paket. <http://www.versicherungsjournal.at/versicherungen-und-finanzen/lebensversicherung-fma-schnuert-umfangreiches-paket-15764.php?vc=newsletter&vk=15764>, 11-09-2015.
- [13] Christian Möbius. *Überlegene Performance dank Haken und Ösen*. VALUE-Das Beratermagazin, 05/2015.
- [14] Anneliese Proissl. Schuldner können jubeln: Euribor erstmals negativ. <http://www.format.at/finanzen/schuldner-euribor-5615462>, 22-04-2015.
- [15] Thorsten Rheinländer. *Vorlesungsmitschrift: Höhere Lebensversicherungsmathematik*. TU Wien, WS 2015.
- [16] Jochen Ruß. *Produktstrategien für Lebensversicherer im schwierigen Umfeld*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften, 2013.
- [17] Jochen Ruß. *Die Klassische Versicherung in der Produktstrategie eines Lebensversicherers*. Handelsblatt, 2014.
- [18] Jochen Ruß, Andreas Reuß, und Jochen Wieland. *Participating Life Insurance Contracts under Risk Based Solvency Frameworks: How to increase Capital Efficiency by Product Design*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften, 2013.
- [19] Hanspeter Schmidli. *Einführung in die stochastische Finanzmathematik*. Mathematisches Institut der Universität zu Köln.